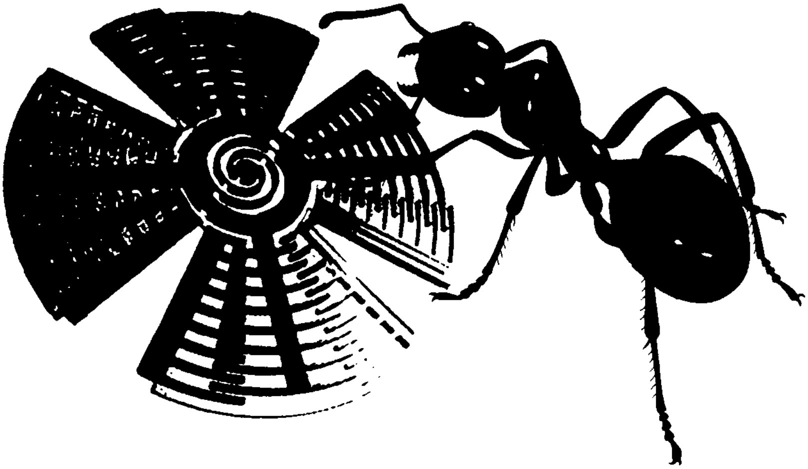
МИКРО-
МЕХАНИЧЕСКИЕ
ПРИБОРЫ



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
2007

ДЛЯ ВУЗОВ

В.Я. Распопов

МИКРО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Приборостроение" направления подготовки «Приборостроение»

МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
2007

УДК 531.383-11 (075.3)
ББК 34.9 я 73
Р24

Рецензенты:
кафедра «Автоматизированные комплексы систем
ориентации и навигации» Московского авиационного института
(Гос. техн. университет)
зав. каф. чл.-кор. РАН, д-р техн. наук, проф. Б.С. Алешин,
засл. деятель науки и техники РФ, лауреат Гос. премии СССР,
д-р техн. наук, проф. В.М. Суминов, д-р техн. наук, проф. В.А. Иванов,
д-р техн. наук, проф. К.В. Подмастерьев

Распопов В.Я.
Р24 Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.: ил.
ISBN 5-217-03360-6

Изложены терминология, классификация, конструкции и принципы работы микромеханических осевых и маятниковых акселерометров, датчиков давления и гироскопов LL-, LR- и RR-типов. Даны описание и расчет прямых (датчиков перемещений и деформаций) и обратных (датчиков сил и моментов) преобразователей в микромеханическом исполнении, схемы электронной обработки сигналов.

Приведены примеры электронного устранения ошибок микрогироскопов, в частности квадратурной; описана электронная частотная настройка режимов работы микрогироскопов. Рассмотрены конструктивные схемы и расчет упругих подвесов и мембран, динамика чувствительных элементов, включающая уравнения движения, передаточные функции, частотные характеристики и функциональные зависимости перемещений чувствительных элементов от измеряемой величины. Даны расчет газового и конструкционного демпфирования, теория и расчет измерительных цепей приборов прямого и компенсационного преобразований, а также основные погрешности измерений, примеры вычислений.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Приборостроение» направления подготовки «Приборостроение», а также может быть полезно аспирантам и инженерно-техническим работникам.

УДК 531.383-11 (075.3)
ББК 34.9 я73

ISBN 5-217-03360-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 3. ЭЛЕМЕНТНАЯ БАЗА МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ 143

Глава 4. ДИНАМИКА ЧЭ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ 215

Глава 5. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

АЦП	– анолого-цифровой преобразователь
ГЛИН	– генератор линейно изменяющегося напряжения
ИМ	– инерционная масса
ИПД	– интегральный преобразователь давления
ИС	– интегральная схема
КМГ	– камертонные микрогироскопы
КПД	– коэффициент полезного действия
МА	– микроакселерометры
МГ	– микрогироскопы
МДД	– микродатчики давления
МОЭМС	– микрооптоэлектромеханические системы
МСТ	– микросистемная технология
МЭМС	– микроэлектромеханические системы
ОК	– образцовая камера
ПАВ	– поверхностно-акустические волны
ПНЧ	– преобразователь «напряжение–частота»
ПП	– полупроводниковый преобразователь
РД	– режим движения
РЧ	– режим чувствительности
ЦМ	– центр масс
ЧЭ	– чувствительный элемент
ЧЭДА	– чувствительный элемент давления абсолютного
ЧЭДД	– чувствительный элемент давления дифференциального
ШИМ	– широтно-импульсный модулятор

ПРЕДИСЛОВИЕ

Перспективы современного приборостроения связаны с созданием приборов, обладающих малыми массой, габаритными размерами, энергопотреблением и себестоимостью при безусловном выполнении целевой функции с заданной точностью.

С 60-х годов XX столетия начались научно-технические разработки в области миниатюрных датчиков и исполнительных устройств различного назначения на базе кремния – основного материала микроэлектроники. К настоящему времени перечень применяемых материалов значительно расширился, но основным остается кремний. Единство материала и технологии микроэлектроники позволило создавать миниатюрные конструкции на одном кристалле, объединяющем чувствительные элементы, преобразующие и электронные компоненты, которые принято называть микроэлектромеханическими системами (МЭМС).

МЭМС – это система не только конструкций, но и технологических процессов (технологий), используемых для создания миниатюрных устройств. МЭМС определяет одно из перспективных направлений развития приборостроения XXI века, которое влечет за собой коренное изменение промышленных и потребительских изделий с беспрецедентным диапазоном применения. Наряду с термином "МЭМС", появившимся в США, в Европе бытует термин "микросистемная техника", а в Японии – "микромашины". В отечественной научно-технической литературе для обозначения микросистем, в составе чувствительных и (или) исполнительных устройств которых имеются механически подвижные элементы, применяется термин "микромеханические приборы". Отличительным признаком этих приборов является их применение в области измерения механических величин.

Настоящее учебное пособие посвящено наиболее динамично развивающимся микромеханическим измерительным приборам – акселерометрам, датчикам давления и гироскопам.

Измерение давления лежит в основе работы многих приборов: датчиков давления в различных магистралях (топливных, масляных, водяных и др.), датчиков внутривенного и артериального давления, высотомеров, вариометров, датчиков воздушной скорости и др.

Акселерометры и гироскопы относятся к классу инерциальных датчиков, диапазон применения которых весьма широк: от подушек безопасности и антиблокировочных автомобильных устройств до интегрированных со спутниковыми навигационными системами малогабаритных инерциальных навигационных систем, обеспечивающих определение параметров ориентации и координат летательных аппаратов, надводных и подводных аппаратов, наземных транспортных средств, роботов и др.

Издание написано на основе одноименных учебных пособий автора (первое издание – 2002 г., второе издание – 2004 г.), выпущенных малым тиражом, но, тем не менее, используемых в учебном процессе ряда высших учебных заведений (МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Орловский государственный технический университет, Саратовский государственный технический университет, Тульский государственный университет), а также находящихся в библиотечных фондах ряда предприятий.

Материал предыдущих изданий переработан с учетом полученных замечаний и дополнен. Приведено множество расчетных примеров, выполненных, за небольшим исключением, без привлечения ЭВМ, так как первоначальное изучение материала требует непосредственной вычислительной работы с цифровыми значениями величин и их размерностями.

Учебный материал изложен в логической последовательности, но каждая из глав при достаточном для ее изучения уровне подготовки может использоваться без связи с другими.

Первая глава дает полное представление о конструкциях и принципах работы микромеханических приборов, вторая содержит материал, необходимый для понимания технологических процессов их изготовления. В третьей главе, посвященной элементной базе, объединены материалы по упругим подвесам, преобразователям физических величин и электронике, которые изложены на примерах опубликованных схем. Четвертая глава содержит подробную методику вывода уравнений движения чувствительных элементов на базе уравнений Лагранжа второго рода, передаточные функции и особенности динамики чувствительных элементов микромеханических приборов. В пятой главе рассмотрены измерительные цепи и формирование выходных сигналов, а также их зависимость от структуры микромеханических приборов и внешних возмущений.

Автор признателен рецензентам, замечания которых способствовали улучшению содержания книги; благодарен сотрудникам кафедры "Приборы управления" ТулГУ д-ру техн. наук, проф. Ю.В. Иванову, канд. техн. наук, доц. В.В. Матвееву, аспирантам А.В. Никулину и В.В. Лихошерсту за помощь в подготовке некоторых материалов книги и ее техническом оформлении, а также старшему лаборанту Т.Н. Чучко, инженеру Е.Р. Кожуровой, магистранту С. В. Лепесину.

Постоянная поддержка моих мамы и жены сделала возможным завершение работы над книгой.

ВВЕДЕНИЕ

В отечественной литературе принята следующая иерархия (по восходящей) определений: датчик – прибор – система.

Измерительный датчик – устройство, которое вырабатывает информацию об изменении измеряемой физической величины, как правило в виде электрического сигнала. Устройство, вырабатывающее силу (момент), называется датчиком силы (момента) и может входить в состав измерительного датчика.

В иностранной, а теперь и в отечественной литературе устройство, которое преобразует электрический сигнал в движение, именуется актюатором. Актюатор может создать силу (момент), чтобы исполнить некоторую полезную функцию. Таким образом, датчик силы (момента) и актюатор – синонимы.

Процесс выработки информации или силы (момента) представляет собой преобразование одной формы сигнала или энергии в другую, осуществляемое преобразователями. Таким образом, датчик состоит из преобразователей, образующих измерительную или (и) силовую цепи. В то же время и сам датчик можно рассматривать и определять как преобразователь.

Измерительным прибором обычно называют устройство, которое помимо функции измерения может исполнять (все или частично) функции регистрации, отображения, хранения, передачи информации об измеренной физической величине. Современная схемотехника и элементная база наделяют датчики возможностями, переводящими их в понятие "приборы". По сути, измерительный датчик и измерительный прибор, вырабатывающие информацию об измерении одной и той же физической величины и имеющие одинаковые функциональные возможности, являются понятиями-синонимами.

Поэтому вполне допустимо называть приборы для измерения: давления – датчиками давления, влажности (гигрометры) – датчиками влажности, температуры (термометры) – датчиками температуры, ускорений (акселерометры) – датчиками ускорения, угловых перемещений в инерциальном пространстве (гироскопы) – гироскопическими датчиками углов и т.д.

В единую конструкцию могут быть объединены несколько измерительных датчиков, например температуры, влажности, давления. Очевидно, что название такой конструкции должно начинаться со слова "прибор".

Понятие "система" может относиться не только к совокупности приборов (датчиков), не связанных либо объединенных между собой информационными каналами, но и к совокупности отдельных компонентов, имеющих различную физическую природу (механическую, электронную и пр.), однако вместе выполняющих единую функциональную (измерительную) задачу. Таким образом, с позиций объединения (интегрирования) разнородных компонентов любой измерительный прибор (датчик) является системой.

Рассмотрим определения, относящиеся к микроприборам (микродатчикам), первые исследования по которым были начаты в США; там же возникла аббревиатура МЭМС – микроэлектромеханические системы. МЭМС – это интегрированные системы с размерами от нескольких микрометров до миллиметров, которые объединяют в себе механические и электрические электронные компоненты.

МЭМС состоит из механических микроструктур, микродатчиков, микроактюаторов и микроэлектроники, объединяемых на одном кремниевом чипе (рис. В.1). Изготовление микроструктур возможно также из других материалов.

Микродатчики обнаруживают изменения в окружающей систему среде, измеряя механические, тепловые, магнитные, химические или электромагнитные

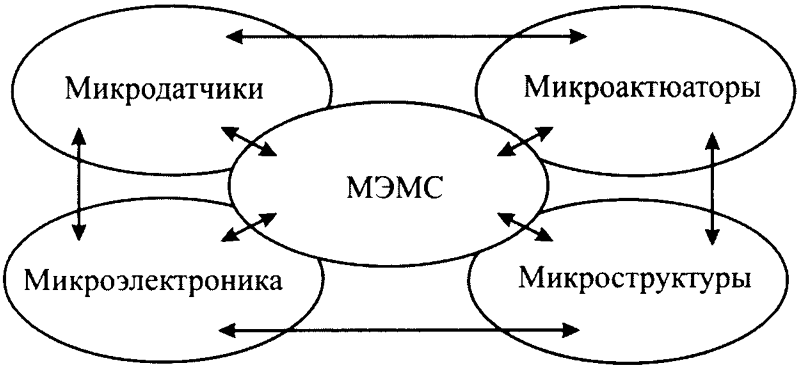


Рис. В.1. Взаимосвязь МЭМС-компонентов

величины. Микроэлектроника обрабатывает эту информацию и сигнализирует микроактюаторам, чтобы они создали некоторую форму изменений по отношению к окружающей среде либо в самой системе.

В то время как электронные (электрические) устройства изготавливаются по технологии интегральных схем (ИС), механические компоненты для изготовления требуют сложных манипуляций с кремнием и другими подложками, в том числе микромеханической обработки. Если ИС предназначены для эксплуатации электрических свойств кремния, то в МЭМС используются или механические свойства кремния, или его электрические и механические свойства.

Помимо аббревиатуры МЭМС в Европе бытует аббревиатура МСТ – микросистемная технология, а в Японии применяется термин "микромашины".

Следует подчеркнуть, что в соответствии с иностранными источниками, МЭМС – это не столько миниатюрные микросистемы, сколько промышленная технология, так же, как и МСТ, которая является подмножеством МЭМС. Это обстоятельство иллюстрируется рис. В.2, из которого видно, что комбинации компонентов электроники, механики и оптики позволяют создавать МЭМС, оптомеханические и оптоэлектрические микросхемы, а также микрооптоэлектромеханические системы (МОЭМС), которые являются подмножеством МСТ и вместе с МЭМС формируют новые области технологии.

Существуют значительные совпадения, но имеются и различия в терминах, относящихся к областям технологии и применения. В отечественной литературе, например, аббревиатура МСТ расшифровывается как "микросистемная техника". Для микросистем различного применения широко используется термин "интегральные датчики".

Общим термином для микросистем различного применения является "преобразователь", совокупность которых, объединенных в измерительные цепи, образует измерительные микроприборы, относящиеся к подмножеству МЭМС. Микроприбор (микродатчик) может использоваться в различных энергетических областях, которые характеризуются определенными физическими величинами. Некоторые из них приведены в табл. В.1.

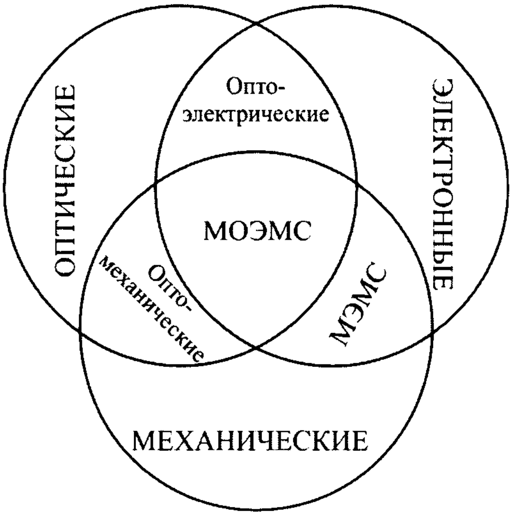


Рис. В.2. Комбинации МЭМС-компонентов

В соответствии с табл. В.1 можно выделить группы микроприборов (микродатчиков) для измерения механических, тепловых и т.д. величин. Элемент (компонент микроструктуры), реагирующий на изменение измеряемой физической величины, можно определить как первичный преобразователь, или чувствительный элемент (ЧЭ).

Как следует из табл. В.1, можно выделить три группы ЧЭ: механические, электронные и оптические – и определить микроприборы (микродатчики, интегральные датчики), выполненные по технологиям МЭМС, как микромеханические, микроэлектронные или микрооптические приборы. Существенным в этих определениях является принадлежность ЧЭ к одной из энергетических областей.

Таким образом, микромеханические приборы – это микроструктуры с сервисной электроникой, выполненные по технологии МЭМС с механически подвижным ЧЭ. К микромеханическим приборам

В.1. Энергетические области применения микроприборов

Энергетическая область	Физические величины
Механическая	Сила, давление, скорость, ускорение, положение
Тепловая	Температура, энтропия
Химическая	Концентрация, состав, скорость реакции
Оптическая	Электромагнитная интенсивность волны, фаза, длина волны, поляризация, коэффициент отражения, индекс преломления, коэффициент пропускания
Магнитная	Интенсивность поля, плотность потока, магнитный момент, проводимость
Электрическая	Напряжение, ток, нагрузка, сопротивление, емкость, поляризация

относятся: микроакселерометры, включая датчики углового положения (ЧЭ – пробная масса); микродатчики давления (ЧЭ – мембрана); микрогироскопы (ЧЭ – вибрирующая масса).

Некоторые из основных событий относительно короткой, но динамичной истории развития МЭМС представлены в табл. В.2.

Табл. В.2 далеко не полна, но все же отражает те события, значимость которых очевидна как для всей истории развития МЭМС, так и для стимуляции отечественных разработок в области микромеханики, особенно для навигационного применения.

Некоторые из областей использования микромеханических приборов (микроакселерометров – МА, микрогироскопов – МГ и микродатчиков давления – МДД) приведены в табл. В.3.

В дополнение к табл. В.3 следует заметить, что МЭМС-компоненты, в том числе микромеханические приборы, обладают большой коммерческой привлекательностью. К примеру, МА и МДД выпускают и продают ~50 фирм. За год их реализуеется ~100 млн, а прибыль от продажи составляет ~10 млрд долл. США. Ожидается двукратное увеличение продаж МЭМС-компонентов каждые два–четыре года.

Понятно, что развитие МЭМС, в том числе микромеханических приборов, тесно связано с областями их использования. Быстропрогрессирующей областью являются мобильные роботы гражданского и военного применения. Ожидалось, что в 2005 г. сумма продаж мобильных роботов должна была составить не менее 20 млрд. долл. США (итоговые данные отсутствуют).

Авиационная промышленность, не упомянутая в табл. В.3 в силу своей обширности, – та отрасль, где требования к датчикам и контрольно-измерительным и управляющим системам особенно высоки. Перечень физических величин, которые необходимо измерять, например, для контроля и управления двигательной установкой, значительно обширнее, чем в автомобиле. Нужно и существенно большее количество одноименных датчиков. Например, в зависимости от типоразмеров самолетов общее число только датчиков давления на одном самолете составляет 50...90 штук.

В Европе за 1996–2005 гг. должно было быть произведено 8000 гражданских самолетов (итоговые данные пока отсутствуют), т.е. одних лишь датчиков давления необходимо было более 500 тыс шт. Требования к массогабаритным характеристикам приборного оборудования в авиации весьма жесткие. Так как у МЭМС-компонентов в направлении миниатюризации в обозримом будущем не будет конкурентов, а их точность и эксплуатационные характеристики имеют устойчивую тенденцию к улучшению показателей, можно ожидать, и это уже сейчас наблюдается в части МА и МДД, прогрессирующего внедрения микромеханических приборов в авионику.

В заключение отметим следующее. Из-за высокой интеграции и междисциплинарной природы МЭМС трудно отделить проектирование устройства от его изготовления. Следовательно, высокий уровень знания производства необходим для проектирования МЭМС-устройства. Кроме того, значительные время и средства затрачиваются на создание опытного образца. Поскольку успешная разработка устройства требует физического и имитационного моделирования, важно, чтобы МЭМС-проектировщики имели доступ к соответствующим аналитическим инструментам. Поэтому более мощные инструменты имитационного и физического моделирования необходимы для точного прогнозирования поведения МЭМС-устройства.

В.2. История развития МЭМС

Год	События
1958	Появились кремниевые, коммерчески доступные средства измерений
1959	"В основании много места", – заявил Ричард Фейнман в Калифорнийском институте технологии и предложил 1000 долл. США тому, кто создаст электрический двигатель, меньший 1/64″
1961	Демонстрировался первый кремниевый датчик давления
1967	Изобретена поверхностная микромеханическая обработка. Фирма Westinghouse (США) создала резонансный полевой вентильный транзистор. Описано использование "жертвенного" материала, чтобы освободить микромеханические устройства от кремниевой подложки
1970	Демонстрировался первый кремниевый акселерометр
1979	Предложено первое микромеханическое струйное сопло
1982	Создан одноразовый датчик кровяного давления. Появилась первая публикация о кремнии как о конструкционном материале [26]. Разработана LIGA-технология (рентгенолитография, гальваника и формовка) для изготовления исполнительных компонентов микроприборов
1983	Впервые в СССР опубликован материал о разработке интегральных тензопреобразователей [5]
1988	Состоялась первая конференция по проблематике МЭМС
1992	Представлен многопользовательский процесс МЭМС (MUMPS), спонсируемый Управлением перспективных исследовательских программ (DARPA) (США)
	Предложен первый микромеханический шарнир
1993	Продан первый акселерометр, выполненный с использованием поверхностной микромеханической технологии (фирма США Analog Devices, ADXL50)
1994	Запатентовано глубокое реактивное ионное травление; Первая международная конференция по интегрированным навигационным системам (Санкт-Петербург, ЦНИИ "Электроприбор")
1995	Началось коммерческое использование микрогиросокопов. Активно развиваются БиоМЭМС; активизируются разработки в области микротехнологий в России, Украине и Белоруссии
1996	Опубликована статья, в которой намечены перспективы использования микроприборов для решения задач современной автономной навигации в России [19]
2000	Оптические МЭМС становятся коммерческой продукцией
2005	Российские разработчики заявили об опытных партиях микроакселерометров и микрогироскопов

В.3. Области применения микромеханических приборов

Отрасль	Область применения
Медицина	1. Оперативные и имплантируемые МДД. 2. Электрокардиостимуляторы с встроенными МА. 3. Интеллектуальные системы протезирования с функциями контроля (МА и МГ) за пространственным положением и перемещением исполнительных органов. 4. "Сенсорная" перчатка (пять МА на кончиках пальцев перчатки и один МА с обратной стороны руки) с программой обработки данных, позволяющая контролировать положение руки и каждого пальца
Энергетика	1. Системы контроля давления, расхода (МДД) и температуры теплоносителей и хладагентов. 2. Системы контроля за допустимыми уровнями вибрации и сейсмической активности на базе МА (особенно актуально для атомной энергетики). 3. Технологические роботы в атомной энергетике. Контроль за положением и скоростями перемещаемых объектов (МА и МГ), а также самодиагностика систем управления робота
Нефтяная и газовая промышленность	1. Навигационное обеспечение (МА и МГ, комплексированные с другими источниками информации) инклинометрии (контроль и управление бурением глубоких и сверхглубоких скважин; каротаж скважин). 2. Навигационное обеспечение систем контроля за состоянием геометрии трубопроводов на больших, в том числе трансконтинентальных расстояниях. 3. МДД и расходомеры на их основе, работающие в агрессивных средах 4. Вибродиагностика на базе МА состояния компрессоров на станциях перекачки нефтепродуктов
Автомобилестроение	1. Системы навигации на базе МА и МГ, комплексированных с другими источниками информации. 2. Системы безопасности на базе МА и МГ, исключающие занос автомобиля при торможении и обеспечивающие срабатывание подушек безопасности. 3. Контроль давления (МДД) в системах: топливной, смазочной, кондиционирования, в "интеллектуальных" шинах
Оборона	1. Системы пешеходной навигации (МА и МГ, коплексированные с другими источниками информации). 2. Системы навигации и стабилизации беспилотных управляемых малоразмерных летательных аппаратов на базе МА, МГ и МДД (высотомеров и датчиков скорости на их базе) и магнитных указателей курса (разведка, постановка электронных помех). 3. Системы управления и навигации боевыми наземными и подводными роботами. 4. Системы управления боеприпасами на базе МА и МГ, комплексированных с другими датчиками

Глава 1

КОНСТРУКЦИИ И ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

1.1. АКСЕЛЕРОМЕТРЫ

1.1.1. Основные определения

Акселерометры состоят из инерционной массы (ИМ), которая с помощью упругих элементов подвеса смонтирована в корпусе. Реализация выходного сигнала и принципа измерения обеспечивается преобразователями перемещений, деформаций, сил и электроникой. Конструктивный узел, включающий в себя ИМ и подвес с элементами крепления, можно определить как чувствительный элемент (ЧЭ) акселерометра.

По виду движений ИМ акселерометры делятся на осевые и маятниковые. В осевых акселерометрах конструкция упругого подвеса обеспечивает прямолинейное движение ИМ, а в маятниковых – угловое. Маятниковые акселерометры называют также угловыми, а иногда – балочными.

Так как ЧЭ акселерометра находится в поле сил тяжести, он может измерять углы наклона основания (объекта), на котором укреплен. Акселерометры, специально исполненные для измерения углов наклона, именуют наклономерами.

У акселерометра выделяют ось чувствительности и перпендикулярные к ней поперечные оси. Ось чувствительности – это ось, в направлении которой возможно перемещение ИМ, обусловленное конструкцией подвеса. Акселерометры, с одной осью чувствительности называют однокомпонентными. В одном корпусе могут быть установлены ЧЭ с разным направлением осей чувствительности (двух- и трехкомпонентные акселерометры).

Очевидно, что с помощью акселерометров возможно измерение линейного и углового ускорения. По виду измеряемого ускорения различают линейные и угловые акселерометры.

В линейных акселерометрах ось чувствительности параллельна вектору измеряемого ускорения. В акселерометрах для измерения углового ускорения она должна быть параллельна вектору линейного ускорения, являющегося следствием углового ускорения.

По принципу измерения акселерометры делятся на приборы прямого и компенсационного измерения (преобразования).

ЧЭ первых непосредственно передают информацию о действующем на него ускорении в виде перемещений ИМ или деформаций упругих элементов подвеса на вторичный преобразователь (перемещений или деформаций). В этом случае все погрешности измерительной цепи присутствуют в выходном сигнале акселерометра.

В акселерометрах компенсационного измерения сила, вызванная измеряемым ускорением и действующая на ИМ, частично или полностью (интегратор в контуре) уравновешивается с помощью цепи отрицательной обратной связи, реализующей силовую разгрузку (компенсацию) ЧЭ посредством выходного сигнала, поступающего на устройство компенсации (преобразователи силы, момента). В этом случае точность измерительной цепи зависит в основном от преобразователя силы (момента).

При использовании акселерометров следует иметь в виду, что перемещение ИМ определяется векторной суммой действующих на него внешних сил и сил инерции, включая поступательную силу инерции, центробежную и силу инерции

Кориолиса, определяемых поступательным ускорением и вращением неинерциальной системы отсчета относительно любой инерциальной. Очевидно, что при закреплении корпуса акселерометра на объекте, ускорение которого измеряется, система координат акселерометра в общем случае неинерциальная.

Основными характеристиками акселерометров являются чувствительность, диапазон измерений, полоса пропускания частот (по уровню 3 дБ), масштабный коэффициент, точность, быстродействие и др.

Точность преобразования ускорения в электрический сигнал акселерометрами определяется величинами смещения нуля, погрешностью полной шкалы (или чувствительности), а также температурным и временным дрейфом этих параметров. Важными составляющими погрешности являются также погрешности линейности (нелинейность) и поперечная чувствительность. Смещение нуля и чувствительность акселерометров при нормальных условиях корректируются в ходе изготовления. Остаточная погрешность может быть уменьшена путем калибровки и запоминания калибровочных констант в памяти микропроцессора. Калибровка акселерометра возможна двумя способами: на вибростенде с образцовым датчиком ускорения и с использованием силы тяжести.

Поперечная чувствительность характеризует способность датчика преобразовывать в электрический сигнал ускорение, направленное под углом 90° к оси чувствительности датчика. У идеального акселерометра поперечная чувствительность равна нулю.

От шума, содержащегося в выходном сигнале акселерометра, зависит разрешающая способность устройства, важная при определении ускорения малой величины. Предельное разрешение в основном определяется уровнем шума измерения, который включает в себя внешний фоновый шум и шум собственно датчика. Уровень шума непосредственно связан с шириной полосы пропускания частот датчика. Уменьшение последней путем включения фильтра низких частот на выходе датчика снижает уровень шума. Это улучшает отношение сигнал/шум и увеличивает разрешающую способность, однако вносит амплитудные и фазовые частотные искажения.

Линейные и угловые ускорения можно измерять как осевыми, так и маятниковыми акселерометрами.

1.1.2. Осевые микроакселерометры

Основным конструктивным узлом микроакселерометров (МА) являются ЧЭ, принципиальные схемы которых приведены на рис. 1.1. ЧЭ включает в себя ИМ *1*, упругие элементы *2* подвеса и опорную рамку (основание) *3*.

ЧЭ, представленные на рис. 1.1, *а*, *б*, имеют две пары упругих элементов, крестообразно расположенных вдоль осей *x*, *z*, начало которых (осей) находится в геометрическом центре пластин ИМ. ЧЭ по схеме 1.1, *б* может быть изготовлен с меньшей жесткостью подвеса в направлении оси, перпендикулярной к плоскости *xz*. Оси чувствительности этих ЧЭ совпадают с осью *y*, а подвесы ИМ могут быть определены как крестообразные.

ЧЭ, показанные на рис. 1.1, *в*, *г*, *д*, содержат по две пары упругих элементов. Упругие элементы каждой пары параллельны одной из осей *x*, *z* и расположены либо вдоль противоположных кромок пластин ИМ (рис. 1.1, *в*), либо параллельных кромкам (рис. 1.1, *г*, *д*). Эти подвесы могут быть названы *z*-образными. Между ними есть разница, определяемая местом соединения упругого элемента с пластиной ИМ. На рис. 1.1, *в*, *г* упругие элементы своими подвижными концами связаны с углами пластин ИМ (кососимметрично относительно геометрического центра пластин), а в схеме 1.1, *д* – с серединами пластин (симметрично относительно геометрического центра пластины).

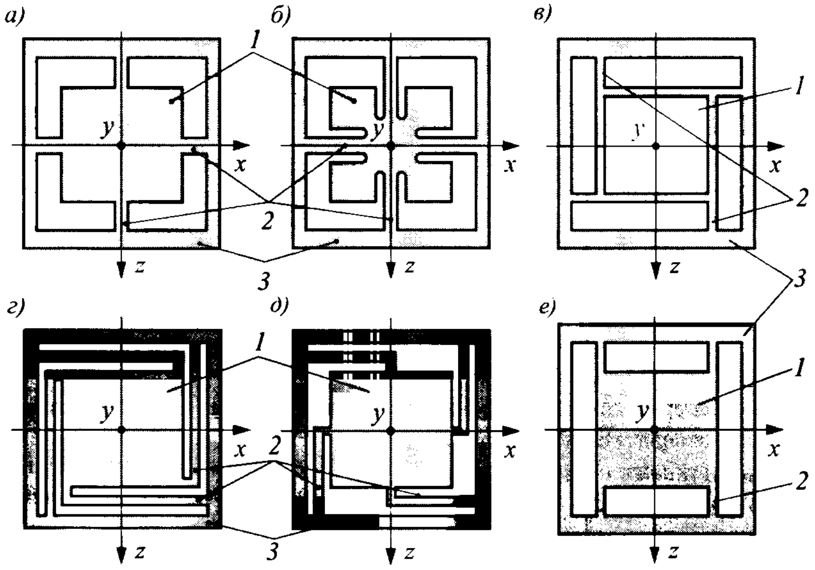


Рис. 1.1. Принципиальные схемы ЧЭ осевых МА:
а, *б* – ЧЭ с крестообразным подвесом; *в*, *г* – ЧЭ с z-образным кососимметричным подвесом; *д* – ЧЭ с z-образным симметричным подвесом; *е* – ЧЭ с параллельным подвесом; *1* – ИМ; *2* – упругие элементы; *3* – опорная рамка

Таким образом, подвесы ИМ по рис. 1.1, *в*, *г* могут быть определены как z-образные кососимметричные, а по рис. 1.1, *д* – как z-образные симметричные. ЧЭ по схемам 1.1, *в*, *г*, *д* имеют оси чувствительности, совпадающие с осью y. Очевидно, что геометрические размеры упругих элементов подвесов по схемам 1.1 *г*, *д* могут быть подобраны так (особенно это относится к схеме 1.1, *д*), что ИМ будет чувствительна к ускорению вдоль любой из осей x, y, z. Таким образом, возможно построение одно-, двух- и трехкомпонентного МА на одном ЧЭ.

ЧЭ по схеме 1.1, *е* может иметь ось чувствительности, совпадающую с осью y или x.

Уравнение движения ИМ при условии, что центр масс и геометрический центр подвеса совпадают и направление действующего ускорения совпадает с одной из осей x, y, z, которая является осью чувствительности, например с осью y, имеет вид

$$m\ddot{y} + b_y\dot{y} + G_y y = ma_y, \qquad (1.1)$$

где m – масса ИМ; b_y, G_y – коэффициент демпфирования и суммарная жесткость подвеса в направлении оси y соответственно; a_y – действующее ускорение.

В установившемся режиме $(\dot{y} = \ddot{y} = 0)$

$$y = ma_y / G_y. \qquad (1.2)$$

Это равенство через смещение ИМ определяет действующее ускорение.

В реальных МА перемещение ИМ измеряется либо емкостным преобразователем (датчиком) перемещений, либо с помощью пьезорезистивных преобразователей деформаций (напряжения) упругих элементов, либо посредством каких-то других датчиков, например оптических. В связи с этим в литературе можно встретить такие определения: емкостный МА, пьезорезистивный МА, что следует считать техническим сленгом (речь профессионально обособленной группы).

Рассмотрим описание некоторых конструкций МА, ЧЭ которых реализованы по схемам, приведенным на рис. 1.1.

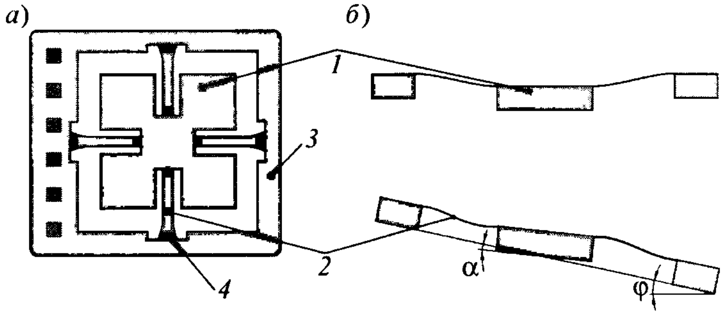


Рис. 1.2. Микромеханический наклономер:
а – схема наклономера; *б* – принцип измерения (наклон датчика на угол φ приводит к наклону подвижной массы на угол α относительно рамки датчика); *1* – ИМ; *2* – упругие элементы (балки) подвеса; *3* – опорная рамка; *4* – пьезорезисторы

Фирма Endevco (США) выпускает осевой акселерометр с емкостным преобразователем перемещений в габаритных размерах 25×16×10 мм, ЧЭ которого выполнен по рис. 1.1, *б*. Диапазон измерения: 0,5...10 *g*. Демпфирование – газодинамическое. Полоса пропускания частот до 1000 Гц. Точность в зависимости от заказа и стоимости: 5, 1 и 0,1 % от максимального диапазона.

Подобная схема ЧЭ положена в основу микромеханического наклономера, схема которого приведена на рис. 1.2, *а*.

ИМ *1* прикреплена четырьмя тонкими кремниевыми балками *2* к опорной рамке *3*. Балки расположены в пределах маленьких промежутков ИМ. Чувствительность увеличивается вместе с длиной поддерживающих балок и достигает максимума для некоторого отношения длины к размеру ИМ.

Как принцип преобразования выбран пьезорезистивный эффект, приводящий к относительным изменениям сигнала от наклона, которые приблизительно на 60 % больше, чем для емкостного съема той же самой информации.

Принцип измерения показан на рис. 1.2, *б*. Угол наклона может быть извлечен из выходного сигнала двух полных мостов Уитстона. Наклон датчика вокруг одной оси вызывает *S*-образное искажение тех балок, которые ориентированы перпендикулярно к оси наклона. Балки, параллельные оси наклона, испытывают угловые нагрузки.

Помещая пьезорезисторы *4* сосредоточенно и перпендикулярно к продольному направлению балок, произвольный угол наклона можно определить независимо для обеих осей по падению напряжения на двух мостах Уитстона. Размещение и ориентация резисторов гарантируют высокую чувствительность к наклону и малую перекрестную чувствительность. Пьезорезисторы получены *р*-примесным кремнием.

В разработанном приборе приняты следующие размеры: длина упругой балки 500 мкм, ширина 70 мкм и толщина 5 мкм для размеров пластины ИМ 5×5 мм.

На рис. 1.3 показаны основные элементы конструкции МА фирмы Texas Instruments Inc. (США), ЧЭ которого соответствует схеме, показанной на рис. 1.1, *д*.

ИМ *1* (см. рис. 1.3), чувствительная к перемещениям с ускорением *а*, представляет единое целое с пластиной *6*, на которой размещен также подвижный электрод емкостного измерителя перемещений массы, неподвижный электрод *4* которого расположен на основании *5*. Подвес ИМ выполнен с помощью четырех упругих элементов *3* на стойках *2*, являющихся элементами основания *5*.

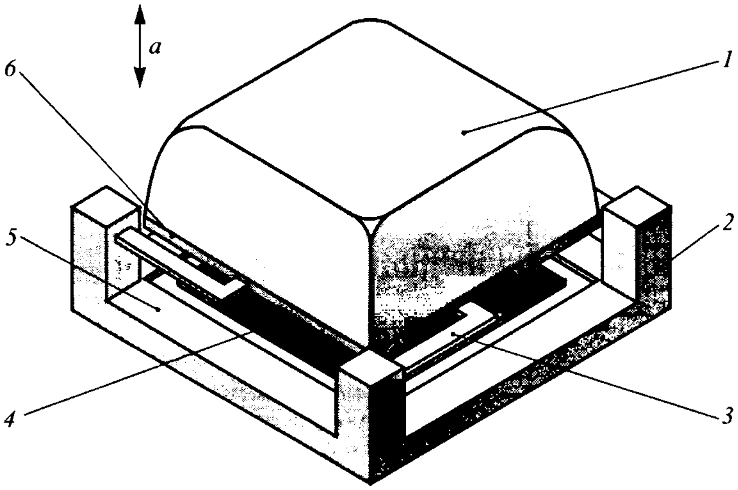


Рис. 1.3. Основные элементы конструкции акселерометра фирмы Texas Instruments Inc.:
1 – ИМ; *2* – стойка; *3* – упругий элемент подвеса; *4* – неподвижный электрод; *5* – основание; *6* – пластина с подвижным электродом

Очевидно, что чувствительность акселерометра к измеряемому ускорению улучшена путем увеличения ИМ. Зрительное восприятие конструкции дает основание предположить, что это – низкочастотный акселерометр, пригодный для сейсмических измерений.

На рис. 1.4 приведена принципиальная схема МА фирмы Cornell Research Foundation Inc. (США), ЧЭ которого соответствует схеме на рис. 1.1, *е*. ИМ *1* смонтирована параллельно и на некотором расстоянии от основания (корпуса) *7* с помощью двух пар упругих элементов *6* подвеса и анкеров *3*. ИМ перемещается в соответствии с измеряемым ускорением *a*. Емкостный измеритель перемещений образован гребенчатыми структурами электродов, из которых подвижные электроды *4* образуют единую структуру с ИМ, а неподвижные *2*, объединенные рамкой *5*, скреплены с основанием.

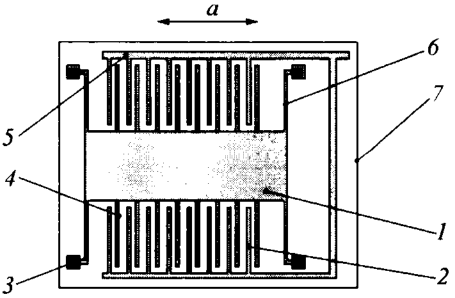


Рис. 1.4. Принципиальная схема акселерометра фирмы Cornell Research Foundation Inc.:
1 – ИМ; *2* – неподвижные электроды; *3* – анкер; *4* – подвижные электроды; *5* – рамка; *6* – упругий элемент подвеса; *7* – основание (корпус)

На рис. 1.5 показана принципиальная схема акселерометра, которая является развитием схемы, представленной на рис. 1.4. Отличие ее заключается в том, что все элементы конструкции расположены в одной плоскости. ИМ образована стержнем *1* с элементами *4* гребенчатой структуры, которые являются подвижными электродами емкостного преобразователя перемещений ИМ в соответствии с ускорением *a*, а неподвижные электроды *2* и *5* оформлены в виде гребенчатых структур *3* и *7*. Эти структуры изолированы от пластины *6* оксидной пленкой.

На рис. 1.6 приведена принципиальная схема акселерометра разработки фирмы The Charles Stark Draper Laboratory Inc. (США), ЧЭ которого также выполнен по рис. 1.1, *е*, но в нем увеличено до трех

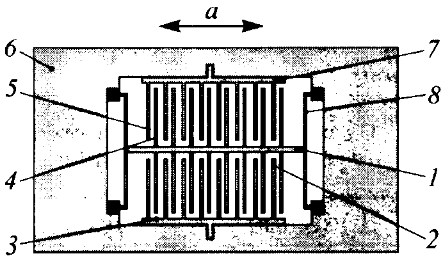


Рис. 1.5. Принципиальная схема модифицированного акселерометра:
1 – стержень (часть ИМ); *2*, *5* – неподвижные электроды; *3*, *7* – гребенчатые структуры; *4* – подвижный электрод; *6* – пластина; *8* – упругий элемент подвеса

пар число упругих элементов. Планарная конструкция акселерометра включает в себя ИМ *1*, имеющую форму рамки с центральным стержнем *7*, которая с помощью трех пар упругих элементов *2* и опорных элементов *3*, *8*, изготовленных из одной кремниевой пластины, посредством анкеров (на рисунке затемнены) укреплены на некотором расстоянии над основанием (корпусом) *9*.

Упругие элементы подвеса обеспечивают возможность перемещения ЧЭ акселерометра в соответствии с направлением ускорения *a*. На стержневых элементах массы *1* размещены электроды чувствительности *10*. На опорных элементах *6*, скрепленных с основанием, размещены электроды возбуждения *5*, *11*, которые вместе с электродами *10* образуют гребенчатые структуры. Последние позволяют обеспечить необходимые значения изменения их емкостей при перемещениях инерционной массы.

При подаче напряжения на электроды *5*, *11* имеется возможность изменять суммарную жесткость упругого подвеса из-за появления электростатических сил, а следовательно, будет изменяться и собственная частота колебаний акселерометра.

Кроме того, при наличии напряжения смещения можно организовать работу акселерометра в режиме компенсационного измерения (с обратной связью). Для исключения возможных поломок упругих элементов при больших значениях ускорения предусмотрены две пары ограничителей *4*.

Фирма Analog Devices (США) выпускает серию одно- и двухосных МА ADXL для диапазона измерений ускорения ±(2...100)*g*. Частотный диапазон акселерометров 0...100 кГц. Параметры, дающие общую характеристику МА, приведены в табл. 1.1.

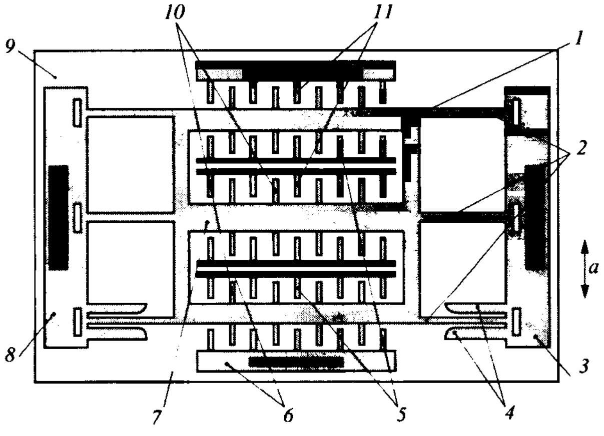


Рис. 1.6. Принципиальная схема акселерометра разработки The Charles Stark Draper Laboratory Inc.:
1 – ИМ; *2* – упругие элементы подвеса; *3*, *8* – опорные элементы; *4* – ограничители; *5*, *11* – элементы возбуждения; *6* – опорные элементы электродов возбуждения; *7* – центральный стержень ИМ; *9* – основание (корпус); *10* – электроды чувствительности

1.1. Общая характеристика МА серии ADXL

Марка	Параметр			
	Диапазон измерений ускорения g	Плотность шума, мg/$\sqrt{\text{Гц}}$	Одноосный/ двухосный	Напряжение/ ШИМ*
ADXL202	± 2 g	0,5	Двухосный	ШИМ
ADXL05	± 5 g		Одноосный	Напряжение
ADXL105		0,175		
ADXL210	± 10 g	0,5	Двухосный	ШИМ
ADXL150	± 50 g	1	Одноосный	Напряжение
ADXL250			Двухосный	
ADXL190	± 100 g	4	Одноосный	

* ШИМ – широтно-импульсная модуляция.

Схема работы кремниевого ЧЭ показана на рис. 1.7, а на рис. 1.8 – функциональная схема, поясняющая принцип измерения с аналоговым выходом. Схема ЧЭ идентична схеме, представленной на рис. 1.1, *е*. Упругие элементы обеспечивают перемещение ИМ, параллельное вектору ускорения *а*.

Анкеры *3* соответствуют местам соединения элементов ЧЭ с опорной рамкой (не показана). Выходной сигнал формируется следующим образом. На неподвижные пластины *4* измерительного конденсатора ЧЭ подаются противофазные прямоугольные импульсы, равные 1 МГц: амплитуды обоих прямоугольных импульсов равны, но сдвинуты по фазе на 180°. В спокойном состоянии емкости двух конденсаторов одинаковы, поэтому выходное напряжение на их электрическом центре, т.е. на подвижной пластине *5*, присоединенной к ИМ *1*, равно 0.

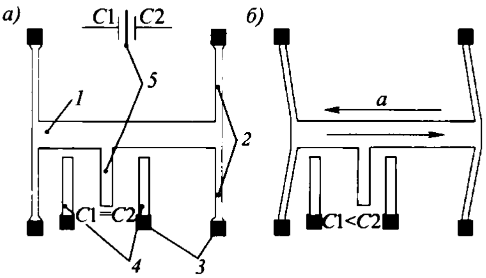


Рис. 1.7 Конфигурация ЧЭ акселерометра:
а – в покое; *б* – при действии ускорения,
1 – ИМ; *2* – упругий элемент (балка);
3 – анкеры; *4* – неподвижные пластины конденсатора; *5* – подвижная пластина конденсатора; C_1, C_2 – конденсаторы

Когда балка начинает двигаться, разность емкостей приводит к появлению выходного сигнала на центральной пластине. Амплитуда сигнала будет повышаться с увеличением ускорения, приложенного к ЧЭ. Центральная пластина через усилитель У1 подключена к синхронному детектору. Направление движения балки влияет на фазу сигнала, поэтому синхронное детектирование используется для выделения информации об амплитуде. Выход синхронного детектора через усилитель У2 обеспечивает выходное напряжение ускорения *U*.

На рис. 1.9 показана упрощенная функциональная схема двухосного акселерометра ADXL202, поясняющая принцип формирования на выходе ШИМ-сигнала.

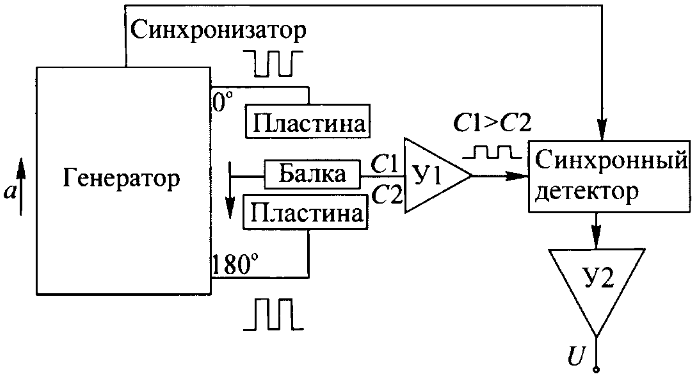


Рис. 1.8. Функциональная схема акселерометра с аналоговым выходом: $C1$, $C2$ – конденсаторы

Такой тип выхода очень полезен благодаря значительной защите от шума (помех). Стандартные микроконтроллеры имеют таймеры, которые применены для измерения интервалов T_1 и T_2. Ускорение, выраженное в g, рассчитывается по формуле

$$A = 8\left(\frac{T_1}{T_2} - 0{,}5\right).$$

Следует отметить, что ШИМ в 50 % ($T_1 = T_2$) означает 0 g на выходе. Нет необходимости измерять T_2 для каждого цикла измерения. Его надо обновлять для учета изменений, вызванных температурой. Поскольку период T_2 одинаков как для канала X, так и для канала Y, нужно измерять его только в одном канале. Период T_2 может быть установлен от 0,5 до 10 мс с помощью внешнего резистора.

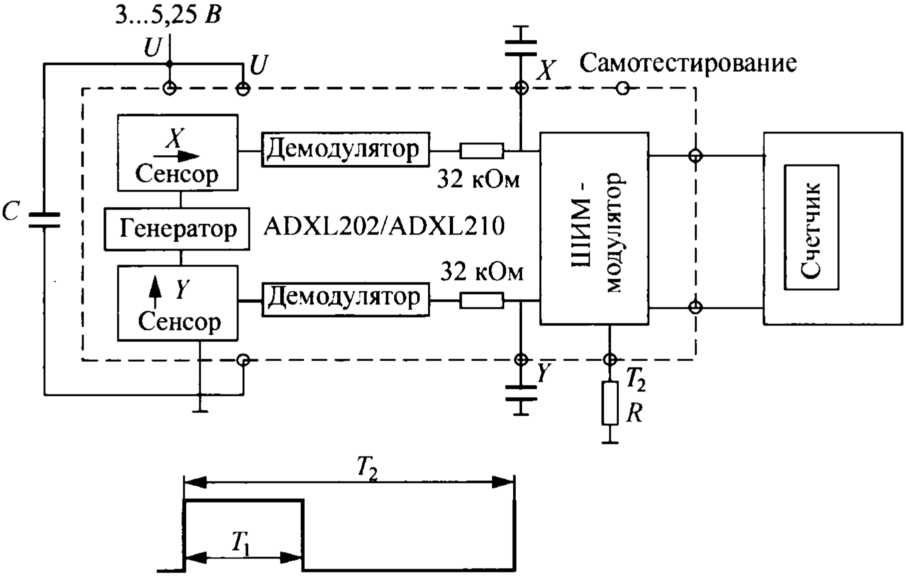


Рис. 1.9. Функциональная схема двухосного акселерометра с ШИМ-выходом

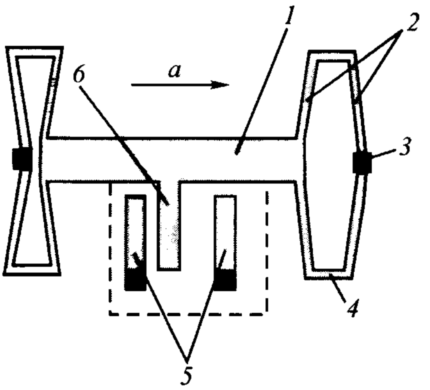


Рис. 1.10. Принципиальная схема ЧЭ акселерометров ADXL150/250:
1 – ИМ; *2* – упругие элементы; *3* – анкер; *4* – растяжка; *5* – неподвижные пластины; *6* – подвижная пластина конденсатора

Аналоговое напряжение, соответствующее ускорению, можно затем получить с помощью буферизации (усиления) сигнала с выходов *X* и *Y* или пропуская ШИМ-сигнал через *RC*-фильтр.

Акселерометры с малым диапазоном измерения могут использоваться в качестве наклономеров.

Акселерометры ADXL150 и ADXL250 – полностью интегрированные измерительные приборы третьего поколения. Схема чувствительного элемента этих акселерометров является вариантом схемы по рис. 1.1, *е*. Принципиальная схема ЧЭ приведена на рис. 1.10.

ИМ *1* с помощью сквозных упругих элементов *2*, объединенных растяжками *4*, на двух анкерах *3* установлена на расстоянии 1,6 мкм над подложкой. В сочетании с неподвижными пластинами подвижные пластины *6* образуют 42 емкости. Предусмотрены также 12 ячеек для создания электростатических сил, перемещающих ИМ при тестировании акселерометра. При тестировании создается электростатическая сила, эквивалентная примерно 20 % от диапазона измеряемого ускорения. Акселерометры содержат формирователь сигнала, генератор, демодулятор, таймер и схему автономного тестирования.

Некоторые характеристики акселерометров приведены в табл. 1.2.

Акселерометры имеют абсолютную погрешность 0,01*g*, что является большим достижением для акселерометров этого класса. По сравнению с другими акселерометрами у них сниженный дрейф нуля, не превышающий 0,4 *g* в диапазоне температуры –50...+100 °С, и сокращенное энергопотребление. Акселерометры выдерживают ускорение 2000 *g* длительностью 0,5 мс без питания и 500 *g* в течение 0,5 мс с питанием.

1.2. Характеристики акселерометров

Характеристика измерений	ADXL150			ADXL250		
	минимальная	номинальная	максимальная	минимальная	номинальная	максимальная
Диапазон измерений, *g*	± 40	± 50	–	± 40	± 50	–
Нелинейность, %	–	0,2		–	0,2	
Поперечная ошибка, %		± 2			± 2	
Чувствительность, мВ/*g*	33,0	38,0	43,0	33,0	38,0	43,0
Плотность шума, $g \cdot 10^{-3} / \sqrt{\text{Гц}}$	–	1	2,5	–	1	2,5
Полоса пропускания частот по уровню –3 дБ, Гц	900	1000	–	900	1000	–
Резонансная частота (*Q* = 5), кГц	–	24		–	24	
Напряжение, В	4,0	–	6,0	4,0	–	6,0
Потребляемый ток, мА	–	1,8	3,0	–	3,5	5,0

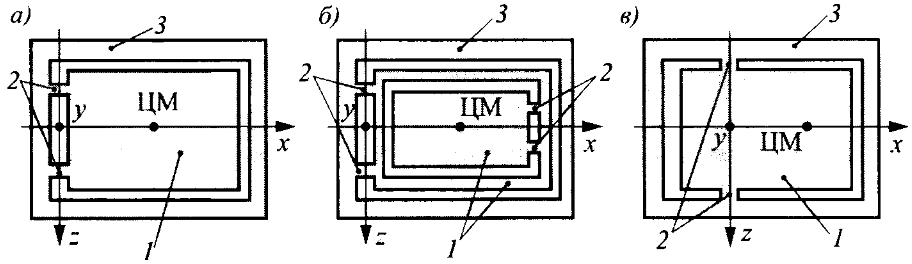


Рис. 1.11. Базовые принципиальные схемы ЧЭ маятниковых МА:
а и *б* – одинарный и двойной маятник с упругими элементами – балками соответственно; *в* – одинарный маятник с упругими элементами – торсионами; ЦМ – центр масс; *1* – ИМ; *2* – упругие элементы; *3* – опорная рамка

Акселерометры этой серии находят и могут найти применение: при измерении углов наклона в автомобильных сигнальных устройствах, при реакции на инерциальные силы для защиты дисков компьютеров типа Notebook, в ЧЭ подушек безопасности, в системах навигации автомобиля, в системах контроля работы лифта, при наличии ударов и вибрации в системах управления станками и контроля вибростендов, в системах контроля горизонтальности (режим наклономера), в системах авионики беспилотных летательных аппаратов и др.

1.1.3. Маятниковые микроакселерометры

Базовые принципиальные схемы ЧЭ маятниковых МА приведены на рис. 1.11.

ЧЭ, показанный на рис. 1.11, *а*, – это ИМ *1*, которая вместе с упругими элементами *2* подвеса представляет собой единую конструкцию с опорной рамкой *3*. Упругие элементы по способу нагружения подобны балкам, работающим на изгиб. Эти балки могут иметь переменные ширину и высоту поперечного сечения по длине балки, а их число может быть, как правило, не более трех.

Схема ЧЭ по рис. 1.11, *б* является двойным маятником. ИМ одного из них имеет форму пластины, а другого – форму рамки. Относительно упругих элементов – балок справедливо все, что относится к схеме на рис. 1.11, *а*. В схеме ЧЭ по рис. 1.11, *в* упругие элементы аналогичны балкам, работающим на кручение. Такие элементы принято называть торсионами.

Торсионы по своей длине имеют одинаковое поперечное сечение, но его форма может быть различной (квадрат, прямоугольник, шестигранник и др.). Маятниковость ИМ обусловлена несовпадением их центров масс (ЦМ) с теоретическими осями подвеса z. В двойном маятнике ЦМ могут не совпадать и быть разнесенными вдоль оси x. Ось чувствительности для каждой схемы ЧЭ по рис. 1.11 перпендикулярна к плоскости пластины ИМ, т.е. совпадает с осью y.

Уравнения движения ИМ маятниковых МА по структуре аналогичны уравнениям движения осевых МА. Например, уравнение движения ИМ ЧЭ по схеме на рис. 1.11, *в* при условии, что ускорение a_y совпадает с осью y, имеет вид

$$J_z\ddot{\vartheta} + b_\vartheta\dot{\vartheta} + G_{\text{кр}}\vartheta = ma_y l, \qquad (1.3)$$

где J_z – момент инерции ИМ относительно оси колебаний z; b_ϑ – коэффициент демпфирования по угловой координате; $G_{\text{кр}}$ – жесткость торсионов на кручение; l – расстояние от ЦМ до оси z; ϑ – угол поворота ИМ вокруг оси z; m – масса ИМ.

Для установившегося режима ($\dot{\vartheta} = \ddot{\vartheta} = 0$) имеет место угловое смещение пластины ИМ

$$\vartheta = ma_y l / G_{\text{кр}}, \qquad (1.4)$$

которое содержит информацию о действующем ускорении.

Измерение перемещений ИМ аналогично осевым МА может осуществляться емкостными, пьезорезистивными либо преобразователями другого типа. Можно отметить далее, что пьезорезистивные преобразователи размещаются на балках или торсионах в местах, где возникает наибольшее изгибное или крутильное напряжение. На этом основании некоторые авторы называют упругие элементы подвеса концентраторами (напряжения, деформации). Эта терминология применяется и к осевым МА.

Заметим также, что демпфирование колебаний в ЧЭ реализуется на основе различных физических процессов, разными средствами и будет описано позднее.

Рассмотрим конструкции некоторых маятниковых МА, ЧЭ которых выполнены по рис. 1.11, *а*, *в*. Данные о коммерчески доступных МА с ЧЭ по рис. 1.11, *б* не обнаружены.

Фирма Sundstrand Data Control (США) разработала в начале 80-х годов прошлого века серию маятниковых акселерометров компенсационного измерения Q-Flex (модели QA-1000, -1100, -1200, -2000 и т.д.), которые имеют кварцевый ЧЭ, изготовленный из цельного диска (схема ЧЭ по рис. 1.11, *а*). Принципиальная схема акселерометра приведена на рис. 1.12.

Акселерометр содержит измерительные конденсаторы *C*1, *C*2 и магнитоэлектрический датчик силы (момента) цепи обратной связи. Датчик силы традиционен в исполнении.

Рассматриваемый акселерометр от микромеханики имеет только кварцевый маятник, но его конструкция интересна тем, что ее особенности использованы другими разработчиками, а современные технологии позволяют выполнить и другие элементы конструкции в микроисполнении.

Кольцевое основание *1*, упругие элементы (балки) *2* подвеса и ИМ *3* (маятник) вытравлены из пластины аморфного плавленого кварца. Маятник перемещается в пределах начального зазора h_0 = 19 мкм. Демпфирование маятника – газодинамическое и контурное с помощью электрического корректирующего устройства в усилителе цепи обратной связи. Металлизированные части кварцевого маятника и плоские поверхности магнитопроводов *7* являются электродами емкостного преобразователя (датчика) перемещений. Непосредственно на маятнике смонтирована катушка *6* магнитоэлектрического преобразователя (датчика) силы, включающего в себя также постоянные магниты *4* и магнитопроводы *5*, *7*.

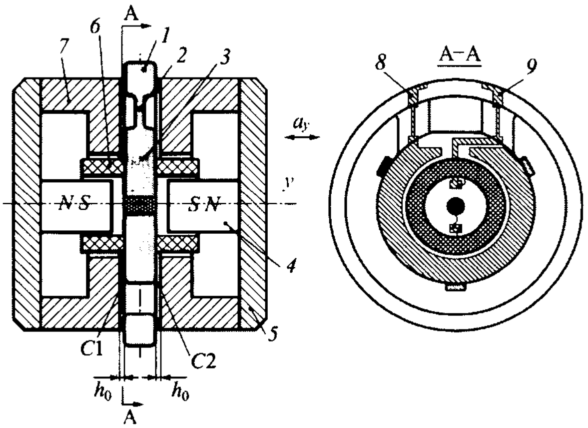


Рис. 1.12. Принципиальная схема акселерометра Q-Flex:
1 – основание; *2* – упругий элемент подвеса; *3* – ИМ; *4* – постоянный магнит; *5*, *7* – элементы магнитопровода; *6* – катушка датчика силы; *8*, *9* – контактные площадки датчика перемещений (угла) и силы (момента) соответственно

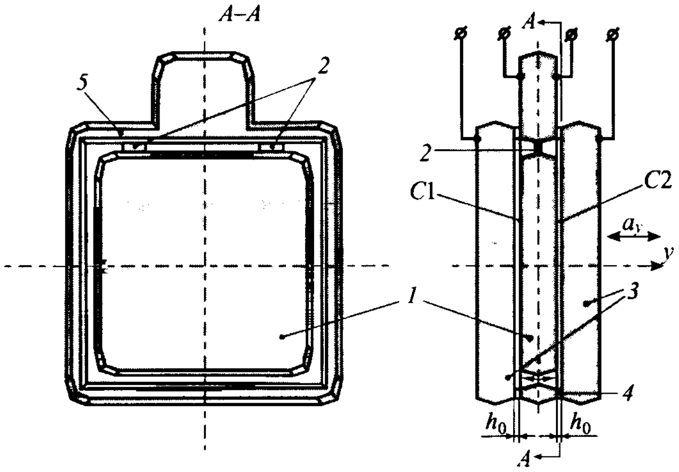


Рис. 1.13. Принципиальная схема акселерометра B-290 "Triad":
1 – ИМ-маятник; *2* – упругие элементы подвеса; *3* – обкладки-крышки; *4* – изолятор; *5* – основание

Токопроводы от датчиков перемещений и силы выведены через упругие элементы подвеса к контактным площадкам *8* и *9* датчика перемещений (угла) и силы (момента) соответственно. На узле ЧЭ установлен термодатчик, что дает возможность алгоритмической компенсации температурного дрейфа параметров акселерометра.

Полоса пропускания частот акселерометра QA-2000 (без корректирующего устройства) 300 Гц. Акселерометры нашли применение в бесплатформенных инерциальных навигационных системах.

В середине 90-х годов XX века фирма LITEF GmbH (Германия) разработала трехосный акселерометр B-290 "Triad", в котором три одноосных акселерометра (триада) установлены в одном корпусе (схема ЧЭ по рис. 1.11, *а*).

На рис. 1.13 показана принципиальная схема одного из акселерометров, который состоит из ИМ – маятника *1*, упругих элементов *2* подвеса, основания *5*, выполненных по технологии микрообработки из монокристаллической кремниевой подложки методом анизотропного травления, и закрепленных между обкладками-крышками *3*, изготовленными из проводящего монокремния. Крышки *3* и основание *5* разделены легированным изолятором *4* (SiO_2 или Si_3N_4).

Проводящая ИМ *1* и пара неподвижных электродов на кремниевых крышках *3* образуют конденсаторы *C*1, *C*2. Расстояние h_0 определяет возможные перемещения маятника под действием сил инерции, обусловленных измеряемым ускорением a_y в диапазоне ±10 или ±20 *g*. Акселерометр имеет контур (цепь) обратной связи с преобразователем (датчиком) силы электростатического типа на тех же конденсаторах, что и датчик перемещений.

Цифровые блоки в контуре силовой компенсации выполнены на сигнальных процессорах ADSP 2101 (отдельно по каждому каналу измерений), которые также осуществляют компенсацию температурного дрейфа нулевого сигнала и крутизны статической характеристики по информации от встроенного термодатчика. Прибор выдерживает одиночные удары с ускорением 1000 *g*. Диапазон температур –40…+100 °C.

На рис. 1.14 приведена принципиальная схема акселерометра (ЧЭ по схеме на рис. 1.11, *а*) фирмы Hitachi, Ltd (Япония). ЧЭ состоит из ИМ *1*, упругих элементов *2* подвеса и опорной рамки *3*, изготовленных из единой кремниевой пластины. Опорная рамка закреплена между

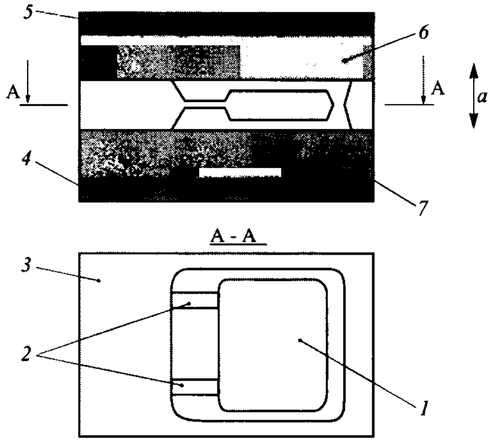


Рис. 1.14. Принципиальная схема акселерометра фирмы Hitachi, Ltd.:
1 – ИМ; *2* – упругие элементы подвеса; *3* – опорная рамка; *4*, *5* – неподвижные электроды; *6*, *7* – диэлектрические пластины

пластинами *6* и *7*, выполненными из диэлектрического материала, на которых размещены также неподвижные электроды *4*, *5* емкостного измерителя перемещений ИМ *1* при наличии ускорения *a* с расположенными на ней подвижными электродами. Размеры упругих элементов подвеса и ИМ могут быть подобраны так, что при действии ускорения ИМ *1* будет перемещаться поступательно. Отмечено также, что введение в конструкцию диэлектрических пластин *6* и *7* несколько снижает емкость измерителя перемещений ИМ *1*, но существенно улучшает технологию производства, особенно в части соединения электродов с другими компонентами конструкции.

На рис. 1.15 приведены основные элементы конструкции акселерометра (ЧЭ

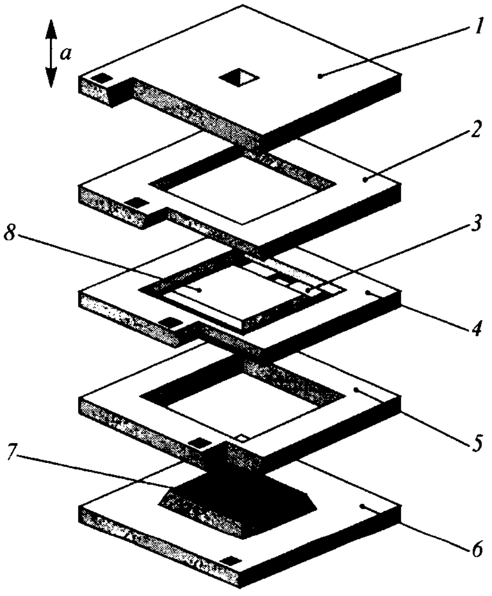


Рис. 1.15. Основные элементы конструкции акселерометра фирмы LITEF GmbH:
1, *6* – верхняя и нижняя пластины-крышки; *2*, *5* – изолирующие рамки; *3* – упругие элементы подвеса ЧЭ; *4* – опорная рамка; *7* – электрод; *8* – ИМ (ЧЭ) с подвижными электродами

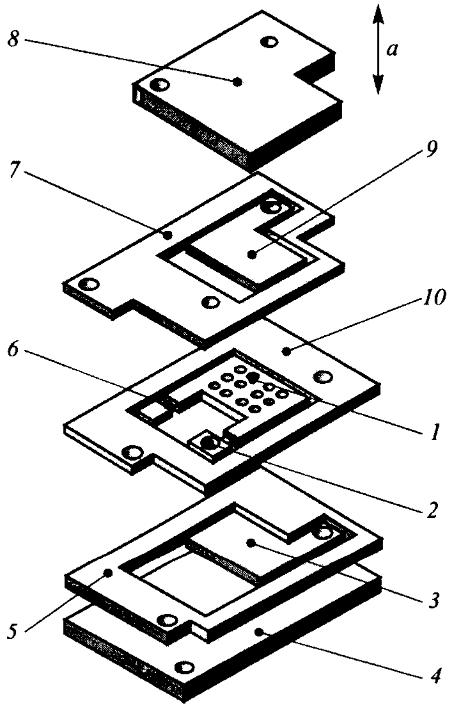


Рис. 1.16. Принципиальная схема акселерометра фирмы Litton Systems Inc.:
1 – ИМ; *2* – элементы крепления; *3*, *9* – неподвижные электроды; *4*, *8* – нижняя и верхняя пластины-крышки; *5*, *7*, *10* – рамки; *6* – упругий элемент подвеса

по схеме на рис. 1.11, *а*) немецкой фирмы LITEF GmbH. ЧЭ акселерометра представляет собой ИМ *8*, которая с помощью упругих элементов *3* подвеса скреплена с опорной рамкой *4*. С обеих сторон ИМ *8* имеется металлизация и, следовательно, образован подвижный электрод емкостной системы измерения перемещений ИМ *8* при действии ускорения *а*. Верхний (не показан) и нижний *7* электроды расположены на пластинах *1*, *6*, выполняющих также роль крышек для всей конструкции. Необходимый зазор между подвижным и неподвижными электродами образуется изолирующими (разделяющими) рамками *2* и *5*. Вся конструкция при сборке герметизирована, а электроника обеспечивает компенсационную схему измерения.

Емкостный преобразователь перемещений может быть включен в мостовую дифференциальную схему.

На рис. 1.16 приведена принципиальная схема акселерометра фирмы Litton Systems, Inc. (Канада) по принципу создания конструкции, аналогичной акселерометру, представленному на рис. 1.15. ИМ *1* с перфорационными отверстиями сформирована в рамке *10* вместе с двумя упругими элементами *6* подвеса и элементами *2* их крепления к рамке. ИМ является также подвижным электродом емкостного преобразователя ее перемещений при возникновении ускорения *а*. Неподвижные нижний *3* и верхний *9* электроды выполнены заодно с рамками *5* и *7* соответственно.

Вся конструкция собирается как вафля и закрывается пластинами-крышками *4* и *8*. Толщина электродов *3* и *9* должна быть меньше толщины рамок *5* и *7* с тем, чтобы обеспечить необходимый зазор между ИМ *1* и неподвижными электродами. Элементы крепления *2* одновременно выполняют функции изоляторов ИМ *1* от рамки *10*, уменьшая тем самым паразитные емкости. Электроды *3*, *9* также изолированы от рамок *5*, *7* в местах их крепления.

ФГУП "НИИ физических измерений" (г. Пенза) имеет богатый опыт разработки и производства акселерометров прямого измерения и в соответствии с уровнем развития техники с 1970 по 1985 гг. выпускал их с различными типами преобразователей: емкостным, индуктивным, пьезо- и фотоэлектрическим.

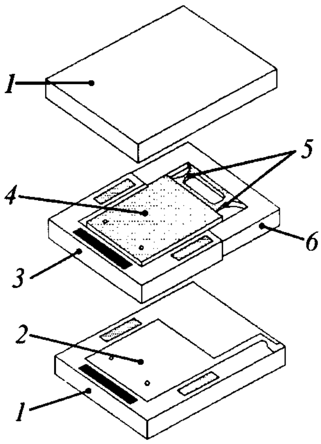


Рис. 1.17. Основные элементы конструкции АЛЕ 049:

1 – стеклянные пластины; *2* – проводящая обкладка неподвижной пластины; *3* – опорный кремниевый элемент; *4* – ИМ; *5* – упругие элементы подвеса; *6* – незащемляемая часть опорного элемента

В настоящее время на базе кремниевой микроэлектроники разработаны унифицированные ряды емкостных акселерометров типа АЛЕ, предназначенных для измерения ускорения в пределах ±(0,18...350) м/с^2.

На рис. 1.17 показана конструкция микроакселерометра АЛЕ 049 (основные элементы), который имеет некоторые элементы, аналогичные со схемами на рис. 1.15 и 1.16.

ИМ *4* с упругими элементами *5* подвеса и опорным элементом *3* изготовлены из монокристаллического кремния анизотропным травлением. ИМ является подвижным элементом емкостного преобразователя перемещений. Неподвижные пластины (обкладки) *2* выполнены напылением на стеклянных пластинах *1*. Соединение последних с опорным элементом *3* осуществляется методом электростатической сварки. Часть опорного эле-

1.3. Характеристики акселерометров серии АЛЕ

Параметр	Тип акселерометра					
	АЛЕ 037	АЛЕ 048	АЛЕ 051	АЛЕ 044	АЛЕ 050	АЛЕ 049
Диапазон измерений, м/с^2	±(0,18...90)	±(0,18..220)	±(1,4...90)	±(11...90)	±(5,6...90)	±(5,6...1400)
Выходное напряжение, В	0...6					
Нелинейность функции преобразования, %	0,02		0,01	0,2		
Коэффициенты влияния температуры:						
на ноль, мВ/°С	1...0,1		0,1	1	3...1	
на чувствительность, %/°С	0,01		0,008	0,02	0,01	
Напряжение питания, В	±15	28	±12	28	±12	28
Потребляемый ток, мА	30	60	25	5	10	20
Температура окружающей среды, °С	±50		–50..±125	±50		
Габаритные размеры, мм	35×35×35		32×2×6	35×29×15		35×35×22

мента *6* имеет меньшую толщину, чем основная пластина, и не защемляется между стеклянными пластинами. Технические характеристики акселерометров приведены в табл. 1.3.

Акселерометры АЛЕ 037 и АЛЕ 051 применяются в блоках датчиков инклинометров БДИ1 и БДИ3, предназначенных для определения пространственного положения ствола буровой скважины. Акселерометр АЛЕ 050 может быть использован в переносных навигационных системах средней точности и для измерения транспортных вибраций. На базе акселерометра АЛЕ 037 разработаны сейсмодатчики БСД 1, СД 4, БСД 1-01 для систем защиты реакторных установок АЭС.

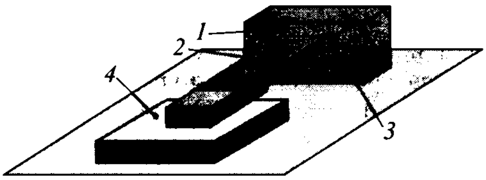


Рис. 1.18. Принципиальная схема ЧЭ (ТКБ-5) акселерометра серии МТА:
1 – ИМ; *2* – концентратор напряжений (деформируемая часть "балки"); *3* – демпфирующая жидкость; *4* – корпус

В ГНЦ "НПК "Технологический центр" (г. Москва, Зеленоград) разработан интегральный тензопреобразователь кремниевый балочный ТКБ-5 с размерами кристалла 2×7,5×0,43 мм, на базе которого совместно со специалистами ЛИИ им. М.М. Громова создана серия акселерометров АВИ и МТА. Принципиальная схема ЧЭ акселерометра приведена на рис. 1.18.

В соответствии с требованиями к необходимым полосе пропускания частот и чувствительности кристалл ТКБ-5 изготовлен с достаточно прочным (толщина 70...100 мкм) концентратором механических напряжений *2*, на котором располагаются тензорезисторы. Набор ИМ *1* в диапазоне 10...50 мг обеспечивает изменение чувствительности от 0,05 до 5 мВ/g.

В конструкции акселерометра оригинально решена задача демпфирования с

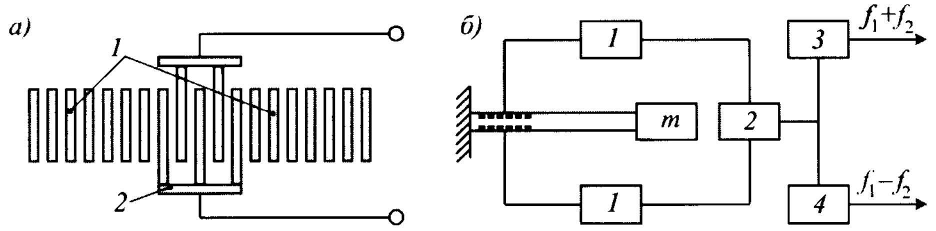


Рис. 1.19. ПАВ-акселерометр:
а – топология резонаторов (*1* – отражатели; *2* – встречно-штыревой преобразователь);
б – функциональная схема (обозначения в тексте)

помощью полиэтиленсиликоновых жидкостей, имеющих минимальную зависимость вязкости от температуры. Демпфирующая жидкость *3* находится в зазоре (0,02 мм) между ИМ и дном корпуса *4*, в котором она удерживается силами поверхностного натяжения. Заполнение зазора жидкостью также происходит благодаря силам поверхностного натяжения.

Для маятниковых акселерометров с тензопреобразователями, размещаемыми в упругом элементе подвеса ИМ (концентратор напряжений), важной характеристикой является поперечная чувствительность. Акселерометры АВИ и МТА могут использоваться для измерения вибрации промышленных и энергетических установок и, в частности, при летных испытаниях авиационной техники. Масса стандартного акселерометра МТА 12 г, габаритные размеры 19,4×14,2×7,5 мм.

В настоящее время отвечает представлению о микроисполнении в наибольшей степени балочный акселерометр с преобразователем деформаций на поверхностно-акустических волнах (ПАВ). ЧЭ акселерометра – это консольная балка с ИМ, выполненная из кристаллического кварца *ST*-среза. При действии ускорения на ИМ, балка испытывает деформацию изгиба, при этом одна из ее поверхностей подвергается растяжению, а другая изгибу. На противоположных поверхностях балки размещаются два одинаковых одновходовых ПАВ-резонатора. Топология ПАВ-резонаторов и функциональная схема акселерометра приведены на рис. 1.19 (разработка выполнена под руководством Д.П. Лукьянова).

Каждый резонатор состоит из двух отражателей *1* и встречно-штыревого преобразователя *2*, возбуждающего стоячую волну между отражателями (рис. 1.19, *а*). Консольная балка с инерционной массой *m* с двух сторон имеет два ПАВ-резонатора в цепи автогенераторов *1* (рис. 1.19, *б*). На смесителе *2* формируются сигналы с комбинационными частотами $f_1 \pm f_2$. Разностная частота $f_1 - f_2$, выделяемая в блоке *4*, оказывается пропорциональной действующему ускорению, а суммарная частота $f_1 + f_2$ может быть использована для уменьшения влияния дестабилизирующих факторов через канал автоподстройки частот генераторов.

Балка из кристаллического кварца имеет габаритные размеры 8,5×3,5××0,35 мм, а ИМ 5×5×5 мм. При этом масса ИМ 2,03 г, а балки 0,24 г. Ускорению 10 *g* соответствует прогиб балки в точке закрепления ИМ 0,1 мм, а максимальное напряжение 35 МПа. Масштабный коэффициент равен 25,1835 кГц/*g*, а его нелинейность составила 0,6 %.

ПАВ-акселерометр обладает исключительной простотой конструкции и требует для своего изготовления минимального числа стандартных операций микротехнологий.

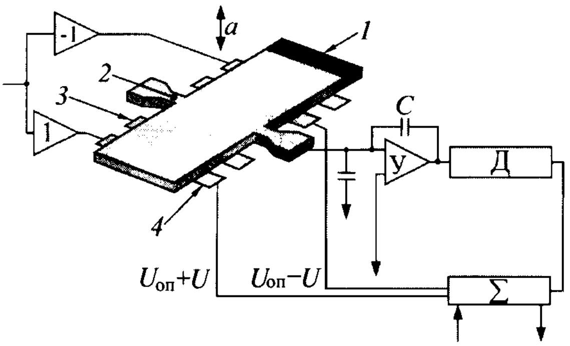


Рис. 1.20. Функциональная схема маятникового акселерометра с подвесом ИМ на торсионах:
1 – ИМ-маятник; *2* – торсион; *3*, *4* – электроды емкостных преобразователей силы и перемещений

На рис. 1.20 показан маятниковый акселерометр, созданный фирмой The Charles Stark Draper Laboratory (США). В нем упругие элементы подвеса работают на кручение (схема ЧЭ по рис. 1.11, *в*).

ИМ-маятник *1* представляет собой прямоугольную в плане пластину постоянной толщины, подвешенную на паре торсионных упругих элементов *2*. Маятниковый эффект достигается асимметрией подвеса пластины на торсионах. Под пластиной размещена пара электродов *4*, изменение емкости которых происходит при вращении пластины на торсионах под действием ускорения *a*. Под пластиной расположены также электроды *3* контура компенсации. Параметры пластины и упругого подвеса подобраны под заданный диапазон измеряемого ускорения.

Акселерометр может работать в разомкнутом режиме (прямое измерение) и с контуром обратной связи. Выбор режима работы зависит от требований точности, диапазона измерений и стоимости прибора. С замкнутым контуром коррекции ток, пропорциональный результирующему изменению емкости, идет от гибкого элемента (торсиона) подвеса через усилитель У, демодулятор Д к сумматору Σ, в котором происходит алгебраическое сложение опорного напряжения $U_{\text{оп}}$ и напряжения *U*, пропорционального перемещениям маятника.

Акселерометры изготовлены с применением технологии травления кремниевой пластины. Полученная структура анодной сваркой прикреплена к подложке из стекла Pyrex, на которой размещены электроды. В сравнении с проводящими подложками система "кремний на стекле" имеет низкую паразитную емкость. Акселерометры были рассчитаны на использование в управляемых боеприпасах с диапазоном измеряемого ускорения (100... 100 000) *g*, а также на коммерческое применение для измерения ускорения в диапазоне 0,1...1,5 *g*.

ОАО "Раменское приборостроительное конструкторское бюро" (РПКБ) наряду с упругими элементами типа балок выпускает акселерометры с упругими элементами типа торсионов, работающих на кручение.

ЧЭ этих акселерометров представляют собой кремниевые маятники, изготовленные методами объемной микрообработки. Так, на базе маятника диаметром 18 мм и толщиной 0,38 мм разработано несколько модификаций акселерометров (А-12, -15, -16 и -17), которые аналогично акселерометрам Q-Flex выполнены по гибридной (не планарной) технологии.

Основные технические характеристики акселерометров ОАО "РПКБ"

Диапазон измеряемого ускорения, *g*	±35
Масштабный коэффициент, мА/g	1,3
Нестабильность масштабного коэффициента, %	0,02
Дрейф нулевого сигнала, мк*g*:	
в течение 1 ч	10
за время > 1 ч	20
Порог чувствительности, мк*g*	0,5
Масса акселерометра, г	38

На маятник напыляют металлические пластины (обкладки) конденсаторов емкостного преобразователя перемещений и методом прецизионной микросборки устанавливают обмотки (катушки) преобразователя (датчика) силы. Два других электрода (пластины, обкладки) емкостного преобразователя перемещений напылены на элементах корпуса. Упругие элементы подвеса имеют габаритные размеры 1,3×
×0,12×0,008 мм.

Зазор между маятником (подвижный электрод) и электродами на корпусе составляет 0,021 мм. Для увеличения маятниковости установлен груз.

Акселерометр содержит встроенную электронику обратной связи, изготовленную на основе гибридно-пленочной технологии.

Акселерометры со встроенной электроникой выдерживают удары до 50 *g*.

Эти акселерометры устанавливаются в карданные и бескарданные инерциальные системы разработки ОАО "РПКБ".

1.2. ДАТЧИКИ ДАВЛЕНИЯ

1.2.1. Основные определения

Датчики давления конструктивно состоят из ЧЭ, воспринимающего давление, и преобразователей (перемещений, деформации, силы), собранных в корпусе, конструкции которых весьма разнообразны.

ЧЭ датчиков давления является тонкая, чаще кремниевая пластинка, которую условно можно назвать мембраной, как правило прямоугольная или круглая в плане. Она может быть одинаковой по толщине либо с жестким, недеформируемым центром, имеющим по контуру упругую перемычку.

К важнейшим техническим характеристикам микродатчиков давления (МДД) относятся рабочий диапазон измерения, чувствительность к измеряемому давлению, выходное напряжение.

Все датчики давления характеризуются составляющими погрешности: нелинейностью характеристики, гистерезисом при изменении температуры и давления, температурным дрейфом начального смещения и чувствительности.

По виду измеряемого давления различают абсолютные (для измерения абсолютного давления), дифференциальные (для измерения разности давлений), относительные (для измерения избыточного над атмосферным давления) и вакуумные (для измерения степени разрежения) датчики давления.

По принципу действия датчики давления делятся на приборы прямого и компенсационного измерения (преобразования). В приборах прямого измерения, которые иногда называют устройствами разомкнутой конфигурации, преобразование измеряемого давления в электрический сигнал напрямую зависит от свойств материала, прежде всего, мембраны. Вследствие этого подобные устройства должны индивидуально калиброваться, что может привести к увеличению их стоимости (до 60 %, по некоторым оценкам).

В приборах компенсационного измерения, если исполнительный элемент датчика силы (актюатор) не зависит от свойств материала, прибор будет менее восприимчив к изменению характеристик материала.

Мембраны датчиков давления прямого преобразования могут быть как без жесткого центра, так и с ним. В первом случае в качестве преобразователей деформаций используются диффузионные или эпитаксиальные тензорезисторы. В мембранах с жестким центром можно применять емкостные, магниторезистивные и другие преобразователи перемещений. В датчиках давления компенсационного преобразования используются мембраны с жестким центром, на котором размещаются элементы преобразователя перемещений и силовые элементы цепи обратной связи, которые могут быть электростатического или магнитоэлектрического типа, аналогично акселерометрам.

В качестве преобразователей перемещений или деформаций мембран чаще применяются полупроводниковые преобразователи (ПП), которые имеют недостатки, существенно зависящие от технологии их изготовления. В ПП, выполненных по технологии объемного кремния, наличие *р-n*-переходов ограничивает температурный диапазон использования датчиков давления (≤ 100 °С). В ПП, изготовленных из поликремния, обладающего низкой тензочувствительностью, тензорезисторы с изоляцией из диоксида кремния имеют малую амплитуду выходного сигнала. ПП на основе структур "кремний на сапфире" присущи недостатки, обусловленные несовпадением кристаллических решеток этой пары, высокой стоимостью и сложностью обработки сапфира.

Наиболее прогрессивными, обладающими большими потенциальными возможностями, являются датчики давления, в которых ПП изготавливаются методом формирования структур "кремний на диэлектрике". Соответствующие технологии могут обеспечить создание МДД, которые способны работать при температуре > 100 °С, отличаются улучшенной стабильностью характеристик и стойкостью по отношению к воздействию различных физических полей.

Диапазон измерений давления находится в широких пределах: 0...500 кПа. Наиболее сложным является создание датчиков малых давлений (от единиц до десятков паскалей) и датчиков пульсаций малых давлений. Датчики давления изготавливают в виде автономных приборов контроля и управления, а также как устройства, используемые в составе других приборов: расходомеров, указателей воздушной скорости, высотомеров, вариометров и др.

1.2.2. Чувствительные элементы микродатчиков давления

ЧЭ микромеханических датчиков давления (МДД) является мембрана с тензорезисторными или иными ПП либо с емкостными (или другими) преобразователями перемещений мембраны.

На рис. 1.21 приведены распространенные формы ЧЭ МДД, описанные в основополагающей работе [5].

Вариант, представленный на рис. 1.21, *а*, – это плоская интегральная мембрана с полным тензорезисторным мостом. Чаще всего мембрану выполняют из *n*-кремния в плоскости (100), прямоугольной в плане, а диффузионные (имплантированные) или эпитаксиальные тензорезисторы – *р*-проводимости. С такими ЧЭ возможно построение датчиков для измерения абсолютных, избыточных и разностных давлений. С корпусными деталями ЧЭ соединяют посредством промежуточных боросиликатных стеклянных пластин диффузионной сваркой в электрическом поле.

Верхний предел измеряемых давлений распространяется до 250 МПа, а точность измерения находится на уровне 1 %. Вариант, показанный на рис. 1.21, *б*, является разновидностью варианта 1.21, *а* и

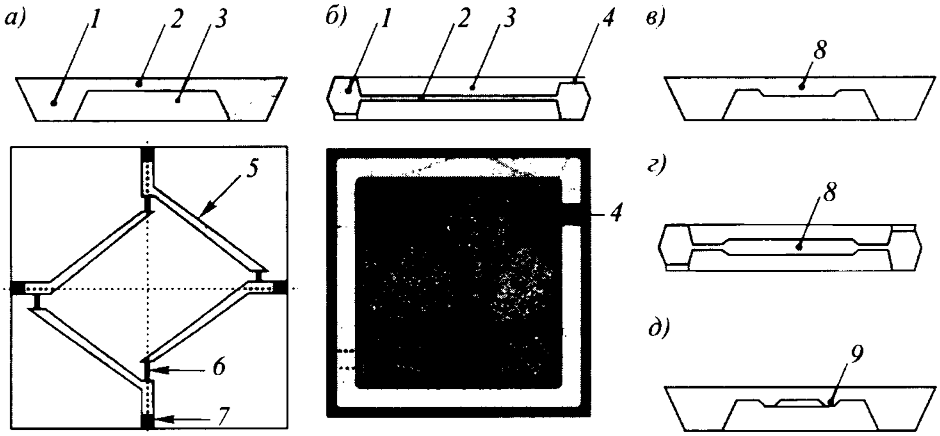


Рис. 1.21. Варианты ЧЭ датчиков давления:
а – асимметричная мембрана; *б* – симметричная мембрана; *в* и *г* – мембраны с жестким центром; *д* – двойная мембрана с жестким кольцом; *1* – корпусная пластина; *2* – мембрана с жесткой заделкой по контуру; *3* – подмембранная камера; *4*– каналы подвода давлений; *5* – проводящая дорожка; *6* – интегральный тензорезистор; *7* – контактная площадка; *8* – жесткий центр; *9* – жесткое кольцо

представляет собой симметрично расположенную относительно корпусной пластины плоскую мембрану. Применение этого варианта предпочтительно с дифференциальными емкостными датчиками перемещений.

Упругие характеристики симметричной мембраны, а также технологические процессы ее изготовления аналогичны предыдущему варианту. Мембраны с жестким центром (варианты 1.21, *в* и *г*), а также с жестким кольцом (вариант 1.21, *д*) расширяют возможности ЧЭ. Назначение жесткого центра зависит от типа применяемого преобразователя деформации (или перемещения) в электрический сигнал.

Так, например, при использовании тензорезистивного преобразователя для интегральной мембраны с жестким центром повышается концентрация напряжения в тонкой перемычке и существенно улучшается линейность характеристики. В случае использования емкостного преобразователя перемещений жесткий центр играет роль подвижного электрода дифференциального емкостного датчика.

Недостатком применения жесткого центра является то, что датчик давления становится чувствительным к линейному и угловому ускорениям. Для полного исключения влияния ускорения выполняют два идентичных датчика давления на одной корпусной пластине, причем второй датчик закрыт от воздействия давления и реагирует только на ускорение, а полезный сигнал в виде разностного значения выделяется посредством электронной схемы.

Основное назначение мембраны с двойной оправой (рис. 1.21, *д*) – исключение температурного напряжения, возникающего в месте соединения внешней оправы с металлической корпусной деталью. Тонкая перемычка между внешней и внутренней оправами гасит температурное напряжение. Внутренняя мембрана, оправой которой служит плавающее жесткое кольцо, является рабочей. Тензорезисторный преобразователь при этом размещают на внутренней мембране аналогично варианту 1.21, *а*. Другое применение двухоправной мембраны возможно в качестве двухпредельного ЧЭ. При этом тензорезисторные преобразователи выполняют как на внешней, так и на внутренней мембранах [5].

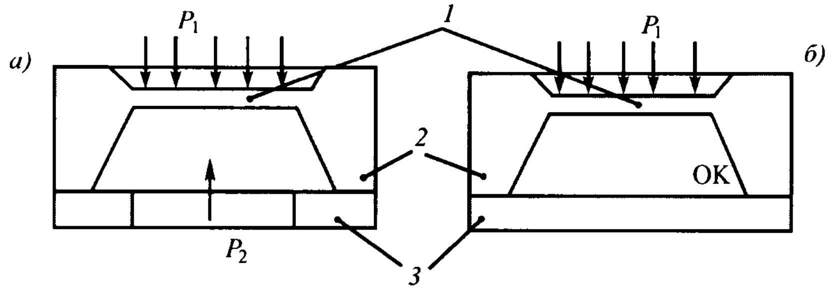


Рис. 1.22. Принципиальные схемы МДД:
а – дифференциальный; *б* – абсолютный; ОК – образцовая камера: *1* – мембрана; *2* – корпусная пластина; *3* – подложка

Объединенный (каким-либо образом соединенный) с подложкой ЧЭ образует один из видов МДД. На рис. 1.22 показаны принципиальные схемы дифференциального и абсолютного МДД, которые состоят из мембраны *1*, выполненной из одного кристалла с корпусной пластиной *2*, и подложки *3*.

Дифференциальный МДД (см. рис. 1.22, *а*) открыт с одной стороны, причем давление p_1 должно быть больше, чем p_2. Дифференциальный МДД может быть открыт и с двух сторон. В абсолютном МДД подложка представляет собой образцовую камеру (ОК), относительно давления в которой и выполняются измерения.

Мембрана (диафрагма) может изготавливаться по технологии объемной микромеханики. Вначале формируется интегральная схема обработки, которая представляет собой тензорезистивную структуру, внедренную, например, методом ионной имплантации на "прямой" стороне кремниевой пластины. При этом сцепление тензорезисторов с мембраной происходит на молекулярном уровне, затем на обратной стороне пластины формируется маска и проводится анизотронное травление.

Уравнения движения мембраны постоянной толщины под действием разности давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ соответствуют известным [25] уравнениям, описывающим динамику жестко защемленной по контуру пластины под действием распределенной нагрузки.

Уравнение движения мембраны с жестким центром аналогично уравнению (1.1) и в случае, когда помимо давления МДД подвержен действию сил инерции, обусловленных линейным и вибрационным ускорением, имеет вид

$$m\ddot{y} + b_y\dot{y} + G_y y = m\left(a - g + \ddot{y}_\text{в}\right) + \Delta pS\ , \qquad (1.5)$$

где m – масса жесткого центра; b_y, G_y – коэффициент демпфирования и жесткость мембраны; y – линейное перемещение жесткого центра; a, $\ddot{y}_\text{в}$, g – линейное, вибрационное и ускорение силы тяжести; S – площадь жесткого центра, воспринимающего давление.

В установившемся режиме ($\dot{y} = \ddot{y} = 0$) имеет место смещение жесткого центра на величину

$$y = \frac{\left[m\left(a - g + \ddot{y}_\text{в}\right) + \Delta pS\ \right]}{G_y}, \qquad (1.6)$$

которая содержит информацию об измеряемом давлении.

Из выражения (1.6) следует также, что любое ускорение вызывает погрешности в измерениях МДД.

Очевидно, что чем жестче мембрана, тем большее давление можно измерить, но при этом уменьшается чувствительность МДД к малым перепадам давления, и наоборот. Данное противоречие частич-

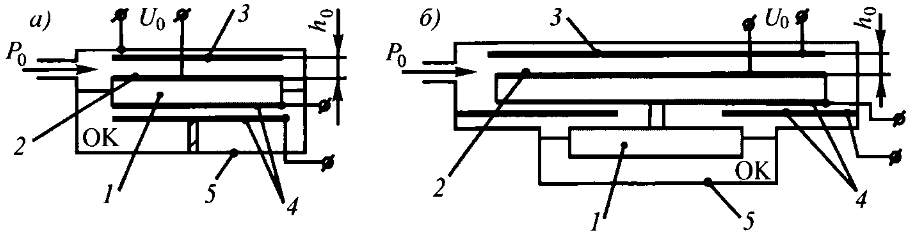


Рис. 1.23. Принципиальная схема МДД с силовой компенсацией:
а и *б* – площади мембраны и силовых электродов равны и различны соответственно; ОК – образцовая камера: *1* – мембрана; *2*, *3* – силовые электроды; *4* – чувствительные электроды; *5* – корпус

но устраняется в МДД компенсационного измерения. Существующие датчики силы (актюаторы) характеризуются недостаточными энергетическими возможностями, чтобы создать силу, компенсирующую давление, которое действует на мембрану, в достаточно большом диапазоне. Это относится, прежде всего, к электростатическим актюаторам, наиболее широко применяемым в МДД компенсационного измерения, имеющим ограничения на опорное напряжение, характерное для низковольтной электроники. Указанные особенности иллюстрируются схемами МДД на рис. 1.23.

На рис. 1.23, *а* приведена принципиальная схема МДД для измерения давления p_0 относительно давления в ОК. МДД имеет мембрану *1* с жестким центром. С двух сторон ее сформированы электроды, один из которых является электродом *2* силовой разгрузки, а другой образует емкость с электродом чувствительности *4*. На верхней крышке корпуса *5* размещен неподвижный силовой управляющий электрод *3*.

В предположении, что ОК вакуумирована, на мембрану действует сила давления $F_д = p_0 S_м$ ($S_м$ – площадь мембраны), и в результате ее перемещения с помощью электрода *4* вырабатывается управляющий сигнал на актюатор, включающий силовые электроды *2*, *3*, которые находятся под напряжением $U_{оп}$, достаточным для создания компенсирующей электростатической силы $F_э = F_д$, справедливо равенство

$$\frac{\varepsilon_0 S_э U_{оп}^2}{2h_0^2} = p_0 S_м , \qquad (1.7)$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{М}$; $S_э$ – площадь силового электрода; h_0 – зазор между электродами актюатора.

Для схемы, приведенной на рис. 1.23, *а*, $S_м = S_э$, и из формулы (1.7) следует величина напряжения, при которой выполняется равенство (1.7):

$$U_{оп} = h_0 \sqrt{2p_0 / \varepsilon_0} \ . \qquad (1.8)$$

При $p_0 = 10^5$ Па и $h_0 = 10^{-6}$ м из соотношения (1.8) получаем $U_{оп}$ = 150 В, что совершенно недопустимо для низковольтной электроники.

Простой и эффективный способ создания необходимой компенсирующей силы при снижении опорного напряжения до допустимого уровня заключается в увеличении площади электрода разгрузки, не подвергая его действию однонаправленной силы от измеряемого давления.

Этот способ иллюстрируется схемой МДД на рис. 1.23, *б*, в котором мембрана выполняет только функцию ЧЭ, воспринимающего давление.

С центром мембраны *1* связан подвижный электрод *2* силовой разгрузки, а неподвижный электрод *3* размещен на корпусе *5*. Площади силовых электродов могут быть значительно больше площади мембраны. При этом нужно иметь в виду, что подвижный электрод *2* со всех сторон испытывает давление p_0, т.е. однонаправ-

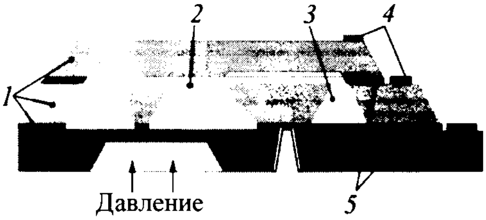


Рис. 1.24. Принципиальная схема виброрезонансного датчика давления:
1 – спрофилированные кремниевые пластины; *2* – резонатор; *3* – вакуумная камера; *4* – металлизированные контакты; *5* – изоляция из оксида кремния

ленная сила отсутствует. В этой схеме емкость электродов чувствительности *4* также может быть увеличена. Для этой схемы площади $S_{\text{м}} \neq S_{\text{э}}$, и из равенства (1.7) следует выражение

$$U_{\text{оп}} = h_0\sqrt{\frac{2p_0S_{\text{м}}}{\varepsilon_0 S_{\text{э}}}}. \qquad (1.9)$$

В соответствии с формулой (1.9) опорное напряжение для схемы МДД по рис. 1.23, *б* может быть уменьшено в $\sqrt{S_{\text{м}}/S_{\text{э}}}$ раз по сравнению с напряжением, необходимым для МДД, выполненного по схеме рис. 1.23, *а*. Например, для $S_{\text{м}}$ = 20 мкм·20 мкм = $4\cdot10^{-10}$ м^2 и $S_{\text{э}}$ = = 200 мкм·200 мкм = $4\cdot10^{-8}$ м^2 по выражению (1.9) получаем $U_{\text{оп}}$ = 15 В, что допустимо для низковольтной электроники.

Для авиационных и космических применений необходимы прецизионные датчики давления с точностью не хуже 0,001 % во всем диапазоне измерений. Такой датчик, принципиальная схема которого показана на рис. 1.24, реализован; принцип его работы основан на изменении частоты резонирующего элемента при нагружении его измеряемым давлением. Конструктивно датчик давления состоит из трех специально спрофилированных кремниевых пластин *1*, изготовленных методами объемной микротехнологии и разделенных оксидной пленкой *5*.

Внутри камеры, сформированной между верхней и нижней пластинами, располагается мембранный элемент – резонатор *2*. Одна кромка резонатора опирается на мембрану камеры, образованной в нижней пластине, которая подвергается действию измеряемого давления.

Промежуточная камера *3* вакуумируется. Металлизированные контакты *4* служат для питания схемы съема сигнала со схемы обработки, которая используется для возбуждения резонатора, фильтрации и усиления сигнала. Резонансная частота датчика без нагрузки 50 кГц. Очевидно, что при деформации мембраны резонатора происходит изменение частоты ее колебаний, которое и является мерой измеряемого давления.

1.2.3. Базовые конструкции микродатчиков давления

Среди разнообразного материала по МДД (патенты, статьи, книги, реклама), где приводится описание их конструкций, можно выделить те из них, в которых присутствуют либо оригинальные, либо ставшие типовыми конструктивные решения. И, что важно, некоторые из них стали коммерчески доступной продукцией. Подобные конструкции МДД названы здесь базовыми.

Обзор конструкций начнем с описания, приведенного в книге [5], являющейся, несомненно, пионерской в этой области техники.

Гибридная схема датчика давления (рис. 1.25) содержит базовые элементы для осуществления полной функции преобразования: вакуумированную с одной стороны для создания эталонного давления мембрану с основанием; полную мостовую тензорезисторную схему; электронную схему на интегральных операционных усилителях для получения стандартного выходного сигнала, температурной компенсации, балансировки и т.д.

Конструкция состоит из крышки *1*, трубки для подачи давления *7* и керамической подложки *5* с толстопленочными резисторами *6*, подстраиваемыми лазером. На подложке *5* также расположены один

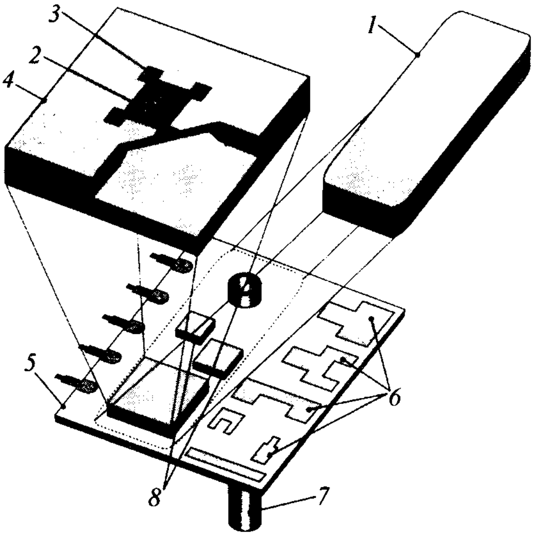


Рис. 1.25. Конструкция гибридного датчика давления:
1 – крышка; *2* – термочувствительный и нагревательный элемент; *3* – тензорезисторная мостовая схема; *4* – кремниевая мембрана; *5* – керамическая подложка; *6* – подстраиваемые толстопленочные резисторы; *7* – трубка подачи давления; *8* – усилители

или два операционных усилителя *8*, выполненных на отдельных полупроводниковых пластинах, и мембранный ЧЭ *4*, изготовленный в виде отдельного элемента.

Такой же подход используется при производстве преобразователей температуры и других параметров.

ЧЭ преобразователя давления представляет собой кремниевый кристалл размером 4,2×2,9 мм, в котором выполнена прямоугольная кремниевая мембрана размером 2,3×1,65 мм. Оставшейся площади более чем достаточно для размещения диодной схемы термокомпенсации, балансирующих мост резисторов, стабилизатора напряжения на опорном диоде.

На кристалле остается еще достаточно площади для размещения буферных и выходного усилителей на тот случай, если подобная интеграция окажется экономически выгодной. В центре мостовой тензорезисторной схемы, представляющей собой квадратную рамку, расположен мощный транзистор, который используется для нагрева и поддержания температуры преобразователя в процессе испытаний и настройки. Эмиттерно-базовый переход этого транзистора является стабильным термочувствительным элементом. В результате обеспечиваются одновременные измерения температуры и давления. Этот же мощный транзистор можно использовать в качестве нагревателя в термостатируемых преобразователях.

Датчики давления для измерения в диапазоне 0,01...40 МПа разработаны в ГНЦ "НПК "Технологический центр" (г. Москва, Зеленоград). [10].

Рассмотрим базовые конструкции интегральных преобразователей давления (ИПД) и их ЧЭ.

Были разработаны два базовых кристалла: ИПД-1 и ИПД-2 – с плоскими мембранами, обеспечивающие возможность измерения давления в диапазоне 0,1...40 МПа, с одно- и двусторонним расположением контактных площадок.

Кристаллы ИПД-4 и ИПД-9 содержат мембрану с жестким центром. Кристалл ИПД-4 (рис. 1.26) имеет размер 6×6 мм и мембрану размером 3,5×3,5 мм. Данная конструкция позволила почти в 3 раза увеличить чувствительность при измерении малого давления по сравнению с плоской мембраной при равных толщинах

Рис. 1.26. Размещение тензорезисторов на мембране с жестким центром

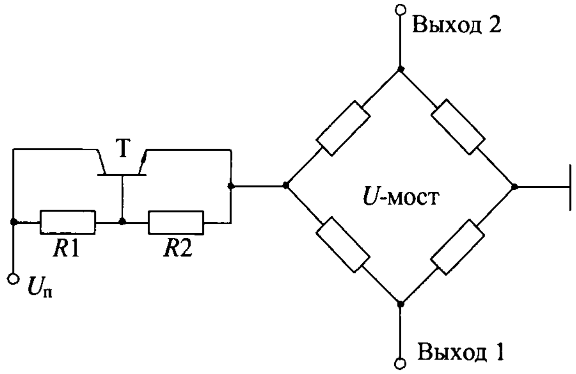


Рис. 1.27. Электрическая схема ИПД: $U_п$ – напряжение питания

мембран. Конструкция обеспечивает также лучшую симметрию топологии тензорезисторов. Кристалл ИПД-9 является аналогом ИПД-4, но с размерами 4×4 мм. Все преобразователи имеют на кристалле транзисторную схему температурной компенсации чувствительности (рис. 1.27) – транзистор Т и резисторы *R*1, *R*2.

Основные характеристики ИПД приведены в табл. 1.4.

Конструкция, состоящая из кристалла ИПД и соединенного с ним основания, названа ЧЭ давления (ЧЭДА – абсолютного, ЧЭДД – дифференциального давления). Схемы конструкций ЧЭД показаны на рис. 1.28.

1.4. Характеристики ИПД

Характеристика	ИПД-1	ИПД-2	ИПД-3	ИПД-4
Габаритные размеры, мм	4×5,7×0,43	4×4×0,43	6,2×6,2×0,43	4×4×0,43
Диапазон измеряемого давления ($p_{ном}$), МПа	0,1…0,6	0,1…25	0,01…0,6	0,04…25
Допустимое давление, МПа	$5p_{ном}$			
Напряжение питания, В	(5 ± 0,3)			
Номинальный выходной сигнал, мВ	50…70		20…70	50...70
Нелинейность выходного сигнала, %	< 0,3			
Начальный разбаланс моста, % от выходного сигнала	±10		±3	
Диапазон рабочих температур, °С	–50…+100			
Температурный коэффициент, %/К:				
чувствительности	< 0,03			< 0,02
нуля	0,05		0,03	

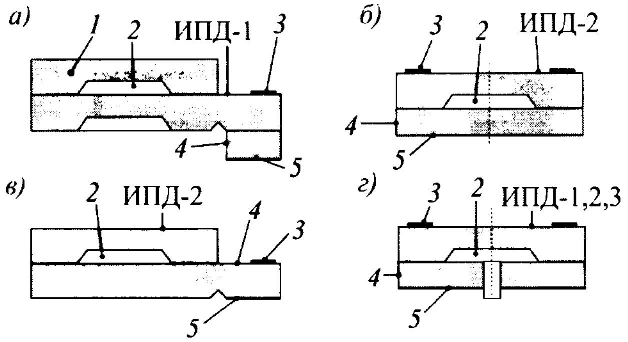


Рис. 1.28. Принципиальные схемы конструкций ЧЭД:
а...*в* – абсолютного давления; *г* – дифференциального (избыточного) давления;
1 – кремниевая крышка; *2* – вакуумная полость; *3* – контактная площадка из алюминия;
4 – кремниевое основание; *5* – место посадки

Конструкция элемента ЧЭДА-1 (рис. 1.28, *а*) состоит из двух кремниевых кристаллов, один из которых – ИПД-1 – имеет удлиненную конструкцию. На рабочей поверхности ИПД-1 расположен кристалл-крышка. В крышке анизотропным травлением сформировано углубление на 100 мкм размером 2×2 мм. Крышка по периметру герметично соединяется с ИПД при помощи легкоплавкого стекла и образует над поверхностью мембраны вакуумную полость. Технологические режимы сварки стеклом, применяемые в ЧЭДА-1, накладывают ограничения на расположение алюминиевых токопроводящих дорожек на кристаллах ИПД-1. Так, дорожки не должны располагаться по краям крышки в зоне взаимодействия со стеклом; вне контакта с крышкой должен располагаться и транзистор. Конструкция ЧЭДА-1 обеспечивает защиту рабочей поверхности кристалла ИПД-1 от внешних воздействий.

В конструкции ЧЭДА-2 (рис. 1.28, *б*) применяется кристалл ИПД-2, который через стекло герметично посажен на кремниевое основание толщиной 2 мм. Вакуумная полость образована под мембраной кристалла ИПД-2. Основания габаритными размерами 4×4×2 мм нарезаются методом электроискровой эрозии, обтравливаются в травителях и окисляются для создания изоляции.

Аналогичным образом создавалась конструкция ЧЭДД-4 (рис. 1.28, *г*) для тензомодулей и датчиков избыточного и дифференциального давлений, за исключением того, что в основании электроискровой эрозией формировалось сквозное отверстие. Элемент давления ЧЭДД-4 был разработан под серию кристаллов ИПД-1, ИПД-2, ИПД-4 для обеспечения возможности измерения давления в широком диапазоне (0,01...40 МПа).

Для применения ИПД в микросхемных корпусах была разработана конструкция ЧЭДА-3 (рис. 1.28, *в*), где кристалл ИПД-2 через стекло соединяется с кремниевым основанием толщиной ≤ 0,5 мм, в котором имеется канавка для механической развязки его от корпуса. Закрепление в корпус элемента ЧЭДА-1 (ЧЭДА-3) – консольное, что обеспечивает хорошую механическую развязку. Высота элемента ЧЭДА-3 не превышает 1 мм, что позволяет применять его во многих модификациях микросхемных корпусов. Принципиальная схема конструкции ЧЭД на базе мембраны с жестким центром приведена на рис. 1.29.

В конструкциях ЧЭД с кристаллами ИПД-4, ИПД-9, мембраны *1* которых имеют жесткие центры с толщиной, равной толщине исходных подложек, применена дополнительная рамка *2* из монокристаллического кремния, изготовленная по

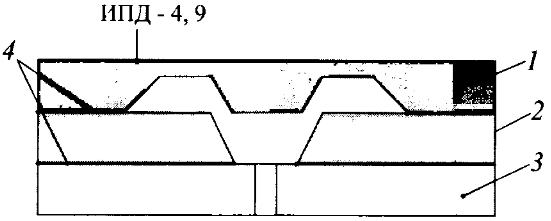


Рис. 1.29. ЧЭД на базе мембраны с жестким центром:
1 – кристалл ИПД-4, 9; *2* – кремниевая рамка; *3* – кремниевое основание; *4* – соединительные слои стекла

технологии объемной микрообработки. В качестве основания *3* также используется монокристаллический кремний. Все кремниевые элементы соединяются легкоплавким стеклом *4*, которое наносится на один из элементов. Отверстия формируются электроискровой эрозией и могут быть выполнены до разделения пластин на кристаллы.

Фирма Motorola (США) на базе упругого элемента в виде кремниевой мембраны, в которую методом ионной имплантации внедрена тензорезистивная структура, разработала серию датчиков давления.

Основной классификационный признак деления датчиков давления – степень интеграции:

- некомпенсированные датчики (Uncompensated) содержат на кристалле только мембрану с тензорезистивным мостом;
- в термокомпенсированные и калиброванные датчики (Compensated) дополнительно включены термисторы для коррекции температурной погрешности нуля и чувствительности, дополнительные подгонные резисторы, сопротивление которых в процессе производства подстраивают лазером для уменьшения разброса параметров датчиков;
- интегрированные датчики (Integrated) имеют дополнительный усилитель, который приводит выходное напряжение датчика к стандартному входному диапазону интегральных аналого-цифровых преобразователях;
- медицинские датчики (Medical) аналогичны термокомпенсированным по структуре, но корпус и температурные режимы соответствуют медицинским стандартам.

Датчики давления разделяются по виду корпусов, в которые монтируется ЧЭ. На рис. 1.30 показана конструктивная схема датчика давления с базовым круглым корпусом. ЧЭ *1* (мембрана) приклеен к внутренней поверхности расточки корпуса *2* и защищен специальным гелем *6*, который равномерно перераспределяет давление на мембрану и изолирует выводы *3* от внешней среды. Деформируемая под действием давления p_1 кремниевая пластина *4* защищена от внешней среды стальной пластиной *5* с отверстием. Окружающая среда имеет давление p_2.

Кроме базового широко распространены и другие виды корпусов. Абсолютные датчики работают в диапазоне давлений 100...700 кПа, а дифференциальные – в диапазоне 4...1000 кПа. Датчики имеют линейную характеристику преобразования со смещением. Инерци-

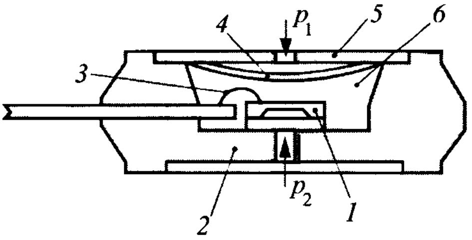


Рис. 1.30. Конструктивная схема датчика давления:
1 – ЧЭ (мембрана); *2* – корпус; *3* – соединительный провод; *4* – кремниевая пластина; *5* – стальная пластина; *6* – гель

онность их характеризуется временем отклика на скачкообразный входной сигнал, которое составляет 1 мс.

Фирма Endevco (США) в выпускаемых датчиках давления использует в качестве ЧЭ мембраны с концентратором напряжения в месте расположения тензорезисторов [5].

Это позволяет получить более высокую чувствительность при сохранении собственной резонансной частоты либо увеличить резонансную частоту при сохранении чувствительности. Кроме того, это значительно повышает прочность мембраны.

Принцип действия устройства такого ЧЭ преобразователя давления иллюстрируется рис. 1.31. Жесткий центр мембраны, состоящий из двух островков пластины исходной толщины, сформирован анизотропным травлением. Узкая полоска между двумя островками и полоска между островком и "берегом" – толстым кольцевым основанием мембраны являются концентраторами механического напряжения, возникающего при воздействии избыточного давления.

Следует отметить, что напряжение, возникающее в центральной и боковой полосках, имеет разные знаки. Если расположить два тензорезистора в центре, а два других – с края вдоль полоски так, как показано на рис. 1.31, то с их помощью можно образовать полную мостовую тензорезисторную схему. В преобразователях фирмы Endevco мембрана ориентирована в плоскости (100), а направление полосок-концентраторов и продольной оси тензорезисторов соответствует направлению [110].

В мостовую схему тензорезисторы объединяются с помощью металлизированных токоведущих дорожек, которые выходят на периферию кристалла к контактным площадкам.

Кроме указанных выше преимуществ преобразователи с концентраторами напряжения обладают лучшей линейностью и существенно большим диапазоном линейного преобразования по сравнению с преобразователями на основе плоских мембран. Этими преимуществами обладают и датчики давления на базе ЧЭ в виде мембран с жестким центром.

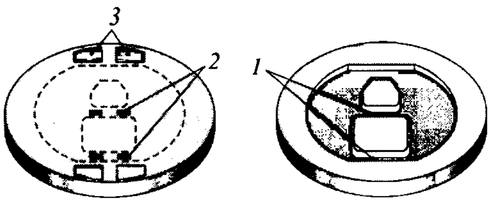


Рис. 1.31. ЧЭ с концентраторами напряжения:
1 – области расположения тензорезисторов с обратной стороны пластины; *2* – тензорезисторы; *3* – контактные площадки

Аналогичный принцип повышения чувствительности МДД путем профилирования мембраны с концентраторами напряжения и размещением тензорезисторов аналогично схеме ЧЭ, показанной на рис. 1.31, использован в конструкции, разработанной в Пензенском государственном техническом университете.

Схема расположения тензорезисторов и общий вид профилированной мембраны высокотемпературного МДД показаны на рис. 1.32.

Мембрана *1* (рис. 1.32, *а*) состоит из утолщенного периферийного основания *2* и специально спрофилированных концентраторов напряжения *3*. ЧЭ содержит монокремниевые тензорезисторы мезатипа (рис. 1.32, *б*), расположенные на мембране на кромках концентраторов напряжения. Высота тензорезисторов зависит от требуемых значений номиналов и может составлять значения от 1 (минимально достижимое, обусловленное технологией анизотропного травления) до 6 мкм. С помощью коммутационных дорожек *4* из кремния p^+ и алюминия все тензорезисторы объединены в мост Уитстона. На концах дорожек сформированы контактные площадки *5*, к которым можно подводить питание и с которых можно снимать выходной сигнал. Поверхности тензорезисторов защищены слоем диоксида крем-

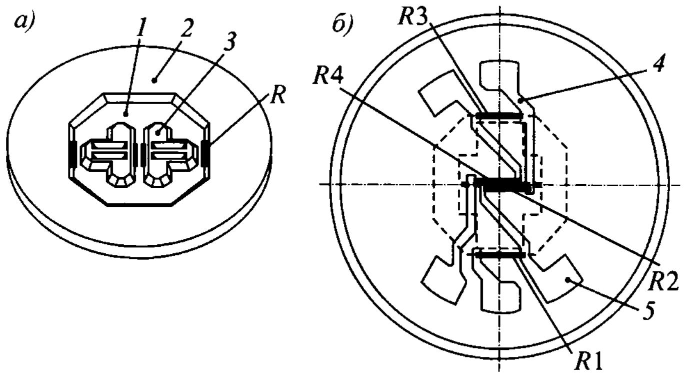


Рис. 1.32. ЧЭ МДД с концентраторами напряжения:
а – общий вид; *б* – расположение тензорезисторов: *1* – мембрана; *2* – основание; *3* – концентратор; *4* – коммутационная дорожка; *5* – контактная площадка

ния как друг от друга, так и от кремниевой подложки. Толщина слоя диоксида кремния 0,1...2 мкм.

Принципиальная схема МДД (разработка Мичиганского университета, США), реализующая принцип компенсационного измерения по схеме на рис. 1.23, *б*, приведена на рис. 1.33.

МДД представляет собой диафрагму *1* (толщина 0,26 мкм; площадь поликремниевой поверхности 20×20 мкм^2 с технологией "кремний поверх слоя диэлектрика"), сформированную на верхней части вакуумно-уплотненного углубления (ОК), вытравленного на кремниевом основании *5*. Подвижный силовой электрод *4* является большой поликремниевой пластиной (200×200 мкм^2) толщиной 1,2 мкм, прикрепленной к центру чувствительной диафрагмы через центральное опорное крепление (36 мкм^2).

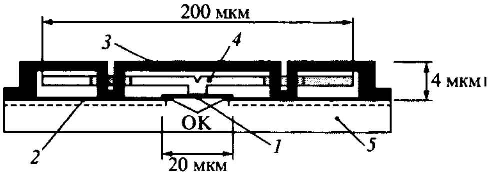


Рис. 1.33. Принципиальная схема МДД компенсационного измерения:
1 – мембрана; *2* – электрод измерительной емкости; *3* – неподвижный силовой электрод; *4* – подвижный силовой электрод; *5* – основание

В некоторых устройствах средняя пластина поддерживается по краям равномерно расположенными четырьмя балками (80×8 мкм^2). Такое добавочное крепление делает пластину более жесткой и обеспечивает электрическое соединение. Неподвижный поликремниевый силовой (управляющий) электрод *3* толщиной 3,2 мкм образован на расстоянии 1,0 мкм поверху средней пластины. Этот электрод поддерживается равномерным массивом якорей, соединенных с подложкой-основанием через отверстия, вытравленные в средней пластине. Измерительный электрод *2* располагается на основании непосредственно под электродом *4*.

При центральной нагрузке отклонение мембраны под давлением 1 ата составит примерно y_0 = 0,2 мкм, что приведет к созданию емкости на измерительном электроде ~100 фФ.

Разработкой датчиков давления кроме ведущих зарубежных фирм Kulite (США), Bruel & Kjer (Дания) и др. занимаются ФГУП "НИИ физических измерений" (г. Пенза), "НИИ "Теплоприбор" (г. Москва), ОАО "НПП "Темп-Авиа" (г. Арзамас), ЗАО "Орлекс" (г. Орел), а также ряд технологических центров, промышленных групп и др.

1.3. ГИРОСКОПЫ

1.3.1. Основные определения

Микромеханические, или микрогироскопы (МГ), являются электромеханическими системами, в которых энергия вынужденных (первичных) колебаний инерционной массы (ИМ) на упругом подвесе (резонатор) при появлении переносной угловой скорости преобразуется в энергию вторичных колебаний, которые содержат информацию об измеряемой угловой скорости. Это преобразование осуществляется вследствие воздействия на резонатор сил (или моментов) инерции Кориолиса при вращении резонатора с переносной угловой скоростью, вектор которой перпендикулярен к вектору количества движения, или момента количества движения (кинетического момента), соответственно для поступательных или вращательных первичных колебаний ИМ.

Первичные колебания называют также режимом движения (РД), или движением по координате возбуждения, а вторичные – режимом чувствительности (РЧ), или движением по координате выходного сигнала.

По виду движения ИМ в РД и РЧ различают гироскопы LL-типа (linear-linear), или LL-гироскопы; гироскопы RR-типа (rotare-rotare), или RR-гироскопы, и гироскопы LR-типа, или LR-гироскопы. В LL-гироскопах ИМ в РД и РЧ совершают поступательные перемещения, в RR-гироскопах – вращательные перемещения, в LR (RL)-гироскопах – различные комбинации поступательных и вращательных перемещений ИМ.

Каждый вид МГ характеризуется набором классификационных признаков, важнейшими из которых являются следующие.

1. Число измерительных осей. МГ могут измерять угловые скорости относительно одной или двух координатных осей. Следовательно, их можно классифицировать по числу измерительных осей: *одно-* или *двухкомпонентный*.

2. Число инерционных масс. Важнейшим элементом МГ является ИМ, поступательное движение которой приводит к появлению количества движения, а вращательное – к моменту количества движения. По этому признаку можно различать *одно-* и *многомассовые* (две и более) МГ. Признак одинаково справедлив для всех типов МГ.

3. Тип подвеса. Известны два типа подвесов: *механические* (*контактные*) и *неконтактные*. Механические подвесы реализуются в виде упругих микроструктур различной конфигурации (стержневые, петлевые, спиральные и др.). Элементы подвеса могут располагаться по периметру ИМ, и такой подвес можно называть наружным, или внешним. Подвес может размещаться в пространстве самой ИМ, либо между инерционными массами в многомассовых МГ. Такие подвесы можно называть внутренними.

Принципиально возможен любой вид неконтактного подвеса, реализованный на физическом принципе, обеспечивающем левитацию ("парение") ИМ. Неконтактный подвес может быть назван по физическому принципу его работы: электростатический, магнитный и др.

4. Наличие кинематических связей. Известно, что для работы МГ необходимо поддерживать постоянные частоту и амплитуду колебаний ИМ (или масс). В одномассовых схемах для решения этой задачи используются дополнительные электронные цепи и датчики. В многомассовых схемах наряду со средствами электроники обеспечить равенство частот и амплитуд можно применением кинематической связи между ИМ. Кинематическая связь является аналогом спарника, применяемого в классических двухгироскопных схемах. Кинематическая связь может быть реализована в *РД*, в *РЧ* или *в обоих режимах одновременно*. Существуют и другие типы кинематических связей между ИМ, например для *увеличения масштабного коэффициента*.

5. Вид перемещения ИМ. Возможны два вида взаимного перемещения ИМ в РД и РЧ. В первом случае в обоих режимах движения ИМ (или масса) перемещаются в одной плоскости, во втором случае ИМ в РЧ выходят из плоскости их перемещения в РД.

6. Тип привода (обратные преобразователи). В МГ могут быть использованы любые типы обратных преобразователей (актюаторы), обеспечивающих привод ИМ в режиме движения с заданными параметрами: магнитоэлектрические, электромагнитные, пьезоэлектрические. В рассматриваемых типах МГ наиболее распространен электростатический привод, выполненный в виде гребенчатых структур.

7. Тип датчика съема сигнала (обратные преобразователи). В МГ могут быть использованы любые типы прямых преобразователей (датчики съема сигнала), которые вырабатывают информацию об измеряемых угловых скоростях: электростатические, магнитоэлектрические, пьезорезистивные, оптические и др.

МГ представляют собой объемные многослойные микроструктуры, изготовленные из кристаллического материала, рабочие процессы в которых поддерживаются электроникой, выполненной по планарной технологии на одном (или нескольких) из слоев микроструктуры. Возможно изготовление МГ и по гибридной технологии – резонатор изготавливается по технологии МЭМС, а электроника – традиционно на отдельных платах.

Амплитуда вторичных колебаний ИМ очень мала, поэтому требуется резонансная настройка, при которой частоты первичных и вторичных колебаний и собственная частота резонатора близки между собой.

МГ могут работать в режимах прямого и компенсационного преобразования (измерений).

Наряду с рассмотренными видами разрабатываются МГ, которые можно определять как камертонные и волновые. Отличительным признаком камертонных МГ (КМГ) является наличие стержневых структур ("ножек"). Существенно и то, что ИМ ножек, как правило, равномерно распределена вдоль их длины и имеется свободный, незакрепленный конец. При появлении переносной угловой скорости, вектор которой перпендикулярен к векторам количества движения элементарных масс, распределенных вдоль ножек, возникают силы инерции Кориолиса, генерирующие вторичные колебания ножек КМГ.

Отличительным признаком волновых МГ является наличие резонаторов, имеющих форму кольца, которое с помощью упругих элементов подвеса скреплено с корпусом, либо форму стержня, закрепление которого в корпусе не препятствует его продольным и поперечным колебаниям.

Кольцо пульсирует в двух взаимно-перпендикулярных направлениях (поперечная упругая волна), т.е. периодически принимает форму овала. При вращении кольца относительно оси, перпендикулярной к его плоскости, скорость вращения оси, вдоль которой пульсирует кольцо (большая ось овала), будет меньше скорости вращения корпуса, а значит и кольца. Угол отставания несет информацию об угле поворота основания относительно инерциального пространства.

В данном случае имеет место генерирование стоячей волны, которая затем прецессирует при появлении переносной угловой скорости основания. Процесс генерирования стоячей волны наблюдается и в так называемых стержневых гироскопах.

Типовыми характеристиками МГ являются: диапазон измерений, чувствительность, полоса пропускания частот, масштабный коэффициент и его стабильность, перекрестная чувствительность, шум, температурная стабильность характеристик и другие эксплуатационные параметры и характеристики.

1.3.2. Микрогироскопы LL-типа

Конструктивным узлом, определяющим функциональные возможности МГ, является ЧЭ. ЧЭ МГ можно называть ИМ (или массы) в подвесе с приводом, который обеспечивает ИМ РД, на который при наличии переносной угловой скорости вследствие возникающего ускорения Кориолиса и соответствующих ему сил инерции, генерируются вторичные колебания (РЧ). На этом основании МГ иногда называют приборами для измерения ускорения Кориолиса.

Ускорение Кориолиса определяется векторным произведением $a_к = 2(\Omega \times v)$ (Ω – вектор мгновенной угловой скорости вращения подвижной системы координат; v – вектор мгновенной линейной скорости тела в подвижной системе координат). Ускорение Кориолиса является вектором, длина которого равна

$$a_к = 2\Omega v \sin\varphi \qquad (1.10)$$

(φ – угол между векторами Ω и v) и который направлен перпендикулярно к векторам Ω и v в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от Ω к v казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора $a_к$, идущим против часовой стрелки.

А. Одномассовые микрогироскопы

На рис. 1.34 приведена принципиальная схема ЧЭ МГ, который состоит из ИМ *1* (величиной m) и подвеса из упругих элементов *3*, *4*, скрепленных с основанием *5* (показано условно). Элементы *2* обеспечивают целостность и жесткость в местах сопряжения упругих элементов. Привод какой-либо физической природы (электростатический, электромагнитный и т.д. – на рисунке не показан) функционально входит в состав ЧЭ.

В общем случае привод развивает силу $F_0 \sin pt$ (F_0, p – соответственно амплитуда силы и частота ее генерации), которая направлена под некоторым малым углом ε ($\sin\varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos\varepsilon \approx \varepsilon$, t – время) к оси x и сообщает ИМ колебания $x = x_0 \sin pt$ (x_0 – амплитуда колебаний). Мгновенный вектор линейной скорости ИМ в РД имеет проекции на оси X и Y:

$$v_x = v\cos\varepsilon \approx v; \quad v_y = -v\sin\varepsilon \approx -v\varepsilon.$$

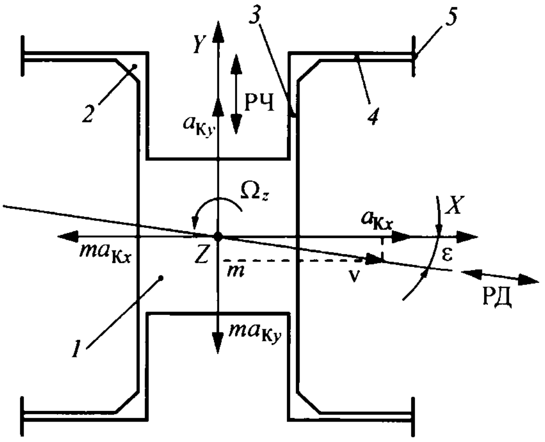


Рис. 1.34. Принципиальная схема одномассового ЧЭ МГ:
1 – ИМ; *2* – жесткий элемент; *3*, *4* – упругие элементы подвеса; *5* – основание (показано условно)

При появлении переносной угловой скорости Ω_z, мгновенный вектор которой направлен в положительном направлении оси z, возникает ускорение Кориолиса вдоль осей X и Y:

$$a_{\text{К}x} = 2\Omega_z v\varepsilon, \qquad a_{\text{К}y} = 2\Omega_z v,$$

вследствие чего ИМ оказывается под действием сил инерции Кориолиса: $ma_{\text{К}x}$ вдоль оси X, и $ma_{\text{К}y}$ вдоль оси Y.

С учетом сил инерции, демпфирования и упругих сил, действующих на ИМ, уравнения ее движения в простейшем случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + b_x\dot{x} + G_x x &= F_0 \sin pt - 2mv\Omega_z\varepsilon; \\ m\ddot{y} + b_y\dot{y} + G_y y &= -(F_0 \sin pt)\varepsilon - 2mv\Omega_z, \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

где b_x, b_y – коэффициенты демпфирования ИМ в направлении соответствующих осей; G_x, G_y – жесткости упругого подвеса в направлении соответствующих осей.

Первое уравнение системы (1.11) описывает РД, а второе – РЧ, из которого следует, что перемещение ИМ вдоль оси Y под действием силы инерции Кориолиса искажается проекцией силы привода на эту же ось, что приводит к ошибке в МГ измерении.

Оценим влияние величины ε на точность измерения Ω_z. Так как $v = \dot{x} = x_0 p \cos pt$, ускорение Кориолиса $a_{\text{К}y} = 2\Omega_z x_0 p \cos pt$. Проекция ускорения ИМ в режиме движения на ось Y равна $a_y = \ddot{x}\varepsilon = -\varepsilon x_0 p^2 \sin pt = \varepsilon x_0 p^2 \cos\,(pt + 90°)$ и на эту составляющую ускорения ИМ реагирует так же, как и на $a_{\text{К}y}$, что приводит к ошибке измерения, которую принято называть квадратурной, поскольку между ускорениями a_y и $a_{\text{К}y}$ существует сдвиг по фазе на 90°.

Запишем отношение амплитуд ускорений

$$a_y / a_{\text{К}y} = \varepsilon p / 2\Omega_z,$$

из которого следует, что при одинаковом порядке ускорения точность соблюдения перпендикулярности между направлениями РД и РЧ должна быть очень высокой. Например, при Ω_z = 0,05 рад/с, p = 10^5 рад/с, $a_y = a_{\text{К}y}$=1 допустимое значение угла ε = 10^{-6} рад, что практически обеспечить не удается.

Квадратурный сигнал имеет ту же частоту, что и привод. Это делает затруднительным фильтрацию помехи. Однако, из-за сдвига на 90° квадратурный сигнал может быть частично исключен с помощью фазочувствительного детектора. Эффективность такой фильтрации зависит от того, насколько точно фазовое соотношение может поддерживаться электроникой.

Следует обратить внимание на то, что в МГ с одномассовым ЧЭ трудно отделить полезный сигнал, обусловленный ускорением Кориолиса, от сигнала, вызванного линейным ускорением, вектор которого имеет составляющую вдоль оси вторичных колебаний (выходная ось).

На рис. 1.35 в дополнение к рис. 1.34 приведены принципиальные схемы ЧЭ, которые применены в большинстве известных конструкций одномассовых МГ. В схеме ЧЭ по рис. 1.35, *а* подвес ИМ *1* относительно основания *5* выполнен в виде упругих элементов *3*, *4*, расположенных вне контура ИМ. В отличие от схемы ЧЭ по рис. 1.34, где все упругие элементы подвеса связаны между собой через ИМ, ЧЭ, выполненный по схеме рис. 1.35, *а*, имеет сопряженные с помощью жестких элементов *2* пары упругих элементов подвеса.

В схеме по рис. 1.35, *б* ЧЭ содержит ИМ *1*, которая упругими элементами *3* соединена с элементом *2* подвеса в форме рамки, а он упругими элементами *4* связан с основанием *5*.

Во всех схемах ЧЭ измерительной является ось z, вокруг которой действует измеряемая угловая скорость Ω_z. В схемах по рис. 1.35, *а*, *б* РД может быть организо-

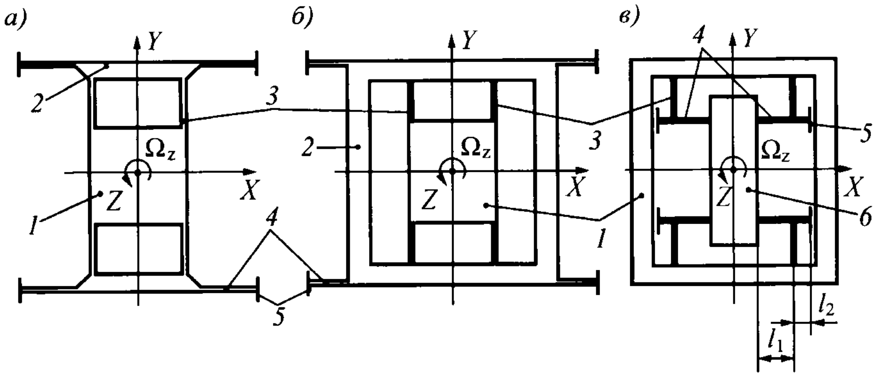


Рис. 1.35. Принципиальные схемы одномассовых ЧЭ МГ:
а – ЧЭ со спаренными упругими элементами внешнего подвеса; *б* – ЧЭ с разделенными упругими элементами внешнего подвеса и промежуточной рамкой; *в* – ЧЭ с сопряженными упругими элементами внутреннего подвеса с функцией механического усиления выходного сигнала; *1* – ИМ; *2* – жесткие элементы подвеса; *3*, *4* – упругие элементы подвеса; *5* – основание; *6* – кинематический элемент

ван вдоль любой из осей *X* и *Y*. Если РД организован вдоль оси *X*, то ось *Y* является осью РЧ и простейшие уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}+b_x\dot{x}+G_x x&=F_0\sin pt;\\ (m_1+m_2)\ddot{y}+b_y\dot{y}+G_y y&=-2m_1\Omega_z \mathrm{v},\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

где m_1 – масса ИМ *1*; m_2 – суммарная масса элементов *2* по схеме 1.35, *а* или масса рамки *2* по схеме 1.35, *б*; b_x – коэффициент демпфирования ИМ *1* вдоль оси *X*; b_y – то же, всей структуры вдоль оси *Y*; G_x – суммарная жесткость элементов *3* в направлении оси *X*; G_y – то же, элементов *4* в направлении оси *Y* (остальные обозначения введены ранее).

Уравнения движения для случая РД, организованного вдоль оси *Y* и осью РЧ вдоль оси *X*, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} (m_1+m_2)\ddot{y}+b_y\dot{y}+G_y y&=F_0\sin pt;\\ m_1\ddot{x}+b_x\dot{x}+G_x x&=-2m_1\Omega_z \mathrm{v},\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

где обозначения соответствуют системе (1.12).

Заметим, что системы уравнений (1.12), (1.13) записаны без учета квадратурных возмущающих сил, которые в реальных конструкциях МГ должны иметь место, и для их компенсации предусматриваются специальные электронные средства.

Увеличенные массы ($m_1 + m_2$) приводят, очевидно, к затянутым переходным процессам по соответствующим осям и режимам (чувствительности или движения).

Для трех схем ЧЭ (рис. 1.34; 1.35, *а*, *б*) после завершения переходных процессов перемещения ИМ в РЧ описываются одинаковыми по структуре зависимостями, простейший вид которых, например из второго уравнения системы (1.11), имеет форму

$$y=-\frac{2m\mathrm{v}\Omega_z}{G_y}. \tag{1.14}$$

Отсюда следуют зависимость перемещений ИМ в РЧ от измеряемой угловой скорости Ω_z основания, параметров ЧЭ и важность измерения в РД скорости v перемещений ИМ и поддержания ее стабильности.

Важнейшими параметрами МГ являются собственные частоты ИМ в РД и РЧ, их стабильность, а также возможность частотной настройки между режимами. В простейшем случае собственные частоты колебаний ИМ, соответствующие, например, системе (1.12), рассчитываются по формулам

$$\omega_{x0} = \sqrt{G_x / m_1}\ ;\ \omega_{y0} = \sqrt{G_y / (m_1 + m_2)}, \tag{1.15}$$

из которых видна, в частности, зависимость собственных частот колебаний от конструктивных особенностей ЧЭ.

Рассмотрим ЧЭ по схеме, представленной на рис. 1.35, *в*. В этой схеме подвес ИМ *1* относительно основания *5* выполнен в виде упругих элементов *3* и *4*. Упругие элементы *4* обеспечивают также подвес элемента *6*. "Точка" сопряжения элементов *3* и *4* делит последний на два отрезка длиной l_1 и l_2.

РД выполняется вдоль оси *X*, и перемещения ИМ *1* обеспечиваются упругими элементами *3*. Элемент *6* при этом остается неподвижным. При появлении угловой скорости Ω_z силы инерции Кориолиса вызывают перемещение ИМ *1* вдоль оси *Y* на величину y_1. Эти силы преодолевают силы упругости элементов *4*, обусловленные их жесткостью и длиной элемента l_2, а также инерционные и силы демпфирования. Элемент *6* при этом перемещается на величину

$$y_2 = y_1(1 + l_1 / l_2), \tag{1.16}$$

пропорционально которой может быть сформирован выходной сигнал МГ.

Упрощенные уравнения движения ИМ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & m_1\ddot{x} + b_x\dot{x} + G_x x = F_0 \sin pt; \\ & [m_1 + m_2(1 + l_1 / l_2)]\ddot{y}_1 + [b_{y1} + b_{y2}(1 + l_1 / l_2)]\dot{y}_1 + G_y y_1 = -2m_1 \nu \Omega_z, \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

где m_1, m_2 – массы элементов *1* и *6* соответственно; b_x – коэффициент демпфирования ИМ *1* в направлении оси *X*; G_x – суммарная жесткость элементов подвеса в направлении оси *X*; b_{y1}, b_{y2} – коэффициенты демпфирования элементов *1* и *6* в направлении оси *Y*; G_y – суммарная жесткость элементов подвеса в направлении оси *Y*.

Для установившегося режима колебаний в соответствии с выражениями (1.16) и (1.17) имеем перемещения кинематического элемента по выходной оси:

$$y_2 = -\frac{2m_1 \nu \Omega_z}{G_y}(1 + l_1 / l_2). \tag{1.18}$$

Отсюда следует принципиальная возможность увеличения выходного сигнала с помощью кинематической передачи, выполняющей функцию механического усилителя.

Полезно обратить внимание на то, что если в схеме 1.35, *в* считать неподвижным, соединенным с основанием элемент *6*, то получаемая структура по кинематике аналогична ЧЭ по рис. 1.34. Разница заключается во взаимном расположении ИМ и подвеса. На рис. 1.34 элементы подвеса окружают ИМ, а на рис. 1.35 подвес находится внутри контура ИМ.

Рассмотрим некоторые конструкции МГ, ЧЭ которых выполнены по рис. 1.34 и 1.35.

Принципиальная схема МГ фирмы Nippondenso Co. (Япония), соответствующая схеме по рис. 1.34, приведена на рис. 1.36. ЧЭ представляет собой ИМ *1* в форме квадрата со стороной длиной 100 мкм и толщиной 2 мкм, выполненную заодно с упругими элементами *2* подвеса и электродами гребенчатых структур 4 и 5. Места "излома" упругих элементов усилены некоторым количеством материала. Вся эта структура с помощью анкеров *3* укреплена на основании на расстоянии 1...2 мкм от него.

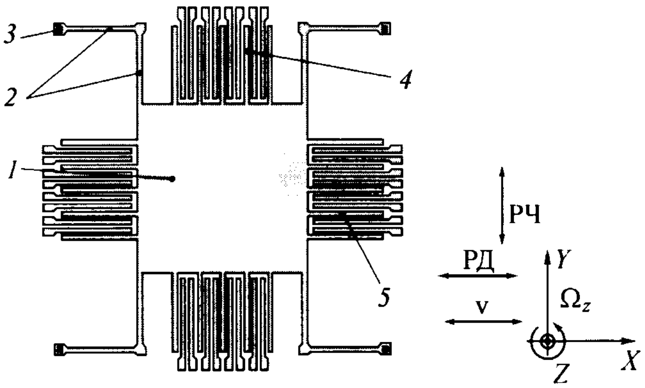


Рис. 1.36. Принципиальная схема МГ фирмы Nippondenso Co.:
1 – ИМ; *2* – упругие элементы подвеса; *3* – анкер; *4* – гребенчатая структура электростатического привода; *5* – то же, электродов измерителей перемещений

Неподвижные электроды структур *4*, *5* с помощью анкерных элементов закреплены на основании. Каждая пара электродов электростатического привода работает на притяжение. Электростатический привод обеспечивает РД ИМ со скоростью v в направлении оси *X*. При появлении переносной угловой скорости Ω_z вокруг оси *Z* возникает сила инерции Кориолиса, обеспечивающая РЧ в направлении оси *Y*. Измерение перемещений ИМ в РЧ осуществляется емкостными измерителями перемещений *5*. Каждый электрод структур *4* и *5* имеет габаритные размеры ~ 100×1×2 мкм.

Принципиальная схема МГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory, кинематика которого аналогична ЧЭ по рис. 1.35, *а*, приведена на рис. 1.37.

ИМ *2*, выполненная в виде рамочной структуры, имеет подвес относительно анкеров *5*, связанных с подложкой, состоящий из упругих элементов *3* и *4* (по 4 шт.), каждая пара которых разделена жестким недеформируемым элементом *1*. ИМ *2* способна перемещаться вдоль оси *X* со скоростью v с помощью электростатических приводов, неподвижные, гребенчатые структуры *8* которых связаны с подложкой, а подвижные электроды являются частью ИМ *2*.

Для измерения перемещений ИМ *2* в РД служит емкостный измеритель *9*, гребенчатая структура которого является частью ИМ *2*, а две неподвижные структуры электродов *10* соединены с подложкой.

Появление угловой скорости Ω_z вокруг оси *Z* вызывает перемещение ИМ *2* вместе с элементами *1* под действием сил инерции Кориолиса вдоль оси *Y* (РЧ). Пе-

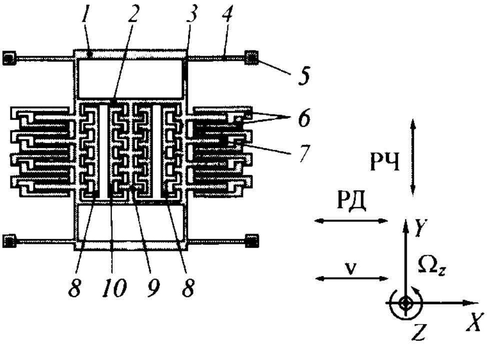


Рис. 1.37. Принципиальная схема МГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:
1 – жесткий элемент подвеса; *2* – ИМ; *3* и *4* – упругие элементы подвеса; *5* – анкер; *6* и *7* – электроды емкостного измерителя перемещений в РЧ; *8* – неподвижные электроды электростатических приводов; *9* и *10* – емкостные измерители перемещений в РД с гребенчатыми структурами

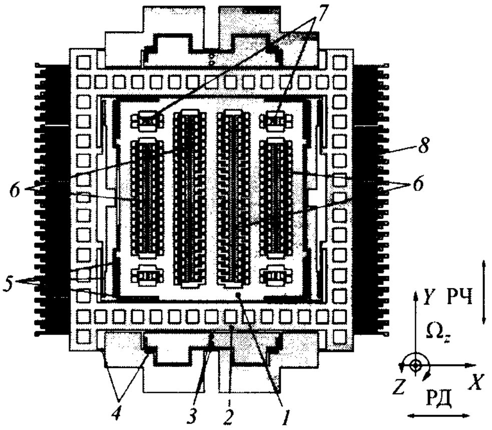


Рис. 1.38. Принципиальная схема МГ фирмы Analog Devices:
1 – внутренняя рамка; *2* – наружная рамка; *3* – анкеры; *4*, *5* – упругие элементы подвеса; *6* – гребенчатые структуры электростатического привода; *7*, *8* – емкостные измерители перемещений

ремещения в РЧ измеряются двумя емкостными измерителями перемещений с двух сторон ИМ *2*, которые состоят из неподвижных электродов *6*, связанных с подложкой, и подвижных *7*, являющихся частью ИМ *2*.

Заметим, что элементы *1* выполняют функцию усиления жесткости в местах соединения элементов *3* и *4*. На рис. 1.36 аналогичная задача выполнена некоторым избыточным количеством материала в местах соединения упругих элементов.

Фирма Analog Devices (США) в 2002 г. приступила к производству МГ на базе технологии MEMS и в настоящее время серийно выпускает гироскопы ADXRS 150 и ADXRS 300 соответственно с диапазоном измерения 150 и 300 °/с. Гироскопы имеют полосу пропускания частот 40 Гц и изготовляются в корпусах с габаритными размерами 7×7×3 мм. Масса МГ ≤ 0,5 г, и при номинальном напряжении 5 В потребляемый ток составляет 5 мА. Впервые в коммерчески доступных гироскопах данного класса имеется встроенная система автотестирования механических и электронных параметров без отключения прибора.

Гироскоп ADXRS представляет собой интегральную микросхему, выполненную на одном кристалле кремния, которая содержит все необходимые электронные компоненты формирования выходного сигнала. В центре микросхемы находятся две микромеханические структуры, являющиеся ЧЭ, выполненными из поликристаллического кремния. Принципиальная схема МГ, соответствующая схеме по рис. 1.35, *б*, приведена на рис. 1.38.

МГ включает в себя две ИМ, выполненные в виде внутренней *1* и наружной *2* рамок. Рамка *1* относительно рамки *2* смонтирована на упругих элементах *5*, пара из которых расположена в каждом из углов рамки *1*, а два других – посередине двух сторон рамки.

Рамка *2*, имеющая по периметру квадратные отверстия для уменьшения собственной массы, вместе с рамкой *1* посредством упругих элементов *4* и дополнительных элементов конструкции связана с анкерами *3*, расположенными симметрично относительно двух сторон рамки *2*. Анкеры обеспечивают размещение всех подвижных элементов конструкции ЧЭ на некотором расстоянии от подложки-основания.

Рамка *1* относительно рамки *2* приводится в колебательное движение вдоль оси *X* (РД) с помощью гребенчатых структур электростатического привода *6*. Информация о параметрах РД считывается емкостными измерителями перемещений *7* и используется в контуре управления РД. При появлении переносной угловой скорости Ω_z под действием силы инерции Кориолиса $2m_1 v \Omega_z$ (m_1 – масса рамки *1*; $v = \dot{x}$ – скорость m_1 в РД) обе рамки суммарной массой $m_1 + m_2$ (m_2 – масса рамки *2*) начинают движение в направлении оси *Y* (РЧ), информация о котором считывается емкостными измерителями перемещений *8*. В микроструктурах направления колебаний ЧЭ в режимах движения и чувствительности взаимно перпендикулярны. Это дает возможность избежать влияния постоянного и виброускорения на выходной сигнал гироскопа.

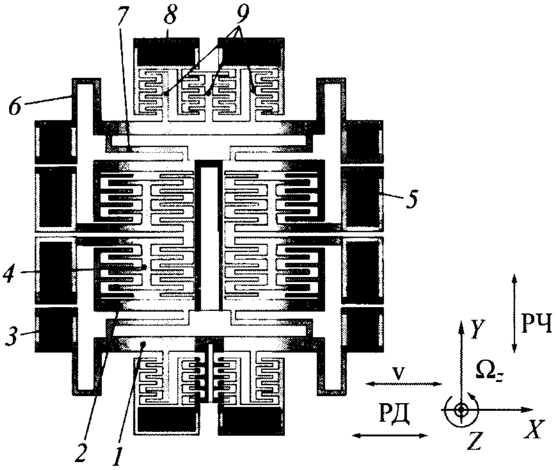


Рис. 1.39. Принципиальная схема МГ фирмы Samsung Electro. Mechanics:
1, *2* – ИМ; *3*, *5*, *8* – анкерные элементы; *4* – гребенчатая структура емкостного измерителя; *6*, *7* – упругие элементы подвеса; *9* – гребенчатые структуры электростатического привода

Высокочастотный сигнал, полученный с емкостных измерителей (датчиков) перемещений, поступает на каскады усиления и демодуляции, преобразующие его в выходное напряжение, пропорциональное измеряемой угловой скорости. В состав микросхемы входит датчик температуры для компенсации температурных погрешностей и калибровки, а также прецизионный источник опорного напряжения.

Гироскопы ADXRS имеют стабильный выходной сигнал при ускорениях до 2000 *g* и могут использоваться, например, как автомобильные датчики переворота. Кроме того, их можно применять в интегрированных с GPS системах навигации, в системах стабилизации различных подвижных объектов и во многих других случаях.

Принципиальная схема МГ фирмы Samsung Electro Mechanics (США), аналогичная схеме по рис. 1.35, *б*, приведена на рис. 1.39.

МГ выполнен в виде планарной конструкции на кремниевой подложке и включает в себя наружную *1* и внутреннюю *2* ИМ, между которыми находятся четыре упругих элемента *7* подвеса, обеспечивающих возможность перемещений ИМ *2* в направлении оси *Y*. Четыре упругих элемента *6* подвеса, размещенных между анкерными элементами *3* и ИМ *1*, гарантируют совместное перемещение ИМ в направлении оси *X*. Электростатические приводы расположены вдоль оси *Y* симметрично относительно ИМ *1* и содержат гребенчатые структуры *9*, объединенные с ИМ *1*, и аналогичные структуры электродов, являющиеся частью анкерных элементов *8*.

Электростатический привод обеспечивает в РД перемещения обеих ИМ со скоростью v в направлении оси *X*. Появление угловой скорости Ω_z приводит к вибрационным перемещениям ИМ *2* под действием сил инерции Кориолиса в направлении оси *Y* (РЧ). В РЧ перемещения ИМ *2* фиксируются четырьмя емкостными измерителями перемещений, гребенчатые структуры *4* электродов которых являются частью ИМ *2* и частью анкерных элементов 5.

По схеме рис. 1.35, *б* выполнена одна из разработок института HSG-IMIT (ФРГ) – гироскоп MARS-LL, схема которого показана на рис. 1.40. МГ изготовлен по планарной технологии, и все его элементы располагаются над подложкой в одной плоскости. ИМ *1* размещается внутри ра-

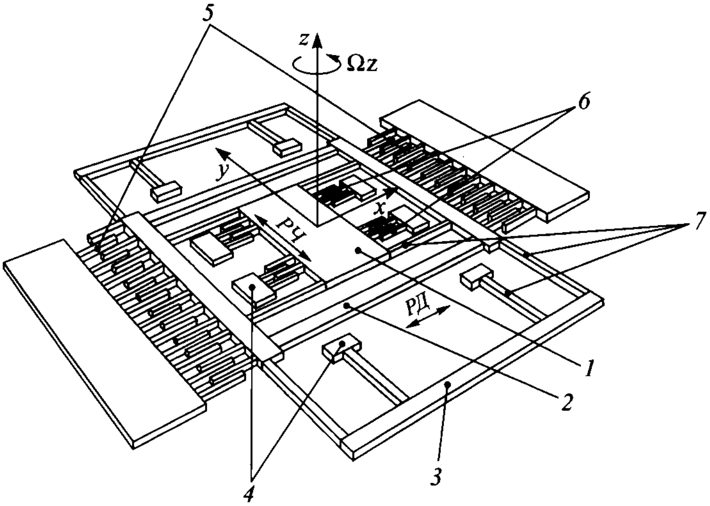


Рис. 1.40. Схема МГ MARS-LL:
1, *2* – ИМ; *3* – жесткий (недеформируемый) элемент подвеса; *4* – анкеры; *5* – гребенчатые структуры электродов электростатических приводов; *6* – емкостные измерители перемещений; *7* – упругие элементы подвеса

мочной ИМ *2*. Упругие элементы *7* подвеса обеспечивают возможность перемещений ИМ *1* и *2* в направлении оси *x*.

Упругие элементы подвеса замыкаются на анкеры *4* через жесткие (недеформируемые) элементы *3*. Электростатические приводы с гребенчатыми структурами электродов *5* обеспечивают РД обеих ИМ. Появление переносной угловой скорости Ω_z приводит к возникновению сил инерции Кориолиса, вызывающих движение ИМ *1* в РЧ, которое фиксируется емкостными измерителями перемещений *6*.

Принципиальная схема МГ фирмы Bosch (Германия), соответствующая схеме по рис. 1.35, *а*, приведена на рис. 1.41. МГ выполнен по планарной, кремниевой технологии, и вся микроструктура расположена на некотором расстоянии над подложкой. ИМ *1* имеет четыре упругих элемента *3* подвеса, которые обеспечивают возможность ее перемещения в направлении оси *X* относительно опорных рамок *6*, *9*. Последние, в свою очередь, могут перемещаться в направлении оси *Y* благодаря малой жесткости упругих элементов *11*, связаных с подложкой через анкеры *10*.

Гребенчатые структуры электродов *2*, *7* могут использоваться в одном из двух режимов.

В первом режиме обе структуры исполняют функцию привода, обеспечивающего движение ИМ *1* со скоростью v вдоль оси *X* (РД). В этом случае напряжение попеременно поступает каждой из структур и подвижные электроды, являющиеся частью ИМ *1*, притягиваются неподвижными электродами, связанными с подложкой анкерами *8*.

Во втором режиме одна из структур электродов *2*, *7* может выполнять функцию привода ИМ *1*, обеспечивающего РД, а другая – функцию емкостного измерителя перемещений ИМ *1*, информация о которых может использоваться в контуре привода.

При появлении переносной угловой скорости Ω_z ИМ *1* под действием сил инерции Кориолиса начинает виброперемещения в направлении оси *Y* (РЧ). Благодаря большой жесткости упругих элементов *3* в направлении оси *Y* вместе с ИМ *1* перемещаются и опорные рамки *6*, *9*, инерционная масса которых увеличивает ИМ *1*. Измерение перемещений в РЧ осуществляется емкостными измерите-

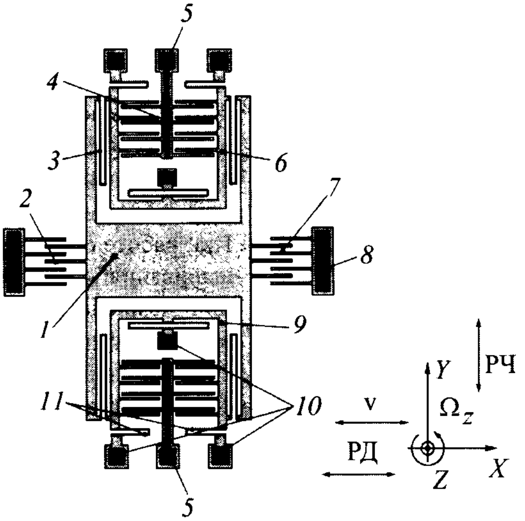


Рис. 1.41. Принципиальная схема МГ фирмы Bosch:
1 – ИМ; *2*, *7* – гребенчатые структуры электродов; *3*, *11* – упругие элементы подвеса; *4* – емкостный измеритель перемещений; *5*, *8*, *10* – анкеры; *6*, *9* – опорные рамки

лями *4*, которые могут быть включены в дифференциальную схему. Подвижные электроды измерителей перемещений являются частью структур опорных рамок, а неподвижные электроды, объединенные в единые структуры, связаны с подложкой анкерами *5*.

Принципиальная схема МГ фирмы Microsensors (США), аналогичная рис. 1.35, *в*, приведена на рис. 1.42.

МГ содержит две ИМ (*1* и *2*), соединенные между собой четырьмя парами упругих элементов *6*, *7* подвеса. Каждый из элементов *7* связан с кремниевой или

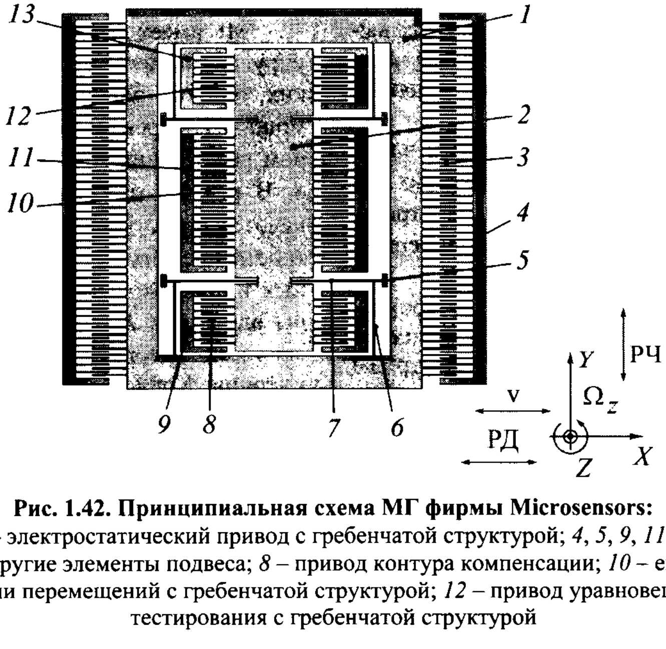


Рис. 1.42. Принципиальная схема МГ фирмы Microsensors:
1, *2* – ИМ; *3* – электростатический привод с гребенчатой структурой; *4*, *5*, *9*, *11*, *13* – анкеры; *6* и *7* – упругие элементы подвеса; *8* – привод контура компенсации; *10* – емкостные измерители перемещений с гребенчатой структурой; *12* – привод уравновешивания и тестирования с гребенчатой структурой

изготовленной из другого материала подложкой анкером *5*. ИМ *1* имеет форму рамки, и ее масса больше, чем ИМ *2*. В РД два электростатических привода *3*, неподвижные электроды гребенчатых структур которых закреплены на подложке анкерами *4*, осуществляют виброперемещения со скоростью v вдоль оси *X* только ИМ *1*. При этом изгибным деформациям подвержены лишь элементы *6*.

Появление угловой скорости Ω_z вокруг оси *Z* приводит к возникновению сил инерции Кориолиса, приложенных к ИМ *1*, под их действием начинаются виброперемещения последней вдоль оси *Y* (РЧ). Эти перемещения из-за большой продольной жесткости элементов *6* вызывают изгибные деформации элементов *7* относительно анкеров *5* и, следовательно, линейные перемещения ИМ *2* вдоль оси *Y*.

Очевидно, что отношение линейных перемещений ИМ *2* к ИМ *1* равно отношению длин элемента *7*, в котором его делит точка соединения с элементом *8*, от точки крепления с ИМ *2* до анкера *5*. Это отношение может быть изменено как путем изменения положения точки соединения элементов *6* и *7*, так и изменением длины выемок в ИМ *2*, в которых расположены элементы *7*. Ширина выемок выбирается такой, чтобы они могли служить ограничителями для чрезмерно деформируемых элементов *7*.

Линейные перемещения ИМ *2* вдоль оси *Y* фиксируются парой емкостных измерителей *10*, неподвижные электроды гребенчатых структур которых анкерами *11* скреплены с подложкой.

Контуры компенсации и настройки, включающие в себя две гребенчатые структуры *8*, неподвижные электроды которых анкерами *9* укреплены на подложке, выполняют две функции: устранение линейных перемещений ИМ *2*, обусловленных квадратурной ошибкой ИМ *1*; настройку резонансной частоты ИМ *2*, если она не обеспечена конструкцией.

МГ имеет также контуры уравновешивания и тестирования с гребенчатыми структурам *12*, неподвижные электроды которых соединены с подложкой анкерами *13*. Контур тестирования при подаче соответствующего напряжения на электроды структур *12* обеспечивает калиброванную раскачку ИМ *2* и проверку, например, качества работы измерителей *10*. При работе структур *12* в контуре уравновешивания может быть реализован принцип компенсационного измерения угловой скорости Ω_z. В этом случае структуры *12* выполняют функцию электростатического датчика силы, компенсирующей силу, которая раскачивает ИМ *2*, т.е. силу инерции Кориолиса, передаваемую на ИМ *2* от ИМ *1* через элементы *6* и *7* подвеса.

Б. Двухмассовые микрогироскопы

Двухмассовые МГ представляют собой, по существу, различные комбинации одномассовых МГ с противофазным перемещением ИМ в РД и РЧ. Рассмотрим две конструкции, иллюстрирующие основные особенности подобных МГ.

Принципиальная схема МГ разработки фирмы The Charles Stark Draper Laboratory (США) приведена на рис. 1.43.

МГ имеет две ИМ *1*, подвешенные на упругих элементах *3* относительно жестких, базовых элементов *2*, которые с помощью анкеров *6* укреплены на некотором расстоянии от подложки (основания) *8*. В режиме движения обе ИМ перемещаются в противофазе посредством электростатических приводов *4*, *7* (центральный и два боковых) гребенчатой структуры вдоль оси *X*. При появлении угловой скорости Ω_y вокруг оси *Y* возникают силы инерции Кориолиса, которые вызывают противофазные перемещения ИМ вдоль оси *Z* с выходом из плоскости *XY*. Перемещения ИМ в РЧ могут быть измерены емкостными измерителями, неподвижные электроды *5* которых размещены на подложке, а подвижные сформированы на пластинах ИМ.

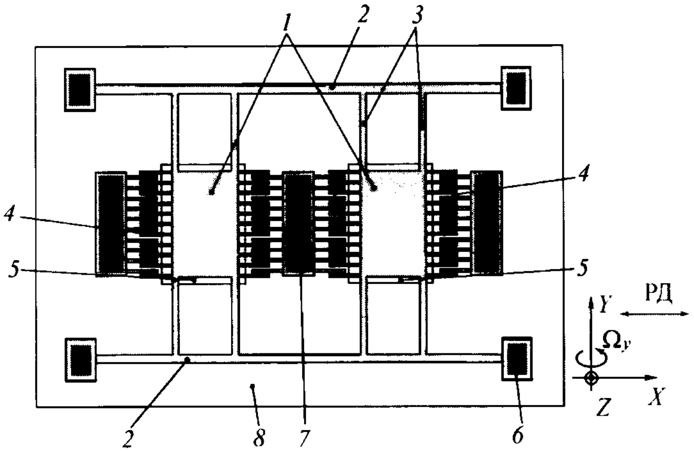


Рис. 1.43. Принципиальная схема МГ разработки фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:

1 – ИМ; *2* – базовый элемент конструкции подвеса; *3* – упругие элементы подвеса; *4*, *7* – электростатические гребенчатые приводы; *5* – электроды измерителей перемещений; *6* – анкер; *8* – подложка (основание)

Видоизмененная конструкция МГ имеет несколько иную конфигурацию подвеса, и его схема приведена на рис 1.44.

На этом рисунке мгновенные направления векторов сил инерции Кориолиса F_1 и F_2 соответствуют направлению вектора Ω_y в положительном направлении оси Y и мгновенным направлениям скоростей v ИМ площадью по 4 мм^2. На подложке-основании могут быть расположены электроды для реализации силовой обратной связи в режиме компенсационного измерения.

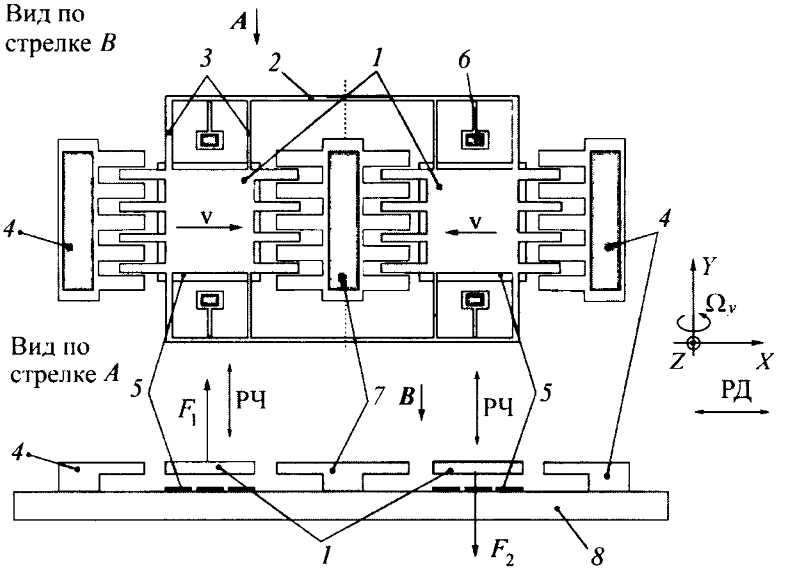


Рис. 1.44. Видоизмененная принципиальная схема МГ разработки The Charles Stark Draper Laboratory (обозначения см. на рис. 1.43)

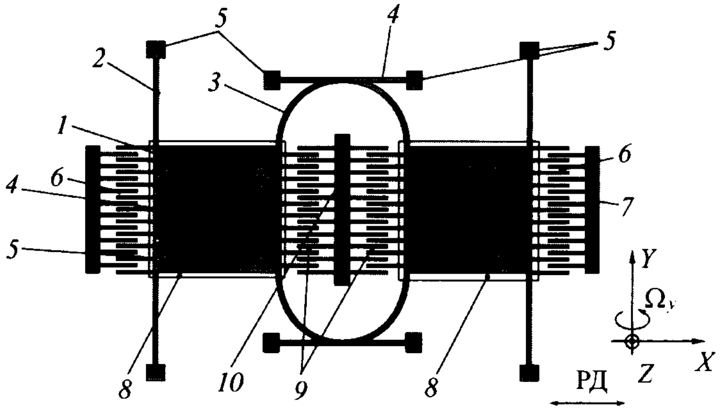


Рис. 1.45. Принципиальная схема МГ фирмы Analog Devices:
1 – ИМ; *2–4* – упругие элементы подвеса; *5*, *7*, *10* – анкеры; *6* – электростатические приводы с гребенчатыми структурами; *8* – неподвижные электроды емкостных измерителей перемещений в РЧ; *9* – емкостные измерители перемещений в РД с гребенчатыми структурами

В простейшем случае при условии равенства ИМ $m_1 = m_2 = m$, полной синхронности противофазных движений в РД и полной симметрии упругих свойств подвеса движение каждой ИМ может быть описано системой уравнений, идентичной системе (1.11):

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{x} + b_x\dot{x} + G_x x = F_0 \sin pt; \\ & m\ddot{z} + b_z\dot{z} + G_z z = -2m\,\mathrm{v}\,\Omega_y , \end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

где координата x соответствует РД, а координата z – РЧ.

Технология изготовления гироскопа основана на травлении кремниевой пластины. Структура, получаемая анодной сваркой, прикрепляется к подложке из стекла марки Pyrex, на которой размещаются электроды. Для получения конечной структуры используются реактивное ионное травление и диффузия бора.

Серийная технология изготовления гироскопа была передана корпорации Rockwell International (США). Для автомобильных применений гироскоп имеет полосу пропускания частот 50 Гц и диапазон измеряемых скоростей 50...500 °/c.

Принципиальная схема МГ фирмы Analog Devices (США) приведена на рис. 1.45.

МГ содержит две ИМ *1* в форме квадрата с длиной стороны 200 мкм, которые четырьмя упругими элементами *2*, двумя дугообразными элементами *3* радиусом 140 мкм и двумя растяжками *4*, длиной 280 мкм на анкерах *5* соединены с подложкой, изготовленной из моно- или поликристаллического кремния. Соединение элементов *3* и *4* выполнено на серединах их длин. Подвижные электроды гребенчатых структур *6* электростатических приводов являются частью ИМ, а неподвижные связаны с подложкой анкерами *7*.

В режиме движения ИМ совершают противофазные движения со скоростью v, вдоль оси *X*, и это движение контролируется емкостными измерителями перемещений *9*, соединенными с подложкой анкером *10*. При появлении угловой скорости Ω_y вокруг оси *Y* противофазные силы инерции Кориолиса вызывают виброперемещения ИМ вдоль оси *Z*, фиксируемые емкостными измерителями перемещений, подвижные электроды которых расположены на ИМ, а неподвижные *8* – на подложке.

Общим недостатком двухмассовых гироскопов, имеющих независимые упругие подвесы каждой ИМ, является сложность обеспечения равенства их собственных частот и синхронности противофазных колебаний. Возможно коробление пластин. Плоскопараллельное перемещение электродов измерителей, особенно при малых (1...3 мкм) зазорах между ними, может привести к электростатическому залипанию пластин ИМ. Естественный путь устранения этого недостатка – увеличение жесткости подвеса. Однако при этом уменьшается чувствительность к измеряемой угловой скорости и изменяются частотные характеристики МГ, так как у двухмассовых МГ перемещение пластин ИМ перпендикулярно к плоскости подложки в РЧ, демпфирование оказывается более интенсивным и менее предсказуемым из-за сжимаемости и разрежения газового слоя по сравнению с МГ, в которых эти перемещения параллельны подложке.

Вместе с тем, наличие двух ИМ, выходящих из плоскости и движущихся в противофазе, позволяет выполнить простые операции выделения сигналов. Пусть, например, в направлении оси Z действует ускорение a_z. Тогда на ИМ сказываются силы $m(a_z + 2\text{v}\Omega_z)$ и $m(a_z - 2\text{v}\Omega_z)$. Если выходные сигналы, пропорциональные действующим силам, вычитаются одно из другого, тогда устраняется действие a_z, а если эти сигналы суммируются, то на выходе формируется сигнал, пропорциональный ускорению a_z.

Существует большое разнообразие МГ LL-типа, конструкции которых в основном повторяют изложенные выше особенности их построения.

1.3.3. Микрогироскопы LR-типа

Принципиальные схемы ЧЭ МГ (без приводов ИМ, которые обеспечивают РД), иллюстрирующие две конструкции с различными вариантами взаимных перемещений ИМ в РД и РЧ, приведены на рис. 1.46. В схеме ЧЭ на рис. 1.46, *а* перемещения ИМ в РД и РЧ происходят в одной плоскости, а в схеме на рис. 1.45, *б* – в разных.

В обеих схемах ИМ *1* связаны упругими элементами *2* с жесткими элементами *3* подвеса, которые, в свою очередь, через упругие элементы *4* повеса и анкеры (элементы крепления) *5* соединены с подложкой. Микроструктуры ЧЭ располагаются на некотором расстоянии над подложкой.

ЧЭ, собранный по схеме рис. 1.46, *а*, работает следующим образом. ИМ *1* имеют возможность благодаря малой жесткости упругих элементов *2* в направлении осей X и Y синхронно в противофазе перемещаться относительно жестких элементов конструкции с помощью приводов со скоростями v.

Тем самым реализуется РД в направлении осей X и Y. При появлении угловой скорости Ω_z вокруг оси Z возникает ускорение Кориолиса и, соответственно, на каждой ИМ – силы инерции Кориолиса, которые находятся в плоскости XY. Эти силы действуют на плече, равном радиусу R_0 окружности, проходящей через центры ИМ, и развивают момент вокруг оси Z, равный $M_z = 4F_K R_0 = 8m\text{v}\Omega_z R_0$ (m – масса ИМ). Момент M_z из-за малой изгибной жесткости упругих элементов *4* приводит к их деформированию и угловым перемещениям ИМ вместе с жесткими элементами конструкции вокруг оси Z. Таким образом реализуется РЧ вокруг оси Z.

На рис. 1.46, *а* показаны мгновенные величины векторов v, направление измеряемой угловой скорости Ω_z и соответствующие им векторы F_K. При изменении направление векторов v изменяется на противоположное направление векторов F_K и развиваемого ими момента M_z. Следовательно, при линейных виброперемещениях ИМ в РД имеют место угловые виброперемещения ЧЭ вокруг выходной оси в РЧ (рис. 1.46, *в*).

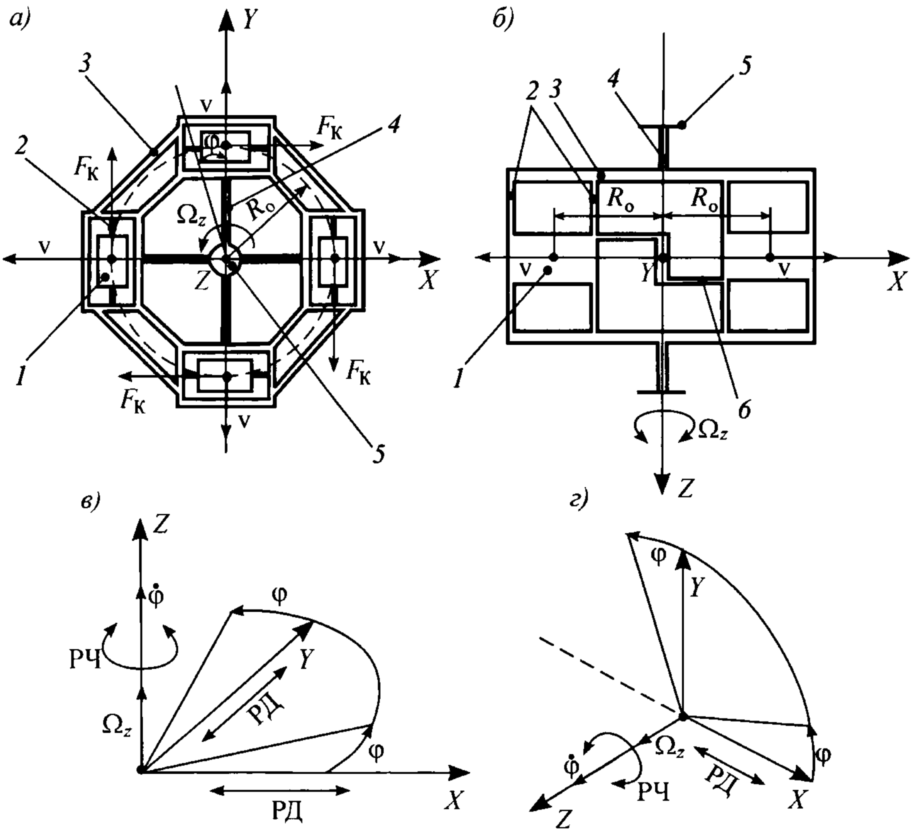


Рис. 1.46. Принципиальные схемы ЧЭ:
а – перемещения ИМ в РД и РЧ в одной плоскости; *б* – то же, в разных плоскостях; *в*, *г* – направления РД и РЧ: *1* – ИМ; *2* – упругие элементы подвеса РД; *3* – жесткие элементы подвеса; *4* – упругие элементы подвеса РЧ; *5* – анкеры; *6* – кинематическая связь

В предположении, что все ИМ одинаковы, конструкция ЧЭ симметрична, упругие свойства всех элементов *2* и элементов *4* между собой идентичны, простейшая система уравнений, описывающая линейные перемещения одной ИМ в РД, например, по координате X и угловые колебания ЧЭ вокруг оси Z по координате φ в РЧ, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + b_x\dot{x} + G_x x &= F_0 \sin pt; \\ J_\varphi\ddot{\varphi} + b_\varphi\dot{\varphi} + G_\varphi\varphi &= -8m\mathrm{v}\Omega_z R_0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

где b_x, G_x – коэффициент демпфирования и жесткость упругих элементов *2* для одной ИМ; F_0, p – параметры силы, генерирующей РД; J_φ – момент инерции всей микроструктуры ЧЭ относительно оси Z; b_φ, G_φ – коэффициент демпфирования и жесткости всех упругих элементов *4* при движении ЧЭ по координате φ.

Уравнение движения ИМ в РД аналогично для всех рассмотренных ранее схем МГ. Здесь надо напомнить еще раз, что желательно измерение скорости $\mathrm{v} = \dot{x}$ ИМ в РД, так как эта величина необходима для вычисления ускорения Кориолиса.

Из уравнения движения для координаты φ в установившемся режиме следует выражение

$$\varphi = -\frac{8m\mathrm{v}\Omega_z R_0}{G_\varphi}, \qquad (1.21)$$

откуда видно, что угол поворота ЧЭ вокруг оси Z содержит информацию об измеряемой угловой скорости. Отметим, что минимальное число конструктивных узлов с ИМ – 2 шт., а максимальное зависит от требуемых характеристик ЧЭ и его габаритных размеров.

Работа ЧЭ по рис. 1.46, *б* происходит следующим образом. Привод обеспечивает синхронное, противофазное движение ИМ *1* в направлении оси X. Кинематическая связь *6*, которая по принципу работы аналогична антипараллелограмму, способствует синхронизации противофазных движений ИМ в РД. Кинематическая связь *6* необязательна.

При появлении угловой скорости Ω_z возникают силы инерции Кориолиса. Для принятого мгновенного направления векторов v и Ω_z для правой ИМ сила $F_\text{К}$ направлена перпендикулярно к плоскости XZ в отрицательном направлении оси Y, а для левой – наоборот. В результате вокруг оси Z возникает момент сил инерции Кориолиса $M_z = -4m\mathrm{v}\Omega_z R_0$, вектор которого направлен в отрицательную сторону оси Z.

При изменении направления векторов v изменится и направление вектора M_z, что вызовет колебательные движения ЧЭ в РЧ вокруг оси Z. Очевидно, что в РЧ упругие элементы *4* работают как торсионы, т.е. на кручение вокруг оси Z (рис. 1.46, *г*).

Уравнения движения ИМ в РД аналогичны первому уравнению системы (1.20), а уравнение ЧЭ в РЧ – второму уравнению этой системы:

$$J_\varphi \ddot{\varphi} + b_\varphi \dot{\varphi} + G_\varphi \varphi = -4m\mathrm{v}\Omega_z R_0,$$

где G_φ – жесткость упругих элементов *4* на кручение вокруг оси Z; остальные параметры те же, что и в системе (1.20).

"Закрутка" ЧЭ вокруг оси Z определяется формулой (1.21) с заменой коэффициента 8 на 4.

Следует обратить внимание на то, что схема на рис. 1.46, *б* является общей и по отношению к рис. 1.46, *а*. Действительно, если выполнить элементы *4* с малой изгибной жесткостью вокруг оси Y, то при измерении угловой скорости вокруг этой оси движение ЧЭ будет в плоскости XZ. Число ИМ в этом случае можно увеличивать, как об этом упоминалось выше.

Рассмотрим конструкции МГ, ЧЭ которых соответствуют схемам на рис. 1.46.

Общий вид конструкции МГ, кинематика ЧЭ которого отвечает схеме на рис. 1.46, *а*, показан на рис. 1.47.

ЧЭ состоит из восьми ИМ *1*, которые на упругих элементах *2* подвеса сформированы с круговой рамкой *3*, закрепленной, в свою очередь, посредством четырех радиальных упругих элементов *4* на анкерах *5*, связанных с подложкой. В режиме движения все ИМ, образующие ЧЭ, с помощью гребенчатых электростатических двигателей *6* перемещаются в радиальных направлениях со скоростями v. Каждая пара диаметрально противоположных ИМ перемещается синхронно и в противофазе.

Роторные гребенчатые структуры двигателей сформированы вместе с ИМ, а статорные расположены на подложке. При угловой скорости Ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости подложки, возникают силы инерции Кориолиса, которые создают момент сил, вызывающий разворот рамки вместе с ЧЭ относительно подложки. При заданных на рис. 1.47 мгновенных направленных скоростей v и Ω вращающий момент направлен по часовой стрелке. Угловые перемещения рамки измеряются емкостными датчиками перемещений *7*, роторные части которых сформированы вместе с рамкой, а статорные – с подложкой.

Оцифровки на рис. 1.46 и 1.47 соответствуют друг другу до поз. *5* включительно.

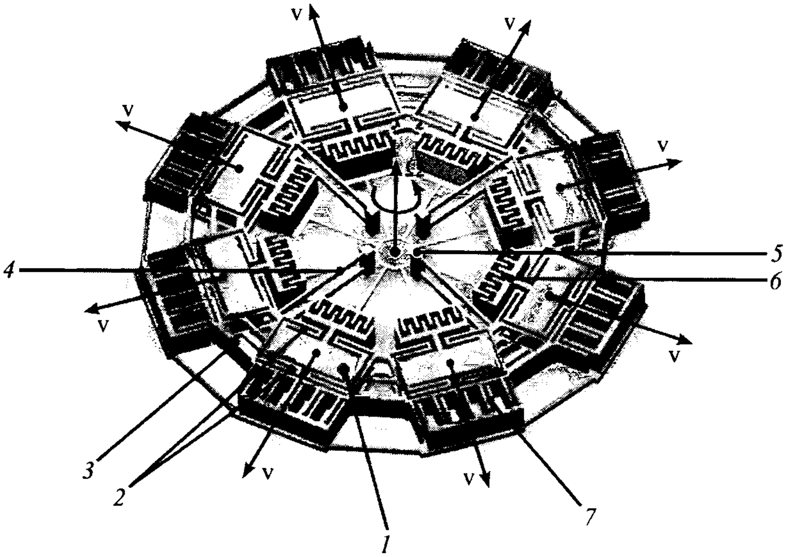


Рис. 1.47. Общий вид конструкции МГ:
1 – ИМ; *2* – упругие элементы подвеса ИМ; *3* – жесткий рамочный элемент конструкции; *4* – упругий элемент подвеса рамки; *5* – анкер; *6* – электростатический двигатель (привод); *7* – емкостный датчик (измеритель) перемещений

Принципиальная схема МГ фирмы Samsung Electronics Co. (Южная Корея) с ЧЭ, аналогичным схеме по рис. 1.46, *б*, приведена на рис. 1.48.

МГ включает в себя ИМ *1*, которые посредством четырех пар упругих элементов *2* подвеса могут перемещаться вдоль оси *X* относительно жестких, недеформируемых элементов *3* подвеса, объединенных в единую конструкцию жестким элементом *13*.

ИМ *1* соединены друг с другом элементами *14*, которые осуществляют кинематическую связь между ними таким образом, что достигается механическая синхронизация противофазных движений ИМ. В точке пересечения элементов *13* и *14* происходит разворот элементов *14* как единого стержня вокруг воображаемой оси. Вся микроструктура с помощью торсионов *4*, т.е. упругих элементов, обеспечивающих возможность ее вращательных движений вокруг оси *Z*, установлена на анкерах *5* на некотором возвышении над кремниевой подложкой.

Противофазное движение ИМ со скоростью v (РД), синхронизируемое кинематической связью *14*, обеспечивается гребенчатыми структурами электростатических приводов *8* (левого и правого). Информацию об этих движениях выдают емкостные измерители перемещений *10*, которые могут быть включены в контур управления РД.

При возникновении угловой скорости Ω_z вокруг оси *Z* на каждую ИМ действуют силы инерции Кориолиса, которые создают вибрационный вращающий момент, вызывающий угловые движения элементов *3* вместе с ИМ вокруг оси *Z* (РЧ). Под электродами, сформированными на пластинах ИМ, расположены электроды *11* емкостных измерителей угловых перемещений ИМ в РЧ. На кремниевой подложке (основание МГ) выращен слой диоксида кремния, на котором находятся контактные площадки *6*, *7*, *9*, *12* и идущие от них токопроводящие дорожки к соответствующим элементам конструкции.

Принципиальная схема МГ разработки фирмы The Charles Stark Draper

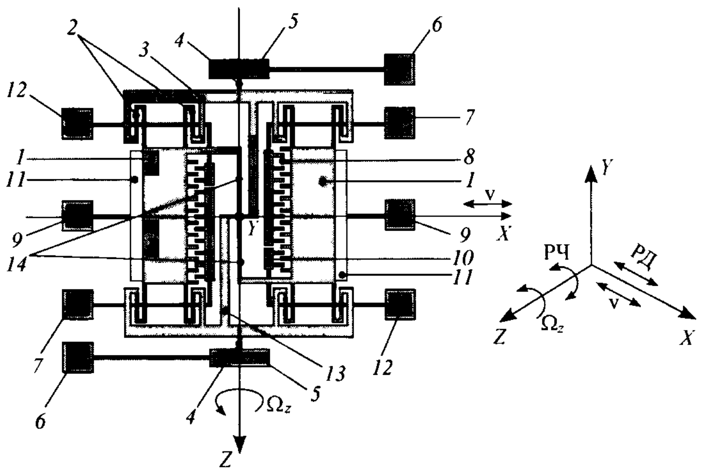


Рис. 1.48. Принципиальная схема МГ фирмы Samsung Electronics:
1 – ИМ; *2* – упругие элементы подвеса; *3*, *13* – элементы подвеса; *4* – торсионы; *5* – анкеры; *6*, *7*, *9*, *12* – контактные площадки; *8* – гребенчатая структура электростатического привода; *10* – измеритель перемещений РД; *11* – электроды емкостных измерителей перемещений РЧ; *14* – элементы кинематической связи

Laboratory, ЧЭ которого соответствует схеме на рис. 1.46, *б* (без кинематической связи между ИМ) приведена на рис. 1.49.

ЧЭ состоит из двух ИМ *1*, которые с помощью упругих элементов *2*, *4* подвеса и жесткого элемента *3* связаны с анкерами *5*, скрепленными с подложкой. На последней расположены также статоры гребенчатых структур электростатических приводов *6*, *7*, *9* (правого, центрального и левого) и неподвижные электроды *8* емкостных датчиков (измерителей) перемещений, подвижные электроды которых размещены на ИМ. Подвод электропитания и съем информационных сигналов осуществляется через токоподводы *10* и контактные площадки *11*.

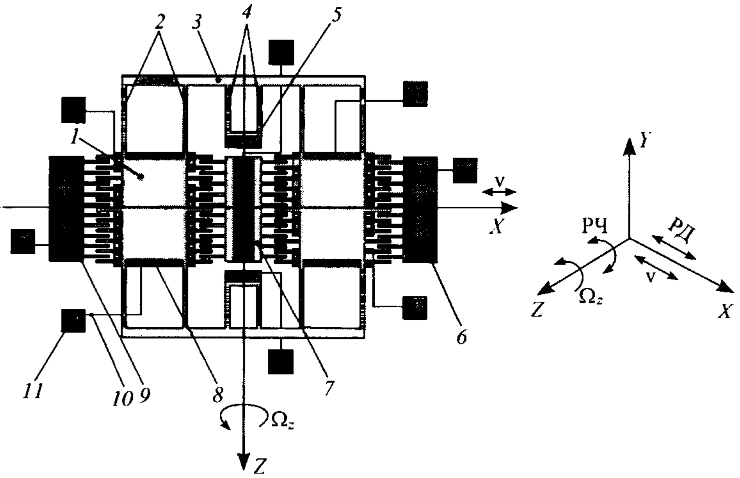


Рис. 1.49. Принципиальная схема МГ разработки Draper Laboratory:
1 – ИМ; *2*, *4* – упругие элементы подвеса; *3* – жесткий элемент подвеса; *5* – анкер; *6*, *7*, *9* – электростатические приводы; *8* – неподвижный электрод емкостного измерителя перемещений; *10* – токоподвод; *11* – контактная площадка

Режим движения ИМ в противофазе осуществляется в направлении оси X со скоростью v. При появлении угловой скорости Ω_z вокруг оси Z (ось чувствительности) ИМ под действием сил инерции Кориолиса выходят из плоскости XZ в противофазе, вызывая угловые колебания рамки, имея в виду, что обеспечена малая жесткость на кручение вокруг оси Z упругих элементов *4*. Колебания ИМ фиксируются емкостными измерителями.

Первые образцы прибора имели дрейф 0,5...1 °/с, который в дальнейшем был уменьшен. Фирма Boeing (США) освоила выпуск гироскопов и успешно применила их в автомобильной промышленности. Подобные гироскопы были использованы в разработанной фирмой The Charles Stark Draper Laboratory системе для управления и наведения реактивных снарядов ВМФ США. Дрейф гироскопов, входящих в систему, составлял 1000 °/ч.

1.3.4. Микрогироскопы RR-типа

В МГ RR-типа движение ИМ в РД и РЧ носит вращательный характер. Сочетание относительного, вращательного движения ИМ в РД и ее переносного, вращательного движения в РЧ приводит к возникновению момента сил инерции Кориолиса, который носит название "гироскопический момент".

А. Гироскопический момент и ЧЭ микрогироскопов

В теории гироскопов введено понятие "регулярная прецессия" вращающегося твердого тела, закрепленного в одной точке. Регулярной прецессией вращающегося с постоянной скоростью Ω вокруг своей оси z твердого тела (ротора) (рис. 1.50, *а*) называется такое движение, при котором ось z вращается с постоянной скоростью ω вокруг неподвижной оси x, сохраняя с ней один и тот же угол. Ось z описывает в пространстве конус. Ось x этого конуса называется осью прецессии, а ω – угловой скоростью прецессии.

Найдем силу инерции Кориолиса, действующую на произвольную точку ротора, вращающегося со скоростью Ω вокруг оси z и одновременно вращающегося вокруг оси x со скоростью ω (рис. 1.50, *б*). Оси x и z взаимно перпендикулярны, а скорость Ω бóльшая по сравнению с ω.

Так как ось z является осью симметрии тела, то центробежные силы относительного движения взаимно уравновешиваются. Центробежными силами переносного вращения ввиду малости угловой скорости ω пренебрегаем. Ускорение Кориолиса $a_К$ для одной точки, имеющей относительную скорость $v_r = \Omega r$ (r – расстояние точки от оси вращения z), находится по формуле

$$a_К = 2\omega v_r \sin\varphi = 2\omega\Omega r \sin\varphi.$$

Это ускорение направлено параллельно оси Z. Элементарная сила инерции Кориолиса для этой точки направлена в сторону, противоположную ускорению $a_К$, и равна

$$dF_К = (2\Omega\omega r \sin\varphi)dm = 2\Omega\omega x dm, \quad (1.22)$$

где $x = r\sin\varphi$.

Представим ротор в виде диска со средней (экваториальной) плоскостью, совмещенной с плоскостью xy (рис. 1.51), где расположена произвольная точка, на которую действует сила, описанная формулой (1.22).

Проекции элементарной силы [см. формулу (1.22)] на оси координат

$$dF_z = -2\Omega\omega x dm;$$

$$dF_y = 0; \qquad dF_x = 0,$$

а элементарные моменты

$$dM_x = 2\Omega\omega xy dm;$$

$$dM_y = 2\Omega\omega x^2 dm; \qquad dM_z = 0.$$

Поэтому для всего ротора

$$F_z = -2\Omega\omega \int x dm; \quad F_y = F_x = M_z = 0;$$

$$M_x = 2\Omega\omega \int xy dm; \quad M_y = 2\Omega\omega \int x^2 dm.$$

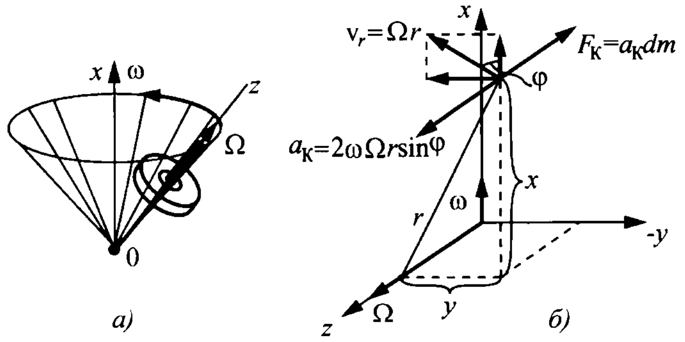


Рис. 1.50. Регулярная прецессия ротора:
а – конус прецессии; *б* – определение силы инерции Кориолиса

Для интегралов имеют место равенства:

$\int x dm = 0$, так как ЦМ лежит на оси *Z*;

$\int xy dm = 0$ – вследствие симметрии; действительно, каждой точке в первой четверти с координатами (+*x*, –*y*) соответствуют в других четвертях симметричные точки с координатами (+*x*, +*y*; +*y*, –*x*; –*x*, –*y*).

Очевидно, что для этих четырех точек $\int xy dm = 0$, а так как весь ротор можно рассматривать состоящим из совокупностей по четыре такие точки в каждой, то и для него справедливо равенство $\int xy dm = 0$.

Вследствие симметрии ясно, что $\int x^2 dm = \int y^2 dm$, и поэтому

$$J_z = C = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm =$$
$$= \int x^2 dm + \int y^2 dm = 2\int x^2 dm,$$

откуда $\int x^2 dm = \frac{1}{2} C$, где *C* – осевой момент инерции ротора.

С учетом найденных величин интегралов получим окончательно

$$F_x = F_y = M_x = M_z = 0$$

и

$$M_y = C\Omega\omega = H\omega,$$

где $H = C\Omega$ – кинетический момент ротора.

Следовательно, прецессия симметричного тела вращения вызывает силы инерции Кориолиса, которые дают постоянный по величине и направлению момент.

Момент, создаваемый силами инерции Кориолиса, называется гироскопическим моментом, эффектом или реакцией и проявляется в давлении оси вращающегося тела на опоры. Гироскопический момент для случая, когда ось ротора *z* составляет с осью прецессии *x* постоянный

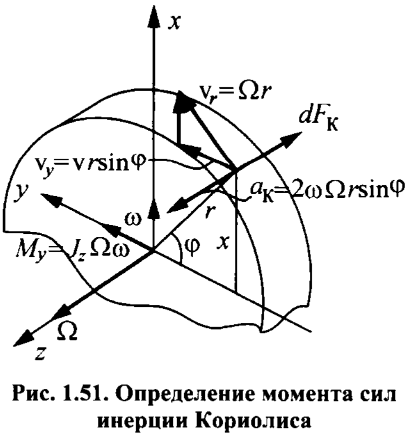


Рис. 1.51. Определение момента сил инерции Кориолиса

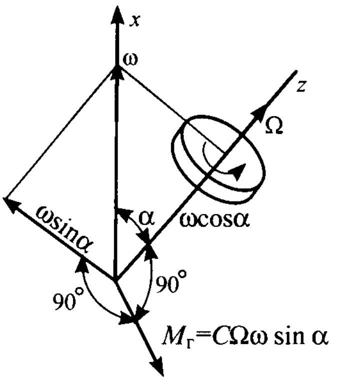


Рис. 1.52. Гироскопический момент симметричного ротора в случае его прецессии по конусу

угол α (рис. 1.52), находят, проектируя угловую скорость прецессии ω на направление оси ротора z и направление, перпендикулярное к ней. Гироскопический момент вызывается только перпендикулярной составляющей ωsinα, и величина его вычисляется по формуле

$$M_г = C\Omega\omega\sin\alpha. \qquad (1.23)$$

Направление момента $M_г$ определяется по одному из следующих правил (рис. 1.53):

1. Если между осью собственного вращения ротора и осью прецессии имеется угол (рис. 1.53, *а*), возникает момент, стремящийся совместить по кратчайшему пути ось тела с осью прецессии так, чтобы оба вращения совершались в одну сторону.

2. Если оси собственного вращения ротора и его прецессии взаимно перпендикулярны, то направление гироскопического момента получается, если вектор угловой скорости прецессии ω повернуть вокруг оси ротора в сторону его вращения на 90° (рис. 1.53, *б*). Это же правило можно применить и к случаю неперпендикулярных осей, для чего предварительно проектируется угловая скорость прецессии на направление оси ротора и на направление, перпендикулярное к ней. Направление, вектора гироскопического момента получается при повороте перпендикулярной составляющей вокруг оси ротора в сторону его вращения на 90° (см. рис. 1.52).

Таким образом, прецессия вызывает гироскопический момент $M_г$, и, на основании закона о равенстве действия и противодействия и согласно началу Д'Аламбера, следует, что момент $M_в$ внешних сил должен уравновесить гироскопический момент, т.е. $M_в + M_г = 0$, или $M_в = -M_г$.

Итак, если мы наблюдаем прецессию ω вращающегося с угловой скоростью Ω ротора, то момент внешних сил $M_в$, являющийся причиной прецессии, равен гироскопическому моменту и направлен в противоположную ему сторону.

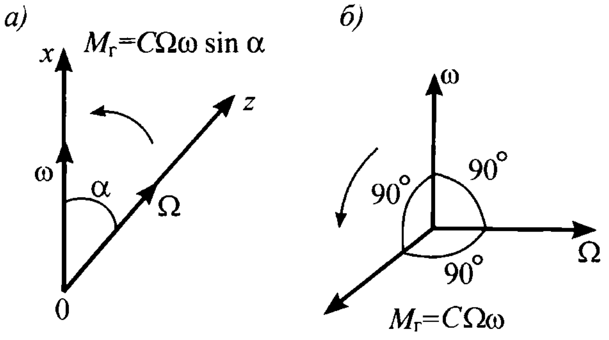


Рис. 1.53. Определение направления гироскопического момента:
а – между осями собственного вращения и прецессии ротора имеется произвольный угол α;
б – оси собственного вращения и прецессии ротора взаимно перпендикулярны

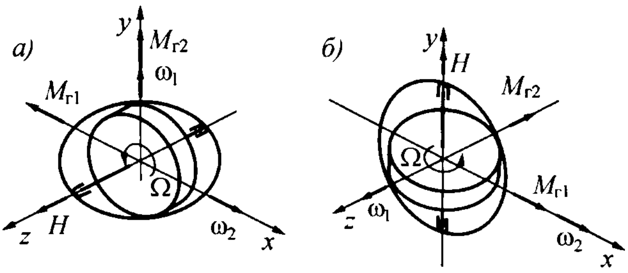


Рис. 1.54. Ротор на вращающемся основании

Надо обратить внимание на то, что если вращающийся ротор находится на вращающемся основании, то это переносное вращение основания для ротора аналогично прецессии и гироскопический момент определяется по приведенным выше правилам.

На рис. 1.54 ротор с кинетическим моментом H заключен в рамку, которая различным образом может приводиться во вращение относительно любой оси, но не совпадающей с осью собственного вращения ротора. На рис. 1.54, *а* (ось собственного вращения горизонтальна) и *б* (она вертикальна) показаны векторы угловых скоростей переносного вращения ω_1 и ω_2 вместе с рамкой и соответствующие им векторы гироскопических моментов, которые в соответствии с формулой (1.23) равны

$$M_{г1} = H\omega_1; \quad M_{г2} = H\omega_2.$$

Момент $M_{г1}$ на рис. 1.54, *а*, *б* стремится развернуть рамку с ротором вокруг оси X, но в разных направлениях. Момент $M_{г2}$ на рис. 1.54, *а* стремится развернуть рамку с ротором вокруг оси y, а на рис. 1.54, *б* – вокруг оси z.

В МГ RR-типа реализуется колебательное движение ИМ (ротора) в режимах первичных и вторичных колебаний. На рис. 1.55 ротор *1* укреплен относительно опоры-основания *3* на упругих элементах *2* подвеса, которые имеют малые жесткости на кручение вокруг оси y и на изгиб вокруг оси z. Жесткость упругих элементов вокруг оси x значительно больше. Таким образом, возможны колебания ротора вокруг осей z и y.

Привод обеспечивает колебательные движения ротора со скоростью $\dot{\gamma} = \Omega$ вокруг оси z таким образом, что первую половину периода кинетический момент H_1 направлен в положительную сторону оси z, а вторую половину H_2 – в отрицательную. Достаточно точно соблюдается равенство $H_1 = H_2 = H = J_\gamma \Omega_\gamma$ (J_γ – осевой момент инерции ротора). Это режим первичных колебаний, т.е. РД. При появлении переносной скорости ω основания (для ротора – это прецессия) возникают гироскопические моменты $M_{г1}$ и $M_{г2}$ – соответственно для первого и второго полупериодов РД ($M_{г1} = M_{г2} = H\omega$). Периодически меняющий направление гироскопический момент вызывает колебания ротора вокруг оси y. Это режим вторичных колебаний, т.е. РЧ.

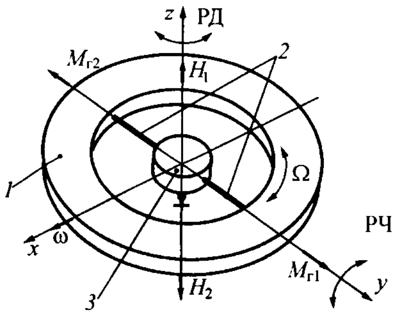


Рис. 1.55. Режимы работы микрогироскопа RR-типа:
1 – ротор; *2* – упругие элементы; *3* – опора-основание

Момент привода $M_0 \sin pt$ (M_0, p – амплитуда и частота момента) преодолевает инерционный момент, демпфирования и момент сил упругости подвеса вокруг оси z. Гироскопический момент преодолевает аналогичные моменты сил вокруг оси y. Таким образом, простейшие уравнения движения ротора имеют вид

$$\left.\begin{aligned} J_\gamma \ddot{\gamma} + b_\gamma \dot{\gamma} + G_\gamma \gamma = M_0 \sin pt; \\ J_\alpha \ddot{\alpha} + b_\alpha \dot{\alpha} + G_\alpha \alpha = H\omega , \end{aligned}\right\} \qquad (1.24)$$

где J_γ, J_α – осевой и экваториальный моменты инерции ротора; b_γ, b_α – коэффициенты демпфирования ротора в РД и РЧ; G_γ, G_α – жесткости упругих элементов подвеса вокруг осей z и y соответственно; γ, α – углы колебаний ротора в РД и РЧ.

Для установившегося РЧ из второго уравнения системы (1.24) следует угол поворота ротора вокруг оси y:

$$\alpha = \frac{H\omega}{G_\alpha}. \qquad (1.25)$$

Угол α содержит информацию об угловой скорости вращения основания, на котором находится гироскоп.

Принципиальные схемы ЧЭ в МГ RR-типа, которые определяются так же, как и ЧЭ МГ LL-типа, приведены на рис. 1.56. ИМ *1* (ротор) относительно анкеров *3*, установленных на подложке, имеет подвес, включающий в себя упругие элементы *2*, *5* и промежуточный, жесткий элемент *4*. ИМ *1* может быть кольцевой формы, а также конфигурации с разнесением масс для увеличения инерционности ротора. Упругие элементы *2* отличаются малой жесткостью на кручение и обеспечивают колебания ротора относительно выходных (измерительных) осей в РЧ.

Упругие элементы *5* характеризуются малой изгибной жесткостью в плоскости первичных колебаний ротора и осуществляют РД. Элементы *5*, показанные в виде прямолинейных стержней, могут иметь более сложную форму, а также иное угловое расположение относительно входной (чувствительной) и выходной (измерительной) осей. В любом случае размещение элементов *5* в плоскости ротора должно гарантировать минимальные жесткости относительно выходных осей.

В схемах на рис. 1.56, *а*, *б* передача вращающего момента привода осуществляется непосредственно на ротор. Элементы статора привода располагаются, как правило, снаружи ротора. Промежуточный элемент *4* имеет размеры, зависящие от элементов, находящихся на нем, а также от размеров упругих элементов *5*. На рис. 1.56, *а* пунктиром показано возможное изменение размеров элементов *2*, *4*, *5*.

В схеме на рис. 1.56, *в* привод, обеспечивающий РД ротору *1*, предпочтительно должен располагаться в пространствах, ограниченных внутренним контуром элемента *4*. В этом случае передача вращающего момента привода на ротор реализуется через элемент *4* и торсионы *2*. Очевидно, что возможна и непосредственная передача вращающего момента привода на ротор.

ЧЭ по рис. 1.56, *а*, в служат для измерения одной переносной угловой скорости основания, и на их основе может быть построены однокомпонентные МГ. Осью чувствительности для них является ось Y, вокруг которой основание вращается со скоростью Ω_Y. РД происходит вокруг оси Z, вдоль которой направлены векторы переменного кинетического момента H ротора. Переменные гироскопические моменты $H\Omega_Y$ вызывают колебания ротора в РЧ вокруг выходных (измерительных) осей X (рис. 1.56, *г*, *е*).

Уравнения движения ЧЭ однокомпонентных МГ аналогичны системе (1.24).

ЧЭ по схеме на рис. 1.56, *б* служит для измерения двух угловых скоростей основания, и на его основе могут быть построены двухкомпонентные МГ. Осями чувствительности может быть любая из

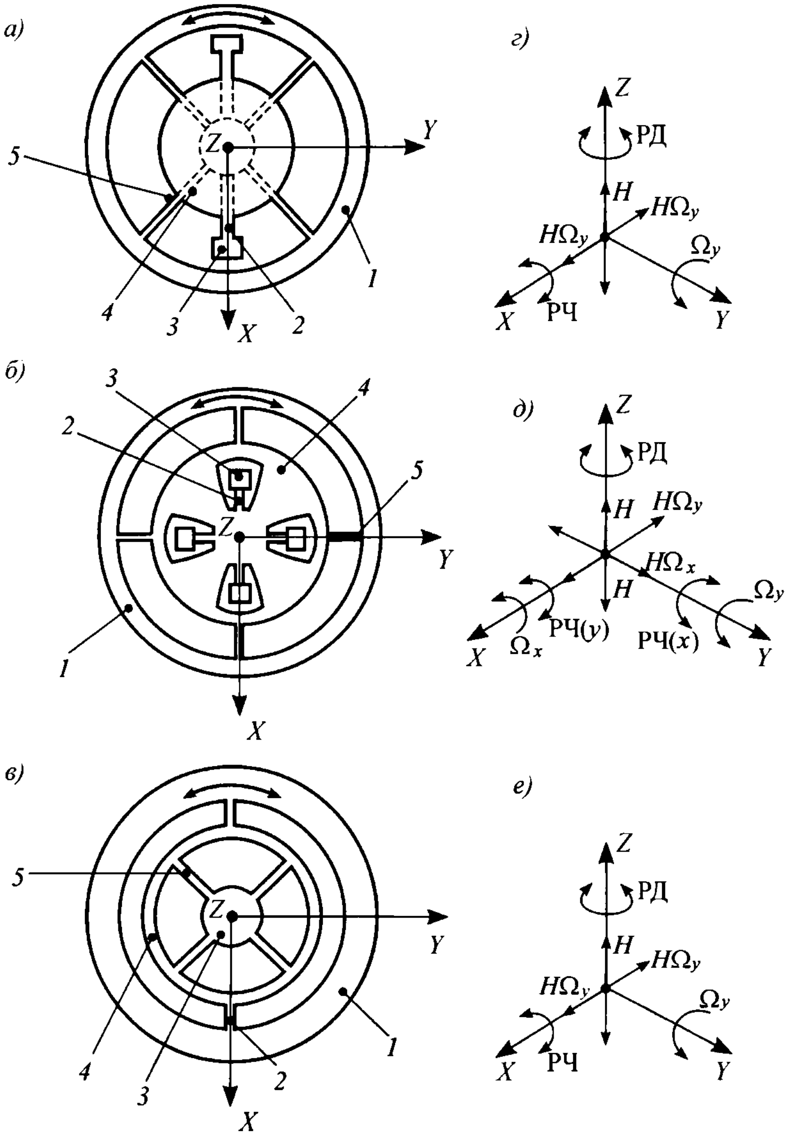


Рис. 1.56. Принципиальные схемы ЧЭ МГ:
а, *б* – с непосредственной передачей момента привода на ротор (*а* – однокомпонентный; *б* – двухкомпонентный); *в* – однокомпонентный с возможностью передачи момента привода на ротор непосредственно и через промежуточный элемент; *г*, *д*, *е* – режимы работы МГ; *1* – ИМ (ротор); *2*, *5* – упругие элементы подвеса; *3* – анкер (элемент крепления микроструктуры к подложке); *4* – промежуточный (кинематический) элемент подвеса

осей *X*, *Y*. РД вокруг оси *Z* создает переменный кинетический момент *H*, и при появлении угловых скоростей Ω_x, Ω_y возникают гироскопический момент $H\Omega_x$, генерирующий $РЧ_x$, и гироскопический момент $H\Omega_y$, генерирующий $РЧ_y$.

Уравнения движения ЧЭ двухкомпонентного МГ описываются также системой (1.24), к которой необходимо добавить уравнение движения ротора вокруг второй измерительной оси:

$$\left.\begin{aligned} J_\alpha\ddot{\alpha}+b_\alpha\dot{\alpha}+G_\alpha\alpha&=H\Omega_y;\\ J_\beta\ddot{\beta}+b_\beta\dot{\beta}+G_\beta\beta&=H\Omega_x;\\ J_\gamma\ddot{\gamma}+b_\gamma\dot{\gamma}+G_\gamma\gamma&=M_{\text{в}}(t),\end{aligned}\right\}\qquad(1.26)$$

где α, β, γ – углы поворота ротора вокруг осей X, Y и Z соответственно; J_α, J_β, J_γ – моменты инерции всех элементов (тел), вращающихся вокруг осей X, Y, Z; b_α, b_β, b_γ – коэффициенты демпфирования относительно соответствующих осей; G_α, G_β, G_γ – жесткости всех элементов подвеса при их деформациях относительно осей X, Y, Z соответственно; $M_{\text{в}}(t)$ – вибрационный момент привода.

Углы поворота ротора относительно измерительных осей в установившемся режиме вычисляются аналогично формуле (1.25):

$$\alpha=H\Omega_y/G_\alpha;\quad \beta=H\Omega_x/G_\beta.\qquad(1.27)$$

Из выражений (1.27) следует, что точность измерения переносных скоростей основания зависит, в первую очередь, от стабильности и предсказуемости параметров, определяющих величины H, G_α, G_β (а также J_α, J_β).

Наряду с ЧЭ МГ, в которых РД ротора происходит в его плоскости, в The Charles Stark Draper Laboratory (США) был разработан так называемый рамочный МГ, принципиальная схема ЧЭ которого приведена на рис. 1.57.

Схема образована соединением двух рамок, конструктивно выполненных в виде внешнего *1* и внутреннего *2* плоских элементов, соединенных между собой и с основанием *6* торсионами *3* и *4*, оси которых перпендикулярны друг к другу. Для увеличения инерционности на внутреннем элементе расположена дополнительная масса *5*. С помощью электростатических датчиков силы наружному элементу *1* сообщаются первичные угловые колебания относительно оси Y (РД). Эти колебания через торсионы *3* передаются и на внутренний элемент, сообщая ему колебательный кинетический момент H. При вращении прибора со скоростью Ω_z относительно оси Z возникают моменты сил инерции Кориолиса $H\Omega_z$, которые заставляют колебаться внутренний элемент относительно оси X (РЧ). Амплитуда этих колебаний, измеряемая расположенным под внутренним элементом емкостным преобразователем, будет пропорциональна измеряемой угловой скорости.

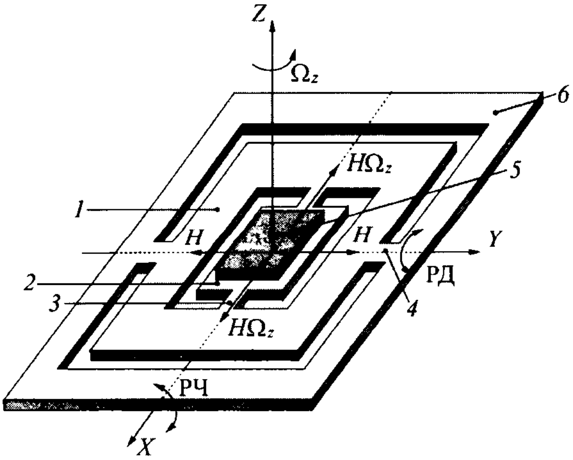


Рис. 1.57. Принципиальная схема рамочного ЧЭ МГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:
1, *2* – наружная и внутренняя рамки; *3*, *4* – упругие элементы (торсионы); *5* – дополнительная масса; *6* – основание

Движение ЧЭ в простейшем случае описывается уравнениями (1.24). Применительно к рассматриваемой схеме ЧЭ в них γ – угол колебания рамок *1* и *2* относительно оси *Y*; α – угол колебаний рамки *2* вокруг оси *X*; J_γ – суммарный момент инерции тел *1*, *2*, *5* относительно оси *Y*; J_α – суммарный момент инерции тел *2*, *5* относительно оси *X*; b_γ – коэффициент демпфирования рамок *1*, *2* при колебаниях относительно оси *Y*; b_α – коэффициент демпфирования рамки *2* при колебаниях вокруг оси *X*; G_γ, G_α – жесткость на кручение торсионов *4* и *3* соответственно.

Помимо описанных, наиболее часто используемых схем ЧЭ, существуют и другие, в том числе с двумя роторами, вращающимися в РД синхронно и противофазно аналогично ЧЭ двухмассовых МГ LL- и LR-типов.

Б. Конструкция микрогироскопов

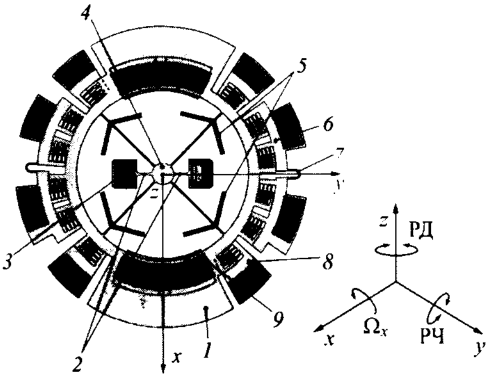


Рис. 1.58. Принципиальная схема МГ фирмы The Charles Stark Draper Laboratory:
1 – ИМ (ротор); *2* – упругие элементы-растяжки (торсионы); *3* – анкер; *4* – кинематический элемент подвеса; *5* – упругие элементы подвеса с петлевыми образованиями;
6, *8* – статоры электростатического привода;
7 – петля-компенсатор; *9* – электрод емкостного измерителя перемещений

Принципиальная схема МГ (производитель – фирма The Charles Stark Draper Laboratory), ЧЭ которой соответствует схеме рис. 1.56, *а*, приведена на рис. 1.58. Ротор *1* с массивными участками, разнесенными вдоль оси *x*, с помощью упругих элементов *5* подвеса, растяжек-торсионов *2*, промежуточного кинематического (опорного) элемента *4* и анкеров *3* смонтирован на подложке. Электростатический привод, гребенчатые структуры ротора которого составляют единое целое с ИМ *1*, а статорные структуры *6*, *8* размещены на подложке, обеспечивает колебательный РД вокруг оси *z*. При появлении переносной угловой скорости Ω_x основания переменный гироскопический момент вызывает вторичные колебания ротора (РЧ) вокруг оси *y*. Электроды *9*, размещенные на подложке, и электроды, сформированные напротив, на роторе, образуют емкостные измерители перемещений.

Конструкция имеет особенности. Прежде всего, следует обратить внимание на петлевые образования (длина петли около 200 мкм при ширине 20 мкм) упругих элементов *5*, которые служат для того, чтобы уменьшить растягивающую силу в упругих элементах при колебаниях ротора, так как растяжение упругих элементов вызывает нелинейную зависимость между амплитудой колебаний ротора и из их жесткостью.

Далее, следует обратить внимание на продольные пустоты в анкерах, которые, по сути, сформировали миниатюрные упругие элементы в местах соединения торсионов *2* и анкеров *3*. При возможном и неизбежном напряжении в материале и особенно в местах соединения разнородных материалов упругость в местах соединения торсионов *2* и анкеров *3* должна создать более комфортные условия работы торсионов. Из-за необходимости присадки бора в кремний, из которого выполнены ЧЭ (технологическая необходимость), в материале также может возникнуть дополнительное напряжение. Такая ситуация характерна для статоров *6*, которые состоят из двух половин, разъединенных петлей *7*, играющей роль компенсатора напряжения.

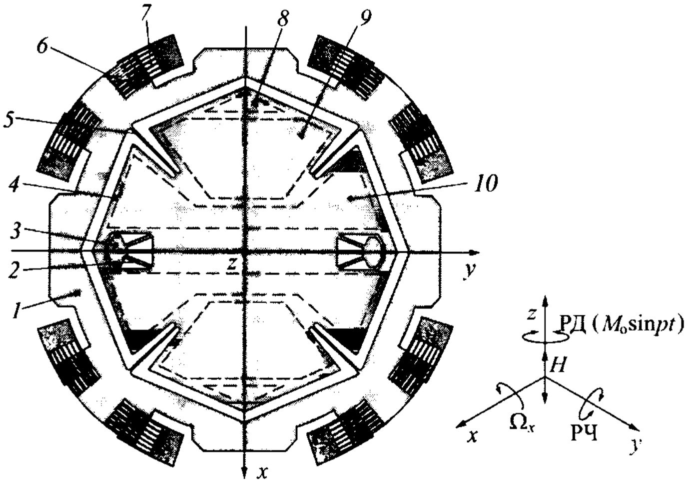


Рис. 1.59. Принципиальная схема МГ фирмы Irvine Sensors Corp.:
1 – ИМ (ротор); *2*, *5* – упругие элементы подвеса; *3* – анкер; *4* – кинематический элемент подвеса; *6*, *7* – гребенчатые структуры электростатического привода; *8* – электрод контура калибровки и тестирования; *9* – электрод емкостного преобразователя перемещений; *10* – электрод датчика силы

В реализованной микроструктуре диаметр (максимальный) ротора около 1 мм. Электроды выполнены в виде тонкопленочной металлизации на подложке из стекла Pyrex. Имеется также электрод для компенсации момента сил инерции Кориолиса при работе гироскопа с обратной связью.

Принципиальная схема МГ фирмы Irvine Sensors Corp. (США), ЧЭ которого соответствует схеме на рис. 1.56, *а*, приведена на рис. 1.59. ИМ *1* кольцевой формы (ротор) с помощью упругих элементов *2* и *5* и кинематического элемента *4* подвеса установлена на анкерах *3* несколько выше подложки. Система упругих элементов *2* характеризуется малой жесткостью на кручение вокруг оси y и большими изгибными жесткостями вокруг осей x и z. Система упругих элементов *5* обладает малой изгибной жесткостью вокруг оси z и большими жесткостями вокруг осей x и y.

Режим движения обеспечивается электростатическими приводами, которые состоят из гребенчатых структур *6*, являющихся частью ротора, и неподвижных структур *7*, укрепленных на подложке. Приводы развивают переменный вращающий момент $M_0\sin pt$ (M_0, p – амплитуда и частота) вокруг оси z, и на роторе создается переменный за период колебаний кинетический момент H. При появлении угловой скорости Ω_x переносного вращения основания вокруг оси y возникает переменный по направлению гироскопический момент $H\Omega_x$, который вызывает колебания ротора вокруг выходной оси y (РЧ). Эти колебания в соответствии с уравнением (1.25) содержат информацию о скорости вращения основания ($\omega = \Omega_x$). Вместе с ротором в РЧ вокруг оси Y колеблется и кинематический элемент *4*.

На подложке, под кинематическим элементом *4* и напротив – на сам́ом элементе *4* сформированы пары электродов, образующих конденсаторы для выполнения следующих функций. Электроды *8* служат для раскачки элемента *4* вокруг оси Y с целью калибровки и тестирования измерительного сигнала, съем которого осуществляется с помощью электродов *9*, образующих емкостный измеритель перемещений элемента *4*, и связанного с ним ротора.

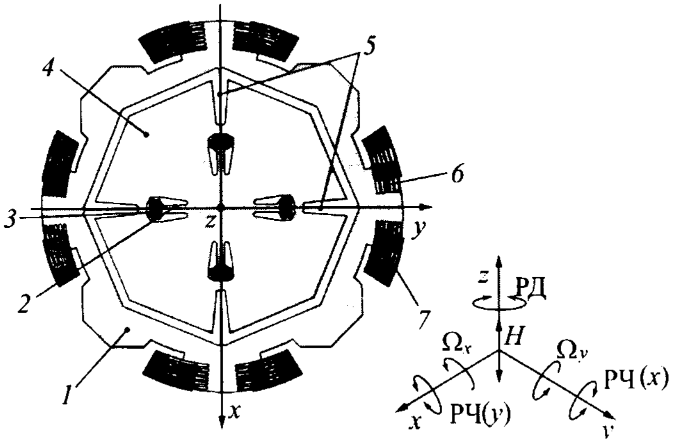


Рис. 1.60. Принципиальная схема МГ для измерения двух угловых скоростей (двухкомпонентный МГ). Оцифровка соответствует рис. 1.59

МГ способен работать в режиме компенсационного измерения. Для компенсации гироскопического момента в контур обратной связи может быть включен датчик силы, образующейся на электродах *10*.

Схему МГ можно модифицировать для измерения двух угловых скоростей вращения основания, как показано на рис. 1.60 (см. схему 1.56, *б*). Подвес ротора *1* относительно подложки на анкерах *3* реализован с помощью пар упругих элементов *2* и *5*. Соосно расположенные элементы подвеса *2* и *5* обладают малой жесткостью на кручение вокруг осей, вдоль которых они размещены, и большой изгибной жесткостью вокруг поперечных осей. РД обеспечивается электростатическими приводами с гребенчатыми структурами *6*, *7*.

Появление угловой скорости Ω_x переносного вращения основания приводит к возникновению гироскопического момента вокруг оси *y*, который влечет за собой колебания ротора и элемента *4* вокруг оси *y* [РЧ, обусловленный угловой скоростью вокруг оси *x* – РЧ (*x*)]. Аналогично угловая скорость Ω_y вызывает колебания ротора вокруг оси *x* – РЧ (*y*). В этой схеме также могут быть сформированы электроды контуров измерения, тестирования (калибровки) и обратной связи.

Кинематическая схема МГ разработки института HSG-IMIT, соответствующая схеме, показанной на рис. 1.56, *в*, приведена на рис. 1.61.

ИМ *1* через внешние упругие элементы *2* связаны с внешним ободом кольцевого элемента *4*, который вместе с внутренним ободом и роторными элементами гребенчатой структуры вибропривода (двигателя) представляет собой единую структуру, а она, в свою очередь, через внутренние упругие элементы *5* подвеса соединена с анкером *3*, установленным на подложке. На последней сформированы также статорные элементы гребенчатого вибропривода.

Вращающий момент вибропривода в режиме движения создает переменный кинетический момент гироскопа, взаимодействие которого с измеряемой угловой скоростью Ω_y приводит к возникновению переменного момента сил инерции Кориолиса, вызывающего в РЧ колебательное движение ИМ относительно выходной оси. Перемещение ИМ измеряется электростатическими датчиками, неподвижные электроды которых расположены на подложке под ИМ, а подвижные – на них.

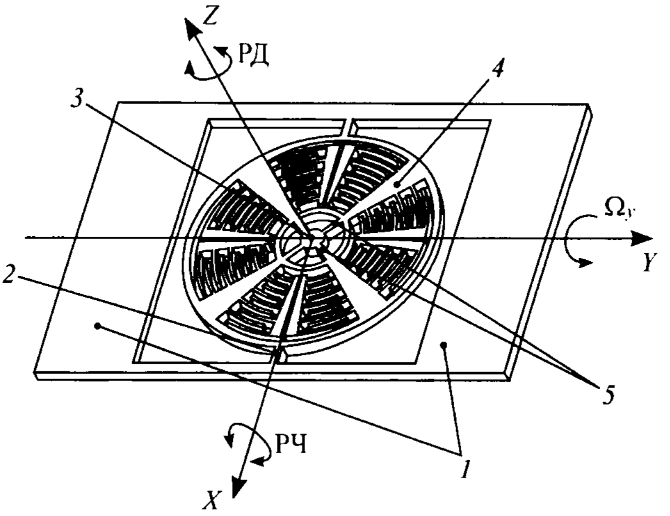


Рис. 1.61. Принципиальная схема МГ института HSG-IMIT (оцифровка соответствует рис. 1.56, *в*)

Корпус гироскопа вакуумирован до давления 0,01 мбара (1 бар = 10^5 Па). Частота колебаний ротора (ИМ) в режиме движения 1420 Гц. Скорость дрейфа ~65 °/ч при полосе пропускания частот 50 Гц. Диапазон измеряемых скоростей до 300 °/с.

Рассмотренная конструкция может быть преобразована в двухкомпонентный МГ, принципиальная схема которого приведена на рис. 1.62.

ИМ *1* разнесены вдоль осей *x* и *y* и с помощью упругих элементов *2* соединены с кольцевым элементом *4*, который, в свою

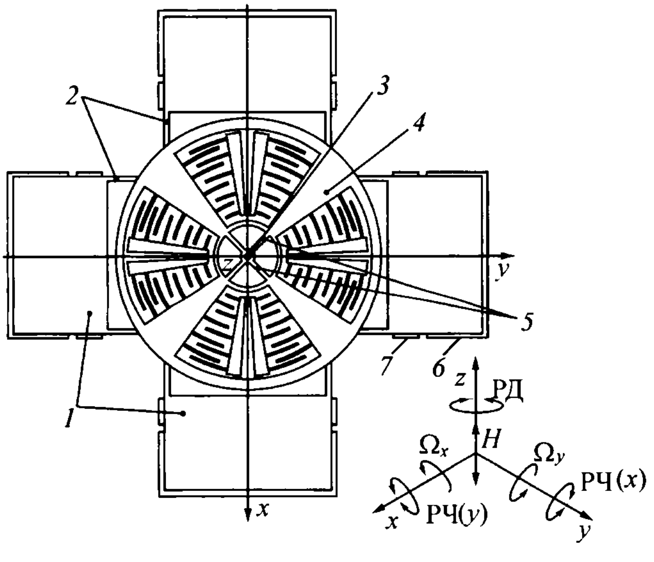


Рис. 1.62. Принципиальная схема двухкомпонентного МГ (оцифровка та же, что на рис. 1.56, *в*)

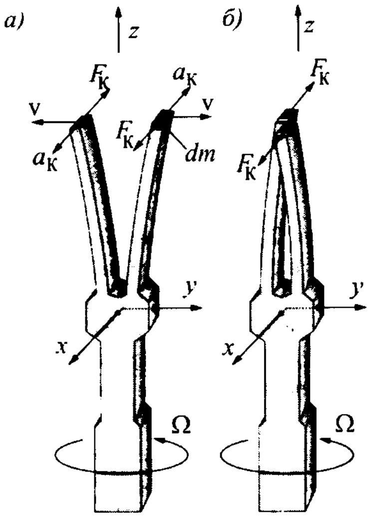


Рис. 1.63. Принцип работы ЧЭ камертонного гироскопа:
а – возбуждаемые колебания;
б – вынужденные (информативные) колебания

очередь, через упругие элементы *5* связан с анкером *3*, размещенным на подложке. На ней сформированы также неподвижные электроды емкостных измерителей перемещений ИМ *1* и электроды датчиков силы, которые могут быть включены в контур обратной связи.

Электростатический привод реализует вибрационный РД вокруг оси z, следствием чего является переменный кинетический момент, который для ИМ, расположенных вдоль одной оси, равен $H \approx \approx 2mR^2\dot{\gamma}$ (m – масса ИМ; R – расстояние от оси z до центров ИМ; $\dot{\gamma}$ – мгновенная угловая скорость собственного вращения ротора).

Появление переносной угловой скорости Ω_x приводит к колебаниям ИМ, расположенных вдоль оси x, вокруг оси y (РЧ$_x$) под действием переменного гироскопического момента НΩ_x. Аналогично возникновение угловой скорости Ω_y вызывает колебания ИМ, находящихся вдоль оси у, вокруг оси x (РЧ$_y$), обусловленных гироскопическим моментом НΩ_y.

Колебания ИМ в РЧ$_x$ регистрируются емкостными измерителями перемещений, размещенными вдоль оси x, а колебания в РЧ$_y$ – измерителями, расположенными вдоль оси y. В МГ может быть реализован (так же, как и в схеме по рис. 1.61) компенсационный режим измерений с помощью контура силовой компенсации моментов от сил инерции Кориолиса (гироскопических моментов).

Гироскопы RR-типа активно исследуются отечественными разработчиками. Некоторые разработки, видимо, близки к выпуску опытных партий.

1.3.5. Камертонные и волновые микрогироскопы

Принцип работы ЧЭ, использованного в гироскопах типа DRZ фирмы Temic (концерн Deimler-Benz) и типа QRZ фирмы Systron Donner (BEI. Electronics, Inc.), показан на рис. 1.63.

Обе ветви ЧЭ, изготовленного из монокристалла, приводятся в противофазное колебательное движение в плоскости zy (рис. 1.63, *а*). Каждый элемент ветви массой dm перемещается с линейной скоростью v. При вращении ЧЭ со скоростью Ω вокруг оси z для направления векторов, соответствующих рис. 1.63, *а*, возникают ускорения Кориолиса $a_К = 2\text{v}\Omega$ и соответствующие ему силы инерции $F_К = 2\text{v}\Omega dm$. Силы инерции Кориолиса суммируются по всей массе каждой из ветвей и приводят к их изгибу в плоскости xz (рис. 1.63, *б*).

При изменении фазы генерируемых колебаний на противоположную изменится и направление изгиба вынужденных колебаний ветвей ЧЭ в плоскости xz. Таким образом, вынужденные колебания ветвей ЧЭ в плоскости xz содержат информацию об угловой скорости вращения основания. Очевидно также, что генерировать колебания ветвей ЧЭ можно и в плоскости xz, тогда информативные колебания ветвей будут происходить в плоскости zy. Линейные ускорения, включая вибрацию корпуса прибора, приводят к зашумлению выходного сигнала.

Концерн Deimler-Benz производит датчики угловой скорости модели Temic с вибрационным ЧЭ.

Гироскоп с габаритными размерами 63×47×35 мм (макроскопические размеры) изготовлен по гибридной технологии, так как ЧЭ камертонного типа с элементами возбуждения и съема сигналов с вибрирующих элементов выполнен по кремниевой технологии, а сервисная электроника осуществлена традиционно в виде одной платы. Металлический корпус прибора делается, как правило, герметичным. Гироскоп имеет аналоговый выход. Диапазон измеряемой скорости до 75 °/с.

Основное назначение гироскопа – различные диагностические системы

Фирма Systron Donner выпускает гироскопы серии GiroChip с ЧЭ по рис. 1.63. Использование пьезоэлектрического материала существенно упростило конструкцию и обеспечило температурную стабильность и длительный срок службы. ЧЭ вместе с электроникой встроены в жесткий корпус. Прибор запитывается постоянным напряжением и имеет высокоуровневый аналоговый выходной сигнал в широкой полосе пропускания частот. Диапазон измеряемых скоростей 50... 1000 °/с.

Датчик угловой скорости нашел широкое применение: сферы его распространения – приборостроение, робототехника, автомобили, медицина, навигация, в том числе с применением GPS, стабилизация антенн, системы управления и виртуальной реальности.

С аналогичным ЧЭ выпускается датчик угловой скорости BEI GiroChip™ Horizon.

Фирма Systron Donner разработала гироскоп QRS 11 (Quartz Rate Sensor), ЧЭ которого изготовлен из монолитного кварца и представляет собой сдвоенный камертон (рис. 1.64, *а*). Действие сил инерции Кориолиса $F_К$ в ответ на перемещение ножек силами возбуждения $F_в$ и измеряемую скорость Ω аналогично рис. 1.63. Сдвоенный ЧЭ позволяет уменьшить взаимодействие рамок. Масса QRS 11 составляет 60 г при габаритных размерах ∅40×16 мм, полоса пропускания частот > 60 Гц.

Три таких гироскопа (каналы угловой скорости) и три акселерометра (каналы ускорения) входят в состав инерциального блока Motion Pack™, общий вид которого и габаритные размеры показаны на рис. 1.64, *б*. При напряжении питания 4, 5 В потребляемая мощность 7 Вт.

Инерциальный модуль имеет расширенные возможности использования по сравнению с приборами GiroChip и Motion-Pak, особенно для навигационных систем.

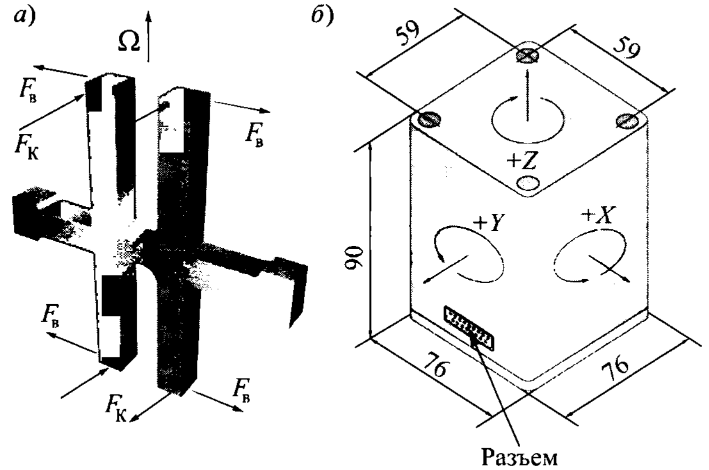


Рис. 1.64. Инерциальный блок:
а – схема ЧЭ; *б* – габаритные размеры и оси чувствительности

Фирма Sagem SA (Франция) разработала гироскоп в макроскопических размерах – Quapason^{TM}, резонатор которого выполнен по кварцевой технологии и состоит из четырех стержней прямоугольного сечения, имеющих общее основание, которое через виброизолирующую ножку связано с корпусом (рис. 1.65).

На наружных гранях стержня расположено по восемь пьезоэлектрических преобразователей силы и преобразователей перемещений.

Преобразователи силы создают два возможных режима колебаний, показанные на рис. 1.65, *а*, *б*. Частоты колебаний стержней в резонаторе идентичны.

Разработаны две модели гироскопа с габаритными размерами ∅ 28×60 и ∅ 15×30 мм. Резонатор может работать с различными электронными схемами, обеспечивающими режим измерения угловой скорости либо угла поворота. Полоса пропускания частот 100 Гц. Номинальная измеряемая скорость 250 °/с.

Гироскоп находит применение в антеннах и оптических системах для стабилизации линии визирования, в судовых успокоителях качки, искусственных горизонтах, в системах контроля скоростью рельсового транспорта и др.

Стержневые вибрационные гироскопы, где вдоль стержня (ЧЭ) генерируется поперечная волна деформации, которая затем как реакция на измеряемую угловую скорость трансформируется во вторичные колебания стержня, могут быть отнесены к волновым.

На рис. 1.66 показана схема гироскопа, состоящего из стержня *2* в корпусе *1* и пьезоэлементов *3*...*6*, нанесенных на гранях стержня. Стержень в поперечном сечении может быть и другой формы, например равностороннего треугольника.

Стержень с обеих сторон имеет уменьшенные сечения, которые можно считать упругими точками крепления стержня к корпусу. Пара пьезоэлементов "*3*, *5*" служит для возбуждения колебаний (первой формы) в плоскости *YZ*. Каждый элемент стержня при этом получает линейную скорость v_y. Если конструкцию вращать вокруг оси *Z* со скоростью Ω, возникают силы инерции Кориолиса, которые вызывают колебания стержня в плоскости *XZ* с линейными скоростями v_x каждого элемента.

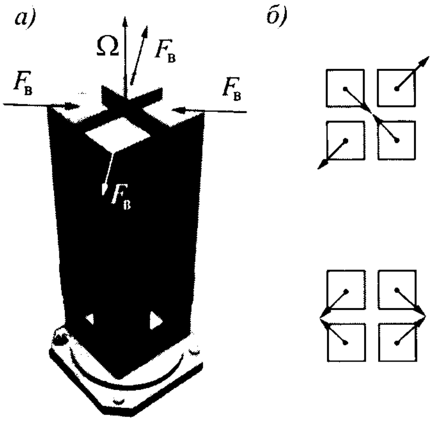


Рис. 1.65. Резонатор гироскопа Quapason^{TM}:
а – аксонометрический вид и возможное направление сил возбуждения $F_в$;
б – режимы колебания стержней

При этом один из пары пьезоэлементов "*4*, *6*" служит для измерения этих колебаний, а другой может быть включен в контур демпфирования колебаний. С помощью электронной цепи фиксируется как амплитуда колебаний, пропорциональная скорости Ω, так и фаза, регистрирующая направление вращения вокруг оси *Z*.

Фирма Murata (Япония) выпускает две модификации пьезоэлектрических вибрационных гироскопов: ENV и ENC. ЧЭ гироскопов этих типов представляет собой призму, подвешенную на растяжках и имеющую сечение в форме равностороннего треугольника. На боковых гранях этой призмы находятся пьезоэлементы для возбуждения первой формы изгибных колебаний призмы и съема сигналов. Призма выполнена из элинвара, отличающегося почти нулевым температур-

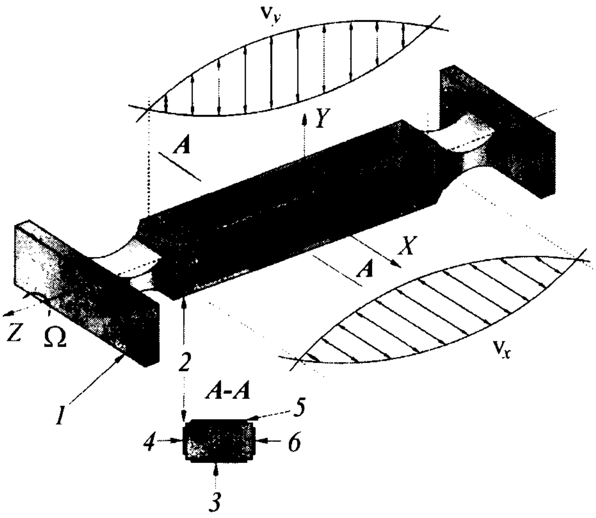


Рис. 1.66. Схема стержневого (волнового) вибрационного гироскопа:
1 – корпус; *2* – стержень; *3–6* – пьезоэлементы

ным коэффициентом модуля упругости, что позволило уменьшить температурную зависимость характеристик гироскопа.

Два датчика осуществляют возбуждение (на частоте около 25 кГц) первичных и измерение вторичных колебаний, а третий служит для создания обратной связи.

Гироскоп Gyrostar ENV-05 D-02 при габаритных размерах 18×30×41 мм и массе 50 г имеет диапазон измерений –90...+90°/с.

Датчики угловой скорости ENV, ENC рекомендуются для детектирования направления в автомобильных навигационных системах; управления направлением спутниковой антенны для подвижных объектов; обнаружения движения других объектов, для которых требуется высокая точность.

Гироскопы, реализующие принцип прецессии стоячей волны при вращении кольцевого резонатора, относятся к типу волновых.

Компания BAF Systems (Великобритания) совместно с фирмой Sumitomo Precision Products Company Ltd. (Япония) разработали МГ с кольцевым (волновым) резонатором, ЧЭ этого МГ показан на рис. 1.67.

МГ вначале планировался для коммерческого применения, но по мере улучшения характеристик стал использоваться в военных целях и для космоса.

Резонатор, изготовленный из кремния, представляет собой кольцо диаметром 6 мм, выполненное в опорной пластине (рамке) заодно с поддерживающими его упругими элементами (8 шт.). Размер опорной рамки 10×10 мм. Чип анодно металлизирован к стеклянной поддерживающей структуре. Кольцо с помощью магнитоэлектрического датчика силы приводится в режим вибрации в своей плоскости на частоте > 5кГц.

Таким образом, в кольцевом резонаторе возбуждаются колебания, имеющие форму стоячей волны (на рис. 1.67, *а* показана пунктиром), пучности которой находятся в точках *A*, *B*, *C*, *D*. При вращении резонатора вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, момент сил инерции Кориолиса вызывает прецессию (вращение) стоячей волны относительно резонатора. Эффект прецессии стоячей волны иллюстрируется рис. 1.68.

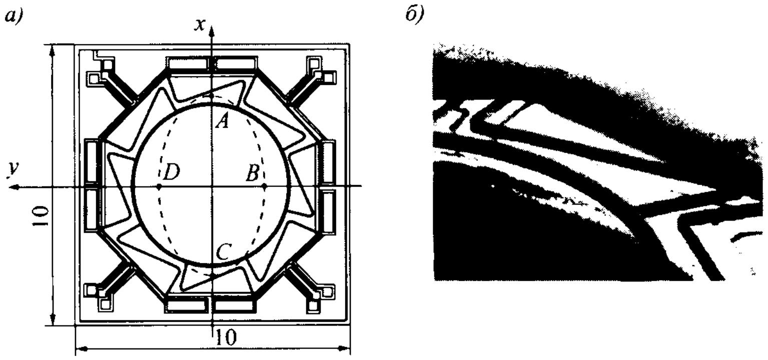


Рис. 1.67. ЧЭ МГ с кольцевым резонатором:
а – принципиальная схема; *б* – фрагмент микроструктуры резонатора

При вращении вибрирующего кольца с угловой скоростью Ω к каждой элементарной массе в точках *A*, *B*, *C*, *D* приложены силы инерции Кориолиса $F_{\text{К}A}$, $F_{\text{К}B}$, $F_{\text{К}C}$, $F_{\text{К}D}$ как реакция на ускорения Кориолиса $a_{\text{К}A}$, $a_{\text{К}B}$, $a_{\text{К}C}$, $a_{\text{К}D}$, являющиеся следствием наличия линейных виброскоростей v_A, v_B, v_C, v_D и переносной скорости Ω. Результирующий момент от разности пары сил $F_{\text{К}A}$, $F_{\text{К}C}$, $F_{\text{К}B}$ и $F_{\text{К}D}$ вызывает прецессию (вращение) стоячей волны относительно резонатора и в инерциальном пространстве. Определяя положение стоячей волны, зависящее от угловой скорости Ω, относительно опорной рамки, можно получить информацию об угле поворота основания гироскопа в инерциальном пространстве.

Стоячая волна генерируется в кольце с помощью сил, которые приложены к участкам кольца между точками их крепления к проводящим упругим элементам подвеса в районе точек *A*, *B*, *C*, *D*. Каждый такой участок составляет 1/8 периметра кольца.

Гироскоп может работать в режиме прямого (разомкнутый контур) и компенсационного преобразований (замкнутый контур), что обеспечивается электроникой.

Гироскоп в случае температурной стабилизации обеспечивает дрейф < 17 °/с. Гироскоп обладает виброустойчивостью и ударной стойкостью 5000 *g*.

В университете Michigan по технологии high-aspect ratio изготовлен МГ, в котором, видимо, также реализован принцип прецессии стоячей волны в кольцевом резонаторе при его вращении вокруг оси, перпендикулярной к плоскости резонатора.

Резонатор выполнен в виде кольца диаметром 2 мм и высотой 80 мкм, размещенного с помощью восьми *S*-образных упругих элементов и анкера в их центре в кольцевой выемке, по периметру которой расположены 16 электродов электростатических преобразователей силы и пере-

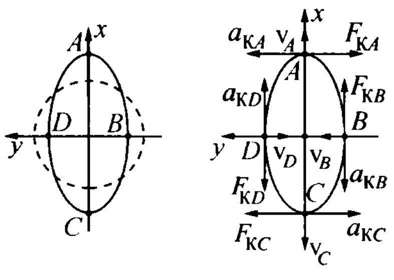


Рис. 1.68. К пояснению прецессии стоячей волны:
а – вибрирующий резонатор; *б* – вращающийся резонатор

мещений. Зазор между кольцом и электродами может быть в пределах 1,2... 10 мкм. Ширина упругих элементов подвеса 4 мкм, а высота равна высоте кольца.

Электростатические преобразователи силы, расположенные попарно и диаметрально противоположно, могут создавать высокочастотную вибрацию, следствием чего является стоячая волна, которая прецессирует при вращении гироскопа вокруг оси чувствительности, перпендикулярной к плоскости кольца. Измеренная добротность резонатора 85 000. Расчетная чувствительность гироскопа 5 °/ч в полосе пропускания частот 10 Гц. При такой чувствительности гироскоп может измерять скорость вращения Земли.

Многочисленные решения, заявленные в патентах на изобретения либо в свидетельствах на полезные модели, а также находящиеся на различных стадиях разработки, даже доведенные до корпусирования, но не прогнозируемые по выпуску в качестве коммерческой продукции, в приведенных материалах отсутствуют.

Рассмотрены лишь те патентные описания и конструкции МГ, которые содержат приоритетные решения либо являются коммерческой продукцией, либо реализованы настолько, что разработчики уверенно заявляют их технические характеристики и в ряде случаев планируют их выпуск.

Темы для самоконтроля

1. Принципиальные схемы ЧЭ осевых МА и их анализ.
2. Принципиальные схемы ЧЭ маятниковых МА и их анализ.
3. Уравнения движения осевого и маятникового МА. Анализ сил.
4. Формирование информации об измеряемом ускорении.
5. Особенности конструкций осевых и маятниковых МА.
6. Основные технические характеристики МА.
7. Принципиальные схемы МДД.
8. Уравнение движения жесткого центра мембраны. Анализ сил.
9. Формирование информации об измеряемом давлении.
10. Особенности конструкций МДД.
11. Схемотехнические особенности МГ.
12. Ускорение, сила, момент сил Кориолиса.
13. Прецессия гироскопа, гироскопический момент.
14. Принцип работы и уравнения движения МГ LL-типа.
15. Принцип работы и уравнения движения МГ LR-типа.
16. Принцип работы и уравнения движения МГ RR-типа.
17. Измерительные свойства МГ LL-, LR-, RR-типов.
18. Принципиальные схемы ЧЭ МГ LL-типа.
19. Принципиальные схемы ЧЭ МГ LR-типа.
20. Принципиальные схемы ЧЭ МГ RR-типа.
21. Особенности конструкций МГ LL-типа.
22. Особенности конструкций МГ LR-типа.
23. Особенности конструкций МГ RR-типа.
24. Схемы и принцип работы камертонных МГ.

Схемы и принцип работы волновых МГ.

Глава 2

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОИЗВОДСТВА МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

2.1. МАТЕРИАЛЫ

Перечень материалов для МЭМС-устройств включает в себя проводники, полупроводники и изоляторы типа:

- кремний (монокристаллический, поликристаллический и аморфный);
- кремниевые компаунды (SiO_2 и т.д);
- металлы и металлические компаунды (Au, Cu, Al, ZnO, GaAs и т.д.);
- керамика (Al_2O_3 и более сложные керамические составы);
- органические (полиамиды и др.).

Материалы используются в виде объемов и тонких пленок. При этом нужно помнить, что практически все свойства материалов получены на образцах, имеющих макроразмеры и автоматически распространены на устройства в микроисполнении. Что касается объемных материалов, то такой подход к ним более применим, нежели к тонким пленкам. Относительно объемных материалов следует добавить, что конструкции МЭМС-устройств имеют размеры, соизмеримые с кристаллическими дефектами (в кристаллических материалах).

2.1.1. Кристаллы. Символы граней и направлений

Кристаллы, или монокристаллы, – это вещества, в которых составляющие их частицы (т.е. атомы, молекулы, группы атомов) расположены правильными, симметричными, периодически повторяющимися рядами, сетками, решетками. Закономерность расположения частиц, их природа, их энергетический спектр или связи между ними определяют физические свойства кристалла.

В реальных кристаллах закономерное чередование частиц всегда немного нарушено из-за их теплового движения, возбуждения и других причин. В идеальном кристалле нет нарушений: все одинаковые частицы расположены одинаковыми параллельными рядами, которые всегда надо представлять бесконечными.

Расстояния между частицами в большинстве кристаллических веществ составляют несколько десятых долей нанометра, поэтому даже на длине 1 мм в кристалле располагается порядка 10^7 частиц, что практически можно считать бесконечным числом.

Кратчайшее из возможных расстояний между одинаковыми точками в ряду называется элементарной (кратчайшей) трансляцией, или периодом идентичности; иногда употребляют названия "период трансляции", или "параметр ряда".

Если сдвинуть точки бесконечного ряда на один период идентичности вдоль направления трансляции, то все одинаковые точки передвинутся на одинаковые расстояния, ряд совместится сам с собой, так что вид его не нарушится. Симметричное преобразование, с помощью которого точка повторяется в пространстве, именуется преобразованием с помощью трансляции, или трансляцией.

Повторяя какую-либо точку посредством трансляции, получаем бесконечный периодический ряд идентичных точек на расстояниях a, $2a$, $3a$,..., na. Характеристикой этого ряда является кратчайшая трансляция a. Одинаковые точки, связанные между собой трансляциями a в бесконечном ряду, называются узлами ряда. *Узлы не обязательно должны совпадать с материальными частицами вещества, это могут быть одинаковые точки между частицами.*

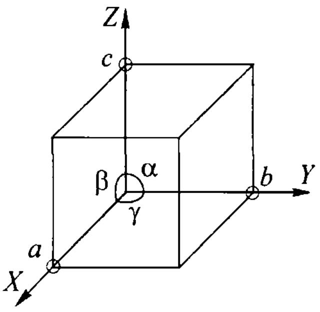


Рис. 2.1. Параллелепипед, построенный на элементарных трансляциях

Повторяя одинаковые точки с помощью другой трансляции, не параллельно первой, получим двумерную плоскую сетку, которая полностью определена двумя элементарными трансляциями: *a* и *b*. Добавляя третью, перпендикулярную к первым двум ось с трансляцией *c*, получим пространственную трансляцию (решетку).

Параллелепипед, построенный на трех элементарных трансляциях: *a*, *b*, *c*, – называется элементарным параллелепипедом, или элементарной ячейкой (рис. 2.1).

Выбор основных трансляций в структуре кристалла очень важен, потому что ими определяются кристаллографические оси координат. В общем случае это косоугольные системы координат с неодинаковыми масштабными отрезками по осям: $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$.

Направление кристаллографических осей координат соответствует направлениям ребер элементарной ячейки кристалла, а масштабные отрезки по осям координат – длинам этих ребер. Так как кристалл бесконечен, то можно выбрать бесконечное число кристаллографических систем координат.

Итак, *пространственная решетка – это геометрическое построение, с помощью которого в кристаллографическом пространстве выявляются одинаковые точки.*

Чтобы охарактеризовать положение идеально плоской грани кристалла, расположенной параллельно плоскостям кристаллической решетки, обычно используют отрезки, отсекаемые гранью на трех координатных осях. Ярко выраженным (но необязательным) признаком многих кристаллов является их свойство образовывать многогранники (полиэдры), которые ограничены более или менее гладкими плоскостями. В общем случае грань кристалла пересекает все три оси принятой системы координат.

Отрезки на кристаллографических осях по трем направлениям измеряются не одинаковым масштабом, а соответствующими периодами трансляции *a*, *b*, *c* или кратными им отрезками *ma*, *nb и pc*, где *m*, *n*, *p* – целые числа.

Символ атомной плоскости – **индексы Миллера** (*h*, *k*, *l*) – определяются из соотношения величин, обратных величине отрезков на осях:

$$h : k : l = 1/m : 1/n : 1/p.$$

Символ зависит только от соотношения отрезков на осях, так как в каждом кристалле содержится бесконечное множество идентичных плоских сеток, которые проходят параллельно друг другу. Таким образом, грань, показанная на рис. 2.2, *а*, имеет символ (111), поскольку отрезки на осях составляют 1*a*, 1*b*, 1*c*.

Три индекса Миллера – это набор наименьших целых чисел. Отрезки, которые грань отсекает, должны быть кратны целому числу длин.

Следовательно, грань, представленная на рис. 2.2, *б*, имеет символ (323), так как отрезки на осях составляют 2*a*, 3*b*, 2*c* (индексы (323) и получены они путем умножения каждого символа на наименьший общий делитель: 6/2, 6/3, 6/2; 3:2:3). Если отрезки на осях какой-нибудь грани составят, например, $m = 2$, $n = 3$, $p = 4$, то символ грани будет следующим: $h : k : l = 1/2 : 1/3 : 1/4 = 6 : 4 : 3$ (643). Произносится: "шесть", "четыре", "три".

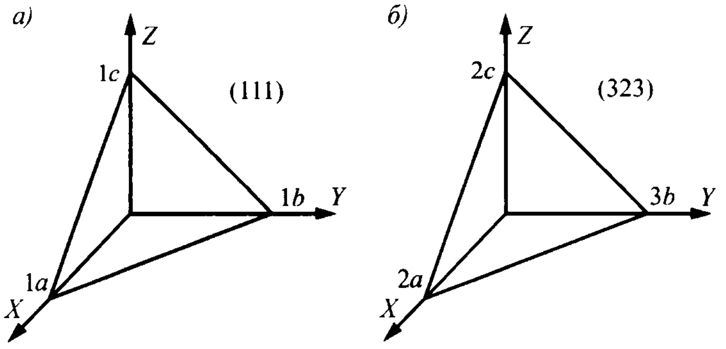


Рис. 2.2. Индицирование граней кристалла:
а – индексы Миллера (111); *б* – индексы Миллера (323)

Индексы (643) были получены путем умножения каждого символа на наименьший общий делитель, поскольку необходимо получить целые числа: 12/2 : 12/3 : : 12/4 = 6 : 4 : 3.

Если грань параллельна оси, то отсекаемый отрезок на оси становится равным ∞, а соответствующий индекс равным 0. Каждая из шести граней куба пересекает только одну координатную ось и проходит параллельно двум другим.

Кроме того, все шесть граней попарно параллельны друг другу. Следовательно, три грани куба имеют символы (100), (010), (001), а противоположные им грани приобретают отрицательный знак: $(\overline{100})$, $(\overline{010})$, $(\overline{001})$ (рис. 2.3, *а*, *б*, *в*). Для случая, когда плоскость параллельна оси *Z* и отсекает от осей *X* и *Y*, например, по единице, имеем $m : n : p = 1 : 1 : \infty$, откуда следует $(hkl) = (110)$ (рис. 2.3, *г*).

Далее, например, символ плоскости, параллельной осям *X* и *Y* и отсекающей три единицы на оси *Y*, определяется так: $m : n : p = \infty : 3 : \infty$, откуда $1/m : 1/n : 1/p = 0 : 1/3 : 0 = 0 : 1 : 0$. Значит, $(hkl) = (010)$ (см. рис. 2.3, *б*).

В отличие от символов граней, для которых используются круглые скобки, для символов направлений применяются квадратные скобки. Эти символы служат характеристикой любого кристаллографического направления. В этом случае в основу положена прямая пропорциональность отрезков на осях, а не обратная, как у символов граней. Направление определяется однозначно, если известны координаты какой-нибудь точки на прямой. При движении точки вдоль прямой отношения координат остаются всегда постоянными.

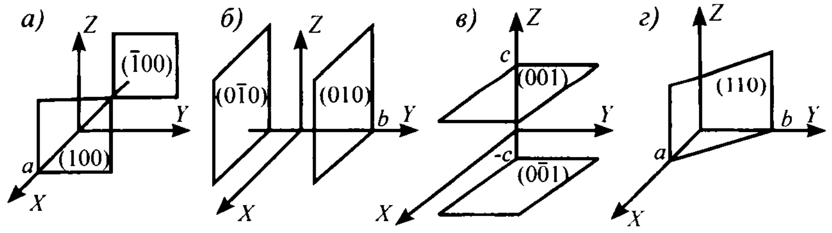


Рис. 2.3. Индексы Миллера для различных граней куба:
а – символ плоскости (100), $(\overline{100})$; *б* – символ плоскости (010), $(\overline{010})$;
в – символ плоскости (001), $(\overline{001})$; *г* – символ плоскости (110)

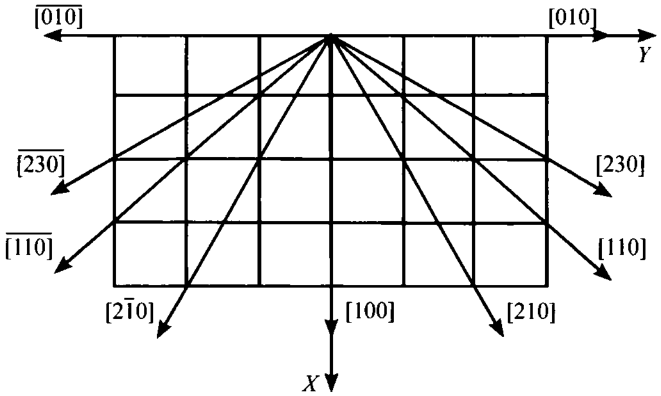


Рис. 2.4. Символы направлений в двумерной решетке в плоскости (001)

Во многих случаях различающиеся индексами Миллера плоскости эквивалентны как в кристаллографическом, так и в физическом смысле. Например, кристаллографическая эквивалентность плоскостей, служащих гранями куба: (100), (010), (001), $(\overline{100})$, $(\overline{010})$, $(\overline{001})$, проявляется в том, что они совмещаются друг с другом при повороте вокруг соответствующих осей на угол, кратный 90°.

Физическая эквивалентность состоит в том, что все они характеризуются одинаковой структурой в расположении узлов решетки и поэтому обладают одинаковыми физическими свойствами. Семейство эквивалентных плоскостей обозначается фигурными скобками, например {100}.

Для пояснения символов направлений рассмотрим двумерную решетку в плоскости (001) (рис. 2.4). В этом случае третий символ равен нулю. Каждая прямая может перемещаться параллельно самой себе, так что в конце концов пройдет через начало координат. Направления, проходящие параллельно оси *X*, получают символ [100], направления, параллельные оси *Y*, – символ [010], параллельные оси *Z*,– символ [001]. Противоположное направление обозначается отрицательным знаком над символом.

Следует заметить, что если символы кратны, то их можно сократить на целое положительное число, например [330] = = [110].

Семейство эквивалентных направлений принято обозначать ломаными скобками, например <100>.

Примеры

Определить символ направления, проходящего через начало координат и точку с координатами (a/8, 3b/8, 5c/8).

Найдем целочисленные отношения координат: 1/8 : 3/8 : 5/8 = 1 : 3 : 5.

Это соответствует переносу заданного направления в ближайший к началу координат узел кристаллической решетки с координатами (135). Значит, символ заданного направления [135].

Определить символ направления, проходящего через точки A (0, b/2, c/2) и B (a/2, 0, c/2).

Вычитая соответствующие координаты одной точки из координат другой, что соответствует параллельному переносу вектора *AB* в начало координат, получаем новые координаты конца вектора: –*a*/2, *b*/2, 0. Таким образом, решение этой задачи сведено к решению предыдущей. Заменим полученное отношение целочисленным: –1/2 : 1/2 : 0 = –1 : 1 : 0. Тогда символ направления будет $[\overline{110}]$.

2.1.2. Кремний

Монокристаллический кремний наиболее часто используется в МЭМС-устройствах. Монокремний имеет структуру решетки типа алмаза (рис. 2.5), характеризующуюся наличием тетраэдрических связей: у каждого атома есть четыре ближайших соседа, взаимодействующих силами ковалентных связей. Это выглядит так, как если бы в элементарную гранецентрированную кубическую[1] ячейку вдвинули другую, повернутую относительно первой на четверть постоянной решетки[2]. Такую же структуру имеет и германий.

Такая довольно сложная структура кремния свидетельствует о более плотной упаковке атомов в плоскости (111) по сравнению, например, с плоскостью (100) (направлением [100]). Плоскости (111) и (100) структуры кремния показаны на рис. 2.6.

Проблема большой важности в кремнии – энергетическая зона структуры. В первой половине XX столетия ученые, исследующие квантовую механику, обнаружили, что электроны в телах могут иметь только дискретные уровни энергии. Эти энергии разделены на различные зоны. При самом низком потенциале все электроны в теле занимают полосу валентности, которая соответствует орбитам валентности в атомах.

Идеальный, свободный от примесей кремний при низкой температуре имеет целиком заполненную энергетическую зону (валентную), отделенную от ближайшей свободной (проводящей) зоны зоной запрещенных состояний (запрещенной зоной). Вследствие этого полупроводниковый материал является на самом деле изолятором, так как все уровни в валентной зоне заполнены, а в зоне проводимости нет свободных электронов, т.е. электроны не могут двигаться под действием внешнего электрического поля. Однако, если электрон перебрасывается из валентной зоны в зону проводимости, оба свободных носителя (электрон в зоне проводимости и оставшаяся в валентной зоне дырка) движутся в электрическом поле и участвуют в образовании тока. В чистых полупроводниках концентрация носителей заряда – свободных электронов и дырок – составляет (10^{16} ... 10^{18})/см^3 вещества.

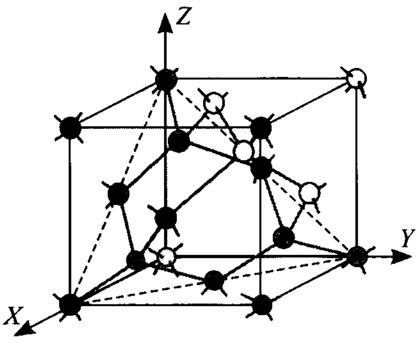


Рис. 2.5. Структура кристалла типа алмаза [атомы в плоскости (100) черного цвета, а в плоскости (111) – затемнены]

Для снижения удельного сопротивления полупроводника и придания ему определенного типа электропроводимости: электронной в случае преобладания свободных электронов или дырочной, если преобладают дырки, – в чистые полупроводники вносят необходимые примеси. Такой процесс называется легированием, а соответствующие полупроводниковые материалы – легированными.

В зависимости от того, каким типом основных носителей заряда определяется проводимость полупроводника, их называют *n*-типа (основные носители заряда – электроны) или *p*-типа (основные носители заряда – дырки). Полупроводник с концентрацией примесей > 10^{18}/см^3 обозначается как n^+ или p^+. В качестве легирующих примесей применяют элементы III и V групп Периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Легирующие элементы III группы создают дырочную проводимость и называются акцепторными примесями, элементы V группы –

---

[1] Атомы кремния располагаются в узлах куба и центрах его шести граней, причем $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.

[2] Расстояния между двумя соседними атомами вдоль одного из направлений решетки составляют постоянную решетки.

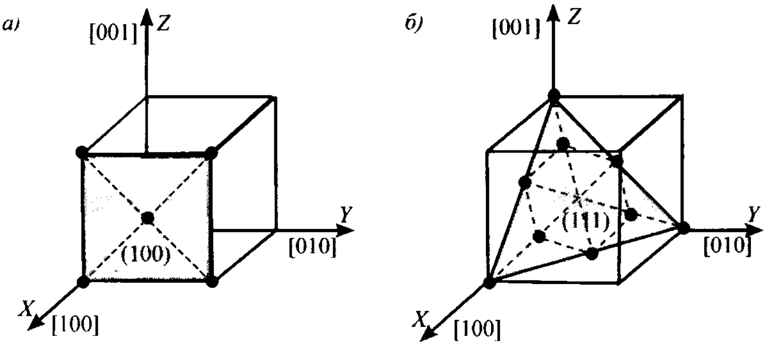


Рис. 2.6. Плоскости в структуре кремния (с атомами):
а – плоскость (100); *б* – плоскость (111)

электронную проводимость и называются донорными примесями [15, 16].

Вследствие того что в структуре кристалла в разных направлениях различны расстояния и силы связи между частицами, большинство свойств кристалла анизотропно, т.е. различно в разных направлениях, но одинаково в направлениях, симметричных друг другу.

Рассмотрим анизотропию механических свойств кремния.

Как известно, упругие свойства изотропных твердых тел при трехосном напряженном состоянии определяются тремя параметрами: модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G. Два из них независимы, а третий выражается через них однозначно. Для анизотропных материалов, к которым принадлежат полупроводники, упругие свойства определяются набором гораздо большего числа упругих коэффициентов. Связь между напряжением и деформациями в анизотропном теле устанавливается обобщенным законом Гука, который можно записать в тензорном виде в одной из двух форм [5, 15, 16]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km} \qquad (2.1)$$

или

$$\varepsilon_{km} = s_{kmij}\sigma_{ij}, \qquad (2.2)$$

где σ_{ij}, ε_{km} – тензоры второго ранга напряжения и деформации.

Компоненты тензора четвертого ранга c_{ijkm} называются модулями упругости, а компоненты s_{kmij} – коэффициентами податливости. Так как все индексы i, j, k, m последовательно принимают значения 1, 2 и 3, то для определения всего напряжения (или деформаций) анизотропного материала в общем случае требуется 81 коэффициент c_{ijkm} или s_{kmij}, которые образуют тензор четвертого ранга.

При операциях с тензорами часто используют сокращенную форму записи индексов. Каждую пару индексов можно заменить одним индексом, который пробегает значения от 1 до 6, поскольку внутри пары индексы разрешается переставлять между собой. Замена индексов осуществляется по схеме: 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 13→5, 12→6. В результате компоненту тензора коэффициентов податливости $s_{kmij} = s_{1323}$ сокращенно можно записать в форме $s_{pq} = s_{54} = s_{45}$, а компоненту тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{12}$ так: $\sigma_q = \sigma_6$.

Число независимых коэффициентов s_{pq} и c_{pq} для кристаллов с определенной симметрией уменьшается. Известно, что упругие свойства кристаллов с кубической симметрией (к которым относится и кремний) в системе координат, определяемой кристаллографическими осями, описываются всего лишь тремя независимыми модулями упругости или тремя коэффициентами податливости. Матрица коэффициентов податливости для этого случая выглядит следующим образом:

$$s_{pq} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Аналогично можно записать матрицу модулей упругости. Независимые значения коэффициентов податливости и модулей упругости имеют следующие значения: $s_{11} = 0{,}768 \cdot 10^{-11}$, $s_{12} = -0{,}214 \cdot 10^{-11}$, $s_{44} = 1{,}256 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$; $c_{11} = 1{,}657 \cdot 10^{11}$, $c_{12} = 0{,}639 \cdot 10^{11}$ и $c_{44} = 0{,}796 \cdot 10^{11}$ Па.

В произвольной системе координат, оси которой образуют некоторые углы с кристаллографическими осями, таких отличных от нуля коэффициентов может быть 21. Однако все эти коэффициенты можно найти через три упомянутых коэффициента с помощью следующего преобразования:

$$x_i' = l_i x_1 + m_i x_2 + n_i x_3, \; i = 1,2,3, \quad (2.4)$$

где x_i' – оси произвольной системы координат; l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы углов между i-й осью произвольной системы координат и кристаллографическими осями x_1, x_2, x_3.

Часто при расчетах пользуются теорией упругости изотропных тел, поэтому желательно выразить упругие свойства кремния в привычных для изотропной среды определениях: через модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига. Поскольку кремний является анизотропным материалом, то и значения этих модулей не будут постоянными, а будут зависеть от выбранного направления в плоскости кристалла.

В табл. 2.1 представлены аналитические выражения, характеризующие анизотропию модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига для кремния в плоскостях (100), (110), (111) [5].

Графическая иллюстрация изменения модулей Юнга, сдвига и коэффициента Пуассона в плоскостях (100), (110) и (111) представлена в табл. 2.2.

Рассмотрим анизотропию электрического сопротивления кремния.

Теория пьезорезистивного эффекта устанавливает связь между изменением электрического сопротивления полупроводника и механическим напряжением в нем, которая в тензорном виде может быть представлена следующим образом [5, 13, 15]:

$$E_s/r_0 = j_i + \pi_{ijkm}\sigma_{km}j_i, \quad (2.5)$$

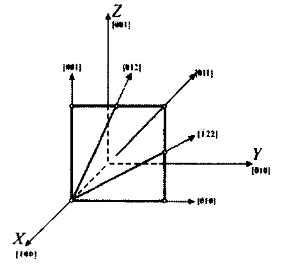
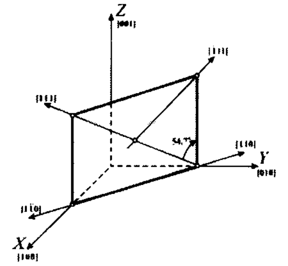
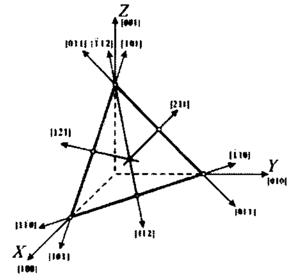
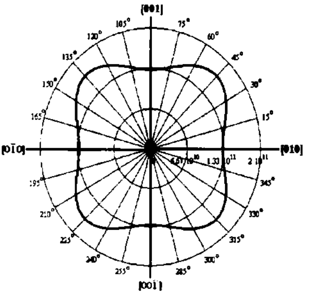
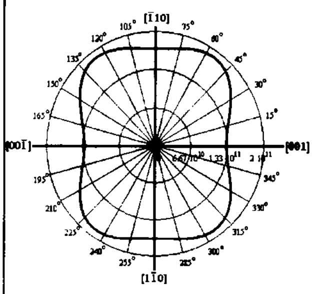
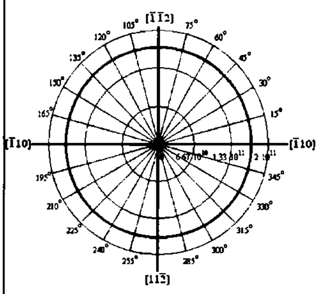
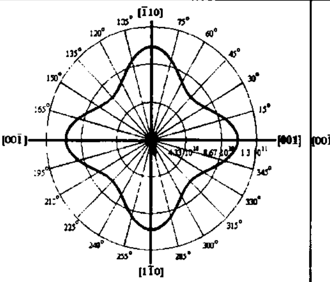
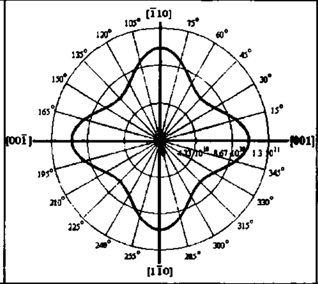
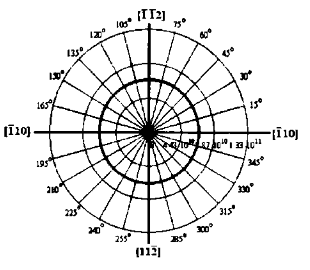
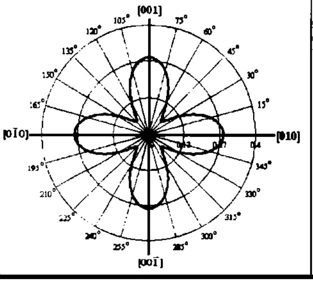
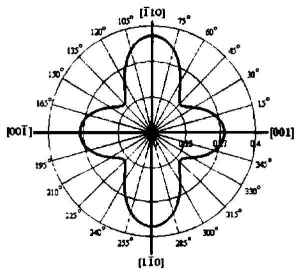
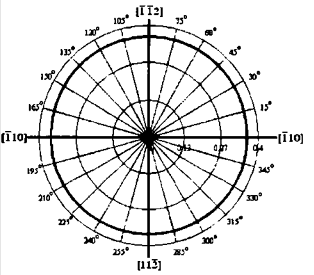
где i, j, k, m – компоненты вектора напряженности электрического поля; r_0 – удель-

2.1. Анизотропия свойств кремния

Параметр	Плоскость		
	(100)	(110)	(111)
Модуль Юнга E, $1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2	$\frac{11{,}36}{7{,}73 + \cos 4\theta}$	$\frac{15{,}15}{9{,}3 + 1{,}33\cos 2\theta + \cos 4\theta}$	1,69
Модуль сдвига G, $1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2	$\frac{2{,}84}{4{,}57 - \cos 4\theta}$	$\frac{3{,}79}{5{,}77 - \cos 4\theta}$	0,67
Коэффициент Пуассона ν	$\frac{1{,}43 + \cos 4\theta}{7{,}73 + \cos 4\theta}$	$\frac{2{,}24 + \cos 4\theta}{9{,}3 + 1{,}33\cos 2\theta + \cos 4\theta}$	0,358

Примечание. θ – угол, характеризующий положение произвольной системы координат относительно системы координат, заданной кристаллографическими осями.

2.2. Графическая иллюстрация анизотропии механических свойств кремния

Плоскость	(100)	(110)	(111)
Изображение плоскости			
Модуль Юнга, Н/м^2			
Модуль сдвига, Н/м^2			
Коэффициент Пуассона			

ное сопротивление материала при механическом напряжении, равном нулю; j_i – компоненты вектора плотности тока; σ_{km} – тензоры напряжения; π_{ijkm} – тензоры четвертого ранга пьезорезистивных коэффициентов, представляющие собой отношения изменения сопротивления, деленного на начальное сопротивление, к напряжению, вызывающему растяжение. Используя сокращенную форму записи индексов аналогично предыдущему, матрицу пьезорезистивных коэффициентов можно представить в виде [5, 13, 15]

$$\pi_{pq} = \begin{Vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{15} & \pi_{16} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} & \pi_{25} & \pi_{26} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} & \pi_{35} & \pi_{36} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} & \pi_{45} & \pi_{46} \\ \pi_{51} & \pi_{52} & \pi_{53} & \pi_{54} & \pi_{55} & \pi_{56} \\ \pi_{61} & \pi_{62} & \pi_{63} & \pi_{64} & \pi_{65} & \pi_{66} \end{Vmatrix}.$$

Из условия взаимности пьезорезистивных коэффициентов следует, что перестановка индексов не меняет значения коэффициента. Таким образом, в общем случае анизотропного материала общее число независимых пьезорезистивных коэффициентов для описания пьезорезистивного эффекта в полупроводнике в произвольной системе координат равно 21.

Для достижения максимальной чувствительности тензопреобразователи чаще всего ориентируют в определенных кристаллографических направлениях.

Как правило, ориентация произвольной системы координат *1'*, *2'*, *3'*, от которой зависит положение резисторов относительно кристаллографической системы *1*, *2*, *3*, определяется тремя углами Эйлера: φ, χ, ψ, как это делается для выявления положения твердого тела (рис. 2.7).

На рис. 2.7 векторы, нанесенные вдоль осей *3*, *N*, *3*, обозначают направления последовательных поворотов трехгранников осей на углы φ, χ, ψ. Если плоскость, определяемая осями *1*, *2*, совмещена с какой-либо кристаллографической плоскостью кремниевой пластины, то углы φ, χ, ψ определяют пространственное положение резисторов *R* в пластинке. Очевидно, при $\chi = \psi = 0$ резисторы находятся в кристаллографической плоскости и их положение определено углом φ.

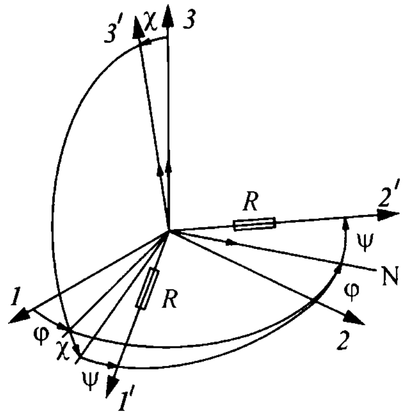


Рис. 2.7. Ориентация резисторов относительно кристаллографической системы координат

Косинусы углов между любыми парами осей *1*, *2*, *3* и *1'*, *2'*, *3'* образуют матрицу направляющих косинусов:

$$\begin{Vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} \cos\varphi\cos\chi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\chi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\chi\cos\psi \\ -\cos\varphi\cos\chi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\chi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\chi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\chi & \sin\varphi\sin\chi & \cos\chi \end{Vmatrix}, \tag{2.6}$$

где l_i, m_i, n_i (i = 1, 2, 3) – соответственно направляющие косинусы углов осей *1*, *2*, 3 с каждой из осей *1'*, *2'*, *3'*.

Для класса симметрии кубических кристаллов, к которым принадлежит кремний, получены [5,16] выражения для пьезорезистивных коэффициентов $\pi_{m\nu}$(m, ν = 1,..., 6) через три главных пьезорезистивных коэффициента π_{11}, π_{12}, π_{44} и направляющие косинусы l_i, m_i, n_i (табл. 2.3).

В табл. 2.3 величина $\pi_a = \pi_{11} - \pi_{12} - \pi_{44}$ является мерой анизотропии эффекта. Коэффициенты π_{11}, π_{12}, π_{44} называются соответственно продольным, поперечным и сдвиговым пьезорезистивными коэффициентами.

2.3. Пьезорезистивные коэффициенты

Коэффициент	Выражение	Аналогичные коэффициенты
π'_{11}	$\pi_{11} - 2\pi_a(l_1^2 m_1^2 + m_1^2 n_1^2 + n_1^2 l_1^2)$	π'_{22}, π'_{33}
$\pi'_{12} = \pi'_{21}$	$\pi_{12} + \pi_a(l_1^2 l_2^2 + m_1^2 m_2^2 + n_1^2 n_2^2)$	$\pi'_{13} = \pi'_{31}$, $\pi'_{23} = \pi'_{32}$
$\pi'_{16} = 2\pi'_{61}$	$2\pi_a(l_1^3 l_2 + m_1^3 m_2 + n_1^3 n_2)$	$\pi'_{24} = 2\pi'_{42}$, $\pi'_{35} = 2\pi'_{53}$ $\pi'_{26} = 2\pi'_{62}$, $\pi'_{43} = 2\pi'_{43}$ $\pi'_{15} = 2\pi'_{51}$
$\pi'_{36} = 2\pi'_{63}$	$2\pi_a(l_1 l_2 l_3^2 + m_1 m_2 m_3^2 + n_1 n_2 n_3^2)$	$\pi'_{14} = 2\pi'_{41}$, $\pi'_{25} = 2\pi'_{52}$
$\pi'_{46} = \pi'_{64}$	$2\pi_a(l_1 l_2^2 l_3 + m_1 m_2^2 m_3 + n_1 n_2^2 n_3)$	$\pi'_{54} = \pi'_{45}$, $\pi'_{65} = \pi'_{56}$
π'_{66}	$\pi_{44} + 2\pi_a(l_1^2 l_2^2 + m_1^2 m_2^2 + n_1^2 n_2^2)$	$\pi'_{44,}$ π'_{55}

Предположим, что оси *1'*, *2'* находятся в плоскости кремниевой пластины, т.е. $\chi = \varphi = 0$, и матрица (2.6) принимает вид

$$\begin{Vmatrix} l_1\, m_1\, n_1 \\ l_2\, m_2\, n_2 \\ l_3\, m_3\, n_3 \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Условимся также, что плоскость кремниевой пластины совмещена с одной из кристаллографических плоскостей (100), (110) (рис. 2.8) или (111), и получим выражения для коэффициентов π'_{11}, π'_{12}, π'_{16} через главные коэффициенты π_{11}, π_{12}, π_{44}. Воспользовавшись табл. 2.3 и матрицей (2.7), определим данные, представленные в табл. 2.4.

2.4. Пьезорезистивные коэффициенты для кристаллографических плоскостей

Кристаллографическая плоскость	Коэффициент		
	π'_{11}	π'_{12}	π'_{16}
(100)	$\pi_{11} - (\pi_a/4)(1 - \cos 4\varphi)$	$\pi_{12} + (\pi_a/4)(1 - \cos 4\varphi)$	$-(\pi_a/2)\sin 4\varphi$
(110)	$\pi_{11} - (\pi_a/16)\times$ $\times(7 - 4\cos 2\varphi - 3\cos 4\varphi)$	$\pi_{12} + (3\pi_a/16)\times$ $\times(1 - \cos 4\varphi)$	$(-\pi_a/8)\times$ $\times(2\sin 2\varphi + 3\sin 4\varphi)$
(111)	$\pi_{11} - \pi_a/2$	$\pi_{12} - \pi_a/6$	0

Значения главных пьезорезистивных коэффициентов приведены в ряде источников. В частности, для кремния и германия *n*- и *p*-типов в соответствии с работой [5] значения этих коэффициентов даны в табл. 2.5, из которой, в частности, следует, что для кремния *p*-типа проводимости справедливы приближенные равенства $\pi_{11} \approx \pi_{12} \approx 0$, а для кремния *n*-типа проводимости $\pi_{44} \approx 0$, $\pi_{11} \approx -2\pi_{12}$. Эти равенства справедливы с погрешностью не хуже 10 % от максимального значения коэффициента, и их можно использовать для большинства практических расчетов.

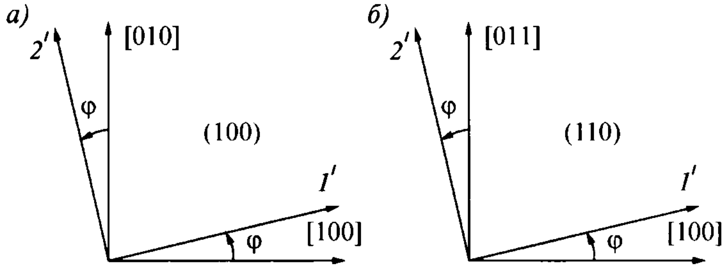


Рис. 2.8. Ориентация осей на кристаллографических плоскостях:
а – на плоскости (100) и *б* – на плоскости (110)

2.5. Главные пьезорезистивные коэффициенты

Материал	ρ, $1 \cdot 10^{-2}$, Ом·м	Коэффициент, м^2/Н		
		π_{11}, $1 \cdot 10^{-11}$	π_{12}, $1 \cdot 10^{-11}$	π_{44}, $1 \cdot 10^{-11}$
Германий *n*- типа	1,5	–2,3	–3,2	–138,1
	5,7	–2,7	–3,9	–136,8
	9,9	–4,7	–5,0	–137,9
	16,6	–5,2	–5,5	–138,3
Германий *p*-типа	1,1	–3,7	3,2	96,8
Кремний *p*-типа	7,8	6,6	–1,1	138,1
Кремний *n*-типа	11,7	–102,2	53,4	–13,6

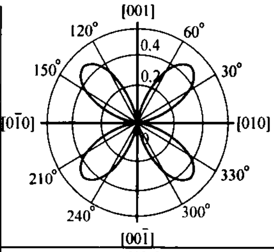
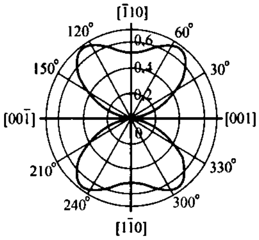
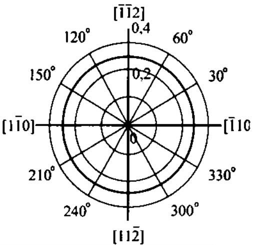
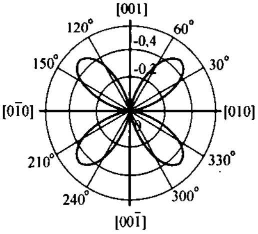
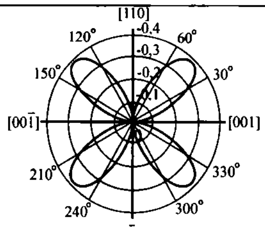
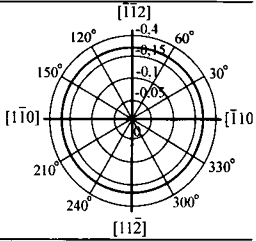
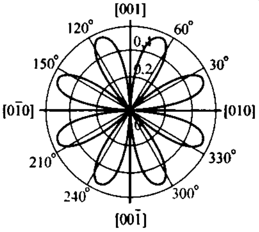
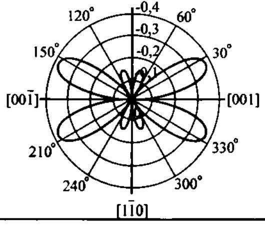
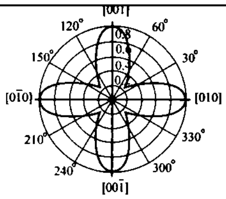
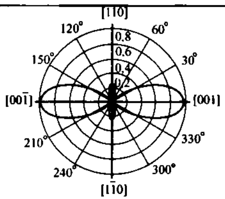
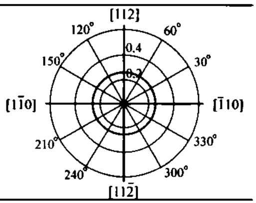
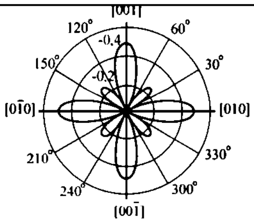
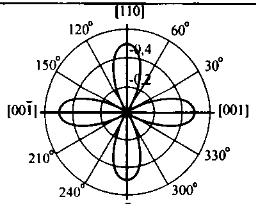
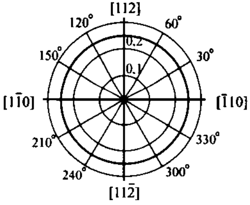
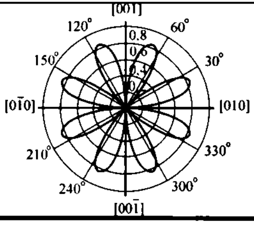
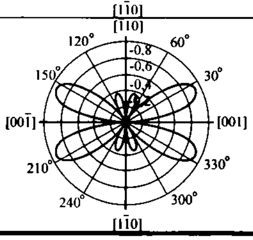
Следовательно, коэффициенты π'_{11}, π'_{12}, π'_{16} могут быть выражены только через главный коэффициент π_{44} для *p*-типа резисторов и через π_{11} для резисторов *n*-типа (табл. 2.6).

Графические зависимости коэффициентов $\pi'_{mv}(\varphi)$, нормированных по главным коэффициентам, рассчитаны по формулам табл. 2.6. Результаты приведены в табл. 2.7.

2.6. Пьезорезистивные коэффициенты кремния

Коэффициент	Кристаллографическая плоскость		
π'_{mv}	(100)	(110)	(111)
	p-тип		
π'_{11}	$0{,}25\pi_{44}(1-\cos 4\varphi)$	$0{,}19\pi_{44}(2{,}33-1{,}33\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)$	$0{,}5\pi_{44}$
π'_{12}	$-0{,}25\pi_{44}(1-\cos 4\varphi)$	$-0{,}19\pi_{44}(1-\cos 4\varphi)$	$-0{,}17\pi_{44}$
π'_{16}	$0{,}5\pi_{44}\sin 4\varphi$	$-0{,}37\pi_{44}(0{,}67\sin 2\varphi+\sin 4\varphi)$	0
	n-тип		
π'_{11}	$0{,}37\pi_{11}(1{,}67+\cos 4\varphi)$	$0{,}28\pi_{11}(1{,}22+1{,}33\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)$	$0{,}25\pi_{11}$
π'_{12}	$-0{,}37\pi_{11}(0{,}78+\cos 4\varphi)$	$-0{,}28\pi_{11}(0{,}78+\cos 4\varphi)$	$-0{,}25\pi_{11}$
π'_{16}	$0{,}75\pi_{11}\sin 4\varphi$	$-0{,}56\pi_{11}(0{,}67\sin 2\varphi+\sin 4\varphi)$	0

2.7. Нормированные пьезорезистивные коэффициенты кремния

Коэффициент	(100)	(110)	(111)
		p-тип	
π'_{11}/π_{44}			
π'_{12}/π_{44}			
π'_{16}/π_{44}			–
		n-тип	
π'_{11}/π_{11}			
π'_{12}/π_{11}			
π'_{16}/π_{11}			–

Физические свойства кремния

Кристаллическая структура	Алмаз
Постоянная кристаллической решетки, Å (1/Å = 0,1 нм)	5,43
Количество атомов/ $см^3$	$5{,}0 \cdot 10^{22}$
Плотность, $г/см^3$	2,32
Точка плавления, °С	1412
Удельная теплоемкость, Дж/(кг·°С)	0,7
Модуль Юнга, ГПа	130
Константы жесткости, ГПа:	
c_{11}	165,6
c_{12}	63,98
c_{44}	79,51
Коэффициент Пуассона	0,28
Предел прочности при растяжении, МПа	3790
Теплопроводность, Вт/ (см ·°С)	1,5
Коэффициент теплового расширения, $°С^{-1}$	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$
Пьезорезистивные коэффициенты, $Па^{-1}$:	
n-тип: π_{11}	$6{,}6 \cdot 10^{-11}$
π_{12}	$-1{,}1 \cdot 10^{-11}$
π_{44}	$138 \cdot 10^{-11}$
p-тип: π_{11}	$-102 \cdot 10^{-11}$
π_{12}	$53{,}4 \cdot 10^{-11}$
π_{44}	$-13{,}6 \cdot 10^{-11}$
Удельное сопротивление, Ом·см	$2{,}3 \cdot 10^{5}$
Диэлектрическая проницаемость	11,7

Как конструкционный материал кремний поставляется в виде пластин, которые для различных диаметров имеют разную толщину. Так, при диаметре 60 мм толщина пластины равна 0,35 мм; при диаметре 100 мм она находится в пределах 0,46...0,6 мм; при диаметре 76 мм составляет 0,38 мм. Пластины требуют тщательной обработки (рис. 2.9).

Для визуального определения ориентации и легирования кремниевых пластин на них выполняют базовый и дополнительный срезы.

Маркировка пластин несет информацию о типе электропроводимости, легировании, удельном сопротивлении и кристаллографической плоскости. Например, маркировка КЭФ 4,5 (100) означает, что кремниевая пластина, вырезанная в плоскости (100), имеет электронный тип проводимости, легирована фосфором, а удельное сопротивление равно $4{,}5 \cdot 10^{5}$ Ом·см.

Пластины не являются идеальными, а имеют локальные дефекты в виде неоднородностей структуры, неплоскопараллельности (выпуклости, вогнутости), остаточного напряжения после механической обработки, а также температурного напряжения, возникающего от разницы температурных коэффициентов линейного расширения между исходными базовыми областями и диффузионными областями (или слоями).

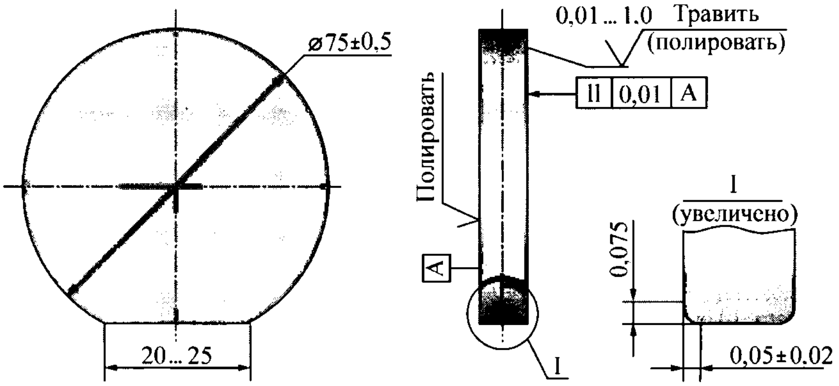


Рис. 2.9. Кремниевая пластина

Геометрические дефекты пластин заготовок приведены на рис. 2.10. Неоднородность исходных пластин по толщине приводит к разбросу расчетных характеристик приборов. Частичное решение этой проблемы заключается в предварительном анализе геометрии исходных пластин и последующем управляемом травлении.

Для снижения температурных влияний на внутреннее сопротивление диффузионных слоев осуществляют отжиг при температуре 400 °C [17].

С поверхности пластины должны быть удалены загрязнения, которые разделяют на физические и химические. Физические загрязнения (пыль, абразивные частицы, остатки фоторезистов и др.) имеют условные размеры частиц 1...100 мкм в поперечнике. Химические загрязнения появляются в результате действия сил хемосорбции. При этом на поверхности пластин образуются примесные покрытия толщиной от нескольких атомных до нескольких молекулярных слоев.

Допустимая удельная концентрация примесей, не препятствующая получению заданных параметров преобразователя и их стабильности, не должна превышать $1 \cdot 10^{-8}$ г/см^2. Поверхность пластины, удовлетворяющая этому требованию, считается технологически чистой. Для очистки пластин используют жидкостные и сухие методы.

Жидкостная очистка – это обезжиривание и травление пластин с обязательной промывкой после каждой операции. Обезжиривание выполняют в органических растворах (четыреххлористый углерод, бензол, толуол, изопропиловый спирт) и в активных средах (перекисно-аммиачный раствор). Для промывки используют дистиллированную и деионизированную воду.

Травление применяют химическое (щелочи, кислоты и их соли) и электро-

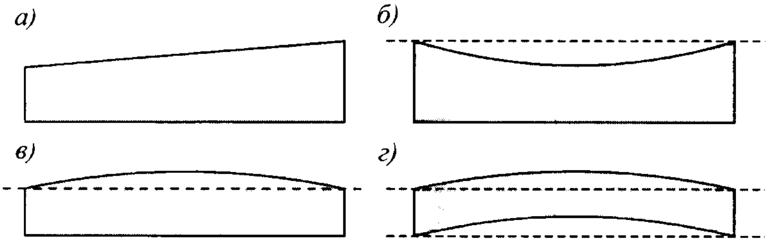


Рис. 2.10. Дефекты кремниевых пластин:
а – неплоскопараллельность; *б* – вогнутость; *в* – выпуклость; *г* – коробление

химическое, основанное на химических превращениях, происходящих при электролизе.

Сухая очистка – это отжиг, ионное, газовое и плазмохимическое травление.

После очистки контролируют ее качество. Одним из наиболее распространенных является метод контроля, основанный на смачиваемости пластин: пластина, свободная от грязи, вследствие адгезии способна удерживать сплошную пленку воды. Загрязнения нарушают целостность пленки и легко обнаруживаются.

Выше отмечалось, что используемые пластины имеют толщину 200 ... 600 мкм, причем разброс по толщине от пластины к пластине может быть значительным. Ненужный материал кроме механического способа можно удалить химическим травлением. Однако поверхность, получаемая при этом, должна быть полированной, чтобы, во-первых, можно было проводить на ней фотолитографию, а во-вторых, не ухудшать качество поверхности после травления, с помощью которого далее выполняется элемент прибора.

Если поверхность кремниевой пластины, полученную непосредственно после резки слитка, с микронеровностями порядка в несколько десятков микрометров подвергнуть полирующему травлению, то после удаления около 50...70 мкм слоя кремния удается получить полированную слегка волнистую поверхность с микронеровностями порядка в несколько микрометров. Хотя качество поверхности при этом получается значительно хуже, чем после стандартной механической обработки, тем не менее, эту поверхность с успехом можно использовать для фотолитографии и последующего микропрофилирования пластины.

Поликристаллический кремний

В отличие от монокристалла поликристалл представляет собой совокупность сросшихся друг с другом хаотически ориентированных маленьких кристаллов (зерен), поэтому он проявляет изотропные свойства, т.е. одинаковые во всех направлениях. Отдельные монокристаллические зерна анизотропны, а весь поликристалл, особенно мелкозернистый, ведет себя как изотропный материал. В технологиях изготовления микроприборов, использующих поверхностную микромеханическую обработку, тонкие пленки кремния необходимы как структурный материал. Поскольку выращивать последние из монокристаллического кремния трудно, то их выращивают из поликристаллического кремния.

Эти материалы находят широкое применение в МЭМС-промышленности. Механические свойства поликремниевых пленок зависят от процесса осаждения, использующегося при их изготовлении.

Пленки демонстрируют избирательность ориентации зерен, которые изменяются с температурой. Так как идеальная пленка не обнаруживает зависимости ориентации зерен относительно ее механических свойств, исследователи определили, что осаждение пленки при температуре 590 °С, которая является точкой перехода от поликремниевого к аморфному кремнию, – эффективный метод производства изотропных поликристаллических пленок. При этой температуре аморфный кремний будет кристаллизоваться в течение отжига, что позволяет получить пленки с почти равномерным модулем Юнга (165 ГПа.)

В поликристаллических материалах разрушающее напряжение зависит от двух факторов: размера зерна и поверхностной энергии перелома.

В нескольких исследованиях средняя сила перелома поликремния была найдена (порядка 2...3 ГПа), т.е. она меньше, чем у монокристаллического кремния.

2.1.3. Арсенид галлия

Арсенид галлия – еще один наиболее общий полупроводниковый материал. Он обладает некоторыми уникальными свойствами, делающими его идеальным для использования в изделиях, для которых кремний не подходит.

Арсенид галлия формирует кристаллическую решетку центрированными гранями с основанием из одного атома галлия и одного атома мышьяка. Такую структуру называют цинковой обманкой. Этот материал не применяется в полупроводниковой промышленности из-за его механических характеристик, которые не лучше, чем у кремния, а по некоторым параметрам уступают ему. Арсенид галлия популярен из-за его хороших оптических и электрических свойств. Ввиду большой электронной подвижности он весьма привлекателен для изготовления высокочастотных коммуникационных устройств.

Арсенид галлия является более хорошим природным изолятором, чем кремний. Введение кислорода или хрома в расплав GaAs превращает его в полуизоляционный материал. Это обеспечивает основание, которое изолирует компоненты и выполняет многие из тех же самых задач, что и диоксид кремния, хотя не так эффективно.

Другое существенное преимущество заключается в том, что GaAs имеет большую, чем у кремния, запрещенную зону с прямыми переходами полупроводникового материала. Это позволило развиться целым классам оптомеханических устройств. Именно данная особенность позволяет делать из GaAs полупроводниковые лазеры и светодиоды. Из GaAs изготавливают и механические микроструктуры.

В то время как арсенид галлия действительно обладает значительными преимуществами перед кремнием, есть также несколько основных недостатков. Прежде всего, это отсутствие устойчивых изолирующих оксидов и нитридов в GaAs-технологии.

AlGaAs также стал неотъемлемой частью обработки GaAs. По новым технологиям начали использовать этот троичный состав в построенных на GaAs МЭМС-системах. AlGaAs – привлекательный состав, потому что он обладает дополнительными свойствами сравнения с GaAs.

Физические свойства арсенида галлия

Кристаллическая структура	Цинковая обманка
Постоянная кристаллической решетки, Å	5,65
Количество атомов/ см^3	$4{,}42 \cdot 10^{22}$
Плотность, г/см^3	5,32
Точка плавления, °С	1237
Удельная теплоемкость, Дж/(г·°С)	0,35
Модуль Юнга, ГПа	85,5
Константы жесткости, ГПа:	
c_{11}	118,8
c_{12}	53,8
c_{44}	58,9
Коэффициент Пуассона	0,31
Теплопроводность, Вт/ (см·°С)	0,46
Коэффициент теплового расширения, °С$^{-1}$	$6{,}86 \cdot 10^{-6}$
Удельное сопротивление, Ом·см	108
Диэлектрическая проницаемость	13,18

Физические свойства AlGaAs

Кристаллическая структура	Цинковая обманка
Постоянная кристаллической решетки, Å	5,66
Количество атомов/см^3	$4{,}42 \cdot 10^{22}$
Плотность, г/см^3	3,76
Точка плавления, °С	1467
Удельная теплоемкость, Дж/(г·°С)	0,48
Константы жесткости, ГПа:	
c_{11}	120,2
c_{12}	57,0
c_{44}	58,9
Тепловой коэффициент расширения, °С$^{-1}$	$5{,}2 \cdot 10^{-6}$
Теплопроводность, Вт/(см·°С)	0,9
Диэлектрическая проницаемость	10,06

2.1.4. Кремниевые компаунды

Диоксид кремния в МЭМС-устройствах используется как структурный материал и как изолятор.

Окисление кремниевой пластины является хорошо исследованным процессом. Однако по сравнению со стандартной технологией здесь есть особенности [4, 17, 20]. Рассмотрим их.

1. Качественный оксид должен быть получен с обеих сторон пластины.

2. Толщина оксида определяется уже не только обычными требованиями (например, защитными свойствами при диффузии примесей, паразитными емкостями проводников на подложку и т.п.), но и специфическими. Например, существует необходимость защиты поверхности кремния при глубоком микропрофилировании пластины методом анизотропного химического травления.

Слой диоксида кремния формируется обычно на подложке путем химического соединения в полупроводнике атомов кремния с кислородом, который подается к поверхности кремниевой подложки, нагретой в технической печи до высокой температуры (900...1200 °С).

Окисление происходит гораздо быстрее в атмосфере влажного кислорода, поэтому влажное окисление используется для образования более толстых защитных слоев. Процесс окисления происходит на границе Si–SiO_2, поэтому молекулы окислителя диффундируют через все предварительно сформированные слои оксида и лишь затем вступают в реакцию с кремнием на его границе с оксидом.

Физические свойства диоксида кремния

Плотность, г/см^3	2,65
Точка плавления,°С	1728
Модуль Юнга, ГПа	66
Предел прочности, МПа	69
Теплопроводность, Вт/(см·°С)	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$
Коэффициент теплового расширения, °С$^{-1}$	$7 \cdot 10^{-6}$
Диэлектрическая постоянная	3,78
Удельное сопротивление, Ом·см	10^{12}

Наиболее часто используется толщина, составляющая десятые доли микрона, а верхний практический предел по толщине для обычного термического окисления составляет 1...2 мкм.

Карбид кремния

Свойства карбида кремния в большой степени зависят от условий обработки и могут изменяться в широких пределах (табл. 2.8).

2.8. Физические свойства карбида кремния

Тип SiC	Содержание SiC, %	Плотность, г/см^3	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент теплового расширения, $1 \cdot 10^{-6}\,°C^{-1}$	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Сопротивление изгибу, МПа
Керамическая связка	До 95	2,55	100	5,8	16	30
Повторно кристаллизованый	100		240	5,0	28	100
Плавленый	95		410	4,9	50	450
Горячепрессованный	98		450	4,5	55	650

Карбид кремния используется из-за его большой твердости и высокого температурного сопротивления. Многие SiC-структуры менее эластичны, чем кремний, что полезно для некоторых МЭМС-устройств. Коэффициент Пуассона SiC изменяется от 0,183 до 0,192. SiC – лучший природный изолятор для кремния и арсенида галлия. Его удельное сопротивление равно 10^8 Ом·см, хотя добавление присадок может его изменить до 10^{12} Ом·см.

Нитрид кремния

Нитрид кремния плохо реагирует со многими технологиями травления и поэтому его часто используют как защиту от распространения примесей и ионного загрязнения.

Физические свойства нитрида кремния

Плотность, г/см^3	3,1
Точка плавления, °C	1900
Модуль Юнга, ГПа	73
Разрушающее напряжение, МПа	460
Коэффициент теплового расширения, $°C^{-1}$	$3 \cdot 10^{-5}$
Теплопроводность, Вт/(см·°C)	0,28
Удельное сопротивление, Ом·см	10^{15}
Диэлектрическая постоянная	9,4

Пленки нитрида кремния, используемые в большинстве МЭМС-устройств, аморфны и обычно или напыляются, или депонируются методами химического осаждения из паровой (газовой) фазы. Чтобы поддерживать структурную целостность пленок, их обычно выращивают толщиной порядка нескольких сотен нанометров. Наиболее общая пленка имеет модуль Юнга около 260...330 ГПа и коэффициент Пуассона 0,25.

Нитрид кремния обладает многими механическими свойствами, которые делают его желательным материалом. Он является более хорошим тепловым изолятором, чем поликремний, что важно для изоляции поверхности микромеханической структуры. Благодаря высокой механической прочности он стал идеальной пленкой для барьера от пыли и трения.

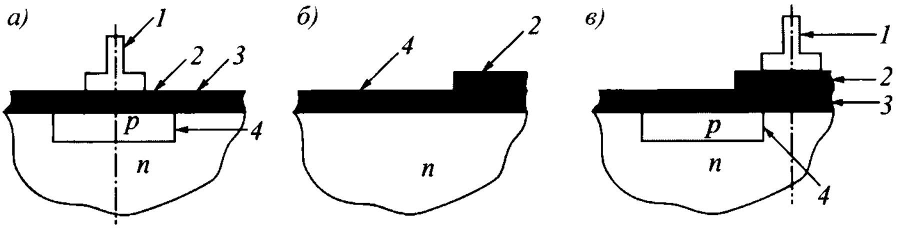


Рис. 2.11. Схемы контактов:
а – обычного; *б* – на легированной поверхности; *в* – на поверхности диэлектрика;
1 – вывод; *2* – контакт; *3* – слой диэлектрика; *4* – легированная область

Одно из неудачных свойств нитрида кремния – не столь хорошие изоляционные свойства, как у кремниевого диоксида. Из-за этого некоторые проектировщики любят формировать большинство изоляторов из SiO_2 и затем покрывать его поверхность Si_3N_4.

2.1.5. Металлы

Металлы используются в МЭМС как электрические проводники и иногда в качестве структурного материала. Омические контакты, контактные соединения и пленочные проводники служат для электрических связей: со слоями на подложке, между слоями, внутрисхемных соединений и соединений внутренних элементов микроэлектронных средств преобразователя с внешними электрическими цепями.

Схемы контактов приведены на рис. 2.11.

Контакт должен удовлетворять следующим требованиям:

– быть невыпрямляющим, т.е. его сопротивление не должно изменяться при изменении направления электрического тока;

– иметь линейную вольт-амперную характеристику, т.е. его сопротивление не должно зависеть от величины протекающего тока;

– обладать малым сопротивлением как в направлении, перпендикулярном к плоскости *p-n*-перехода, так и параллельном ей;

– отличаться хорошей адгезией с полупроводником и оксидной пленкой;

– характеризоваться высокой теплопроводностью;

– не инжектировать неосновные носители заряда;

– иметь температурные коэффициенты линейного расширения полупроводника и материала вывода, близкие друг к другу;

– представлять собой стабильную металлургическую систему с полупроводником и материалом вывода;

– не проникать глубоко в полупроводник;

– материал контакта должен позволять проводить фотолитографию и быть достаточно пластичным.

Материалов, полностью отвечающих указанным требованиям, не существует: каждый из них характеризуется своими достоинствами и недостатками.

Алюминий

Обычно используется в МЭМС как напыляемая пленка, наносимая поверх обработанной структуры. Закрывая структуру проводящей пленкой, в устройстве создают эквипотенциальные поверхности, которые являются необходимыми для действия многих электростатических устройств. Алюминий также обычно используется как электрический проводник в полупроводниковых технологиях.

Физические свойства алюминия

Плотность, г/см^3	2,71
Точка плавления, °С	659
Удельная теплоемкость, Дж/(г ·°С)	0,90
Модуль Юнга (объемное значение), ГПа	70
Коэффициент Пуассона	0,35
Критический предел прочности, МПа:	
при сдвиге	70
при растяжении	110
Теплопроводность, Вт/(см · °С)	2,37
Коэффициент теплового расширения, °С$^{-1}$	23,6 ·10^{-6}
Удельное сопротивление, Ом · см	2,82·10^{-6}

Длительное время алюминий был единственным хорошим проводником, который мог быть легко объединен в интегральных схемах. Так как алюминий формирует связи Al_2O_3 с SiO_2, он отличается хорошей адгезией со слоями пассивирования.

Золото – вещество, которое все больше находит применение в области МЭМС.

Физические свойства золота

Плотность, г/см^3	19,3
Точка плавления, °С	1063
Удельная теплоемкость, Дж/(г ·°С)	0,13
Модуль Юнга (объемное значение), ГПа	75
Коэффициент Пуассона	0,42
Критический предел прочности при растяжении, МПа	125
Теплопроводность, Вт/(см · °С)	3,15
Коэффициент теплового расширения,°С$^{-1}$	14,2 · 10^{-6}
Удельное сопротивление, Ом · см	2,44 · 10^{-6}

Золото почти всегда наносится на поверхность более твердого материала или используется в изделиях, не связанных с механическим движением. Золото имеет проблемы адгезии с SiO_2, но есть некоторые установленные методы для их обхода. Один из методов состоит в том, чтобы использовать посреднический слой хрома как связующий материал, поскольку он формирует связи Cr_2O_3 с SiO_2, а также отличается сильным сцеплением с золотом.

Главный стимул для использования золота в МЭМС-изделиях заключается в том, что оно является лучшим электрическим проводником, чем алюминий. Кроме того, золото не сразу окисляется в атмосфере, что делает его привлекательным для применения в изделиях, связанных с непосредственным воздействием атмосферы.

Медь

Основная причина использования меди в МЭМС состоит в том, что она отличается более высокой проводимостью, чем алюминий и золото. Медь – превосходный проводник теплоты. Однако из-за плохой адгезии с кремнием она в настоящее время служит только в качестве проводника.

Физические свойства меди

Плотность, г/см^3	8,89
Точка плавления, °С	1083
Удельная теплоемкость, Дж/(г·°С)	0,39
Модуль Юнга (объемное значение), ГПа	115
Коэффициент Пуассона	0,36
Предел прочности, МПа	220
Теплопроводность, Вт/(см·°С)	3,98
Коэффициент теплового расширения, °С$^{-1}$	$16{,}6 \cdot 10^{-6}$
Удельное сопротивление, Ом·см	$1{,}72 \cdot 10^{-6}$

Серебро также обладает хорошей электропроводимостью и теплопроводностью и также имеет плохую адгезию с кремнием. Следовательно, и здесь необходим подслой, что усложняет технологию получения пленки. Кроме того, так как атомы серебра способны мигрировать по подложке, возможно образование нитей из серебра между соседними проводящими линиями.

Титан и хром являются материалами для подслоев. Титан отличается высокой механической прочностью и коррозионной стойкостью. Однако, из-за высокого удельного сопротивления и возможности образования оксидной пленки он используется в виде систем: Si – Ti – Au; Si – Ni – Mo – Au и др. Хром характеризуется хорошей адгезией с кремнием, но при температуре > 200 °С взаимодействует с диоксидом кремния.

Платина, титан и молибден служат для создания разделительных (барьерных) слоев. Наилучшими разделительными свойствами обладает платина. Ее пленка толщиной 0,05 мкм исключает взаимодействие между большинством металлов, используемых в качестве контактных и проводящих слоев. Со свойствами материалов, применяемых в производстве контактных систем, можно ознакомиться по литературе [4, 17, 20].

Получение **тонких металлических пленок** возможно одним из следующих способов:

– физическим осаждением или конденсацией из газовой среды (термовакуумное или катодное распыление);

– химическим осаждением из газовой фазы (пиролиз, реактивное распыление);

– электролитическим или гальваническим осаждением из растворов солей металлов (нанесение гальванических покытий, химическое меднение);

– анодным или термическим окисление поверхности;

– ионным распылением.

Промышленность выпускает установки для получения тонких пленок термовакуумным испарением, принцип которого состоит в том, что осаждаемый материал нагревом переводится в парогазовую фазу. Образующийся парогазовый поток распространяется в вакуумной камере прямолинейно и попадает на подложку, температура которой ниже, чем пара. Происходят конденсация и образование пленки.

Метод тонкого распыления позволяет получать пленки из проводящих, диэлектрических и полупроводниковых материалов, а также из тугоплавких и многокомпонентных. Принцип этого метода основан на бомбардировке мишени из осаждаемого материала быстрыми частицами, например, положительными ионами аргона. Выбитые из мишени частицы образуют поток материала, который осаждается на подложках в виде тонких пленок. Подложки располагаются на пути потока на некотором расстоянии от мишени.

Толщина, электрическое сопротивление и **адгезия** – основные контролируемые параметры пленок. Для измерения толщины используют методы микровзвешивания, многолучевой интерферометрии и разности частот кварцевого резонатора. Качество адгезии пленки с подложкой обычно проверяется по силе на отрыв пленки от подложки с помощью напаянного на пленку цилиндра.

Размеры контактных площадок и пленочных проводников назначаются с учетом ограничений, обусловленных возможностями технологии и накопленным опытом. Укажем для примера, что минимальное расстояние между пленочными элементами и контактными площадками 300 мкм при использовании масок, и 50 мкм при фотолитографии, минимально допустимые размеры контактных площадок составляют: для приварки гибких выводов 200×150 мкм, а для припайки – 400×400 мкм.

Для применения в МЭМС-устройствах рассматриваются и другие материалы. Например, полиамиды – класс органических пленок, которые могут конкурировать с диоксидом кремния, как изолятором, т.е. это новое поколение диэлектриков с низкой диэлектрической проницаемостью.

2.2. ВЫРАЩИВАНИЕ И ДЕПОНИРОВАНИЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК

Развитие микротехнологии обеспечило так называемый планарный процесс, или планарную технологию, суть которой заключается в последовательном изготовлении слоев с заданным рисунком, расположенных друг над другом и состоящих из материалов с различными электрическими свойствами.

Слои с различными электрическими свойствами можно получать, изменяя свойства подложки, например, путем ее легирования или окисления, или же осаждения на ее поверхность слоя с помощью внешнего источника посредством испарения или распыления в вакууме. Заданный рисунок получается в процессе фотолитографии.

При этом рисунок с фотографического трафарета проецируется на поверхность подложки, предварительно покрытый слоем фоторезиста. Фоторезистивные материалы обладают двумя свойствами. Одно из них заключается в том, что под действием света способность фоторезиста растворяться в определенном классе растворителей изменяется. После проявления в таком растворителе спроецированный рисунок остается на поверхности подложки. Другое свойство состоит в том, что нерастворенные области фоторезиста совершенно не взаимодействуют (резистивны) с другим классом растворителей, которые способны травить или изменять каким-либо образом нижележащий слой материала.

Если один и тот же материал не обладает одновременно этими двумя свойствами, то для получения заданного рисунка необходимо добавить промежуточный слой, имеющий резистивные свойства, нужные для травления подложки или другого изменения ее свойств.

2.2.1. Эпитаксия

Эпитаксия – процесс наращивания на кристаллической подложке атомов, упорядоченных в монокристаллическую структуру, с тем чтобы структура наращиваемой пленки полностью повторяла кристаллическую ориентацию подложки. Если подложка и наращиваемая пленка состоят из одного вещества, то процесс называют автоэпитаксиальным, если из различных веществ, то гетероэпитаксиальным. Основное достоинство техники эпитаксии – получение чрезвычайно чистых пленок при сохранении возможности регулирования уровня легирования. Легирующая примесь может быть как *n*-, так и *p*-типа независимо от типа подложки.

Схема установки для газовой эпитаксии показана на рис. 2.12.

Газообразный водород с примесью $SiCl_4$ контролируемой концентрации пропускается через реактор, в котором на графитовом основании расположены кремниевые пластины. Индукционным нагревом с помощью высокочастотных катушек графит прогревается до высокой температуры (>1000 °C). Эта температура необходима для обеспечения правильной ориентации осаждаемых атомов в решетке и получения монокристаллической пленки.

В основе процесса лежит реакция $SiCl_4 + 2H_2 = Si$ (твердый) $+ 4HCl$.

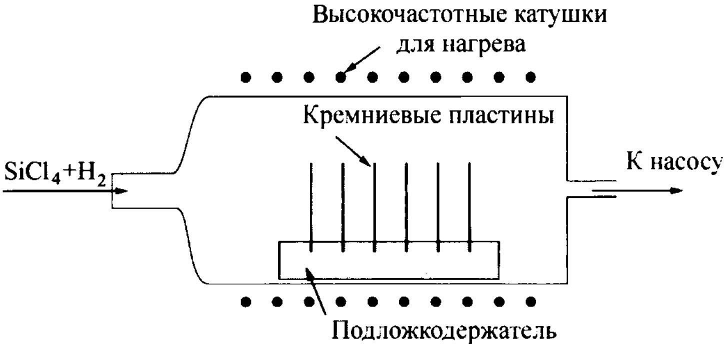


Рис. 2.12. Схема установки для газовой эпитаксии

Для получения эпитаксиального слоя *n*-типа используются жидкие (PCl, PBr_3) или газообразные (PH_3) легирующие вещества, содержащие фосфор или другие элементы этой группы. Слой *р*-типа получают в результате легирования кремния бором или его соединениями.

К газовой эпитаксии относится также конденсация на подложке разреженных паров вещества. Этот способ называется еще вакуумной, или молекулярно-лучевой, эпитаксией. Кремний испаряется из жидкой или твердой фазы и конденсируется на нагретую до заданной температуры монокристаллическую подложку. Атомы кремния вследствие высокой температуры диффундируют в ее поверхность в те места решетки, где минимум свободной энергии. Таким образом образуется эпитаксиальный слой.

В промышленности применяют однокамерные и двухкамерные установки молекулярно-лучевой эпитаксии. Последняя проводится в сверхвысоком вакууме (10^{-10}...10^{-11} Па) и основана на взаимодействии нескольких молекулярных пучков с нагретой монокристаллической подложкой. Этот процесс иллюстрируется на рис. 2.13.

Каждый нагреватель содержит тигель, являющийся источником одного из составных элементов пленки.

Температура каждого нагревателя выбирается таким образом, чтобы давление паров испаряемых материалов было достаточным для формирования соответствующих молекулярных пучков. Нагреватели располагаются так, чтобы максимумы распределений интенсивности отдельных пучков пересекались на подлож-

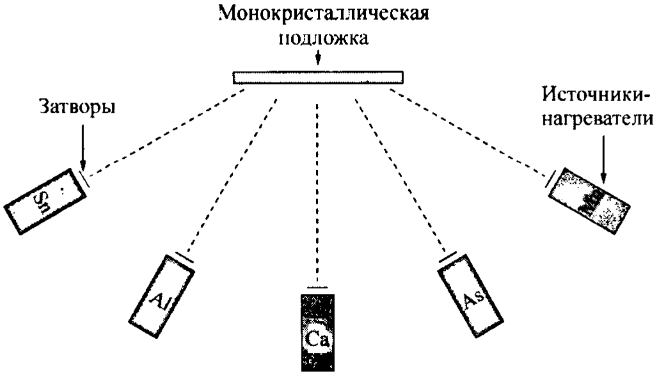


Рис. 2.13. Система источников-нагревателей для молекулярно-лучевой эпитаксии

ке. Подбором температуры нагревателей и подложки получают пленки со сложным химическим составом. Дополнительное управление процессом выращивания осуществляется с помощью специальных заслонок, размещенных между нагревателем и подложкой. Использование этих заслонок позволяет резко прерывать или возобновлять попадание любого из молекулярных пучков на подложку.

Одной из отличительных особенностей молекулярно-лучевой эпитаксии является низкая скорость роста пленки: ~1 мкм/ч или 1 монослой/с. Это позволяет легко модулировать молекулярные пучки, падающие на подложку, в пределах одного монослоя, если время управления движением заслонки < 1 с. Молекулярно-лучевая эпитаксия позволила на два порядка улучшить структурное разрешение в отношении процесса наращивания по сравнению с газовой эпитаксией.

Перспективы использования молекулярно-лучевой эпитаксии для твердотельной электроники связаны с возможностью последовательного выращивания слоев с различным химическим составом, таких как GaAs (арсенид галлия) и AlAs (арсенид алюминия).

Для получения на одной подложке многослойных структур из различных материалов применяется *жидкостная* (жидкофазная) эпитаксия.

Все факторы, влияющие на процессы эпитаксии (состояние подложки, скорость роста эпитаксиальной пленки, составы наращиваемого вещества и примесей), приводят к дефектам эпитаксиальных слоев: дефектам упаковки кристаллической структуры слоя, дислокациям, линиям скольжения и дефектам роста.

2.2.2. Диффузия

Диффузия, так же, как и эпитаксия, используется для введения в полупроводник некоторого заданного количества легирующей примеси. Большинство примесных атомов располагаются в кремнии в узлах кристаллической решетки, замещая основные атомы. Эти примеси могут перемещаться в направлении пустых узлов кристаллической решетки (вакансий). При очень высокой температуре (~1000 °С) многие атомы кремния покидают узлы решетки и плотность вакансий становится высокой. Когда после диффузии кристалл остывает, вакансии исчезают, а примесные атомы, занимающие узлы решетки, фиксируются.

Примесные атомы, которые занимают пространство между основными атомами, называются межузельными примесями. Примесные атомы перемещаются по кристаллической решетке скачками от одного межузлия (или узла) к другому. При высокой температуре пространство между атомами увеличивается так, что примеси могут диффундировать по межузлиям. После охлаждения кристалла межузельные атомы могут вернуться в узлы, замещая основные атомы, и стать электрически активными. Замещение является механизмом диффузии для бора, фосфора и большинства примесей, используемых для легирования кремния. Исключением является золото, которое диффундирует в основном по межузлиям.

Профиль легирующей примеси изменяется каждый раз при повторных нагревах подложки, когда проводится очередной термический процесс: окисление или диффузия. Это означает, что при разработке технологического процесса для получения требуемых глубин залегания переходов и профилей легирующих примесей необходимо учитывать каждый термический процесс.

Чистые легирующие элементы в процессах диффузии не используются. Бор, например, является тугоплавким элементом, фосфор при нагревании легко воспламеняется, а мышьяк высокотоксичен. Поэтому в качестве источников примесей применяют соединения легирующего элемента, обеспечивающего нужную концентрацию примеси, – диффузанты. В зависимости от состояния при температуре 20 °С различают твердые, жидкие и газообразные диффузанты.

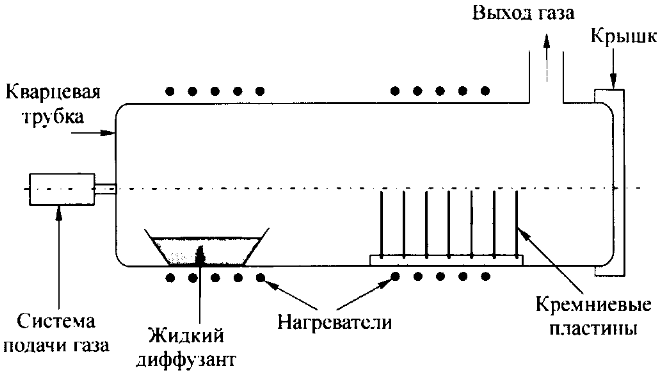


Рис. 2.14. Схема установки для проведения диффузии

В зоне диффузии располагают кремниевые пластины, а диффузанты вводят в газо- или парообразном состоянии. Источники жидких и твердых диффузантов располагаются в объемах с регулируемыми нагревателями для создания необходимого давления пара. Наиболее часто используют следующие способы диффузии: в замкнутом объеме, в открытой трубе в потоке газа-носителя, в составном (полугерметичном) контейнере (бокс-метод) и из планарных (параллельных) источников.

Бор для кремния является акцепторной примесью, создающей области *p*-типа электропроводимости.

Фосфор, мышьяк и сурьма – донорные примеси, создающие области электропроводимости *n*-типа.

Источниками бора служат: твердые диффузанты B_2O_3 и H_3BO_3; жидкий BBr_3; газообразные – галогениды бора $BrCl_3$, BF_3 и диборан BrH_6. Источниками фосфора являются твердые диффузанты P_2O_5, фосфаты аммония $NH_4H_2PO_4$ и $(NH_4)_2HPO_4$; жидкие – $POCl_3$, PBr_3 и PCl_3; газообразный – фосфин PH_3. В качестве источников мышьяка применяют твердые диффузанты – порошок кремния, легированный мышьяком до предела растворимости, оксид мышьяка As_2O_3 – и газообразный AsH_3. Источником сурьмы служат следующие диффузанты: твердый триоксид сурьмы Sb_2O_3 и газообразный – стибин SbH_3.

В качестве примера на рис. 2.14 показана схема для диффузии в открытой трубе с жидким диффузантом.

Кремниевые пластины загружаются в кварцевую трубу через притертую крышку (шлюз). Нагреватели с трубой создают двухзонную печь. В низкотемпературной зоне располагается диффузант, а в высокотемпературной – кассета с пластинами. Газ-носитель (очищенный аргон или азот) поступает из системы подачи и вытесняет из трубы воздух. Проходя через зону диффузанта, газ-носитель захватывает атомы примеси и переносит их к пластинам. Атомы легирующей примеси адсорбируются на поверхности и диффундируют в толщу пластин.

Термическая диффузия имеет недостатки, в частности высокая температура приводит к перераспределению примеси в ранее сформированных слоях и областях и, следовательно, к смещению *p-n*-переходов; зависимость коэффициента диффузии и растворимости примеси от температуры исключает применение многих легирующих материалов.

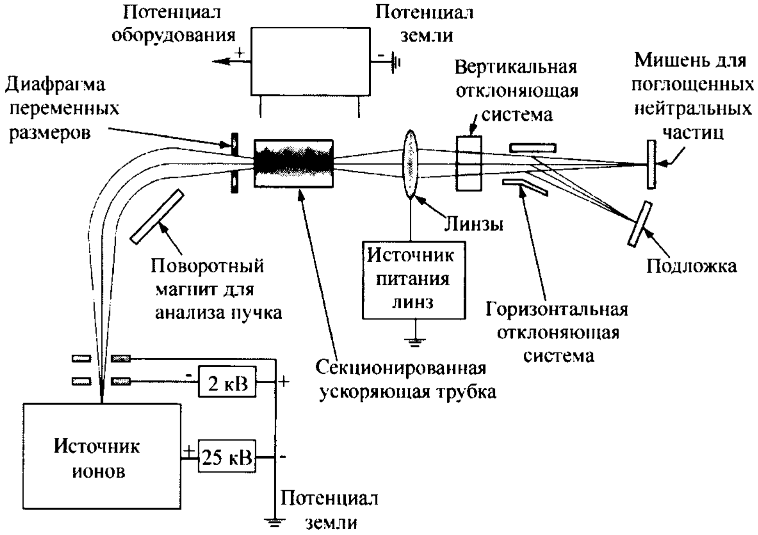


Рис. 2.15. Схема ионной имплантации для селективного внедрения примесей в кремний

2.2.3. Ионная имплантация

При ионной имплантации атомы легирующей примеси ионизируются, а затем ускоряются в электрическом поле до высоких энергий (30...350 кэВ), как показано на рис. 2.15.

Магнитный масс-сепаратор (на рисунке это горизонтальная отклоняющая система) отделяет ненужные ионы от легирующих. После прохождения через отклоняющую и фокусирующую системы ионный пучок направляется на полупроводниковую мишень, где ионы высокой энергии проникают в поверхностный слой полупроводника. Ионы теряют свою энергию при столкновениях с ядрами и электронами материала мишени и, в конце концов, останавливаются.

Внедрение ионов в решетку кремниевой пластины сопровождается образованием радиационных дефектов: дефектов упаковки, появлением атомов в междоузлиях, дислокации и др. Электрофизические свойства легированных слоев существенно зависят от условий легирования и последующего отжига. Хорошие результаты по устранению указанных дефектов дает локальный лазерный отжиг.

2.3. ЛИТОГРАФИЯ

Литографические процессы формируют на поверхности подложки слои стойкого к последующим технологическим воздействиям материала, способного под действием облучения волной определенной длины изменять необратимо свои свойства и прежде всего стойкость к проявителям.

В зависимости от длины волны излучения применяют следующие виды литографии: фотолитографию (оптическую литографию), электронно-лучевую, рентгеновскую и ионно-лучевую.

2.3.1. Фотолитография

В случае фотолитографии в первую очередь необходимо изготовить маску или шаблон с заданным рисунком.

Изготовление маски начинается с получения крупномасштабного макета-рисунка, так называемого оригинала топологии микроструктуры или микросхемы. Оригинал должен быть сделан во много раз большим кристалла (стороны кристалла обычно имеют размеры от 0,5...5 мм),

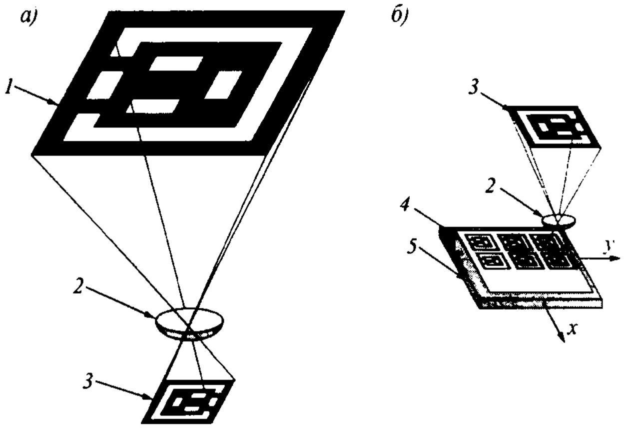


Рис. 2.16. Схема изготовления фотошаблонов методом последовательного приближения: *а* – первичный отсъем фотооригинала с уменьшением; *б* – вторичный отсьем промежуточного фотооригинала с уменьшением и одновременным мультиплицированием; *1* – фотооригинал ($M = 300...500$); *2* – объектив; *3* – промежуточный фотооригинал ($M = 10...30$); *4* – эталонный групповой фотошаблон ($M = 1$); *5* – координатный столик (мультиплицирование – пошаговое впечатывание уменьшенного до натурального размера изображения промежуточного оригинала)

чтобы при воспроизведении рисунка избежать больших погрешностей и обеспечить разумный размер этого рисунка при изготовлении оригинала. Макет обычно выполняется в виде рисунка, на котором показано расположение окон, соответствующее определенной стадии технологического процесса.

Следующий этап в процессе фотолитографии заключается в фотографировании оригинала. Обычно оригинал в 500 раз больше окончательного рисунка на кристалле.

Последующие фотографии делаются с уменьшением первоначального рисунка сначала в 100 раз (рис. 2.16, *а*), а потом в 10 раз (рис. 2.16, *б*), чтобы в окончательном виде на пластине получился точный размер рисунка.

Затем фотошаблон используется для последующего тиражирования исходного изображения. Полученные таким образом фотошаблоны используются в фотолитографии в качестве маски для передачи рисунка на поверхность подложки, покрытой слоем фоторезиста.

Фоторезисты – сложные полимерные вещества. Они покрывают тонкой пленкой поверхность пластины, на которую должно быть перенесено изображение. Фоторезистивная пленка экспонируется в синем или ультрафиолетовом свете, после чего в соответствии с рисунком фотошаблона на ней образуются засвеченные и незасвеченные области.

При проявлении происходит селективное удаление резиста в соответствии с полученной экспозицией. Различают позитивные и негативные фоторезисты.

В зависимости от используемого фоторезиста бывает негативный фотошаблон, на котором изображение геометрической фигуры выполнено светлыми линиями на темном поле, и позитивный – с темными линиями на светлом поле.

Фотошаблоны изготавливают либо на стеклянных пластинах, либо на полимерных пленках. При проявлении позитивных фоторезистов удаляются освещенные области, а в случаях проявления негативных фоторезистов – неосвещенные области. Совмещение фотошаблонов с пластиной, на которую нанесен фоторезист, возможно разными способами.

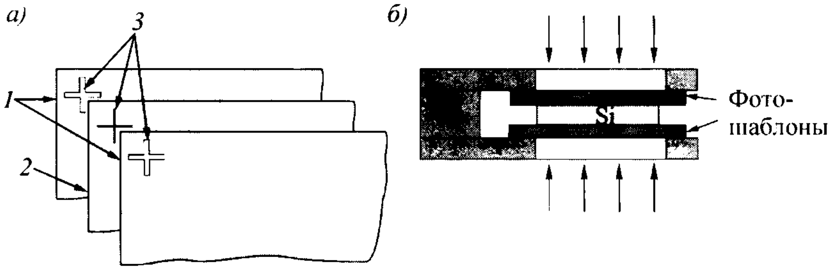


Рис. 2.17. Совмещение фотошаблонов:
а – визуальное; *б* – двустороннее в приспособлении

Наиболее простым является способ визуального совмещения: с помощью микроскопа проводится совмещение фотошаблонов *1* по реперным знакам *3* с пластиной *2*, на которой также имеется реперный знак (рис. 2.17, *а*).

В случае если фоторезист наносится на пластину с двух сторон, совмещение двух разных фотошаблонов (двухстороннее совмещение) осуществляется в специальном приспособлении (рис. 2.17, *б*).

Совмещение в инфракрасном свете – это наиболее совершенный, простой и точный способ двустороннего совмещения. Оно проводится на специальных установках. Сначала на одной стороне пластины обычными способами планарной технологии формируется рисунок необходимых элементов, например создаются тензочувствительные элементы. При этом одновременно решается задача их ориентации вдоль определенных кристаллографических направлений. Затем фоторезист наносят на другую сторону пластины и совмещение с очередным фотошаблоном проводят в инфракрасном свете.

Прозрачность кремниевых пластин для инфракрасного излучения позволяет наблюдать рисунок топологии компонентов и деталей, сформированных на противоположной стороне пластины, и совместить с ним требуемый фотошаблон, например создать рисунок окон в оксиде для локального травления в целях формирования упругого элемента преобразователя.

К преимуществам этого метода относятся простота как самого совмещения, так и ориентации компонентов, универсальность, точность, а к недостаткам – необходимость использования специализированного оборудования.

Чтобы получить на пластине изображение требуемого качества, надо одновременно и взаимосвязанно изменять и время экспонирования рисунка, и время его проявления. Наиболее распространенным методом получения рисунка на пластине является метод контактной печати, для иллюстрации которого рассмотрим случай, когда в слое диоксида кремния, расположенном на подложке, необходимо сделать небольшие отверстия.

Сначала на оксидный слой наносится фоторезист (в данном случае позитивный, рис. 2.18, *а*), а затем к последнему прикладывается стеклянный фотошаблон (маска) с рисунком, соответствующим той части оксида, которая должна быть удалена. После этого осуществляется экспонирование структуры в ультрафиолетовых лучах (рис. 2.18, *б*). В процессе проявления неэкспонированные участки фоторезиста растворяются, оставляя при этом окна в фоторезисте. Фоторезист, покрывающий остальную часть оксида, химически стоек к буферному кислотному раствору, обычно используемому для травления оксидного слоя с целью получения окон в оксиде (рис. 2.18, *в*, *г*). Затем оставшийся слой фоторезиста удаляется с подложки, и подложка становится готовой для проведения следующего технологического этапа (рис. 2.18, *д*).

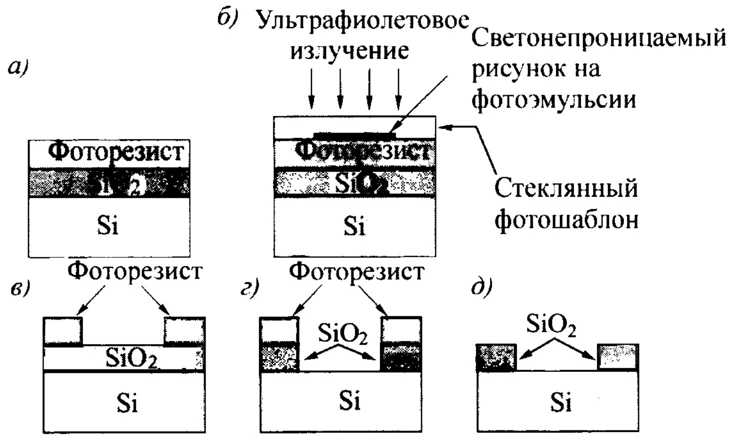


Рис. 2.18. Этапы фотолитографического процесса:
а – первичное покрытие; *б* – контактная печать; *в* – после проявления; *г* и *д* – после удаления оксида и фоторезиста соответственно

В развитие рассмотренного примера на рис. 2.19 показан процесс фотолитографии с применением позитивного и негативного фоторезистов.

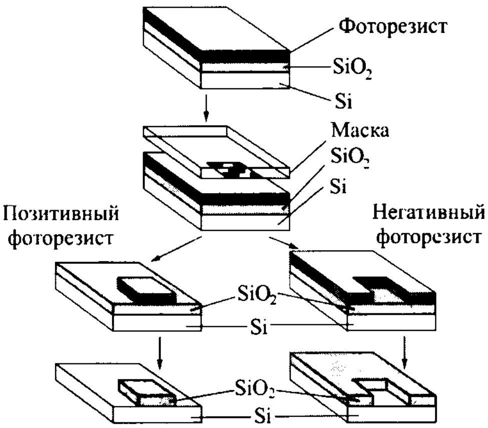


Рис. 2.19. Процесс фотолитографии

Конечный оксидный рисунок как при позитивном, так и при негативном копировании рисунка фотомаски служит маской на последующих этапах обработки. На этом этапе МЭМС отклоняется от традиционного изготовления интегральных схем (ИС). В обработке ИС устройств оксидный рисунок является маской во время легирования пластины примесями (такими, как бор или фосфор), изменяющими местную проводимость, необходимую для микроэлектронных устройств. В МЭМС оксид служит последующей маской как для дальнейшего дополнительного химического травления, делая 3D-углубления глубже, так и для новых слоев, на которые можно будет нанести последующие слои, получая полную 3D-структуру или устройство.

2.3.2. Электронно-лучевая литография

Наименьшие размеры элементов, которые могут быть получены с помощью обычного фотолитографического процесса, принципиально ограничиваются длиной волны света. Современная технология позволяет воспроизводить элементы с поперечными размерами в несколько микрометров, и, по-видимому, имеется возможность получить наименьшие размеры (до 1 мкм). Однако электронные пучки и рентгеновские лучи имеют длины волн порядка нанометров и даже меньше и, следовательно, способны создавать элементы с очень малыми размерами.

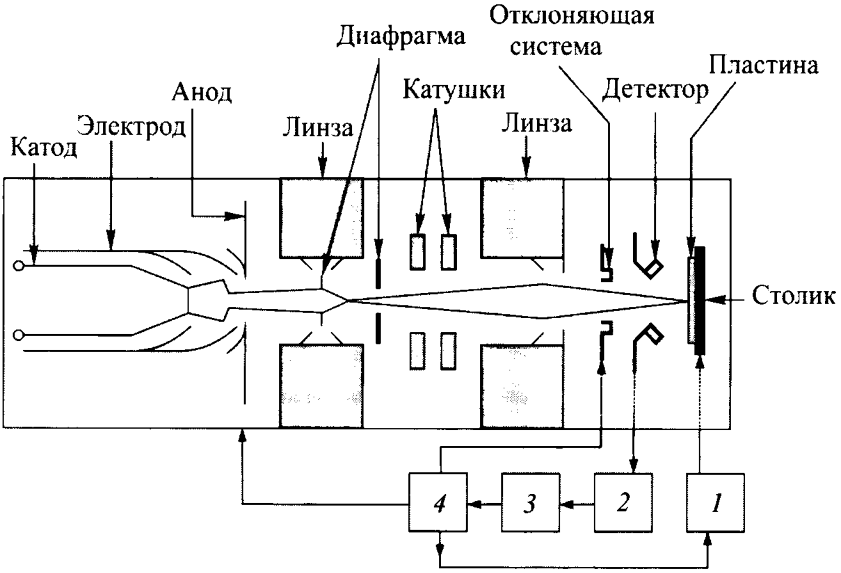


Рис. 2.20. Схематическое изображение системы электронно-лучевой литографии:
1 – система управления перемещением столика; *2* – усилитель сигнала;
3 и *4* – устройства управления установкой и сканированием соответственно

Для получения рисунков методом электронной литографии применяются два способа: 1) электронный луч, управляемый ЭВМ, перемещается заданным образом по поверхности подложки; 2) он проходит через специальные маски.

Испускаемые источником электроны могут быть сформированы в очень тонкий луч, который может модулироваться и перемещаться по поверхности нанесенного на подложку резиста для получения необходимого рисунка. Электронный луч может быть сфокусирован в точку субмикрометрового размера при таких больших токах, при которых время экспозиции составляет $< 10^{-7}$ с. Поскольку для получения рисунков на подложке с кристаллом 0,5×0,5 см и площадью элементов 0,25 мкм^2 требуется 10^{10} позиций луча, то повышение скорости экспозиции является весьма важной задачей.

Для получения на плоскости 10^{10} позиций луча требуется точность установки луча вдоль каждой оси порядка одной миллионной доли ее длины, что налагает жесткие требования на отклоняющую систему электронно-лучевой установки. Эти факторы ограничивают практический диапазон полного отклонения луча до 1 мм. Так как это меньше, чем ширина кристалла, то, чтобы проэкспонировать всю подложку, используется механически перемещаемый столик.

Как правило, применяются два типа сканирующих систем: растровая и векторная. В растровой системе для создания требуемого рисунка электронный луч модулируется соответствующим образом по интенсивности и построчно проходит по всей поверхности пластины. В векторной системе он отклоняется таким образом, что его след на резисте точно соответствует необходимому рисунку. Структурная схема электронно-лучевой системы, разработанной специально для изготовления микросхем, показана на рис. 2.20.

Электронно-оптическая система и оборудование для управления электронным лучом с целью создания рисунка аналогичны используемым в электронной микроскопии.

Обычно источником электронов является подогреваемый катод, который испускает электроны вследствие термоэлектронной эмиссии. Эти электроны затем ускоряются электростатическими полями и фокусируются с помощью электромагнитных полей. Для того чтобы получить четкий рисунок, пучок электронов управляется и отклоняется посредством магнитных и электростатических полей.

Сканирующий электронный луч позволяет создавать рисунки с высоким разрешением (с шириной линии < 0,5 мкм). Кроме того, он обладает такими достоинствами, как управляемость с помощью ЭВМ, достаточно большая глубина проникновения (10 мкм) и возможность фокусировки и контроля его положения с использованием уже хорошо отработанных систем электронной микроскопии.

При изготовлении микроэлектронных структур сканирующая электронная литография применяется для двух целей: для создания рисунка сканирующим электронным лучом непосредственно на фоторезисте, нанесенном на кремниевую пластину, и для изготовления фотошаблона, рисунок которого может быть затем перенесен на подложку.

2.3.3. Рентгеновская литография

Метод рентгеновской литографии иллюстрируется рис. 2.21.

Маска состоит из мембраны, прозрачной для рентгеновских лучей и поддерживающей пленку, которая имеет заданный рисунок и сделана из материала, сильно поглощающего рентгеновские лучи. Эта маска располагается на подложке, покрытой радиационно-чувствительным резистом. На определенном расстоянии от маски находится точечный источник рентгеновского излучения, которое возникает при взаимодействии сфокусированного электронного луча с мишенью. Рентгеновские лучи облучают маску, создавая соответствующие проекционные тени от поглотителя рентгеновских лучей на полимерной пленке.

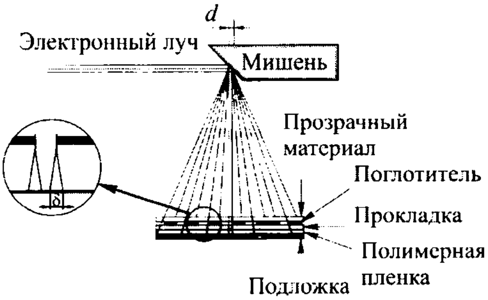


Рис. 2.21. Схематическое изображение рентгеновской литографии

Это пока единственный способ экспонирования резиста рентгеновскими лучами, поскольку линз и зеркал для управления ими сделать нельзя. Вставка в кружке к рис. 2.21 иллюстрирует величину полутени δ рентгеновского луча, которая является результатом конечного значения ширины *d* рентгеновского пучка, присущей любому источнику рентгеновского излучения. При каждой экспозиции величина δ может быть уменьшена путем правильного выбора параметров. Полутеневое изображение снижает четкость линий на фоторезисте и определяет минимально допустимую величину литографического разрешения системы

$$\delta = s(d/D),$$

где s – ширина зазора между фотошаблоном и подложкой.

Поскольку в рентгеновской литографии используемые длины волн составляют 1 нм, дифракционные эффекты пренебрежимо малы, и поэтому маску можно располагать на некотором небольшом расстоянии от подложки.

2.4. ТРАВЛЕНИЕ

Требуемая конфигурация чувствительного элемента с глухими и сквозными отверстиями, щелями и пазами обеспечивается преимущественно локальным химическим травлением. Доступ к кремнию травителей осуществляется вскрытием защитного слоя литографическими процессами.

По характеру взаимодействия с кремнием химическое травление является реакцией растворения, которое в зависимости от кинетики делится на молекулярное, ионное и реактивное.

В зависимости от условий травления различают два механизма травления кремния при отсутствии внешнего источника тока: электрохимический и химический.

Электрохимический механизм характеризуется протеканием на поверхности кремния двух реакций: анодного окисления и катодного восстановления окислителя. Наиболее широко используются травители на основе системы азотной HNO_3 и фтористо-водородной HF кислот. Кислота HNO_3 выполняет функцию окислителя кремния, а кислота HF является комплексообразователем – растворителем оксида.

При химическом механизме травления на поверхности кремния протекают окислительно-восстановительные реакции, связанные с чисто химическим взаимодействием молекул травителя с поверхностными атомами. Состав травителей, как правило, подбирается опытным путем. Травители – это смеси, состоящие из окислителя, комплексообразователя (образование растворимых соединений с оксидами), растворителя, ускорителя или замедлителя реакций окисления и растворения оксида и специальных добавок, обеспечивающих, например, избирательное травление.

Химическое травление подразделяют на изотропное, анизотропное и селективное.

2.4.1. Изотропное травление

Изотропное травление является одним из самых известных и распространенных способов локального микропрофилирования. Характерная особенность изотропного травления состоит в одинаковом воздействии во всех кристаллографических направлениях. Этот процесс известен как подрезание (рис. 2.22 *а*, *б*), а также как химическое полирование.

В качестве изотропных травителей используются травители на основе плавиковой и азотной кислот. Медленный травитель содержит HNO_3 : HF : CH_3COOH (в соотношении 7 : 1 : 3) и применяется для получения мелких рельефов при скорости травления около 0,1 мкм/мин. Быстрый травитель имеет такой же состав, но в соотношении 3 : 1 : 1 и служит для получения глубоких рельефов при скорости ~ 4...8 мкм/мин.

Скорость травления полупроводника зависит от большого числа факторов:

– типа травителя и его температуры;

– скорости отвода продуктов реакции и подвода реагентов к поверхности полупроводника (т.е. скорость перемешивания травителя);

– наличия или отсутствия дефектов как в самом полупроводнике, так и в защитной маске, обеспечивающей локальность травления;

– испарения травителя, приводящего к изменению его концентрации, и т.д.

Большинство этих факторов плохо поддается контролю, и в результате может

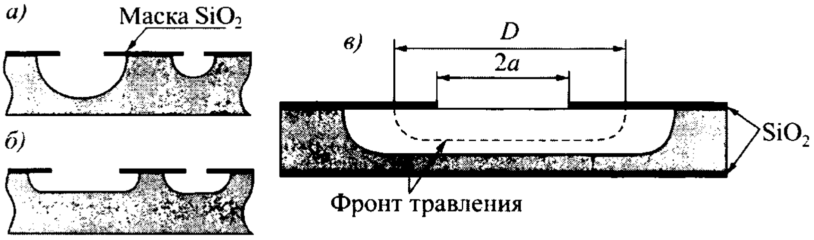


Рис. 2.22. Изотропное травление:
а – с перемешиванием травителя; *б* – без его перемешивания; *в* – структура с характерными размерами

замедлиться скорость травления, а в некоторых случаях (глубокие и узкие каналы) оно может остановиться. Однако этот эффект можно ликвидировать перемешиванием травителя, делая в структурах почти точные и скругленные поверхности, диаметр которых определяется по формуле (рис. 2.22, *в*)

$$D = 2(a + vt),$$

где a – радиус отверстия в маске; v – скорость травления; t – время травления.

Специфическая форма микропрофиля, а также сложность обеспечения локальной защиты от длительного воздействия травителя не позволяют рассматривать изотропное травление как перспективный способ микропрофилирования для изготовления преобразователей.

2.4.2. Анизотропное травление

Особенностью анизотропного травления является то, что в разных кристаллографических направлениях скорость удаления атомных слоев с поверхности травления, т.е. скорость травления, имеет неодинаковые значения. Это объясняется различной плотностью упаковки атомов в разных плоскостях, а также различным характером связи поверхностных атомов между собой и с атомами, расположенными в объеме кристаллической структуры полупроводника. Скорость травления в зависимости от кристаллографического направления соответствует следующему ряду:

$$v_{[100]} > v_{[110]} > v_{[210]} > v_{[211]} > v_{[221]} > v_{[111]}.$$

Для получения ЧЭ микродатчиков кремниевые заготовки в виде пластин чаще всего ориентируют в плоскостях (100), (110), (111).

Анизотропные травители представляют собой многокомпонентные растворы, состоящие из окислителя кремния до гидратированного диоксида, растворителя последнего и замедлителя или ускорителя процесса травления. В составе травителей используются системы: гидразин – вода; гидразин – изопропиловый спирт – вода; этилендиамин – пирокатехин – вода; едкое кали – пропиловый спирт – вода; едкий натр – вода; едкое кали – изопропиловый спирт – вода и др. В этих системах этилендиамин, гидразин и едкое кали выполняют роль окислителя; пирокатехин, пропиловый и изопропиловый спирт – комплексные агенты. Вода служит катализатором.

Процесс анизотропного травления заключается в поэтапном удалении атомных слоев (слой за слоем) с поверхности кристалла, т.е. в процессе травления на поверхности кристалла образуются микроскопические ступеньки. Поэтому анизотропное травление не дает зеркальных поверхностей и полученный элемент обрабатывают в течение 30 с в полирующем растворе изотропного травителя, состоящего из смеси плавиковой, уксусной и азотной кислот, взятых в пропорции 1 : 1,2 : 6,2. Обработка в полирующем растворе сглаживает микронеровности, остающиеся после анизотропного травления. В результате повышается также предел прочности до разрушения ЧЭ в 3–4 раза.

На скорость травления значительное влияние оказывают концентрация примесей и их тип в кремнии. Поэтому при травлении p- и n-кремния в составы анизотропных травителей вводят различные присадки. Разработаны также разнообразные самотормозящиеся виды травления. Комбинируя предварительные диффузии с анизотропными и изотропными травителями, можно получать с заданной размерной точностью весьма сложные объемные микроформы ЧЭ.

Скорость травления диоксида кремния во всех применяемых травителях оказывается значительно ниже скорости травления кремния. Поэтому при локальном травлении защита поверхности кремниевой пластины от травления может

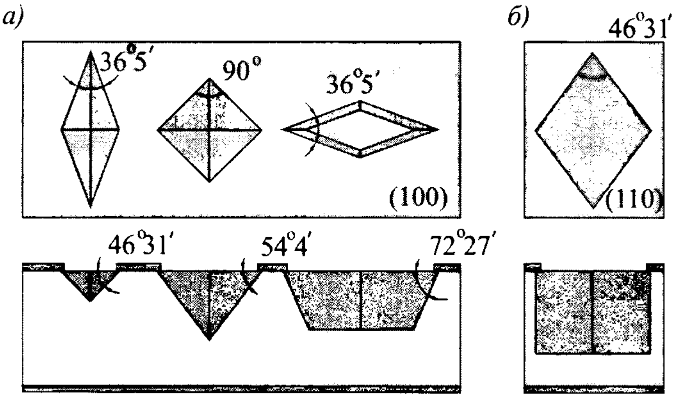


Рис. 2.23. Анизотропное травление в плоскостях (100) и (110):
а – (100); *б* – (110)

быть осуществлена с помощью оксидной пленки. Оксидные маски локализуют процесс травления профилированных углублений, сквозных отверстий и пазов. На рис. 2.23 показаны формы углублений [17] и соответствующие им маски при анизотропном травлении на плоскостях (100) и (110).

При воздействии травителя на плоскости (100) и ориентации кромок оксидной маски в направлении [110] скорости травления в направлениях [100] и [111] отличаются на два порядка и больше. В результате происходит смыкание граней (111) при незначительном подтравливании под маску (рис. 2.24).

При этом размер дна L_1 образующейся канавки определяется уравнением

$$L_1 = L_м - 2v_{100}\,t(\cos\vartheta - 1/A)/\sin\vartheta,$$

где $L_м$ – размер ширины канавки в маске; t – время травления; $A = v_{100}/v_{111}$ – степень анизотропии травления; v_{100}, v_{111} – скорости травления в направлениях [100] и [111]; ϑ – угол между плоскостями (100) и (110).

Смыкание боковых граней возможно, если $A > 1/\cos\vartheta$. Время, необходимое для смыкания, равно

$$t_{тр} = L_м\sin\vartheta/[2v_{100}(\cos\vartheta - 1/A)].$$

Глубина травления в момент смыкания определяется формулой:

$$h_{тр} = L_м\sin\vartheta/[2(\cos\vartheta - 1/A)].$$

При высокой степени анизотропии ($v_{100} >> v_{111}$) приведенная формула упрощается:

$$h_{тр} = L_м\mathrm{tg}\vartheta/2.$$

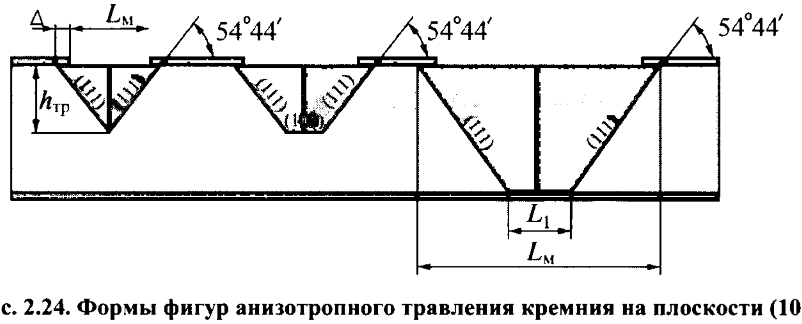


Рис. 2.24. Формы фигур анизотропного травления кремния на плоскости (100)

Необходимый размер окна в маске для заданной глубины $h_{тр}$ определяется зависимостью $L_м = 1,41h_{тр}$. Подтравливание под маску определяется формулой $\Delta = v_{100}t/(A\sin\vartheta)$.

Приведенные соотношения могут быть использованы и при расчете параметров травления на плоскости (110) при подстановке соответствующих значений v и ϑ.

2.4.3. Другие виды травления

При любых видах химических травителей эффективность их воздействия возрастает при перемешивании растворов. В **химико-динамическом** травлении используют мешалки лопастного типа и ультразвуковые вибраторы. Избирательное удаление слоя кремния и других материалов при наличии защитной маски возможно с помощью **вакуумно-плазменного** травления, которое обеспечивает избирательность, скорость и анизотропность травления. Слой кремния удаляется путем химического взаимодействия ионов и радикалов активного газа с атомами кремния с образованием летучих соединений.

Плазмохимическое травление подразделяется на **плазменное** и **радикальное**. В первом случае пластины кремния находятся непосредственно в плазме химически активных газов [четыреххлористый углерод CF_4 или дифтордихлорметан CF_4Cl_2 (фреон-12)], а во втором пластины находятся в вакуумной камере, отделенной от газоразрядной химически активной плазмы перфорированными металлическими экранами или магнитными и электрическими полями.

Разряд возбуждается высокочастотным генератором мощностью до 300 Вт и "горит" вне камеры, в которой находятся пластины. Давление в камере ~0,01 Па. Скорость травления ~400 нм/мин. После травления промывки практически не требуется.

Электролитическое травление рекомендуется применять при обработке кремния в плоскости (111). В качестве травителей используют растворы кислот и щелочей, например плавиковую кислоту, щелочь КОН.

При электролитическом локальном травлении воспроизводимость формы лунок травления определяется в основном воспроизводимостью скорости травления, которая зависит кроме всех отмечавшихся ранее факторов от значения и способа подведения напряжения между поверхностью травления и электролитом. Например, увеличение плотности тока обеспечивает, в общем, рост скорости травления и улучшает качество поверхности. Однако при этом, как правило, ухудшается равномерность фронта травления.

Изменение анодного тока влияет также на отношение размеров бокового подтравливания под край защитной маски к глубине травления. При малой плотности тока характер травления практически совпадает с изотропным. В случае увеличения тока травление в глубину начинает превалировать над травлением под маску, что происходит, по-видимому, из-за перераспределения анодного тока между различными участками поверхности лунки травления.

Применение **электроискрового микропрофилирования** кремния ограничивается размером инструмента (электрод) и наличием на поверхности пластин микротрещин. Наиболее приемлем комбинированный способ обработки: вначале электроискровой обработкой получают предварительные размеры, а затем с помощью электролитического травления или полирующими травителями доводят размеры до заданных значений.

Травление поликристаллического кремния. Практически все травители, воздействующие на монокристаллический кремний, травят и поликристалл. Однако более перспективны травители, в которых пленка диоксида кремния оказывается надежной защитой при локальном травлении пластины на большую глубину, например почти на всю толщину пластины.

По сравнению с изотропным травлением монокристаллического кремния травление поликристаллического кремния приводит к несколько худшей воспроизводимости формы упругих элементов преобразователей из-за существенно большей неоднородности поликристалла. Но в отличие от изотропного травления рассматриваемый процесс характеризуется определенной направленностью. Во всех случаях боковое подтравливание под край маски происходит медленнее, чем травление в глубину.

Электролитическое травление наряду с изотропным является одним из самых распространенных и хорошо отработанных методов травления полупроводников.

Микропрофилирование сапфира основано на травлении в потоке водорода и метана при температуре 1900 °С и давлении 1,3 Па. Локальность травления обеспечивается маскированием поверхности сапфировой пластины с помощью вольфрамовой пленки, выращенной из парогазовой смеси. Указанное травление носит анизотропный характер. Отношение скорости травления в глубину к скорости бокового подтравливания равно 4. При травлении сапфира на глубину 100 мкм боковой растрав ≤ 25 мкм.

Травление защитных покрытий. Для защиты поверхности полупроводникового кремния наряду с оксидной пленкой SiO_2 используется нитрид кремния Si_3N_4, а также пленки из алюминия, золота, хрома и др.

Для удаления оксидной пленки применяется так называемый буферный травитель в составе: плавиковая кислота HF – 40%-ная, фтористый аммоний NH_4F, вода в соотношении 2 : 7 : 1.

Заметим, что защитные металлические пленки различной толщины могут быть получены за несколько десятков секунд методом термического вакуумного напыления.

Для размерного травления металлических пленок хорошо зарекомендовали себя щелочные и кислотные травители.

2.4.4. Контроль размерных параметров при травлении

На разброс рабочих характеристик прибора кроме обычных технологических факторов влияет ряд дополнительных, например разброс геометрических размеров ЧЭ преобразователя. Этот разброс определяется точностью не процесса фотолитографии, а процессов локального травления при формировании ЧЭ. Разработаны различные способы контроля и обеспечения воспроизводимости длины, ширины или диаметра ЧЭ. Погрешность воспроизводимости толщины может достигать нескольких десятков процентов. Отсюда становится очевидной важность контроля и воспроизводимости толщины для уменьшения разброса характеристик преобразователей.

Следует отметить, однако, что в отличие от обычных интегральных схем в преобразователях повышение точности контроля толщины и ее воспроизводимости меньше влияет на выход годных структур по двум причинам: во-первых, из-за всегда существующей необходимости индивидуальной настройки и градуировки преобразователей и, во-вторых, из-за того, что разбраковка по толщине происходит не по принципу "годен – негоден", а по принципу "в какой класс годен?".

К настоящему моменту разработано несколько способов контроля обеспечения воспроизводимости размеров. Наиболее важные из них:

- контроль по времени травления;
- оптический способ;
- контрольное подтравливание;
- использование самотормозящихся видов травления;
- контроль жесткости упругого элемента.

Контроль по времени травления. Прямым способом контроля толщины ЧЭ преобразователя является контроль исходной толщины кремниевой пластины и глубины травления по времени травления. Факторами, определяющими точность этого способа, являются следующие: погрешность определения длительности процесса травления Δt, т.е. интервал времени, в течение которого пластина помещается в травитель и извлекается из него; непостоянство скорости травления Δv; неравномерность исходной толщины пластины ΔH. Если толщина исходной пластины равна H, желаемая толщина ЧЭ h, то погрешность получения толщины ЧЭ Δh при рассматриваемом способе контроля выражается следующим образом:

$$\Delta h = \frac{H-h}{v}\Delta v + v\Delta t + \Delta H .$$

Оптический способ контроля. Известно, что у кремния коэффициент поглощения оптического излучения сравнительно плавно увеличивается при возрастании энергии поглощаемых фотонов. Поэтому цвет кремниевой пластины на просвет будет изменяться при изменении толщины пластины. Окраска меняется с темно-красной при толщине порядка 22 мкм на оранжево-красную при толщине ~10 мкм и меньше. Практически оказывается возможным с достаточной воспроизводимостью контролировать толщину кремниевой пластины с погрешностью 2,5 мкм. На этом свойстве и основан оптический метод контроля толщины кремниевых пластин в процессе их травления.

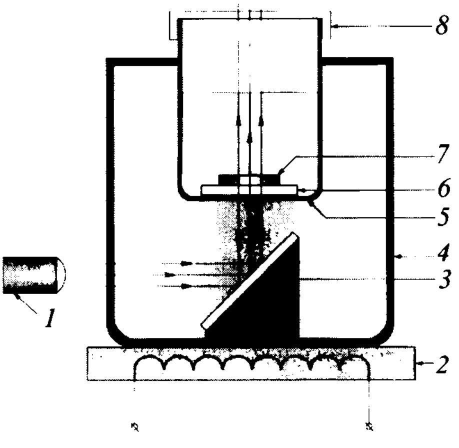


Рис. 2.25. Схема установки контроля процесса травления оптическим способом: *1* – источник света; *2* – нагреватель; *3* – зеркало; *4* – сосуд с подогретой водой; *5* – емкость с травителем; *6* – прозрачная пластина; *7* – кремниевая пластина; *8* – стеклянная крышка

Схема установки для контроля толщины пластины приведена на рис. 2.25.

Наблюдатель через стеклянную крышку может следить за изменением окраски отраженного пучка света в процессе травления.

Достоинством этого способа является сравнительно высокая точность независимо от глубины травления, недостатком – его ограниченность: толщина кремниевых ЧЭ ≤ 25 мкм.

Контрольное подтравливание. Этот способ заключается в том, что по периметру кристалла с лицевой стороны, на которой изготовляются активные (преобразовательные) элементы, производят контрольное подтравливание в виде кольцевой канавки на глубину, равную желаемой толщине элемента преобразователя (рис. 2.26, *а*). В процессе выполнения глубокого травления в зоне предварительного травления образуется сквозное окно (рис. 2.26, *б*) и происходит отделение частицы кристалла, что является сигналом о прекращении дальнейшего травления.

К недостаткам рассмотренного способа относятся следующие. Поскольку формирование элемента и отделение кристалла от пластины – заключительная технологическая операция, необходимо использовать специальные виды металлизации для токоведущих дорожек и контактных площадок, не стравливаемых в процессе травления кремния. Другой недостаток – требуется специальное оборудование для автоматического удаления

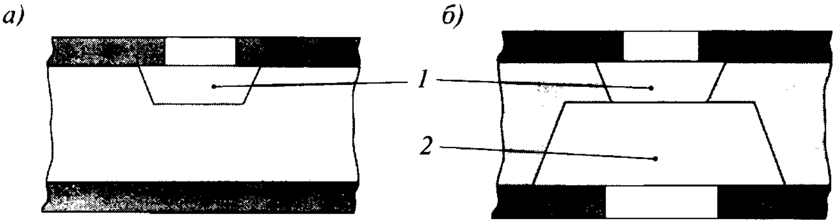


Рис. 2.26. Схема предварительного встречного травления:
а, *б* – последовательность травления; *1* – предварительное травление; *2* – встречное травление

отделенных от пластины кристаллов из травителя.

Самотормозящиеся виды травления. В настоящее время известен ряд травителей, скорость травления кремния в которых определяется при прочих равных условиях типом проводимости полупроводника или концентрацией присутствующих в нем примесей. Одним из наиболее широко известных электролитических травителей кремния является водный раствор плавиковой кислоты. При изучении анодного растворения кремниевых пластин в пятипроцентном водном растворе фтористого водорода было выяснено, что кремний p^- и n^+-типов проводимости ($\rho < 0,015$ Ом·см) хорошо растворяется в этом электролите, а достаточно высокоомный кремний *n*-типа проводимости ($\rho > 0,3$ Ом·см) растворяется слабо или вовсе не растворяется в случае приложения низкого потенциала. Следовательно, при использовании, например, пластины с *n*-эпитаксиальными слоями на n^+-подложке происходит практически самоостанов процесса травления на границе эпитаксиального слоя.

Таким способом можно получать мембраны из кремния *n*-типа проводимости, разброс толщины которых как по пластине, и от пластины к пластине будет, по существу, определяться разбросом толщины эпитаксиальной пленки при ее росте. Подобным образом были изготовлены мембраны толщиной 1 мкм. Следует, однако, отметить, что при изготовлении столь тонких мембран возникает вопрос о наличии дислокаций и других дефектов на границе n^+-подложки и *n*-эпитаксиального слоя. Наличие дислокаций приводит к травлению эпитаксиального слоя в этих местах и появлению сквозных отверстий.

2.5. ИЗГОТОВЛЕНИЕ МИКРОСТРУКТУР

2.5.1. Базовые технологии формообразования

В настоящее время существует несколько базовых технологий производства МЭМС, включая микромеханические структуры: кремниевая объемная и поверхностная микрообработка, LIGA-, SIGA- и HART-технологии, а также MUMPS-процесс и др.

Объемная микрообработка. Отличительная характеристика объемной микромеханической обработки состоит в том, что с ее помощью изготавливаются микромеханические устройства из объемной части основания. В последние годы разработано несколько вариантов этого процесса, использующих различные методы травления и копирования.

Объемная микромеханическая обработка начинается с монокристаллического основания. Потом на основание депонируется тонкопленочный материал, который нечувствителен к химическим травителям. Для кремниевых оснований наиболее часто используется как маска травле-

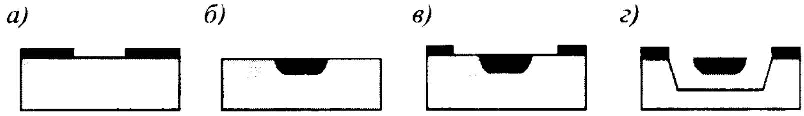


Рис. 2.27. Укрупненные этапы односторонней объемной микрообработки:
а – оксидный слой, выращенный из скопированной на поверхность кремниевой пластины; *б* – бор, ионно-имплантированный и отожженный на необходимой глубине; *в* – второй выращенный и скопированный оксидный слой; *г* – анизотропное травление с использованием КОН

ния оксид или нитрид кремния. Далее на пленку наносится шаблон так, чтобы ненужные части пленки были удалены.

На этом этапе объемный материал травится. Травление его может быть выполнено жидким или сухим химическим травителем.

Процесс жидкого одностороннего травления показан на рис. 2.27, а двустороннего – на рис. 2.28. Процесс анизотропного травления был рассмотрен в подразд. 2.4.2.

Главная особенность анизотропного травления состоит в том, что разработанные детали должны быть ограничены плоскостями (111) таким образом, чтобы конечные структуры обязательно имели прямоугольную форму с боковыми стенами, скошенными под углом 54,74°. Использование менее популярных кремниевых пластин с ориентацией (110) приводит к вертикальным боковым стенкам, но планарные детали могут быть только длинными параллельными полосами на основании.

На рис. 2.29, *а* приведена фотография пластины с чипами ЧЭ акселерометров, изготовляемых анизотропным травлением в ОАО "Темп-Авиа" (г. Арзамас), а на рис. 2.29, *б* показан ЧЭ в увеличенном масштабе.

ЧЭ изготовляют из пластин, которые нарезают в плоскости (100) из кристаллов, выращенных методом Чохральского. Пластины марки КЭФ 4, 5 имеют диаметр 76 мм при толщине (380 ± 20) мм.

Перед оксидированием пластины проходят химическую очистку сначала в ацетоне, а затем в растворе с составом (в частях): 1 – перекиси водорода + 1 аммиака + 8 воды (перекись окисляет загрязнения, а аммиак их удаляет). Вода используется дистиллированная и деионизированная. Окисление пластин проводится в печи СФО125 при температуре 1000 °С в течение 6 ч (время зависит от необходимой толщины слоя SiO_2 и способа окисления). Толщина слоя оксида 1 мкм. Возможен отжиг пластин. Для литографии служит позитивный фоторезист ФП-383.

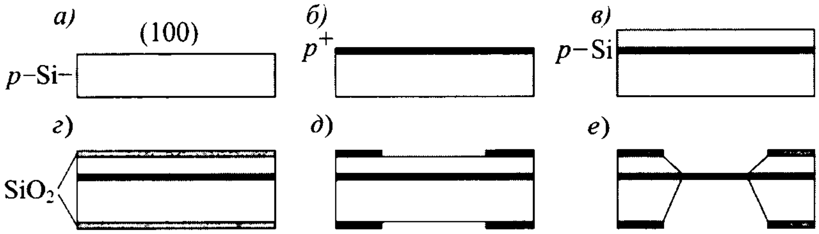


Рис. 2.28. Этапы объемной микрообработки:
а – исходная пластина; *б* – p^+-легирование для получения слоя останова травителя; *в* – осаждение эпитаксиального слоя; *г* – окисление; *д* – литография и травление SiO_2; *е* – анизотропное травление кремния

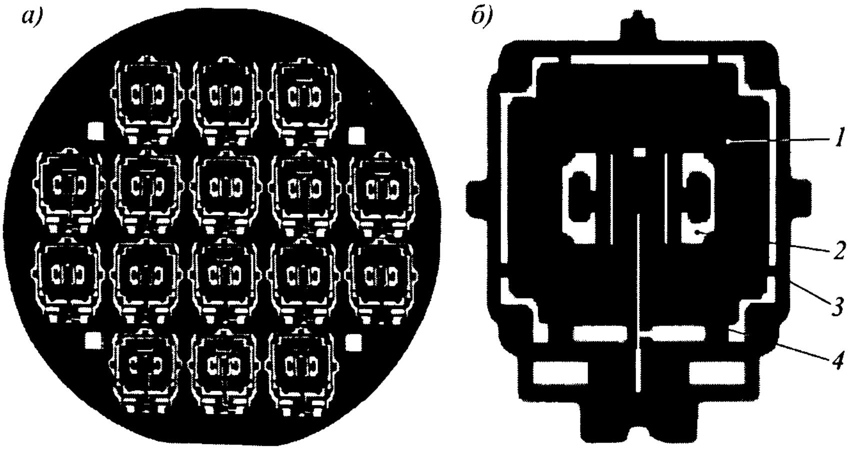


Рис. 2.29. Чипы ЧЭ акселерометра:
а – пластина с чипами; *б* – ЧЭ; *1* – ИМ; *2* – перфорация;
3 – технологическая перемычка (4 шт.); *4* – упругий элемент (3 шт.)

При экспонировании пластина устанавливается между двумя фотошаблонами и облучается ультрафиолетовым излучением (4 · 10^4 лк). Засвеченные участки фоторезиста разрушаются и вымываются 1%-ным раствором КОН. После сушки (7 мин при 100 °С) выполняется травление оксида буферным травителем (1HF : : $7H_2O$), затем – отжиг и травление пластин в 30%-ным растворе КОН.

Объемная микромеханическая обработка, использующая сухое травление, выполняется почти таким же способом, как и при жидкостном травлении. Один из примеров процесса сухого травления – SCREAM.

На первом его этапе шаблон изготавливаемой структуры передается на основание. Далее осуществляется реактивно-ионное травление. Обычно после этого проводится второе глубокое травление, чтобы экспонировать слой неоксидированного кремния. С этого момента может быть выполнено изотропное травление, которое создает сами структуры, подвешенные над основанием, а также может быть использовано для отделения структуры целиком.

Характерные размеры структур, полученные методом объемной микрообработки, – несколько сотен микрон в длину и от долей до нескольких десятков микрон в толщину. Достоинство этой технологии заключается в ее простоте, а основные недостатки – в двусторонней обработке пластин и сложности соединения объемных микроструктур с электронными компонентами.

Наиболее общий метод создания многослойных объемных микромеханических устройств – соединение двух пластин.

Соединение пластин используется в последние годы и для упаковки микродатчиков, и для строительства сложных датчиков. Существует несколько наиболее распространенных методов соединения пластин, которые рассмотрены ниже.

Анодное, или электростатическое, соединение – процесс, который соединяет проводящее основание (обычно это кремний), со стеклянным основанием, обогащенным натрием. Процесс осуществляется путем введения этих двух оснований в прямой контакт. Далее они нагреваются до температуры ~350...400 °С, которая мобилизует ионы натрия в стекле. Затем прикладывается напряжение 400...700 В между этими двумя основаниями. При этом стеклянное основание чаще всего имеет отрицательный потенциал, в результате чего ионы натрия отталкиваются от границы раздела и создается область ионного разрежения порядка 1 мкм в толщину с электрическими областями ~7×10^6 В/м. Это создает электростатическое давление в несколько атмосфер, прижимающее пластины друг к другу, в то время как формируется тонкий слой SiO_2. Конечный результат этого процесса – герметично спаянное соединение.

Существует несколько вопросов, касающихся надежности в создании этих соединений. Высокая температура, при которой формируется соединение, может вызывать тепловое деформирование в обработанном устройстве. Также может возникнуть деформация в области взаимодействия из-за рассогласования коэффициентов теплового расширения. Другим вопросом является наличие больших напряжений и электрических полей, прикладываемых к соединяемым пластинам. Неучет этих факторов может привести к уничтожению устройства в процессе соединения.

Низкотемпературное стеклянное соединение – альтернатива анодному соединению для случаев, когда недопустимо высокое напряжение. В этом процессе область соединения покрывается тонкой пленкой из низкотемпературного стекла. Затем пластины соединяют под давлением и нагревают, чтобы создать надежное соединение. Низкотемпературное стекло или тает, или кристаллизуется, в зависимости от типа используемого стекла, соединяющего два основания. К недостаткам данного соединения следует отнести меньшие прочность и надежность, чем у анодного соединения.

В некоторых случаях используются стеклянные фритты (стеклоприпои, стеклокерамические припои, стеклоцементы) для формирования связи. Фритты – растворы металлических оксидов, которые формируют пасту. Под давлением фритты создают пленку, которая спаивает поверхности. Ее можно задубить путем нагрева до температуры 300...600 °С. Тепловой коэффициент расширения фриттов может быть в 2–5 раз больше, чем у кремния, что способно привести к деформированию устройства.

Соединение методом сплавления. Этот процесс используется обычно в производстве устройств, имеющих структуру "кремний на изоляторе", а также в датчиках давления. Соединение достигается путем помещения одной чистой пластины над другой. Эти две пластины соединяются благодаря силам Ван-дер-Ваальса. Далее они помещаются в печь для создания конечного соединения при температурах > 1000 °С.

Этот процесс позволяет создать прочное соединение, однако он имеет несколько серьезных недостатков. Высокие температуры печи не допускают использования активных устройств на пластине до соединения. Кроме того, слабая начальная связь делает заключительную силу связи очень чувствительной к поверхностной топологии пластин и присутствию загрязнителей. По этим причинам данные соединения не всегда надежны и часто трудны в использовании.

В лаборатории микромеханических сенсоров Минского НИИ радиоматериалов разработана конструкция микроакселерометра (МА) маятникового типа, ЧЭ которого соответствует схеме, представленной на рис. 1.11, *а*.

В состав микросборки входит ЧЭ в виде инерционной массы (маятник) на торсионной подвеске, выполненной из монокремния, с емкостным способом съема информации о положении маятника. Для повышения чувствительности МА используется дифференциальный емкостный измеритель, состоящий из подвижной и двух неподвижных электродных пластин.

Маятник является центральной подвижной обкладкой дифференциального конденсатора, а неподвижные обкладки нанесены на внутренние поверхности корпусных пластин (крышек), которые изготавливаются из боросиликатного стекла или кремния.

Маятниковый узел ЧЭ показан на рис. 2.30.

Увеличенные по сравнению с аналогами размеры данного МА несколько ухудшают массогабаритные параметры акселерометра, однако дают возможность почти на порядок повысить его чувствительность и снизить влияние изменения температуры и прочих факторов на выходные характеристики. В то же время дальнейшее увеличение габаритных размеров сенсора с целью повышения чувствительности оборачивается резким снижением процента выхода годных изделий, поскольку при этом вероятность возникновения дефектов при технологических процессах возрастает по экспоненциальному закону.

Элементы микромеханического сенсора ускорения изготавливались с помощью операций глубокого изотропного и анизотропного химического травления кремния, прецизионного травления кремния и пр. Сборка микромеханического сенсора ускорения осуществлялась путем пайки или анодной сварки кремний–стекло, которая позволяет обеспечить герметизацию сенсора и, соответственно, улучшение стабильности его параметров при изменении температуры, влажности окружающей среды (кратко- и долговременная нестабильность). Технология изготовления микромеханического сенсора представлена в табл. 2.9.

Помимо микромеханического сенсора в состав МЭМС акселерометра входит электронная схема обработки, конструктивно выполненная в виде монолитной КМОП БИС. Функциональное назначение данной БИС – прецизионное преобразование емкостей микромеханического сенсора (номинальное значение ~ 10 пФ) в типовой электрический сигнал – напряжение 0...5 В, который и является выходным сигналом акселерометра.

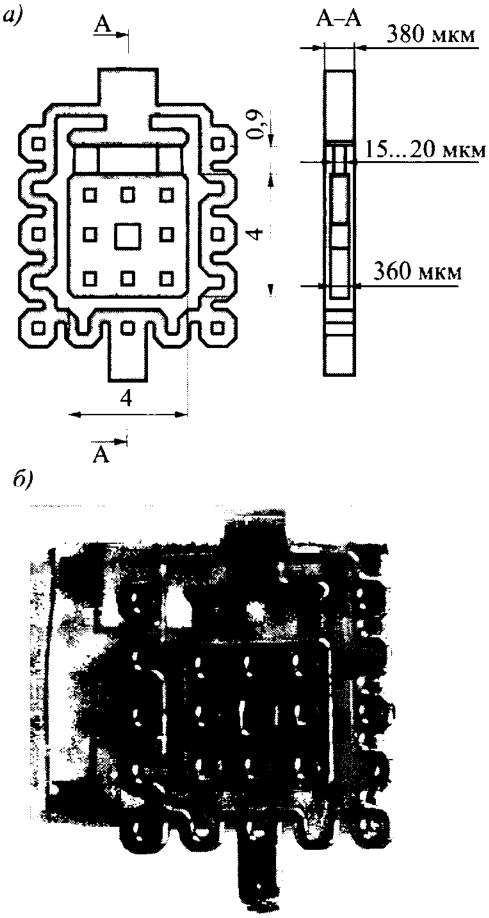
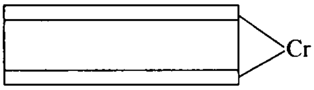
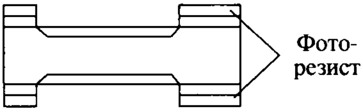
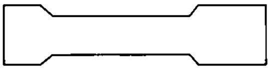
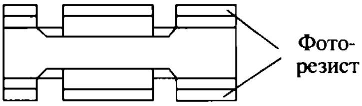
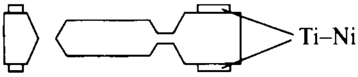
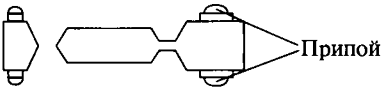
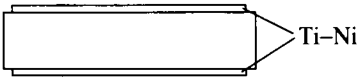
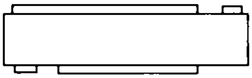
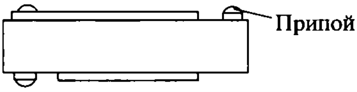
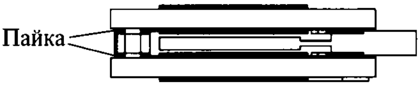


Рис. 2.30. Маятниковый узел МА разработки Минского НИИ радиоматериалов: *а* – конструкция; *б* – общий вид

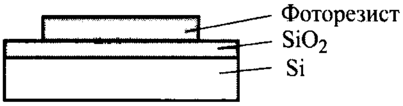
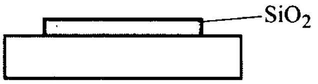
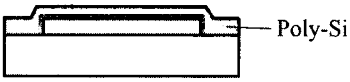
Поверхностная микрообработка. Технология поверхностной микрообработки основана на вытравливании опорного, или "жертвенного", слоя из-под структуры, которая в итоге должна стать механически свободной. В большинстве случаев микроструктуры изготавливают из поликристаллического кремния Poly-Si, но возможно использование фосфоркварцевого стекла, никеля, нитрида кремния Si_3N_4.

В табл. 2.10 приведены основные этапы изготовления элемента типа мембраны из поликристаллического кремния.

2.9. Технология изготовления ЧЭ МА

Технологический процесс	Иллюстрация процесса
Химическая обработка монокремния (диаметр пластины 76 мм, толщина 380 мкм, КДБ-0,01 <100>)	
Двустороннее напыление Cr для формирования маски для травления	
Двусторонняя фотолитография и предварительное травление для утонения "язычка"	
Снятие фоторезиста и Cr	
Двустороннее напыление Cr для формирования маски для травления язычка сенсора	
Двусторонняя фотолитография и травление язычка	
Снятие фоторезиста и Cr	
Напыление Ti-Ni через маску для формирования проводящего слоя и контактных площадок	
Лужение площадок Ti-Ni	
Химическая обработка подложек Si (стекла)	
Двустороннее напыление Ti-Ni для формирования нижней и верхней обкладок конденсаторов и контактных площадок	
Двусторонняя фотолитография по металлизации	
Лужение контактных площадок	
Резка пластин на кристаллы	–
Сборка сенсора методом пайки трех элементов	

2.10. Технология изготовления ЧЭ микродатчика давления

Технологический процесс	Иллюстрация процесса
Осаждение на пластине кремния жертвенного слоя (SiO_2) и нанесение фоторезиста	
Фотолитография (позитивный фоторезист); формирование контура внутренней полости мембраны	
Осаждение поликристаллического кремния и нанесение фоторезиста	
Фотолитография и формирование внешнего контура мембраны	
Травление жертвенного слоя и "освобождение" мембраны	

В качестве жертвенного слоя здесь используется SiO_2. Основные технологические процессы – фотолитография и травление поликристаллического кремния. Поликристаллический кремний или фосфоркварцевое стекло наносится плазмолитическим или химическим осаждением из паровой фазы при пониженном давлении. Структуры, изготовленные с помощью поверхностной микрообработки, имеют размеры от нескольких десятков или сотен микрон в длину и от долей до нескольких микрон в толщину.

Более подробная технология поверхностной микрообработки на примере изготовления ЧЭ микрогироскопа по рис. 2.31, конструкция которого описана в п. 1.3.2 (см. рис. 1.36), иллюстрируется рис. 2.32.

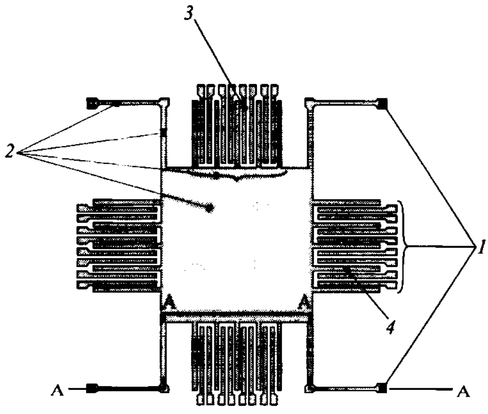


Рис. 2.31. Микроструктура ЧЭ МГ:
1 – места крепления анкеров упругих элементов и неподвижных электродов гребенчатых структур; *2*, *4* – элементы, освобождаемые от подложки; *3* – элементы на подложке (*А-А* – линия сечения)

Вначале (рис. 2.32, *а*) на подложке *1* из монокремния формируется пленка *2* из нитрида кремния толщиной 1 мкм путем плазменного или температурного химического осаждения из паровой (газовой) фазы. Под пленкой с помощью ионной имплантации или температурной диффузии выполняются металлические диффузионные площадки *4* для последующего крепления на них анкеров и неподвижных

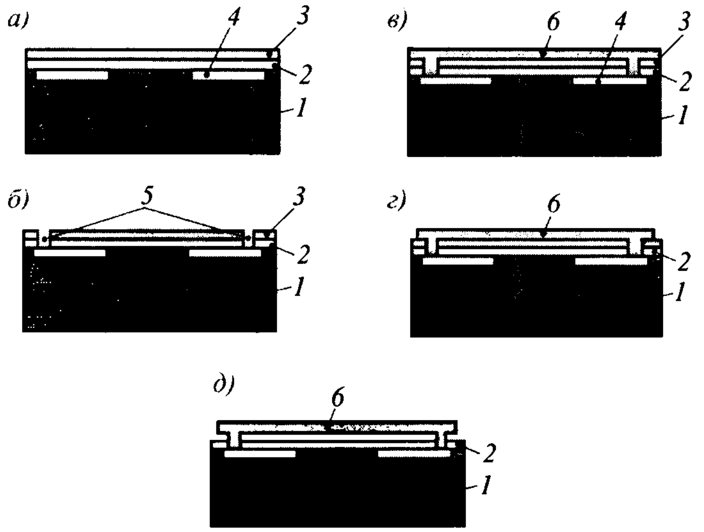


Рис. 2.32. Изготовление микроструктуры ЧЭ МГметодом поверхностной микрообработки:
1 – подложка (монокремний); *2* – пленка нитрида кремния; *3* – пленка диоксида кремния; *4* – металлическая, диффузионная площадка; *5* – окна; *6* – поликремниевая микроструктура (сечение по линии *А-А* на рис. 2.31)

электродов гребенчатых структур привода и измерителей перемещений. Этот этап заканчивается нанесением пленки *3* двуоксида кремния толщиной ~1 мкм посредством температурного химического осаждения из паровой (газовой) фазы.

Следующий этап микрообработки (рис. 2.32, *б*) заключается в образовании окон *5* в пленках нитрида и диоксида кремния напротив мест крепления анкеров и неподвижных электродов гребенчатых структур. Вскрытие окон происходит с помощью реактивного ионного травления (сухое травление) и резистивной маски.

Далее (рис. 2.32, *в*) на пленку *3* диоксида кремния и в окна *5* осаждается поликремниевая пленка *6* толщиной ~2 мкм путем температурного химического осаждения из паровой (газовой) фазы. При использовании вакуума вместо поликремния может быть применен аморфный кремний.

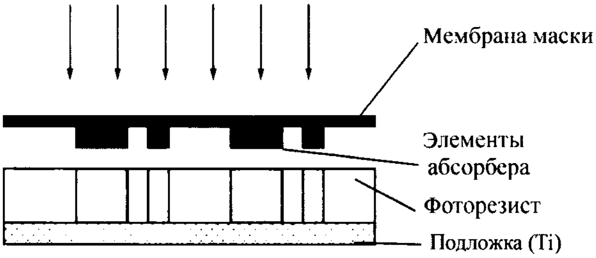
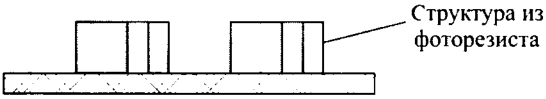
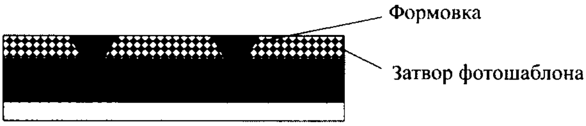
Следующий этап (рис. 2.32, *г*) заключается в формировании упругих элементов подвеса, ИМ с подвижными электродами и неподвижных электродов гребенчатых структур приводов измерителей перемещений с помощью сухого травления поликремниевой пленки *6* при использовании резистивной маски, задающей конфигурацию (см. рис. 2.31) всех элементов микроструктуры.

На последнем этапе (рис. 2.32, *д*) при погружении во фтористо-водородный оксид или другой травитель вытравливается вся пленка *3* (жертвенный слой) и микроструктура оказывается освобожденной на расстоянии 1...2 мкм над поверхностью пленки *2*.

Достоинствами технологии поверхностной микрообработки являются односторонняя обработка и хорошая совместимость с технологией интегральных микросхем. Недостаток – достаточно сложный процесс образования необходимых микроструктур.

LIGA-технология разработана в Германии и предназначена для изготовле-

2.11. LIGA-технология получения пластиковой микроструктуры

Технологический процесс	Иллюстрация процесса
Рентгенолитография в полиметилметакрилате	
Проявление	
Гальваноформовка (электроосаждение)	
Получение шаблона	
Заливка шаблона (формовка)	
Удаление формовки (конечный продукт)	

ния исполнительных компонентов микроприборов. Технология включает в себя процессы рентгенолитографии и гальваники, в результате которых могут быть получены пластиковые или металлические структуры.

Основные этапы LIGA-технологии на примере получения пластиковых микроструктур приведены в табл. 2.11.

Характерные размеры структур, изготовленные по LIGA-технологии, – сотни микрон в длину и десятки микрон в толщину. Достоинством технологии является возможность получения металлических структур, а недостатками – довольно большие размеры и плохая совместимость с процессами интегральной технологии.

Находят применение и другие технологии формообразования.

SIGA-технология (аббревиатура означает – ультрафиолетовая литография, гальваника и формовка) позволяет управлять шириной профиля структуры и совместима с технологией тонких пленок. Технология включает в себя следующие основные процессы: ультрафиолетовую литографию, осаждение слоев и плазменное травление, гальванику, получение копий из полимеров или металла.

HART (high aspect ratio technologies)-технологии с высоким аспектным соотношением дают возможность формировать

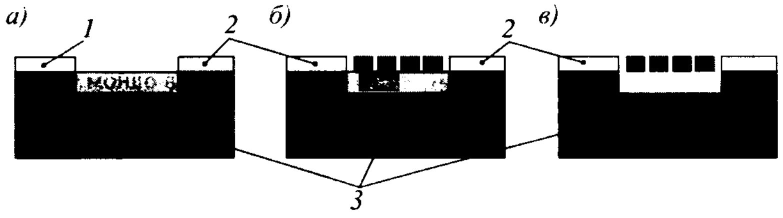


Рис. 2.33. Изготовление подвесной структуры в GaAs:
а – ионная имплантация; *б* – копирование шаблона из Si_3N_4 на поверхность пластины; *в* – селективное удаление ионного слоя; *1* – имплантированная маска; *2* – Si_3N_4; *3* – GaAs

структуры с большим отношением высоты к ширине (узкие и глубокие канавки). В основе технологий лежат процессы глубокого реактивно-ионного травления на специальных установках, которые позволяют проводить травление кремния на глубину до нескольких сотен микрон при хорошем приближении стенок к вертикали.

MUMPS-процесс трехслойной поликристаллической поверхностной микрообработки.

Микростереолитография – технология формирования изображения в слое фоторезиста, реализуемая в следующей очередности: на пластину последовательно наносятся слои фоторезиста толщиной 1...5 мкм и в каждом слое формируется свое изображение. После нанесения всех слоев (длительность засветки каждого слоя ~1 с), которых может быть более 1000, фоторезист проявляется.

Полученная структура из полимера может использоваться самостоятельно, если она удовлетворяет по физическим свойствам, либо служить формой в LIGA-технологии.

Микрообработка арсенида галлия столь разнообразна, как и обработка кремния. Уникальные свойства GaAs и его троичного сплава AlGaAs допускают методы обработки, которые являются развитием объемной микрообработки.

На рис. 2.33 показаны укрупненные этапы обработки пластины GaAs. На первом этапе (рис. 2.33, *а*) осуществляется ионная имплантация по маскирующему слою. Глубина проникновения ионов зависит от ускоряющего напряжения. Образец отжигается при температуре 750 °С в течение ~30 мин и на втором этапе обработки (рис. 2.33, *б*) копируется шаблон структуры из Si_3N_4. Этот процесс рекристаллизует ионный слой, скрытый в GaAs. Затем на пластину испаряют SiO_2, выполняют анизотропное травление и удаляют скрытый слой с помощью селективного травления (рис. 2.33, *в*).

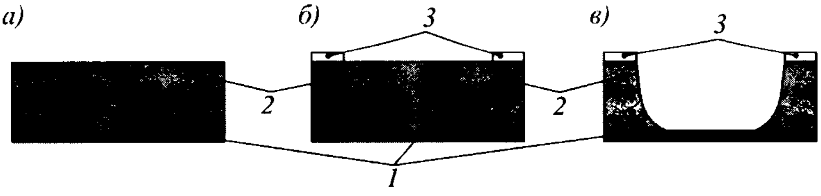


Рис. 2.34. Изготовление мембраны из AlGaAs:
а – эпитаксиальное наращивание слоя AlGaAs; *б* – нанесение маски из Si_3N_4; *в* – вытравливание GaAs; *1* – эпитаксиальный слой AlGaAs; *2* – GaAs; 3 – Si_3N_4

Другой метод создания микроструктур использует различие в химических свойствах GaAs и AlGaAs. Основные этапы метода на примере изготовления мембраны иллюстрируются рис. 2.34. На первом этапе (рис. 2.34, *а*) выполняется эпитаксиальное наращивание слоя AlGaAs на поверхности пластины из GaAs.

На втором этапе на обратную сторону пластины наносят маску из Si_3N_4, определяющую конфигурацию мембраны. На последнем этапе, используя раствор H_2O_2/NH_4OH, удаляют GaAs, оставляя мембрану из слоя AlGaAs.

Следует иметь в виду, что эпитаксиальное наращивание – высокотемпературный процесс. Вследствие этого даже при хорошем соответствии кристаллических решеток GaAs и AlGaAs, но из-за различия их температурных коэффициентов расширения, слой AlGaAs будет испытывать остаточное температурное напряжение.

2.5.2. Микроэлектронные элементы

При формировании электронных элементов съема информации (омические контакты, пленочные проводники), а также различных вторичных преобразователей, интегрированных с микромеханическим ЧЭ, необходимо применение технологий, используемых в микроэлектронике.

Развитие микротехнологии обеспечило так называемый планарный процесс, или планарную технологию, суть которой заключается в последовательном изготовлении слоев с заданным рисунком, расположенных друг над другом и состоящих из материалов с различными электрическими свойствами. Используя такую слоистую структуру, изготавливают различные схемные элементы: транзисторы, диоды, конденсаторы. Эти элементы затем соединяют друг с другом поверхностным токопроводящим слоем заданного рисунка.

Важная особенность планарной технологии – ее групповой характер, когда все интегральные микросхемы на пластине выполняются в одном технологическом цикле, что позволяет одновременно формировать несколько полупроводниковых схем, т.е. интегральную микросхему на одном кристалле (чипе) и много интегральных микросхем на одной пластине.

Слои с различными электрическими свойствами можно получать, изменяя свойства подложки, например путем ее легирования, окисления или же осаждения на ее поверхность слоя с помощью внешнего источника посредством испарения или распыления в вакууме. Заданный рисунок получается в процессе фотолитографии. При этом рисунок с фотографического трафарета проецируется на поверхность подложки, предварительно покрытую слоем фоторезиста.

Фоторезистивные материалы обладают двумя свойствами. Одно из них состоит в том, что под действием света способность фоторезиста растворяться в определенном классе растворителей изменяется. После проявления в таком растворителе спроецированный рисунок остается на поверхности подложки. Другое свойство заключается в том, что нерастворенные области фоторезиста совершенно не взаимодействуют (резистивны) с другим классом растворителей, которые способны травить или изменять каким-либо образом нижележащий слой материала.

Если одному и тому же материалу не присущи одновременно эти два свойства, то для получения заданного рисунка необходимо добавить промежуточный слой, имеющий резистивные свойства, требуемые для проведения травления подложки или другого изменения ее свойств. Некоторые основные этапы планарного процесса на примере изготовления планарного диода показаны на рис. 2.35 [4, 20].

На n^+-кремниевой пластине (рис. 2.35, *а*), используемой в качестве исходной подложки, с помощью эпитаксиального процесса выращивается тонкий слой

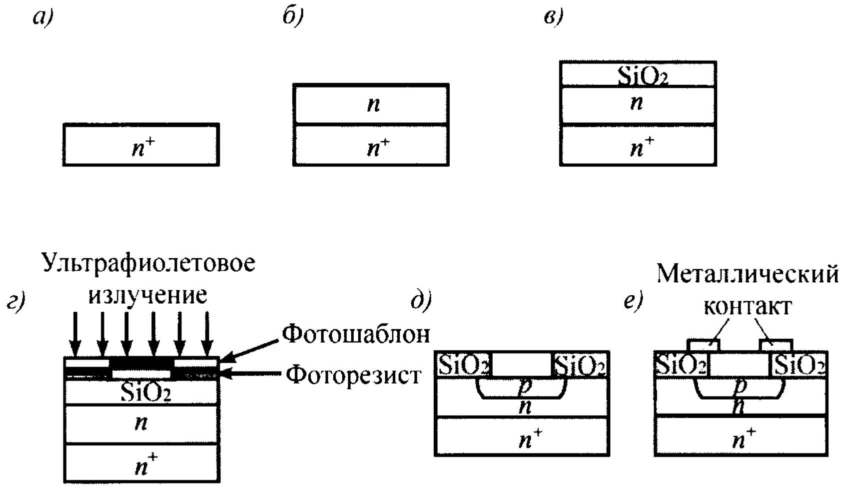


Рис. 2.35. Этапы изготовления планарного диода с *p-n*-переходом:
а – подложка; *б* – подложка с эпитаксиальным слоем; *в* – после окисления; *г* – фотолитография; *д* – диффузия бора после удаления оксида; *е* – окончательный вид планарного диода после металлизации

кремния *n*-типа (рис. 2.35, *б*). После этого подложка подвергается окислению (рис. 2.35, *в*).

Точный чертеж или рисунок на пленке SiO_2 выполняется с помощью фотолитографии (рис. 2.35, *г*). Затем атомы легирующей примеси (бор, являющийся акцептором) осаждаются на поверхность кремния и диффундируют в те области, которые не защищены слоем диоксида кремния (рис. 2.35, *д*). Так как легирующие атомы при диффузии проникают на глубину порядка нескольких микрометров или меньше, то активная область диода лежит на расстоянии нескольких микрометров от поверхности пластины. Остальная часть пластины (обычно толщиной 560 мкм) выполняет функции несущей конструкции планарной структуры. Окончательный вид планарного диода после металлизации изображен на рис. 2.35, *е*.

Для выполнения описанных процедур в современном микроэлектронном производстве используются процессы эпитаксии, диффузии и легирования.

2.6. СБОРКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРИБОРА

ЧЭ прибора, который представляет собой кристалл с микроэлектронными средствами (они могут отсутствовать), размещается в герметичном корпусе, защищающем его от механических и климатических воздействий, где создаются соответствующие электрические цепи. Сборка прибора включает в себя следующие операции: сборку ЧЭ, подпайку и приварку выводов, закрепление в корпусе, электромонтаж, герметизацию корпуса.

Сборка ЧЭ состоит в создании неподвижного соединения кристалла ЧЭ с крышками. Крышки обычно изготавливают из алюмосиликатных стекол и боросиликатные. Температурный коэффициент линейного расширения стекол в зависимости от температуры лежит в пределах $(36{,}8 \pm 8)10^{-7}$ 1/°C.

Соединение крышек с кристаллом выполняют, как правило, клеевым термосоединением в электрическом поле. Качес-

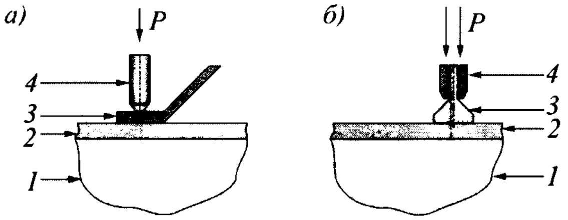


Рис. 2.36. Способы сварных соединений:
а – нахлесточное; *б* – тавровое; *1* – подложка; *2* – контактная площадка; *3* – вывод; *4* – электрод-инструмент; *P* – сила поджатия

тво клеевого соединения зависит от окружающей температуры.

Соединяемые поверхности обезжиривают. Соединяемые детали собирают в пакет с нормируемой силой, тщательно ориентируя крышки относительно кристалла, и включают постоянное напряжение: отрицательный потенциал – к стеклу (крышке), положительный – к металлу или полупроводниковому кремнию. Сборку помещают в термопечь и выдерживают там при температуре до 400 °С. Величина напряжения зависит от периметра и площади сварки и от толщины стеклянных крышек или пленок на кремниевой пластине.

Две кремниевые пластины указанным способом могут быть сварены, если на них напылить стекло или создать слой SiO_2 толщиной до 4 мкм. Отрицательный потенциал напряжения в 50 В необходимо приложить к пластине.

Монтаж ЧЭ в корпус состоит из следующих операций: обезжиривание поверхностей, установка и ориентация по установочной плоскости корпуса, неподвижное соединение с корпусом. Неподвижное соединение можно обеспечить приклеиванием, но лучше – термосоединением в электрическом поле.

Все электрические соединения выполняются методами пайки и сварки. **Технология пайки,** используемая при производстве микромеханических приборов, традиционна. При выполнении неразъемных соединений используются следующие **виды сварки:** термокомпрессионная, ультразвуковая, микроконтактная, диффузионная, аргонодуговая и др.

Термокомпрессионая сварка характеризуется способом выполнения соединения, типом используемого инструмента и способом нагрева. Способы соединений показаны на рис. 2.36. Тавровые соединения прочнее нахлесточных.

Теплота в зону сварки подводится либо нагревом инструмента, либо нагревом всей области сварки, либо их сочетанием.

Этот вид сварки обеспечивает высокую надежность соединения без расплавления материалов.

Хорошие результаты дает термокомпрессионная сварка связующих пар материалов: золото – кремний, золото – алюминий, золото – золото, алюминий – алюминий, золото – серебро, алюминий – серебро.

Этот вид сварки требует высококачественной подготовки поверхностей свариваемых материалов и подогрева поверхностей до 350...400 °С.

Ультразвуковая сварка – процесс соединения двух материалов, находящихся в твердом состоянии, при небольшом нагреве свариваемых материалов путем их трения при колебаниях инструмента, находящегося под определенным давлением, с ультразвуковой частотой. Для выполнения электромонтажных операций в

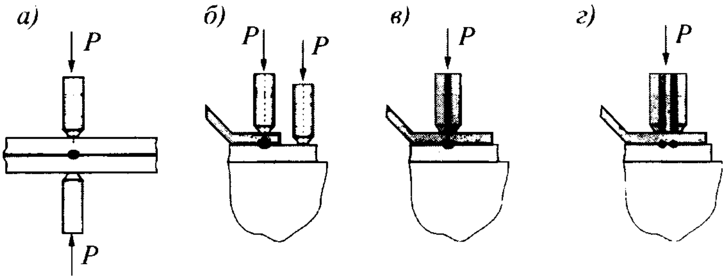


Рис. 2.37. Схемы микроконтактной сварки:
а – двусторонняя; *б* – односторонняя с двумя электродами; *в* – односторонняя с одним электродом; *г* – односторонняя двухэлектродная; *P* – сила поджатия

микроэлектронике используют промышленные установки.

Ультразвуковая сварка обеспечивает лучшую, чем термокомпрессионная, прочность сварных соединений; допускает сварку различных материалов, в том числе резко отличающихся по толщине; некритична к поверхностям свариваемых материалов; обеспечивает возможность сварки через некоторые виды изоляционных слоев.

Микроконтактная сварка – процесс соединения проводников с тонкими металлическими пленками при прохождении импульса электрического тока через свариваемые материалы, находящиеся под нагрузкой. Схемы микроконтактной сварки показаны на рис. 2.37.

Такой сваркой соединяют проволочные выводы из золота, серебра, меди с контактными площадками, покрытыми золотом, медью, никелем, алюминием, серебром.

Электродные выводы – одни из слабых по надежности элементов микромеханических приборов. Они должны обладать высокой прочностью на растяжение и сжатие, вибропрочностью, пластичностью и электропроводимостью. Эти свойства (вибропрочность обусловлена качеством соединения) присущи проволоке из золота (Зл999 и др.), сплаву золото – серебро, алюминию и др.

Монтаж кристалла в корпус микродатчиков – это тоже своего рода проблема, поскольку часть датчика требует доступа к окружающей среде, в то время как остальная часть должна быть защищена от условий окружающей среды и нуждается в обслуживании (рис. 2.38).

Корпуса могут выполняться из разных материалов, включая пластмассы, керамику, металл (рис. 2.39). Корпус формируется из пластмассовой отливки (в случае литых пластмассовых корпусов), запаянных керамических колпаков (керамические корпуса) или с металлическим колпаком, припаянным к основанию металлического корпуса.

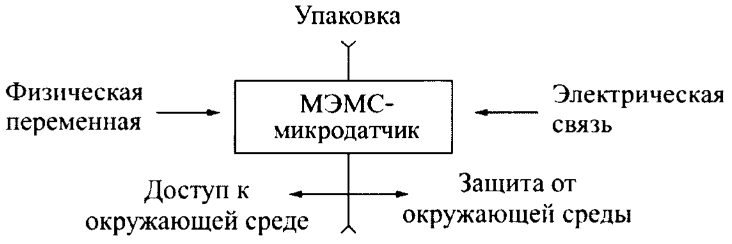


Рис. 2.38. Схематическая иллюстрация роли монтажа кристалла микродатчика в корпус

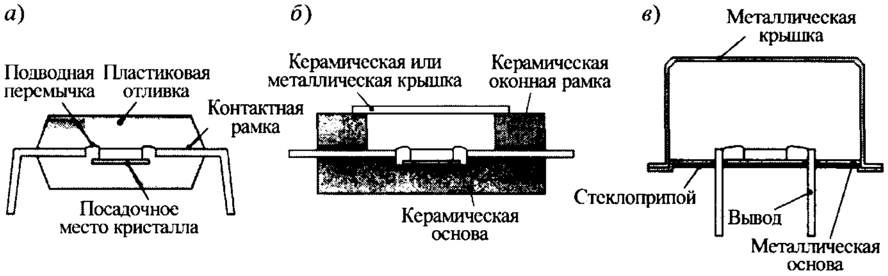


Рис. 2.39. Типы корпусов:
а – пластиковый литой; *б* – керамический оконный; *в* – металлический

Так как подложка на многих интегральных схемах требует, чтобы подключение к электросети было относительно нее смещено, кристаллы датчика обычно устанавливают в гнездо кристалла в корпусе, используя проводящий клей. Гнездо кристалла, как правило, присоединено к металлической проводящей рамке с проводными связями, обеспечивающими подключение к электросети проводящих пальцев рамки. Различные среды соединения включают эвтектический сплав Au81, эпоксидную смолу (проводящую или изоляционную, в зависимости от материала наполнителя) и стекло, обычно содержащее серебро.

Герметичным считается корпус, для которого скорость утечки газа при специальных испытаниях $\leq 1 \cdot 10^{-5}$ мм /с. В качестве материала для корпусов широко используется сплав 29НК (ковар), который имеет температурный коэффициент линейного расширения, равный $5 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}. Корпуса микромеханических приборов изготавливают герметичными методом литья под давлением с последующей механической обработкой посадочных и базовых поверхностей. Никелирование с подслоем меди улучшает герметичность корпуса.

Корпус и крышка соединяются пайкой или сваркой. При этом необходимо иметь в виду, что в корпусе размещены ЧЭ и микроэлектронные средства, чувствительные к температуре. Поэтому способ сборки корпуса должен сопровождаться невысокой температурой и (или) локализацией ее воздействия. Используют следующие виды сварки: диффузионную, аргонодуговую, плазменную, электроннолучевую и лазерную.

В заключение отметим, что технология производства микромеханических приборов характеризуется сложными взаимосвязями между материалами, способами их обработки и соединений, которые существенным образом влияют на параметры качества изделия: точность, надежность, экономичность и производительность. Выполнение требований к параметрам качества возможно при соответствии изделия требованиям технических условий.

2.7. ИСПЫТАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Измерение механических свойств материалов для микромеханических приборов имеет свои особенности, обусловленные следующими причинами:

– сложностью создания микромасштабных образцов и условий нагружения, соответствующих их работе в конкретных микроприборах;

– отсутствием единых методов и средств непосредственного измерения требуемых характеристик;

– сопоставимостью размеров механических структур и дефектов материалов в микроприборах, из-за чего нелегко отделить в результатах испытаний влияние каждого из этих факторов;

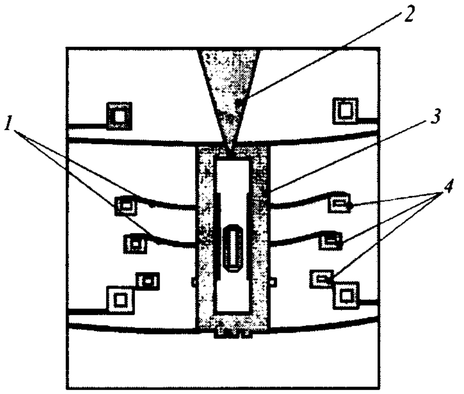


Рис. 2.40. Сканированное видеоизображение испытаний балок на изгиб в вакуумной камере электронного микроскопа:
1 – образцовые балки; *2* – микроманипулятор; *3* – челнок; *4* – кронштейны (нижняя балка, самая короткая, разрушена)

– трудностью анализа и объяснения результатов испытаний;

– вследствие малых размеров микроструктур и специфичных методов их изготовления, которые влияют на механические свойства материалов;

– различием в размерах микрообразцов и систем измерения, вызывающих трудности нагружения образцов и измерения результатов их нагружения.

Методы испытаний микрообразцов можно разделить на группы: испытание изгибом; испытание прямолинейным растяжением; испытание циклической нагрузкой.

Испытание изгибом – один из наиболее распространенных методов в области микромасштабных испытаний материалов.

Испытание при помощи изгиба балок дает преимущество, которое заключается в более простой реализации в сравнении с непосредственным испытанием на растяжение.

Испытание на изгиб требует силу, меньшую, чем при испытании на растяжение, но приводит к поперечной деформации, которая недостаточно велика для того, чтобы быть измеренной при использовании оптической микроскопии. Поскольку экземпляр балки находится под консольным нагружением, метод испытания на изгиб свободен от проблем закрепления образцов.

Кроме того, так как метод не связан проблемами несоосности в направлении нагружения, механизм нагружения становится сравнительно простым и легкореализуемым.

Образцы, подвергающиеся испытанию на изгиб, обладают меньшими габаритными размерами, чем образцы, проверяемые на растяжение, и могут быть испытаны более простым способом. Тем не менее, аппаратура для нагружения испытуемых балок и методы фиксации результатов остаются весьма сложными.

На рис. 2.40 показано сканированное видеоизображение испытаний на изгиб поликристаллических балок, проведенных в вакуумной камере сканирующего электронного микроскопа. Испытуемые образцы с длинами 50, 60 и 70 мкм и одинаковой площадью поперечного сечения (ширина 3 мкм, толщина 1,75 мкм) для каждого образца связаны с челноком, который перемещается при помощи микроманипулятора. Свободные концы образцов опираются на кронштейны. При перемещении челнока образцовые балки изгибаются, и их форма анализируется по фиксированным изображениям.

При данных испытаниях не удалось измерить нагрузку, вызывающую разрушение образцов.

Следует также обратить внимание на большую деформацию микробалки при ее консольном нагружении (рис. 2.41). Вследствие этого нельзя использовать линейную теорию изгиба для объяснения результатов эксперимента. Чтобы объяснять получаемые результаты испытаний, требуется создать нелинейную модель изгиба, учитывающую большую геометрическую нелинейность образца.

Очевидно, что сами методы обработки результатов испытаний с учетом нелинейной зависимости деформаций от нагружения внесут свои погрешности в оценку результатов.

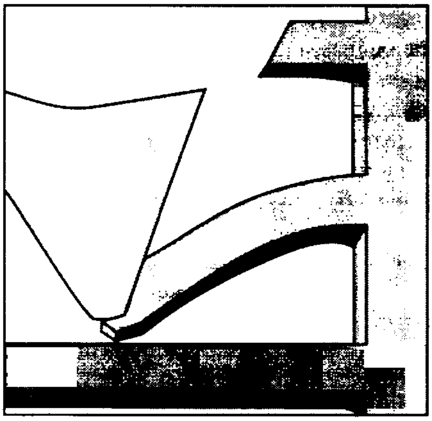


Рис. 2.41. Большая деформация консольной балки при изгибе

Таким образом, не смотря на упрощенную методику испытаний на изгиб и достаточно простые средства объединения испытуемых микрообразцов и микромасштабных механизмов нагружения, анализ получаемых результатов не является непосредственным, что существенно снижает точность измерений.

Испытание прямолинейным растяжением. Цель этого метода – найти модули Юнга, коэффициент Пуассона и прочность на излом. При испытаниях образцов прямолинейным растяжением имеют место строгие требования, относящиеся к выравниванию образца и измерению деформации.

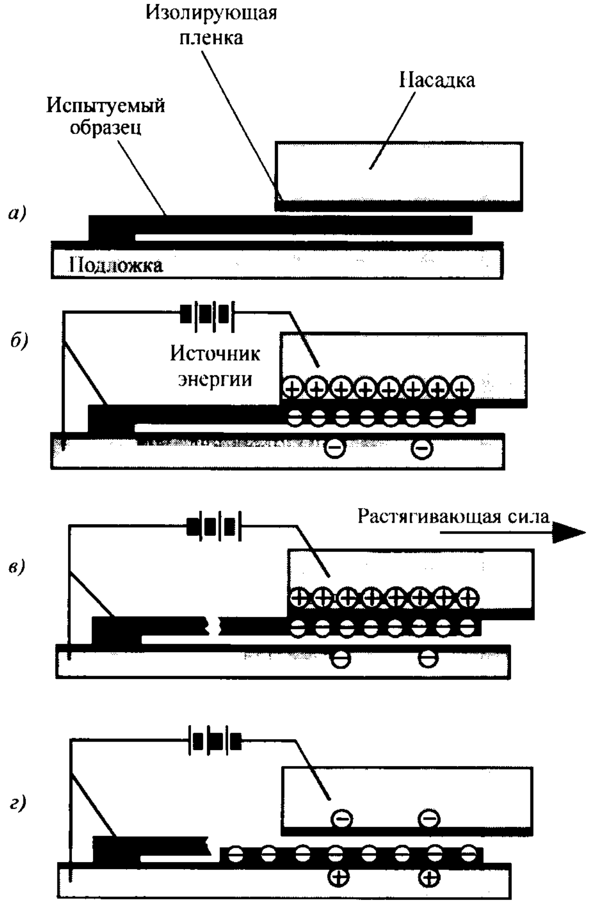


Рис. 2.42. Схема процесса испытаний образца растяжением:
а – выравнивание насадки и образца; *б* – электростатическое закрепление насадки на образце; *в* – растяжение образца до разрушения; *г* – освобождение образца

Для типичного микромасштабного испытания образцов растяжением полагают длину средства измерения равной 1 мм, растягивающую силу < 1 Н и удлинение образца < 20мкм, при достижении которого наступает разлом испытуемого образца.

Отметим, что средства для испытания образца прямолинейным растяжением должны быть достаточно компактными, чтобы располагаться внутри камеры электронного сканирующего микроскопа. Основная проблема данного метода испытаний заключается в осуществлении крепления образца. Так как этап крепления образца проводится в камере электронного сканирующего микроскопа, невозможно применить обычные методы ручного крепления микрообразцов, например приклеивание. Чтобы удерживать испытуемый образец под нагрузкой, может быть использована сила электростатического притяжения.

На рис. 2.42 показаны этапы испытаний поликремниевого образца (длина 30...300 мкм, ширина 2...5 мкм, толщина 2 мкм) растягивающей силой, прилагаемой к нему через насадку, удерживаемую на образце и освобождающуюся от него с помощью электростатических сил.

Вначале насадка и образец выравниваются (рис. 2.42, *а*). Затем за счет разницы потенциалов от источника энергии происходит электростатическое закрепление насадки на образце (рис. 2.42, *б*) и к насадке прилагается растягивающая сила (рис. 2.42, *в*), которая действует до разрушения образца. После этого изменяется полярность на насадке и образец освобождается (рис. 2.42, *г*).

Описанный процесс является базовым при испытаниях образцов прямолинейным растяжением.

Возможны и другие способы приложения растягивающих сил к испытуемому образцу. На рис. 2.43 показан отсканированный электронным микроскопом образец из поликремния (длина 250...1000 мкм, ширина 10 мкм, толщина 10 мкм), на конце которого выполнено кольцо. Внутренний диаметр последнего несколько больше диаметра вставляемого в него стержня, который расположен на подвижной платформе. Испытания проводятся в камере электронного сканирующего микроскопа. Измерения должны быть выполнены с большой точностью, с учетом того, что необходимо измерить относительное смещение двух точек в равномерно напряженной области образца.

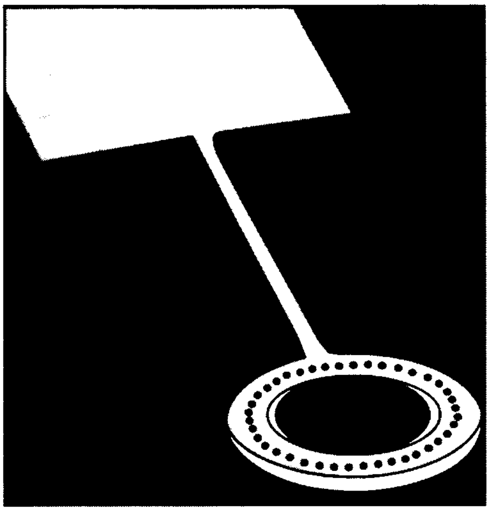


Рис. 2.43. Образец для испытания на растяжение с кольцом для приложения растягивающей силы

В качестве измерительной технологии применяется оптическая интерферометрия, позволяющая напрямую измерять растяжение образца, исходя из удлинения измерительной базы. Эта технология свободна от ошибок измерения, которые вносят свободная посадка мест соединения и деформация нагружающего устройства.

Несмотря на то что испытания на растяжение показывают в основном более достоверные результаты, чем испытания на изгиб, требования для испытаний на растяжение более жесткие. Для действительного измерения образец должен быть выровнен вдоль направления нагружения. Выравнивание особенно важно для измерений прочности излома при одноосевом

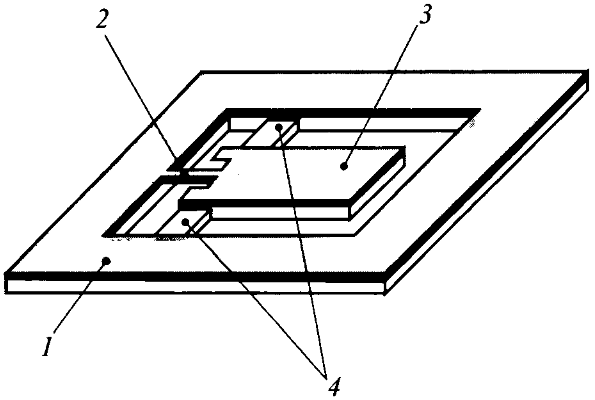


Рис. 2.44. Схема структуры, устраняющей несоосность образца и растягивающей силы:
1 – поддерживающая структура; *2* – образец; *3* – нагрузочный рычаг; *4* – торсионы

испытании на растяжение, так как несоосное совмещение служит причиной нежелательного изгибающего момента и вызывает преждевременный разлом.

Проблема выравнивания может быть решена объединением в единой конструкции (рис. 2.44) поддерживающей структуры *1*, испытуемого образца *2* (длина 400 мкм, ширина 100 мкм, толщина 20...30 мкм), нагрузочного рычага *3* и двух торсионов *4*, которые преобразуют нагружение на рычаге в силу растяжения на образце.

Так как угловые перемещения нагрузочного рычага малы, можно считать, что к образцу прилагается только растягивающая сила.

Так как образец и поддерживающая структура изготовлены совместно литографическим способом, несоосность между ними минимальна. Однако измерения включают в себя также данные поддерживающей структуры. Действие торсионов и нагружающего рычага должно быть учтено для точности измерений и правильного объяснения результатов.

Испытание циклической нагрузкой. Ряд важных свойств, таких как усталостная прочность и условия возникновения трещин в испытываемых образцах, могут быть выявлены только при циклическом нагружении образца. В связи с этим существует проблема создания измерительных систем с циклическим высокочастотным нагружением образца.

Большинства проблем испытания микрообразцов с обособленными измерительными системами можно избежать, если изготовить на чипе единую систему, куда будут входить нагрузочный двигатель (актюатор) и испытуемый образец. Создание подобной единой системы не является простой задачей из-за необходимости учета следующих факторов: во-первых, только электростатические актюаторы могут быть созданы по одной технологии с образцом для испытаний, а, между тем, силы, создаваемые подобными актюаторами, весьма малы; во-вторых, актюаторы, должны развивать калиброванную силу.

На рис. 2.45 показана принципиальная схема измерительной системы, в которую входит актюатор, включающий в себя неподвижные *1* и подвижные *2* гребенчатые электростатические структуры, объединенные рамкой *3*, передающей развиваемую актюатором силу через балку *4* на образец *5* с меткой. Рамка *3* относительно основания подвешена с помощью упругих элементах *7* на анкерах *6*. Испытуемый образец также закреплен на анкере недалеко от метки.

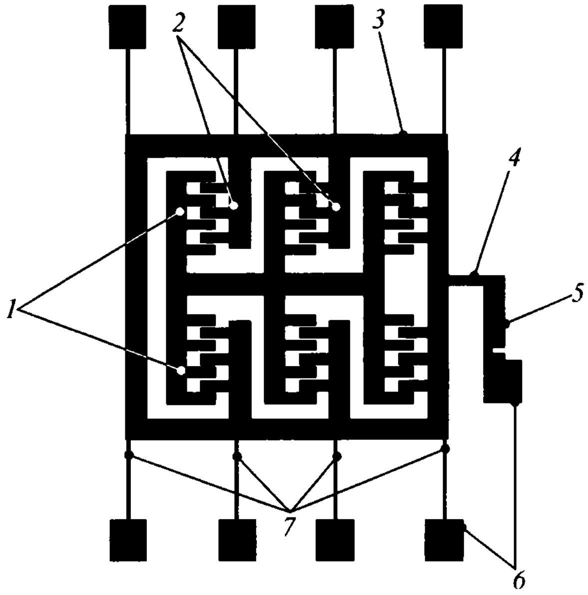


Рис. 2.45. Принципиальная схема измерительной системы с циклическим нагружением образца:
1, *2* – неподвижные и подвижные гребенчатые структуры электростатического актюатора; *3* – рамка; *4* – передающая силу балка; *5* – испытуемый образец; *6* – анкеры; *7* – упругие элементы подвеса

Нагружение испытуемого образца происходит до его разлома в районе метки. Для анализа результатов важна измеренная деформация структуры в районе разлома. Для обработки данных, полученных в ходе испытаний, полезно использование конечномерного моделирования.

Различные балочные (стержневые) микроструктуры используются в микромеханических приборах, особенно это относится к МГ, как вибрационным структурам.

Резонансная частота механических систем находится в зависимости от свойств, размеров и материалов структуры. Модули Юнга могут быть рассчитаны, исходя из резонансной частоты, если известны плотность материала и точная геометрия структуры. Аналогичным образом размеры испытуемой структуры можно получить на основании измеренной собственной частоты, когда известны механические свойства структуры. Если она повреждена в ходе процесса испытания или возникновения трещины, собственная частота системы должна измениться соответствующим образом. Как результат, структурное повреждение или образование трещины может быть количественно определено по изменению резонансной частоты механической системы.

Часть измерительной системы для исследования процесса появления трещин показана на рис. 2.46, полученном с помощью сканирующего микроскопа.

В состав измерительной системы входит микроструктура, изготовленная из поликристаллического кремния, которая включает в себя гребенчатую структуру электростатического актюатора *1*, гребенчатую структуру емкостного измерителя перемещений *2*, контролирующего колебания подвижной структуры, скрепленной с подложкой (основанием) испытуемым образцом *3* с меткой, в районе которой и происходит образование трещин.

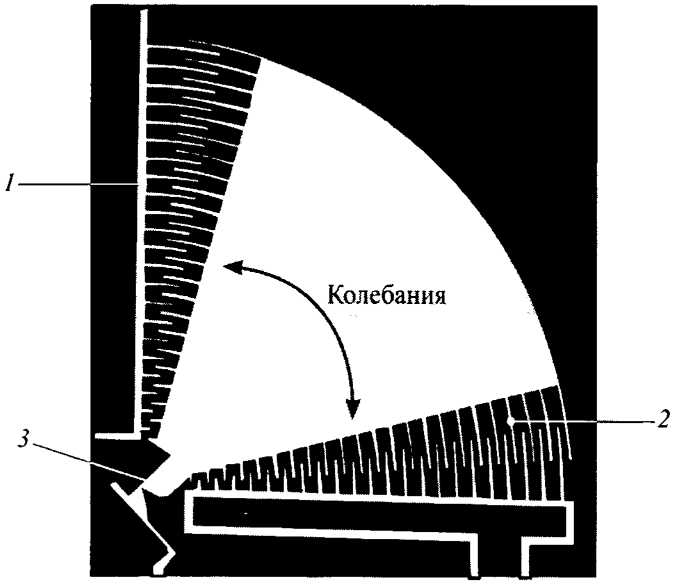


Рис. 2.46. Микроструктура системы для исследования процесса возникновения трещин: *1*, *2* – гребенчатые структуры электростатического актюатора и емкостного измерителя перемещений соответственно; *3* – испытуемый образец с меткой

В процессе испытаний поддерживается резонансный режим колебаний с помощью контура обратной связи. Возникновение трещины в районе метки приведет к изменению жесткости образца, а следовательно, и резонансной частоты, которая контролируется. Изменение жесткости, или резонансной частоты, может быть выражено в виде аналитической зависимости от длины трещины.

В заключение отметим, что испытания на изгиб имеют наиболее простую схему нагружения. Испытания растяжением образцов удобны для измерения модулей Юнга и предела прочности на разлом (на растяжение). Испытания, основанные на использовании систем измерения и нагружения, изготовленных на одном чипе, наиболее подходят для исследования процессов образования трещин. Далее необходимо обратить внимание на разброс результатов, полученных разными исследователями, что иллюстрируется табл. 2.12.

Результаты испытаний, полученные разными исследователями при прямолинейном растяжении образцов, но при использовании различных методов измерения нагружающей силы и деформаций (смещений), а также различных способов заделки образцов, приведены в табл. 2.13.

Приведенные результаты демонстрируют зависимость полученных механических свойств материалов от условий экспериментов. Следует также обратить внимание на зависимость механических свойств монокремния от кристаллографического направления, в котором происходит нагружение образца. Это дает основание предположить, что соответствующая топология микроструктуры на кристалле кремния может дать положительный результат в отношении прочности микроприбора.

Наконец, все исследователи отмечают, что механические свойства образцов, подвергшихся микрообработке, зависят от химических процессов, использованных при их изготовлении. Следовательно, и технологические процессы изготовления микроприборов должны влиять на их механические характеристики.

2.12. Результаты испытаний поликремния

Условия и результаты	Исследователь				
	University of California, Berkeley	California Institute of Technology	Failure Analysis Association	Johns Hopkins University	
Тип нагружения	Изгиб	Растяжение	Изгиб	Растяжение	
Толщина поликремния, мкм	1,9		2,0	1,5	3,5
Число испытанных образцов	90	3	12	19	24
Модуль Юнга, ГПа	174 ± 20	132	137 ± 5	136 ± 14	142 ± 25
Прочность, ГПа	2,8 ± 0,5	–	2,7 ± 2	1,3 ± 0,2	1,3 ± 0,1

2.13. Результаты испытаний материалов методом растяжения

Метод измерения		Модуль Юнга, ГПа	Прочность излома, ГПа	Размеры образца сечения, мкм	Материал образца	Способ заделки образца
силы	смещения					
Тензодатчик	Анатомический силовой микроскоп	132	–	50×1,9	Поликремний	Электростатическая сила
Датчик деформаций		–	2,5	2,5×2		
Датчик деформаций	Оптический датчик положения	167	1,25	10×10		Вставка
Тензодатчик	Интерферометрия	168	1,21	600×3,5		Склеивание
		169	1,2	100×5	Монокремний	
Балка с датчиком силы	Датчик смещения	–		18×15		

Примечание. Монокремний нагружался в направлении [100].

Темы для самоконтроля

1. Структура кристалла и пространственная решетка.
2. Символы граней и направлений.
3. Зависимость свойств кремния от плотности "упаковки" атомов по кристаллическим плоскостям.
4. Основные свойства Si и SiO_2.
5. Омические контакты и пленочные проводники. Материалы и схемы соединений.
6. Фотолитография. Изготовление фотошаблонов и их совмещение.
7. Основные этапы фотолитографического процесса при позитивном и негативном фоторезисте.
8. Электронно-лучевая литография. Принцип и особенности процесса.
9. Рентгеновская литография. Принцип и особенности процесса.
10. Изотропное травление. Особенности формирования микропрофилей.
11. Анизотропное травление. Особенности формирования микропрофилей.
12. Способы контроля размерных параметров при травлении.
13. Основные этапы кремниевой объемной микрообработки.
14. Основные этапы кремниевой поверхностной микрообработки.
15. Основные этапы LIGA-технологии.
16. Основные этапы изготовления планарного диода с *p-n*-переходом.
17. Эпитаксия. Схемы установок и особенности процесса.
18. Диффузия. Схема установки и особенности процесса.
19. Ионная имплантация. Особенности процесса.
20. Основные этапы сборки микромеханического прибора.
21. Испытания механических свойств материалов методом изгиба.
22. Испытания механических свойств материалов методом растяжения.
23. Испытания механических свойств материалов методом циклического нагружения.
24. Зависимость результатов от условий испытаний.

Глава 3

ЭЛЕМЕНТНАЯ БАЗА МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

В микромеханических приборах элементы как конструктивные единицы, аналогичные используемым в макроприборостроении, из которых может быть собран прибор, отсутствуют. Любой микромеханический прибор представляет собой некоторый набор микроструктур, объединяющих механические и электрические (электронные) компоненты, изготовленные, как правило, по единой технологии. В микроприборах гибридного исполнения часть электронных средств может выполняться в виде отдельных компонентов и микросхем.

Укрупненно элементную базу можно разделить на упругие подвесы, преобразователи и электронные средства. Упругие подвесы (МА) и (МГ) обеспечивают подвес инерционных масс (ИМ) с необходимыми числом степеней свободы и кинематикой. Упругие элементы микродатчиков давления (МДД) – мембраны воспринимают измеряемое давление.

Преобразователи – это устройства, которые преобразуют одну форму энергии в другую. Устройства, преобразующие изменение измеряемых механических величин (перемещение, деформация, сила и т.д.) в изменение параметров их чувствительных "механизмов" (емкостный, пьезорезистивный, пьезоэлектрический, оптический и т.д.), можно называть преобразователями перемещений, деформаций, силы и т.д., или прямыми преобразователями, что является общим термином по отношению к таким определениям, как датчики перемещений, силы и т.д.

Устройства, преобразующие какой-либо вид энергии (электрическую, тепловую, магнитную и т.д.) в механическое перемещение или силу, называют преобразователями или датчиками силы (момента). Их именуют также актюаторами [от actue (англ.) – приводить в движение]. Эти устройства имеют общий термин – обратные преобразователи.

Преобразователи и упругие элементы, как правило, образуют единые микроструктуры. Электронные средства служат для выработки сигналов, содержащих информацию об измеряемых физических величинах и для формирования управляющих сигналов в обратных преобразователях.

3.1. УПРУГИЕ ПОДВЕСЫ И МЕМБРАНЫ

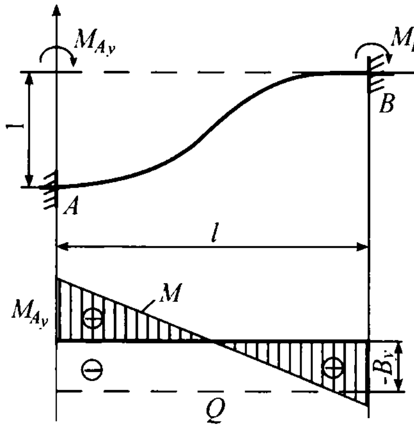
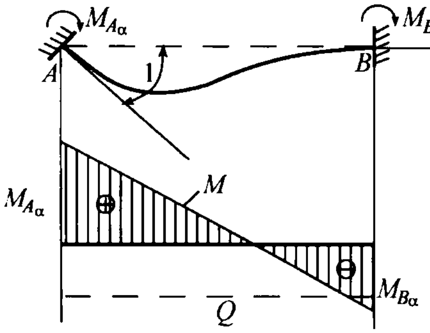
3.1.1. Упругие подвесы микроакселерометров

А. Жесткость подвесов

Подвес ИМ МА представляет собой различные комбинации упругих элементов типа балок (стержней), преобладающее большинство которых подвержено деформациям изгиба (элементы "работают" на изгиб).

В табл. 3.1 приведены типовые схемы нагружения упругих элементов с жестко защемленными концами, а также приведены формулы [24] для вычисления реакций A_y, B_y и моментов реакций M_{Ay}, M_{By}, обусловленных единичной просадкой защемленного конца балки в точке A, а также формулы для вычисления реакций A_α, B_α и моментов реакций $M_{A\alpha}$, $M_{B\alpha}$, обусловленных единичным поворотом защемленного конца балки в точке A. Приведены также формулы для вычисления перерезывающих сил Q.

3.1. Упругие элементы с жестко защемленными концами

Схемы нагружения; эпюры *M* и *Q*	Опорные реакции и моменты; перерезывающие силы
	$A_y = \frac{12EI}{l^3}$; $B_y = -\frac{12EI}{l^3}$; $M_{A_y} = M_{B_y} = \frac{6EI}{l^2}$; $Q = -\frac{12EI}{l^3}$
	$A_\alpha = -\frac{6EI}{l^2}$; $B_\alpha = \frac{6EI}{l^2}$; $M_{A_\alpha} = \frac{4EI}{l}$; $M_{B_\alpha} = \frac{2EI}{l}$; $Q = -\frac{6EI}{l^2}$

Условные обозначения: *E* – модуль упругости; *I* – момент инерции поперечного сечения балки.

Для всех схем ЧЭ осевых МА по рис. 1.1 при условии, что сила приложена в центре ИМ по оси *y*, нагружение упругих элементов соответствует единичному параллельному смещению одного из концов упругого элемента. Этой же схеме нагружения соответствует и случай приложения силы вдоль оси *x* на рис. 1.1, *е*. Если точка приложения силы к ИМ в ЧЭ по схемам рис. 1.1, *а*, *б* смещена относительно геометрического центра, например, вдоль оси *x*, то нагружение упругих элементов, расположенных вдоль оси *x*, соответствует случаю единичного поворота одного из концов, а упругие элементы вдоль оси *z* испытывают деформацию кручения.

Обозначим суммарные силы, приложенные к упругому элементу в точке *A*, через *P*, а суммарные моменты – через *M*. Реакции и моменты при единичных нагружениях определяют коэффициенты жесткости балки. Используем результаты табл. 3.1 и введем обозначения

$$k_{11} = A_y, \quad k_{12} = k_{21} = A_\alpha, \quad k_{22} = M_{A_\alpha}, \tag{3.1}$$

и запишем матрицу сил и моментов, действующих со стороны одного упругого элемента, расположенного вдоль оси x, на ИМ при ее перемещениях по линейной координате y и угловой α:

$$\begin{vmatrix} P \\ M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ \alpha \end{vmatrix}. \qquad (3.2)$$

Аналогичная матрица может быть записана и для упругого элемента, расположенного вдоль оси z.

Таким образом, обусловленные жесткостью одной балки силы и моменты, действующие на пластину ИМ, равны

$$P = k_{11}y + k_{12}\alpha; \quad M = k_{21}y + k_{22}\alpha. \qquad (3.3)$$

Если центр масс и геометрический центр пластины ИМ совпадают и сила приложена по оси y в ЦМ, то жесткость подвеса, состоящего из четырех балок, для всех схем ЧЭ по рис. 1.1, *а* также для схемы ЧЭ по рис. 1.1, *е* при действии силы вдоль оси x определяется формулой

$$G_y = 4k_{11} = (48EI)/l^3. \qquad (3.4)$$

Если ЦМ и геометрический центр пластины ИМ не совпадают, то для подвеса ЧЭ по схемам на рис. 1.1, *а*, *б* можно предположить, что из четырех балок подвеса две работают на изгиб, а две на кручение, жесткость подвеса находится по выражению

$$G_\alpha = G_\beta = 2k_{22} + 2G_{кр} = (8EI)/l + 2G_{кр}, \qquad (3.5)$$

где $G_{кр}$ – жесткость одной балки подвеса на кручение.

Для балки прямоугольного сечения $b_п \times c_п$ (ширина × высота) жесткость на кручение вокруг оси x или z (рис. 1.1, *а*, *б*) вычисляется по формуле [24]:

$$G_{кр} = \left(Gk'b_п c_п^3\right)/l, \qquad (3.6)$$

где G – модуль сдвига в соответствующей кристаллографической плоскости, а коэффициент k' зависит от отношения $b_п / c_п$ (табл. 3.2).

3.2. Зависимость $k' = f(b_п/c_п)$

$b_п/c_п$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10,0	∞
k'	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,321	0,333

Таким образом, силы и моменты, действующие со стороны одного упругого элемента подвеса на пластину ИМ, определяются формулами (3.3), в которых жесткость вычисляется с помощью табл. 3.1 в зависимости от вида деформации упругих элементов.

Для параллельно и последовательно соединенных упругих элементов суммарная жесткость находится из равенств

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} G_i; \; 1/G_\Sigma = 1/G_1 + 1/G_2 + \ldots + 1/G_n, \qquad (3.7)$$

где G_i – жесткость i-го упругого элемента; n – число упругих элементов.

Пример 3.1

Вычислим жесткость упругого подвеса ЧЭ акселерометра (рис. 3.1). ЧЭ акселерометра изготовлен из кремниевой пластины толщиной $c_к$, плоскость xz которой совмещена с кристаллографической плоскостью (100), а оси xz сориентированы по кристаллографическим направлениям [100].

С помощью анизотропного травления формируется симметричная лунка с наклоном граней 54°44′, ориентированных в семействе четырех плоскостей (111). ИМ ЧЭ выполнена в

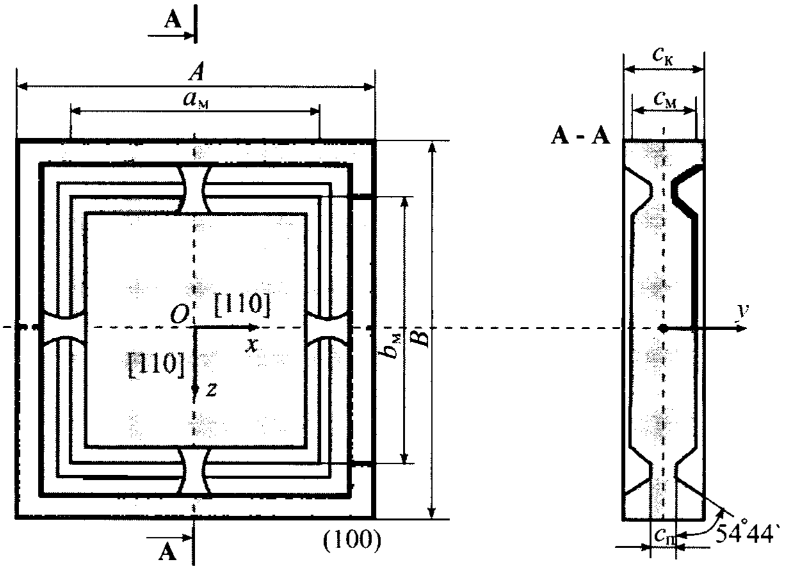


Рис. 3.1. Схема ЧЭ осевого МА

форме пластины с размерами $a_м$, $b_м$, $c_м$. Толщина упругого элемента $c_п$, являющегося подвесом ИМ, может быть задана по времени травления. Упругий подвес сформирован в виде четырех симметрично расположенных перемычек (балок).

Исходные данные для материала: $E_{(110)} = 1{,}68 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $G_{(110)} = 6{,}17 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

Размеры пластины, м: $a_м = 9 \cdot 10^{-3}$; $b_м = 10^{-2}$; $c_м = 35 \cdot 10^{-5}$.

Поперечное сечение упругой балки, м: $b_п = 4 \cdot 10^{-4}$; $c_п = 25 \cdot 10^{-6}$; длина $l = 2 \cdot 10^{-3}$. Масса пластины $m_п = \rho a_м b_м c_м = = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ кг, где ρ – плотность, г/см^3.

1. Вычисляем коэффициенты жесткости матрицы (3.2) (для одной балки).

Имеем

$$E_{(110)}I =$$

$$= \frac{E_{(110)} b_п c_п^3}{12} = \frac{1{,}68 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} (25 \cdot 10^{-6})^3}{12} =$$

$$= 8{,}75 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

В соответствии с формулами (3.1) и табл. 3.1 получаем

$$k_{11} = \frac{12EI}{l^3} = \frac{12 \cdot 8{,}75 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 10^{-3})^3} = 131{,}25 \text{ Н/м};$$

$$k_{12} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6 \cdot 8{,}75 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 10^{-3})^2} = 6{,}56 \cdot 10^{-2} \text{ Н};$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{l} = \frac{4 \cdot 8{,}75 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-3}} = 17{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ Н·м}.$$

2. Вычисляем жесткость подвеса по формуле (3.4) при перемещении пластины по координате y:

$$G_y = 4k_{11} = 525 \text{ Н/м}.$$

3. Определяем жесткость подвеса по формуле (3.5). Для $b_п/c_п = 16$ по табл. 3.1 $k' \approx 0{,}33$. По формуле (3.6) находим

$$G_{кр} = \frac{G_{(110)} k' b_п c_п^3}{l} =$$

$$= \frac{6{,}17 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}33 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (25 \cdot 10^{-6})^3}{2 \cdot 10^{-3}} =$$

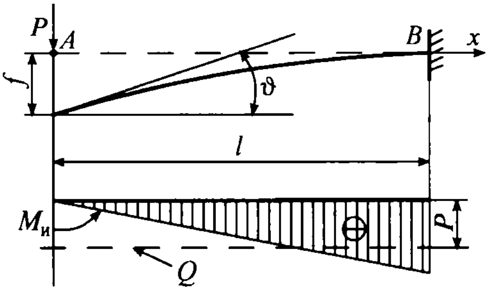
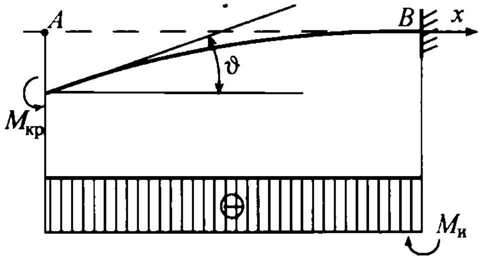
$$= 6{,}36 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Суммарная жесткость по формуле (3.5):

$$G_\alpha = 2(k_{22} + G_{кр}) = 2(17{,}5 + 6{,}36)10^{-5} =$$

$$= 47{,}72 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3.3. Упругие элементы с одним свободным концом

Схемы нагружения; эпюры M и Q	Перемещения, моменты и перерезывающие силы
	$f=\dfrac{Pl^3}{3EI}$; $\vartheta=-\dfrac{Pl^3}{2EI}$ (в точке A); $Q=-P$; $M_и=-Pl$ (в точке B)
	$f=\dfrac{M_{кр}l^2}{2EI}$; $\vartheta=-\dfrac{M_{кр}l}{EI}$ (в точке A); $Q=-P$; $M_и=-M_{кр}$ (от точки A до точки B)

В маятниковых МА ЧЭ представляет собой ИМ с подвесом, выполненным в виде консольных балок (см. рис. 1.11, *а*, *б*), подвергаемых деформациям изгиба, либо как упругие элементы типа торсионов (рис. 1.11, *в*), подвергаемых деформации кручения.

Действие ИМ (пластины) на упругий элемент подвеса (балку) в точке A (табл. 3.3) можно рассматривать как одновременно приложенные в точке A некоторую силу P и крутящий момент $M_{кр}$. В обоих случаях имеют место линейные f и угловые ϑ перемещения балки в точке A, величины которых приведены в табл. 3.3 [24].

Суммируя величины линейных и угловых перемещений в табл. 3.3, получаем

$$f=y_r=P\delta_{11}+M_{кр}\delta_{21},$$

$$\vartheta=P\delta_{12}+M\delta_{22}$$

или в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} y_r \\ \vartheta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} P \\ M_{кр} \end{vmatrix}, \qquad (3.8)$$

где δ_{ij} (i = 1,2; j = 1,2) – коэффициенты влияния, определяемые зависимостями (табл. 3.3)

$$\delta_{11}=l^3/(3EI);\ \delta_{12}=\delta_{21}=l^2/(2EI);$$
$$\delta_{22}=l/(EI). \qquad (3.9)$$

Матрице коэффициентов влияния $\nu=\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}$ соответствует обратная матрица коэффициентов жесткости $K=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}$, т.е. имеет место матричное равенство $|\nu||K|=|U|$, где U – единичная матрица.

В соответствии с определением обратной матрицы получаем

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{k_{11}k_{12} - k_{21}^2} \begin{vmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\delta_{11} = \frac{k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} = \frac{l^3}{2EI};$$

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 1/\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right).$$

Далее будем иметь

$$k_{11} = \frac{\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}; \; k_{22} = \frac{\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2};$$

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}.$$

С учетом формулы (3.9) получаем формулы для коэффициентов жесткости:

$$k_{11} = \frac{12EI}{l^3}; \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{6EI}{l^2};$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{l}. \qquad (3.10)$$

Аналогично матрице (3.2) запишем обобщенные силы, обусловленные жесткостью подвеса, в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} P \\ M_{\text{кр}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_r \\ \vartheta \end{vmatrix}. \qquad (3.11)$$

Пример 3.2

Рассчитаем коэффициенты податливости и жесткости для ЧЭ, схема которого показана на рис. 3.2.

ЧЭ представляет собой пластину с внешними размерами $a_м$, $b_м$, $c_м$, которая вместе с упругими элементами вытравлена из монокристалла, часть которого условно названа корпусом. В пластине выполнены перфорационные отверстия ПО, и в ЦМ (точка C), совпадающем с геометрическим центром, расположена дополнительная масса (груз), которая может и отсутствовать. Для акселерометров компенсационного типа роль груза может выполнять катушка магнитоэлектрической обратной связи.

Упругие элементы (балки) могут иметь сложную конфигурацию как по высоте ($c_п$), так и по ширине ($b_п$). Здесь эти размеры приняты постоянными. Длина l и точки A и B соответствуют табл. 3.3.

Монокристаллический маятник изготовлен из кремния, для которого: $E_{(100)} = 1{,}4 \times$ $\times\, 10^{11}$ Н/м^2 , $\rho = 2{,}33$ г/см^3. Геометрические размеры пластины, м: $a_м = 8562{,}5 \cdot 10^{-6}$; $a = 4281{,}25 \cdot 10^{-6}$; $b_м = 9100 \cdot 10^{-6}$; $c_м = 350 \cdot 10^{-6}$. Размеры упругой балки, м: $l = 805 \cdot 10^{-6}$; $b_п = 400 \cdot 10^{-6}$; $c_п = 26{,}67 \cdot 10^{-6}$. Общая ИМ маятника [пластина с двумя грузами (катушками)] $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг.

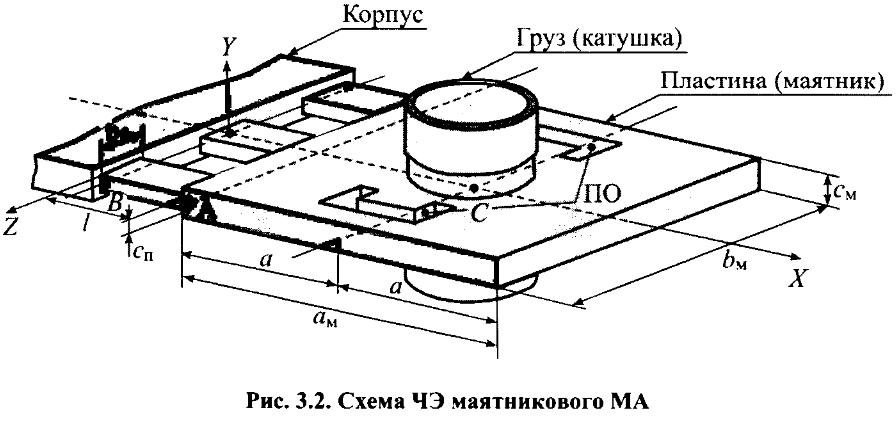


Рис. 3.2. Схема ЧЭ маятникового МА

Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через ЦМ (точка C) и параллельной оси Z, равен

$$J_C = \frac{m}{12}\left(a_{\text{м}}^2 + c_{\text{м}}^2\right) = 1{,}775 \cdot 10^{-9} \text{ кг·м}^2.$$

В предположении, что вся масса маятника расположена в центре пластины, момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку A и параллельной оси Z, равен $J_A = J_C + ma^2 = 7{,}093 \cdot 10^{-9}$ кг·м^4.

Момент инерции поперечного сечения балки вокруг оси Z, проходящей через центр тяжести сечения, равен

$$I = \frac{1}{12} b_{\text{п}} c_{\text{п}}^3 = 6{,}32 \cdot 10^{-19} \text{ м}^4.$$

Воспользуемся формулами (3.9) и (3.10) и вычислим коэффициенты влияния и коэффициенты жесткости:

$$\delta_{11} = 1{,}964 \cdot 10^{-3} \text{ м/Н}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 3{,}660 \text{ 1/Н};$$

$$\delta_{22} = 9{,}093 \cdot 10^{3} \text{ 1/Н·м};$$

$$k_{11} = 2{,}036 \cdot 10^{3} \text{ Н/м}; \quad k_{12} = k_{21} = -0{,}819 \text{ Н};$$

$$k_{22} = 4{,}398 \cdot 10^{-4} \text{ Н·м}.$$

Б. Главные формы и частоты малых колебаний ЧЭ

В соответствии со схемами деформаций упругих элементов (см. табл. 3.1 и 3.3) на рис. 3.3, *а* показано возможное положение пластины ИМ осевого МА в плоскости xy, ЦМ C которой не совпадает с ее геометрическим центром O, а на рис. 3.3, *б* – положение пластины ИМ маятникового МА, ЦМ которой находится в ее геометрическом центре.

Нужно обратить внимание на то, что пластина ИМ маятникового МА может занимать положение, соответствующее рис. 3.3, *а*, если мысленно поочередно убирать левый и правый упругие элементы. Точка A на рис. 3.3 соответствует точкам A в табл. 3.1 и 3.3, в которых приложены силы и моменты. Очевидно также, что, если ЦМ пластины ИМ осевого МА совпадает с ее геометрическим центром и упругие элементы имеют одинаковые жесткости в направлении оси y, вдоль которой приложена внешняя сила, пластина ИМ будет совершать плоскопараллельное движение.

Следует отметить и то, что при некоторых условиях пластина ИМ маятникового МА также может совершать движение, близкое к плоскопараллельному.

Положение пластин зависит от двух координат, которым соответствуют два уравнения движения. Для осевого МА – это линейная координата y, определяющая положение точки C, и угловая координата α, определяющая текущий разворот пластины. Положение пластины ИМ маятникового МА зависит от линейной координаты y_r расстояния точки A от нейтрального (вдоль оси x) положения и угловой координаты ϑ разворота пластины.

Уравнения недемпфированных колебаний пластин ИМ имеют одинаковую структуру:

– для осевого МА

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\alpha} \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} P \\ M_{\text{кр}} \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.12)$$

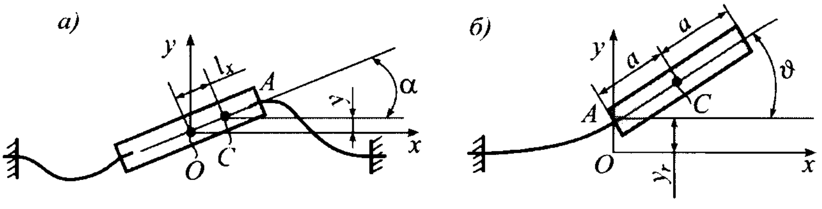


Рис. 3.3. Положения пластин ИМ МА:
а – осевого; *б* – маятникового

где $a_{11} = m, a_{12} = a_{21} = ml_x$, $a_{22} = J_a = J_z + ml_x^2$ (здесь m – ИМ; J_z – момент инерции пластины относительно оси z, проходящей через точку O; n – число упругих элементов); матрица сил и моментов находится из выражения (3.2);

– для маятникового МА

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{y}_r \\ \ddot{\vartheta} \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} P \\ M_{\text{кр}} \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.13)$$

где $a_{11} = m, a_{12} = a_{21} = ma$, $a_{22} = J_A = J_C + ma^2$ (здесь J_C – момент инерции пластины относительно оси, проходящей через точку C); матрица сил и моментов определяется выражением (3.11).

Выберем одну из систем уравнений, например (3.13), и запишем ее в виде

$$a_{11}\ddot{y}_r + a_{12}\ddot{\vartheta} + n(k_{11}y_r + k_{12}\vartheta) = 0;$$
$$(3.14)$$
$$a_{21}\ddot{y}_r + a_{22}\ddot{\vartheta} + n(k_{21}y_r + k_{22}\vartheta) = 0\,.$$

Решение системы (3.14) будем искать в форме

$$y_r = A_1\sin(pt+\varepsilon); \quad \vartheta = A_2\sin(pt + \varepsilon), \qquad (3.15)$$

где A_1, A_2, p, ε – неизвестные постоянные.

Выражения (3.15) дифференцируем дважды по времени t и полученные производные подставим в систему (3.14):

$$-a_{11}A_1p^2\sin(pt+\varepsilon) - a_{21}A_2p^2\sin(pt+\varepsilon) + n[k_{11}A_1\sin(pt+\varepsilon) + k_{12}A_2\sin(pt+\varepsilon)] = 0;$$

$$-a_{21}A_1p^2\sin(pt+\varepsilon) - a_{22}A_2p^2\sin(pt+\varepsilon) + n[k_{21}A_1\sin(pt+\varepsilon) + k_{22}A_2\sin(pt+\varepsilon)] = 0.$$

Чтобы полученные равенства удовлетворялись при любых t, необходимо приравнять нулю коэффициенты при $\sin(pt + \varepsilon)$:

$$\left.\begin{aligned} (nk_{11} - a_{11}p^2)A_1 + (nk_{12} - a_{12}p^2)A_2 = 0 \\ (nk_{21} - a_{21}p^2)A_1 + (nk_{22} - a_{22}p^2)A_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.16)$$

Линейные алгебраические уравнения (3.16) относительно A_1 и A_2 должны иметь решение, отличное от нуля. Если бы это было не так, то согласно выражениям (3.15) $y_r = 0$, $\vartheta = 0$, что соответствует покою, а не движению.

Следовательно, определитель системы (3.16) должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} nk_{11} - a_{11}p^2 & nk_{12} - a_{12}p^2 \\ nk_{21} - a_{21}p^2 & nk_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.17)$$

Раскрыв определитель, получим

$$(nk_{11} - a_{11}p^2)(nk_{22} - a_{22}p^2)(-nk_{12} - a_{12}p^2)^2 = 0 \qquad (3.18)$$

или

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)p^4 - \\ &- n(a_{11}k_{22} + a_{22}k_{11} - 2a_{12}k_{12})p^2 + \\ &+ n^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) = 0. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Уравнения (3.17)...(3.19) эквивалентны, и каждое из них называется уравнением частот, или вековым уравнением. Оба корня уравнения частот относительно p^2 вещественны и положительны.

Решение биквадратного уравнения (3.19) запишем в виде

$$p_{1,2}^2 = n\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\Big/(2a), \qquad (3.20)$$

где $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$; $b = a_{11}k_{22} + a_{22}k_{11} - 2a_{12}k_{12}$; $c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$.

Каждому положительному значению корня p_1 и p_2, т.е. каждому из двух значений частот, будет соответствовать одно частное решение (3.15) со своими значениями постоянных A_1, A_2, ε.

Частные решения линейно независимы и поэтому общее решение системы уравнений (3.14) будет линейной комбинацией решений (3.15):

$$\left.\begin{aligned} y_r &= A_{11}\sin(p_1t+\varepsilon_1)+A_{12}\sin(p_2t+\varepsilon_2);\\ \vartheta &= A_{21}\sin(p_1t+\varepsilon_1)+A_{22}\sin(p_2t+\varepsilon_2).\end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

Между числами A_{11} и A_{21}, A_{12} и A_{22} имеется связь, которая определяется уравнениями (3.16). Если в последние подставить p_1 или p_2, то определитель системы (3.16) обратится в нуль.

Следовательно, из двух уравнений независимо только одно, причем любое. Выберем, например, первое уравнение и получим из него отношение

$$\frac{A_{2i}}{A_{1i}} = \frac{nk_{11} - a_{11}p^2}{nk_{12} - a_{12}p^2} = \mu_i \qquad (i = 1{,}2).$$

Каждому значению частот p_1 и p_2 соответствуют значения μ_1 и μ_2:

$$\mu_1 = \frac{nk_{11} - a_{11}p_1^2}{nk_{12} - a_{12}p_1^2}; \quad \mu_2 = \frac{nk_{11} - a_{11}p_2^2}{nk_{12} - a_{12}p_2^2}. \qquad (3.22)$$

Таким образом, $A_{21} = \mu_1 A_{11}$, $A_{22} = \mu_2 A_{12}$. Общее решение системы (3.21) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} y_r &= A_{11}\sin(p_1t+\varepsilon_1)+A_{12}\sin(p_2t+\varepsilon_2);\\ \vartheta &= \mu_1A_{11}\sin(p_1t+\varepsilon_1)+\mu_2A_{12}\sin(p_2t+\varepsilon_2).\end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

В решении (3.23) значения p_1, p_2, μ_1, μ_2 определяются через известные параметры ЧЭ, а значения A_{11}, A_{12}, ε_1, ε_2 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Из общего решения (3.23) следует, что движение ЧЭ около положения устойчивого равновесия состоит из двух независимых колебаний:

$$y_r = y_r^{(1)} + y_r^{(2)}; \quad \vartheta = \vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)}, \qquad (3.24)$$

где

$$y_r^{(1)} = A_{11}\sin(p_1t+\varepsilon_1); y_r^{(2)} = A_{12}\sin(p_2t+\varepsilon_2);$$

$$\vartheta^{(1)} = \mu_1A_{11}\sin(p_1t+\varepsilon_1); \quad \vartheta^{(2)} = \mu_2A_{12}\sin\times$$
$$\times(p_2t+\varepsilon_2).$$

Первое колебание по координатам y_r и ϑ происходит с частотой p_1, а второе – с частотой p_2. Эти колебания называются главными. Коэффициенты μ_1 и μ_2 являются основными характеристиками малых колебаний маятника. Все координаты в каждом главном колебании изменяются по гармоническому закону и имеют одинаковые частоты и фазы. Это означает, что координаты одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают амплитудных значений. Амплитуды в каждом главном колебании находятся в постоянном отношении μ_i, которое не зависит от начальных условий.

Пример 3.3

Определим собственные частоты и формы колебаний маятника с параметрами по примеру 3.2:

$$a_{11} = m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}\ \text{кг};$$

$$a_{12} = m\frac{a_{\text{м}}}{2} = 0{,}29 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{8562{,}5\cdot10^{-6}}{2} = $$
$$= 1{,}24\cdot10^{-6}\ \text{кг·м},$$

$$a_{22} = J_{\text{А}} = 7{,}093 \cdot 10^{-9}\ \text{кг·м}^2;$$

$$k_{11} = 2{,}036 \cdot 10^3\ \text{Н/м};\ k_{12} = k_{21} = -0{,}819\ \text{Н},$$

$$k_{22} = 4{,}398 \cdot 10^{-4}\ \text{Н·м}.$$

Примем $n = 3$ и по формуле (3.20) получим

$$p_{1,2}^2 = \frac{3(16{,}59 \pm 16{,}576)10^{-6}}{1{,}02\cdot10^{-12}}\ \frac{1}{\text{с}^2},$$

откуда следуют значения частот:

$$p_1 = 202{,}92\ \frac{1}{\text{с}} = 32{,}31\ \text{Гц};$$

$$p_2 = 9876{,}59\ \frac{1}{\text{с}} = 1572{,}71\ \text{Гц}.$$

В соответствии с формулами (3.22) вычислим

$$\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\vartheta}{y_r} =$$
$$= \frac{3\cdot2{,}036\cdot10^3 - 0{,}29\cdot10^{-3}\cdot0{,}057\cdot10^6}{-3\cdot0{,}819 - 1{,}24\cdot10^{-6}\cdot0{,}057\cdot10^6} =$$
$$= -2{,}41\cdot10^3\ \text{рад/м}.$$

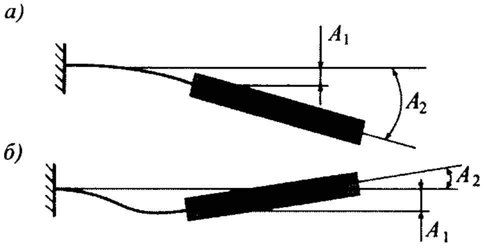


Рис. 3.4. Формы колебаний маятника:
а – первая; *б* – вторая

$$\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{\vartheta}{y_r} = \frac{3\cdot 2{,}036\cdot 10^3 - 0{,}29\cdot 10^{-3}\cdot 83{,}193\cdot 10^6}{-3\cdot 0{,}819 - 1{,}24\cdot 10^{-6}\cdot 83{,}193\cdot 10^6} = 0{,}17\cdot 10^3 \text{ рад/м}.$$

В соответствии с полученными результатами для первой (низшей) частоты амплитуда колебаний маятника по углу ϑ в 2410 раз больше амплитуды колебаний y_r точки A крепления маятника с балкой. На второй (высшей) частоте это различие значительно меньше, т.е. более ощутимы колебания по параметру y_r. Кроме того, изменилась фаза угла поворота маятника.

Формы колебаний маятника показаны на рис. 3.4.

Таким образом, монокристаллический маятник с двумя степенями свободы имеет две главные формы колебаний относительно положения устойчивого равновесия, которые характеризуются разными отношениями угловой амплитуды колебаний маятника к амплитуде линейных колебаний точки его крепления с упругими элементами (балками) подвеса.

Очевидно, имея в виду идентичность уравнений (3.12) и (3.13), можно заключить, что первая форма колебаний ИМ осевого акселерометра будет соответствовать поступательному перемещению ИМ (пластины) по координате y, а вторая – угловому движению по координате α. Эта форма колебаний показана на рис. 3.3, *а* и отвечает положению одной балки, показанному на рис. 3.4, *б*.

Необходимо обратить внимание на то, что каждой дополнительной обобщенной координате, определяющей положение ИМ, соответствуют своя форма колебаний и собственная частота. Например, в дополнение к двум первым формам колебаний ИМ (маятника) (рис. 3.4) можно указать на две другие, представленные на рис. 3.5.

На рис. 3.5, *а* положение маятника в системе координат $x_k y_k z_k$ определено углом k_x его разворота вокруг оси x_k (A_1... A_3 – точки крепления балок к пластине; B_1...B_3 – точки крепления балок к корпусу).

При малом угле k_x можно предположить, что балки A_1B_1 и A_3B_3 подвергаются деформации изгиба, а средняя – деформации кручения. На рис. 3.5, *б* положение маятника определено углом k_y его разворота вокруг оси y_k. Гипотетически такое движение возможно, если принять, что балки имеют, например, квадратное сечение. В этом случае можно предположить, что все балки работают на изгиб, но максимальный прогиб у каждой из них будет разный.

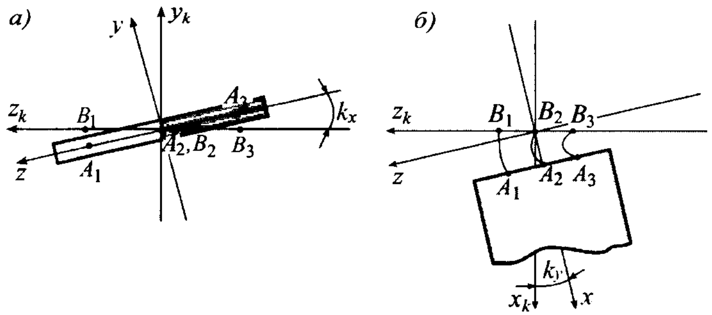


Рис. 3.5. Формы колебаний маятника:
а – разворот вокруг оси x_k; *б* – разворот вокруг оси y_k

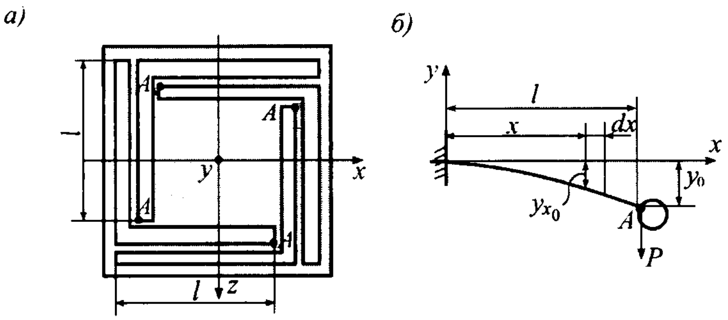


Рис. 3.6. К определению влияния массы упругого элемента:
а – схема ЧЭ; *б* – схема деформации упругого элемента

В. Влияние массы упругих элементов на частоту собственных колебаний ЧЭ

Для некоторых схем ЧЭ (см. рис. 1.1, *б*, *г*, *д*) МА размеры упругих элементов подвеса дают основание думать о влиянии их массы на частоту собственных колебаний ЧЭ. Исходя из энергетических соображений [12], определим это влияние на примере ЧЭ (рис. 3.6, *а*), выполненного по схеме рис. 1.1, *г*. Каждый упругий элемент длиной l нагружен в точке A силой $P = mg/4$ (m – масса пластины). Схема нагружения соответствует табл. 3.3, а жесткость k_{11} упругого элемента в направлении оси y определяется из уравнений (3.10).

Кинетическая энергия ЧЭ определяется кинетической энергией ИМ пластины и энергией упругих элементов:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + 4\int_0^l \frac{1}{2}\mu dx(\dot{y}_x)^2 , \qquad (3.25)$$

где μ – масса упругого элемента, приходящаяся на единицу его длины.

Можно принять, что для отрезка упругого элемента длиной dx (рис. 3.6, *б*) скорость перемещения определяется из равенства

$$\dot{y}_x / \dot{y} = y_{x_0} / y_0 . \qquad (3.26)$$

Известны [24] выражения для прогибов балки (упругого элемента)

$$y_{x_0} = \frac{P}{2EI}x^2\left(l - \frac{1}{3}x\right); \; y_0 = \frac{Pl^3}{3EI},$$

после подстановки которых в равенство (3.26) и затем величины $\dot{y}_x$ в формулу (3.25) получим

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}^2\left(m + \frac{33}{35}m_{y_э}\right), \qquad (3.27)$$

где $m_{y_э}$ – масса одного упругого элемента.

Из выражения (3.27) следует, что для вычисления кинетической энергии ЧЭ к ИМ пластины нужно добавить примерно массу упругого элемента.

Период колебаний ЧЭ в этом случае равен

$$T = 2\pi\sqrt{m + \frac{33}{35}m_{y_э}} ,$$

а частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega_{y_0} = \sqrt{\frac{4k_{11}}{m + \frac{33}{35}m_{y_э}}} .$$

Для большинства известных размеров ИМ и упругих элементов влиянием массы упругих элементов на частоту собственных колебаний ЧЭ можно пренебречь. Аналогично может быть выполнен анализ влияния масс упругих элементов на частоту собственных колебаний ЧЭ с другими схемами подвеса, в том числе и для МГ.

3.1.2. Упругие подвесы микрогироскопов

Жесткость подвеса и собственные частоты гироскопа зависят от конкретной схемы МГ и варианта информативного движения ИМ.

А. Микрогироскопы LL-типа

На рис. 3.7 приведена схема МГ, соответствующая рис. 1.35, *а*, с одной массой *m*, которая подвешена в корпусе на четырех точках (анкерах) крепления *3* с помощью одинарных упругих элементов (торсионов) *1* и *2*.

Если измеряется угловая скорость Ω_z, то ИМ под действием силы инерции Кориолиса $2m\Omega_z v$ перемещается в плоскости *XY* в направлении оси *Y*. Жесткость подвеса в направлении оси *X* (РД) равна жесткости четырех торсионов *2*: $G_x = 4G_{2x}$ (G_{2x} – жесткость торсиона *2* в направлении оси *X*), а собственная, недемпфированная частота $\omega_{x_0} = \sqrt{\dfrac{G_{2x}}{m}}$.

Жесткость четырех торсионов *1* в направлении оси *Y* (режим информативных колебаний, или режим чувствительности): $G_y = 4G_{1y}$, (G_{1y} – жесткость торсиона *1* в направлении оси *Y*), а собственная частота $\omega_{y_0} = \sqrt{\dfrac{G_{1y}}{m}}$.

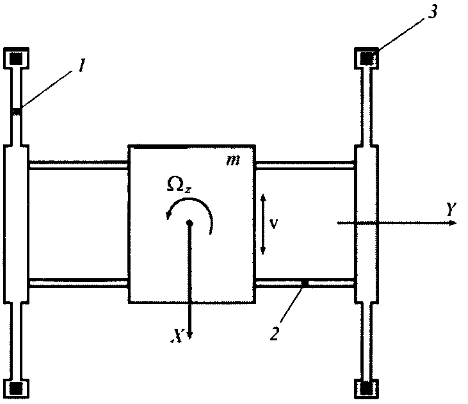


Рис. 3.7. Схема подвеса ЧЭ с помощью четырех пар одинарных упругих элементов (торсионов):
1, *2* – торсионы; *3* – "точка" крепления (анкер)

Схема гироскопа допускает измерение угловой скорости Ω_y вокруг оси *Y*. При этом информативное движение ИМ происходит под действием силы инерции Кориолиса $2m\Omega_y v$ в направлении оси *Z* (из плоскости *XY*). В данном случае параллельно включенные торсионы *1* и *2* соединены последовательно по отношению друг к другу. Значит, суммарная жесткость подвеса в направлении оси *Z* и собственная частота определяются формулами (3.7)

$$G_z = \frac{4G_{1z}G_{2z}}{G_{1z} + G_{2z}}; \quad \omega_{z_0} = 2\sqrt{\frac{G_{1z}G_{2z}}{m\left(G_{1z} + G_{2z}\right)}},$$

где G_{1z}, G_{2z} – соответственно жесткости торсионов *1*, *2* в направлении оси *Z*.

Основной недостаток схемы упругого подвеса ИМ по рис. 3.7 заключается в непосредственном креплении системы торсионов *2* к системе торсионов *1*, что приводит к взаимному влиянию их жесткостей. Этот недостаток устранен в схеме двойного подвеса ИМ, показанной на рис. 3.8 (см. рис. 1.35, *б*).

ИМ *m* с помощью четырех пар торсионов *2* подвешена к рамке массой $m_р$, которая, в свою очередь, подвешена в корпусе на четырех точках (анкерах) крепления *3* посредством четырех пар торсионов *1*.

Жесткости каждой пары *1* или *2* по отношению друг к другу "включены" параллельно, а жесткости торсионов в паре – последовательно.

Значит, жесткость подвеса рамки в направлении осей *y*, *z* определяется зависимостью

$$G_{y,z} = 4\left(\frac{G_{1y,1z}}{2}\right) = 2G_{1y,1z},$$

где G_{1y}, G_{1z} – соответственно жесткость торсиона *1* в направлении осей *y* и *z*.

Аналогично вычисляется жесткость подвеса ЧЭ в направлении осей *x*, *z*:

$$G_{x,z} = 2G_{2x,2z},$$

где G_{2x}, G_{2z} – соответственно жесткость торсиона *2* в направлении осей *x* и *z*.

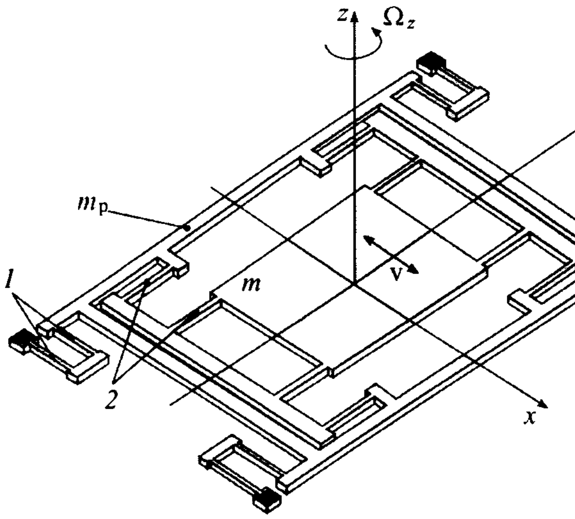


Рис. 3.8. Схема двойного подвеса ИМ (обозначения см. на рис. 3.7)

При измерении угловой скорости Ω_z ИМ вместе с рамкой под действием силы инерции Кориолиса на системе торсионов *1* совершает информативные колебания в направлении оси *y*. Собственная частота этих колебаний определяется выражением

$$\omega_{y_0} = \sqrt{2G_{1y}/(m + m_{\text{р}})}\ .$$

Можно считать, что в рассмотренных схемах упругие элементы подвесов подвергаются только деформации изгиба. При этом упругие элементы по концам жестко защемлены. В этом случае для вычисления жесткости на изгиб каждого упругого элемента можно воспользоваться табл. 3.1.

Аналогично могут быть вычислены жесткости и собственные частоты для других вариантов систем упругих подвесов.

Б. Микрогироскопы RR-типа

Рассмотрим вычисление жесткостей и собственных частот роторного МГ RR-типа, схема которого приведена на рис. 3.9 [23].

Конфигурация ЧЭ гироскопа, включающего в себя ротор *1*, недеформируемые *2* и деформируемые *3*, *4* элементы подвеса с анкером *5*, вытравлена в кремниевой пластине. С помощью анкера ЧЭ соединен с подложкой (корпусом), на которой расположены электроды емкостного преобразователя перемещений, датчика силы контура компенсации моментов сил инерции Кориолиса, а также статорные элементы гребенчатых структур электростатического привода. Последние совмест-

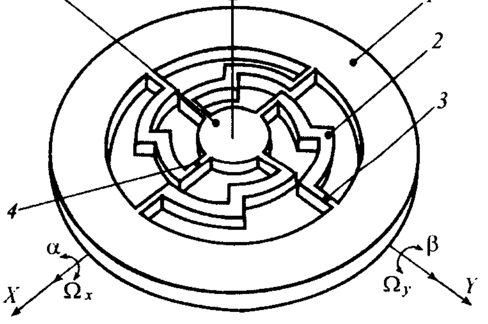


Рис. 3.9. Схема ЧЭ роторного МГ:
1 – ротор; *2* – недеформируемые элементы подвеса; *3*, *4* – упругие элементы подвеса; *5* – элемент крепления ЧЭ к корпусу (анкер)

но с роторными структурами, расположенными на роторе, создают вибрационный вращающий момент вокруг оси *Z*.

Две пары упругих элементов *3* обеспечивают соединение ротора с недеформируемыми элементами *2*, которые предполагаются абсолютно жесткими, а две пары упругих элементов *4* осуществляют соединение элементов подвеса *2* с анкером *5*. При повороте ротора вокруг оси *X* все упругие элементы, расположенные вдоль нее, работают на кручение, а размещенные вдоль оси *Y* – на изгиб. При повороте ротора вдоль оси *Y* упругие элементы функционируют аналогично. При разворотах ротора вокруг оси *Z* все упругие элементы подвергаются деформации изгиба.

При появлении переносных угловых скоростей основания (корпуса) Ω_x и Ω_y, которые для гироскопа являются прецессией, возникают переменные моменты сил инерции Кориолиса, вызывающие колебания ротора по перекрестным осям (см. подразд. 1.3.4). На рис. 3.10 приведена схема фрагмента подвеса ротора.

Можно считать, что при работе гироскопа деформируются только упругие элементы длиной *l*, которых в подвесе *8* штук. В РД ротор совершает колебания по координате γ и все упругие элементы подвеса работают на изгиб. Жесткость каждого элемента вычисляется из отношения

$$G_\gamma = Pl/\vartheta,$$

где *P* – сила, приложенная на конце упругого элемента; ϑ – угол изгиба этого элемента, определяемый зависимостью (см. табл. 3.3)

$$\vartheta = \frac{Pl^2}{2E_{(\text{п})}I},$$

где $E_{(\text{п})}$ – модуль упругости для соответствующей кристаллографической плоскости; *I* – момент инерции поперечного сечения упругого элемента.

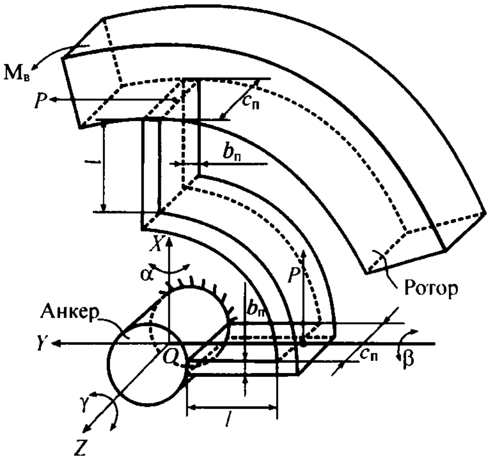


Рис. 3.10. Схема подвеса МГ RR-типа

Имея в виду, что $I = \frac{c_\text{п} b_\text{п}^3}{12}$, получаем:

$$G_\gamma = \frac{E_{(\text{п})} c_\text{п} b_\text{п}^3}{6l}.$$

Для последовательного соединения двух упругих элементов их жесткость равна $G_\gamma / 2$, а так как пар, работающих параллельно, в подвесе 4 шт., то суммарная жесткость подвеса в РД $G_{\Sigma\gamma} = 2G_\gamma$, а частота собственных колебаний

$$\omega_{\gamma 0} = \sqrt{\frac{G_{\Sigma\gamma}}{C_2 + C_1}}.$$

В режиме чувствительности (РЧ) в общем случае при колебаниях ротора по координате α или β упругие элементы вдоль одной оси подвергаются деформации кручения, а по другой – деформации изгиба. Предположим для простоты, что упругие элементы подвеса получают только деформацию кручения, а элементы подвеса по перекрестной оси ведут себя как абсолютно жесткие тела.

Жесткость одного упругого элемента на кручение $G_\text{кр}$ определяется формулой (3.6). Очевидно, что суммарная жесткость по выходным координатам $G_{\Sigma\alpha} = G_{\Sigma\beta} = 4G_\text{кр}$, а собственные частоты колебаний равны

$$\omega_{\alpha 0} = \omega_{\beta 0} = \sqrt{\frac{G_{\Sigma\alpha}}{A_2 + A_1}},$$

где A_2, A_1 – моменты инерции элементов подвеса и ротора относительно выходных осей.

Рассмотрим вариант вычисления жесткостей и собственных частот МГ RR-типа, предложенного ЦНИИ "Электроприбор" (г. Санкт-Петербург). Схема подвеса этого МГ приведена на рис. 3.11.

Ротор Р гироскопа скреплен с подложкой посредством анкера А, относительно которого подвес ротора выполнен с помощью двух пар упругих элементов (торсионов). Вибрационное вращение ротора по координате γ вокруг оси Z, перпендикулярной к плоскости гироскопа, осуществляется роторными и статорными структурами гребенчатых двигателей Д. Длина и ширина торсионов разные (показано на рисунке), а толщина одинакова с толщиной ротора.

Для РД по координате γ можно принять схему заделки концов упругих элементов и нагружения такой же, как на рис. 3.10. Таким образом, полагая, что внутренние концы торсионов имеют жесткую связь с анкером, а силы приложены к наружным концам, которые "свободны" за счет вращательного движения ротора, аналогично предыдущему получим

$$G_\gamma = E_{(\text{п})} c_{\text{п}} \left(\frac{b_{\text{п}1}^3}{l_{\text{т}1}} + \frac{b_{\text{п}2}^3}{l_{\text{т}2}} \right); \quad \omega_{\gamma_0} = \sqrt{\frac{G_\gamma}{C_1}}. \qquad (3.28)$$

Для движения в РЧ по любой из координат α или β, имея в виду, что при этом два торсиона работают на кручение, а два – на изгиб, запишем:

$$G_\alpha = 2G_{\text{кр}\,x} + \frac{E_{(\text{п})} c_{\text{п}} b_{\text{п}2}^3}{l_{\text{т}2}}; \quad \omega_{\alpha 0} = \sqrt{\frac{G_\alpha}{A_1}};$$

$$G_\beta = 2G_{\text{кр}\,y} + \frac{E_{(\text{п})} c_{\text{п}} b_{\text{п}1}^3}{l_{\text{т}1}}; \quad \omega_{\beta 0} = \sqrt{\frac{G_\beta}{A_1}}, \qquad (3.29)$$

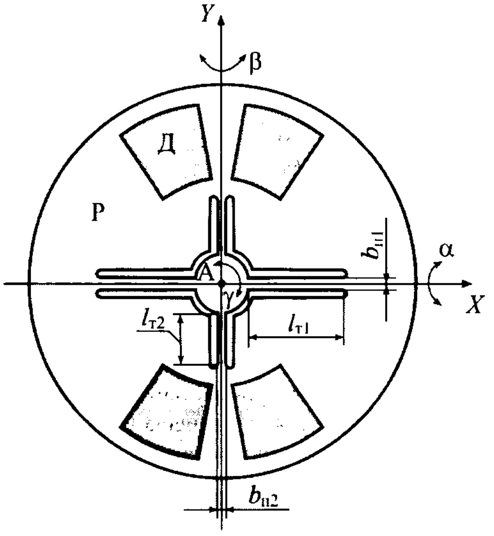


Рис. 3.11. Схема подвеса МГ RR-типа

где $G_{\text{кр}\,x}$, $G_{\text{кр}\,y}$ – жесткости на кручение торсионов, расположенных соответственно вдоль осей X и Y, определяемые формулой (3.6).

При возможном перемещении ротора относительно анкера по координате Z все торсионы подвергаются деформации изгиба и суммарная жесткость подвеса (см. табл. 3.1) и собственная частота определяются формулами

$$G_z = 2E_{(\text{п})} \left[b_{\text{п}1} \left(\frac{c_{\text{п}}}{l_{\text{т}1}} \right)^3 + b_{\text{п}2} \left(\frac{c_{\text{п}}}{l_{\text{т}2}} \right)^3 \right];$$

$$\omega_{z0} = \sqrt{\frac{G_z}{m}}. \qquad (3.30)$$

При возможных перемещениях ротора относительно анкера вдоль оси X или Y два торсиона подвергаются деформации на изгиб, а один из торсионов, расположенных вдоль оси перемещения ротора, – деформации растяжения, а другой – сжатия.

Полагая, что жесткости стержневых элементов (торсионов) на сжатие и растяжение одинаковы, а изгибные жесткости определяются аналогично предыдущему, получим формулы

$$\left.\begin{aligned} G_x &= 2E_{(\text{П})}c_{\text{п}}\left[\left(\frac{b_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right)^3+\frac{b_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}}\right];\ \omega_{x0}=\sqrt{\frac{G_x}{m}};\\ G_y &= 2E_{(\text{П})}c_{\text{п}}\left[\left(\frac{b_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}}\right)^3+\frac{b_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right];\ \omega_{y0}=\sqrt{\frac{G_y}{m}}. \end{aligned}\right\}\qquad(3.31)$$

Очевидно, что при некоторых значениях нагрузки на торсионы вдоль оси X или Y, они теряют устойчивость. Нагрузка, при которой прямолинейная форма стержня (торсиона) перестает быть устойчивой, называется критической. В общем случае сжатия стержня критическое значение нагрузки определяется формулой [24]

$$P_{\text{кр}}=\frac{\eta EI}{l^2},$$

где I – наименьший из главных центральных моментов инерции сечения стержня; l – длина стержня (торсиона); η – коэффициент критического значения нагрузки, или коэффициент устойчивости.

Значение величины η для кремния в доступной литературе не приводится. Для стали, модуль упругости которой ($E = 2\cdot10^{11}$ Па) соизмерим с модулем упругости кремния [$E_{(111)} = 1{,}86\cdot10^{11}$], а способ заделки концов нагружаемого стержня совпадает в основном с заделкой концов торсионов, приводится значение $\eta = 4\pi^2$.

Пример 3.4

Рассчитаем жесткости подвеса и собственные частоты колебаний роторного гироскопа по рис. 3.11. Микроструктура вытравлена из кремниевой пластины в плоскости (100). Параметры кремния:

$E_{(100)} = 1{,}295\cdot10^{11}$ Н/м^2; $G_{(100)} = 0{,}79\times10^{11}$ Н/м^2. Ротор имеет параметры: $m = 2\cdot10^{-7}$ кг; осевой момент инерции $C_1 = 2{,}5\cdot10^{-13}$ кг·м^2; экваториальные моменты инерции: $J_x \approx J_y = A_1 = 10^{-13}$ кг·м^2. Ротор и упругие элементы (торсионы) подвеса имеют толщину $c_{\text{п}} = 20\cdot10^{-6}$ м, а ширина и длина торсионов следующие, м: $b_{\text{п}1} = 20\cdot10^{-6}$; $l_{\text{т}1} = 0{,}8\cdot10^{-3}$; $b_{\text{п}2} = 15\cdot10^{-6}$; $l_{\text{т}2} = 0{,}5\cdot10^{-3}$.

1. Вычислим жесткость подвеса по координате γ и соответствующую собственную частоту по формуле (3.28):

$$G_\gamma = 1{,}295\cdot10^{11}\cdot20\cdot10^{-6}\times$$
$$\times\left[\frac{\left(20\cdot10^{-6}\right)^3}{0{,}8\cdot10^{-3}}+\frac{\left(15\cdot10^{-6}\right)^3}{0{,}5\cdot10^{-3}}\right]=$$
$$=43{,}38\cdot10^{-6}\ \text{Н/м};$$

$$\omega_{\gamma0}=\sqrt{\frac{43{,}38\cdot10^{-6}}{2{,}5\cdot10^{-13}}}=1{,}32\cdot10^4\ \text{1/c}\approx2100\ \text{Гц}.$$

2. Определим жесткость подвеса по координатам α и β и соответствующие собственные частоты.

По формуле (3.6) найдем ($k' = 0{,}2$)

$$G_{\text{кр}\,x}=\frac{0{,}79\cdot10^{11}\cdot0{,}2\cdot20\cdot10^{-6}\left(20\cdot10^{-6}\right)^3}{0{,}8\cdot10^{-3}}=$$
$$=3{,}16\cdot10^{-6}\ \text{Н/м};$$

$$G_{\text{кр}\,y}=\frac{0{,}79\cdot10^{11}\cdot0{,}2\cdot20\cdot10^{-6}\left(15\cdot10^{-6}\right)^3}{0{,}5\cdot10^{-3}}=$$
$$=2{,}14\cdot10^{-6}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Далее рассчитаем

$$G_\alpha=2\cdot3{,}16\cdot10^{-6}+$$
$$+\frac{1{,}295\cdot10^{11}\cdot20\cdot10^{-6}\left(15\cdot10^{-6}\right)^3}{0{,}5\cdot10^{-3}}=$$
$$=(2\cdot3{,}16+17{,}48)10^{-6}=23{,}8\cdot10^{-6}\ \text{Н}\cdot\text{м};$$

$$\omega_{\alpha0}=\sqrt{\frac{23{,}8\cdot10^{-6}}{10^{-13}}}=1{,}54\cdot10^4\,\text{1/c}\approx2457\ \text{Гц};$$

$$G_\beta=2\cdot2{,}14\cdot10^{-6}+$$
$$+\frac{1{,}295\cdot10^{11}\cdot20\cdot10^{-6}\left(20\cdot10^{-6}\right)^3}{0{,}8\cdot10^{-3}}=$$
$$=(2\cdot2{,}14+25{,}5)10^{-6}=29{,}76\cdot10^{-6}\ \text{Н}\cdot\text{м};$$

$$\omega_{\beta0}=\sqrt{\frac{29{,}76\cdot10^{-6}}{10^{-13}}}=1{,}73\cdot10^4\,\text{1/c}\approx2747\ \text{Гц}.$$

3. Вычислим жесткость подвеса по координате Z и соответствующую собственную частоту по формуле (3.30):

$$G_z = 2\cdot 1{,}295\cdot 10^{11}\left[20\cdot 10^{-6}\left(\frac{20\cdot 10^{-6}}{0{,}8\cdot 10^{-3}}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + 15\cdot 10^{-6}\left(\frac{20\cdot 10^{-6}}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\right)^3\right] = 329{,}57 \text{ Н/м};$$

$$\omega_{z0} = \sqrt{\frac{329{,}57}{2\cdot 10^{-7}}} = 4{,}06\cdot 10^4 \text{ 1/с} \approx 6458 \text{ Гц}.$$

4. Найдем жесткости подвеса по координатам X и Y и соответствующие собственные частоты по формуле (3.31):

$$G_x = 2\cdot 1{,}295\cdot 10^{11}\cdot 20\cdot 10^{-6}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{15\cdot 10^{-6}}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\right)^3 + \frac{20\cdot 10^{-6}}{0{,}8\cdot 10^{-3}}\right] = 129\,639{,}86 \text{ Н/м};$$

$$\omega_{x0} = \sqrt{\frac{129\,639{,}86}{2\cdot 10^{-7}}} = 80{,}5\cdot 10^4 \text{ 1/с} \approx 128200 \text{ Гц};$$

$$G_y = 2\cdot 1{,}295\cdot 10^{11}\cdot 20\cdot 10^{6}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{20\cdot 10^{-6}}{0{,}8\cdot 10^{-3}}\right)^3 + \frac{15\cdot 10^{-6}}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\right] = 155\,480{,}93 \text{ Н/м};$$

$$\omega_{y0} = \sqrt{\frac{155480{,}93}{2\cdot 10^{-7}}} = 88{,}17\cdot 10^4 \text{ 1/с} \approx 140300 \text{ Гц}.$$

Следует обратить внимание на сильную зависимость характеристик МГ, в частности частот собственных колебаний, от геометрических параметров подвеса.

В. Влияние растягивающих сил на жесткость упругих элементов

При относительном смещении жестко защемленных концов упругого элемента происходит его удлинение $\Delta l \approx \sqrt{\Delta y^2 + l^2} - l$ (Δy – смещение жестко закрепленного конца), вследствие которого в упругом элементе возникает растягивающая сила

$$T = Eb_{\text{п}}c_{\text{п}}\Delta l / l, \qquad (3.32)$$

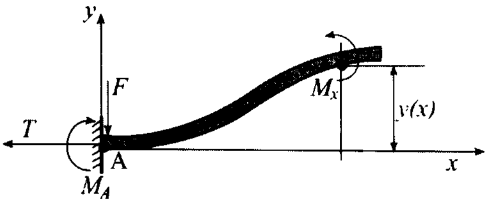


Рис. 3.12. Схема нагружения упругого элемента

где $b_{\text{п}}$, $c_{\text{п}}$, l – ширина, толщина и длина недеформированного упругого элемента (рис. 3.12).

Для произвольного сечения упругого элемента по его длине имеет место равенство моментов

$$M(x) = Fx - Ty(x) - M_A, \qquad (3.33)$$

где

$$M(x) = -EIy'' \text{ [24]}; \quad y'(x) = dy/dx\,; \qquad (3.34)$$

I – момент инерции поперечного сечения упругого элемента

Объединяя формулы (3.33) и (3.34), получаем уравнение

$$y''(x) - \frac{T}{EI}y(x) = -\frac{F}{EI}x + \frac{M_A}{EI},$$

которое для начальных условий $y(0) = y'(0) = y'(l) = 0$ имеет решение

$$y(x) =$$

$$= -\frac{F}{T}\lambda \operatorname{sh}\frac{x}{\lambda} + \frac{F}{T}\lambda\frac{\operatorname{ch}\frac{l}{\lambda} - 1}{\operatorname{sh}\frac{l}{\lambda}}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{\lambda} - 1\right) + \frac{F}{T}x, \qquad (3.35)$$

где $\lambda = \sqrt{EI/T}$.

Для $x = l$ из формулы (3.35) следует

$$y(l) = \frac{F}{T}\left[l - \frac{2\lambda\left(\operatorname{ch}\frac{l}{\lambda} - 1\right)}{\operatorname{ch}\frac{l}{\lambda}}\right]. \qquad (3.36)$$

Введем безразмерную относительную величину

$$\varepsilon = T / Eb_{\text{п}}c_{\text{п}}, \qquad (3.37)$$

с учетом которой параметр $\lambda = c_{\text{п}} / k$ $\left(k = \sqrt{12\varepsilon}\right)$ и выражение (3.36) принимает вид

$$y(l)=\frac{Fl}{T}\left[1-\frac{2c_{\text{п}}}{kl}\,\frac{\left(\mathrm{ch}\dfrac{kl}{c_{\text{п}}}-1\right)}{\mathrm{sh}\dfrac{kl}{c_{\text{п}}}}\right]. \qquad (3.38)$$

Из выражения (3.37) выразим T, подставим эту величину в уравнение (3.38) и полученное равенство разрешим относительно опорной реакции F, которая и определяет жесткость упругого элемента:

$$F=k'_{11}=\frac{Eb_{\text{п}}c_{\text{п}}k^2}{12l}\left[1-\frac{2c_{\text{п}}}{kl}\,\frac{\left(\mathrm{ch}\dfrac{kl}{c_{\text{п}}}-1\right)}{\mathrm{sh}\dfrac{kl}{c_{\text{п}}}}\right]^{-1}. \qquad (3.39)$$

При $k \to 0$, т.е. при отсутствии растягивающих сил, жесткость упругого элемента при относительном единичном смещении защемленных концов определяется из соотношений (3.1):

$$k_{11}=12EI/l^3=Eb_{\text{п}}\left(\frac{c_{\text{п}}}{l}\right)^3. \qquad (3.40)$$

Величина (3.40) является предельной для равенства (3.39) при $k \to 0$.

Пример 3.5

Вычислить зависимость жесткости упругого элемента с параметрами $E = 1{,}4 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $l = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $b_{\text{п}} = c_{\text{п}} = 5 \cdot 10^{-6}$ м в функции от перемещения Δy его защемленного конца.

По формуле (3.40) (при $\Delta y = 0$) находим $k_{11} = k'_{11} = 0{,}7$ Н/м. Вычисление по формуле (3.39) для заданных значений Δy приведено ниже:

Δy, $1\cdot10^{-6}$м	Δl, $1\cdot10^{-7}$м	T, $1\cdot10^{-4}$Н	ε, $1\cdot10^{-4}$	k, $1\cdot10^{-2}$	$kl/c_{\text{п}}$	k'_{11}, Н/м
5	0,25	1,75	0,5	2,45	2,45	1,117
10	1,0	7,0	2,0	4,9	4,9	2,342
15	2,25	15,75	4,5	7,35	7,35	4,325
20	4,0	28,0	8,0	9,8	9,8	7,034

Для наглядности результаты представлены также на рис. 3.13

Как видно из примера, при появлении растягивающих сил в упругом элементе вследствие относительного смещения его защемленных концов жесткость упругого элемента становится нелинейной функцией.

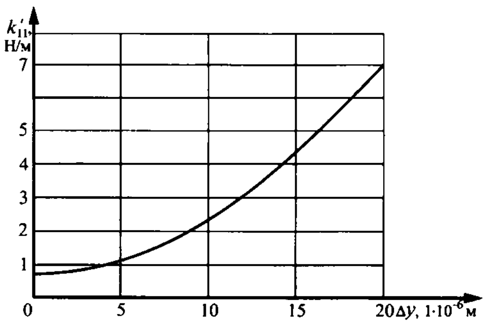


Рис. 3.13. Зависимость $k'_{11} = f(\Delta y)$

Следует отметить, что причиной растягивающих сил в упругом элементе могут быть технологические процессы изготовления микроструктур.

3.1.3. Мембраны микродатчиков давления

В микродатчиках давления (МДД) могут применяться как круглые, так и прямоугольные в плане мембраны. Теория тонких пластин давно и глубоко разработана [25], так же, как и варианты их использования в качестве мембран [5, 6, 10]. На примере квадратных мембран рассмотрим характеристики, наиболее важные по применению в качестве ЧЭ МДД.

А. Мембрана одинаковой толщины

Защемленная по контуру квадратная мембрана размером $A \times A$ и толщиной $c_п$, нагруженная равномерно распределенным разностным давлением Δp, показана на рис. 3.14.

Если частота изменения интенсивности Δp значительно меньше частоты колебаний основного (низшего) тона, функция перемещения точек мембраны имеет вид [22]

$$\omega(x,z) = \Lambda\left(1-\cos\frac{2\pi x}{A}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi z}{A}\right), \qquad (3.41)$$

где $\Lambda = \dfrac{\Delta p A^4}{32\pi^4 D}$ $\left[D = \dfrac{E c_п^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\right.$ – цилиндрическая жесткость пластины (ν – коэффициент Пуассона)].

Очевидно, максимальное перемещение соответствует центру мембраны с координатами $x = A/2$; $z = A/2$:

$$\omega_{\max} = \frac{\Delta p A^4}{8\pi^4 D}. \qquad (3.42)$$

Определим жесткость мембраны в направлении оси y

$$G_y = \frac{\Delta p S}{\omega_{\max}} = \frac{\Delta p A^2}{\omega_{\max}} = \frac{8\pi^4 D}{A^2} \quad (\text{здесь } S = A^2) \qquad (3.43)$$

и частоту основного тона мембраны:

$$f = \sqrt{\frac{G_y}{m}} = \frac{\pi^2}{A^2}\sqrt{\frac{8D}{\rho c_п}}, \qquad (3.44)$$

где $m = S c_п \rho$ – масса мембраны (ρ – плотность материала мембраны).

Запишем относительные удлинения мембраны в направлении осей x и z [22]:

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{x}{R_1} = -y\frac{\Delta p S}{8\pi^2 D}\cos\frac{2\pi x}{A}\left(1-\cos\frac{2\pi z}{A}\right); \\ e_z &= \frac{z}{R_2} = -y\frac{\Delta p S}{8\pi^2 D}\cos\frac{2\pi z}{A}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{A}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3.45)$$

Выражения (3.45) позволяют определить места расположения резисторов $R1$, $R2$ (топологию) на мембране. Если, например, плоскость их расположения определяется координатой $y = -c_п/2$, то в точках с координатами $x = 0$, $z = A/2$ и $x = A$, $z = A/2$, а также $z = 0$, $x = A/2$ и $z = A$, $x = A/2$ имеют место максимальные деформации, определяемые формулой

$$e_{\max} = \frac{\Delta p c_п S}{8\pi^2 D}. \qquad (3.46)$$

Очевидно, в точке с координатами $x = A/2$, $z = A/2$ деформация также определяется формулой (3.46), но со знаком "–".

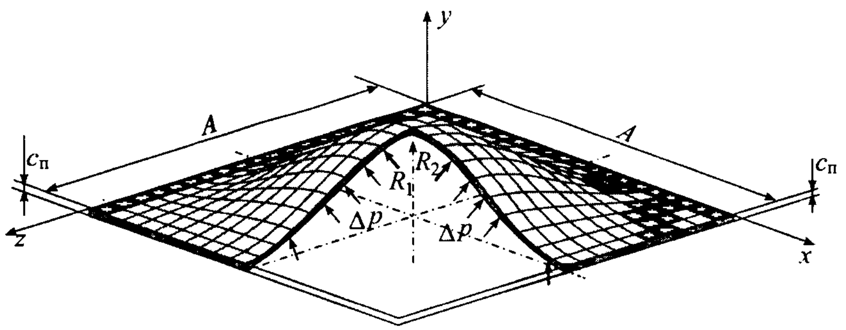


Рис. 3.14. Деформация квадратной мембраны, нагруженной давлением

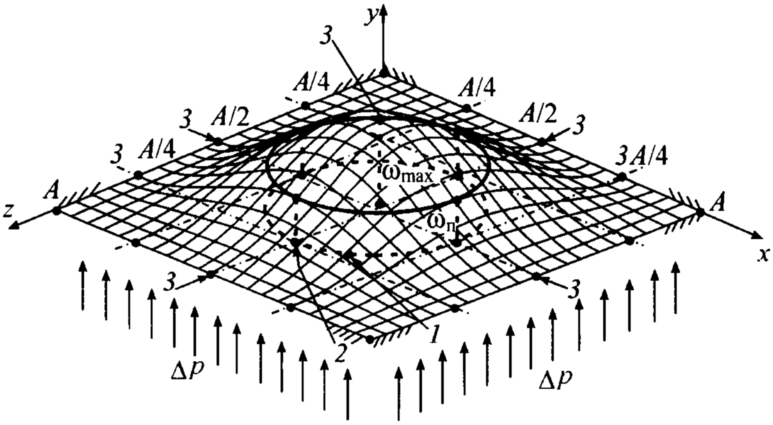


Рис. 3.15. Деформация срединной плоскости защемленной по контуру мембраны:
1 – геометрическое место точек с нулевой относительной деформацией;
2 – координатная точка, соответствующая нулевой относительной деформации;
3 – точки с максимальной относительной деформацией

В точках с максимальной относительной деформацией мембраны необходимо располагать (имплантировать) резисторы, включаемые, как правило, в мостовые схемы. В точках с координатами $x = A/4$, $z = A/2$ и $x = A/2$, $z = A/4$, а также $z = A/2$, $x = 3A/4$ и $z = 3A/4$, $x = A/2$ деформации нулевые, и в этих местах следует располагать резисторы для температурных компенсаций.

Точки с нулевой относительной деформацией соответствуют точкам перегиба линий, получаемых в результате сечений деформированной срединной плоскости мембраны плоскостями, проходящими через точку *c* координатами $x = A/2$, $z = A/2$, и перпендикулярных к плоскости *xz* (рис. 3.15).

Подставим любую из координат точек с нулевой относительной деформацией в выражение (3.41) и получим перемещение точек перегиба, м:

$$\omega_п = \frac{\Delta p A^4}{16\pi^4 D}. \qquad (3.47)$$

Пример 3.5

Для трех кремниевых пластин (мембран), вырезанных в плоскости (100), со сторонами квадрата, м: $A = 10^{-2}$; $0{,}5 \cdot 10^{-2}$; $0{,}2 \cdot 10^{-2}$, имеющих $c_п = 2 \cdot 10^{-4}$ и 10^{-4} м, рассчитать жесткости, максимальные относительные деформации для $\Delta p = 1$ кПа и 1 МПа и частоты собственных колебаний. При расчетах используются следующие данные: $E_{(100)} = 1{,}69 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0{,}358$, $\rho = 2{,}33 \cdot 10^3$ кг/м^3. Результаты расчетов по формулам (3.43), (3.44), (3.46) помещены в таблицу.

Параметры	A, $1 \cdot 10^{-2}$ м	G_y, $1 \cdot 10^7$ Н/м	$\Delta p = 1$ кПа e_{max}, $1 \cdot 10^{-7}$	$\Delta p = 1$ МПа, e_{max}, $1 \cdot 10^{-4}$	$f_п$, $1 \cdot 10^4$ 1/с
$c_п = 2 \cdot 10^{-4}$ м, $D = 0{,}129$ Н · м	1,0	0,1	19,74	19,74	18,72
	0,5	0,4	4,94	4,94	75,35
	0,2	2,52	0,79	0,79	464,87
$c_п = 10^{-4}$ м, $D = 0{,}016$ Н · м	1,0	0,012	77,7	77,7	9,16
	0,5	0,05	19,55	19,55	36,94
	0,2	0,32	3,15	3,15	47,77

Из приведенного примера следует, что при $\Delta p = 1$ МПа мембраны со сторонами $A = 1$ и 0,5 см теоретически могут иметь такие большие деформации, которые на практике привели бы к их разрушению. Собственные частоты колебаний настолько велики, что принятое допущение о возможности рассмотрения статического режима работы мембраны для решения задачи о ее деформации вполне оправданно.

Б. Мембрана с жестким центром

Квадратная мембрана (пластина) с размерами $A \times A$ по контуру имеет жесткий недеформируемый центр с размерами $a \times a$. В этом случае функция (3.41) принимает вид

$$\omega(x,z) = \Lambda\left(1-\cos\frac{2\pi x}{A-a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi z}{A-a}\right), \quad (3.48)$$

где $\Lambda = \dfrac{\Delta p(A-a)^4}{32\pi^4 D}$.

Максимальное перемещение недеформируемого жесткого центра ($x = z = \dfrac{A-a}{2}$) равно

$$\omega_{\max} = \Delta p\frac{(A-a)^4}{8\pi^4 D}, \quad (3.49)$$

а жесткость в направлении оси y определяется формулой

$$G_y = \frac{8\pi^4 A^2 D}{(A-a)^4}. \quad (3.50)$$

Пример 3.6

Для кремниевых квадратных пластин (мембран) с размерами сторон, м, $A = 10^{-2}$ и $0{,}5 \cdot 10^{-2}$ и имеющих толщины $c_п = 2 \cdot 10^{-4}$ и 10^{-4} м рассчитаем жесткость и максимальные перемещения для $\Delta p = 1$ кПа и для различных значений отношения a/A ($a/A = 0$ означает, что жесткий центр отсутствует). Цилиндрические жесткости взяты из предыдущего примера. Результаты расчетов по формулам (3.42), (3.43), (3.49), (3.50) представлены в следующей таблице:

A, $1 \cdot 10^{-2}$ м	a/A	$c_п = 2 \cdot 10^{-4}$ м	$D = 0{,}129$ Н·м	$c_п = 10^{-4}$ м	$D = 0{,}016$ Н·м
		G_y, $1 \cdot 10^7$ Н/м	$\omega_{\max}$, м	G_y, $1 \cdot 10^7$ Н/м	$\omega_{\max}$, м
1,0	0	0,1	10^{-7}	0,012	$83{,}3 \cdot 10^{-7}$
	0,2	0,24	$4{,}1 \cdot 10^{-8}$	0,029	$32{,}92 \cdot 10^{-8}$
	0,5	1,6	$6{,}2 \cdot 10^{-9}$	0,192	$5{,}02 \cdot 10^{-8}$
	0,8	62,5	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	7,5	$0{,}13 \cdot 10^{-8}$
0,5	0	0,4	$0{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,05	$0{,}5 \cdot 10^{-7}$
	0,2	0,97	$0{,}25 \cdot 10^{-8}$	0,12	$2{,}05 \cdot 10^{-8}$
	0,5	6,4	$3{,}89 \cdot 10^{-10}$	0,6	$0{,}31 \cdot 10^{-8}$
	0,8	250	$9{,}96 \cdot 10^{-12}$	31,25	$8 \cdot 10^{-11}$

Из примера следует, что при фиксированном значении $c_п$, изменяя отношение размеров a/A, можно получить ЧЭ МДД для широкого диапазона измеряемых давлений, при которых значение $\omega_{\max}$ остается в допустимых пределах.

Очевидно, что места максимального напряжения мембраны располагаются по внешнему контуру ее защемления и по контуру ее границы с жестким центром. При наличии жесткого центра предпочтительнее измерять не деформации мембраны тензорезисторами, а перемещения жесткого центра емкостными преобразователями.

Частота собственных колебаний мембраны с жестким центром определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{G_y}{m_ц + m_п}}, \quad (3.51)$$

где G_y – жесткость мембраны, вычисляемая по формуле (3.50); $m_ц$, $m_п$ соответственно масса жесткого центра и упругой перемычки.

Очевидно, при установке дополнительных масс на жестком центре их значение добавляется к значению массы жесткого центра.

Пример 3.7

Вычислим частоту собственных колебаний пластины с жестким центром и оценим погрешность в вычислениях, если не учитывать массу перемычки. Исходные данные: $c_п = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ м, $c_ц = 35 \cdot 10^{-3}$ м (толщина жесткого центра), $\rho = 2{,}33 \cdot 10^3$ кг/м^3. Значения A, a/A, D, G_y взяты из предыдущего примера. Результаты вычислений по формуле (3.51) приведены в таблице:

A, $1 \cdot 10^{-2}$, м	a/A	$D = 0{,}016$ Н·м, G_y, $1 \cdot 10^7$ Н/м	$m_ц$, $1 \cdot 10^{-4}$, кг	$m_п$, $1 \cdot 10^{-4}$, кг	$\sqrt{\dfrac{G_y}{m_ц + m_п}}$, $1 \cdot 10^4$ 1/с	$\sqrt{\dfrac{G_y}{m_ц}}$, $1 \cdot 10^4$ 1/с	δ, %
1,0	0,2	0,029	0,033	0,22	10,7	29,64	63,9
	0,5	0,192	0,21	0,17	22,47	30,24	25,7
	0,8	7,5	0,52	0,08	111,8	120,1	6,9
0,5	0,2	0,12	0,008	0,055	43,64	122,47	64,3
	0,5	0,6	0,051	0,043	79,89	128,46	26,3
	0,8	31,25	0,13	0,021	454,92	490,29	7,2

Из приведенного примера следует, что масса упругой перемычки существенно влияет на частоту колебаний мембраны с жестким центром.

3.2. ПРЯМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

3.2.1. Емкостные преобразователи перемещений

Работа преобразователей этого типа основана на изменении емкостей между подвижным электродом, располагаемым обычно на подвижном элементе прибора, и неподвижными электродами, размещаемыми на элементах корпуса (рис. 3.16).

Емкости между соответствующими парами электродов определяются зависимостями:

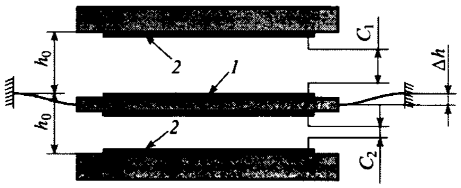
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h_0 + \Delta h}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h_0 - \Delta h}, \qquad (3.52)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды между электродами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; S – площадь взаимного перекрытия электродов; h_0 – начальный зазор между электродами; Δh – изменение расстояния между электродами.

Величина Δh для линейного перемещения означает поступательное перемещение подвижного электрода, а для углового перемещения определяется в соответствии с рис. 3.16, *б*:

$$\Delta h = \pm(y_r + a\vartheta).$$

а)



б)

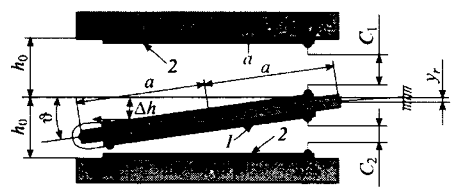


Рис. 3.16. Емкостные преобразователи перемещений:

а – линейный; *б* – угловой; *1* и *2* – подвижный и неподвижные электроды

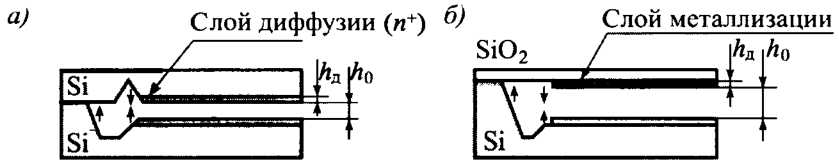


Рис. 3.17. Подвижный и неподвижный электроды, изготовленные:
а – диффузией; *б* – металлизацией

Из зависимостей (3.52) следует, что изменение параметров ε, S, Δh приводит к изменению емкостей преобразователя. Для исключения влияния изменения площади взаимного перекрытия обычно площадь одного из электродов, например подвижного, должна быть меньше площади других электродов. Исключение влияния возможного изменения параметра ε осуществляется в электронной схеме преобразования.

Надо иметь в виду также, что между каждой парой электродов существует силовое взаимодействие (тяжение), определяемое формулой

$$F_т = q_i^2 / (\varepsilon_0 \varepsilon S); \; i = 1, 2, \ldots, \qquad (3.53)$$

где q_i – электрические заряды на электродах.

Кроме силы тяжения в датчиках с подвижными узлами отрицательную роль играет также эффект электростатического "залипания".

"Простой и эффективный метод исключения "залипания" заключается в выполнении охранных заземленных контуров проводимости, выполняемых на неподвижных электродах. Расположение охранных контуров должно быть против острых ребер и кромок подвижных электродов, т.е. в местах концентрации силовых линий электрического поля, с целью отвода блуждающих зарядов на "землю" [6].

В емкостных преобразователях перемещений, как в любых конструкциях из разнородных материалов, ощутимыми могут быть температурные ошибки, обусловленные линейным расширением элементов преобразования. Подвижные электроды обычно получают либо диффузией проводящих областей, отделяемых от кремниевой пластины V-образными канавками, либо металлизацией на боросиликатных стеклах, что иллюстрируется рис. 3.17, на котором изображены фрагменты ЧЭ акселерометра.

Толщина слоя металлизации выбирается из условия постоянства зазора h_0 при изменении температуры, что принципиально возможно при равенстве приращений зазора и толщины слоя металлизации:

$$h_м = h_0 \frac{\alpha_{т\,кр}}{\alpha_{т\,кр} + \alpha_{т\,м}}, \qquad (3.54)$$

где $h_м$ – толщина слоя металлизации; $\alpha_{т\,кр}$, $\alpha_{т\,м}$ – температурные коэффициенты линейного расширения кремния и слоя металлизации.

Металлизация обычно выполняется по подслою, например алюминий по хрому, для снижения температурного напряжения, определяемого по формуле

$$\sigma_т = \frac{E_i}{1 - \nu_i} \Delta\alpha \Delta T,$$

где E_i, ν_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона i-го кристаллографического направления соответственно; $\Delta\alpha$ – разница между температурными коэффициентами линейного расширения сопрягаемых материалов; ΔT – температурный диапазон.

Коэффициент линейного расширения подслоя определяется как среднее значение из коэффициентов линейного расширения сопрягаемых слоев.

Пример 3.8

Рассчитаем толщину слоя металлизации $h_м$ алюминия и толщину слоя диффузии $h_д$ легированного кремния, выполняемых на кремнии. Коэффициенты линейного расширения: для кремния $\alpha_т = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$, для легированного кремния $\alpha_т = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$, для алюминия $\alpha_т = 23{,}8 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$. Для значения $h_0 = 10 \cdot 10^{-6}$ м по формуле (3.54) получим:

$$h_м = 10 \cdot 10^{-6} \frac{2{,}6 \cdot 10^{-6}}{(2{,}6 + 23{,}8)10^{-6}} = 0{,}98 \cdot 10^{-6}\ м$$

(~1 мкм).

Толщина слоя диффузии вычисляется также по формуле (3.54):

$$h_д = 10 \cdot 10^{-6} \frac{2{,}6 \cdot 10^{-6}}{(2{,}6 + 1{,}6)10^{-6}} = 6{,}19 \cdot 10^{-6}\ м$$

(~6 мкм).

Емкостные преобразователи перемещений хорошо сочетаются с конструкцией и технологиями МЭМС и находят широкое применение.

На рис. 3.18 приведена схема включения емкостного преобразователя перемещений [6], в которой обеспечено отсутствие влияния диэлектрической проницаемости среды между измерительными электродами и исключено тяжение между измерительными электродами.

По функциональным признакам схему можно разделить на следующие составные части: *1* – генератор меандра, питающий посредством ключевого устройства емкостный мост; *2* – активный сумматор сигналов; *3* – синхронный детектор; *4* – интегратор и цепь отрицательной обратной связи.

Два плеча емкостного моста представляют дифференциальные измерительные конденсаторы C_1 и C_2, а два других плеча – источники опорного напряжения $+U_{оп}$ и $-U_{оп}$.

Измерительные конденсаторы C_1 и C_2 включены последовательно, и посредством ключевой схемы Кл1...Кл4 эта цепь за первый полупериод меандра заряжается от источника опорного напряжения, а за второй, переключившись, перезаряжается этим же источником.

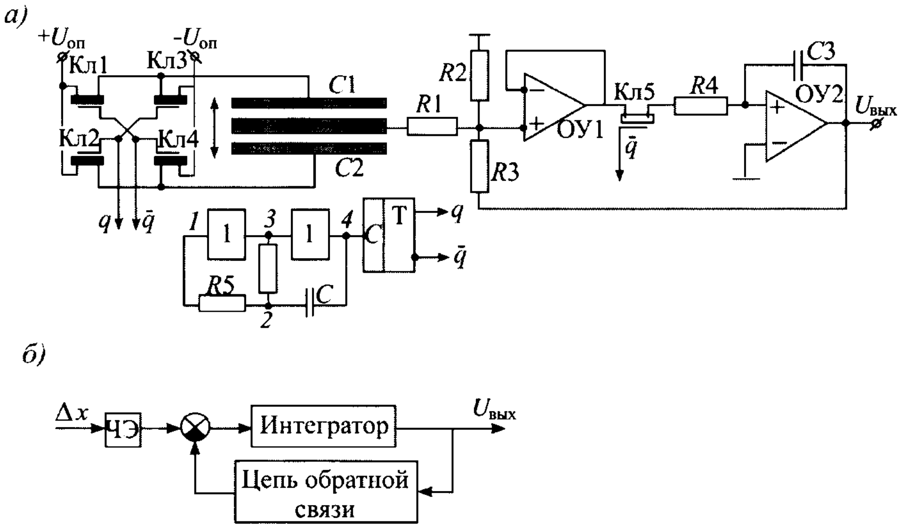


Рис. 3.18. Схемы включения емкостного преобразователя перемещений:
а – принципиальная; *б* – структурная; ОУ1, ОУ2 – операционные усилители; Т – транзистор

Интегратор выполняет две функции: во-первых, придает астатизм преобразователю, в результате чего температурный дрейф электронных узлов прямой цепи, охваченных местной обратной связью, не влияет на точность преобразования; во-вторых, в подготовительном такте совместно с ключом синхронного детектора осуществляет функции аналоговой запоминающей ячейки результата преобразования на предыдущем такте.

Выходное сопротивление измерительной диагонали емкостно-резисторного моста является высокоомным, а уровень полезного сигнала после моста – недостаточным для дальнейшей обработки. В связи с этим мост дополнен повторителем заряда на операционном усилителе, который одновременно служит для трансформирования высокого импеданса в низкоомный и сравнения сигналов моста и цепи обратной связи. Резисторы сумматора выполнены одинаковыми ($R_1 = R_2$).

Тяжение между подвижным и неподвижным электродами преобразователя отсутствует, так как при последовательном включении измерительных конденсаторов заряды на них q_1 и q_2 равны.

Чувствительность к знаку перемещения в схеме достигается применением синхронного детектора, выполненного на ключе Кл5. Знак усилителя в синхронном детекторе определяется не полярностью напряжения на его входе, а внешним управляющим сигналом. В качестве последнего сигнала используется тот же меандр, который управляет ключевой схемой моста. Выходной сигнал синхронного детектора является меандром, частота которого равна частоте задающего генератора с амплитудой, модулированной усиленным напряжением рассогласования мостовой схемы.

Пульсацию выходного напряжения схемы от несущей частоты задающего генератора можно определить по амплитудной частотной характеристике электронной части преобразователя, являющегося в динамическом отношении активным фильтром первого порядка.

Посредством соответствующего выбора параметров генератора и постоянной времени интегратора пульсации в выходном сигнале можно снизить до сколь угодно малого значения.

В соответствии с описанием работы и структурной схемой (рис. 3.18, *б*) передаточная функция измерительной цепи имеет вид

$$W_{\text{и}}(s) = \frac{U_{\text{вых}}}{\Delta h} = \frac{W_{\text{ЧЭ}}}{Ts+1}, \qquad (3.55)$$

где $W_{\text{ЧЭ}}$ – передаточная функция ЧЭ; $T = R_4 \cdot C_3$ – постоянная времени интегратора; s – оператор Лапласа.

Передаточная функция ЧЭ (емкостный мост) определяется следующим образом:

$$W_{\text{ЧЭ}} = \Delta U / \Delta h,$$

где напряжение в измерительной диагонали моста при равенстве между собой абсолютных значений напряжений положительного и отрицательного источников опорного напряжения, равно

$$\Delta U = \frac{U_{\text{оп}}}{2} \frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}. \qquad (3.56)$$

С учетом формулы (3.52) выражение (3.56) принимает вид

$$\Delta U = (U_{\text{оп}} \Delta h) / 2h_0. \qquad (3.57)$$

Из формулы (3.57) следует, что напряжение в измерительной диагонали мост линейно зависит от изменения зазора между электродами. Значение диэлектрической проницаемости в зависимости от физических условий ошибки в преобразование не вносит.

Таким образом, полагая в уравнении (3.55) $s = 0$, получаем статическую характеристику преобразователя:

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{оп}} \frac{\Delta h}{2h_0}. \qquad (3.58)$$

Из формулы (3.58) видно, что основными причинами температурной погрешности измерительной цепи является нестабильность источника опорного напряжения и зазора между электродами.

Температурную погрешность можно рассчитать по формуле

$$\delta_\Sigma = (\alpha_с - \alpha_т)\Delta T, \qquad (3.59)$$

где $\alpha_с$ – температурный коэффициент напряжения стабилитрона; $\alpha_т$ – температурный коэффициент материала, влияющего на изменение зазора.

Температурный коэффициент напряжения стабилитрона примерно на порядок превышает величину других ошибок. Одним из способов повышения точности емкостного преобразователя является выбор стабилитрона, знак температурного коэффициента напряжения стабилизации которого не совпадает со знаком температурного коэффициента изменения начального зазора.

3.2.2. Преобразователь перемещений на МДП-транзисторе

Преобразователь на полевом эффекте, который конструктивно является МДП-транзистором с оторванным затвором (рис. 3.19), может использоваться в качестве датчика перемещений ЧЭ МА, МДД и МГ [6, 7].

Исток и сток транзистора располагаются на неподвижной части кристалла, а затвор – на подвижной части ЧЭ, например на мембране датчика давлений.

Канал проводимости между истоком и стоком защищен от внешних воздействий тонкой пленкой SiO$_2$. При постоянном напряжении на затворе $U_з$ его проводимость изменяется в зависимости от изменения зазора h_0, т.е. от перемещения затвора на величину Δh.

Схема включения полевых транзисторов *T*1, *T*2 для измерения перемещения общего затвора, размещенного на подвижном элементе, приведена на рис. 3.20.

Транзисторы *T*1, *T*2 последовательно включены в цепь, питаемую от двухполярного источника опорного напряжения, управляемого усилителем ОУ по цепи отрицательной обратной связи.

Для дифференциальной схемы включения имеем следующее соотношение:

$$U_{вых} = -U_{оп}\frac{\Delta R}{R_0\left[1 - R_0/(2R_3)\right]}, \qquad (3.60)$$

где R_0 – сопротивление канала проводимости при нейтральном положении затвора; ΔR – изменение сопротивления R_0 при перемещении затвора на величину Δh.

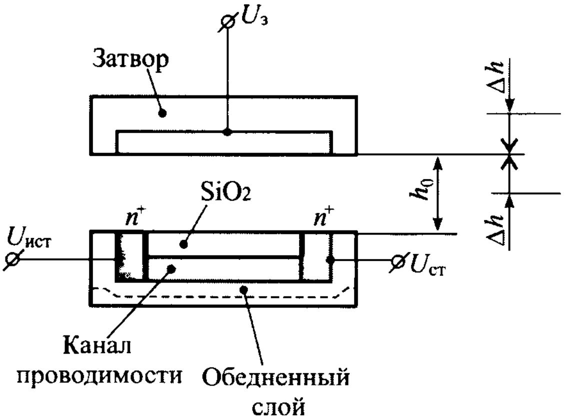


Рис. 3.19. Схема преобразователя перемещений на МДП-транзисторе

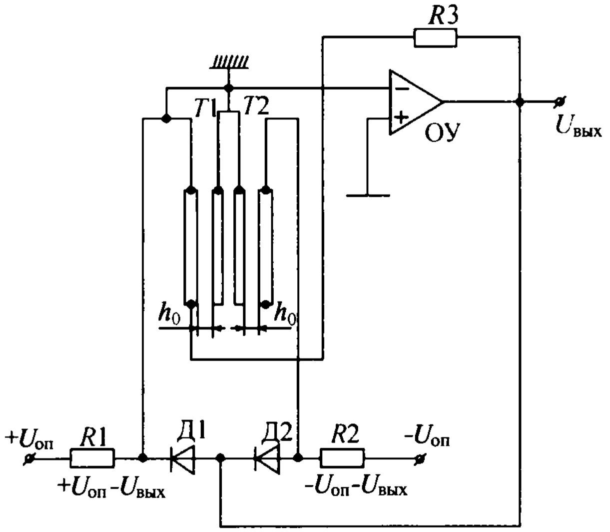


Рис. 3.20. Схема включения транзисторов для измерения перемещений

Имея в виду, что $R_0 << R_з$, вторым слагаемым в знаменателе выражения (3.60) можно пренебречь. Далее можно представить

$$\Delta R = \mu \Delta h ; \qquad R_0 = \mu h_0 ,$$

где μ – коэффициент, зависящий от геометрических размеров канала проводимости, его диэлектрической постоянной и подвижности носителей проводимости.

Таким образом, статическая характеристика преобразователя перемещений на полевом эффекте имеет вид

$$U_{\text{вых}} = -U_{\text{оп}} \frac{\Delta h}{h_0} . \qquad (3.61)$$

Диапазон Δh линейности характеристики (3.61) и ее зависимость от температуры требуют специального исследования.

Сравнение характеристик (3.58) и (3.61) показывает, что при одинаковых параметрах $U_{\text{оп}}$, h_0 крутизна характеристики преобразователя перемещений на полевых транзисторах в 2 раза больше, чем у емкостного преобразователя. Схема включений также проще, поскольку при этом не требуется задающего генератора и фильтра для сглаживания пульсаций выходного напряжения.

Среди других типов преобразователей перемещений следует отметить магниторезистивный и оптоэлектронный преобразователи.

В работе [1] рассмотрен магниторезистивный датчик перемещений. Сопротивление полупроводникового магниторезистора, выполненного на основе InSb с добавлением теллура и расположенного на подвижной части ЧЭ прибора, например мембране датчика давления, изменяется в зависимости от изменения индукции магнитного поля, сформированного специальным магнитным слоем.

В работе [5] рассмотрен оптоэлектронный преобразователь перемещений на базе светодиода на кремниевой подложке и двух фотодиодов, размещенных на одной пластине. При отражении светового потока от подвижного ЧЭ прибора, например маятника акселерометра, изменяется освещенность фотодиодов, т.е. преобразователь работает по смещению светового потока. Возможна схема преобразователя и с перекрытием светового потока.

3.2.3. Тензорезисторные преобразователи деформаций

Работа преобразователей этого типа основана на изменении характеристик полупроводниковых материалов в зависимости от деформации ЧЭ. Известно, что влияние деформаций на сопротивление проводника связано как с изменением удельной проводимости его материала, так и с изменением длины и площади поперечного сечения образца. В проводниках влияние этих изменений примерно одинаково. Для полупроводников, таких как германий Ge и кремний Si, изменение удельной проводимости более существенно, чем изменение геометрических размеров образца.

В микромеханических приборах (акселерометрах, наклономерах, датчиках давлений и др.) нашли применение тензопреобразователи двух типов: диффузионные (имплантированные) и эпитаксиальные.

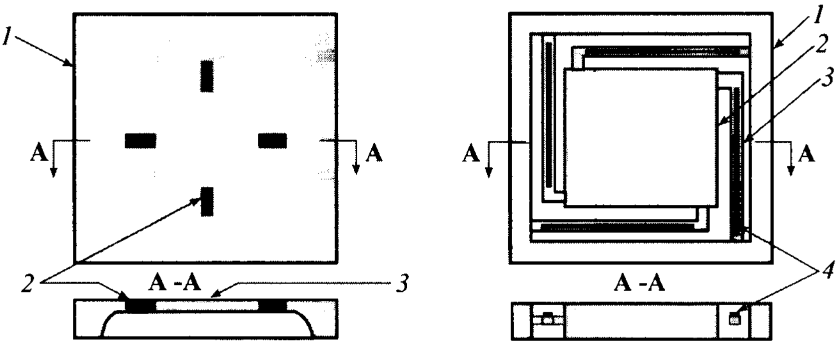
Диффузионные тензорезисторы представляют собой примеси *n*- или *p*-типа проводимости, которые в виде узких полосок внедряют (имплантируют) в приповерхностный слой кристалла через вскрытые окна в оксиде.

Эпитаксиальные тензорезисторы изготавливают следующим образом. Вначале на поверхности кристалла выращивают эпитаксиальную пленку и с помощью фотолитографии наносят на нее рисунок дорожек тензорезисторов, за контуром которого остальную часть эпитаксиального слоя удаляют.

На рис. 3.21, *а* показан вариант размещения четырех "точечных" тензорезисторов *2* диффузионного типа, имплантированных в мембрану *3* датчика давлений, вытравленную в кристалле *1*. На рис. 3.21, *б* приведен вариант размещения четырех "дорожек" эпитаксиальных тензорезисторов *4*, нанесенных на упругие элементы (балки) *3*, вытравленные вместе с ИМ *2* линейного акселерометра в кристалле *1* (токоподводящие дорожки к тензорезисторам не показаны).

Диффузионный тензорезистор как бы со всех сторон упакован в кристалл, поэтому важно совпадение их кристаллических решеток. В противном случае при температурном воздействии упругий элемент, например мембрана, коробится и в тензорезисторах возникают напряжения, которые приводят к появлению ложного сигнала. Эпитаксиальные тензорезисторы с трех сторон свободны, и они имеют аналогию с обычными тензорезисторами.

Тензорезисторы являются нелинейными преобразователями деформации в



а) *б)*

Рис. 3.21. Тензорезисторные преобразователи деформаций:
а – диффузионный [*1* – кристалл (ЧЭ датчика давлений); *2* – тензорезисторы; *3* – мембрана];
б – эпитаксиальный [*1* – кристалл (ЧЭ линейного акселерометра); *2* – ИМ;
3 – упругий элемент; *4* – тензорезисторы]

приращения сопротивлений. В работе [5] приведена следующая зависимость для слаболегированного кремния, которая справедлива и для сильнолегированного кремния:

$$\frac{\Delta R}{R\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} K_i \varepsilon^i , \qquad (3.62)$$

где R – сопротивление тензорезистора; ΔR – приращение сопротивления тензорезистора под действием деформации; ε – относительная деформация; K_i – коэффициенты, определяемые теоретически на основе допущения статистики Больцмана для распределения электронов на энергетических уровнях деформированной кристаллической решетки.

Для устранения нелинейностей тензорезисторов при создании полных мостовых схем обычно применяют следующие способы:

– включение одинаковых тензорезисторов из смежных плеч на деформации, равные по модулю, но имеющие разные знаки, т.е. одного тензорезистора на растяжение, другого – на сжатие;

– включение тензорезисторов на один вид деформации, при котором тензорезисторы n- и p-типов с одинаковой концентрацией примесей включены в противоположные плечи моста.

В литературе отмечалось, что возможно улучшение характеристик тензорезисторов технологическими способами.

Для расчета температурного напряжения в местах локализации неоднородностей материалов по температурным коэффициентам линейного расширения существует следующая зависимость:

$$\sigma_{\text{т}} = \frac{E_i}{1 - \nu_i} \Delta\alpha \Delta T , \qquad (3.63)$$

где $\Delta\alpha$ – разница между температурными коэффициентами линейного расширения сопрягаемых материалов; ΔT – температурный диапазон; E_i, ν_i – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона i-го кристаллографического направления.

Найдем минимальную величину деформации тензорезисторного преобразователя $\varepsilon_{\min}$, которую можно измерить на фоне "тепловых шумов", т.е. того напряжения выходного сигнала, которое имеет место при нагреве тензорезистора, но без внешней нагрузки. Очевидно, напряжение полезного сигнала тензорезистора $U_{\text{п}}$ должно удовлетворять соотношению

$$U_{\text{п}} \geq U_{\text{т.ш}}/\delta_{\Sigma}, \qquad (3.64)$$

где $U_{\text{т.ш}}$ – напряжение, соответствующее тепловому шуму; δ_{Σ} – относительная суммарная ошибка тензопреобразователя.

Напряжение сигнала тепловых шумов для всех полупроводников определяется формулой

$$U_{\text{т.ш}} = 2(kTR\Delta\omega)^{1/2}, \qquad (3.65)$$

где $k = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; T – температура, К; $\Delta\omega$ – ширина полосы пропускания частот (1/с); R – сопротивление тензорезистора, Ом.

Для мостовой схемы с двумя тензодатчиками, включенными дифференциально, напряжение полезного сигнала определяется в виде

$$U_{\text{п}} = \frac{1}{2} U_0 \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2} U_0 K\varepsilon , \qquad (3.66)$$

где K – коэффициент тензочувствительности [$K = (\Delta R/R)/\Delta l_{\text{т}}/l_{\text{т}})$]; ε – относительная деформация тензорезистора ($\varepsilon = \Delta l_{\text{т}}/l_{\text{т}}$); U_0 – напряжение питания тензомоста; $l_{\text{т}}$, $\Delta l_{\text{т}}$ – длина и приращение длины тензорезистора.

Для полупроводниковых тензодатчиков $K = 50...200$.

Допустимое напряжение питания тензомоста можно определить из условия исключения его саморазогрева:

$$U_0^2 / R \leq 4 l_{\text{т}} b_{\text{т}} [p_0], \qquad (3.67)$$

где $l_т$ и $b_т$ – длина и ширина тензорезистора; $[p_0]$ – допустимая удельная мощность рассеяния $[p_0] \leq 5 \cdot 10^6$ Вт/м^2.

Объединив формулы (3.64)–(3.67), получим

$$\Delta R / R = K\varepsilon = \frac{2}{\delta_\varepsilon}\sqrt{\frac{kT\Delta\omega}{l_т b_т [p_0]}}, \quad (3.68)$$

откуда

$$\varepsilon_{\min} = \frac{2}{K\delta_\varepsilon}\sqrt{\frac{kT\Delta\omega}{l_т b_т [p_0]}}. \quad (3.69)$$

Пример 3.9

Рассчитаем относительное изменение сопротивления "точечного" тензорезистора для исходных данных:

$l_т = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ м; $b_т = 0{,}01 \cdot 10^{-3}$ м; $T = 300$ K; $\Delta\omega = 6{,}28 \cdot 10^3$ 1/с; $[p_0] = 5 \cdot 10^6$ (Вт/м^2); $\delta_\Sigma = 0{,}01$.

Вычисления по формуле (3.68) дают результат $\Delta R/R = 1{,}44 \cdot 10^{-5}$. Имея в виду, что $K = 50...200$, получим, что для исходных данных примера относительная деформация будет находиться в диапазоне $10^{-7}...10^{-8}$.

Чувствительность тензорезисторов зависит от их кристаллографического направления и определяется тензорезистивными коэффициентами. Анизотропия материала, в который имплантируется тензорезистор, также влияет на его чувствительность (см. п. 2.1.2).

Тензорезисторный преобразователь перемещений мембраны представляет собой тензорезисторы, включенные в мостовую схему. Очевидно, напряжение на выходе мостовой схемы, имея в виду анизотропию пьезорезистивных коэффициентов и материала мембраны, зависит от топологии тензорезисторов на плоскости мембраны. В большинстве случаев основным критерием выбора варианта топологии резисторов является максимальная чувствительность преобразователя. Крутизна характеристики (чувствительность) мембраны с тензорезисторами, В/(Н/м^2), определяется отношением:

$$S = U_{вых} / p, \quad (3.70)$$

где $U_{вых}$ – выходное напряжение тензорезисторного моста.

Обычно тензорезисторы располагают так, что у одной пары тензорезисторов относительное изменение сопротивления положительное (δ^+), а у другой – отрицательное (δ^-). Относительное изменение сопротивления находится из равенства

$$\delta = (R' - R)/R = \Delta R / R,$$

где R, R' – соответственно значения сопротивления недеформированного и деформированного резисторов.

Выходное напряжение тензорезисторного моста определяется равенством

$$U_{вых} = \frac{U_0}{2}\left(\left|\delta^+\right| + \left|\delta^-\right|\right). \quad (3.71)$$

С учетом выражения (3.71) перепишем отношение (3.70) в виде

$$S = \frac{U_0}{2p}\left(\left|\delta^+\right| + \left|\delta^-\right|\right). \quad (3.72)$$

Известно, что при учете напряжений только в плоскости упругого элемента относительное изменение сопротивления тензорезистора определяется выражением

$$\delta = \pi'_{11}\sigma'_1 + \pi'_{12}\sigma'_2 + \pi'_{16}\sigma'_6, \quad (3.73)$$

где $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_6$ – компоненты тензора механических напряжений в системе координат, связанной с тензорезистором (рис. 3.22).

Радиальное σ_r и тангенциальное σ_τ напряжение в любой точке круглой мембраны радиусом R можно рассчитать по формулам [25]

$$\sigma_r = \frac{3p}{8c_м^2}[R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)];$$
$$(3.74)$$
$$\sigma_\tau = \frac{3p}{8c_м^2}[R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)].$$

При расчетах по формулам (3.74) нужно иметь в виду зависимость $\nu(\theta)$ (см.

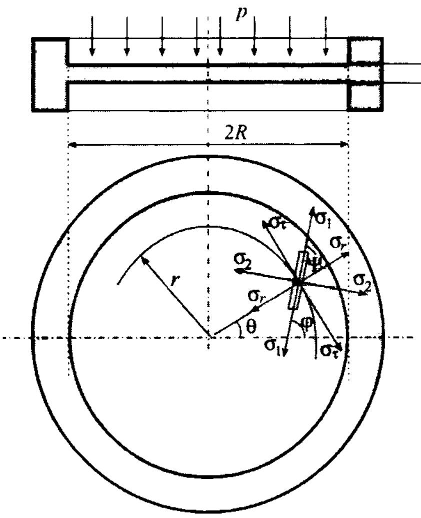


Рис. 3.22. Распределение механических напряжений на круглой мембране в тензорезисторе

табл. 2.1). На рис. 3.22 угол θ характеризует анизотропию упругих свойств материала мембраны, а угол φ – анизотропию пьезорезистивных коэффициентов. Очевидно равенство

$$\varphi = \theta + \psi, \qquad (3.75)$$

где ψ – угол поворота продольной оси тензорезистора относительно радиуса-вектора в точке расположения тензорезистора.

Имеют место следующие равенства [5]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_r \cos^2\psi + \sigma_\tau \sin^2\psi;\\ \sigma_2' &= \sigma_r \sin^2\psi + \sigma_\tau \cos^2\psi;\\ \sigma_6' &= \frac{1}{2}(\sigma_\tau - \sigma_r)\sin 2\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (3.76)$$

На практике применяют радиальное и тангенциальное расположение тензорезисторов. В соответствии с рис. 3.22 и равенствами (3.76) получим для тензорезисторов:

- радиальных ($\psi = 0$):

$$\sigma_1' = \sigma_r;\ \sigma_2' = \sigma_\tau;\ \sigma_6' = 0; \qquad (3.77)$$

- тангенциальных ($\psi = 90°$):

$$\sigma_1' = \sigma_\tau;\ \sigma_2' = \sigma_r;\ \sigma_6' = 0. \qquad (3.78)$$

Пример 3.10

Рассчитаем напряжение в тензорезисторе с радиальной и тангенциальной ориентацией для исходных данных: плоскость мембраны (001); $p = 10^6$ Па, $R = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $c_м = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ м; $\theta = 0;45°$ и 90°.

Напряжение рассчитаем в центре ($r = 0$) и на краю ($r = R$) мембраны.

В соответствии с табл. 2.1 находим: для $\theta = 0$ и 90° коэффициент $\nu = 0{,}278$; для угла $\theta = 45°$ коэффициент $\nu = 0{,}064$.

Результаты вычислений по формулам (3.76) с учетом равенств (3.77) и (3.78) представлены в следующей таблице.

Координаты тензорезистора	$\psi = 0$		$\psi = 90°$	
	$\sigma_1' \cdot 10^9$, Н/м^2	$\sigma_2' \cdot 10^9$, Н/м^2	$\sigma_1' \cdot 10^9$, Н/м^2	$\sigma_2' \cdot 10^9$, Н/м^2
$\theta = 0$ и 90°	$r = 0$	1,198		
	$r = R$	–0,521		–1,875
$\theta = 45°$	$r = 0$	0,997		
	$r = R$	–0,12		–1,875

Используя формулы (3.74), равенства (3.77), (3.78), табл. 2.1 и выражение (3.73), можно вычислить относительные изменения сопротивления тензорезисторов δ, нормированные для кремния p-типа произведением параметров $\pi_{44}\gamma$, а для n-типа – произведением параметров $\pi_{11}\gamma$, причем $\gamma = (pR^2)/c_м^2$.

Выполним указанные вычисления на примере плоскости (001). Введем вначале следующие обозначения, полагая, что тензорезистор имеет малые размеры (точечный резистор):

$\delta_{r0} = (\Delta R / R)\big|_{r=0}$ – относительное изменение сопротивления радиального тензорезистора в центре мембраны;

$\delta_{rR} = (\Delta R / R)\big|_{r=R}$ – то же, на краю мембраны;

$\delta_{\tau 0} = (\Delta R / R)\big|_{r=0}$ – относительное изменение сопротивления тангенциального тензорезистора в центре мембраны;

$\delta_{\tau R} = (\Delta R / R)\big|_{r=R}$ – то же, на краю мембраны.

В соответствии с формулами (3.74) в центре мембраны $\sigma_r = \sigma_\tau$, а на краю мембраны $\sigma_r = -\frac{3p}{4c_м^2}R^2$; $\sigma_\tau = -\frac{3p}{4c_м^2}\nu R^2$. Из табл. 2.6 следует, что $\pi'_{11} = -\pi'_{12}$ для кремния обоих типов проводимости. Значит, в плоскости (001) для кремния *p*- и *n*-типов проводимости в центре мембраны имеем

$$\frac{\sigma_{r0}}{\pi_{44}\gamma} = \frac{\sigma_{\tau 0}}{\pi_{44}\gamma} = \frac{\sigma_{r0}}{\pi_{11}\gamma} = \frac{\sigma_{\tau 0}}{\pi_{11}\gamma} = 0 .$$

Так как для радиального тензорезистора $\psi = 0$, то в соответствии с уравнением (3.75) $\varphi = \theta$ и для кремния *p*-типа на краю мембраны [см. табл. 2.6 и выражение (3.70)] получим

$$\frac{\sigma_{rR}}{\pi_{44}\gamma} = \frac{1}{\pi_{44}\gamma}\left(\pi'_{11}\sigma'_1 + \pi'_{12}\sigma'_2\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi_{44}\gamma}\left(\pi'_{11}\sigma'_r + \pi'_{12}\sigma'_\tau\right) = 0{,}25(1 - \cos 4\theta)\times$$

$$\times\left(\sigma_r - \sigma_\tau\right) = -\frac{3 \cdot 0{,}25}{4}(1 - \cos 4\theta)(1 - \nu).$$

На основании табл. 2.7 максимальное значение отношения принимают при $\theta = 45°$, что соответствует кристаллографическому направлению [110]. Из табл. 2.1 имеем $\nu = 0{,}064$ и из предыдущего выражения найдем

$$\frac{\delta_{rR}}{\pi_{44}\gamma} = -0{,}17(1 - \cos 4\theta).$$

Очевидно, что

$$\frac{\delta_{rR}}{\pi_{44}\gamma} = -\frac{\delta_{\tau R}}{\pi_{44}\gamma}.$$

Выполним аналогичные преобразования для кремния *n*-типа и получим

$$\frac{\delta_{rR}}{\pi_{44}\gamma} = \frac{3 \cdot 0{,}37}{4} = (1{,}67 + \cos 4\theta)(\nu - 1).$$

В соответствии с табл. 2.7 максимальные значения отношений π'_{11}/π_{11} и π'_{12}/π_{11} соответствуют углам $\theta = 0$ (направление [100]) и 90° (направление [010]) и из табл. 2.1 для этих значений углов получим $\nu = 0{,}278$. Следовательно, $\frac{\delta_{rR}}{\pi_{11}\gamma} = -0{,}2(1{,}67 + \cos 4\theta)$. Аналогично найдем $\frac{\delta_{\tau R}}{\pi_{11}\gamma} = \frac{\delta_{rR}}{\pi_{11}\gamma}$. Выполним подобные преобразования для плоскостей (011), (111) и результаты представим в табл. 3.4.

Табл. 3.4 определяет топологию тензорезисторных схем на плоскости мембраны. Рассмотрим некоторые схемы. На рис. 3.23 показаны варианты топологии тензорезисторных схем на плоскости (001) для кремния *p*-типа.

Большинство датчиков давления с мембранами из кремния *p*-типа на плоскости (001) имеют топологию тензорезисторных схем, принципиально не отличающихся от приведенных.

На рис. 3.24 показаны возможные варианты топологии тензорезисторных схем на плоскости (001) для кремния *n*-типа.

Варианты топологии тензорезисторных схем на плоскости (111) представлены на рис. 3.25.

На рис. 3.25, *а* показан основной вариант топологии на плоскости (111) мембраны. Резисторы с отрицательным приращением сопротивления (см. табл. 3.4) при действии давления на профилированную сторону мембраны располагаются радиально, например по направлению

3.4. Относительные сопротивления тензорезисторов

Относительные нормированные изменения сопротивления тензорезисторов	Кристаллографическая плоскость		
	(001)	(011)	(111)
		р-тип кремния	
$\frac{\delta_{r0}}{\pi_{44}\gamma}$	0	0,127(1 – cos2θ)	0,168
$\frac{\delta_{rR}}{\pi_{44}\gamma}$	–0,17(1 – cos4θ)	–0,164(2,15 – 1,157cos2θ – cos4θ)	–0,329
$\frac{\delta_{\tau 0}}{\pi_{44}\gamma}$	0	0,12(1 + cos2θ)	0,168
$\frac{\delta_{\tau R}}{\pi_{44}\gamma}$	–0,17(1 – cos4θ)	0,122(0,767 – 0,232cos2θ – cos4θ)	–0,007
		n-тип кремния	
$\frac{\delta_{r0}}{\pi_{11}\gamma}$	0	0,178(0,33 + cos2θ)	0
$\frac{\delta_{rR}}{\pi_{11}\gamma}$	–0,2(1,67 + cos4θ)	–0,15(1,38 + 1,84cos2θ + cos4θ)	–0,12
$\frac{\delta_{\tau 0}}{\pi_{11}\gamma}$	0	0,189(0,33 – cos2θ)	0
$\frac{\delta_{\tau R}}{\pi_{11}\gamma}$	0,2(1,67 + cos4θ)	0,152(0,609 + 0,511cos2θ + cos4θ)	0,12

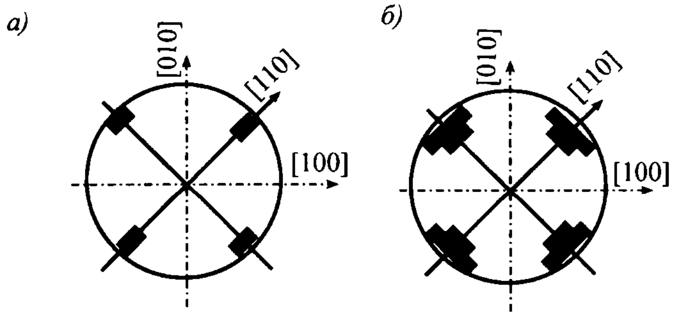


Рис. 3.23. Варианты топологии полных мостовых тензорезисторных схем на плоскости (001) р-типа:
а – одна распределенная по краю мостовая схема; *б* – одна или несколько сосредоточенных по краю полных мостовых схем

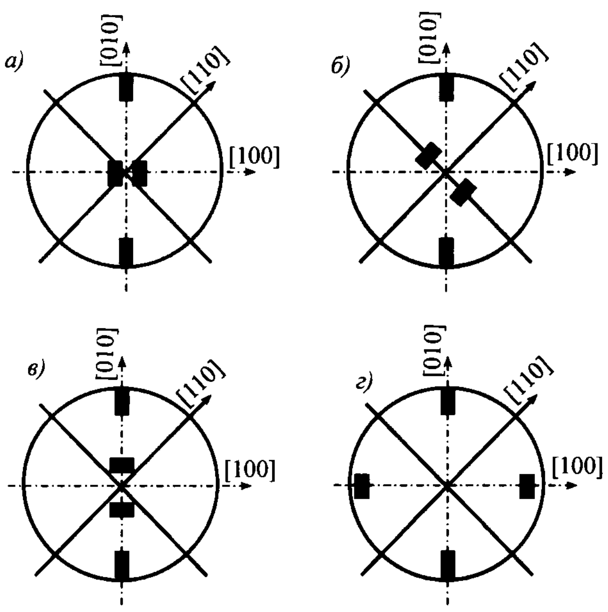


Рис. 3.24. Варианты топологии полных мостовых тензорезисторных схем на плоскости (001) *n*-типа:

а, б, в – с использованием направления [010] для резисторов на краю и направлений [010], [110], [100] для резисторов в центре; *г* – расположение тензорезисторов на краю

[100] по краю, а резисторы с положительным приращением – в центре с произвольной ориентацией на плоскости. Учитывая, что чувствительность резисторов, размещенных тангенциально, уменьшается медленнее при перемещении резисторов от центров мембраны к краю, предпочтительнее располагать резисторы в центральной части мембраны тангенциально.

На рис. 3.25, *б* резисторы в центре мембраны *n*-типа отсутствуют, так как относительные изменения их сопротивления равны нулю.

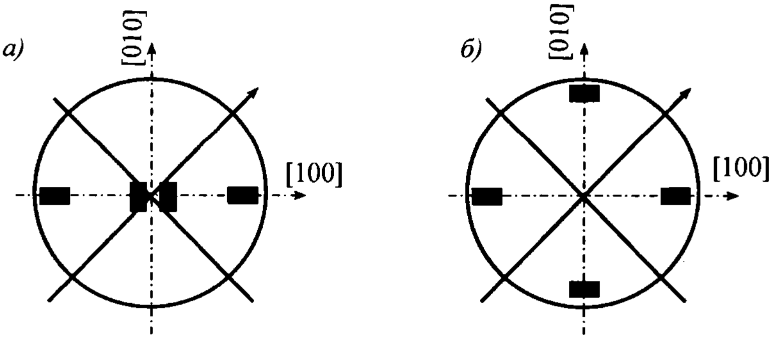


Рис. 3.25. Варианты топологии полных мостовых тензорезисторных схем на плоскости (111):

а – *р*-типа; *б* – *n*-типа

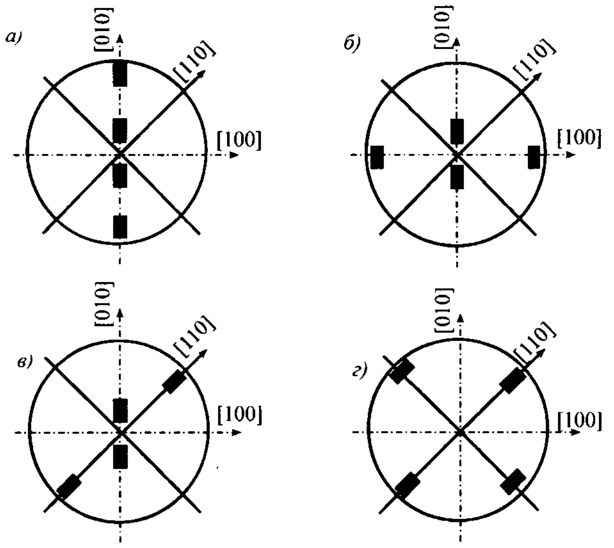


Рис. 3.26. Варианты топологии полных мостовых тензорезисторных схем на плоскости (011) *р*-типа:
а, *б*, *в* – тензорезисторы в центре и на краю мембраны;
г – радиальные и тангенциальные тензорезисторы на краю мембраны

На рис. 3.26 приведены четыре из многочисленных вариантов топологии тензорезисторов *р*-типа на плоскости (011).

На плоскости (001) в соответствии с табл. 3.4 может быть предложено наибольшее число вариантов размещения тензорезисторов как *р*-, так и *n*-типа. На рис. 3.27 даны четыре из возможных вариантов размещения тензорезисторов *n*-типа на плоскости (011).

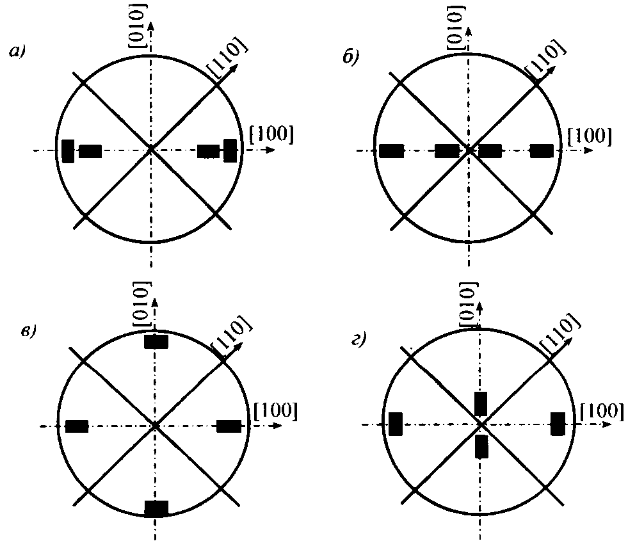


Рис. 3.27. Варианты топологии полных мостовых тензорезисторных схем на плоскости (011) *n*-типа:
а, *в* – тензорезисторы на краю мембраны; *б*, *г* – тензорезисторы в центре и на краю мембраны

3.5. К вычислению чувствительности мостовых схем

	Схема по рис.					
$S\frac{c_{\text{м}}^2}{U_0R^2}$	3.23	3.24	3.25, *а*	3.25, *б*	3.26, *а*	3.26, *б*
	$0{,}34\pi_{44}$	$0{,}534\pi_{11}$	$0{,}248\pi_{44}$	$0{,}12\pi_{11}$	$0{,}316\pi_{44}$	$0{,}155\pi_{44}$
	Схема по рис.					
	3.26, *в*	3.26, *г*	3.27, *а*	3.27, *б*	3.27, *в*	3.27 *г*
	$0{,}385\pi_{44}$	$0{,}365\pi_{11}$	$0{,}478\pi_{11}$	$0{,}435\pi_{11}$	$0{,}4\pi_{11}$	$0{,}22\pi_{11}$

Воспользуемся формулой (3.72), табл. 3.4 и определим чувствительность мостовых схем, приведенных на рис. 3.23–3.27.

В соответствии с расположением тензорезисторов на рис. 3.23, *а* имеем для радиальных тензорезисторов $\theta = 45°$ и для тангенциальных $\theta = 135°$. По табл. 3.4 для плоскости (001) *p*-типа находим $|\delta_{rR}| = |\delta_{\tau R}| = 0{,}34\pi_{44}\gamma$. Зная, что $\gamma = (pR^2)/c_{\text{м}}^2$, по формуле (3.72) получим $S = U_0(0{,}34\pi_{44}R^2)/c_{\text{м}}^2$.

На схемах 3.24, *а–в* на краю мембраны радиальные тензорезисторы ориентированы по направлению [010] ($\theta = 90°$), а для схемы 3.24, *г* ориентация тангенциальных резисторов определяется углом $\theta = 0$, а радиальных – углом $\theta = 90°$. Из табл. 3.4 получаем $|\delta_{rR}| = |\delta_{\tau\text{R}}| = 0{,}534\pi_{11}\gamma$, и, следовательно, чувствительность всех мостовых схем равна

$$S = U_0(0{,}534\pi_{11}R^2)/c_{\text{м}}^2.$$

Выполним аналогичные вычисления для схем, представленных на рис. 3.25–3.27, и все результаты поместим в табл. 3.5.

Следует иметь в виду, что расчетные зависимости в табл. 3.4 носят приближенный характер, поэтому и расчет чувствительностей тензорезисторных мостовых схем по приведенной методике носит оценочный характер.

Пример 3.11

Рассчитаем чувствительность тензорезисторных схем на плоскости (011) для исходных данных: $U_0 = 10$ В, $R = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $c_{\text{м}} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$м. Вычислим параметр $(U_0R^2)/c_{\text{м}}^2 = 25 \cdot 10^3$ В. Из табл. 2.5 выпишем значения пьезорезисторных коэффициентов для кремния *p*-типа $\pi_{44} = 138 \times \times 10^{-11}$ м^2/Н, для кремния *n*-типа $|\pi_{11}| = -102{,}2 \times \times 10^{-11}$ м^2/Н. Результаты вычислений поместим в таблицу, в которую вписаны также необходимые данные из табл. 3.5.

Параметр	*p*-тип; схема по рис.			
	3.26, *в*	3.26, *г*	3.26, *а*	3.26, *б*
$S\frac{c_{\text{м}}^2}{U_0R^2}$, м^2/Н	$0{,}385\pi_{44}$	$0{,}365\pi_{44}$	$0{,}316\pi_{44}$	$0{,}155\pi_{44}$
S, $1 \cdot 10^{-5}$ В/(Н/м^2)	3,452	3,272	2,833	1,289
Параметр	*n*-тип; схема по рис.			
	3.27, *а*	3.27, *б*	3.27, *в*	3.27, *г*
$S\frac{c_{\text{м}}^2}{U_0R^2}$, м^2/Н	$0{,}478\pi_{11}$	$0{,}435\pi_{11}$	$0{,}4\pi_{11}$	$0{,}22\pi_{11}$
S, $1 \cdot 10^{-5}$ В/(Н/м^2)	1,221	1,111	1,021	0,562

Передаточная функция ЧЭ МДД, состоящего из мембраны с мостовыми тензорезисторными схемами, в статическом режиме определяется его чувствительностью.

3.2.4. Преобразователи деформаций на поверхностно-акустических волнах и на струне

Разработка преобразователей на поверхностно-акустических волнах (ПАВ) и струнных преобразователей является перспективным направлением развития микромеханики.

Преобразователь на ПАВ (рис. 3.28) представляет собой слой или пленку с пьезоэлектрическими свойствами (пьезокварц, нитрид алюминия, оксид цинка и т.д.), нанесенные на тщательно подготовленную поверхность подложки, изготовленной из материала с малыми механическими потерями (кремний, стекло, керамика и т.д.). По температурному коэффициенту линейного расширения наилучшим образом согласуются кремниевая подложка и пленка из оксида цинка.

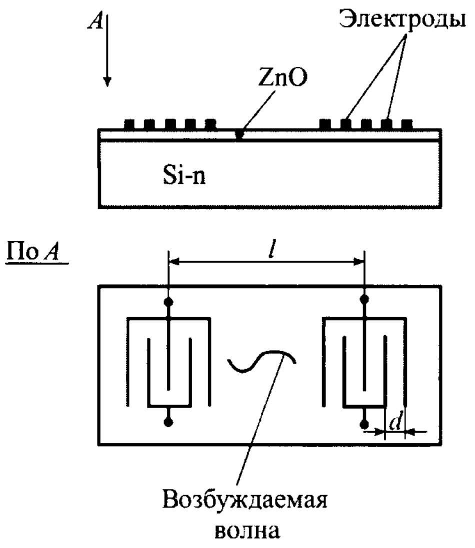


Рис. 3.28. Схемы преобразователя на ПАВ

Подложка может быть частью ЧЭ прибора, например датчика давления или акселерометра. С помощью встречно-штыревых электродов на поверхности пьезоэлектрической пленки возбуждаются электрические колебания. На концы пластины наносят металлические слои для устранения влияния отраженных от краев пластины волн. Шаг решетки выбирают равным длине возбуждаемой волны $d = \lambda$, а длину рабочего поля – кратной шагу решетки, т.е. $l = nd$.

Для возбуждения ПАВ используют прямой и обратный пьезоэффекты. Возбуждение ПАВ- структур осуществляется по методу автогенератора [13].

Амплитуда смещения в направлении нормали к поверхности пленки порядка $10^{-5}\,\lambda$.

Основной зависимостью при расчете преобразователя являются равенства

$$\mathrm{v} = \sqrt{E/\rho} = \omega/k\,, \qquad (3.79)$$

где ω – частота колебаний; k – волновое число, зависящее от продольной скорости волны; v – скорость распространения ПАВ; E, ρ – модуль упругости и плотность пьезослоя соответственно.

Оптимизация характеристики преобразователя достигается на частоте акустического синхронизма: $f_c = \mathrm{v}_c / d$, где v_c – скорость синхронизма.

Частота синхронизма с учетом выражения (3.79) определяется зависимостью

$$f_c = \sqrt{E/\rho}\,(1/d). \qquad (3.80)$$

Очевидно, при деформации подложки с пьезослоем изменяется размер d, а следовательно, и частота f_c. На основании формулы (3.80) можно заключить, что изменение частоты f_c линейно зависит от деформации ЧЭ прибора.

Струнный преобразователь (рис. 3.29) представляет собой упругую балку, изготовленную на основе кремния p-типа и эпитаксиальными слоями на базе крем-

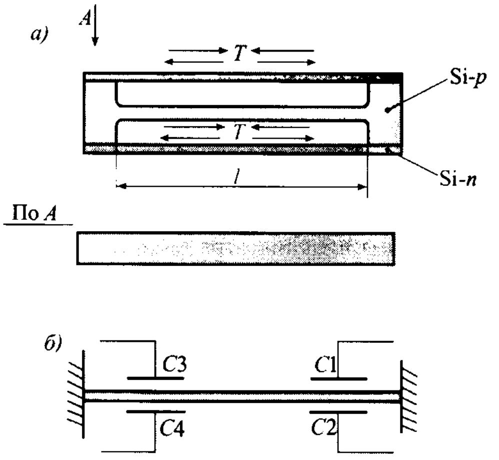


Рис. 3.29. Схема струнного преобразователя (*а*) и размещение струны в электростатических преобразователях (*б*)

ния *n*-типа. Струны имеют вид полосок, защемленных по краям. Упругая балка может быть частью ЧЭ, например маятника акселерометра. В недеформированном состоянии сила напряжения струны $T = T_0$ (const), а при изгибных колебаниях балки сила натяжения изменяется.

Струна, выполненная из проводящего материала, является подвижным электродом, размещенным между неподвижными электродами конденсаторов *C*1, *C*2. Автоколебания струн возбуждаются электростатическим генератором, который подает опорное напряжение поочередно на электроды конденсаторов *C*1 и *C*2. Управляется генератор по сигналам с преобразователя перемещений, включающего в свой состав электроды конденсаторов *C*3, *C*4.

Резонансные частоты основной формы колебаний определяются зависимостью

$$F = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T_0 + T}{\rho S}}, \qquad (3.81)$$

где *n* – номер гармоники; ρ – плотность материала струны; *S* – площадь поперечного сечения струны.

В соответствии с выражением (3.81) при деформировании упругого элемента и изменении натяжения струны изменяется резонансная частота ее колебаний. Обработка частотных сигналов выполняется известными аппаратными средствами [7].

3.3. ОБРАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ (АКТЮАТОРЫ)

3.3.1. Электростатические преобразователи

Потенциальная энергия заряда *Q*, накапливающаяся на конденсаторе емкостью *C*(*x*, *y*, *z*), к которому приложено напряжение *U*, определяется равенствами

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x,y,z)} = \frac{1}{2}U^2C(x,y,z), \qquad (3.82)$$

где *x*, *y*, *z* – координаты, определяющие взаимное положение пластин конденсатора.

Вычисляя частные производные от выражения (3.82) для потенциальной энергии, можно получить консервативные электростатические силы:

$$F_{\text{э}x} = -\frac{\delta W}{\delta x};\; F_{\text{э}y} = -\frac{\delta W}{\delta y};\; F_{\text{э}z} = -\frac{\delta W}{\delta z}. \qquad (3.83)$$

Предположим, что в соответствии с рис. 3.30 переменными, определяющими положение пластины, являются координаты *x*, *y*. В этом случае емкость между пластинами конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 c(a + \Delta x)}{\Delta y_0 + \Delta y}, \qquad (3.84)$$

где *c*, *a* – размеры, от которых зависит начальная площадь перекрытия пластин; Δ*x*, Δ*y* – малые перемещения в направлении соответствующих координат; Δy_0 – начальный зазор между пластинами.

Из формул (3.82) и (3.83) получим

$$F_{\text{э}x} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 c U^2}{2(\Delta y_0 + \Delta y)};\; F_{\text{э}z} = 0;$$

$$F_{\text{э}y} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 c(a + \Delta x)U^2}{2(\Delta y_0 + \Delta y)^2}. \qquad (3.85)$$

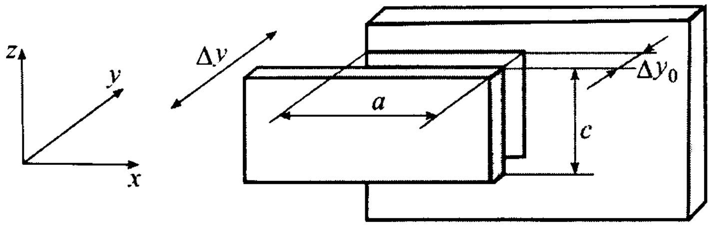


Рис. 3.30. К вычислению емкости конденсатора

Из равенств (3.85) следует, что для рассматриваемого варианта имеется составляющая электростатической силы вдоль оси x, которая не зависит от этой координаты. Составляющая вдоль оси z отсутствует, а составляющая вдоль оси y представляет собой нелинейную силу электростатического притяжения, которая критична к перемещениям по координатам x, y.

Проследим вначале формирование разностной электростатической силы в направлении координаты y, что имеет место, например, в акселерометрах или датчиках давления с электростатической обратной связью. В соответствии с рис. 3.16 обозначим $\Delta y_0 = h_0$, $\Delta y = \Delta h$ (рис. 3.31).

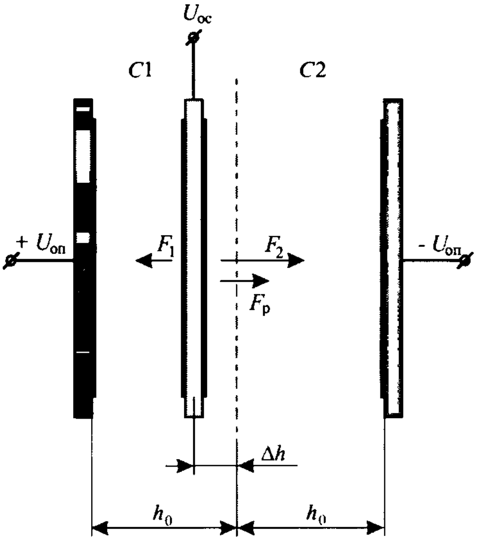


Рис. 3.31. К формированию разностной электростатической силы

К неподвижным пластинам (электродам) подведено опорное напряжение ($+U_{\text{оп}}$, $-U_{\text{оп}}$), а к подвижной пластине (ЧЭ акселерометра или мембрана датчика давления) – выходное напряжение измерительной цепи с обратным знаком, т.е. напряжение $U_{\text{ос}}$ отрицательной обратной связи. Таким образом формируется электростатическая результирующая сила, которая стремится вернуть подвижную пластину в нейтральное положение.

Пусть емкость $C1$ увеличивается, и при этом канал обратной связи формирует на нем напряжение $U_{\text{оп}} - U_{\text{ос}}$. Емкость конденсаторов $C2$ при этом уменьшается, а напряжение равно $-(U_{\text{оп}} - U_{\text{ос}})$. В соответствии с формулами (3.83), (3.84) ($\Delta x = 0$; $S = ca$), получим для конденсатора $C1$:

$$F_1 = -\frac{(U_{\text{оп}} - U_{\text{ос}})^2}{2}\frac{\delta}{\delta(\Delta h)}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h_0 - \Delta h} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S\,(U_{\text{оп}} - U_{\text{ос}})^2}{2(h_0 - \Delta h)^2}.$$

Для конденсатора $C2$ аналогично

$$F_2 = -\frac{(U_{\text{оп}} + U_{\text{ос}})^2}{2}\frac{\delta}{\delta(\Delta h)}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h_0 + \Delta h} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S\,(U_{\text{оп}} + U_{\text{ос}})^2}{2(h_0 + \Delta h)^2}.$$

Имея в виду, что $h_0 \geq \Delta h$, найдем разностную силу, действующую на подвижную пластину:

$$F_{\text{р}} = F_2 - F_1 \approx -2\varepsilon\varepsilon_0 S U_{\text{оп}} U_{\text{ос}} / h_0^2. \quad (3.86)$$

Так как $U_{\text{вых}} = -U_{\text{ос}}$, то передаточная функция канала обратной связи имеет вид, Н/В,

$$W_{\text{ос}} = F_{\text{р}} / U_{\text{вых}} = 2\varepsilon\varepsilon_0 S U_{\text{оп}} / h_0^2. \quad (3.87)$$

Формула (3.87) определяет также крутизну характеристики электростатического преобразователя (датчика) силы в цепи обратной связи. Температурная нестабильность работы датчика силы, так же, как и у электростатического преобразователя перемещений, зависит от нестабильности опорного напряжения и зазора между пластинами конденсаторов.

Рассмотрим теперь формирование электростатической силы в направлении оси x (см. рис. 3.30), что наблюдается в микродвигателях, применяемых в МГ для создания высокочастотных колебаний ИМ.

На рис. 3.32, *а* показана схема микродвигателя (см. подразд. 1.3.2), который состоит из двух статорных *1* и двух роторных *3* гребенчатых структур, которые являются статором и ротором микродвигателя. Элементы крепления *2*, *5* соединяют статор и ротор с опорной пластиной микроструктуры. Ротор на элементах *5* смонтирован на подвесе, состоящем из четырех пар упругих элементов (балок) *4*. К каждой половине микродвигателя подведено напряжение

$$U_1 = U_{\text{оп}} + U_x; \; U_2 = U_{\text{оп}} - U_x, \quad (3.88)$$

где $U_{\text{оп}}$ – опорное напряжение, U_x – переменное напряжение, обеспечивающее работу левой и правой половин микродвигателя.

На рис 3.32, *б* показан элемент структуры (один палец ротора и два пальца статора) с размерами, соответствующими рис. 3.30.

Имея в виду формулы (3.82)–(3.85) и рис. 3.30, запишем работу электростатических сил на возможных перемещениях ротора Δx в направлении оси x и Δy в направлении оси y для одной пары пальцев ротора и статора:

$$A = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{2}\left(\frac{1}{\Delta y_0 + \Delta y} + \frac{1}{\Delta y_0 - \Delta y}\right)\left(U_1^2 - U_2^2\right)\times$$
$$\times \Delta x - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ac}{2}\left[\frac{1}{(\Delta y_0 + \Delta y)^2} - \frac{1}{(\Delta y_0 - \Delta y)^2}\right]\times$$
$$\times\left(U_1^2 + U_2^2\right)\Delta y = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 c \Delta y_0}{\Delta y_0^2 - \Delta y^2}\left(U_1^2 - U_2^2\right)\Delta x +$$
$$+ \frac{2\varepsilon_0 ac \Delta y_0 \Delta y}{\left(\Delta y_0^2 - \Delta y^2\right)^2}\left(U_1^2 + U_2^2\right)\Delta y. \quad (3.89)$$

С учетом выражений (3.88) равенства (3.89) принимают вид

$$A = \frac{4\varepsilon\varepsilon_0 c \Delta y_0}{\Delta y_0^2 - \Delta y^2} U_{\text{оп}} U_x \Delta x + \frac{4\varepsilon\varepsilon_0 ac \Delta y_0 \Delta y}{\left(\Delta y_0^2 - \Delta y^2\right)^2}\times$$
$$\times\left(U_{\text{оп}}^2 + U_x^2\right). \quad (3.90)$$

Если величина Δy составляет единицы процентов от Δy_0, то выражение (3.90) упрощается:

$$A = 4\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{\Delta y_0} U_{\text{оп}} U_x \Delta x,$$

откуда следует выражение электростатической силы в направлении оси x:

$$F_{\text{э}x} = 4\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{\Delta y_0} U_{\text{оп}} U_x. \quad (3.91)$$

Поскольку каждый палец ротора находится между двумя пальцами статора, суммарная сила линейного микродвигателя, направленная в одну сторону (половина цикла работы), определяется формулой

$$F_{\Sigma\text{э}x} = n F_{\text{э}x}, \quad (3.92)$$

где n – суммарное (в обеих гребенчатых структурах) число пальцев ротора.

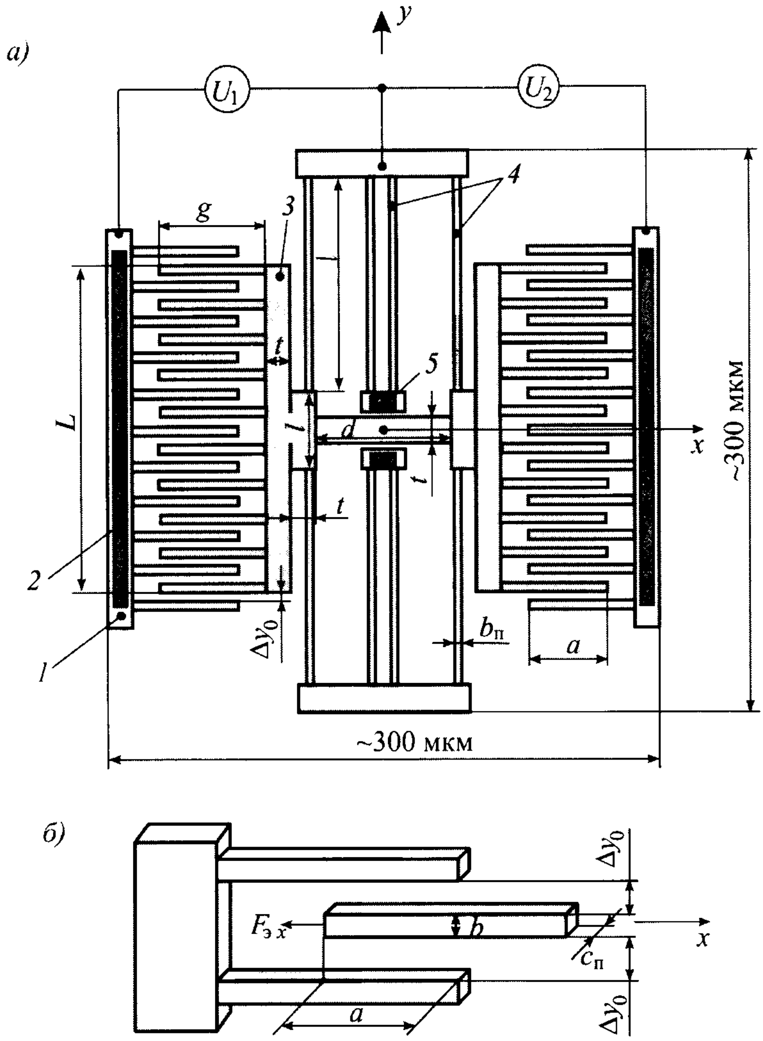


Рис. 3.32. Линейный микродвигатель:
а – принципиальная схема; *б* – элемент структуры; *1* – статор; *2*, *5* – элементы (точки) крепления; *3* – ротор; *4* – упругие элементы подвеса

Если размеры Δy_0 с обеих сторон пальца ротора одинаковы, то электростатические силы в направлении оси y уравновешиваются. В противном случае возможно поперечное движение ротора.

Коэффициент полезного действия (КПД) микродвигателя можно определить как отношение энергии выхода к энергии входа:

$$\eta = W_{\text{вых}} / W_{\text{вх}}. \qquad (3.93)$$

Энергия входа находятся по формуле

$$W_{\text{вх}} = nW, \qquad (3.94)$$

где W вычисляется по формуле (3.82).

Энергия выхода определяется следующим образом:

$$W_{\text{вых}} = \int\limits_0^{\Delta x} \left(nF_{\text{э}x} - G_\Sigma \Delta x\right) dx = \left(F_{\Sigma\text{э}x} - \frac{1}{2} G_\Sigma \Delta x\right)\Delta x, \qquad (3.95)$$

где $F_{\Sigma\text{э}x}$ рассчитывается по формуле (3.92); G_Σ – суммарная жесткость элементов подвеса.

Пример 3.12

Вычислим параметры линейного микродвигателя по рис. 3.32. Микроструктура вытравлена из поликремния, имеющего $E = 1{,}4 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 2300$ кг/м^3. Геометрические размеры по рис. 3.32: $c_\text{п} = 3{,}5$ мкм (толщина всей микроструктуры), $b = 4{,}0$ мкм (ширина пальца ротора, также и у статора), $a = 20$ мкм (взаимное перекрытие пластин конденсаторов), $\Delta y_0 = 2{,}0$ мкм (зазор между пальцами гребенчатых структур), $g = 30$ мкм (длина пальца ротора, также и статора), $L = 112$ мкм (длина ротора), $l = 120$ мкм (длина упругого элемента), $b_\text{п} = 2{,}0$ мкм (ширина упругого элемента), $d = 30$ мкм, $l = 24$ мкм, $t = 12$ мкм (размеры соединительных элементов).

Примем модули напряжений: $U_\text{оп} = U_x = 30$ В. Число пальцев ротора $n = 20$ шт.

Вычисления выполним в следующей очередности:

1. Масса подвижных элементов

$$m = \rho c(2Lt + 2et + dt + 20bg) = 2300 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-6}(2 \cdot 112 \cdot 12 + 2 \cdot 24 \cdot 12 + 30 \cdot 12 + 20 \cdot 4 \cdot 30)10^{-12} = 4{,}85 \cdot 10^{-11} \text{ кг.}$$

2. Полагая, что один конец упругого элемента защемлен, а другой свободно оперт и, имея в виду, что в подвесе восемь элементов, которые работают параллельно, суммарная жесткость подвеса равна

$$G_\Sigma = 8\frac{Ec_\text{п}b_\text{п}^3}{4l^3} = \frac{8 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-6}\left(2 \cdot 10^{-6}\right)^3}{4\left(120 \cdot 10^{-6}\right)^3} = 4{,}54 \text{ Н/м.}$$

3. Частота собственных, недемпфированных колебаний

$$\omega = \sqrt{G_\Sigma / m} = \sqrt{4{,}54 / 4{,}85 \cdot 10^{-11}} = 305\,954 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 48{,}72 \text{ кГц.}$$

4. Суммарная электростатическая сила (за половину цикла):

$$F_{\Sigma\,\text{э}x} = 20 \cdot 4\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{\Delta y_0}U_\text{оп}U_x = 20 \cdot 4\frac{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 30}{2 \cdot 10^{-6}} = . = 1{,}12 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

5. Максимальное перемещение ротора

$$\Delta x = F_{\Sigma\text{э}\,x} / G_\Sigma = \frac{1{,}12 \cdot 10^{-6}}{4{,}54} = 0{,}25 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0{,}25 \text{ мкм.}$$

6. Энергия входа

$$W_\text{вх} = nU_\text{оп}U_xC = \frac{20 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 5{,}57 \cdot 10^{-12} \text{ Дж/такт.}$$

7. Энергия выхода

$$W_\text{вых} = \left(F_{\Sigma\text{э}\,x} - \frac{1}{2}G_\Sigma\Delta x\right)\Delta x = \left(1{,}12 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2}4{,}54 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6}\right)0{,}25 \cdot 10^{-6} = 0{,}138 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{м/такт.}$$

8. КПД $\eta = \frac{0{,}138}{5{,}57}100 = 2{,}5\,\%$.

Предположим, что перемычки соединяют наружные концы упругих элементов попарно, что каждая пара упругих элементов соединена последовательно и что таких пар, работающих параллельно, 4 шт.

Значит, суммарная жесткость упругого подвеса $G_\Sigma = 2G_1 = 1{,}135$ Н/м (G_1 – жесткость одного упругого элемента); $\omega = 24{,}36$ кГц; $\Delta x = \frac{1{,}26 \cdot 10^{-6}}{11{,}35} = 0{,}99$ мкм; $W_\text{вых} = 0{,}552 \times 10^{-12}$ Н·м/такт и КПД $\eta = 10\,\%$.

Обобщим результаты, полученные для линейного микродвигателя, на случай микродвигателя для создания колебательного вращательного движения.

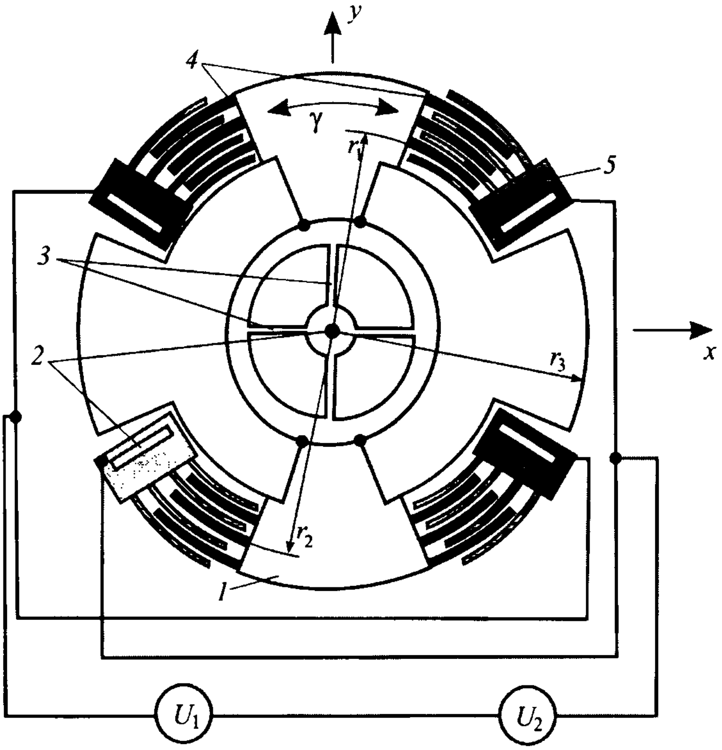


Рис. 3.33. Принципиальная схема микродвигателя вращения:
1 – ИМ; *2* – элементы крепления к подложке ИМ и статорных структур;
3 – упругие элементы подвеса; *4*, *5* – роторные и статорные гребенчатые микроструктуры

На рис. 3.33 приведена принципиальная схема одного из возможных вариантов МГ, который представляет собой ИМ (ротор) *1*, имеющую с элементом крепления (анкер) *2* к подложке упругую связь в виде упругих элементов *3*. ИМ содержит два сектора с гребенчатыми структурами, в которых по аналогии с рис. 3.32 имеются роторные *4* и статорные *5* структуры. Эти структуры работают попарно и создают колебательный электростатический момент по координате γ.

Вращательный момент (в одну сторону) микродвигателя при условии, что площади взаимного перекрытия пальцев гребенчатых структур одинаковы (как и в линейном микродвигателе), может вычисляться по формуле

$$M_{\Sigma э\gamma} = 2F_э N \sum_{i=1}^{n_i} r_i , \qquad (3.96)$$

где $F_э$ определяется по формуле (3.91);
n_i – число пальцев ротора в одной гребенчатой структуре; N – число секторов с гребенчатыми структурами; r_i – радиус i-го пальца ротора.

Для микродвигателя на рис. 3.33 имеем $n_1 = 3$, $N = 2$ и по формуле (3.96)

$$M_{\Sigma э\gamma} = 4F_э(r_1 + r_2 + r_3) .$$

Пример 3.13

Рассчитаем параметры микродвигателя вращения ЧЭ МГ (рис. 3.34). Исходные данные: материал – кремний в плоскости (110), имеющий $E_{(110)} = 1{,}68 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 2300$ кг/м³;

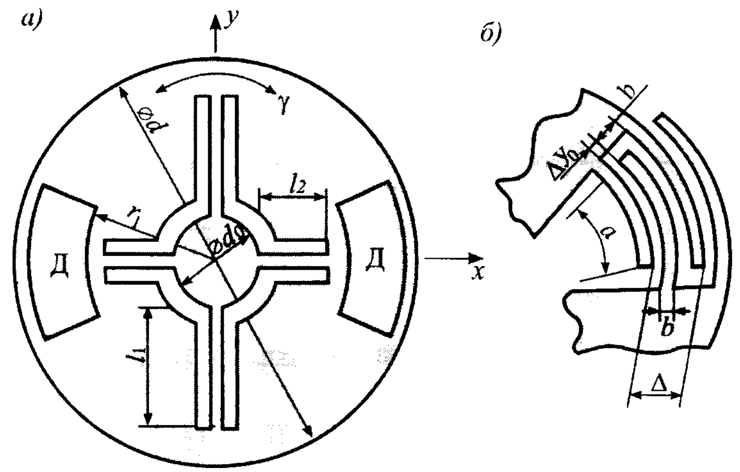


Рис. 3.34. К примеру расчета:
а – схема ЧЭ МГ; *б* – фрагмент гребенчатой структуры;
Д – места для гребенчатых структур микродвигателя

толщина кремниевой пластины (всех вытравленных микроструктур) $c_п = 20 \cdot 10^{-6}$ м; $d_0 = 0{,}55 \cdot 10^{-3}$ м (диаметр основания – анкера, анодно присоединяемого к стеклянной подложке); $d = 3 \cdot 10^{-3}$ м (диаметр ротора); $l_1 = 0{,}7 \times 10^{-3}$ м, $l_2 = 0{,}35 \cdot 10^{-3}$ м (длины упругих элементов подвеса); $b = 8 \cdot 10^{-6}$ м (ширина зубцов гребенчатых структур); $\Delta y_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м (зазор между зубцами).

Частота собственных колебаний ротора по координате γ равна $\omega_{\gamma 0} = 3000$ Гц $= 18{,}84 \times 10^3$ рад/с; параметры питания (по схеме на рис. 3.33) $U_{оп} = U_x = 5$В.

Вычисления выполним в следующей очередности:

1. Осевой момент инерции ротора $J_\gamma = 2{,}85 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2.

2. На основании формулы $\omega_{\gamma 0} = \sqrt{G_{\Sigma\gamma} / J_\gamma}$ вычислим суммарную жесткость элементов упругого подвеса:

$$G_{\Sigma\gamma} = J_\gamma \omega_{\gamma 0}^2 = 2{,}85 \cdot 10^{-3} \left(18{,}84 \cdot 10^3\right)^2 = 10^{-4} \text{ Н·м}.$$

3. Определим при заданных значениях l_1, l_2, $c_п$ (длины и толщина) ширину $b_п$ упругих элементов подвеса, обеспечивающих требуемую жесткость. Жесткость одного упругого элемента (балки) на изгиб определяется формулой $G_{\Sigma\gamma} = \dfrac{E_{(110)} c_п b_п^3}{6l}$ в предположении, что внутренний конец балки жестко защемлен на анкере, а наружный свободно перемещается. Имея в виду, что все балки работают параллельно и $l_1 = 2l_2$, получаем:

$$G_{\Sigma\gamma} = 2\frac{E_{(110)} c_п b_п^3}{6l_1} + 2\frac{E_{(110)} c_п b_п^3}{6l_2} = \frac{E_{(110)} c_п b_п^3}{l_1},$$

откуда требуемая ширина упругого элемента

$$b_п = \sqrt[3]{\frac{G_{\Sigma\gamma} l_1}{E_{(110)} c_п}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-4} \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-3}}{1{,}68 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = \\ = 27{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

4. Вычислим число зубцов ротора, которое можно разместить на длине $\Delta r = \dfrac{d}{2} - r_1$. Примем $r_1 = \dfrac{d_0}{2} + l_2 = (0{,}275 + 0{,}35)10^{-3} = 0{,}625 \cdot 10^{-3}$ м и получим $\Delta r = (1{,}5 - 0{,}625) \times 10^{-3} = 0{,}875 \cdot 10^{-3}$ м. Найдем $\Delta = 2(b + \Delta y_0) = 2(8 + 2)10^{-6} = 2 \cdot 10^{-5}$ м и определим $n = \Delta r / \Delta = 0{,}875 \cdot 10^{-3} / (2 \cdot 10^{-5}) = 43{,}75$. Для расчета условимся, что каждая гребенчатая структура имеет $n = 40$.

5. Рассчитаем момент микродвигателя. Сила, развиваемая одним зубцом ротора, определяется по формуле (3.91):

$$F_э = 4\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{\Delta y_0}U_{оп}U_x =$$

$$= 4\frac{1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-5}\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 10^{-6}} = 8{,}85\cdot 10^{-9}\ \text{Н}.$$

Нетрудно показать, что сумма всех радиусов гребенчатой структуры одного сегмента микродвигателя находится следующим образом:

$$\Sigma r_i = \frac{d}{2}(1+n) - \Delta\sum_{i=1}^{n} n = 1{,}5\cdot 10^{-3}(1+40) -$$

$$-2\cdot 10^{-5}(1+2+\ldots+40) = 45{,}1\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

По формуле (3.96) рассчитаем момент микродвигателя

$$M_{\Sigma э\gamma} = 4F_э\Sigma r_i = 4\cdot 8{,}85\cdot 10^{-9}\cdot 45{,}1\cdot 10^{-3} =$$

$$= 1{,}6\cdot 10^{-9}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

6. Определим угол поворота ротора в статическом режиме:

$$\gamma_0 = \frac{M_{\Sigma э\gamma}}{G_{\Sigma\gamma}} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-9}}{10^{-4}} = 1{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{рад} =$$

$$= 5{,}5\cdot 10^{-2}\,{}'.$$

Для МГ обычно требуется амплитуда колебаний $\gamma_0 \approx 1°$ на частоте $\omega_{\gamma 0} = 3000$ Гц. Требуемое значение амплитуды колебаний ротора можно обеспечить только в резонансном режиме работы, при котором частота генератора, обеспечивающего колебательный режим, отличается от частоты $\omega_{\gamma 0}$ на ~10 %. При этом амплитуда резонансных колебаний $\gamma_{0р} = \gamma_0 Q_\gamma$ (Q_γ – добротность по демпфированию). При $Q_\gamma = 10^3$ можно получить требуемую амплитуду колебаний ротора $\gamma_{0р} = 5{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 10^3 = 55'$.

Для электростатических линейных и микродвигателей вращения критичны поверхностные дефекты и частицы пыли, а также малые вертикальные размеры, так как трудно обеспечить требуемое изменение емкости.

3.3.2. Магнитоэлектрические преобразователи

На рис. 3.35, *а* приведена схема магнитоэлектрического преобразователя (датчика) силы на примере маятникового компенсационного акселерометра серии АТ [6, 22]. Магнитная система образована однородным магнитным слоем *5* с наконечником *4* и магнитопроводом *2*. В зазоре *6* замкнутого магнитопровода размещена возвращающая (силовая) обмотка *3*, выполненная электроосаждением на кремниевом маятнике *1*. Магнитная система изготовлена посредством высокотемпературного напыления на подложку магнитного материала в виде нескольких слоев и промежуточных размерных травлений для придания системе объемного микрорельефа.

Одним из лучших материалов для напыления магнитных слоев является состав Al–Ni–Co–800, а для встраиваемых дискретных магнитов – кобальт-самариевые сплавы с добавками из редкоземельных материалов.

Возвращающая обмотка может быть изготовлена следующими технологическими способами: вакуумным напылением нескольких слоев с изоляцией между ними, эпитаксиальным выращиванием чередующихся *p*- и *n*-слоев или методом многократных диффузий с различной примесью различной проводимости. Способ выполнения обмотки показан на рис. 3.35, *б*, *в*.

Слой *n* служит проводящей обмоткой, а слой *p* является изолирующим. Межвитковое соединение осуществлено посредством двух диффузий различной проводимости (позиция *9* на рис. 3.35, *б*). Питание обмотка получает через контактные площадки *7* и дорожку *8*.

Число витков при любом способе изготовления обмотки ограничено технологическими возможностями (<< 10). Однако для большинства случаев применения этого оказывается вполне достаточно.

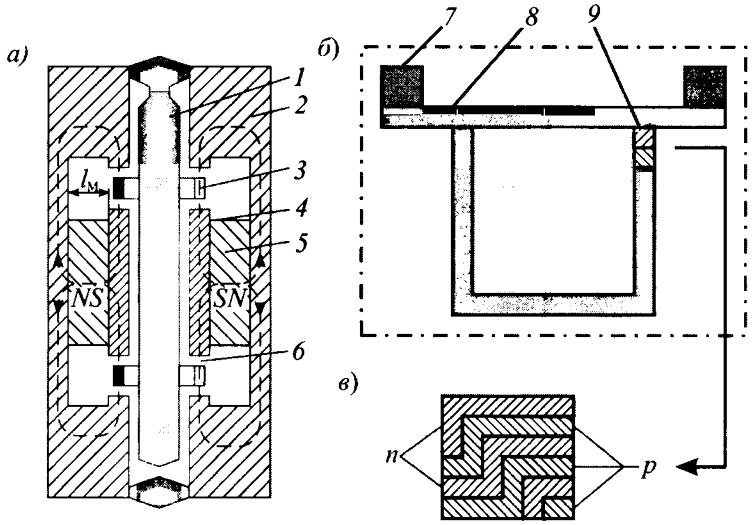


Рис. 3.35. Схема магнитоэлектрического датчика силы (*а*); возвращающая обмотка (*б*); увеличенный фрагмент соединения слоев (*в*): *1* – кремниевый подвижный элемент; *2* – магнитопровод; *3* – возвращающая обмотка; *4* – полюсный слой в магнитопроводе (наконечник); *5* – однородный магнитный слой (или дискретный магнит); *6* – кольцевой зазор; *7* – контактная площадка; *8* – диффузионная дорожка возвращающей обмотки; *9* – площадки межвитковых соединений

Величина развиваемой магнитоэлектрической силы определяется известной зависимостью

$$F_{мэ} = B_з nlU/(R_L + R_н), \qquad (3.97)$$

где $B_з$ – магнитная индукция в зазоре; n – число витков; l – длина одного витка; U – напряжение, приложенное к обмотке (является одновременно информационной выходной величиной); $R_н$ – сопротивление нагрузки; R_L – сопротивление обмотки.

Основная проблема в разработке магнитоэлектрического датчика – установление зависимости между размерами основного и шунтирующего слоев магнитного материала и температурными коэффициентами магнитной индукции этих слоев. В предположении, что при последовательном соединении магнитных слоев в замкнутой системе напряженность магнитного поля в слоях одинакова, можно записать равенство

$$B_з^2 V_з = \mu_з \sigma H_м B_м V_м\,, \quad (B_з V_з = B_ш V_ш), \qquad (3.98)$$

где $B_з$, $V_з$; $B_м$, $V_м$; $B_ш$, $V_ш$ – соответственно магнитная индукция и объем для зазора, магнитного слоя и шунта; $\mu_з$ – относительная магнитная проницаемость зазора; $H_м$ – напряженность поля в магнитном слое; σ – коэффициент рассеяния (при оптимизации конструкции $\sigma \approx 1$).

Значение $V_з$ зависит от средней площади и длины рабочего зазора. Средняя площадь рабочего зазора определяется исходя из требований свободного перемещения обмотки, а длина зазора – возможностью создания постоянства индукции. В целях обеспечения линейности магнитоэлектрического преобразователя длина участка с постоянной индукцией выбирается обычно на порядок больше максимально возможного перемещения обмотки.

Магнитный материал характеризуется произведением $B_м H_м$. В свою очередь, численная величина этого произведения, а также температурный коэффициент магнитной индукции зависят от соотношения ингредиентов. Поэтому для определения величины магнитной индукции в зазоре при разработке датчиков необходимо знать истинное значение остаточной индукции, коэрцитивную силу, а также температурный коэффициент материала, применяемого для напыления магнитного слоя. Нужно экспериментально измерить или указать в качестве требований к магнитным материалам расчетные значения этих величин, по которым при серийном производстве будут приготовлены материалы с соответствующими характеристиками.

Для встраиваемых в магнитопровод дискретных магнитов предварительные расчеты удобно осуществлять с использованием кривой размагничивания, характеризующей конкретный материал (рис. 3.36).

Кривая размагничивания представляет собой ветвь петли гистерезиса, расположенную во втором квадранте относительно *B* и *H*. Для любого магнитного материала на кривой размагничивания имеется характерная точка с максимальным значением произведения *BH* (точка *a*). Для сплава Al – Ni – Co-800 максимальное значение $(BH)_{\max} = 8{,}7 \cdot 10^4$ (Тл·А)/м. Рабочая точка определяется на пересечении кривой размагничивания с прямой проводимости. Угол наклона прямой проводимости вычисляется по формуле, (Тл·м)/А,

$$tg\alpha = \frac{l_м}{S_м} \Sigma G_i ,$$

где $l_м$, $S_м$ – длина и площадь поперечного сечения магнита (однородного магнитного слоя); G_i – проводимость *i*-го участка магнитной системы.

Нетрудно показать, что основная доля сопротивления прохождению магнитного потока приходится на воздушные зазоры, в которых располагаются возвращающие обмотки.

При выборе рабочей точки вблизи экстремального значения магнитная система обладает минимальным объемом, что

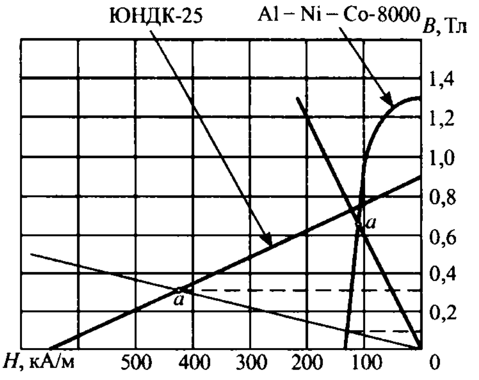


Рис. 3.36. Кривые размагничивания

является важной характеристикой при микроисполнении. Для сравнения на рис. 3.36 приведена кривая размагничивания для сплава ЮНДК-25, откуда видно, что для материала с присадками из редкоземельных металлов коэрцитивная сила превосходит обычный магнитный материал, чем обосновывается его выбор. Однако определяющим при проектировании является не минимальный размер магнитной системы, а минимальная погрешность преобразователя.

Магнитную индукцию в зазоре возможно сделать независимой от изменений температуры посредством подбора соответствующих температурных коэффициентов основного и шунтирующего слоев, а также их объемов.

Примером использования магнитоэлектрического преобразователя силы в МГ является гироскоп с кольцевым резонатором [22], принципиальная схема ЧЭ которого показана на рис. 3.37, *а*.

Чип ЧЭ выполнен на кремниевой пластине *3* (размером 10×10 мм), на которой размещен кольцевой резонатор (кольцо) диаметром 6 мм и сечением 120×100 мкм. Резонатор с помощью восьми упругих элементов *2* подвеса сечением 60×100 мкм соединен с пластиной. Чип изготовлен методом плазменного изотропного травления. Токопроводящие проводники нанесены только на верхнюю поверхность, а контактные площадки *4* для соединения

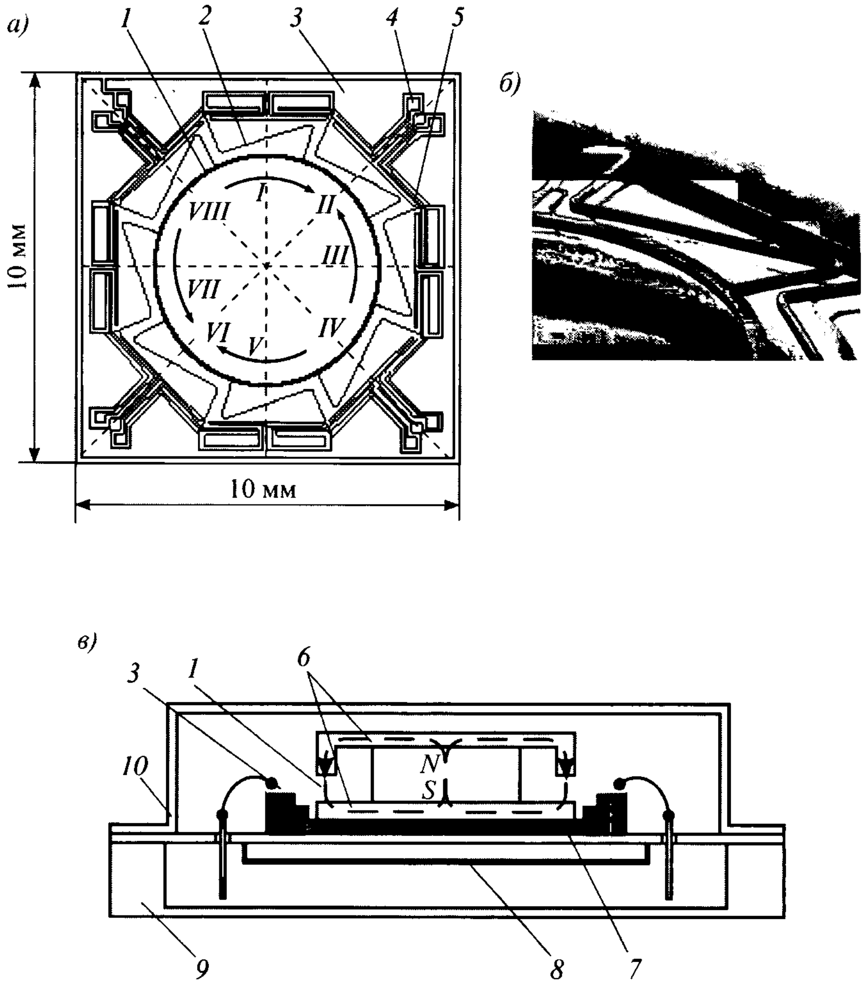


Рис. 3.37. Магнитоэлектрический преобразователь силы кольцевого резонатора: *а* – принципиальная схема ЧЭ МГ; *б* – фрагмент конструкции кольцевого резонатора; *в* – принципиальная схема магнитоэлектрического преобразователя силы; *1* – кольцевой резонатор; *2* – упругий элемент подвеса; *3* – кремниевая пластина; *4* – контактная площадка; *5* – проводник; *6* – верхний и нижний полюсные наконечники; *7* – стеклянная подложка; *8* – плата с электроникой; *9* – корпус; *10* – крышка

с проводниками размещены на пластине.

Имеется восемь идентичных проводящих контуров, каждый из которых образует цепочку: контактная площадка – упругий элемент подвеса – 1/8 длины кольца – упругий элемент подвеса – контактная площадка. Таким образом, каждый упругий элемент содержит два проводника, по одному от каждого смежного контура, в дополнение к третьему проводнику *5*, который находится между ними, чтобы минимизировать емкостную связь. Кремниевая пластина имеет связь, обеспечивающую "земляной" слой.

Фрагмент конструкции кольца с упругим элементом подвеса и частью кремниевой пластины показан на рис. 3.37, *б*, где хорошо просматриваются соотношения между размером кольца и элементами его подвеса.

Кремниевая пластина *3* анодно соединена со стеклянной подложкой *7* (рис. 3.37, *в*). Они температурно согласованы между собой. На подложке расположена также магнитная система, включающая в себя кобальт-самариевый магнит (N–S) и магнитопровод из двух полюсных наконечников *6*, в зазоре между которыми находится кольцевой резонатор *1*. Сервисная электроника находится на ситалловой плате *8*. Вся конструкция собрана в герметичном коваровом корпусе *9* с крышкой *10*.

Магнитоэлектрический преобразователь совместно с электроникой обеспечивает эллиптическую моду колебаний кольца на частоте его механического резонанса [9].

Деформации кольца за один период колебаний создаются следующим образом. В первый полупериод направление токов в секторах *I* и *V* (показаны стрелками) во взаимодействии с магнитным потоком создают (по правилу левой руки) растягивающие силы, а в секторах *III* и *VII* – сжимающие силы. Во втором полупериоде характер сил меняется на противоположный. Каждая пара проводящих секторов кольца создает силу:

$$F_{\text{м}} = \frac{\pi r B U_{\text{пр}}}{4R_{\text{н}}}, \tag{3.99}$$

где r – радиус кольца; B – магнитная индукция в зазоре между полюсными наконечниками магнитной системы; $U_{\text{пр}}$ – напряжение, приложенное к проводящему сектору кольца; $R_{\text{н}}$ – значение нагрузочного резистора, включенного последовательно с проводящим сектором кольца.

Заметим, что проводящие сектора *VI* и *VIII* кольца, вибрирующего на частоте ω под действием преобразователя силы, играют роль якоря индукционного преобразователя перемещений. При этом выделяется напряжение

$$U_{\text{вых}} = \frac{\pi r B \omega \delta}{4}, \tag{3.100}$$

где δ – виброперемещение кольца.

Сектора *II* и *IV* используются в контуре силовой обратной связи для устранения деформаций смещения. Измерительные и компенсационные сектора в каждом полупериоде меняются ролями [14].

Частоты собственных колебаний в плоскости кольца и максимальная деформация кольца под действием сил, формируемых четырьмя проводящими секторами кольца, определяются формулами [24]

$$\omega_i = \frac{i\left(i^2-1\right)}{\sqrt{1+i^2}}\sqrt{\frac{EI}{\rho F r^4}};\;\; \delta = 0{,}149\frac{F_{\text{м}} r^3}{EI}, \tag{3.101}$$

где i – целое число, характеризующее форму колебаний (основной частоте соответствует i = 2); E – модуль упругости материала в соответствующем кристаллографическом направлении; I, F – момент инерции и площадь поперечного сечения кольца.

Пример 3.14

Вычислим параметры МГ. Исходные данные: материал (кремний) имеет ρ = = 2328 кг/м^3, $E_{[100]}$ = 1,295 · 10^{11} Н/м^2; размеры кольца: r = 3 · 10^{-3} м (радиус); $b_{\text{к}}$ = 12 · 10^{-5} м (ширина), $c_{\text{к}}$ = 10^{-4} м (толщина); $U_{\text{пр}}$ = 5 В, $R_{\text{н}}$ = 100 Ом, B = 0,3 Вб/м^2.

По формуле (3.99) определим силу, создаваемую в направлениях растяжения и сжатия:

$$F_{\text{м}} = \frac{3{,}14\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}3\cdot 5}{4\cdot 100} = 3{,}53\cdot 10^{-5}\ \text{Н}.$$

Найдем

$$I = \left(c_{\text{к}} b_{\text{к}}^3\right)/12 = \frac{10^{-4}\cdot 12^3\cdot 10^{-15}}{12} = $$
$$= 144\cdot 10^{-19}\ \text{м}^4.$$

Положим i = 2 и получим

$$\omega_2 = 2{,}68\sqrt{\frac{E_{[100]} c_{\text{к}} b_{\text{к}}^3}{12\rho c_{\text{к}} b_{\text{к}} r^4}} = 2{,}68\sqrt{\frac{E_{[100]} b_{\text{к}}^2}{12\rho r^4}} =$$
$$= 2{,}68\sqrt{\frac{1{,}295\cdot 10^{11}\left(12\cdot 10^{-5}\right)^2}{12\cdot 2328\left(3\cdot 10^{-3}\right)^4}} =$$
$$= 7{,}69\cdot 10^4\ \text{рад/с} = 1{,}225\cdot 10^4\ \text{Гц}.$$

Заметим, что при такой высокой собственной частоте внешние вибрационные возмущения, как правило на меньших частотах, можно не учитывать.

Вычислим максимальную деформацию кольца:

$$\delta = 0{,}149\frac{3{,}53\cdot 10^{-5}\left(3\cdot 10^{-3}\right)^3}{1{,}295\cdot 10^{11}\cdot 144\cdot 10^{-19}} =$$

$$= 7{,}6\cdot 10^{-8}\ \text{м} = 7{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{мкм}.$$

Максимальной деформации кольца на собственной частоте соответствует выходное напряжение

$$U_{\text{вых}} = \frac{3{,}14\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}3\cdot 7{,}69\cdot 10^{4}\cdot 7{,}6\cdot 10^{-8}}{4} =$$

$$= 41{,}29\cdot 10^{7}\ \text{В}.$$

Достоинством рассмотренной конструкции является работа (вибрация) кольцевого резонатора в одной плоскости, так что вся обработка кремния планарная. Кроме того, в данной конструкции отсутствует проблема залипания, так как между кольцом и остальными элементами достаточно большие расстояния.

3.3.3. Электромагнитные преобразователи

Известно, что два параллельных и достаточно длинных проводника (в микромеханике – по сравнению с расстоянием между проводниками) с током взаимодействуют друг с другом так, что если токи имеют одинаковое направление, то они притягиваются, а если противоположное, то отталкиваются. Математическое выражение этого закона (Ампера) имеет вид

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\delta} l, \qquad (3.102)$$

где μ – относительная магнитная проницаемость материала, находящегося между проводниками; μ_0 = 1,257 · 10^{-5} Гн/м – магнитная постоянная; I_1, I_2 – силы тока в проводниках; l – длина проводника; δ – зазор между проводниками.

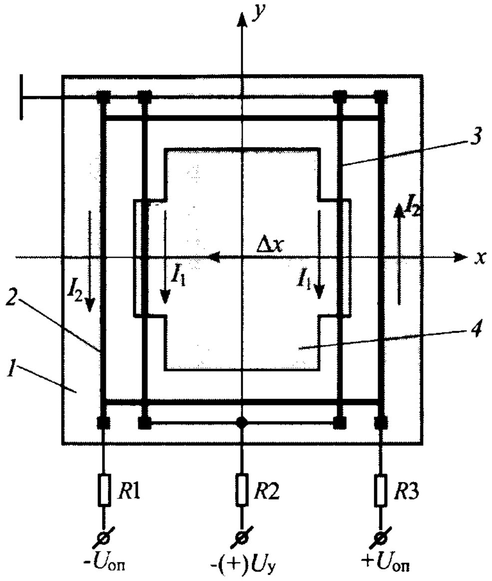


Рис. 3.38. Принципиальная схема электромагнитного преобразователя силы: *1* – корпусная пластина; *2*, *3* – неподвижная и подвижная электропроводящие дорожки; *4* – ИМ

На рис. 3.38 приведена принципиальная схема преобразователя [6], в котором может быть реализован закон (3.102) формирования электромагнитной силы. В корпусной кремниевой пластине *1* сформирована ИМ *4* на упругих подвесах с проводящими дорожками *3*. Неподвижные проводящие дорожки *2* нанесены на пластине *1*. В дифференциальной схеме включения опорное напряжение $U_{\text{оп}}$ может быть достаточно большим, так как дорожки *2* могут иметь значительное поперечное сечение. Управляющее напряжение $U_{\text{у}}$ ограничено током, который могут пропустить подвижные дорожки (проводники).

При периодическом изменении знака управляющего напряжения можно получить колебательное движение ИМ вдоль оси *x*, как это происходит в МГ.

На рис. 3.39 показана схема формирования электромагнитной силы в направлении оси *Y*, характерной для акселерометров. Подвижный проводник *1* размещен на кремниевой пластине ИМ, а

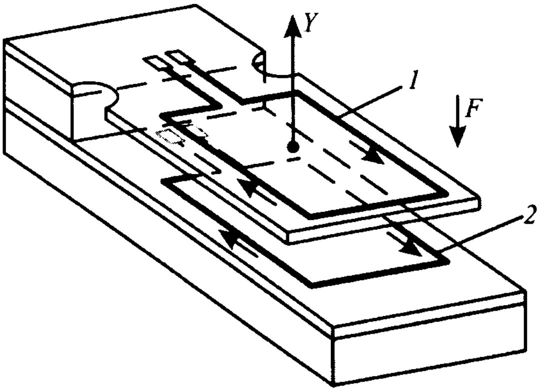


Рис. 3.39. Принципиальная схема электромагнитного преобразователя силы

неподвижный проводник *2* – на стеклянном основании. Ветви проводников с током должны располагаться параллельно друг другу. Если проводники образуют квадрат в плане со стороной $l \gg \delta$, то в соответствии с выражением (3.102) получим

$$F = \frac{2\mu\mu_0 I_1 I_2}{\pi\delta} l. \qquad (3.103)$$

В соответствии с рис. 3.38 имеем $I_1 = U_y / (r + R_2)$, где r – внутреннее сопротивление проводника. Если $R_1 = R_2 = R_3 = R_н$, формула (3.103) преобразуется к виду

$$F = \frac{4\mu_0\mu U_y U_{оп} l}{\pi\delta (r + R_н)^2}. \qquad (3.104)$$

Увеличение силы F может быть достигнуто путем создания спиралеобразной обмотки, которая в случае акселерометра может располагаться на непроводящем маятнике с двух сторон. Спирали соединяются параллельно. На неподвижных крышках с двух сторон маятника размещаются неподвижные спиралевидные обмотки со взаимно параллельными сторонами.

Как отмечалось, в некоторых технологиях изготовления микроустройств (особенно характерно для LIGA-технологии) используются приемы гальванотехники, т.е. возможна работа с металлами, такими, например, как никель, который является ферромагнитным материалом. Участок с ферромагнитным покрытием, помещенный в магнитное поле, генерирует механическую силу. Если в преобразователе магнитное поле создается электромагнитом, то его можно отнести к электромагнитным. Схема подобного преобразователя приведена на рис. 3.40, *а* [22].

Корпусная подвижная пластина (ИМ) и упругие элементы подвеса (опорные балки) могут быть изготовлены из поликристаллического кремния. На подвижную пластину нанесен пермаллоевый материал с размерами $a \times b \times h$.

При приложении внешнего подмагничивания пермаллоевый материал рассматривается как материал, имеющий постоянный плоскопараллельный вектор намагничивания с величиной, равной намагничиванию насыщения $I_н$ (рис. 3.40, *б*). Напряженности H_1 и H_2 зависят от расстояния до источника электромагнитного поля. Учитывая, что угловое перемещение пластины небольшое, можно пользоваться средним значением этих величин: $H = (H_1 + H_2)/2$.

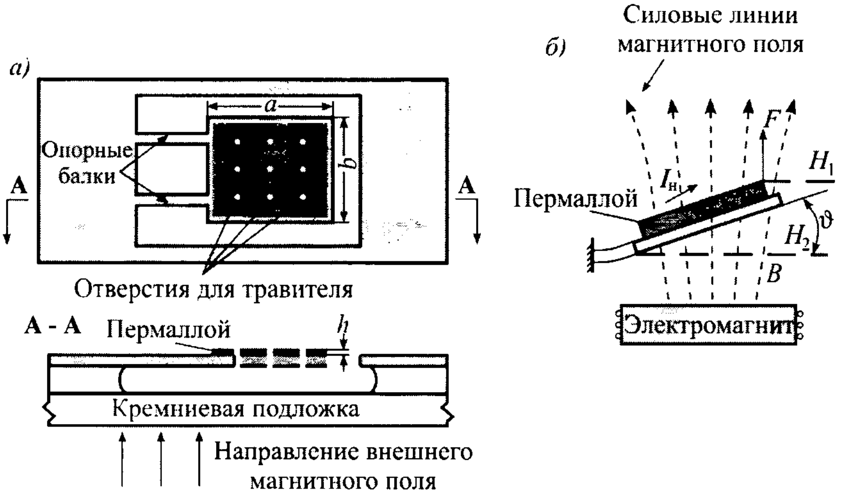


Рис. 3.40. Электромагнитный преобразователь:
а – принципиальная схема; *б* – схема формирования вращающего момента

Связь между вектором намагничивания и напряженностью намагничивающего поля, А/м, устанавливается формулой

$$I = \chi H ,$$

где χ – магнитная восприимчивость, зависящая от рода магнетика и его состояния (температуры и т.д.), Гн/м.

Намагниченный пермаллой взаимодействует с внешним магнитным полем и в результате генерируется сила, Н,

$$F = IHbh,$$

которая приводит к возникновению вращающего момента, Н·м, действующего на пластину:

$$M = Fa\cos\vartheta = \chi H^2, \quad (bha)\cos\vartheta. \qquad (3.105)$$

Вращающий момент всегда стремится уменьшить полную энергию в системе актюатора совмещением вектора намагничивания с силовыми линиями внешнего магнитного поля.

Следует отметить, что в преобразователях этого типа выбор магнетиков ограничен возможностями их микрообработки, т.е. магнитный материал может быть неоптимальным по энергетике.

Наряду с рассмотренными силовыми преобразователями, применяемыми в измерительных микроприборах (акселерометры, гироскопы, датчики давления), в разнообразных исполнительных микроустройствах используются термопреобразователи (термоактюаторы), в которых тепловое преобразование энергии является, как правило, результатом включения микронагревателей (резисторов).

3.4. ЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

В микроприборах ЧЭ и электроника выполняются на одном кристалле в едином технологическом цикле. В гибридных микроприборах часть электроники может быть изготовлена на отдельных платах. ЧЭ содержат первичные и вторичные преобразователи, работа которых обслуживается электроникой и которые включают в себя компоненты, являющиеся частью электронных схем. Совокупность первичных и вторичных преобразователей и электронных схем, обслуживающих их работу, можно назвать электронными средствами обработки сигналов (измерительных и управляющих).

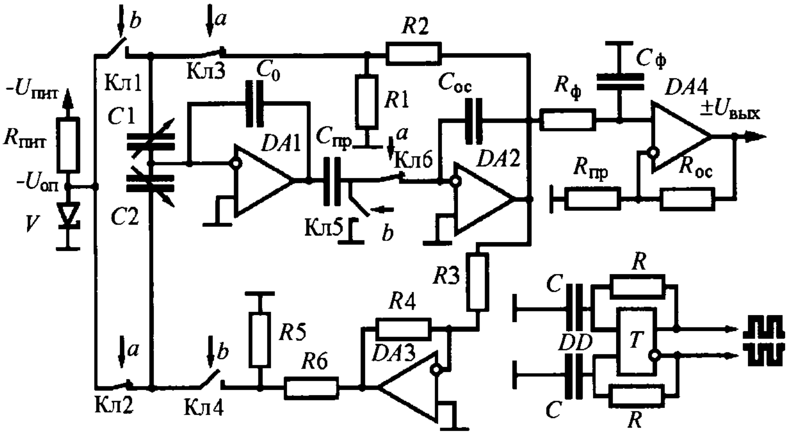


Рис. 3.41. Электрическая принципиальная схема акселерометра АТ 1105

3.4.1. Микроакселерометры и микродатчики давления

А. Схемы с аналоговым выходом

В настоящее время отечественной и зарубежной промышленностью выпускаются микромеханические датчики с аналоговыми выходными устройствами. В качестве примеров можно привести гибридные акселерометры АЛЕ 049 и АЛЕ 050 (НИИФИ, г. Пенза); АТ 1104, АТ 1105 (ОАО "Темп–Авиа", г. Арзамас); а также в микромеханическом исполнении линейные акселерометры серии ADXL (фирма Analog Devices, США) и многоосный инерциальный чувствительный модуль Motionpak (BEI Technologies, Inc., Великобритания) и др.

К достоинствам таких устройств можно отнести простоту схемного решения и, как следствие, уменьшение массы и габаритных размеров, а также повышение надежности.

В качестве типового примера измерительной схемы с аналоговым выходом в дополнение к схеме, представленной на рис. 3.18, *а*, на рис. 3.41 показана электрическая принципиальная схема гибридного акселерометра прямого измерения АТ 1105, который имеет полную функцию преобразования измеряемого линейного ускорения в выходной сигнал в виде напряжения постоянного тока с номинальным значением $U_{вых\ ном} = \pm 5$ В относительно средней точки питания при входном воздействии a_{max}. Конструктивно электронный преобразователь выполнен по гибридной интегральной тонкопленочной технологии на двух ситалловых подложках с бескорпусными электрорадиоэлементами.

Сервисная электроника, преобразующая изменение дифференциальной измерительной емкости в постоянное напряжение, состоит из нескольких функциональных блоков. Источник стабилизированного опорного напряжения содержит балластное сопротивление $R_{пит}$ и стабилитрон *V*1. Емкостный измерительный преобразователь включает в себя конденсаторы *C*1 и *C*2, а также электронные ключи Кл1, Кл2. Преобразование заряда, накопленного измерительными конденсаторами, в напряжение осуществляется усилителем заряда, состоящим из операционного усилителя *DA*1 и конденсатора C_0.

Для выделения низкочастотного сигнала, пропорционального измеряемому ускорению, из сигнала несущей частоты служит демодулятор, построенный на операционных усилителях *DA*2 и *DA*3, конденсаторах $C_{пр}$, $C_{ос}$, резисторах *R*1–*R*6 и электронных ключах Кл5, Кл6. Пульсации напряжения на выходе демодулятора сглаживаются с помощью неинвертирующего активного фильтра первого порядка, выполненного на микросхеме *DA*4, интегрирующей цепочке $R_ф C_ф$ и резисторах $R_{пр}$, $R_{ос}$, величина которых определяет масштабный коэффициент акселерометра.

Генератор прямоугольных импульсов с парафазным выходом на триггере *DD*, времязадающих цепочках *RC* предназначен для выработки сигналов *a* и *b*, синхронизирующих работу электронных ключей.

Схема работает следующим образом. Под действием линейного ускорения ЧЭ акселерометра перемещается. Это приводит к изменению емкостей C_1, C_2 измерительного преобразователя. На входе усилителя заряда *DA*1 создается напряжение, модулированное импульсами тактовой частоты, формируемыми генератором *DD*. Оно пропорционально линейному ускорению. С помощью демодулятора на микросхемах *DA*2 и *DA*3 выделяется низкочастотная составляющая сигнала. Пульсации напряжения несущей частоты сглаживаются фильтром низких частот на микросхеме *DA*4.

Электропитание прибора осуществляется от двухполярного источника постоянного тока напряжением $U_{пит} = \pm 12$ В. Минимальная полоса пропускания частот АТ 1105 составляет $f_{в.гр} \geq 100$ Гц (диапазон измерения $a_{max} = 0{,}5\ g$), максимальная $f_{в.гр} \geq 2000$ Гц (диапазон измерения $a_{max} = 100\ g$).

В качестве выходного устройства в данной схеме используется фильтр низких частот. Величина сопротивления нагрузки, подключаемой к выходу акселерометра, определяется нагрузочной способностью операционного усилителя выходного каскада.

Компенсационные акселерометры с магнитоэлектрическим датчиком момента имеют токовый выход. Для преобразования выходного тока в выходное напряжение к такому акселерометру надо подключать последовательно с обмоткой датчика момента внешнее нагрузочное сопротивление, величина которого определяет крутизну выходной характеристики акселерометра.

Таким образом, выходное сопротивление схемы практически равно величине нагрузочного сопротивления, что необходимо учитывать при согласовании выходного устройства акселерометра с входным сопротивлением потребителя сигнала.

Б. Схемы с частотным выходом

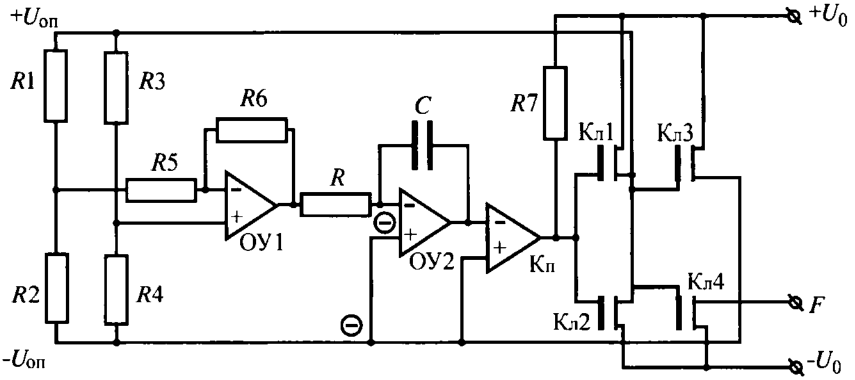
При разработке перспективных схем микромеханических приборов возможно включение в их состав различных схем преобразователей "аналог–код". Эти схемы могут быть построены по принципу непосредственного преобразования напряжения в двоичный код с использованием стандартных микроэлектронных аналого-цифровых преобразователей (АЦП) или преобразователей "напряжение–частота" (ПНЧ) и широтно-импульсных модуляторов (ШИМ).

При разработке или выборе схемы АЦП для микромеханического прибора необходимо решить ряд задач, связанных с обеспечением диапазона преобразования, разрешающей способности, линейности характеристики преобразования, температурной стабильности, помехозащищенности, с выбором способа передачи информации (параллельный или последовательный код) и др. Подробно эти вопросы рассмотрены в целом ряде работ, например [7].

ПНЧ предназначены для преобразования входного напряжения в последовательность импульсов с частотой следования, пропорциональной его значению. Принцип действия интегрирующего ПНЧ основан на интегрировании входного напряжения до некоторого стабильно заданного опорного напряжения с последующим быстрым разрядом конденсатора через короткозамкнутый ключ.

Вариант схемы с частотным выходом показан на рис. 3.42.

Схема преобразователя сопротивления тензорезисторов *R*1, *R*2 в частоту *F*



3.42. Принципиальная схема преобразователя сопротивления тензорезисторов в частоту

содержит: резисторы $R3$, $R4$ мостовой схемы; масштабный операционный усилитель ОУ$_1$ с резисторами $R5$, $R6$, аналоговый интегратор ОУ2 с элементами R и C; компаратор напряжения Кп с резистором R и переключающее устройство на КМОП-ключах Кл1–Кл4.

Питание тензорезисторного моста $R1$–$R4$ осуществляется с противофазных выходов переключающего устройства. Напряжение питания тензомоста $U_{оп}$ является также опорным для компаратора.

Схема работает следующим образом. Предположим вначале, что ключи Кл1 и Кл4 открыты. В этом случае мост питается напряжением полярности, соответствующей рис. 3.42. Условимся также, что $R_1 = R_0 + \Delta R$, а $R_2 = R_0 - \Delta R$. Напряжение U_1, снимаемое с инвертирующего масштабного усилителя ОУ1 в соответствии с рис. 3.43, *а* и поступающее на вход интегратора, определяется следующим образом:

$$U_1 = (I_1 R_1 - I_2 R_3)\left(-\frac{R_6}{R_5}\right) = \left(\frac{2U_0 R_1}{R_1 + R_2} - \frac{2U_0 R_3}{R_3 + R_4}\right)\left(-\frac{R_6}{R_5}\right). \qquad (3.106)$$

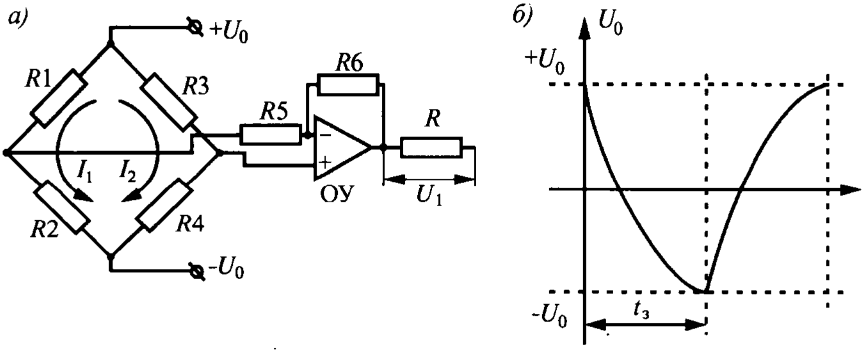


Рис. 3.43. К пояснению схемы работы преобразователя:
а – тензомост с масштабным усилителем крутизны характеристики;
б – график "заряд–разряд" конденсатора интегратора ($t_з$ – время заряда)

Полагая, что $R_3 = R_4$, из формулы (3.106) получим

$$U_1 = -\frac{U_0 \Delta R}{R_0} K_{\text{м}}, \qquad (3.107)$$

где $K_{\text{м}} = R_6/R_5$.

На второй вход интегратора поступает напряжение $-U_0$. Напряжение на опорном входе компаратора $U_{\text{к}} = -U_0$. Конденсатор интегратора заряжается от $+U_0$ до $-U_0$ (рис. 3.43, *б*), а когда напряжение на выходе интегратора сравняется с опорным напряжением компаратора, последний переключается из нулевого состояния в единичное и переключает знак напряжения питания тензомоста. Происходит процесс разряда конденсатора, а затем цикл "заряд–разряд" конденсатора повторяется.

Процесс заряда конденсатора в рассмотренном цикле описывается уравнением

$$RC\frac{dU_2}{dt} = +U_1, -U_0, \qquad (3.108)$$

где U_2 – напряжение на выходе интегратора.

С учетом выражения (3.107) получим

$$-2U_0RC = -U_0\frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}t_{\text{з}} - U_0t_{\text{з}} =$$

$$= -U_0t_{\text{з}}\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}\right),$$

откуда следует время заряда:

$$t_{\text{з}} = 2RC \Big/ \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}\right). \qquad (3.109)$$

Поскольку время заряда конденсатора равно времени его разряда, период колебаний $T = 2t_{\text{з}}$ и, значит, частота выходного сигнала равна

$$F = \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}\right) \Big/ (4RC). \qquad (3.110)$$

Таким образом, для принятого характера изменения значений R_1 и R_2 частота выходного сигнала увеличивается по сравнению с опорной частотой $1/4RC$.

Предположим теперь, что значения тензорезисторов изменяются так: $R_1 = R_0 - \Delta R$; $R_2 = R_0 + \Delta R$.

Для этого варианта деформаций тензорезисторов имеем

$$U_1 = U_0\frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}.$$

В соответствии с формулой (3.109) получим

$$t_{\text{з}} = 2RC \Big/ \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}\right).$$

Следовательно, частота выходного сигнала определяется выражением

$$F = \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0}K_{\text{м}}\right) \Big/ 4RC, \qquad (3.111)$$

откуда видно, что изменение характера деформации тензорезисторов привело к уменьшению частоты выходного сигнала.

Относительная ошибка по частоте в зависимости от изменения температуры определяется выражением $\delta_F = \Delta F/F = (\alpha_R - \alpha_C)\Delta T$, где α_R, α_C – соответственно температурные коэффициенты сопротивления и емкости интегратора.

В. Схемы с ШИМ модулятором на выходе

В некоторых конструкциях микромеханических акселерометров, например ADXL202/ADXL210 (фирма Analog Devices), используются выходные устройства, построенные по принципу ШИМ. Принцип работы простейшего ШИМ поясняется рис. 3.44.

Простейший ШИМ состоит из компаратора и генератора линейно изменяющегося напряжения (ГЛИН). На информационный вход компаратора поступает напряжение $U_{\text{вх}}$ и с выхода акселерометра, а на вход опорного сигнала подается пилообразное напряжение $U_{\text{г}}$ с выхода ГЛИН. В начале цикла преобразования это напряжение переключает компаратор в состояние логической единицы, в кото-

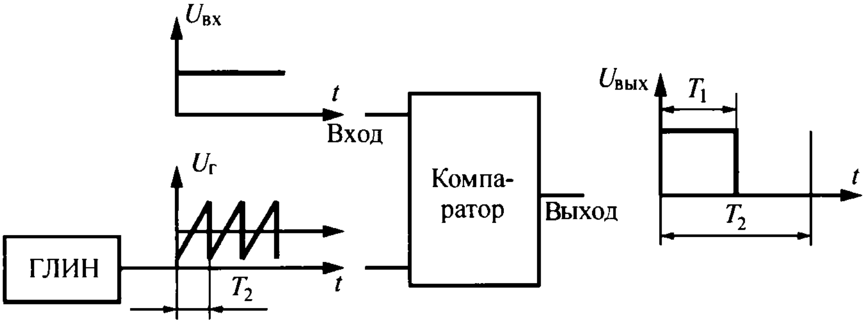


Рис. 3.44. К пояснению работы ШИМ

ром он находится до того момента, когда напряжение на выходе ГЛИН станет равным напряжению на информационном входе.

При этом компаратор переключается в состояние логического "0", в котором он находится до тех пор, пока напряжение на выходе ГЛИН достигнет максимума. После этого начинается следующий цикл преобразования.

Таким образом, на выходе компаратора формируется импульсная последовательность, период T_2 которой равен периоду пилообразного напряжения на выходе ГЛИН, а длительность импульсов T_1 пропорциональна напряжению на выходе акселерометра. При нулевом напряжении на выходе акселерометра длительность импульса T_1 равна половине периода импульсной последовательности T_2. Для сохранения линейной зависимости между выходным напряжением акселерометра и длительностью импульса в качестве рабочего участка используется только половина периода T_2.

На рис. 3.45 показаны пределы изменения длительности импульса T_1 для акселерометра ADXL202, имеющего диапазон измерения ± 2*g*.

Период импульсной последовательности может изменяться в пределах 0,5...10 мс путем изменения величины резистора, подключаемого к акселерометру. Ускорение, доли *g*, может быть выражено через отношение длительности импульса ШИМ к периоду импульсной последовательности по формуле

$$a = \left(\frac{T_1}{T_2} - 0{,}5\right) \Big/ K_{\text{ШИМ}} ,$$

где $K_{\text{ШИМ}}$ – коэффициент передачи ШИМ (в данном случае $K_{\text{ШИМ}} = 0{,}125$).

Для ввода сигнала ШИМ в компьютер можно использовать схему, в которой измерение длительности импульса T_1 проводится путем заполнения тактовыми импульсами высокой частоты. Число последних подсчитывается с помощью двоичного счетчика. Далее полученное двоичное число считывается через шину данных компьютера и программным путем преобразуется в десятичное число. Принцип работы схемы такого устройства поясняется рис. 3.46.

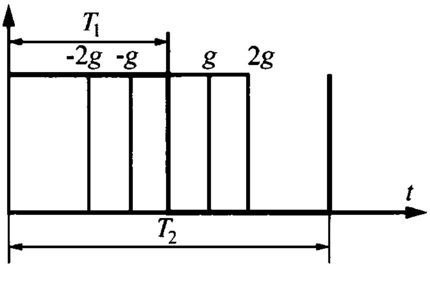


Рис. 3.45. Зависимость длительности импульса сигнала ШИМ от значения ускорения

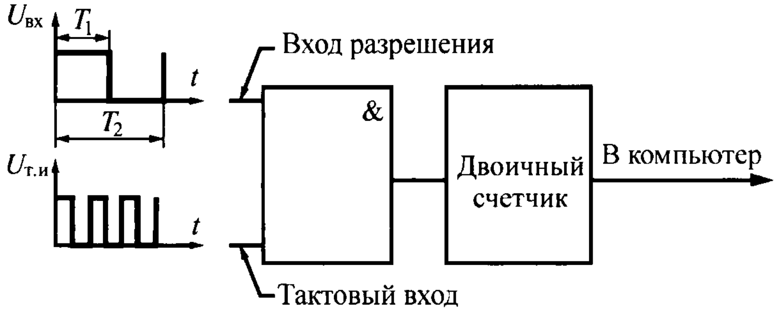


Рис. 3.46. К пояснению принципа работы схемы измерения длительности импульса ШИМ

Схема состоит из двоичного счетчика и схемы разрешения на логическом элементе И, имеющем два входа. На счетный вход подаются тактовые импульсы $U_{т.и}$ высокой частоты. На вход разрешения поступает сигнал $U_{вх}$ ШИМ. Сигнал логической "1" на выходе ШИМ разрешает прохождение тактовых импульсов на вход двоичного счетчика. При появлении на входе разрешения логического "0" тактовые импульсы перестают поступать на вход счетчика и двоичное число, пропорциональное ускорению и записанное в счетчик, может быть считано на шину данных. Счетчик тактовых импульсов можно организовать программным путем в компьютере или микроконтроллере.

Максимальное число импульсов, которое соответствует диапазону измерения акселерометра, вычисляется по формуле

$$n = \frac{T_1 f_{такт}}{2}, \qquad (3.112)$$

где $f_{такт}$ – тактовая частота.

По значению n можно определить число разрядов, необходимых для хранения двоичного числа, а также разрешающую способность преобразователя, т.е. значение ускорения или угла отклонения от вертикали, приходящееся на один разряд.

Пример 3.15

Рассчитаем разрешающую способность преобразователя для исходных данных: периода импульсной последовательности $T_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ и $10 \cdot 10^{-3}$ с; тактовой частоты $f_{такт} = 10 \cdot 10^6$ Гц; $a_{max} = 2g$.

При отсутствии ускорения имеем $T_1 = T_2/2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}/2 = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$ с и для этого случая по формуле (3.112) определим число импульсов, соответствующее a_{max}:

$$n = (0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^6)/2 = 1250.$$

На один разряд счетчика приходится ускорение

$$1 \text{ разр.} = 2g/1250 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}g,$$

которое возникает при наклоне основания с акселерометром на угол

$$\sin\alpha \approx \alpha = [(1{,}6 \cdot 10^{-3}g)/g]57{,}3 \cdot 60 = 5{,}5'.$$

Шаг дискретизации равен периоду импульсной последовательности ШИМ, т.е. 0,5 мс.

Так как в десятиразрядный счетчик можно записать $2^{10} = 1024$ импульса, а $n = 1250$ импульсов, то рассчитанные параметры преобразователя эквивалентны десятиразрядному АЦП. Аналогично получаем для $T_2 = 10$ мс ($f = 10$ МГц) число импульсов $n = 25\,000$. На один разряд счетчика приходится ускорение

$$1 \text{ разр.} = 2g/25\,000 = 0{,}08 \cdot 10^{-3}g,$$

что соответствует углу наклона основания с акселерометром на угол $\alpha = 16{,}5''$. Шаг дискретизации счетчика 10 мс, а так как в 14-разрядный счетчик может быть записано 16 384 импульса ($n = 25\,000$), то параметры преобразователя превышают возможности 14-разрядного АЦП.

Таким образом, основные параметры ШИМ находятся на уровне лучших образцов АЦП, а по простоте схемотехники значительно превосходят их.

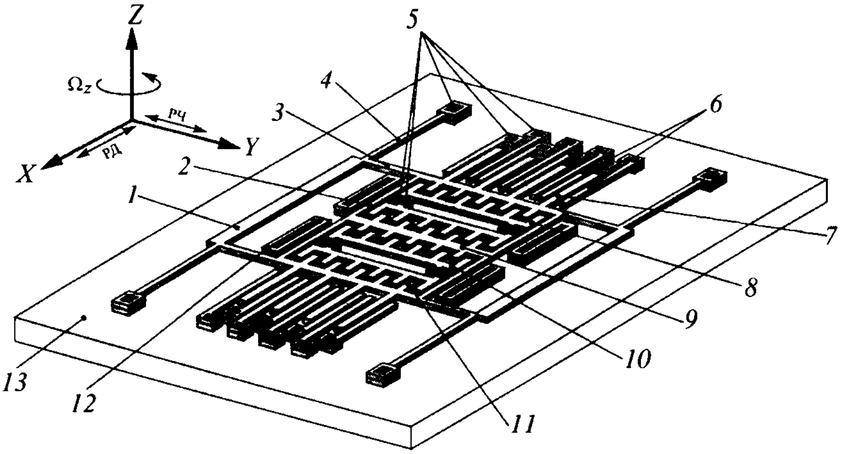


Рис. 3.47. Микроструктура гироскопа LL-типа:
1 – жесткий элемент подвеса; *2* – ИМ; *3*, *4* – упругие элементы подвеса; *5* – анкеры; *6*, *7* – электроды измерителя перемещений в РЧ; *8* – неподвижные электроды электростатического привода; *9*, *10* – электроды измерителя перемещений в РД; *11* – подвижный электрод привода; *12* – упор – ограничитель перемещений; *13* – подложка основания (оцифровка соответствует рис. 1.37)

3.4.2. Микрогироскопы

Электронные средства обработки сигналов в МГ рассмотрим на примере МГ LL-типа, особенности которых характерны и для МГ LR- и RR-типов.

А. Задачи, решаемые электронными средствами, и методы их реализации

Микроструктура гироскопа LL-типа, кинематическая схема которого соответствует схеме МГ по рис. 1.37, приведена на рис. 3.47 (фирма США The Regents of the University of California). Основная часть ИМ заключена в структуре *2*, имеющей рамочную конфигурацию и включающей в себя гребенчатые структуры электродов *7*, *9*, *11*. Подвес ИМ *2* относительно основания *13* выполнен на упругих элементах *3*, *4*, между которыми включены жесткие (недеформируемые) элементы подвеса *1*.

Подвижная структура МГ, а также неподвижные гребенчатые структуры электродов *6*, *8*, *10* с помощью анкеров *5* расположены на расстоянии ~2 мкм над основанием *13*. При перемещениях подвижной структуры в режиме чувствительности (РЧ) ИМ ЧЭ увеличивается за счет массы элементов *1*. Превышающие норму перемещения ИМ в направлении оси *X* (режим движения – РД) и оси *Y* (РЧ) при появлении угловой скорости Ω_z вокруг оси *Z* ограничиваются упорами *12*.

Вибрирующая микроструктура может быть изготовлена из монокремния с толщиной всех элементов ~2 мкм методом поверхностной микрообработки. Возможно ее изготовление из поликремния методом глубокого ионного реактивного травления с толщиной всех элементов ~25 мкм. Подвижная (вибрирующая) структура МГ с указанием размеров элементов дана на рис. 3.48, а на рис. 3.49 показана структура неподвижных электродов. Упругие элементы *4* (см. рис. 3.47) могут иметь форму, отличную от прямолинейной (см. пунктир на рис. 3.48).

Расстояние между каждой парой электродов ~1 мкм. Все подвижные и неподвижные электроды (пальцы электродов) должны быть изготовлены из одного слоя кремния до удаления жертвенного слоя, чтобы все они располагались в одной плоскости.

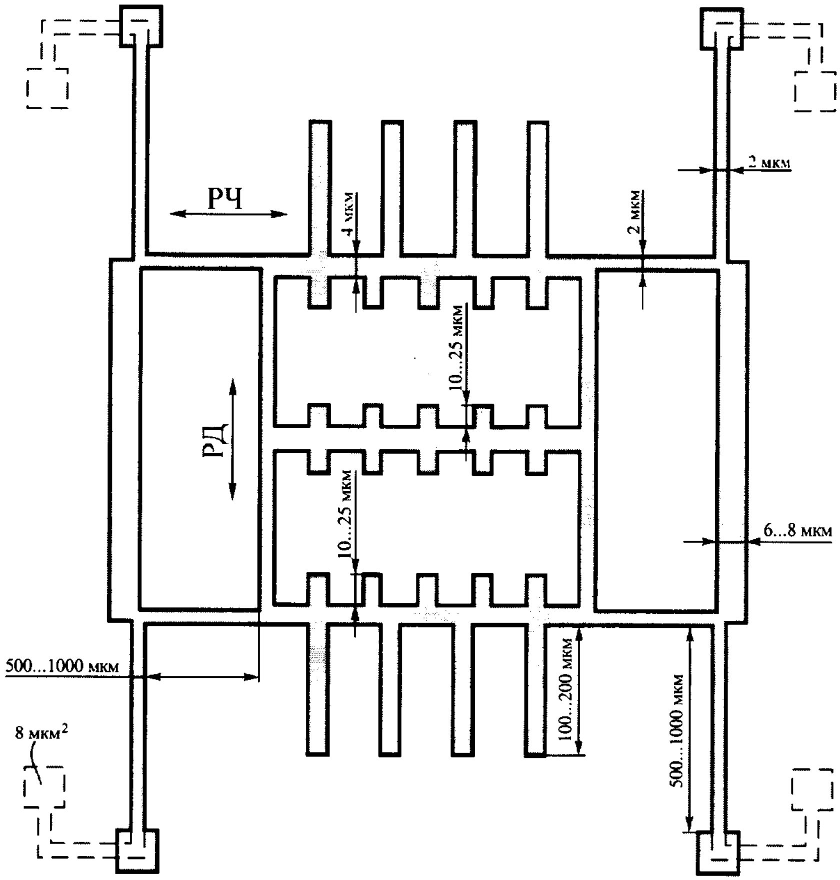


Рис. 3.48. Подвижная структура МГ

Гребенчатые структуры неподвижных *6* и подвижных *7* электродов (см. рис. 3.47) выполняют не только функцию измерения перемещений ИМ в РЧ, но и функции устранения ошибок и настройки частоты в РЧ.

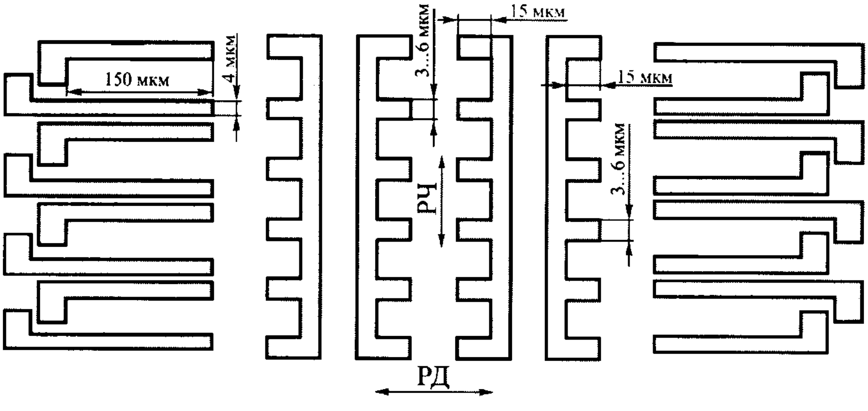


Рис. 3.49. Структура неподвижных электродов микрогироскопа

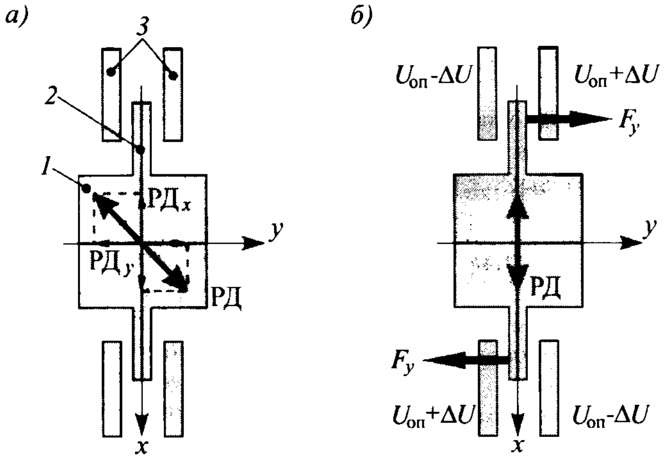


Рис. 3.50. К пояснению принципа компенсации квадратурной ошибки:
а – движение ИМ при отсутствии компенсирующей силы; *б* – то же, при создании компенсирующей силы; *1* – ИМ; *2*, *3* – электроды

Рассмотрим принцип компенсации квадратурной ошибки. На рис. 3.50, *а* показана ИМ *1* с электродами *2*, размещенными между электродами *3* измерителя перемещений. В силу механической несимметрии жесткости подвеса или электрической несимметрии привода режим движения может происходить под некоторым углом к оси x, в результате чего появляются составляющие движения ИМ в направлении оси x – РД$_x$ и оси y – РД$_y$. Составляющая РД$_y$ и есть причина возникновения квадратурной ошибки (см. также подразд. 1.3.2, А).

Если между электродами *2* и *3* создать разность потенциалов: $(U_{оп} - \Delta U) - (U_{оп} + \Delta U) = -2\Delta U$; $(U_{оп} + \Delta U) - (U_{оп} - \Delta U) = 2\Delta U$ ($U_{оп}$ – опорное напряжение), то это приведет к возникновению компенсирующих электростатических сил F_y, которые в отсутствие угловой скорости Ω_z обеспечат перемещение ИМ только вдоль оси x.

Определим величину ΔU, которая создает силу, компенсирующую квадратурную ошибку.

Полагаем, что привод обеспечивает движение ИМ по закону

$$x = X_0 \sin\omega t, \qquad (3.113)$$

где X_0, ω – амплитуда и частота соответственно.

При появлении угловой скорости Ω_z возникает ускорение Кориолиса:

$$a_К = 2\Omega_z X_0 \omega \cos\omega t. \qquad (3.114)$$

Для типовых значений параметров: X_0 = 1 мкм, ω = 20 кГц, Ω_z = 1 °/с ускорение Кориолиса $a_К = 2\frac{1}{57,3}10^{-6}\cdot 20\cdot 10^3 \times$ $\times 2\pi = 0,438\cdot 10^{-2}$ м^2/с ≈ 0,44 мg.

Перемещение ИМ вдоль выходной оси y можно найти как долю μ от перемещения (3.113):

$$y = -\mu x, \qquad (3.115)$$

а квадратурное ускорение определяется выражением

$$a_К = \ddot{y} = \mu X_0 \omega^2 \sin\omega t. \qquad (3.116)$$

Отметим, что ускорение Кориолиса смещено по фазе на 90° по отношению к колебаниям (3.113), а квадратурное ускорение (ошибка) пропорционально амплитуде X_0 и находится в одной фазе колебаний с приводом.

Запишем отношение амплитуд ускорения

$$\frac{a_{\text{К}}}{a_{\text{кв}}} = \frac{2\Omega_z X_0 \omega}{\mu X_0 \omega^2} = \frac{2\Omega_z}{\mu\omega}, \qquad (3.117)$$

откуда следует, что даже при $a_{\text{К}}/a_{\text{кв}} = 1$ величина $\mu = 2\Omega_z/\omega$ должна быть чрезвычайно малой. Действительно, для принятых выше исходных данных, величина $\mu = 2\frac{1}{57{,}3}/\left(20\cdot 10^3\cdot 2\pi\right) = 2{,}77\cdot 10^{-7}$, т.е. перемещение ИМ вдоль оси y должно составлять порядка десятимиллионной части от амплитуды X_0. Очевидно, что технологически выполнить такое соотношение невозможно.

Электростатическая сила притяжения между электродами при наличии на них разности потенциалов определяется зависимостью (3.85):

$$F_y = \frac{C_0}{\Delta y_0}\left[\left(U_{\text{оп}} + \Delta U\right)^2 - \left(U_{\text{оп}} - \Delta U\right)^2\right] = \\ = 2\frac{C_0}{\Delta y_0}U_{\text{оп}}\Delta U, \qquad (3.118)$$

где C_0 – максимальная емкость гребенчатых структур электродов чувствительности; Δy_0 – номинальное расстояние между электродами.

Из равенства $ma_{\text{кв}} = F_y$ (m – масса ИМ) с учетом формул (3.116), (3.118) следует максимальная величина разности потенциалов, которая обеспечивает компенсацию силы, обусловленной квадратурным ускорением:

$$\Delta U = \frac{m\mu\Delta y_0 \omega^2 X_0}{2C_0 U_{\text{оп}}}. \qquad (3.119)$$

Заметим, что величина ΔU пропорциональна перемещению X_0, так же, как и величина $a_{\text{кв}}$. Оценку значения величины ΔU выполним для параметров: $m = 0{,}2 \times \times 10^{-3}$ кг, $\Delta y_0 = 1$ мкм, $X_0 = 1$ мкм, $\omega = 20$ кГц, $\mu = 10^{-7}$, $U_{\text{оп}} = 10$ В (обычно $U_{\text{оп}} = 1\ldots10$ В); значение C_0 зависит от геометрии и общего числа пальцев чувствительности и может быть обеспечено $C_0 = 1$ пФ.

Таким образом,

$$\Delta U = \\ = \frac{0{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-6}\left(20\cdot 10^3\cdot 2\pi\right)^2 10^{-6}}{2\cdot 10^{-12}\cdot 10} = \\ = 15{,}77\cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

В дополнение к устранению квадратурной ошибки система электродов чувствительности (измеритель перемещений в РЧ) может обеспечить устранение влияния центробежных сил, действующих на ИМ, если ее центр масс не совпадает с осью вращения z МГ. Центробежные силы устраняются приложением к электродам чувствительности, расположенным по разные стороны от ИМ, соответствующих силам напряжения. Следует отметить, что электрический сигнал, пропорциональный центробежной силе, является низкочастотным. Поэтому данный сигнал может быть отфильтрован высокочастотным фильтром, который пропустит высокочастотный, полезный сигнал, пропорциональный ускорению Кориолиса.

Наконец, с помощью гребенчатых структур РЧ удается настраивать частоты колебаний ИМ. Действительно, электростатическую силу взаимодействия электродов можно записать, имея в виду (3.90):

$$F_y = \left[\frac{1}{\left(\Delta y_0 - \Delta y\right)^2} - \frac{1}{\left(\Delta y_0 + \Delta y\right)^2}\right] \times \\ \times \frac{\Delta y_0 C_0 U_{\text{оп}}^2}{2} \approx \frac{2\Delta y}{\Delta y_0^2} C_0 U_{\text{оп}}^2, \qquad (3.120)$$

где Δy – перемещение ИМ в направлении оси y.

Электростатическая жесткость определяется по формуле

$$k_y = F_y/\left(\Delta y\right) = 2C_0 U_{\text{оп}}^2/\left(\Delta y_0^2\right), \qquad (3.121)$$

а частота колебаний ИМ в РЧ равна

$$\omega_y = \sqrt{\frac{G_y - k_y}{m}}, \qquad (3.122)$$

где G_y – суммарная жесткость упругого подвеса в направлении оси y.

Как следует из выражений (3.120)...(3.122), увеличение $U_{оп}$ приводит к уменьшению ω_y. Настройку частот надо начинать при $\omega_y > \omega_x$ и увеличением $U_{оп}$ уменьшать ω_y до тех пор, пока не будет достигнуто желаемое значение отношения ω_y/ω_x. Для известных описаний МГ величина $U_{оп}$ находится в пределах 1...10 В и определяется экспериментально для заданной расстройки частот $\Delta\omega = \omega_y - \omega_x$.

Б. Режим движения

Режим движения ИМ обеспечивается электростатическими приводами и измерителем перемещений в РД (рис. 3.51), включенным в цепь обратной связи приводов. Так как ускорение Кориолиса пропорционально линейной скорости dx/dt ИМ, принципиально важно поддержание постоянной амплитуды этой скорости. Для контроля скорости ИМ в РД может быть использован ток смещения, равный

$$i = \frac{dC}{dt}U_{оп} = \frac{\delta C}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta t}U_{оп}, \qquad (3.123)$$

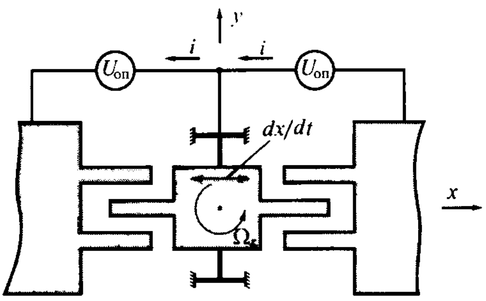


Рис. 3.51. К возникновению тока смещения

где C – емкость гребенчатой структуры измерителя перемещений в РД.

Гармоническое движение ИМ может быть обеспечено схемой с усилителем, на выходе которого создается переменное напряжение с амплитудой, поддерживаемой постоянной, в соответствии с током смещения [см. формулу (3.123)], протекающим в цепи обратной связи схемы, осуществляющей РД.

На рис. 3.52 приведена функциональная схема цепи обратной связи,

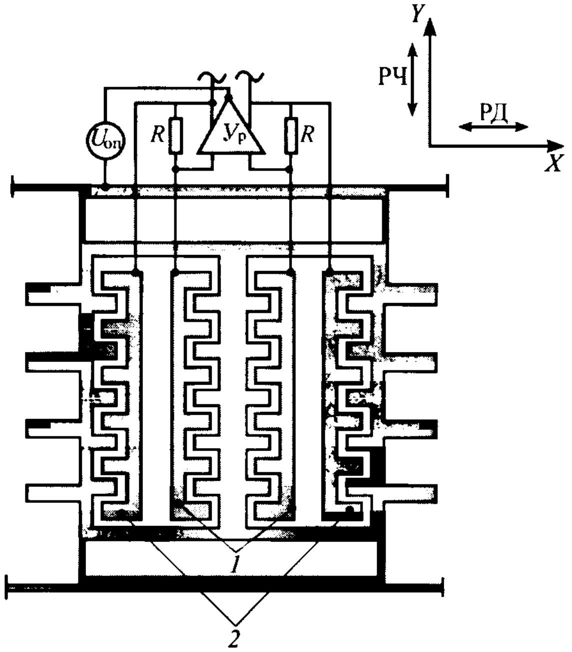


Рис. 3.52. Функциональная схема цепи обратной связи в РД:
1 и *2* – неподвижные электроды обратной связи и электростатического привода соответственно

включающая в себя неподвижные *1* и подвижные электроды, являющиеся частью структуры ИМ, измерителя перемещений в РД и схему резисторного усилителя У$_\text{р}$ (*R*-резисторы), включенного в цепи приводов с неподвижными *2* и подвижными электродами на структуре ИМ. Колебательное движение ИМ обеспечивается переменным напряжением, которое прикладывается между подвижными и неподвижными электродами приводов (источник переменного напряжения не показан).

В соответствии с формулой (3.123) запишем выражения для токов в левой и правой ветвях схемы, обеспечивающих движение ИМ:

$$i^{(+)} = U_{\text{оп}} \frac{\delta C}{\delta x} X_0 \omega_x \sin(\omega_x t);$$

$$i^{(-)} = -U_{\text{оп}} \frac{\delta C}{\delta x} X_0 \omega_x \sin(\omega_x t);$$

где X_0, ω_x – амплитуда и частота ИМ в РД, $\frac{\delta C}{\delta x}$ – изменения емкости гребенчатых структур.

На выходе усилителя

$$\begin{aligned} U^{(+)} &= U_{\text{оп}} + U_x \sin(\omega_x t); \\ U^{(-)} &= U_{\text{оп}} - U_x \sin(\omega_x t); \end{aligned} \qquad (3.124)$$

где

$$U_x = R U_{\text{оп}} \frac{\delta C}{\delta x} X_0 \omega_x . \qquad (3.125)$$

В соответствии с выражением (3.91) и с учетом формулы (3.125) получим выражение для силы, обеспечивающей режим движения:

$$\begin{aligned} F_x &= 4 \frac{\delta C}{\delta x} U_{\text{оп}} U_x \sin(\omega_x t) = \\ &= 4 \left(\frac{\delta C}{\delta x} U_{\text{оп}} \right)^2 R X_0 \omega_x \sin(\omega_x t). \end{aligned} \qquad (3.126)$$

Важно отметить, что обеспечивается резонансный режим движения, так как сила и скорость находятся в фазе. Существенно также обстоятельство, что сила демпфирования и электростатическая сила пропорциональны скорости движения ИМ. Следовательно, если усиление в схеме недостаточно, то доминирует сила демпфирования и колебания ИМ постепенно затухают. Если же усиление велико, то колебания будут возрастать до тех пор, пока не ограничатся упорами. Коэффициент усиления (мощности) в схеме (рис. 3.52) определяется величиной *R*, которую можно найти из условия баланса сил электростатических и демпфирования. Приравняем модули этих сил:

$$4 \left(\frac{\delta C}{\delta x} U^2_{\text{оп}} \right) R(X_0 \omega_x) = b_x (X_0 \omega_x),$$

откуда

$$R = \frac{b_x}{4 \left(\frac{\delta C}{\delta x} U_{\text{оп}} \right)^2}, \qquad (3.127)$$

где b_x – абсолютный коэффициент демпфирования.

Запишем известное соотношение $b_x / m = 2\xi_x \omega_x$ (ξ_x – относительный коэффициент демпфирования) и, имея в виду выражение для добротности по затуханию $Q_x = 1/2\xi_x$, получим величину $b_x = (m\omega_x)/Q_x$, после подстановки которой в формулу (3.127) найдем коэффициент усиления, Ом:

$$R = \frac{m\omega_x}{4Q_x \left(n \frac{\delta C_i}{\delta x} U_{\text{оп}} \right)^2}, \qquad (3.128)$$

где $\frac{\delta C_i}{\delta x}$ – изменение емкости на *i*-м пальце гребенчатой структуры; *n* – число пальцев.

В. Режим чувствительности

Измеритель перемещений для РЧ, как отмечалось, выполняет функции измерения перемещений ИМ, компенсации квадратурной ошибки и настройки частоты колебаний ИМ. На рис. 3.53 показана

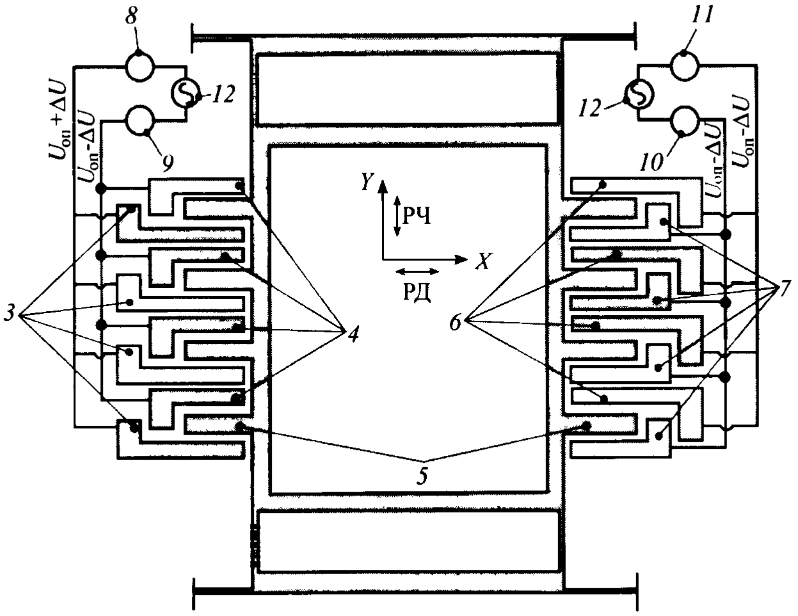


Рис. 3.53. Функциональная схема включения электродов емкостного преобразователя перемещений:
3, *4*, *6*, *7* – неподвижные электроды; *5* – подвижные электроды;
8–12 – источники напряжения

функциональная схема включения электродов емкостного преобразователя перемещений, обеспечивающая выполнение перечисленных функций (оцифровка является продолжением рис. 3.52).

Источник напряжения *12* прикладывает переменное напряжение между электродами *3*, *4* и *6*, *7* с амплитудой 0,1... 0,5 В и частотой, значительно большей, чем частота РД, например, 1 МГц. Источники напряжений *8–11* создают комбинации по принципу, который иллюстрирован рис. 3.50.

Таким образом могут быть созданы электростатические силы для компенсации ошибок, в том числе квадратурной, и для изменения электростатической жесткости с целью коррекции частоты колебаний ИМ в РЧ.

Электроды *5* и *3*, *7* создают измерительную емкость C_1, а электроды *5* и *4*, *6* – измерительную емкость C_2.

Варианты включения конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 показаны на рис. 3.54.

Очевидно, что ввиду малых значений емкостей конденсаторов в МГ критическое значение имеют различные паразитные емкости, образованные линиями связи, металлизированными поверхностями корпуса, и т.д.

В качестве одного из возможных вариантов на рис. 3.55 приведена схема включения полумоста с интегратором в качестве усилителя зарядов конденсаторов. Подвижные электроды (пальцы) *5* (см. рис. 3.53) через подвижную структуру ИМ имеют электрическую связь с отрицательным входом усилителя.

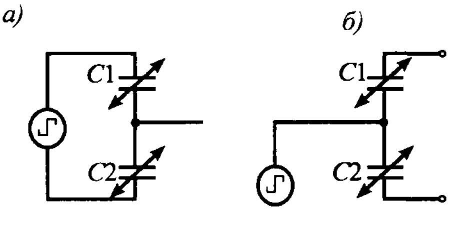


Рис. 3.54. Конфигурация полумостовых схем включения конденсаторов:
а – с общей точкой; *б* – дифференциальная

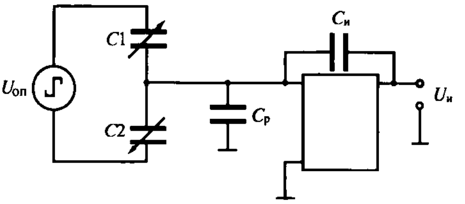


Рис. 3.55. Интегратор в роли усилителя зарядов:
$C1$, $C2$ – конденсаторы датчика перемещений; $C_р$ – паразитная емкость; $C_и$ – емкость конденсатора интегратора; $U_и$ – напряжение интегратора

Поскольку усилитель, обеспечивающий режим движения, и интегратор объединены в систему через движущиеся гребенчатые структуры МГ, имеется электронная связь между ними, которая приводит к появлению дополнительного сигнала на выходе интегратора.

Рассмотрим формирование этого дополнительного сигнала. В режиме движения на выходе усилителя формируется напряжение [см. формулу (3.124)]. Емкости взаимодействующих пальцев гребенчатых структур определяются зависимостями

$$C^{(+)} = C_0 + \frac{\delta C}{\delta x} X_0 \cos(\omega_x t);$$

$$C^{(-)} = C_0 - \frac{\delta C}{\delta x} X_0 \cos(\omega_x t), \quad (3.129)$$

где C_0 – емкость в нейтральном положении ИМ.

С учетом выражений (3.124) и (3.129) запишем величину заряда, накапливающуюся на интеграторе:

$$Q = C^{(+)}U^{(+)} + C^{(-)}U^{(-)} = \\ = 2U_{оп}C_0 + U_x X_0 \frac{\delta C}{\delta x}\sin(2\omega_x t). \quad (3.130)$$

Таким образом, наряду с постоянной составляющей заряда, которая может быть отведена, существует составляющая на двойной частоте резонансного режима движения, которая на выходе интегратора формирует дополнительный сигнал:

$$U_д = \frac{1}{C_и}\frac{\delta C}{\delta x} X_0 U_x \sin(2\omega_x t). \quad (3.131)$$

Подставим в выражение (3.131) величину U_x из формулы (3.125) с учетом соотношения (3.128) и получим остаточный сигнал на двойной частоте РД при равенстве сил электростатических и демпфирования:

$$U_д = \frac{1}{4}\frac{m(\omega_x X_0)^2}{Q_x U_{оп} C_и}\sin(2\omega_x t). \quad (3.132)$$

Двойная частота дает возможность использования фильтрации сигнала. Заметим также, что, изменяя емкость интегрирующего конденсатора, можно корректировать полосу пропускания частот РЧ.

Г. Обработка сигналов

Итоговой процедурой электроники МГ является извлечение информации об измеряемой угловой скорости. Электроника МГ включает в себя усилитель, формирующий синусоидальное питание цепей гироскопа, и интегратор, концентрирующий всю информацию о движениях гироскопа в виде зарядов, накапливающихся в конденсаторах гребенчатых структур. Частота выходного сигнала усилителя достаточно стабильна и мало зависит от температуры, а амплитуда контролируется системой автоматики и также относительно постоянна. Спектр частот узкий, и его пик близок к резонансной частоте конструкции.

Уже отмечалось, что существует взаимосвязь между усилителем и интегратором, следствием чего является возникновение сигнала на двойной резонансной частоте ω_x. Движение гироскопа в РЧ есть следствие ускорения Кориолиса, которое представляет собой амплитудно модулированный сигнал. Кроме того, необходимо вспомнить о квадратурной составляющей выходного сигнала.

Таким образом, амплитуду и фазу колебаний гироскопа в РД можно "извлечь" из выходного сигнала усилителя. С выхода интегратора можно получить информацию об ускорении Кориолиса, т.е.

об измеряемой угловой скорости и квадратурной ошибке. Извлечение полезного сигнала – это измерение амплитуды сигналов на различных частотах. Данная задача аналогична той, которая имеет место в линиях связи, где также извлекаются сигналы, сосредоточенные на различных частотах текущего тока.

Представляется, что наиболее приемлемым для МГ методом извлечения полезной информации является синхронная демодуляция, основная сложность (особенность) которой заключается в том, что требуется постоянный по амплитуде сигнал, который имеет те же частоту и фазу, что и нужный (выделяемый) сигнал. В МГ это условие можно обеспечить режимами настройки.

Для пояснения метода предположим, что есть сигнал

$$U(t) = U_0(t)\cos(\omega t),$$

который смешивается (умножается) с эталонным сигналом единичной амплитуды и частотой ω_x:

$$U(t)\cos(\omega_x t) = U_0(t)\cos(\omega t)\cos(\omega_x t) =$$
$$= \frac{1}{2}U_0(t)\left[\cos(\omega - \omega_x)t + \cos(\omega + \omega_x)t\right].$$

Если $\omega = \omega_x$, то $U(t) = \frac{1}{2}U_0(t) \times$ $\times\left[1 + \cos(2\omega t)\right]$, т.е. появляется постоянная составляющая сигнала, которая (амплитуда) может быть выделена низкочастотным фильтром.

При измерении угловой скорости $\Omega_z(t)$ имеют место колебания ИМ гироскопа в РЧ с частотой ω_y, т.е. выходной сигнал МГ можно представить в виде

$$U(t) = \Omega_z(t)\cos(\omega_x t)\cos(\omega_y t),$$

где $\Omega_z(t) = f\left(\omega_y\right)$; ω_x, ω_y – частоты РД и РЧ соответственно. Если этот сигнал смешаем с учетверенным эталонным сигналом, то получим

$$U_\Sigma(t) = 4U(t)\cos(\omega_x t)\cos(\omega_y t) =$$
$$= 4\Omega_z(t)\cos^2(\omega_x t)\cos^2(\omega_y t) =$$
$$= \Omega_z(t)\left[1 + \cos(2\omega_y t)\right]\left[1 + \cos(2\omega_x t)\right].$$

Особенность электронных схем смесителей заключается в том, что входной синусоидальный сигнал умножается на эталонный сигнал, формируемый цифровой схемой в виде последовательности прямоугольных импульсов известной частоты.

С помощью низкочастотного фильтра может быть выделена амплитуда $\Omega_z(t)$, содержащая измеряемую величину Ω_z.

Для иллюстрации отмеченных особенностей взаимодействия электрических сигналов на рис. 3.56 приведена функциональная схема МГ, микроструктура которого соответствует рис. 3.47, а схема включения электродов гребенчатых структур, обеспечивающих РД и РЧ, отвечает рис. 3.52 и 3.53.

РД обеспечивается приводами, измерителем перемещений в РД, включенным в цепь обратной связи через усилитель $У_р$, блоком фазовой автоподстройки частот (ФАПЧ), смесителем *18* и источником переменного напряжения *12*. Неподвижные электроды *1*, *2* в цепи обратной связи соединены аналогично рис. 3.52. РЧ обеспечивается измерителем перемещений, интегратором И с усилителем У, источниками напряжений *8–12* и демодуляторами-смесителями *13–17*. Электроды *5* и *3*, *7*, а также *5* и *4*, *6* включены так же, как на рис. 3.53. Система ФАПЧ генерирует точные цифровые сигналы, которые для РД лежат в диапазоне ω_x = 7...100 кГц и соответствуют положению ИМ, и вырабатывает определенный сигнал (линия связи *22*), а также скоростной сигнал (линия связи *21*), сдвинутый на 90° по отношению к сигналу положения.

Сигналы положения на линиях связи *19*, *20* имеют противоположные амплитуды и поступают на положительный и от-

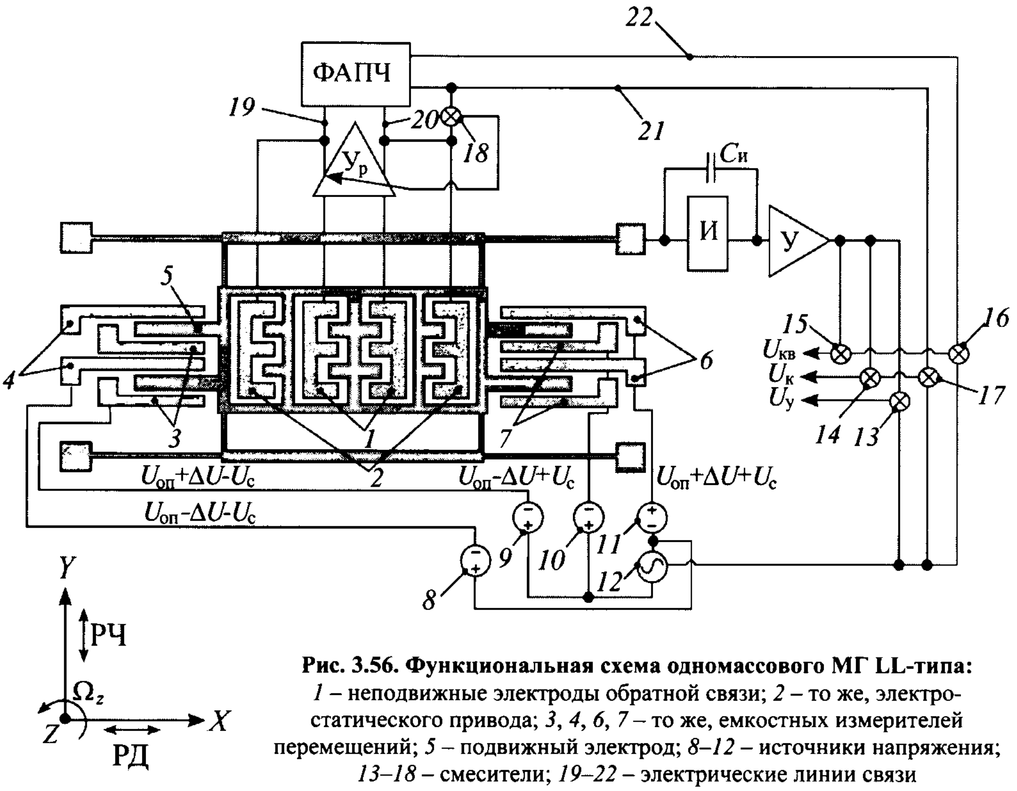


Рис. 3.56. Функциональная схема одномассового МГ LL-типа:
1 – неподвижные электроды обратной связи; *2* – то же, электростатического привода; *3*, *4*, *6*, *7* – то же, емкостных измерителей перемещений; *5* – подвижный электрод; *8–12* – источники напряжения; *13–18* – смесители; *19–22* – электрические линии связи

рицательный выходы усилителя $У_р$, с которыми связаны также неподвижные электроды *2* привода. Неподвижные электроды *1* обратной связи соединены с положительным и отрицательным входами усилителя $У_р$.

Один из выходов усилителя $У_р$ через смеситель *18* объединен со скоростным сигналом ФАПЧ, и комбинированный сигнал поступает на $У_р$ для обеспечения цепи автоматической регулировки усиления, что позволяет управлять амплитудой колебаний ИМ. Источник напряжения *8* вырабатывает итоговое напряжение смещения $U_{оп} - \Delta U - U_с$, источник *9* – напряжение $U_{оп} + \Delta U - U_с$, источник *10* – напряжение $U_{оп} - \Delta U + U_с$ и источник *11* – напряжение смещения $U_{оп} + \Delta U + U_с$. Набор этих напряжений обнуляет квадратурную ошибку, обеспечивает выбор необходимой частоты колебаний ИМ в РЧ и компенсацию центробежных или любых низкочастотных сил.

Возможна и другая комбинация источников напряжений.

Выходной сигнал интегратора И после усилителя У может быть смешан с сигналом от источника *12*, а также с сигналами от ФАПЧ. Источник *12* вырабатывает напряжение высокой частоты (~1 МГц), которая является несущей частотой для всех сигналов и поступает на смесители *13–17*. На этой несущей частоте могут быть получены сигналы U_y (смеситель *13*), $U_к$ (смесители *14*, *17*), $U_{кв}$ (смесители *15*, *16*), пропорциональные перемещению ИМ, ускорению Кориолиса, т.е. измеряемой угловой скорости, и квадратурному ускорению. Эти сигналы можно пропустить через низкочастотные фильтры, чтобы устранить высокочастотные составляющие.

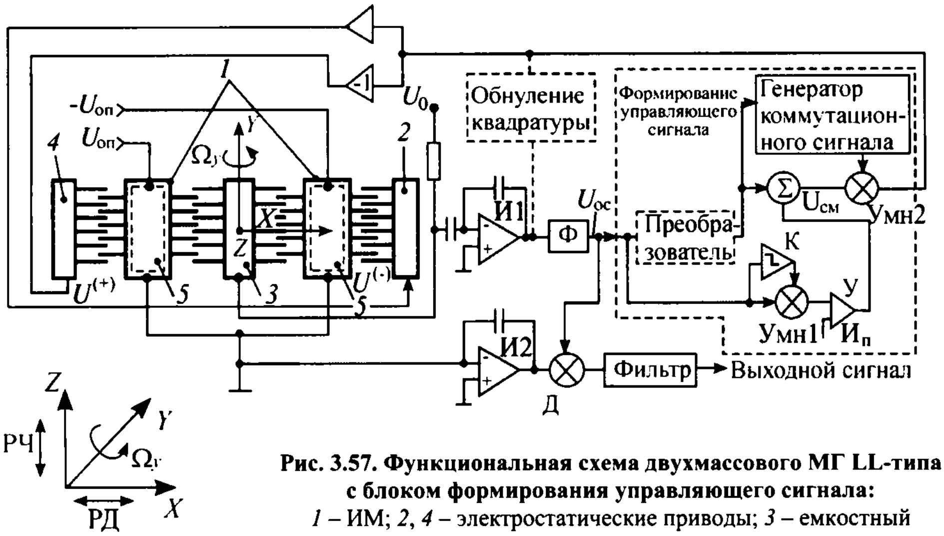


Рис. 3.57. Функциональная схема двухмассового МГ LL-типа с блоком формирования управляющего сигнала:
1 – ИМ; *2*, *4* – электростатические приводы; *3* – емкостный измеритель перемещений ИМ в РД; *5* – электроды емкостных измерителей перемещений ИМ в РЧ

На рис. 3.57 приведена функциональная схема двухмассового МГ LL-типа, поясняющая формирование выходного сигнала в РЧ и сигналов, обеспечивающих РД (фирма США The Charles Stark Draper Laboratory). ЧЭ (показан условно) МГ соответствует схеме на рис. 1.43. ИМ *1* в РД совершают противофазные движения в направлении оси *X* с помощью электростатических приводов *2* и *4*. Измерение параметров РД осуществляет емкостный измеритель перемещений *3*. При появлении угловой скорости Ω_z вокруг оси чувствительности *X* возникают силы инерции Кориолиса, которые вызывают противофазные возвратно-поступательные перемещения ИМ в направлении оси *Z* (РЧ). Измерение перемещений ИМ в РЧ осуществляют емкостные измерители, неподвижные электроды *5* которых (показаны пунктиром) размещены на подложке (основании) МГ, а подвижные выполнены на ИМ.

Электроника включает в себя цепь формирования управляющих сигналов на каждом полупериоде колебаний $U^{(+)}$, $U^{(-)}$, генерирующих электростатические силы приводов, и цепь выделения выходного сигнала, пропорционального измеряемой скорости.

Сила, развиваемая электростатическим приводом, по отношению к управляющему сигналу изменяется по закону, близкому к квадратичному [см. формулу (3.85)]. При резонансной или близкой к ней настройке МГ необходимо, чтобы сила ("сигнал" силы) обладала наибольшей энергетикой на резонансной частоте, т.е. в математическом выражении электростатическая сила должна иметь наибольшую составляющую на резонансной частоте.

Электроды измерителя перемещений *3* находятся под напряжением U_0, а электроды измерителя перемещений *5* – под напряжением $U_{оп}$. Эти опорные напряжения создают на электродах емкостных измерителей заряды, пропорциональные изменениям емкостей между соответствующими электродами. Сигнал с измерителя *3* поступает на интегратор И1, выполняющий роль усилителя зарядов, на выходе которого формируется сигнал, сдвигаемый затем в фазовращателе Ф на 90° по отношению к сигналу на выходе интегратора И2, в котором преобразуются зарядовые сигналы преобразователей *5*.

На выходе интегратора И2 формируется амплитудно-модулированный измеряемой угловой скоростью сигнал на частоте РД, который совместно с сигналом обратной связи $U_{\text{ос}}$ на той же частоте, но со сдвигом по фазе на 90°, поступает на демодулятор Д, а затем на фильтр. Выходной сигнал низкочастотного фильтра представляет напряжение, пропорциональное измеряемой угловой скорости.

Взаимное влияние выходных сигналов с интеграторов И1 и И2 является следствием паразитной емкости, возникающей при изготовлении микроэлектроники. Так как эти сигналы имеют одну частоту, взаимовлияние каналов устраняется с трудом.

Прохождение сигнала $U_{\text{ос}}$ через блок формирования управляющего сигнала приводит к изменению (переносу) частоты сигнала $U_{\text{ос}}$ по сравнению с резонансной частотой, которая является несущей для сигналов на выходе интеграторов И1 и И2.

Наличие преобразователя на входе сигнала $U_{\text{ос}}$ необязательно. Последний может быть представлен в виде

$$U_{\text{ос}} = A\cos\omega_x t,$$

где A – коэффициент усиления цепи, включающей в себя преобразователь *3*, интегратор И1 и фазовращатель Ф; ω_x – частота перемещений ИМ.

В схему автоматического управления усилением входят умножитель Умн1, компаратор (блок сравнения) К и интегрирующий усилитель У. Умножитель и компаратор служат для двухполупериодного выпрямления сигнала $U_{\text{ос}}$. На выходе усилителя У образуется разница между средним уровнем выпрямленного сигнала и пороговым напряжением $U_{\text{п}}$ с целью получения постоянного сигнала смещения $U_{\text{см}}$, который является мерой амплитудной погрешности сигнала $U_{\text{ос}}$.

Сигналы $U_{\text{ос}}$ и $U_{\text{см}}$ поступают на сумматор Σ, на выходе которого образуется скорректированный по амплитуде и смещенный по фазе сигнал, который подается на умножитель Умн2, куда приходит также сигнал от генератора коммутационного сигнала, управляемого сигналом $U_{\text{ос}}$. Сигнал коммутации может поступать на умножитель Умн2 и от независимого источника. На выходе Умн2 формируется управляющий сигнал, поступающий к электростатическим приводам *2* и *4*.

В случае, если сигнал коммутации имеет синусоидальную форму, управляющий сигнал выглядит так:

$$U_{\text{у}} = (U_{\text{см}} + A\cos\omega_x t)a\cos\omega_{\text{к}} t, \tag{3.133}$$

где a, $\omega_{\text{к}}$ – амплитуда и фаза сигнала коммутации.

Как следует из формулы (3.133), сигнал $U_{\text{у}}$ идет на частотах, отличных от ω_x, и взаимовлияние цепи обратной связи и цепи интегратора И2 должно ослабляться.

Силовой сигнал, развиваемый электростатическими приводами, имеет квадратурную зависимость по отношению к управляющему сигналу:

$$\begin{aligned} f(t) &= K_{\text{п}} U_y^2 = K_{\text{п}} a^2 (U_{\text{см}} + A\cos\omega_x t)^2 \cos^2 \omega_{\text{к}} t = \\ &= K_{\text{п}} a^2 \left(U_{\text{см}}^2 + 2AU_{\text{см}} \cos\omega_x t + A^2 \cos^2 \omega_x t\right) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_{\text{к}} t) = \\ &= \frac{1}{2} K_{\text{п}} a^2 \left[U_{\text{см}}^2 + \frac{A^2}{2}\left(1 + \cos^2 \omega_x t - \sin^2 \omega_x t\right) + 2U_{\text{см}} A\cos\omega_x t\right] (1 + \cos 2\omega_{\text{к}} t) = \\ &= \frac{1}{2} K_{\text{п}} a^2 \left[U_{\text{см}}^2 + \frac{A^2}{2} 2U_{\text{см}} A\cos\omega_x t + \frac{A^2}{2}\cos 2\omega_{\text{к}} t\right] (1 + \cos 2\omega_{\text{к}} t), \end{aligned} \tag{3.134}$$

где $K_п$ – коэффициент передачи, зависящий от геометрии электростатического привода.

Из выражения (3.134) следует, что силовой сигнал имеет постоянную и основную составляющую на резонансной частоте привода, которые и определяют его энергетические возможности. Восприимчивость ИМ, являющихся частью подвижных структур привода, к составляющим на двойных частотах значительно меньше.

Если сигнал коммутации прямоугольный, представляемый в виде ряда

$$Sq(x) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{3} + \ldots\right), \tag{3.135}$$

где $x = \omega_к t$; $\omega_к = 2\pi/T$; a, T – амплитуда и период прямоугольной последовательности, то управляющий сигнал принимает вид

$$U_у = (U_{см} + A\cos\omega_x t)sq(\omega_к t).$$

Аналогично предыдущему, можно получить выражение для силового сигнала:

$$f(t) = K_п\left(U_{см}^2 + \frac{A^2}{2} + 2U_{см}A\cos\omega_x t + \right.$$
$$\left. + \frac{A^2}{2}\cos 2\omega_x t\right).$$

В этом случае силовой сигнал также обладает значительной составляющей на частоте резонанса, но с учетом формулы (3.135) до тех пор, пока частота коммутации не является нечетной гармоникой резонансной частоты.

Задача преобразователя на выходе фазовращателя заключается в превращении сигнала $U_{ос}$ в прямоугольный:

$$U_{ос} = Bsq(\omega_x t),$$

где B – амплитуда выходного сигнала преобразователя.

Таким образом, если сигнал коммутации по-прежнему прямоугольный, то на выходе Умн2 формируется управляющий сигнал

$$U_у = [U_{см} + Bsq(\omega_x t)]sq(\omega_к t).$$

Квадратичная зависимость силы привода от управляющего сигнала приводит к силовому сигналу, обеспечивающему РД ИМ:

$$f(t) = K_п[U_{см}^2 + B^2 + 2U_{см}Bsq(\omega_x t)].$$

Использование в блоке формирования управляющего сигнала преобразователя с большой амплитудой сигнала на выходе обеспечивает более высокий коэффициент усиления замкнутой цепи и возможность применения цифровой схемы обработки при формировании управляющего сигнала.

Дополнительная цепь обнуления квадратурного сигнала (квадратуры) может быть включена между выходом интегратора И1 и электродами привода.

Темы для самоконтроля

1. Жесткость упругих элементов и их зависимость от схемы нагружения.
2. Жесткость и частоты собственных колебаний.
3. Влияние массы упругих элементов на частоту собственных колебаний ЧЭ.
4. Влияние растягивающих сил на жесткость упругих элементов и частоту колебаний ЧЭ.
5. Главные формы и частоты колебаний ЧЭ.
6. Особенности деформирования мембраны постоянной толщины и связанной с ними топологии тензорезисторов.
7. Особенности деформирования мембраны с жестким центром и связанной с ними топологии тензорезисторов.
8. Схема, принцип работы, основные достоинства и недостатки емкостного преобразователя перемещений.

9. Способы изготовления и особенности работы тензорезисторных преобразователей деформаций.

10. Тепловой шум и полезный сигнал тензорезистора. Анизотропия электрического сопротивления полупроводниковых тензорезисторов.

11. Пьезорезистивные, нормированные пьезорезистивные коэффициенты и их физический смысл.

12. Чувствительность тензорезистивных схем.

13. Топология тензорезисторов на круглой мембране постоянной толщины, обеспечивающая максимальную чувствительность схем.

14. Преобразователь деформаций на ПАВ. Схема, принцип работы, статическая характеристика.

15. Преобразователь деформаций на струне. Схема, принцип работы, статическая характеристика.

16. Физические основы работы электростатических преобразователей силы.

17. Электростатический линейный микродвигатель. Схема и последовательность расчета.

18. Электростатический вращательный микродвигатель. Схема и последовательность расчета.

19. Магнитоэлектрический преобразователь силы с силовой (возвращающей) обмоткой. Схемы и основная расчетная зависимость.

20. Магнитоэлектрический преобразователь силы кольцевого резонатора. Схема, принцип работы. Основная расчетная зависимость.

21. Электромагнитные преобразователи силы со взаимодействующими проводниками с током. Схемы и основная расчетная зависимость.

22. Электромагнитный преобразователь силы с намагничиваемым исполнительным элементом. Схема и основная расчетная зависимость.

23. Анализ работы схемы включения емкостного преобразователя перемещений с аналоговым выходом по рис. 3.41.

24. Анализ работы схемы включения тензодатчиков с частотным выходом по рис. 3.42.

25. Принцип работы выходных устройств с ШИМ на выходе схемы.

26. Особенности электронных средств, обеспечивающих работу МГ.

27. Методы устранения электронными средствами основных погрешностей МГ.

28. Обеспечение электронными средствами РЖ МГ.

29. Обеспечение электронными средствами РД МГ.

30. Электронные методы выделения полезного сигнала МГ.

Глава 4

ДИНАМИКА ЧЭ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

В соответствии с определениями, введенными в гл. 1, чувствительным элементом (ЧЭ) микроакселерометра (МА) является инерционная масса (ИМ), обычно выполняемая в виде пластинки с упругим подвесом. ЧЭ микродатчиков давлений (ММД) представляет собой мембрану, постоянную по толщине либо с жестким центром. ЧЭ микрогироскопов (МГ) – это одна или несколько ИМ на упругом подвесе и первичные преобразователи, обеспечивающие режим движения (РД) ИМ. Под динамикой ЧЭ микромеханических приборов будем понимать как собственное, так и вынужденное – под действием измеряемых и вредных (паразитных) воздействий – движение ИМ с учетом особенностей конструкции ЧЭ. По теории автоматического управления ЧЭ микромеханических приборов являются колебательными звеньями, параметры которых и характеризуют динамику ЧЭ.

4.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧЭ МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРОВ

4.1.1. Осевой микроакселерометр

Предполагается, что центр масс (ЦМ, точка *C*) пластины смещен в плоскости *XZ* относительно геометрического центра (точка *O*) на величины l_x, l_z (рис. 4.1, *а*). Центр масс находится в плоскости симметрии пластины (рис. 4.1, *б*). При действии сил ma_y и mg (m – масса пластины), обусловленных измеряемым ускорением a_y и ускорением g силы тяжести, перемещение пластины определяется линейной y и угловой α координатами (рис. 4.1, *в*).

Текущее положение ИМ (пластины) определено следующим образом (рис. 4.1, *г*). С корпусом акселерометра связана система координат *XYZ*, начало которой совпадает с центром симметрии пластины.

Вдоль осей *X*, *Y*, *Z* направлены векторы виброперемещений $x_в$, $y_в$, $z_в$, которые являются проекциями виброперемещения точки *O*, и векторы линейных ускорений a_x, a_y, a_z, являющиеся проекциями линейного ускорения точки *O*. Вследствие действия обобщенных сил и конечной жесткости подвеса центр симметрии ИМ перемещается в точку O_1, определяемую координатами x, y, z упругого смещения.

Оси системы координат $x_1y_1z_1$ параллельны соответствующим осям системы координат *XYZ*. Угловое положение пластины задано углами β и α, которым отвечают системы координат $x_2y_2z_2$ и $x_3y_3z_3$. Плоскость пластины определена осями O_1x_3 и O_1z_3, где на расстоянии l_x вдоль оси O_1x_3 и l_z вдоль оси O_1z_3 находится ЦМ (точка *C*). С точкой *C* связана система координат *xyz*, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $x_3y_3z_3$. Таким образом, положение ИМ акселерометра определено тремя линейными (x, y, z) и двумя угловыми координатами (α, β) (пять обобщенных координат).

В принятой постановке задачи возможный угол разворота пластины вокруг оси O_1y_3 не рассматривается, так как предполагается, что жесткость подвеса вокруг этой оси значительно больше жесткостей по угловым координатам α и β.

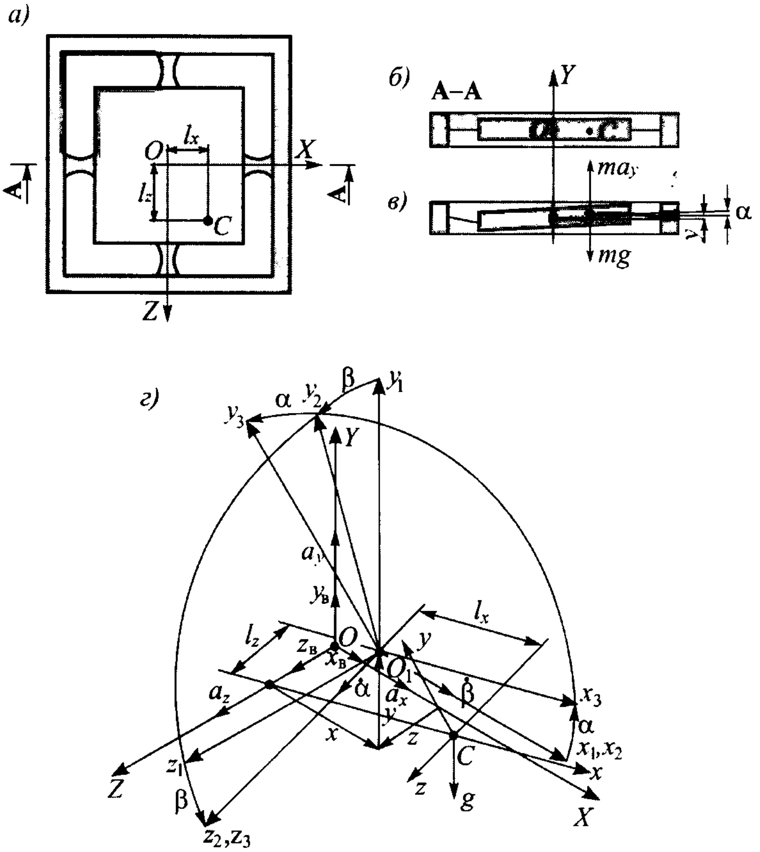


Рис. 4.1. К выводу уравнений движения ЧЭ осевого МА:
а, *б* – положения ЦМ пластины; *в* – положение пластины при действии ускорения; *г* – системы координат

Уравнения движения ЧЭ получим с помощью уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,\ j=1...5, \tag{4.1}$$

где T – кинетическая энергия пластины; Q_j – обобщенные силы по соответствующим обобщенным координатам; q_j, $\dot{q}_j$ – обобщенные координаты и скорости ($q_1 = x$, $\dot{q}_1=\dot{x}$, $q_2=y$, $\dot{q}_2=\dot{y}$, $q_3=z$, $\dot{q}_3=\dot{z}$, $q_4=\alpha$, $\dot{q}_4=\dot{\alpha}$, $q_5=\beta$, $\dot{q}_5=\dot{\beta}$).

Выражение, определяющее кинетическую энергию пластины, имеет вид

$$T=\frac{1}{2}(J_x\dot{\beta}^2+J_z\dot{\alpha}^2)+\frac{m}{2}(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\dot{z}_c^2), \tag{4.2}$$

где J_x, J_z – главные центральные моменты инерции пластины относительно осей Cx и Cy; $\dot{x}_c$, $\dot{y}_c$, $\dot{z}_c$ – линейные скорости ЦМ пластины в направлении осей X, Y, Z соответственно.

В соответствии с рис. 4.1

$$x_\text{с} = x + x_\text{в} + l_x\cos\alpha; \qquad y_\text{с} = y + y_\text{в} + l_x\sin\alpha\cos\beta - l_z\sin\beta; \qquad z_\text{с} = z + z_\text{в} + l_z\cos\beta.$$

Линейные скорости ЦМ пластины

$$\dot{x}_\text{с} = \dot{x} + \dot{x}_\text{в} - l_x\dot{\alpha}\sin\alpha;$$

$$\dot{y}_\text{с} = \dot{y} + \dot{y}_\text{в} + l_x\left(\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - \dot{\beta}\sin\beta\sin\alpha\right) - l_z\dot{\beta}\cos\beta \approx \dot{y} + \dot{y}_\text{в} + l_x\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - l_z\dot{\beta}\cos\beta$$

(так как $\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta >> \dot{\beta}\sin\beta\sin\alpha$); $\dot{z}_\text{с} = \dot{z} + \dot{z}_\text{в} - l_z\dot{\beta}\sin\beta$.

В качестве примера получим уравнение движения ЧЭ по координате y. Вычислим производные:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_\text{с}}\frac{\partial \dot{y}_\text{с}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}_\text{с} = m\left(\dot{y} + \dot{y}_\text{в} + l_x\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - l_z\dot{\beta}\cos\beta\right);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\left\{\ddot{y} + \ddot{y}_\text{в} + l_x\left[\ddot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - \dot{\alpha}\left(\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\beta + \dot{\beta}\sin\beta\cos\alpha\right)\right] - l_z\left(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta\right)\right\}.$$

Имея в виду, что обобщенные координаты α, β, y – малые величины, будем полагать, что $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$.

Кроме того, станем пренебрегать произведениями и квадратами малых величин, а также величинами, имеющими еще более высокий порядок малости.

С учетом сказанного, уравнение движения ЧЭ по линейной координате y имеет вид

$$m\,(\ddot{y} + l_x\ddot{\alpha} + l_z\ddot{\beta}) = Q_y - m\ddot{y}_\text{в}. \tag{4.3}$$

Поступая аналогичным образом, получим уравнения движения ЧЭ по остальным координатам:

$$\left.\begin{array}{c} m\ddot{x} = Q_x - m\ddot{x}_\text{в}\,;\ m\ddot{z} = Q_z - m\ddot{z}_\text{в}\,; \\ \left(J_x + ml_z^2\right)\ddot{\beta} + ml_z\left(\ddot{y} + l_x\ddot{\alpha}\right) = Q_\beta - ml_z\left(\ddot{y}_\text{в} - \ddot{z}_\text{в}\beta\right); \\ \left(J_z + ml_x^2\right)\ddot{\alpha} + ml_x\left(\ddot{y} + l_z\ddot{\beta}\right) = Q_\alpha - ml_x\left(\ddot{y}_\text{в} - \ddot{x}_\text{в}\alpha\right). \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

Обобщенные силы включают в себя силы, обусловленные жесткостью подвеса, ускорением переносного движения и демпфированием.

В общем случае перемещение пластины (ИМ) может быть представлено как результат двух движений: параллельного перемещения по координате y и разворота на угол α (аналогично – на угол β) (рис. 4.1, *в*). При этом оба конца каждого упругого элемента подвеса жестко защемлены.

Матрица суммарных сил и моментов, действующих на пластину со стороны одного упругого элемента, определяется формулой (3.2), в соответствии с которой обобщенные сила и момент, обусловленные жесткостью одного упругого элемента, определяются зависимостями (3.3), где коэффициенты жесткости определяются формулами (3.1).

В общем случае, полагая $l_x \approx l_z$ и имея в виду малые углы "закрутки" упругих элементов относительно осей x и z, можно использовать зависимости (3.3), домножая их на число параллельно работающих балок подвеса.

Запишем выражения силы, обусловленные ускорением переносного движения, и силы тяжести для соответствующих координат:

$$\left.\begin{aligned}&Q_x = ma_x;\ Q_y = m(a_y - g);\ Q_z = ma_z;\\&Q_\alpha = m(l_x + x_\text{в})(a_y - g);\\&Q_\beta = m(l_z + z_\text{в})(g - a_y).\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Обобщенные силы демпфирования пропорциональны линейной $\dot{y}$ и угловой $\dot{\alpha}$ (а также $\dot{\beta}$) скоростям движения пластины и могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} F_\text{д} \\ M_\text{д} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{\text{д}y} & k_{\text{д}y}a \\ k_{\text{д}y}a & k_{\text{д}\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}, \tag{4.6}$$

где $k_{\text{д}y}$, $k_{\text{д}\alpha}$ – коэффициенты демпфирования по линейной и угловой координатам, определение которых будет рассмотрено в подразд. 4.4; a – линейная координата центра угловых колебаний пластины, которую можно считать равной половине длины пластины.

При изучении динамики ЧЭ в первом приближении можно не учитывать взаимосвязь между обобщенными координатами при вычислении обобщенных сил жесткости и сил демпфирования.

Уравнения движения (4.3), (4.4) с учетом изложенного принимают вид

$$\left.\begin{aligned}&m\ddot{x} + k_{\text{д}x}\dot{x} + G_x x = m(a_x - \ddot{x}_\text{в});\\&m\ddot{z} + k_{\text{д}z}\dot{z} + G_z z = m(a_z - \ddot{z}_\text{в});\\&m\ddot{y} + k_{\text{д}y}\dot{y} + G_y y + m(l_x\ddot{\alpha} + l_z\ddot{\beta}) = m(a_y - g - \ddot{y}_\text{в});\\&J_\beta\ddot{\beta} + k_{\text{д}\beta}\dot{\beta} + G_\beta\beta + m(l_z + z)(\ddot{y} + l_x\ddot{\alpha}) = m(l_z + z)(g - a_y - \ddot{y}_\text{в}) +\\&+ m(g - a_y)(z_\text{в} + z) + m(l_z + z)\ddot{z}_\text{в}\beta;\\&J_\alpha\ddot{\alpha} + k_{\text{д}\alpha}\dot{\alpha} + G_\alpha\alpha + m\left(l_x + x\right)\left(\ddot{y} + l_z\ddot{\beta}\right) = m(l_x + x)(a_y - g - \ddot{y}_\text{в}) +\\&+ m(a_y - g)(x_\text{в} + x) + m(l_x + x)\ddot{x}_\text{в}\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

уравнения связей

$$y_\text{с} = y + l_x\alpha + l_z\beta + y_\text{в};\qquad x_\text{с} = x + l_x + x_\text{в};\qquad z_\text{с} = z + l_z + z_\text{в}, \tag{4.8}$$

где $J_\beta = J_x + ml_z^2$; $J_\alpha = J_z + ml_x^2$ – момент инерции пластины (ИМ) относительно осей O_1z_1 и O_1x_1 соответственно; G_y, G_α, G_β определяются по формуле (3.4, 3.5); G_x, G_z – жесткости подвеса по координатам x и z, которые могут быть вычислены по формуле (3.31) (индекс y следует заменить на индекс z).

Для акселерометров с осью чувствительности по координате y необходимо конструктивно обеспечить $G_x \approx G_z >> G_y$. На этом основании можно считать $x \approx z \approx 0$. Система уравнений (4.7) и уравнения связей (4.8) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{y} + k_{\text{д}y}\dot{y} + G_y y + m(l_x\ddot{\alpha} + l_z\ddot{\beta}) = m(a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}}); \\ & J_\beta\ddot{\beta} + k_{\text{д}\beta}\dot{\beta} + G_\beta\beta + ml_z(\ddot{y} + l_x\ddot{\alpha}) = ml_z(g - a_y - \ddot{y}_{\text{в}}) + m(g - a_y)z_{\text{в}} + ml_z\ddot{z}_{\text{в}}\beta; \\ & J_\alpha\ddot{\alpha} + k_{\text{д}\alpha}\dot{\alpha} + G_\alpha\alpha + ml_x(\ddot{y} + \mathrm{l}_{\mathrm{z}}\ddot{\beta}) = ml_x(a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}}) + m(a_y - g)x_{\text{в}} + ml_x\ddot{x}_{\text{в}}\alpha; \end{aligned}\right\}, \tag{4.9}$$

$$y_{\text{с}} = y + l_x\alpha + l_z\beta + y_{\text{в}}. \tag{4.10}$$

Предположим теперь, что $l_z = 0$, $l_x \neq 0$, учтем формулы (3.2), (4.6) и запишем уравнения (4.3), (4.4), считая, что все балки работают на изгиб и $x = z = 0$, в виде

$$\left.\begin{aligned} & m(\ddot{y} + l_x\ddot{\alpha}) + n(k_{11}y + k_{12}\alpha) + k_{\text{д}y}\dot{y} + \frac{k_{\text{д}y}}{a}\dot{\alpha} = m(a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}}); \\ & J_\beta\ddot{\beta} + n(k_{21}y + k_{22}\beta) + k_{\text{д}y}a\dot{y} + k_{\text{д}\beta}\dot{\beta} = mz_{\text{в}}(g - a_y); \\ & J_\alpha\ddot{\alpha} + ml_x\ddot{y} + nk_{21}y + (nk_{22} - ml_x\ddot{x}_{\text{в}})\alpha + k_{\text{д}y}a\dot{y} + k_{\text{д}\alpha}\dot{\alpha} = ml_x(a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}}) + mx_{\text{в}}(a_y - g); \\ & \qquad y_{\text{с}} = y + l_x\alpha + y_{\text{в}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

где n – число упругих элементов (балок) подвеса.

При исследовании системы (4.11) надо иметь в виду, что можно решать систему из первого и третьего уравнений, так как в них не входит координата β, так же, как и в уравнение связи.

Из уравнений (4.9) для установившегося режима ($\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{y} = \ddot{\alpha} = \ddot{\beta} = \ddot{y} = 0$) следуют зависимости для вычисления статических смещений пластины по обобщенным координатам:

$$\left.\begin{aligned} & y_{\text{ст}} = \frac{m}{G_y}(a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}}); \\ & \beta_{\text{ст}} = \frac{m}{G_\beta - ml_z\ddot{z}_{\text{в}}}\left[(g - a_y)z_{\text{в}} + (g - a_y - \ddot{y}_{\text{в}})\,l_z\right]; \\ & \alpha_{\text{ст}} = \frac{m}{G_\alpha - ml_x\ddot{x}_{\text{в}}\left[(a_y - g)\,x_{\text{в}} + (a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}})\,l_x\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Пример 4.1

Вычислим статические смещения пластины для исходных данных: a_y = 100 м/с^2 ; $x_{\text{в}} = x_{\text{в}0}\sin\omega t$, $y_{\text{в}} = y_{\text{в}0}\sin\omega t$, $z_{\text{в}} = z_{\text{в}0}\sin\omega t$, $x_{\text{в}0} = y_{\text{в}0} = z_{\text{в}0} = 10^{-3}$ м, $\omega = 2\pi\cdot100$ 1/с; $l_x = l_z = 5 \cdot 10^{-5}$ м.

Воспользуемся результатами вычислений из примера 3.1: $m = m_{\text{п}} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ кг, G_y = 525 Н/м; $G_\alpha = G_\beta = 47{,}72 \cdot 10^{-5}$ Н·м. Вычислим $|ml_z\ddot{z}_{\text{в}}| = |ml_x\ddot{x}_{\text{в}}| = 0{,}148 \cdot 10^{-5}$ Н·м и по формуле (4.12) получим $y_{\text{ст}} = 10^{-5}$ (1,288 + 5,63sinωt) м, $\alpha_{\text{ст}} = \beta_{\text{ст}} = 10^{-4}$ (7,08 + 30sinωt) рад.

Из вычислений следует, что даже при небольшой частоте вибрации (100 Гц) постоянное смещение ИМ под действием измеряемого ускорения a_y меньше амплитуды вибрационных перемещений. Линейная вибрация приводит к значительным наклонам ИМ, на которые также накладываются угловые колебания на частоте вибрации. Любая из составляющих может быть отфильтрована средствами электроники.

Пример 4.2

Вычислим статическое смещение пластины $y_{ст}$, используя систему (4.11), при отсутствии вибрации. Полагая производные от координат нулевыми, получим

$$\left.\begin{aligned} n(k_{11}y_{ст}+k_{12}\alpha_{ст}) &= m(a_y-g);\\ n(k_{21}y_{ст}+k_{22}\alpha_{ст}) &= ml_x(a_y-g).\end{aligned}\right\}$$

Выражение для $y_{ст}$ имеет вид

$$y_{ст}=\frac{m(a_y-g)(k_{22}-l_xk_{12})}{n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}.$$

Исходные данные из примеров 3.1 и 4.1: $m = 7{,}5\cdot10^{-5}$ кг, $l_x = 5\cdot10^{-5}$ м, $a_y = 100$ м/с^2, $n = 4$, $k_{11} = 131{,}25$ Н/м, $k_{21} = 6{,}56\cdot10^{-2}$ Н, $k_{22} = 17{,}5\cdot10^{-5}$ Н·м.

Статическое смещение пластины:

$$y_{ст}=\frac{7{,}5\cdot10^{-5}(100-9{,}8)(17{,}5\cdot10^{-5}-5\cdot10^{-5}\cdot6{,}56\cdot10^{-2})}{4[131{,}25\cdot17{,}5\cdot10^{-5}-(6{,}56\cdot10^{-2})^2]}=1{,}55\cdot10^{-5}\text{ м}.$$

В примере 4.1 получено $y_{ст} = 1{,}288\cdot10^{-5}$ м. Относительная погрешность вычислений по отношению к полученному результату 17,4 %.

4.1.2. Маятниковый микроакселерометр

ЧЭ МА представляет собой ИМ (пластину) на упругом подвесе, который может быть оформлен в виде консольных балок, работающих на изгиб, либо как упругие элементы типа торсионов, работающих на кручение (см. рис. 1.11).

Очевидно, что если в схеме по рис. 4.1, *а* устранить упругие связи вдоль любой оси (x или z), то получается схема маятникового МА с подвесом в виде балок, работающих на кручение (торсионов). В этом случае можно пользоваться уравнениями (4.7)–(4.9), имея в виду, что выходной координатой будет один из углов (α или β).

Подвес ИМ на консольных балках должен исключать возможность форм колебаний по рис. 3.5. Поэтому вывод уравнений движения выполним для перемещений ИМ в плоскости (рис. 4.2), допускающих первую и вторую формы колебаний маятника (пластины ИМ).

Предполагается, что ЦМ (точка C) недеформируемой пластины (ИМ) располагается в ее геометрическом центре на расстоянии a от ее краев. ИМ связана с корпусом акселерометра гибким элементом балочного типа длиной $AB = l$.

Для определения текущего положения ИМ введены следующие системы координат: OXY – неподвижная система; Ox_0y_0 – система координат, связанная с основанием, на котором установлен МА; $O_1x_ky_k$ – то же, с корпусом МА (точки B и O_1 совпадают).

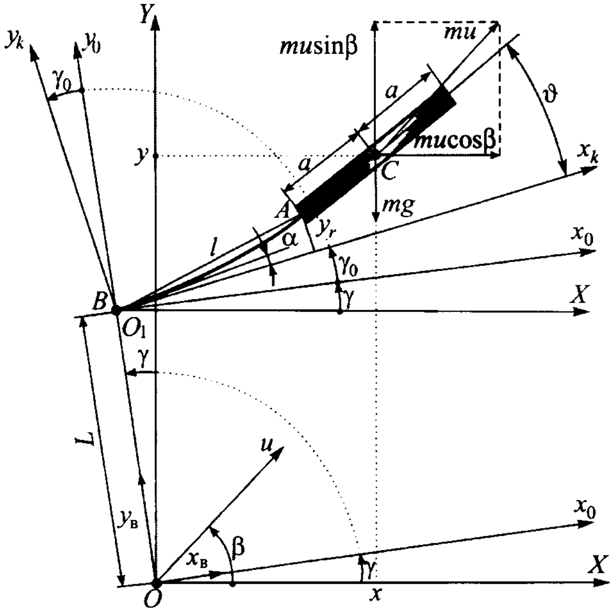


Рис. 4.2. К выводу уравнений движения ЧЭ маятникового МА

Положение системы Ox_0y_0 относительно оси OX определено углом γ, который может произвольно изменяться во времени. Основание, а вместе с ним и система координат Ox_0y_0 могут перемещаться с ускорением u, направление вектора которого зависит от угла β. Кроме того, основание может совершать "косую" вибрацию, заданную виброперемещениями $x_в$ и $y_в$. Начало системы координат $O_1x_ky_k$ вдоль оси Oy_0 определено как $OO_1 = L$, а ее положение относительно системы Ox_0y_0 – произвольным, но фиксированным в пределах 0...360° углом γ_0. Мгновенное положение ЦМ (точка C) определено координатами x и y в системе осей OXY. Положение оси, проходящей через точки A и C в системе координат $O_1x_ky_k$, определено углом ϑ, а положение точки A – координатой y_r, параллельной оси O_1y_k. Угол между осью O_1x_k и касательной к изогнутой оси упругого элемента в точке B в силу его малости: $\alpha \approx y_r/l$. В точке C приложены внешние силы, обусловленные ускорением u и g, а также виброускорением.

Уравнения движения получим вторым методом Лагранжа, имея в виду, что обобщенные координаты $q_1 = \vartheta$, $q_2 = y_r$.

Кинетическая энергия ИМ m акселерометра

$$T = \frac{1}{2}J_c\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{4.13}$$

где J_c – главный центральный момент инерции ИМ вокруг оси, перпендикулярной к плоскости XY.

Запишем выражения для координат точки C:

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cos(\alpha + \gamma_0 + \gamma) + a\cos(\vartheta + \gamma_0 + \gamma) - L\sin\gamma + x_в\cos\gamma - y_в\sin\gamma; \\ y &= l\sin(\alpha + \gamma_0 + \gamma) + a\sin(\vartheta + \gamma_0 + \gamma) + L\cos\gamma + x_в\sin\gamma + y_в\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Учитывая, что углы α и ϑ малы ($\sin\vartheta \approx \vartheta$, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha = \cos\vartheta \approx 1$) и при $\gamma \neq 0$ имеют место неравенства $\alpha << \gamma$, $\vartheta << \gamma$, из системы (4.14) получим следующие равенства:

$\gamma_0 = 0°$

$$\left.\begin{aligned} x &= -(L + a\vartheta + y_r)\sin\gamma + (l + a)\cos\gamma + x_{\text{в}}\cos\gamma - y_{\text{в}}\sin\gamma; \\ y &= (l + a)\sin\gamma + (L + a\vartheta + y_r)\cos\gamma + x_{\text{в}}\sin\gamma + y_{\text{в}}\cos\gamma; \end{aligned}\right\}$$

$\gamma_0 = 90°$

$$\left.\begin{aligned} x &= -(L + l + a)\sin\gamma - (y_r + a\vartheta)\cos\gamma + x_{\text{в}}\cos\gamma - y_{\text{в}}\sin\gamma; \\ y &= (L + l + a)\cos\gamma - (y_r + a\vartheta)\sin\gamma + x_{\text{в}}\sin\gamma + y_{\text{в}}\cos\gamma; \end{aligned}\right\}$$

(4.15)

$\gamma_0 = 180°$

$$\left.\begin{aligned} x &= (-L + a\vartheta + y_r)\sin\gamma - (l + a)\cos\gamma + x_{\text{в}}\cos\gamma - y_{\text{в}}\sin\gamma; \\ y &= -(l + a)\sin\gamma + (L - a\vartheta - y_r)\cos\gamma + x_{\text{в}}\sin\gamma + y_{\text{в}}\cos\gamma; \end{aligned}\right\}$$

$\gamma_0 = 270°$

$$\left.\begin{aligned} x &= (-L + l + a)\sin\gamma + (y_r + a\vartheta)\cos\gamma + x_{\text{в}}\cos\gamma - y_{\text{в}}\sin\gamma; \\ y &= (L - l - a)\cos\gamma + (y_r + a\vartheta)\sin\gamma + x_{\text{в}}\sin\gamma + y_{\text{в}}\cos\gamma. \end{aligned}\right\}$$

В качестве примера получим уравнения движения для случая $\gamma_0 = 0°$. Имея в виду равенства (4.15) ($\gamma_0 = 0°$), вычислим $\dot{x}$, $\dot{y}$ и в соответствии с выражением (4.13) запишем

$$T = \frac{1}{2}J_c\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}\left\{\left[\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\dot{\gamma} + a\dot{\vartheta} + \dot{y}_r + \dot{y}_{\text{в}}\right]^2 + \left[\left(L + a\vartheta + y_r + y_{\text{в}}\right)\dot{\gamma} - \dot{x}_{\text{в}}\right]^2\right\}.$$

Найдем производные от полученного выражения:

$$\frac{\partial T}{\partial\vartheta} = ma\left[\left(L + a\vartheta + y_r + y_{\text{в}}\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 - \dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma}\right]; \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}} = J_{\text{c}}\vartheta + ma\left[\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\dot{\gamma} + a\dot{\vartheta} + \dot{y}_r + \dot{y}_{\text{в}}\right];$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}} = J_{\text{c}}\ddot{\vartheta} + ma\left[\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} + \dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma} + a\ddot{\vartheta} + \ddot{y}_r + \ddot{y}_{\text{в}}\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_r} = m\left[\left(L + a\vartheta + y_r + y_{\text{в}}\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 - \dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma}\right]; \qquad \frac{\partial T}{\partial\dot{y}_r} = m\left[\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\dot{\gamma} + a\dot{\vartheta} + \dot{y}_r + \dot{y}_{\text{в}}\right];$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_r} = m\left[\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} + \dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma} + a\ddot{\vartheta} + \ddot{y}_r + \ddot{y}_{\text{в}}\right].$$

В соответствии с уравнением (4.1) получим уравнения движения ЧЭ МА для случая $\gamma_0 = 0°$:

$$\left.\begin{aligned} &\left(J_{\text{c}} + ma^2\right)\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r - ma\left(y_r + a\vartheta\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 = \\ &= -ma\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} + ma\left(L + y_{\text{в}}\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 - ma\ddot{y}_{\text{в}} - 2am\dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_\vartheta; \\ &m\left[\ddot{y}_r + a\ddot{\vartheta} - \left(y_r + a\vartheta\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2\right] = -m\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\dot{\gamma} + m\left(l + y_{\text{в}}\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 - m\ddot{y}_{\text{в}} - 2m\dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_y, \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

где Q_ϑ, Q_y – обобщенные силы по соответствующим координатам.

Поступив аналогичным образом, получим уравнения движения ЧЭ МА для следующих случаев:

$\gamma_0 = 90°$

$$\left.\begin{aligned}&(J_{\text{с}} + ma^2)\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r - ma(y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2 = \\&\quad = -ma(L + l + a + y_{\text{в}})\ddot{\gamma} - amx_{\text{в}}(\dot{\gamma})^2 + am\ddot{x}_{\text{в}} - 2ma\dot{y}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_\vartheta; \\&m\left[\ddot{y}_r + a\ddot{\vartheta} - (y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2\right] = \\&\quad = -m(L + l + a + y_{\text{в}})\ddot{\gamma} - mx_{\text{в}}(\dot{\gamma})^2 + m\ddot{x}_{\text{в}} - 2m\dot{y}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_y;\end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

$\gamma_0 = 180°$

$$\left.\begin{aligned}&(J_{\text{с}} + ma^2)\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r - ma(y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2 = \\&\quad = -ma(l + a - x_{\text{в}})\ddot{\gamma} - ma(L + y_{\text{в}})(\dot{\gamma})^2 + am\ddot{y}_{\text{в}} + 2am\dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_\vartheta; \\&m\left[\ddot{y}_r + a\ddot{\vartheta} - (y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2\right] = \\&\quad = -m(l + a - x_{\text{в}})\ddot{\gamma} - m(L + y_{\text{в}})(\dot{\gamma})^2 + m\ddot{y}_{\text{в}} + 2m\dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_y;\end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

$\gamma_0 = 270°$

$$\left.\begin{aligned}&(J_{\text{с}} + ma^2)\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r - ma(y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2 = \\&\quad = ma(L - l - a - y_{\text{в}})\ddot{\gamma} - amx_{\text{в}}(\dot{\gamma})^2 + am\ddot{x}_{\text{в}} + 2ma\dot{y}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_\vartheta; \\&m\left[\ddot{y}_r + a\ddot{\vartheta} - (y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2\right] = \\&\quad = m(L - l - a - y_{\text{в}})\ddot{\gamma} + mx_{\text{в}}(\dot{\gamma})^2 - m\ddot{x}_{\text{в}} + 2m\dot{y}_{\text{в}}\dot{\gamma} + Q_y.\end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

Обобщенные силы Q_ϑ, Q_y в уравнениях (4.16)–(4.19) включают в себя силы, обусловленные жесткостью упругой балки подвеса, ускорением g и u, демпфированием.

Обобщенные силы, обусловленные жесткостью подвеса, вычисляются матричной формой (3.11), в которой коэффициенты жесткости определяются по формулам (3.10).

Обобщенные силы, связанные демпфированием, находятся аналогично (4.6):

$$\begin{vmatrix} F_{\text{д}} \\ M_{\text{д}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{\text{д}y} & k_{\text{д}y}/a \\ k_{\text{д}y}a & k_{\text{д}\vartheta} \end{vmatrix}, \qquad (4.20)$$

где $k_{\text{д}y}$, $k_{\text{д}\vartheta}$ – коэффициенты демпфирования, соответствующие линейной и угловой координатам; a – геометрический параметр (см. рис. 4.2).

Обобщенные силы, обусловленные ускорением u и g, в соответствии с рис. 4.2 для обобщенных координат y_r и ϑ определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned}F_{\gamma 0} &= m\left\{-g\cos\left[\gamma_0 + (\vartheta + \gamma)\right] + u\sin\left[\beta - (\vartheta + \gamma + \gamma_0)\right]\right\}; \\M &= F_{\gamma 0}(l + a).\end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

Таким образом, обобщенные силы Q_ϑ и Q_y определяются суммированием соответствующих выражений (3.11), (4.20), (4.21). Заметим, что обобщенные силы, обусловленные жесткостью подвеса и демпфированием, не зависят от угла γ_0 установки корпуса МА.

С учетом (4.16)–(4.19) и (3.11), (4.20), (4.21) запишем уравнения движения ЧЭ МА для четырех вариантов установки его корпуса на объекте в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&m\left[\ddot{y}_r + a\ddot{\vartheta} - (y_r + a\vartheta)(\dot{\gamma})^2\right] + n(k_{11}y_r + k_{12}\vartheta) + k_{\text{ду}}\dot{y}_r + \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{a}\dot{\vartheta} = F + F_{\gamma 0};\\
&\left(J_{\text{c}} + ma^2\right)\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r - ma\left(y_r + a\vartheta\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 + n\left(k_{21}y_r + k_{22}\vartheta\right) + k_{\text{ду}}a\dot{y}_r + k_{\text{д}\vartheta}\dot{\vartheta} =\\
&= Fa + F_{\gamma 0}\left(l + a\right),
\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

где n – число балок; F и $F_{\gamma 0}$ вычисляются по зависимостям

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_0 = 0^\circ\\
&\quad F = -m\left(l + a + x_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} + \left(L + y_{\text{в}}\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 - m\ddot{y}_{\text{в}} - 2m\dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma};\\
&\quad F_{\gamma 0} = m\left[-g\cos\left(\vartheta + \gamma\right) + u\sin\left(\beta - \vartheta - \gamma\right)\right];\\
&\gamma_0 = 90^\circ\\
&\quad F = -m\left(L + l + a + y_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} - mx_{\text{в}}\left(\dot{\gamma}\right)^2 + m\ddot{x}_{\text{в}} - 2m\dot{y}_{\text{в}}\dot{\gamma};\\
&\quad F_{\gamma 0} = m\left[-g\sin\left(\vartheta + \gamma\right) - u\sin\left(\beta - \vartheta - \gamma\right)\right];\\
&\gamma_0 = 180^\circ\\
&\quad F = -m\left(l + a - x_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} - m\left(L + y_{\text{в}}\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2 + m\ddot{y}_{\text{в}} + 2m\dot{x}_{\text{в}}\dot{\gamma};\\
&\quad F_{\gamma 0} = m\left[g\cos\left(\vartheta + \gamma\right) - u\sin\left(\beta - \vartheta - \gamma\right)\right];\\
&\gamma_0 = 270^\circ\\
&\quad F = m\left(L - l - a - y_{\text{в}}\right)\ddot{\gamma} + mx_{\text{в}}\left(\dot{\gamma}\right)^2 - m\ddot{x}_{\text{в}} + 2m\dot{y}_{\text{в}}\dot{\gamma};\\
&\quad F_{\gamma 0} = m\left[-g\sin\left(\vartheta + \gamma\right) + u\cos\left(\beta - \vartheta - \gamma\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Уравнения движения (4.22) позволяют проанализировать динамику ЧЭ маятникового МА для различных вариантов возмущений.

Уравнения движения ЧЭ МА справедливы и для акселерометров в макроисполнении.

Оценим влияние установки корпуса МА на частоты собственных, недемпфированных колебаний маятниковой ИМ (маятника).

Для углов $\gamma_0 = 0$ и 180° установки корпуса относительно неподвижного основания уравнение частот (3.19) выглядит следующим образом:

$$J_{\text{c}}mp^4 - n\left(J_A k_{11} + mk_{22} - 2mak_{12}\right)p^2 + n^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) = 0\ . \tag{4.24}$$

Оно имеет решение вида (3.20) с коэффициентами

$$a = J_{\text{c}}m; \qquad b = J_A k_{11} + mk_{22} - 2mak_{12}; \qquad c = k_{11}k_{12} - k_{12}^2. \tag{4.25}$$

Для углов γ_0 = 90 и 270° установки корпуса относительно неподвижного основания уравнение частот записывается так:

$$J_c m p^4 - \left[n\left(J_A k_{11} + m k_{22} - 2mak_{12}\right) \mp m^2 gl\right]p^2 + n\left\{n(k_{11}k_{12} - k_{12}^2) \mp mg\left[k_{11}\left(l+a\right) - k_{12}\right]\right\} = 0, \tag{4.26}$$

где знак "–" перед членами, содержащими величину g, соответствует углу γ_0 = 90°, а знак "+" – углу установки γ_0 = 270°.

Решение уравнения (4.26) соответствует уравнению (3.20), в котором

$$a = J_c m; \qquad b = J_A k_{11} + m k_{22} + 2mak_{12} \mp m^2 gl;$$
$$c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \mp mg\left[k_{11}\left(l+a\right) - k_{12}\right]. \tag{4.27}$$

Заметим, что в выражении для коэффициента b член m^2gl на несколько порядков меньше остальных и его можно не учитывать при расчетах.

Пример 4.3

Рассчитаем частоты собственных, недемпфированных колебаний маятника по примеру 3.2 с параметрами: m = 0,29 · 10^{-3} кг; J_c = 1,775 · 10^{-9} кг·м^2; J_A = 7,093 · 10^{-9} кг·м^2; k_{11} = 2,036 · 10^3 Н/м, $k_{21} = k_{12}$ = –0,819 Н, k_{22} = 4,398 · 10^{-4} Н·м^2; a = 2,28 · 10^{-3} м, $l + a$ = 5 · 10^{-3} м.

Коэффициенты по зависимостям (4.25) равны:

$$a = 0{,}514 \cdot 10^{-12}\ \text{кг}^2\text{·м}^2; \quad b = 16{,}601 \cdot 10^{-6}\ \text{кг}^2\text{·м}^2/\text{с}^2; \quad c = 0{,}224\ \text{кг}^2\text{·м}^2/\text{с}^4;$$

Коэффициенты a и b по зависимостям (4.27) имеют те же значения, а коэффициент $c = \left(0{,}224 \mp 0{,}031\right)$ кг^2·м^2/с^4. Результаты расчетов по формуле (3.20) приведены в таблице.

Частота, 1/с (Гц)	Кол-во упругих балок	Угол установки корпуса акселерометра γ_0, °		
		0 и 180	90°	270
p_1	1	116,81 (18,6)	112,56 (17,92)	124,87 (19,88)
	3	202,32 (32,22)	194,96 (31,04)	216,28 (34,44)
p_2	1	5687,0 (905,57)	5687,52 (905,65)	5687,26 (905,62)
	3	9850,17 (1568,49)	9851,07 (1568,64)	9850,62 (1568,57)

Из полученных результатов следует, что первая (низшая) частота собственных колебаний маятника зависит от его ориентации относительно основания. При этом наибольшее значение частоты соответствует углу γ_0 = 270° ("прямой" маятник), а наименьшее значение – углу γ_0 = 90° ("перевернутый" маятник).

4.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЧЭ МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРОВ

4.2.1. Осевой микроакселерометр

Будем полагать, что жесткость подвеса осевого МА (см. рис. 4.1, *а*) по координатам x, z значительно больше, чем жесткость по координатам y, α, β. Для этого случая ось y является осью чувствительности. Перепишем уравнения (4.9), (4.10):

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y} + k_{\text{д}y}\dot{y} + G_y y + m\left(l_x\ddot{\alpha} + l_z\ddot{\beta}\right) &= F - F_{\text{в}y}\,; \\ J_\beta\ddot{\beta} + k_{\text{д}\beta}\dot{\beta} + G_\beta\beta + ml_z\left(\ddot{y} + l_x\ddot{\alpha}\right) &= -\left(F + F_{\text{в}y}\right)l_z - Fz_{\text{в}} + F_{\text{в}z}l_z\beta; \\ J_\alpha\ddot{\alpha} + k_{\text{д}\alpha}\dot{\alpha} + G_\alpha\alpha + ml_x\left(\ddot{y} + l_z\ddot{\beta}\right) &= \left(F - F_{\text{в}y}\right)l_x + Fx_{\text{в}} + F_{\text{в}x}l_x\alpha\,; \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

$$y_{\text{c}} = y + l_x\alpha + l_z\beta + y_{\text{в}}, \tag{4.29}$$

где $m(a_y - g) = F,\ m\ddot{y}_{\text{в}} = F_{\text{в}y},\ \ m\ddot{x}_{\text{в}} = F_{\text{в}x},\ \ m\ddot{z}_{\text{в}} = F_{\text{в}z}$.

На рис. 4.3 в соответствии с уравнениями (4.28) приведена структурная схема ($F_{\text{в}y} = 0$) ЧЭ, иллюстрирующая сложный характер перекрестных связей, обусловленных смещением ЦМ ЧЭ относительно геометрического центра подвеса. Если в системе (4.28) пренебречь перекрестными связями, то она распадется на три независимых уравнения с переменными y, α, β, которым соответствуют каналы прохождения измеряемого ускорения, показанные на рис. 4.3 жирными линиями [22].

Будем полагать, что параметры ЧЭ и линейной вибрации таковы, что в двух последних уравнениях системы (4.28) в правых частях первые составляющие, по крайней мере, на два порядка больше остальных, которые мы исключим из дальнейшего рассмотрения.

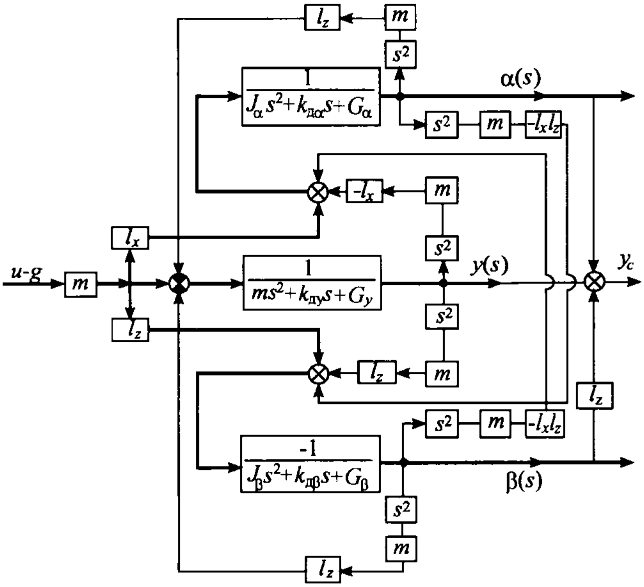


Рис. 4.3. Структурная схема ЧЭ осевого микроакселерометра

Запишем систему (4.28) в операторной форме $\left(\dfrac{d}{dt}=s\right)$:

$$\left.\begin{aligned}&\left(ms^2+k_{\text{ду}}s+G_y\right)y(s)+ml_zs^2\beta(s)+ml_xs^2\alpha(s)=F-F_{\text{ву}};\\&ml_zs^2y(s)+\left(J_\beta s^2+k_{\text{д}\beta}s+G_\beta\right)\beta(s)+ml_xl_zs^2\alpha(s)=-\left(F+F_{\text{ву}}\right)l_z;\\&ml_xs^2y(s)+ml_xl_zs^2\beta(s)+\left(J_\alpha s^2+k_{\text{д}\alpha}s+G_\alpha\right)\alpha(s)=\left(F-F_{\text{ву}}\right)l_x;\end{aligned}\right\}\qquad(4.30)$$

Представим передаточную функцию ЧЭ по отношению к силе F:

$$W_{y\text{с}}(s)=y_{\text{с}}(s)/F(s),\qquad(4.31)$$

где $y_{\text{с}}(s)$ – уравнение (4.29) в операторной форме,

$$y_{\text{с}}(s)=y(s)+l_x\alpha(s)+l_z\beta(s),\qquad(4.32)$$

где

$$y(s)=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \beta(s)=\frac{\Delta_\beta}{\Delta},\ \alpha(s)=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}.\qquad(4.33)$$

В выражениях (4.33) определители Δ, Δ_y, Δ_β, Δ_α получаются из системы (4.30) в соответствии с правилом Крамера.

Подставим равенства (4.33) в формулу (4.32) и получим

$$y_{\text{с}}(s)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_y+l_x\Delta_\alpha+l_z\Delta_\beta\right)=W_{y\text{с}}(s)F(s),$$

откуда

$$W_{yc}(s)=\frac{\Delta_y+l_x\Delta_\alpha+l_z\Delta_\beta}{\Delta F}.\qquad(4.34)$$

Запишем выражения для определителей:

$$\Delta=\begin{vmatrix}ms^2+k_{\text{ду}}s+G_y & ml_zs^2 & ml_xs^2\\ ml_zs^2 & J_\beta s^2+k_{\text{д}\beta}s+G_\beta & ml_xl_zs^2\\ ml_xs^2 & ml_xl_zs^2 & J_\alpha s^2+k_{\text{д}\alpha}s+G_\alpha\end{vmatrix};$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}F & ml_zs^2 & ml_xs^2\\ -Fl_z & J_\beta s^2+k_{\text{д}\beta}s+G_\beta & ml_xl_zs^2\\ Fl_x & ml_xl_zs^2 & J_\alpha s^2+k_{\text{д}\alpha}s+\mathrm{G}_\alpha\end{vmatrix};\ \Delta_\beta=\begin{vmatrix}ms^2+k_{\text{ду}}s+G_y & F & ml_xs^2\\ ml_zs^2 & -Fl_z & ml_xl_zs^2\\ ml_xs^2 & Fl_x & J_\alpha s^2+k_{\text{д}\alpha}s+G_\alpha\end{vmatrix};$$

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix}ms^2+k_{\text{ду}}s+G_y & ml_xzs^2 & F\\ ml_zs^2 & J_\beta s^2+k_{\text{д}\beta}s+G_\beta & -Fl_z\\ ml_xs^2 & ml_xl_zs^2 & Fl_x\end{vmatrix}.$$

Раскроем определители и получим

$$\Delta=a_6s^6+a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0,\qquad(4.35)$$

где

$$a_6 = mJ_zJ_x;$$

$$a_5 = m\left(k_{\text{д}\alpha}J_x + k_{\text{д}\beta}J_z\right) + K_{\text{ду}}\left(J_\alpha J_\beta - m^2 l_x^2 l_z^2\right);$$

$$a_4 = m\left(G_\alpha J_x + G_\beta J_z + k_{\text{д}\beta}k_{\text{д}\alpha}\right) + G_y\left(J_\alpha J_\beta - m^2 l_x^2 l_z^2\right) + k_{\text{ду}}\left(J_\beta k_{\text{д}\alpha} + J_\alpha k_{\text{д}\beta}\right);$$

$$a_3 = G_\alpha\left(mk_{\text{д}\beta} + k_{\text{ду}}J_\beta\right) + G_\beta\left(mk_{\text{д}\alpha} + k_{\text{ду}}J_\alpha\right) + G_y\left(J_\beta k_{\text{д}\alpha} + J_\alpha k_{\text{д}\beta}\right) + k_{\text{ду}}k_{\text{д}\beta}k_{\text{д}\alpha};$$

$$a_2 = G_y\left(J_\beta G_\alpha + J_\alpha G_\beta + k_{\text{д}\alpha}k_{\text{д}\beta}\right) + k_{\text{ду}}\left(k_{\text{д}\beta}G_\alpha + k_{\text{д}\alpha}G_\beta\right) + mG_\beta G_\alpha;$$

$$a_1 = k_{\text{ду}}G_\alpha G_\beta + G_y\left(k_{\text{д}\beta}G_\alpha + k_{\text{д}\alpha}G_\beta\right); \quad a_0 = G_y G_\beta G_\alpha;$$

$$\Delta_y = F\left(b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right), \tag{4.36}$$

где

$$b_4 = J_z\left(J_\beta + ml_z^2\right); \qquad b_3 = k_{\text{д}\beta}J_z + \left(J_\beta + ml_z^2\right)k_{\text{д}\alpha};$$

$$b_2 = G_\beta J_z + G_\alpha\left(J_\beta + ml_z^2\right) + k_{\text{д}\alpha}k_{\text{д}\beta}; \qquad b_1 = k_{\text{д}\alpha}G_\beta + k_{\text{д}\beta}G_\alpha; \qquad b_0 = G_\alpha G_\beta; \tag{4.37}$$

$$\Delta_\beta = Fl_z(e_4 s^4 + e_3 s^3 + e_2 s^2 + e_1 s + e_0),$$

где

$$e_4 = 2m^2 l_x^2; \qquad e_3 = -2mk_{\text{д}\alpha} - k_{\text{ду}}(J_\alpha + ml_x^2);$$

$$e_2 = -2mG_\alpha - G_y(J_\alpha + ml_x^2) - k_{\text{ду}}k_{\text{д}\alpha};$$

$$e_1 = -k_{\text{ду}}G_\alpha - G_y k_{\text{д}\alpha}; \qquad e_0 = -G_y G_\alpha.$$

$$\Delta_\alpha = Fl_x(c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0), \tag{4.38}$$

где

$$c_3 = k_{\text{ду}}(J_\beta + ml_z^2); \qquad c_2 = G_y(J_\beta + ml_z^2) + k_{\text{ду}}k_{\text{д}\beta};$$

$$c_1 = k_{\text{ду}}G_\beta + G_y k_{\text{д}\beta}; \qquad c_0 = G_y G_\beta.$$

Запишем выражение для передаточной функции:

$$W_{\text{ус}}(s) = \frac{n_4 s^4 + n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где

$$n_4 = J_\beta J_z + ml_z^2(J_\alpha + ml_x^2);$$

$$n_3 = k_{\text{д}\alpha}J_x + k_{\text{д}\beta}J_z + k_{\text{ду}}l_x^2(J_\beta + ml_z^2) - k_{\text{ду}}l_z^2(J_\alpha + ml_x^2);$$

$$n_2 = G_y(J_\beta l_x^2 - J_\alpha l_z^2) + k_{\text{ду}}(k_{\text{д}\beta}l_x^2 - k_{\text{д}\alpha}l_z^2) + G_\beta J_z + G_\alpha J_x + k_{\text{д}\alpha}k_{\text{д}\beta};$$

$$n_1 = k_{\text{д}\alpha}G_\beta + k_{\text{д}\beta}G_\alpha + (k_{\text{ду}}G_\beta + G_y k_{\text{д}\beta})\, l_x^2 - (k_{\text{ду}}G_\alpha + G_y k_{\text{д}\alpha})\, l_z^2;$$

$$n_0 = G_y(G_\beta l_x^2 - G_\alpha l_z^2) + G_\beta G_\alpha.$$

Из передаточной функции $W_{yc}(s)$ при $s = 0$ следует выражение для чувствительности к линейному ускорению:

$$\frac{y_c}{a_y - g} = \frac{\left[G_y\left(G_\beta l_x^2 - G_\alpha l_z^2\right) + G_\beta G_\alpha\right]m}{G_y G_\beta\, G_\alpha}. \qquad (4.39)$$

Очевидно, чувствительность по отношению к виброускорению $\ddot{y}_в$ также может быть рассчитана по выражению (4.39), из которого следует, что если выполняются равенства $G_\alpha = G_\beta$, $l_x = l_z$, то угловые жесткости на чувствительность к линейным ускорениям не влияют.

Устойчивость ЧЭ может быть исследована с помощью критерия Гурвица. Для характеристического уравнения $\Delta = 0$ [см. выражение (4.35)] составим квадратную матрицу (таблицу) коэффициентов:

$$\text{Определение Гурвица} \rightarrow \begin{Vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{Vmatrix}$$

Критерий устойчивости сводится к тому, что при $a_6 > 0$ должны быть больше нуля все шесть определителей Гурвица:

$$\Delta_i > 0\ (i = 1\ldots5),\ \Delta_6 = a_0 \cdot \Delta_5 > 0.$$

Получение конкретных выражений для соотношений коэффициентов, характеризующих устойчивость, не представляет трудностей.

Пример 4.4

Вычислим чувствительность и статические смещения ИМ МА при $a_y = 0$, $a_y = 10g$ для параметров ЧЭ по примеру 3.1: $m_п = m = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ кг, $G_\alpha = G_\beta = 47{,}72 \cdot 10^{-5}$ Н · м, $G_y = 525$ Н/м. Принимаем $l_x = 5 \cdot 10^{-5}$ м, $l_z = 25 \cdot 10^{-5}$ м. При $G_\alpha = G_\beta$ имеем

$$\frac{y_c}{a-g} = \frac{m[G_y(l_x^2 - l_z^2) + G_\alpha]}{G_y G_\alpha} = \frac{7{,}5\cdot10^{-5}\left\{525\left[\left(5\cdot10^{-5}\right)^2 - \left(2\cdot10^{-5}\right)^2\right] + 47{,}72\cdot10^{-5}\right\}}{525\cdot47{,}72\cdot10^{-5}} =$$

$$= \frac{7{,}5\cdot10^{-5}\left(0{,}11 + 47{,}72\right)}{525\cdot47{,}72}\ \text{м/(м/с}^2\text{)}.$$

Отсюда видно, что смещения ЦМ для принятых значений, имея в виду погрешности вычислений, практически не влияют на результат вычислений, т.е. $\frac{y_c}{a-g} = \frac{m}{G_y} = \frac{7{,}5\cdot10^{-5}}{525} =$ $= 0{,}14$ м/(м/с^2).

При $a_y = 0$ смещение $y_c = 1{,}37\cdot10^{-6}$ м; при $a_y = 10g$ смещение $y_c = 12{,}35 \cdot 10^{-6}$м.

Заметим, что чувствительность МА к смещениям ЦМ можно ослабить и, видимо, практически устранить, если в ее геометрическом центре разместить дополнительную массу, превышающую массу самой пластины. Очевидно, что при этом увеличивается и чувствительность акселерометра.

Применим форму записи $(d/dt = s)$, введем обозначения

$$m(a_y - g - \ddot{y}_{\text{в}}) = F_y, \quad -mz_{\text{в}}(a_y - g) = M_x,$$
$$mx_{\text{в}}(a_y - g) = M_z$$

и получим для каждого из трех уравнений (4.28) ($l_x = l_z = 0$)

$$W_q(s) = \frac{K_q}{T_q^2 s^2 + 2\xi_q T_q s + 1}, \tag{4.40}$$

где T_q – постоянная времени ЧЭ; ξ_q – относительный коэффициент демпфированных ЧЭ; $\omega_{q0} = 1/T_q$ – собственная частота недемпфированных колебаний ЧЭ).

Для каждой обобщенной координаты имеем следующие выражения:

$$W_y(s) = \frac{y(s)}{F_y};\ K_q = K_y = \frac{1}{G_y},\ T_y = \sqrt{\frac{m}{G_y}},\ \omega_{y0} = \frac{1}{T_y};\ \xi_y = \frac{k_{\text{ду}}}{2\sqrt{mG_y}} = \frac{k_{\text{ду}}}{2m\omega_{y0}}.$$

$$W_\alpha(s) = \frac{\alpha(s)}{M_z};\ K_q = K_\alpha = \frac{1}{G_\alpha}, T_\alpha = \sqrt{\frac{J_z}{G_\alpha}},\ \omega_{\alpha 0} = \frac{1}{T_\alpha};\ \xi_\alpha = \frac{k_{\text{д}\alpha}}{2\sqrt{J_z G_\alpha}} = \frac{k_{\text{д}\alpha}}{2J_z\omega_{\alpha 0}}.$$

$$W_\beta(s) = \frac{\beta(s)}{M_x};\ K_q = K_\beta = \frac{1}{G_\beta},\ T_\beta = \sqrt{\frac{J_x}{G_\beta}},\ \omega_{\beta 0} = \frac{1}{T_\beta};\ \xi_\beta = \frac{k_{\text{д}\beta}}{2\sqrt{J_x G_\beta}} = \frac{k_{\text{д}\beta}}{2J_x\omega_{\beta 0}}.$$

4.2.2. Маятниковый микроакселерометр

Получим передаточные функции ЧЭ, имея в виду, что наибольшей чувствительностью к изменению угла γ обладает перевернутый маятник, а прямой – несколько меньшей. Поэтому измерения угловых колебаний (угловой вибрации) основания лучше выполнять при установке маятника, характеризуемой углами $\gamma_0 = 90$ и 270°.

К линейной вибрации маятник чувствителен при любом варианте установки относительно основания, хотя количественная мера чувствительности разная.

Для случая линейной вибрации положим в уравнениях (4.22), (4.23) $\gamma = 0$, а для угловых колебаний $x_{\text{в}} = y_{\text{в}} = 0$, а также $(y_r + a\vartheta)\dot{\gamma}^2 \approx 0$. Введем обозначения: $J_A = J_{\text{с}} + ma^2$, $\ddot{x}_{\text{в}} = a_x(t)$, $\ddot{y}_{\text{в}} = a_y(t)$, $\ddot{\gamma} = \Gamma(t)$, $L_1 = L - l - a$, $L_2 = L + l + a$ и уравнения (4.22) представим в матричной форме для прямого и перевернутого маятников ($n = 1$):

$$\begin{vmatrix} m & ma \\ ma & J_A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{y}_r \\ \ddot{\vartheta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{\text{ду}} & k_{\text{д}\vartheta}/a \\ k_{\text{ду}}a & k_{\text{д}\vartheta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{y}_r \\ \dot{\vartheta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \pm mg \\ k_{21} & k_{22} \pm mag \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_r \\ \vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ F \cdot a \end{vmatrix}, \tag{4.41}$$

где

$$\begin{vmatrix} F \\ F\cdot a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mp ma_x(t) \\ \mp maa_x(t) \end{vmatrix} \quad \text{(линейная вибрация)}\,; \tag{4.42}$$

$$\begin{vmatrix} F \\ F\cdot a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left.\begin{matrix} +mL_1 \\ -mL_2 \end{matrix}\right\}\Gamma(s) \\ \left.\begin{matrix} +maL_1 \\ -maL_2 \end{matrix}\right\}\Gamma(s) \end{vmatrix} \quad \text{(угловые колебания)}\,. \tag{4.43}$$

В уравнениях (4.41) и выражениях (4.42) верхние знаки соответствуют прямому ($\gamma_0 = 270°$), а нижние – перевернутому ($\gamma_0 = 90°$) маятникам.

В выражениях (4.43) прямому маятнику отвечают компоненты, содержащие параметр L_1, а перевернутому – параметр L_2.

Уравнения движения маятника, соответствующие вертикальной вибрации основания, имеют вид

$$\begin{vmatrix} m & ma \\ ma & J_A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{y}_r \\ \ddot{\vartheta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{\text{ду}} & k_{\text{д}\vartheta}/a \\ k_{\text{ду}}a & k_{\text{д}\vartheta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{y}_r \\ \dot{\vartheta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_r \\ \vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mp m[a_y(t)+g] \\ \mp ma[a_y(t)+g] \end{vmatrix}\,. \tag{4.44}$$

Знак "–" в правых частях уравнений (4.44) соответствует углу $\gamma_0 = 0°$, а знак (+) – углу установки $\gamma_0 = 180°$.

Введем обозначение $s = \dfrac{d}{dt}$ и перепишем систему (4.41) в операторной форме:

$$\begin{vmatrix} ms^2 + k_{\text{ду}}s + k_{11} & mas^2 + \dfrac{k_{\text{д}\vartheta}}{a}s + (k_{12} \pm mg) \\ mas^2 + k_{\text{ду}}as + k_{21} & J_A s^2 + k_{\text{д}\vartheta}s + (k_{22} \pm mag) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_r(s) \\ \vartheta(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F(s) \\ F(s)a \end{vmatrix}, \tag{4.45}$$

где на основании матриц (4.42) и (4.43) имеем

$$\begin{vmatrix} F(s) \\ F(s)a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mp ma_x(s) \\ \mp maa_x(s) \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} F(s) \\ F(s)a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left.\begin{matrix} +mL_1 \\ -mL_2 \end{matrix}\right\}\Gamma(s) \\ \left.\begin{matrix} +maL_1 \\ -maL_2 \end{matrix}\right\}\Gamma(s) \end{vmatrix}. \tag{4.46}$$

Из уравнений (4.45) с учетом (4.46) получим передаточные функции

$$\left.\begin{aligned} W_{\vartheta,\Gamma}(s) &= \frac{\vartheta(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\left.\begin{matrix} +L_1 \\ -L_2 \end{matrix}\right\} m(ak_{11} - k_{21})}{\Delta_1}; \\ W_{y,\Gamma}(s) &= \frac{y_r(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\left.\begin{matrix} +L_1 \\ -L_2 \end{matrix}\right\} m(J_c s^2 + k_{22} - ak_{12})}{\Delta_1}, \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

где

$$\Delta_1 = J_\text{c} m s^4 + J_\text{c} k_{\text{ду}} s^3 + \left(J_A k_{11} + m k_{22} - 2 m a k_{12}\right) s^2 + \\ + \left(k_{\text{ду}} k_{22} + k_{\text{д}\vartheta} k_{11} - k_{\text{ду}} a k_{12} - k_{12} \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{a}\right) s + k_{11} k_{12} - k_{12}^2 \pm m g\left(a k_{11} - k_{12}\right). \tag{4.48}$$

Передаточные функции (4.47) позволяют определить реакцию ЧЭ на возмущающее воздействие в виде угловых колебаний основания. Передаточные функции, определяющие реакцию ЧЭ на линейные вибрационные возмущения a_x, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W_{\vartheta, a_x}(s) &= \frac{\vartheta(s)}{a_x(s)} = \frac{\mp m\left(a k_{11} - k_{21}\right)}{\Delta_1}; \\ W_{y_r, a_x}(s) &= \frac{y_r(s)}{a_x(s)} = \frac{\mp m\left(J_\text{c} s^2 + k_{22} - a k_{21}\right)}{\Delta_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.49}$$

Перепишем уравнения (4.44) в операторной форме

$$\begin{vmatrix} m s^2 + k_{\text{ду}} + k_{11} & m a s^2 + \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{a} s + k_{12} \\ m a s^2 + k_{\text{ду}} a s + k_{21} & J_A s^2 + k_{\text{д}\vartheta} s + k_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_r(s) \\ \vartheta(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mp m\left[a_y(s) + g\right] \\ \mp m a\left[a_y(s) + g\right] \end{vmatrix}$$

и получим передаточные функции ЧЭ, определяющие его реакцию на вертикальную составляющую линейного вибрационного возмущения совместно с ускорением силы тяжести $[a_y(t) + g]$:

$$\left.\begin{aligned} W_{\vartheta, a_y + g}(s) &= \frac{\vartheta(s)}{a_y(s) + g} = \frac{\mp m\left(a k_{11} - k_{21}\right)}{\Delta_2}; \\ W_{y_r, a_y + g}(s) &= \frac{y_r(s)}{a_y(s) + g} = \frac{\mp m\left(J_\text{c} s^2 + k_{22} - a k_{12}\right)}{\Delta_2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.50}$$

где

$$\Delta_2 = \Delta_1 - \left[\mp m g\left(a k_{11} - k_{12}\right)\right]. \tag{4.51}$$

Передаточные функции (4.47), (4.49), (4.50) позволяют определить реакцию ЧЭ на возмущающие воздействия в виде углового и линейного ускорения.

Так как наибольшей чувствительностью по отношению к углу наклона $\gamma(t)$ основания обладают прямой ($\gamma_0 = 270°$) и перевернутый ($\gamma_0 = 90°$) маятники, то именно для них и определим передаточные функции ЧЭ.

Полагая, что функция $\gamma(t)$ в операторной форме имеет запись $\gamma(s)$, и пренебрегая, как и прежде, членом $\left(y_r + a\vartheta\right)\left(\dot{\gamma}\right)^2$, а также считая $x_\text{в} = y_\text{в} = 0$, систему (4.22) запишем в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} m s^2 + k_{\text{ду}} + k_{11} & m a s^2 + \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{a} s + \left(k_{12} \pm m g\right) \\ m a s^2 + k_{\text{ду}} a s + k_{21} & J_A s^2 + k_{\text{д}\vartheta} s + \left(k_{22} \pm m a g\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_r(s) \\ \vartheta(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm m\gamma(s) \begin{cases} \left(L_1 s^2 - g\right) \\ \left(L_2 s^2 - g\right) \end{cases} \\ \pm m a\gamma(s) \begin{cases} \left(L_1 s^2 - g\right) \\ \left(L_2 s^2 - g\right) \end{cases} \end{vmatrix}. \tag{4.52}$$

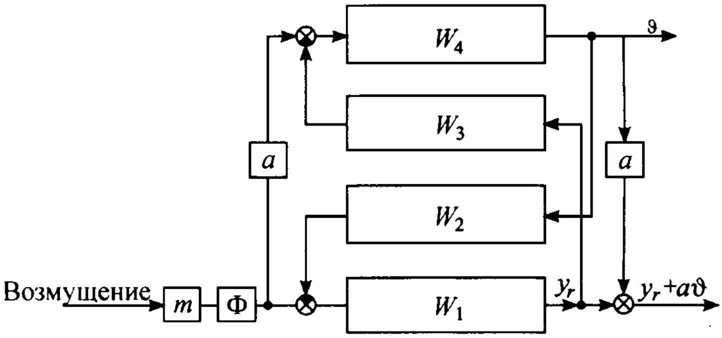


Рис. 4.4. Структурная схема ЧЭ маятникового микроакселерометра ($\gamma_0 = 270°$, $\gamma_0 = 90°$)

В уравнениях (4.52) знак "+" в системе двойных знаков и сомножители, содержащие параметр L_1, относятся к прямому маятнику ($\gamma_0 = 270°$), а знак "–" и сомножители с параметрами L_2 – к перевернутому маятнику ($\gamma_0 = 90°$).

Из уравнений (4.52) получим передаточные функции ЧЭ по углу $\gamma(t)$ для двух вариантов установки акселерометра:

– прямой маятник ($\gamma = 270°$)

$$\left.\begin{array}{l} W_{\vartheta,\gamma}(s) = \dfrac{\vartheta(s)}{\gamma(s)} = \dfrac{m(ak_{11} - k_{21})(L_1 s^2 - g)}{\Delta_1}; \\ \\ \text{– перевернутый маятник } (\gamma = 90°) \\ \\ W_{\vartheta,\gamma}(s) = \dfrac{\vartheta(s)}{\gamma(s)} = \dfrac{m(ak_{11} - k_{21})(-L_2 s^2 + g)}{\Delta_1}; \end{array}\right\} \qquad (4.53)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{– прямой маятник} \\ \\ W_{y_r,\gamma}(s) = \dfrac{y_r(s)}{\gamma(s)} = \dfrac{m}{\Delta_1}\{L_1 J_c s^4 + s^2\left[L_1(k_{22} - ak_{12}) - J_c g\right] - g(k_{22} - ak_{12})\}; \\ \\ \text{– перевернутый маятник} \\ \\ W_{y_r,\gamma}(s) = \dfrac{y_r(s)}{\gamma(s)} = \dfrac{m}{\Delta_1}\{- L_2 J_c s^4 + s^2\left[L_2(ak_{12} - k_{22}) + J_c g\right] + g(k_{22} - ak_{12})]. \end{array}\right\} \qquad (4.54)$$

Передаточные функции (4.53),(4.54) позволяют определить реакцию ЧЭ по координатам ϑ и y_r в ответ на входное воздействие в виде угловых колебаний основания.

4.1. Передаточные функции ЧЭ

γ_0, °	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$	$W_4(s)$
0; 90; 180; 270	$\dfrac{1}{ms^2 + k_{ду}s + k_{11}}$	–	$mas^2 + k_{ду}a +$ $+ k_{21}$	–
0; 180	idem	$\dfrac{mas^2 + \dfrac{k_{д\vartheta}s}{a}s + k_{12}}{mas^2 + \dfrac{k_{д\vartheta}s}{a}s + k_{12} \pm mg}$	idem	$\dfrac{1}{J_A s^2 + k_{д\vartheta}s + k_{22}}$
270; 90				$\dfrac{1}{J_A s^2 + k_{д\vartheta}s + k_{22} \pm mag}$

В общем случае при $n \neq 1$ перед каждым коэффициентом жесткости в зависимостях (4.47)–(4.54) необходимо поставить в качестве сомножителя нужное число упругих элементов $n = 2, 3, \ldots$

В соответствии с уравнениями (4.44), (4.45), (4.52) на рис. 4.4 приведена структурная схема ЧЭ маятникового МА, где передаточные функции $W_i(s)$ ($i = 1\ldots4$) определяются в соответствии с табл. 4.1, а функции коэффициента "передачи" Ф – по табл. 4.2, в которой для вариантов углов γ_0 установки акселерометра, не рекомендуемых для использования, имеется $Ф = 0$.

С помощью структурной схемы и табл. 4.1 и 4.2 могут быть получены передаточные функции $\vartheta(s)/B(s)$, $y_r(s)/B(s)$; $[y_r(s) + a\vartheta(s)]/B(s)$ для любой выходной координаты по отношению к любому виду возмущающего В воздействия. Для этого необходимо, используя рис. 4.4, записать следующие алгебраические уравнения:

$$\left[-\left(\text{В}mФ - W_2\vartheta\right)W_1W_3 + \text{В}mФa\right]W_4 = \vartheta\,; \tag{4.55}$$

$$\left[-\left(\text{В}mФa - W_3y_r\right)W_2W_4 + \text{В}mФ\right]W_1 = y_r\,; \tag{4.56}$$

$$\left[-\left(\text{В}mФa - W_3y_r\right)W_2W_4 + \text{В}mФ\right]W_1 + a\left[-\left(\text{В}mФ - W_2\vartheta\right)W_1W_3 + \text{В}mФa\right]W_4 = y_r + a\vartheta. \tag{4.57}$$

4.2. Функции коэффициента ЧЭ

Возмущение	Функция "передачи" Ф			
	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_0 = 90°$	$\gamma_0 = 180°$	$\gamma_0 = 270°$
$\ddot{x}_в(t)$	0	+1	0	–1
$\ddot{y}_в(t) + g$	–1	0	+1	0
$\ddot{\gamma}(t)$	0	$-L_2$	0	$+L_1$
$\gamma(t)$		$-L_2s^2 + g$		$L_1s^2 - g$

Из уравнений (4.55) и (4.56) получим

$$\frac{\vartheta(s)}{\text{B}(s)}=\frac{m\Phi(a-W_1W_3)W_4}{1-W_1W_2W_3W_4}\,; \tag{4.58}$$

$$\frac{y_r(s)}{\text{B}(s)}=\frac{m\Phi(1-aW_2W_4)W_1}{1-W_1W_2W_3W_4}\,. \tag{4.59}$$

Для линейной вибрации $\ddot{x}_{\text{в}}(t)$ функция возмущения $\text{B}(s)=a_x(s)$. Функция коэффициента "передачи" Ф определяется из первой строки табл. 4.2; передаточные функции W_1 и W_3 – из первой строки, а W_2 и W_4 – из третьей строки табл. 4.1. После их подстановки в выражения (4.58) и (4.59) получаются передаточные функции (4.49). Для возмущения $\ddot{y}_{\text{в}}(t)+g$ передаточные функции W_1 и W_3 определяются из первой строки, функции W_2 и W_4, а также функция Ф – из второй строки табл. 4.2. После преобразований выражения (4.58), (4.59) трансформируются в передаточные функции (4.50).

Для случая угловой вибрации основания $\ddot{\gamma}(t)$ функция Ф определяется третьей строкой табл. 4.2, функции W_1 и W_3 – первой строкой, а функции W_2 и W_4 – третьей строкой табл. 4.1. Для этого случая выражения (4.58) и (4.59) преобразуются к виду (4.47) и (4.50). Для угловых колебаний основания $\gamma(t)$ функция Ф определяется четвертой строкой табл. 4.2, а функции $W_i(s)$ – аналогично предыдущему случаю.

Преобразовав соответствующим образом выражения (4.58) и (4.59), можно получить передаточные функции (4.53) и (4.54). Из уравнения (4.57) найдем передаточную функцию

$$\frac{(y_r+a\vartheta)(s)}{\text{B}(s)}=\frac{m\Phi[W_1(1-aW_3W_4)+aW_4(a-W_1W_2)]}{1-W_1W_2W_3W_4}\,. \tag{4.60}$$

Для случаев $\gamma_0 = 90$ и 270° выражение (4.60) преобразуется к виду:

$$\frac{(y_r+a\vartheta)(s)}{\text{B}(s)}=\frac{m\Phi}{\Delta_1}(J_{\text{c}}s^2+k_{22}+k_{11}a^2-2ak_{12}). \tag{4.61}$$

Для линейной вибрации $\ddot{x}_{\text{в}}(s)$ в выражении (4.61) $\Phi=+1$ для $\gamma_0 = 90°$ и $\Phi=-1$ для $\gamma_0 = 270°$ (см. табл. 4.2). Для угловой вибрации основания $\ddot{\gamma}(t)$ имеем $\Phi=-L_2$ и $+L_1$ соответственно для углов $\gamma_0 = 90$ и 270°.

Если в качестве возмущений рассматривать углы наклона $\gamma(t)$ $[\text{B}(s)=\gamma(s)]$, то передаточная функция для $\gamma_0 = 270°$ (прямой маятник) запишется следующим образом:

$$\frac{(y_r+a\vartheta)(s)}{\gamma(s)}=$$

$$=\frac{m}{\Delta_1}\left\{L_1J_{\text{c}}s^4+\left[L_1\left(k_{22}+k_{11}a^2-2ak_{12}\right)-J_{\text{c}}g\right]s^2-g\left(k_{22}+k_{11}a^2-2ak_{12}\right)\right\}. \tag{4.62}$$

Для перевернутого маятника ($\gamma_0 = 90°$) в выражении (4.62) необходимо величину L_1 заменить на L_2 и g на $-g$.

Для возмущения $\ddot{y}_{\text{в}}(t) + g$ передаточная функция (4.60) принимает вид

$$\frac{(y_r + a\vartheta)(s)}{\text{В}(s)} = \frac{\mp m}{\Delta_1}\left(J_{\text{c}} s^2 + k_{22} + k_{11}a^2 - 2ak_{12}\right), \qquad (4.63)$$

где знак "–" соответствует углу установки $\gamma_0 = 0°$, а знак "+" – углу $\gamma_0 = 180°$.

Получим выражения для чувствительностей маятника, которые определяются отношением выходной координаты (ϑ; y_r; $y_r + a\vartheta$) к входному воздействию (возмущению В) в стационарном режиме ($d/dt = s = 0$).

Для линейной вибрации основания $\ddot{x}_{\text{в}}$ $(\text{В} \to a_x)$, положив $s = 0$ в выражениях (4.49), (4.61), имеем

$$\left.\begin{aligned}
S_{\vartheta,a_x} &= \frac{\mp m(ak_{11} - k_{21})}{\Delta_1^*};\\
S_{y_r,a_x} &= \frac{\mp m(k_{22} - ak_{12})}{\Delta_1^*};\\
S_{y_r+a\vartheta,a_x} &= \frac{\mp m\left(k_{11}a^2 - 2ak_{12}\right)}{\Delta_1^*},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.64)$$

где S_{ϑ,a_x} – чувствительность по углу, с^2/м; S_{y_r,a_x} – чувствительность по перемещению, с^2; $S_{y_r+a\vartheta,a_x}$ – суммарная чувствительность, с^2; $\Delta_1^* = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \pm mg(ak_{11} - k_{12})$, Н^2; верхние знаки перед параметром m соответствуют углу установки $\gamma_0 = 270°$, а нижние $\gamma_0 = 90°$.

Аналогично для возмущения $\ddot{y}_{\text{в}} + g$ $(\text{В} \to a_y + g)$ из выражений (4.50) и (4.63) получим

$$\left.\begin{aligned}
S_{\vartheta,a_y+g} &= \frac{\mp m(ak_{11} - k_{21})}{\Delta_2^*};\\
S_{y_r,a_y+g} &= \frac{\mp m(k_{22} - ak_{12})}{\Delta_2^*};\\
S_{y_r+a\vartheta,a_y+g} &= \frac{\mp m\left(k_{22} + k_{11}a^2 - 2ak_{12}\right)}{\Delta_2^*},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.65)$$

где $\Delta_2^* = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$, Н^2; знак "–" перед параметром m соответствует углу установки $\gamma_0 = 0°$, а знак "+" – углу $\gamma_0 = 180°$.

Чувствительности для случая угловой вибрации основания $\ddot{\gamma}$ $(\text{В} \to \Gamma)$ в соответствии с выражениями (4.47), (4.61) вычисляются по зависимостям

$$\left.\begin{aligned}
S_{\vartheta,\Gamma} &= \frac{\left.\begin{matrix}+L_1\\ -L_2\end{matrix}\right\} m\left(ak_{11}-k_{21}\right)}{\Delta_1^*};\\
S_{y_r,\Gamma} &= \frac{\left.\begin{matrix}+L_1\\ -L_2\end{matrix}\right\} m\left(k_{22}-ak_{12}\right)}{\Delta_1^*};\\
S_{y_r+a\vartheta,\Gamma} &= \frac{\left.\begin{matrix}+L_1\\ -L_2\end{matrix}\right\} m\left(k_{11}a^2-2ak_{12}\right)}{\Delta_1^*},
\end{aligned}\right\} \qquad (4.66)$$

где $S_{\vartheta,\Gamma}$ – чувствительность по углу, с^2; $S_{y_r,\Gamma}$ – чувствительность по перемещению, м·с^2; $S_{y_r+a\vartheta,\Gamma}$ – суммарная чувствительность, м·с^2; параметр L_1 соответствует углу $\gamma_0 = 270°$, а параметр L_2 – углу установки $\gamma_0 = 90°$.

Если в качестве возмущения рассматривается угол наклона основания $\gamma(t)$ $(\text{В} \to \gamma)$, то из выражений (4.53), (4.54), (4.61) следуют формулы для вычисления чувствительностей:

$$\left.\begin{aligned}
S_{\vartheta,\gamma} &= \frac{\mp mg\left(ak_{11}-k_{21}\right)}{\Delta_1^*};\\
S_{y_r,\gamma} &= \frac{\mp mg\left(k_{22}-ak_{12}\right)}{\Delta_1^*};\\
S_{y_r+a\vartheta,\gamma} &= \frac{\mp mg}{\Delta_1^*}\left(k_{22}+k_{11}a^2-2ak_{12}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (4.67)$$

где $S_{\vartheta,\gamma}$ – чувствительность по углу, безразмерная величина; $S_{y_r,\gamma}$ – чувствительность по перемещению, м; $S_{y_r+a\vartheta,\gamma}$ – суммарная чувствительность, м; верхние знаки соответствуют углу $\gamma_0 = 270°$, а нижние – углу $\gamma_0 = 90°$.

Пример 4.5

Вычислим чувствительности маятника к разным возмущениям. Исходные данные: $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг; $l + a = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $L = 0$; $a = 4{,}281 \cdot 10^{-3}$ м; $g = 9{,}81$ м/с^2; $k_{11} = 2{,}036 \cdot 10^3$ Н/м; $k_{12} = k_{21} = -0{,}879$ Н; $k_{22} = 4{,}398 \cdot 10^{-4}$ Н · м. При $\gamma_0 = 270°$ получим $\Delta_1^* = 0{,}239$ Н^2, а при $\gamma_0 = 90°$ – значение $\Delta_1^* = 0{,}225$ Н^2. Для углов $\gamma_0 = 0$ и 180° значение $\Delta_2^* = 0{,}224$ Н^2 [величины Δ_1^*, Δ_2^* приведены в пояснениях к формулам (4.64)–(4.65)].

Результаты вычислений по формулам (4.64)–(4.67) представим в таблицах.

Чувствительность маятника по отношению к ускорению линейной вибрации $\ddot{x}_{\text{в}} = a_x$

γ_0, °	S_{ϑ,a_x}, $1\cdot10^{-3}$ с^2/м	S_{y_r,a_x}, $1\cdot10^{-6}$ с^2	$S_{y_r+a\vartheta,a_x}$, $1\cdot10^{-6}$ с^2
270	2,992	1,238	13,91
90	3,178	1,316	14,77

Чувствительность маятника по отношению к ускорению $\ddot{y}_\text{в} + g = a_y + g$

γ_0, °	S_{ϑ,a_y+g}, $1\cdot10^{-3}$ с²/м	S_{y_r,a_y+g}, $1\cdot10^{-6}$ с²	$S_{y_r+a\vartheta,a_y+g}$, $1\cdot10^{-6}$ с²
0; 180	3,193	1,321	14,989

Чувствительность маятника по отношению к угловому ускорению $\gamma = \Gamma$

γ_0, °	$S_{\vartheta,\Gamma}$, $1\cdot10^{-6}$ с²	$S_{y_r,\Gamma}$, $1\cdot10^{-9}$ с²	$S_{y_r+a\vartheta,\Gamma}$, $1\cdot10^{-9}$ м·с²
270	14,961	12,401	69,549
90	15,892	13,173	73,876

Чувствительность маятника по отношению к углу наклона γ

γ_0, °	$S_{\vartheta,\gamma}$, $1\cdot10^{-3}$	$S_{y_r,\gamma}$, $1\cdot10^{-6}$ м	$S_{y_r+a\vartheta,\gamma}$, $1\cdot10^{-9}$ м
270	29,353	24,333	137,809
90	31,178	25,844	146,382

Передаточные функции (4.58), (4.59) и все вытекающие из них частные случаи для различных вариантов возмущений могут быть существенно упрощены, если величина y_r на несколько порядков меньше, чем $a\vartheta$, а демпфирование обусловлено в основном угловым движением маятника в определенном частотном диапазоне. Вместе с тем, имея в виду формы колебаний маятника, можно утверждать, что существуют частотные диапазоны, в которых роли поступательного и углового перемещений маятника практически равноценны. Запишем упрощенный вариант уравнений (4.41):

$$\left.\begin{aligned}
(k_{12} \pm mg)\,\vartheta(s) + k_{11} y_r(s) &= \left.\begin{matrix} +mL_1 \\ -mL_2 \end{matrix}\right\} \Gamma(s) \mp m a_x(s); \\
\left(J_A s^2 + k_{\text{д}\vartheta} s + k_{22} \pm mag\right)\vartheta(s) + k_{21} y_r(s) &= \left.\begin{matrix} +maL_1 \\ -maL_2 \end{matrix}\right\} \Gamma(s) \mp maa_x(s).
\end{aligned}\right\} \tag{4.68}$$

В системе уравнений (4.68), так же, как и в формулах (4.45), (4.46), верхние знаки, там, где они двойные, а также параметр L_1 соответствуют прямому маятнику ($\gamma_0 = 270°$), а нижние знаки и параметр L_2 – перевернутому ($\gamma_0 = 90°$). Запишем решение системы (4.68) относительно параметра $\vartheta(s)$:

$$\vartheta(s) = \frac{K_{\text{п}\Gamma}\,\Gamma(s) + K_{\text{п}a_x} a(s)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}; \tag{4.69}$$

$$\left.\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{J_A k_{11}}{n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2) \mp mg(k_{21}-ak_{11})}};\\
\xi &= \frac{k_{\text{д}\vartheta}k_{11}}{2\sqrt{J_A k_{11}\left[n\,(k_{11}k_{22}-k_{12}^2) \mp mg(k_{21}-ak_{11})\right]}},\\
\text{где}\qquad K_{\text{пГ}} &= \frac{\mp m\left(ak_{11}-k_{21}\right)\left.\begin{matrix}L_1(\gamma_0=270^\circ)\\ L_2(\gamma_0=90^\circ)\end{matrix}\right.}{n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)\mp mg\,(k_{21}-ak_{11})};\\
K_{\text{п}a_x} &= \frac{\mp m\,(ak_{11}-k_{21})}{n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)\mp mg(k_{21}-ak_{11})}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.70)$$

В соответствии с выражением (4.69) запишем передаточную функцию маятника по отношению к угловой $\ddot{\gamma}(t)$ и линейной $\ddot{x}_\text{в}(t)$ вибрациям:

$$W_{\vartheta;\Gamma,a_x}(s) = \frac{K_\text{пм}}{T^2s^2+2\xi Ts+1}, \qquad (4.71)$$

где $K_\text{пм} = K_\text{пГ}$ или $K_\text{пм} = K_{\text{п}a}$ в зависимости от вида вибрации.

Очевидно, что коэффициенты $K_\text{пГ}$, $K_\text{пм}$ – это чувствительности маятника [(см. выражение (4.64) и (4.66)].

Сохраняя прежние предположения, из системы (4.44) для случая линейной вибрации $\ddot{y}_\text{в}+g$ получим

$$\left.\begin{aligned}
k_{12}\vartheta(s)+k_{11}y_r(s) &= \mp m\left[a_y(s)+g\right];\\
\left(J_As^2+k_{\text{д}\vartheta}s+k_{22}\right)\vartheta(s)+k_{21}y_r(s) &= \mp ma\left[a_y(s)+g\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (4.72)$$

Пример 4.6

Вычислим параметры $K_\text{пм}$, T передаточной функции (4.71) для значений (см. пример 3.2): $m = 0{,}29\cdot10^{-3}$ кг; $J_\text{A} = 7{,}093\cdot10^{-9}$ кг·м^2; $k_{11} = 2{,}036\cdot10^3$ Н/м; $k_{22} = 4{,}398\cdot10^{-4}$ Н·м; $k_{12} = k_{21} = -0{,}879$ Н; $g = 9{,}81$ м/с^2; $a = 4{,}281\cdot10^{-3}$ м; $l + a \approx 5\cdot10^{-3}$ м; $n = 1$; 3.

Примем $L = 0$; тогда $L_1 = L_2 = l + a$. Результаты вычислений по формулам (4.70) представлены в таблице:

Угол установки, °, и число упругих элементов n		Параметр		
		$K_{\text{п}a_x}, 1\cdot10^{-3}$ с^2/м	$K_{\text{пГ}_x}, 1\cdot10^{-6}$ с^2	$T, 1\cdot10^{-3}$ с
270	1	11,016	55,079	7,585
	3	3,956	19,778	4,545
90	1	14,035	70,177	8,562
	3	4,287	21,434	4,732

где знак "–" соответствует углу $\gamma_0 = 0°$, а знак "+" – углу $\gamma_0 = 180°$ [см. (4.72)].

Разрешив систему (4.72) относительно параметра $\vartheta(s)$, найдем затем передаточную функцию маятника по отношению к линейной вертикальной вибрации основания с учетом ускорения силы тяжести:

$$W_{\vartheta,a_y}(s)=\frac{K_{\text{п}a_y}}{T^2s^2+2\xi Ts+1}, \tag{4.73}$$

где

$$K_{\text{п}a_y}=\frac{\mp m\left(ak_{11}-k_{21}\right)}{n\left(k_{11}k_{22}-k_{12}^2\right)};\qquad T=\sqrt{\frac{J_Ak_{11}}{n\left(k_{11}k_{22}-k_{12}^2\right)}}\ ;\quad \xi=\frac{J_{\text{д}\vartheta}k_{11}}{2\sqrt{nJ_Ak_{11}\left(k_{11}k_{22}-k_{12}^2\right)}}. \tag{4.74}$$

Коэффициент передачи $K_{\text{п}a_y}$ – это чувствительность маятника к возмущению $\ddot{y}_{\text{в}}+g$ [(см. формулы 4.65)].

Пример 4.7

Вычислим параметры передаточной функции (4.73) для исходных данных из предыдущего примера. Результаты вычислений приведены в таблице.

Число упругих элементов, n	Параметр	
	$K_{\text{п}a_y}$, $1\cdot10^{-3}$ с^2/м	T, $1\cdot10^{-3}$ с
1	12,344	8,029
3	4,115	4,636

Заметим, что так как маятник в данном примере горизонтальный, то модули вычисленных параметров одинаковы для обоих углов установки ($\gamma_0 = 0$ и 180°).

Динамика маятника как измерителя углов наклона основания может быть исследована на базе упрощенной системы уравнений, полученных из уравнений (4.52):

$$\left.\begin{aligned}\left(k_{12}\pm mg\right)\vartheta(s)+k_{11}y_r(s)&=\pm m\begin{Bmatrix}L_1s^2-g\\L_2s^2-g\end{Bmatrix}\gamma(s);\\ \left(J_As^2+k_{\text{д}\vartheta}s+k_{22}+mag\right)\vartheta(s)+k_{21}y_r(s)&=\pm ma\begin{Bmatrix}L_1s^2-g\\L_2s^2-g\end{Bmatrix}\gamma(s).\end{aligned}\right\} \tag{4.75}$$

Как и в уравнениях (4.52), знак "+" в группе двойных знаков и сомножители с параметром L_1 соответствуют углу установки γ_0 = 270°, а знак "–" и сомножители с параметром L_2 – углу установки маятника γ_0 = 90°.

Аналогично предыдущему получим передаточную функцию маятника по отношению к углу наклона основания:

$$W_{\vartheta,\gamma}(s)=\frac{K_\gamma\left(T_1^2s^2-1\right)}{T^2s^2+2\xi Ts+1}, \tag{4.76}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &T=\sqrt{\frac{J_A k_{11}}{n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)\mp mg(k_{21}-ak_{11})}}\ ;\ T_1=\sqrt{L_1/g},\ (\gamma_0=270^\circ);\ \ T_1=\sqrt{L_2/g},\ (\gamma_0=90^\circ);\\ &K_\gamma=\frac{\mp mg(k_{21}-ak_{11})}{n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)\mp mg(k_{21}-ak_{11})};\ \ \xi=\frac{k_{\text{д}\vartheta}k_{11}}{2\sqrt{J_A k_{11}\left[n(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)\mp mg(k_{21}-ak_{11})\right]}} \end{aligned}\right\} \tag{4.77}$$

(верхние знаки в группе двойных знаков соответствуют углу установки $\gamma_0 = 270°$, а нижние $\gamma_0 = 90°$).

Пример 4.8

Вычислим параметры K_γ, T, T_1 передаточной функции (4.76) для маятника с исходными данными по примеру 4.6.

Заметим, что параметр T передаточной функции (4.76) совпадает с аналогичным параметром функций (4.69) и был вычислен ранее. Если $L = 0$, тогда для обоих углов установки γ_0 (270 и 90°) получим $T_1 = 2{,}258 \cdot 10^{-2}$ с, что на порядок больше постоянной времени T. Найдем также следующие значения коэффициента передачи (чувствительность маятника, безразмерная величина):

при $\gamma_0 = 270°$

$$K_\gamma=\begin{cases}0{,}108(n=1);\\0{,}038(n=3),\end{cases}$$

при $\gamma_0 = 90°$

$$K_\gamma=\begin{cases}0{,}138(n=1);\\0{,}042(n=3).\end{cases}$$

4.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЧЭ МИКРОДАТЧИКА ДАВЛЕНИЙ

Уравнения движения ЧЭ и передаточная функция микродатчика давления, выполненного в виде мембраны с жестким центром, описываются уравнениями (4.9) движения ЧЭ линейного МА, в которых необходимо учесть действие давления.

Полагаем, что на жесткий (недеформируемый) центр *1* с упругой перемычкой *2*, соединяющей его с корпусной пластиной *3*, снизу и сверху действуют давления p_1 и p_2, разность которых, распределенную по площади мембраны, можно заменить силой $F_\text{д}$, приложенной к центру симметрии мембраны (рис. 4.5). В соответствии с принятым направлением силы $F_\text{д}$ по положительному направлению оси OY прибавим ее к правой части первого уравнения (4.9) и, оставляя остальные без изменения, запишем уравнения движения ЧЭ МДД:

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{y}+k_{\text{д}y}\dot{y}+G_y y+m\left(l_x\ddot{\alpha}+l_z\ddot{\beta}\right)=m\left(u-g-\ddot{y}_\text{в}\right)+F_\text{д}\,;\\ &J_\beta\ddot{\beta}+k_{\text{д}\beta}\dot{\beta}+G_\beta\beta+ml_z\left(\ddot{y}+l_x\ddot{\alpha}\right)=ml_z\left(g-u-\ddot{y}_\text{в}\right)+mz_\text{в}\left(g-u\right)+ml_z\ddot{z}_\text{в}\beta;\\ &J_\alpha\ddot{\alpha}+k_{\text{д}\alpha}\dot{\beta}+G_\alpha\alpha+ml_x\left(\ddot{y}+l_z\ddot{\beta}\right)=ml_x\left(u-g-\ddot{y}_\text{в}\right)+mx_\text{в}\left(u-g\right)+ml_x\ddot{z}_\text{в}\alpha\,;\\ &y_\text{с}=y+l_x\alpha+l_z\beta+y_\text{в}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.78}$$

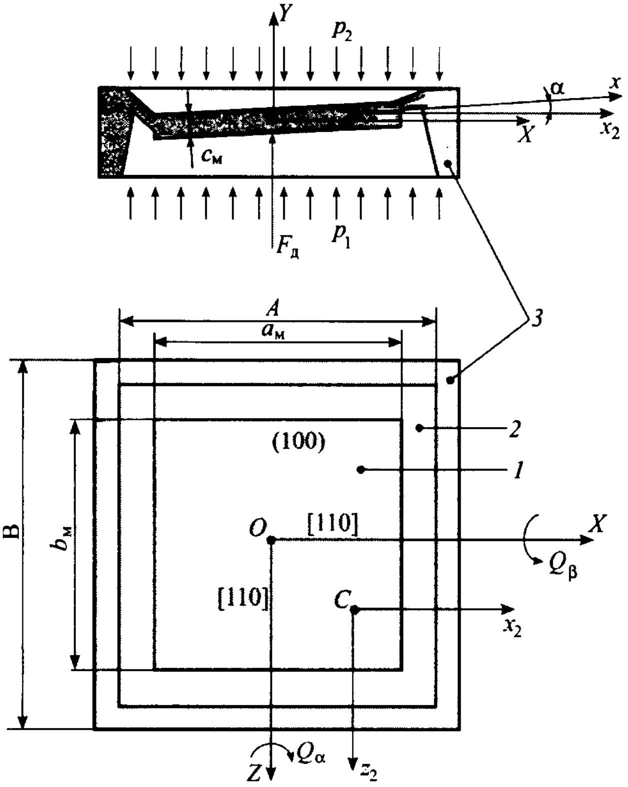


Рис. 4.5. К выводу уравнений движения ЧЭ МДД

В уравнениях системы (4.78) обозначения те же, что и в уравнениях системы (4.9). Будем полагать также, что масса упругих перемычек значительно меньше массы недеформируемого центра, т.е. $m \approx m_ц$. Станем рассматривать случай однокомпонентной вибрации: $y_в \neq 0$, $x_в = z_в = 0$. Очевидно, что рассуждения, относящиеся к анализу уравнений (4.28), справедливы и для МДД. Нужно только помнить, что в выражениях (4.28), (4.36), (4.37), (4.38) необходимо к величине F добавлять силу $F_д$ разностного давления.

Таким образом, для МДД передаточная функция, определяющая перемещение ЦМ мембраны, в соответствии с уравнением (4.34) вычисляется по выражению:

$$W_{yc}(s)=\frac{y_c(s)}{(F+F_д)(s)}=\frac{\Delta_y+l_x\Delta_\alpha+l_z\Delta_\beta}{\Delta(F+F_\Delta)}, \qquad (4.79)$$

где

$$\Delta_y=(F+F_Д)(b_4s^2+b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0); \quad \Delta_\alpha=(F+F_Д)l_x(c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0);$$

$$\Delta_\beta=(F+F_Д)l_x(e_4s^4+e_3s^3+e_2s^2+e_1s+e_0).$$

Коэффициенты $b_i(i = 0...4)$, $e_i(i = 0...4)$, $c_i(i = 0...3)$ определяются так же, как в выражениях (4.37)–(4.39); определитель Δ соответствует определителю (4.35).

Для стационарного режима ($s = 0$) аналогично уравнению (4.39) можно получить следующее выражение, определяющее чувствительность датчика давлений к возмущениям:

$$\frac{y_с}{m(u - g - \ddot{y}_в) + F_д} = \frac{G_y\left(G_\beta l_x^2 - G_\alpha l_z^2\right) + G_\beta G_\alpha}{G_y G_\beta G_\alpha}. \tag{4.80}$$

Очевидно, что чувствительность мембраны с жестким центром по отношению к силам, обусловленным линейным ($u - g$) ускорением, виброускорением $\ddot{y}_в$ и силой давления, определяется выражением (4.80).

В соответствии с первым уравнением системы (4.78) запишем соотношение, определяющее относительную ошибку измерения давления, обусловленную линейным ускорением:

$$\delta = \frac{(a_м b_м c_м)\,\rho\,(u - g - \ddot{y}_в)}{\Delta p_{\max} a_м b_м} 100\,\% = \left[(u - g - \ddot{y}_в)\,\rho c_м / \Delta p_{\max}\right] 100\,\%, \tag{4.81}$$

где $a_м$, $b_м$, $c_м$ – размеры жесткого центра (см. рис. 4.5); $\Delta p_{\max}$ – диапазон измеряемых давлений.

Нетрудно видеть, что выражение (4.80) для общего случая $l_x \neq 0$ и $l_z \neq 0$ с точностью до значения величины $G_y(l_x^2 / G_\alpha - l_z^2 / G_\beta)$ равно

$$y_с / \left[m(u - g - \ddot{y}_в) + F_д\right] = 1 / G_y\ . \tag{4.82}$$

Пример 4.8

Вычислим погрешность, вносимую линейной вибрацией основания в измерения перемещений ЧЭ МДД для исходных данных: $\Delta p_{\max} = 0\ldots10$ кПа $= 10^4$ Н/м^2; $\rho = 2{,}33 \cdot 10^3$ кг/м^3; $c_м = 0{,}5 \times$ $\times\ 10^{-3}$ м; $y_в = y_{в0} \cos\omega t$; ($y_{в0} = 10^{-3}$ м; $\omega = 100$ Гц $= 6{,}28 \cdot 10^2$ 1/с).

Вычислим $|\ddot{y}_в| = \omega^2 y_{в0} = (6{,}28 \cdot 10^2)^2 \cdot 10^{-3} = 394{,}38$ м/с^2.

По формуле (4.81) получим

$$\delta = \frac{394{,}38 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}33 \cdot 10^3}{10^4} \times$$
$$\times 100\,\% = 4{,}59\,\%.$$

Пример 4.9

Получим предельную оценку погрешностей вычислений по формуле (4.82). Так как предельная ошибка имеет место при $l_x = 0$ или $l_z = 0$, положим, например, $l_z = 0$. Очевидно также (см. рис. 4.5), что максимальное значение $l_x = a_м/2$. Погрешности вычислений по формуле (4.82) по сравнению с формулой (4.80) в зависимости от отношения G_y / G_α для значений $a_м = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ и 10^{-2} м приведены в таблице.

$a_м$, м	G_y / G_α			
	10^4	10^2	10	1
$0{,}5 \cdot 10^{-2}$	6,25 %	$6{,}25 \cdot 10^{-2}$ %	$6{,}20 \cdot 10^{-3}$ %	$6{,}25 \cdot 10^{-4}$ %
10^{-2}	25 %	$25 \cdot 10^{-2}$ %	$25 \cdot 10^{-3}$ %	$25 \cdot 10^{-4}$ %

Устойчивость мембраны определяется так же, как и устойчивость ЧЭ линейного МА. Если работа мембраны происходит в пределах зоны упругости ее материала (кремний) и $l_x = l_z = 0$ (бездефектный ЧЭ), тогда мембрана абсолютно устойчива и ей не грозит явление схлопывания [25].

4.4. ГАЗОВОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ ЧЭ МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРОВ И МИКРОДАТЧИКОВ ДАВЛЕНИЯ

В общем случае коэффициент демпфирования ЧЭ определяется по формуле

$$k = F_д / \text{v}\,, \tag{4.83}$$

где $F_д$, v – демпфирующая сила и скорость перемещения подвижного узла ЧЭ.

Таким образом, для определения коэффициента демпфирования необходимо определить силу демпфирования, которая есть результат действия распределенного по площади S давления p газовой среды.

$$F_д = \iint\limits_S p dS\,. \tag{4.84}$$

В известных работах давление определяют по данным интегрирования с различными упрощающими допущениями приближенной системы уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой среды и уравнения ее неразрывности:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\text{v}\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial \text{v}}{\partial t}+u\frac{\partial \text{v}}{\partial x}+\text{v}\frac{\partial \text{v}}{\partial y}+w\frac{\partial \text{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\text{v}\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{4.85}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho \text{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0\,, \tag{4.86}$$

где u, v, w – составляющие скорости течения газа по координатам x, y, z соответственно; ρ – плотность среды; μ – коэффициент динамической вязкости; p – давление среды; t – время.

В работе [6] выполнено интегрирование системы (4.85) и уравнения (4.86) для следующих допущений:

1) течение газа стационарное, несжимаемое, вязкое (выполняется условие прилипания газа на стенках), зазор h_0 меньше геометрических линейных размеров $a_м$, $b_м$ подвижного узла в плане на три–четыре порядка (рис. 4.6);

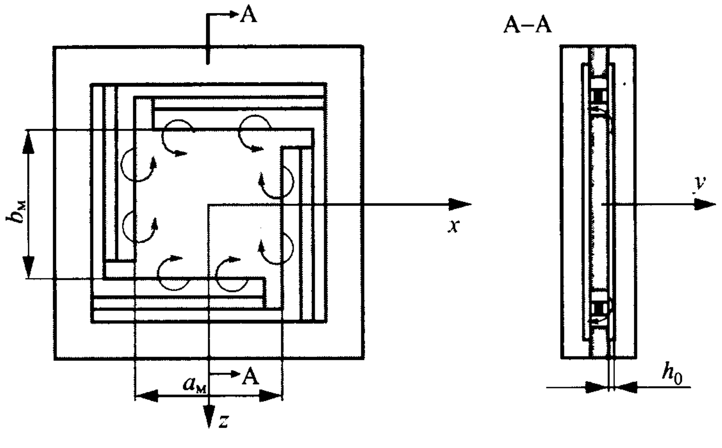


Рис. 4.6. К определению коэффициента линейного демпфирования

2) нормальная составляющая скорости v_y зависит только от нормальной компоненты y, составляющие v_x, v_z – от всех трех координат, при этом $v_y << v_x$, $v_y << v_z$. Течение в плоскости x, z является потенциальным, т.е. течением без трения. Градиент давления $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

В результате найдена сила (4.84), и коэффициент демпфирования (4.83) в направлении оси y

$$k_{ду} = \frac{2\mu a_м^3 b_м^3}{h_0^3(a_м^2 + b_м^2)}. \tag{4.87}$$

Коэффициенты демпфирования для подвижных узлов, имеющих в плане форму квадрата ($a_м = b_м$), круга радиусом R и удлиненного прямоугольника – полосы ($a_м >> b_м$), определяются в соответствии с уравнением (4.87) по формулам

$$k_{ду} = \frac{\mu a_м^4}{h_0^3};\quad k_{ду} = \frac{3\mu\pi R^4}{h_0^3};\quad k_{ду} = \frac{2\mu a_м b_м^3}{h_0^3}; \tag{4.88}$$

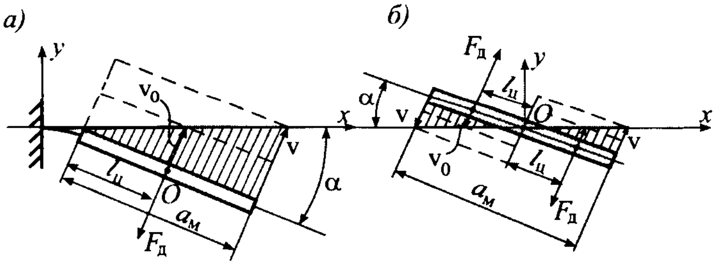


Рис. 4.7. К определению коэффициента углового демпфирования:
а – подвес ИМ на консольных упругих элементах; *б* – подвес ИМ на упругих элементах кручения (торсионах)

Пример 4.10

Рассчитаем коэффициенты демпфирования ЧЭ, ИМ которых имеют примерно равные площади, но разную форму. Демпфирующая среда – воздух; при $T = +20$ °C $\mu = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Зазор $h_0 = 18 \cdot 10^{-6}$ м. По формулам (4.87), (4.88) получим:

– прямоугольник $a_м = 9 \cdot 10^{-3}$ м, $b_м = 10^{-2}$ м

$$k_{ду} = 23{,}48 \text{ Н·с/м};$$

– квадрат $a_м = b_м = 9{,}48 \cdot 10^{-3}$ м

$$k_{ду} = 23{,}56 \text{ Н·с/м};$$

– круг $R = 5{,}35 \cdot 10^{-3}$ м

$$k_{ду} = 22{,}41 \text{ Н·с/м};$$

– полосу $a_м = 29{,}98 \cdot 10^{-3}$ м, $b_м = 2{,}99 \cdot 10^{-3}$ м

$$k_{ду} = 4{,}67 \text{ Н·с/м}.$$

Полученные результаты демонстрируют зависимость коэффициента демпфирования от формы ИМ. Существенна его зависимость и от размеров для одной формы ИМ. Примем для прямоугольной в плане ИМ размеры: $a_м = 8{,}56 \cdot 10^{-3}$ м, $b_м = 9{,}1 \cdot 10^{-3}$ м (из примера 3.2) и получим

$$k_{ду} = \frac{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5} \left(8{,}56 \cdot 10^{-3}\right)^3 \left(9{,}1 \cdot 10^{-3}\right)^3}{\left(18 \cdot 10^{-6}\right)^3 \left[\left(8{,}56 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(9{,}1 \cdot 10^{-3}\right)^2\right]} = 17{,}65 \text{ Н·с/м}.$$

Определим коэффициенты демпфирования ЧЭ маятниковых МА, помня, что ИМ либо имеет упругие элементы подвеса, длины которых значительно меньше длины $a_м$ пластины ИМ (рис. 4.7, *а*), либо ее подвес выполнен в виде торсионов, обеспечивающих вращение ИМ вокруг оси, проходящей через точку O (рис. 4.7, *б*).

В предположении, что центр давления расположен на расстоянии $l_ц = \frac{a_м}{2}$ (рис. 4.7, *а*), момент демпфирования равен $M_д = F_д\, l_ц = F_д \frac{a_м}{2}$, а коэффициент углового демпфирования определяется следующим образом:

$$k_{д\alpha} = M_д / \dot{\alpha} = F_д a_м / 2\dot{\alpha}\,. \tag{4.89}$$

Из рис. 4.7, *а* следует $v_0 = \frac{1}{2} v$, $\dot{\alpha} = 2v_0 / a_м$ и в соответствии с выражениями (4.89), (4.83), (4.87) получим

$$k_{д\alpha} = \frac{F_д a_м^2}{4v_0} = \frac{\mu a_м^5 b_м^3}{2h_0^3\left(a_м^2 + b_м^2\right)}\,. \tag{4.90}$$

Для ИМ по рис. 4.7, *б* величина $k_{д\alpha}$ также определяется формулой (4.90), имея в виду, что $l_ц = a_м/4$, а в демпфировании принимают участие как бы две пластины, каждая длиной $a_м/2$.

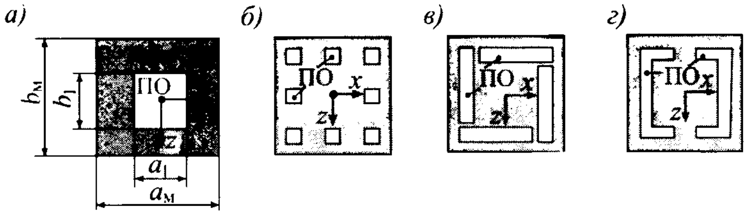


Рис. 4.8. Перфорационные отверстия:
а–г – варианты расположения ПО

Очевидно для ИМ, выполненной в виде квадратной пластины, из уравнения (4.90) следует:

$$k_{\text{дα}} = \mu a_{\text{м}}^6 / \left(4h_0^3\right). \qquad (4.91)$$

Формулы (4.90), (4.91) могут быть записаны в виде

$$k_{\text{дα}} = k_{\text{ду}}\, l_{\text{ц}}^2. \qquad (4.92)$$

Эффективным конструктивным приемом изменения степени демпфирования помимо изменения демпфирующей среды (воздух, азот, водород, масло и т.д.), является выполнение в пластине специальных отверстий, которые могут быть названы перфорационными – ПО (рис. 4.8).

Формулы для вычисления коэффициентов демпфирования пластины с учетом ПО имеют структуру, идентичную формуле (4.87), и, например, коэффициент линейного демпфирования для пластины с центральным ПО (рис. 4.8, *а*) может быть вычислен аналогично формуле (4.87):

$$k_{\text{ду}} = \frac{2\mu}{h_0^3}\left(\frac{a_{\text{м}}^3 b_{\text{м}}^3}{a_{\text{м}}^2 + b_{\text{м}}^2} - \frac{a_1^3 b_1^3}{a_1^2 + b_1^2}\right). \qquad (4.93)$$

Учитывая приближенный характер зависимостей (4.87)–(4.93), можно предположить, что уменьшение коэффициентов демпфирования при наличии ПО в пластинах пропорционально площади ПО.

Пример 4.11

Вычислим коэффициент линейного демпфирования ИМ, которая имеет форму пластины (рис. 4.8, *а*) с размерами $a_{\text{м}} = 9 \cdot 10^{-3}$ м, $b_{\text{м}} = 10^{-2}$ м; $a_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м, $b_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м. Остальные параметры взяты из примера 4.10.

По формуле (4.87) получим $k_{\text{ду}} = 5{,}69$ Н·с/м. Сравнивая этот результат с величиной $k_{\text{ду}} = 23{,}48$ Н·с/м для пластины без ПО, заключаем, что сокращение демпфирующей площади пластины на 25 % привело к уменьшению коэффициента демпфирования в 4,12 раза. Вычислим теперь коэффициент демпфирования с учетом ПО, занимающих ¼ площади пластины, следующим образом: $k_{\text{ду}} = 23{,}48/4 = 5{,}87$ Н·с/м, что по сравнению с вычислением по формуле (4.93) дает ошибку 3,16 %.

Рассмотрим демпфирование колебаний мембраны в датчиках давления от сжатия (компрессии) газовой пленки при движении мембраны, либо за счет перетекания вязкой среды (газ или жидкость) через специальные капиллярные отверстия. В первом случае демпфирование существенно зависит от давления в полости, в которой происходит сжатие газа, поскольку вязкость газа критична к давлению.

Для определения вязкости газа Больцман предложил формулу

$$\mu = 0{,}3502\rho v\lambda,$$

где ρ – плотность газа; v, λ – средняя скорость и длина свободного пробега молекулы соответственно.

Длиной свободного пробега называется средняя длина пути, проходимого молекулой между соударениями с другими молекулами. Для газа она определяется зависимостью

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

где $k = 1{,}38066 \cdot 10^{-23}$ Дж/К (постоянная Больцмана); T – температура по шкале Кельвина (К = °С + 273); p – давление; d – диаметр молекулы газа.

Так как величина λ зависит от давления, то оно сказывается и на вязкости газа.

Пример 4.12

Рассчитаем длину свободного пробега молекулы азота при t = 20 °С и давлении p = 1 и 0,1 ата (1 Торр = 1/760 ата).

Имеем $d = 3{,}7 \cdot 10^{-10}$ м; 1 норм. ата = 760 мм рт. ст. = $1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м^2.

Для p = 1 ата:

$$\lambda = \frac{1{,}38006 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5} = 65{,}68 \cdot 10^{-9}\,\text{м}.$$

Для p = 0,1 ата значение $\lambda = 0{,}656 \cdot 10^{-6}$ м, а для p = 1 Торр $\lambda = 49{,}916 \cdot 10^{-6}$ м ≈ 50 мкм.

Из примера следует, что средний пробег молекулы азота при стандартной температуре и давлении p = 1 ата примерно составляет 70 нм. При падении давления до 0,1 ата его значение приближается к 1 мкм, а до 1 Торр пробег возрастает до 50 мкм.

В литературе, в частности в [22], для газа, находящегося между параллельными пластинами, перемещающимися навстречу друг другу (сжатие газа), для малого давления ($p \ll 0{,}1$ ата) приведена зависимость для вычисления коэффициента демпфирования:

$$K_{ду} = 7\frac{\mu_p a^3 b}{h_0^2} p, \tag{4.94}$$

где $\mu_р = 2{,}776 \cdot 10^{-6}$ с/м (для азотной и воздушной сред); a, b – ширина и длина мембраны постоянной толщины или жесткого центра мембраны; h_0 – размер зазора, в котором происходит сжатие газа.

Очевидно, что при деформировании (прогибе) мембраны постоянной толщины происходит некоторое уменьшение объема, а следовательно, увеличение давления в образцовой камере. Однако эти изменения столь незначительны, что ими можно пренебречь.

Пример 4.13

Рассчитаем коэффициент демпфирования мембраны (пластины) с жестким центром с параметрами $A = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $a = b = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м. Примем $h_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ м, $p = 1$ Торр $= 1/760$ ата $= 1{,}013 \cdot 10^{-5}/760 = 133$ Н/м^2 и по формуле (4.94) получим

$$K_{\text{ду}} = \frac{7 \cdot 2{,}776 \cdot 10^{-6}(2{,}5 \cdot 10^{-3})^4 133}{(2{,}5 \cdot 10^{-5})^2} = 2{,}53 \cdot 10^{-4}\ \text{Н/(м·с)}.$$

Из примера следует, что при значительном разрежении давления в образцовой камере газовое демпфирование весьма маленькое.

Длина свободного пробега молекулы обратно пропорциональна давлению и, в частности, как следует из примера 4.12, при $p = 1$ ата она меньше 1 мкм.

Так как в датчиках давления расстояние между пластинами, где находится сжимаемый газ, значительно больше свободного пробега молекул газа, можно полагать, что вязкость газа не зависит от давления. Для этого случая коэффициенты демпфирования можно рассчитать по формулам (4.87), (4.88), (4.90), (4.91).

В датчиках давления с жестким центром демпфирование мембраны может осуществляться за счет перетекания вязкой среды (газ, жидкость) из подмембранной полости через калиброванные отверстия. На рис. 4.9 показано одно из таких отверстий с размерами r_0 и l. Имея в виду ламинарный режим течения жидкости, полагаем, что скорость в продольном сечении отверстия изменяется по известному параболическому закону:

$$\text{v} = \text{v}_0[1-(r/r_0)^2], \tag{4.95}$$

где v_0 – скорость по оси отверстия.

Демпфирующая сила $F_\text{д}$ равна силе трения $F_\text{тр}$ вязкой среды о стенки отверстия:

$$F_\text{д} = F_\text{тр} = -k_\text{д}\text{v}_y, \tag{4.96}$$

где v_y – скорость перемещения жесткого центра мембраны.

Коэффициент демпфирования

$$k_\text{д} = -F_\text{тр}/\text{v}_y. \tag{4.97}$$

Сила трения вязкой среды определяется следующим образом:

$$F_\text{тр} = 2\pi r_0 l \tau_\text{тр},$$

где $\tau_\text{тр}$ – касательное напряжение трения вязкой среды на стенках отверстия и определяется известной формулой:

$$\tau_\text{тр} = \mu(d\text{v}/dr)\big|_{r=r_0}.$$

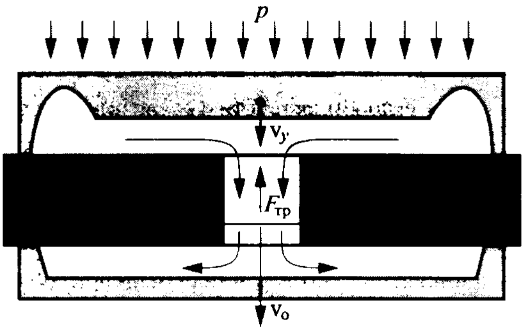


Рис. 4.9. К определению коэффициента демпфирования

Имея в виду выражение (4.95), получим $(dv/dr)|_{r=r_0} = -2v_0/r_0$ и, следовательно:

$$F_{\text{тр}} = -4\pi v_0 \mu l. \qquad (4.98)$$

Скорость v_0 найдем из условия равенства объемных расходов вязкой среды: $v_0 S_2 = v_y S_1$ (S_2, S_1 – соответственно площади поперечных сечений калиброванного отверстия и подмембранной полости), откуда $v_0 = (v_y S_1)/S_2$ и с учетом выражения (4.98) в соответствии с формулой (4.97) получим

$$k_{\text{д}} = (4\pi\mu l S_1)/(n_0 S_2), \qquad (4.99)$$

где $n_0 \geq 1$ – число калиброванных отверстий.

Пример 4.14

Рассчитаем коэффициент демпфирования для параметров: $S_1 = 10^{-4}$ м^2, $S_2 = 10^{-6}$ м^2, $l = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м, $n_0 = 1$. Демпфирующая среда – этиловый спирт $\mu = 0{,}122 \cdot 10^{-2}$ кг/(м·с) или азот $\mu = 1{,}67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).

По формуле (4.99) получим: для этилового спирта $k_{\text{д}} = 7{,}7 \cdot 10^{-3}$ Н·с/м, для азота $k_{\text{д}} = 1{,}05 \times 10^{-4}$ Н·с/м.

В многочисленных работах, где рассматриваются задачи течения газа, в частности [21], и специальных работах, например [11], приведены формулы для вычисления демпфирующих сил, которые тоже имеют определенные ограничения на применение, а их достоверность, так же, как и формул, рассмотренных выше, не подтверждена результатами прямых экспериментов.

4.5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОГИРОСКОПОВ

4.5.1. Микрогироскопы LL- и LR-типов

А. Обобщенные уравнения

Уравнения движения составим применительно к схеме по рис. 4.10, которая является обобщенной схемой микромеханических гироскопов LL- и LR-типов.

МГ представляет собой две ИМ *5* и *9*, которые с помощью упругих элементов *3*, *11* смонтированы в раме *2*, а она, в свою очередь, посредством упругих элементов *1* скреплена с корпусом. ИМ электростатическими виброприводами *4* (левым), *7* (центральным) и *10* (правым), имеющими гребенчатую структуру, создающими вынуждающие силы F, приводятся в колебательные противофазные движения в своей плоскости (XZ).

При наличии переносной угловой скорости Ω_Z возникают ускорение Кориолиса и соответствующие ему силы инерции, которые вызывают либо вибрационные поступательные движения чувствительных масс в направлении оси OY, либо колебательное движение рамы *2* вокруг оси OZ в зависимости от варианта исполнения упругих подвесов. Указанные колебания содержат информацию об измеряемой угловой скорости Ω_Z и измеряются с помощью емкостных датчиков перемещений, образованных подвижными электродами, расположенными на ЧЭ *5*, *9*, и неподвижными электродами *6*, *8*, размещенными на корпусе.

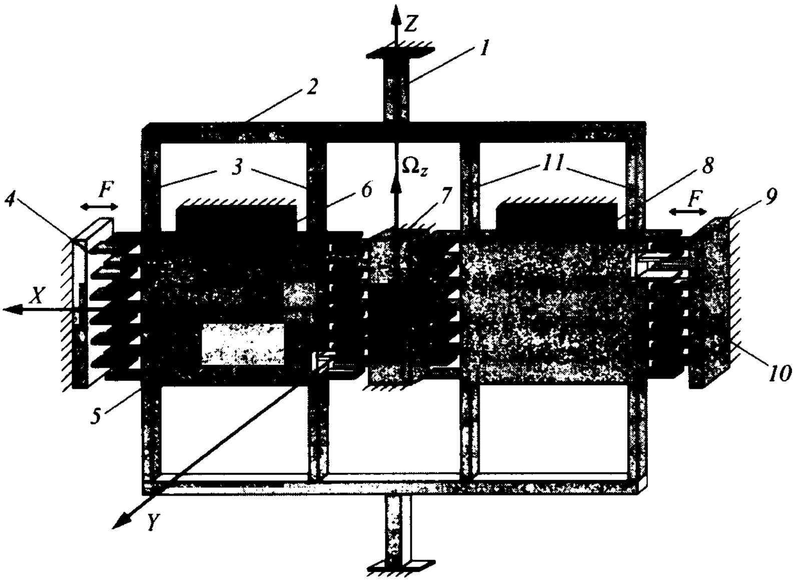


Рис. 4.10. Обобщенная схема МГ LL- и LR-типов:
1, 3, 11 – упругие элементы; *2* – рама; *4, 7, 10* – виброприводы; *5, 9* – инерционные массы; *6, 8* – неподвижные электроды датчиков перемещений

При выводе уравнений движения будем полагать, что рама *2* совместно с упругими элементами имеет конечную жесткость в направлении осей OX, OY, а элементы *1* – конечную жесткость на кручение вокруг оси OZ. Элементы *3* и *11* обладают в общем случае разными жесткостями на изгиб в направлении осей OX и OY. Считаем, что жесткости всех элементов (кроме *1*) вокруг OZ бесконечно большие, ИМ и рамы имеют статическую несбалансированность, а основание перемещается поступательно с линейным ускорением. Введем системы координат и обозначения (рис. 4.11).

С корпусом связана система $OXYZ$. Он жестко соединен с основанием, которое поступательно перемещается с ускорением, имеющим на оси системы координат $OXYZ$ проекции a_x, a_y, a_z. Основание, кроме того, вращается вокруг осей системы координат $OXYZ$ с угловыми скоростями $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$. Вектор измеряемой скорости Ω_Z направлен вдоль оси OZ, совпадающей с осью кручения элементов *1* (см. рис. 4.10).

Система координат $Ox'y'z'$ обозначает разворот рамы на угол α благодаря конечной жесткости элементов *1* на кручение. С геометрическим центром рамы связана система координат $O_{\text{р}}x_{\text{р}}y_{\text{р}}x_{\text{р}}$, соответствующие оси которой параллельны осям системы координат $Ox'y'z'$. Положение геометрического центра рамы (точка $O'_{\text{р}}$) определено координатами x, y в системе $Oxyz$, которые обусловлены конечной жесткостью на изгиб рамы и элементов *1*.

С ЦМ (точка $O'_{\text{р}}$) рамы связана система координат $O'_{\text{р}}x'_{\text{р}}y'_{\text{р}}z'_{\text{р}}$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $O_{\text{р}}x_{\text{р}}y_{\text{р}}z_{\text{р}}$, а положение точки $O'_{\text{р}}$ определено координатами $\delta_{x\text{р}}, \delta_{y\text{р}}, \delta_{z\text{р}}$, которые могут иметь физическую природу технологических или температурных смещений.

С геометрическим центром (точка O_1) первой ИМ связана система координат $O_1x_1y_1x_1$, положение которой в системе $O_\text{p}x_\text{p}y_\text{p}z_\text{p}$ определено координатами x_1y_1, а соответствующие оси указанных систем координат параллельны. Координата x_1 обусловлена упругими свойствами конструкции, а также перемещениями, вызванными виброприводами, а координата y_1 – только упругими свойствами МГ.

С ЦМ (точка O_1'), положение которого в системе $O_1x_1y_1z_1$ определено координатами $\delta_{x\text{p}}, \delta_{y\text{p}}, \delta_{z\text{p}}$, связана система координат $O_1'x_1'y_1'z_1'$. Соответствующие оси систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_1'x_1'y_1'z_1'$ параллельны.

С геометрическим центром (точка O_2) второй ИМ связана система координат $O_2x_2y_2z_2$, оси которой параллельны соответствующим осям системы $O_\text{p}x_\text{p}y_\text{p}z_\text{p}$, а положение точки O_2 определено координатами x_2 (упругие и виброперемещения) и y_2 (упругие перемещения). По принципу работы МГ координаты x_1, x_2, y_1, y_2 находятся в противофазе. Этим обстоятельством и объясняется взаимное положение систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ относительно системы $O_\text{p}x_\text{p}y_\text{p}z_\text{p}$.

Положение ЦМ (точка O_1') второй ИМ в системе $O_2x_2y_2z_2$ определено координатами $\delta_{x2}, \delta_{y2}, \delta_{z2}$, а оси системы $O_2'x_2'y_2'z_2'$ параллельны соответствующим осям системы координат $O_2x_2y_2z_2$.

Смещения ЦМ (точки O_1', O_2') относительно геометрических центров (точки O_1, O_2) ИМ могут быть вызваны изменением температуры или технологическими причинами.

Уравнения движения МГ получим на основании уравнений Лагранжа второго рода (4.1).

В качестве обобщенных координат для рамы выберем угловую α и линейные x, y; для первой и второй ИМ соответственно x_1, y_1 и x_2, y_2. Таким образом, для рамы $j = \alpha, x, y$ $(q_\alpha = \alpha,\ q_x = x,\ q_y = y)$; для ИМ $j = x_1, y_1 (q_{x1} = x_1,\ q_{y1} = y_1)$; $i = x_2, y_2 (q_{x2} = x_2,\ q_{y2} = y_2)$.

Запишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\Big[\left(A_\text{p} + A_1 + A_2\right)p^2 + \left(B_\text{p} + B_1 + B_2\right)q^2 + \left(C_\text{p} + C_1 + C_2\right)r^2 + m_\text{p}\left(\text{v}_{x\text{p}}^2 + \text{v}_{y\text{p}}^2 + \text{v}_{z\text{p}}^2\right) + \\ + m_1\left(\text{v}_{x_1}^2 + \text{v}_{y_1}^2 + \text{v}_{z_1}^2\right) + m_2\left(\text{v}_{x_2}^2 + \text{v}_{y_2}^2 + \text{v}_{z_2}^2\right)\Big], \tag{4.100}$$

где $A_\text{p}, B_\text{p}, C_\text{p}$ – главные моменты инерции рамы относительно осей Ox_p, Oy_p, Oz_p соответственно; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 – то же, ИМ относительно осей Ox_p, Oy_p, Oz_p соответственно; m_p, m_1, m_2 – массы рамы, первой и второй ИМ; p, q, r – проекции абсолютных угловых скоростей на оси Ox_p, Oy_p, Oz_p соответственно; $\text{v}_{x\text{p}}, \text{v}_{y\text{p}}, \text{v}_{z\text{p}}$; $\text{v}_{x1}, \text{v}_{y1}, \text{v}_{z1}$; $\text{v}_{x2}, \text{v}_{y2}, \text{v}_{z2}$ – проекции линейных скоростей ЦМ рамы, первой и второй ИМ на соответствующие оси.

Будем полагать, что жесткость рамы по соответствующим обобщенным координатам определяется величинами G_α, G_x, G_y, а жесткость подвесов ИМ – величинами G_{x1}, G_{y1} и G_{x2}, G_{y2} по соответствующим обобщенным координатам.

Потенциальная энергия МГ зависит от упругих деформаций элементов подвеса и заряда Q, накапливающегося на конденсаторах емкостью C гребенчатых структур ($W = Q^2/C$):

$$\Pi = \frac{1}{2}(G_\alpha \alpha^2 + G_x x^2 + G_y y^2 + G_{x_1} x_1^2 + +G_{x_2} x_2^2 + G_{y_2} y_2^2) + W. \tag{4.101}$$

Диссипативную функцию рассеяния энергии МГ представим в виде

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(b_\alpha \dot{\alpha}^2 + (b_x \dot{x}^2 + b_y \dot{y}^2) + \left(b_{x_1} \dot{x}_1^2 + b_{y_1} \dot{y}_1^2\right) + \left(b_{x_2} \dot{x}_2^2 + b_{y_2} \dot{y}_2^2\right)\right], \tag{4.102}$$

где b_α, b_x, b_y – коэффициенты демпфирования для рамы при ее движениях по обобщенным координатам α, x, y; b_{x1}, b_{y1}, b_{x2}, b_{y2} – коэффициенты демпфирования для первой и второй ИМ при их движениях в направлении соответствующих обобщенных координат.

Определим обобщенные силы.

Для рамы:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} - \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} + M_\alpha; \quad Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} + F_x;$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + F_y.$$

Для первой и второй ИМ

$$\left.\begin{aligned}
Q_{x_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} + F_{x_1} + F_0 \sin pt;\\
Q_{y_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} - \frac{\partial W}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_1} + F_{y_1};\\
Q_{x_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - \frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} + F_{x_2} - F_0 \sin pt;\\
Q_{y_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} - \frac{\partial W}{\partial y_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_2} + F_{y_2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.103}$$

(F_0 и p – амплитуда и частота сил, генерируемых виброприводами).

Для малых значений углов α имеют место равенства (рис. 4.11):

$$\left.\begin{aligned}
M_\alpha &= a_y\left[m_{\text{р}}\left(x + \delta_{x\text{р}}\right) + m_1\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right) + m_2\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\right] -\\
&\quad - a_x\left[m_{\text{р}}\left(y + \delta_{y\text{р}}\right) + m_1\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right) + m_2\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right)\right];\\
F_x &= (m_{\text{р}} + m_1 + m_2)a_x; \quad F_y = (m_{\text{р}} + m_1 + m_2)a_y;\\
F_{x_1} &= m_1 a_x; \quad F_{y_1} = m_1 a_y; \quad F_{x_2} = m_2 a_x; \quad F_{y_2} = m_2 a_y.
\end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

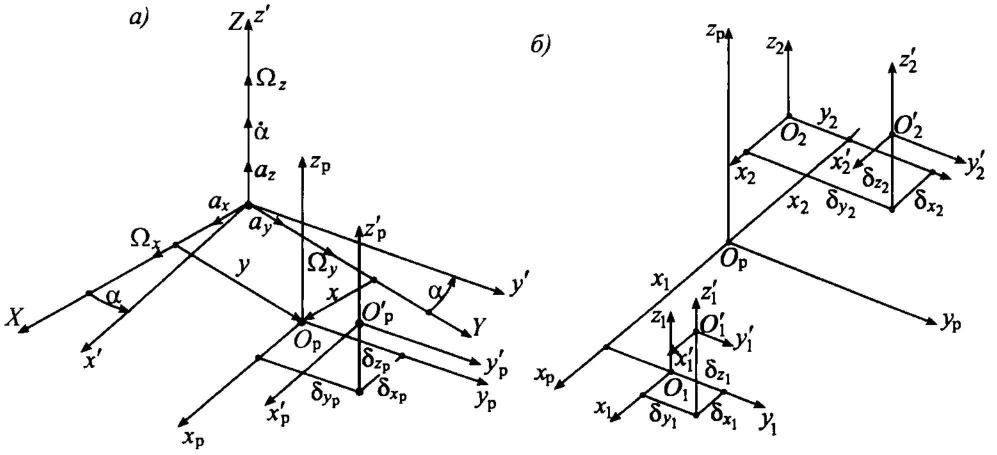


Рис. 4.11. Системы координат:
а – для рамы; *б* – для ИМ

Запишем обобщенные силы [см. формулу (4.103)] с учетом функций (4.101) и (4.102):

$$
\left.
\begin{aligned}
&Q_\alpha = -G_\alpha \alpha - \frac{\partial W}{\partial \alpha} - b_\alpha \dot{\alpha} + M_\alpha ; \quad Q_x = -G_x x - \frac{\partial W}{\partial x} - b_x \dot{x} + F_x ;\\
&Q_y = -G_y y - \frac{\partial W}{\partial y} - b_y \dot{y} + F_y ;\\
&Q_{x_1} = -G_{x_1} x_1 - \frac{\partial W}{\partial x_1} - b_{x_1} \dot{x}_1 + F_{x_1} + F_0 \sin pt ;\\
&Q_{y_1} = -G_{y_1} y_1 - \frac{\partial W}{\partial y_1} - b_{y_1} \dot{y}_1 + F_{y_1} ;\\
&Q_{x_2} = -G_{x_2} x_2 - \frac{\partial W}{\partial x_2} - b_{x_2} \dot{x}_2 + F_{x_2} - F_0 \sin pt ;\\
&Q_{y_2} = -G_{y_2} y_2 - \frac{\partial W}{\partial y_2} - b_{y_2} \dot{y}_2 + F_{y_2} .
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.105)
$$

Запишем проекции абсолютной угловой скорости на оси $x_p y_p z_p$:

$$
\begin{aligned}
&p = \Omega_x \cos\alpha + Q_y \sin\alpha ;\\
&q = \Omega_y \cos\alpha - \Omega_x \sin\alpha ; \qquad r = \Omega_z + \dot{\alpha} .
\end{aligned} \qquad (4.106)
$$

С учетом того что проекции абсолютных угловых скоростей ИМ на оси систем координат $O_1' x_1' y_1' z_1'$ и $O_2' x_2' y_2' z_2'$ также определяются выражениями (4.106), запишем матрицы для вычисления линейных скоростей ЦМ рамы и ИМ относительно точки O (см. рис. 4.11):

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\text{v}}_{0\text{p}} &= \begin{vmatrix} \bar{i}_\text{p} & \bar{j}_\text{p} & \bar{k}_\text{p} \\ p & q & r \\ x\cos\alpha+\delta_{x_\text{p}} & y\cos\alpha+\delta_{y_\text{p}} & \delta_{z_\text{p}} \end{vmatrix}; \\
\bar{\text{v}}_{01} &= \begin{vmatrix} \bar{i}_\text{p} & \bar{j}_\text{p} & \bar{k}_\text{p} \\ p & q & r \\ x\cos\alpha+x_1+\delta_{x_1} & y\cos\alpha+y_1+\delta_{y_1} & \delta_{z_1} \end{vmatrix}; \\
\bar{\text{v}}_{02} &= \begin{vmatrix} \bar{i}_\text{p} & \bar{j}_\text{p} & k_\text{p} \\ p & q & r \\ x\cos\alpha-x_2+\delta_{x_2} & y\cos\alpha-y_2+\delta_{y_2} & \delta_{z_2} \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \quad (4.107)$$

где $\bar{i}_\text{p}$, $\bar{j}_\text{p}$, $\bar{k}_\text{p}$ – единичные векторы в направлении осей x_p, y_p, z_p соответственно.

Из матриц (4.107) следуют выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\text{v}}_{0\text{p}} &= \bar{i}_\text{p}\left[q\delta_{z_\text{p}} - r\left(y\cos\alpha+\delta_{y_\text{p}}\right)\right] + \bar{j}_\text{p}\left[r\left(x\cos\alpha+\delta_{x_\text{p}}\right) - p\delta_{z_\text{p}}\right] + \\
&\quad + \bar{k}_\text{p}\left[p\left(y\cos\alpha+\delta_{y_\text{p}}\right) - q\left(x\cos\alpha+\delta_{x_\text{p}}\right)\right]; \\
\bar{\text{v}}_{01} &= \bar{i}_\text{p}\left[q\delta_{z_1} - r\left(y\cos\alpha+y_1+\delta_{y_1}\right)\right] + \bar{j}_\text{p}\left[r\left(x\cos\alpha+x_1+\delta_{x_1}\right) - p\delta_{z_1}\right] + \\
&\quad + \bar{k}_\text{p}\left[p\left(y\cos\alpha+y_1+\delta_{y_1}\right) - q\left(x\cos\alpha+x_1+\delta_{x_1}\right)\right]; \\
\bar{\text{v}}_{02} &= \bar{i}_\text{p}\left[q\delta_{z_2} - r\left(y\cos\alpha-y_2+\delta_{y_2}\right)\right] + \bar{j}_\text{p}\left[r\left(x\cos\alpha-x_2+\delta_{x_2}\right) - p\delta_{z_2}\right] + \\
&\quad + \bar{k}_\text{p}\left[p\left(y\cos\alpha-y_2+\delta_{y_2}\right) - q\left(x\cos\alpha-x_2+\delta_{x_2}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (4.108)$$

Запишем проекции абсолютных линейных скоростей ЦМ рамы, первой и второй ИМ с учетом (4.108) на соответствующие оси:

$$\left.\begin{aligned}
\text{v}_{x_\text{p}} &= \dot{x} + q\delta_{z_\text{p}} - r\left(y\cos\alpha+\delta_{y_\text{p}}\right); \\
\text{v}_{y_\text{p}} &= \dot{y} + r\left(x\cos\alpha+\delta_{x_\text{p}}\right) - p\delta_{z_\text{p}}; \\
\text{v}_{z_\text{p}} &= p\left(y\cos\alpha+\delta_{y_\text{p}}\right) - q\left(x\cos\alpha+\delta_{x_\text{p}}\right);
\end{aligned}\right\} \quad (4.109)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{v}_{x_1} &= \dot{x} + \dot{x}_1 + q\delta_{z_1} - r\left(y\cos\alpha + y_1 + \delta_{y_1}\right);\\
\mathrm{v}_{y_1} &= \dot{y} + \dot{y}_1 + r\left(x\cos\alpha + x_1 + \delta_{x_1}\right) - p\delta_{z_1};\\
\mathrm{v}_{z_1} &= p\left(y\cos\alpha + y_1 + \delta_{y_1}\right) - q\left(x\cos\alpha + x_1 + \delta_{x_1}\right);
\end{aligned}\right\} \tag{4.110}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{v}_{x_2} &= \dot{x} - \dot{x}_2 + q\delta_{z_2} - r\left(y\cos\alpha - y_2 + \delta_{y_2}\right);\\
\mathrm{v}_{y_2} &= \dot{y} - \dot{y}_2 + r\left(x\cos\alpha - x_2 + \delta_{x_2}\right) - p\delta_{z_2};\\
\mathrm{v}_{z_2} &= p\left(y\cos\alpha - y_2 + \delta_{y_2}\right) - q\left(x\cos\alpha - x_2 + \delta_{x_2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4.111}$$

Полагая угол α малым (sinα ≈ α, cosα ≈ 1), перепишем выражения (4.109)...(4.111) с учетом равенств (4.106):

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{v}_{x_r} &= \dot{x} + \left(\Omega_y - \Omega_{x\alpha}\right)\delta_{z_\mathrm{p}} - \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\left(y + \delta_{y_\mathrm{p}}\right);\\
\mathrm{v}_{y_r} &= \dot{y} + \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\left(x + \delta_{x_\mathrm{p}}\right) - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_\mathrm{p}};\\
\mathrm{v}_{z_p} &= \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(y + \delta_{y_\mathrm{p}}\right) - \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(x + \delta_{x_\mathrm{p}}\right);\\
\mathrm{v}_{x_1} &= \dot{x} + \dot{x}_1 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_1} - \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right);\\
\mathrm{v}_{y_1} &= \dot{y} + \dot{y}_1 + \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right) - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_1};\\
\mathrm{v}_{z_1} &= \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right) - \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right);\\
\mathrm{v}_{x_2} &= \dot{x} - \dot{x}_2 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_2} - \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right);\\
\mathrm{v}_{y_2} &= \dot{y} - \dot{y}_2 + \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right) - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_2};\\
\mathrm{v}_{z_2} &= \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right) - \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4.112}$$

Вычислим следующие производные ($\Omega_x = \mathrm{const}$, $\Omega_y = \mathrm{const}$, $\Omega_z = \mathrm{const}$):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial\alpha} = \left(A_\mathrm{p} + A_1 + A_2\right)p\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \left(B_\mathrm{p} + B_1 + B_2\right)q\frac{\partial q}{\partial\alpha} + m_\mathrm{p}\left(\mathrm{v}_{x_\mathrm{p}}\frac{\partial \mathrm{v}_{x_\mathrm{p}}}{\partial\alpha} + \mathrm{v}_{y_\mathrm{p}}\frac{\partial \mathrm{v}_{y_\mathrm{p}}}{\partial\alpha} + \mathrm{v}_{z_\mathrm{p}}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_\mathrm{p}}}{\partial\alpha}\right) +\\
&+ m_1\left(\mathrm{v}_{x_1}\frac{\partial \mathrm{v}_{x_1}}{\partial\alpha} + \mathrm{v}_{y_1}\frac{\partial \mathrm{v}_{y_1}}{\partial\alpha} + \mathrm{v}_{z_1}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_1}}{\partial\alpha}\right) + m_2\left(\mathrm{v}_{x_2}\frac{\partial \mathrm{v}_{x_2}}{\partial\alpha} + \mathrm{v}_{y_2}\frac{\partial \mathrm{v}_{y_2}}{\partial\alpha} + \mathrm{v}_{z_2}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_2}}{\partial\alpha}\right) =\\
&= \left(A_\mathrm{p} + A_1 + A_2\right)\left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\Omega_y - \left(B_\mathrm{p} + B_1 + B_2\right)\left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\Omega_x + \left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\times\\
&\times\Bigl\{m_\mathrm{p}\Bigl[\left(y + \delta_{y_\mathrm{p}}\right)\Omega_x - \left(x + \delta_{x_\mathrm{p}}\right)\Omega_y\Bigr]\delta_{z_\mathrm{p}} + m_1\Bigl[\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right)\Omega_x - \left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\Omega_y\Bigr]\delta_{z_1} +\\
&+ m_2\Bigl[\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right)\Omega_x - \left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\Omega_y\Bigr]\delta_{z_2}\Bigr\} + m_\mathrm{p}\Bigl\{\Bigl[\dot{x} + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_\mathrm{p}}\Bigr]\left(-\Omega_{x_\mathrm{p}}\delta_{z_\mathrm{p}}\right) +\\
&+ \Bigl[\dot{y} - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_\mathrm{p}}\Bigr]\left(-\Omega_y\,\delta_{z_\mathrm{p}}\right) + \Bigl[\left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(y + \delta_{y_\mathrm{p}}\right) - \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(x + \delta_{x_\mathrm{p}}\right)\Bigr]\times\\
&\times\Bigl[\Omega_y\left(y + \delta_{y_\mathrm{p}}\right) + \Omega_x\left(x + \delta_{x_\mathrm{p}}\right)\Bigr]\Bigr\} + m_1\Bigl\{\Bigl[\dot{x} + \dot{x}_1 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_1}\Bigr]\left(-\Omega_x\delta_{z_1}\right) + \Bigl[\dot{y} + \dot{y}_1 - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_1}\Bigr]\times\\
&\times\left(-\Omega_y\delta_{z_1}\right) + \Bigl[\left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right) - \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\Bigr]\Bigl[\Omega_y\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right) +\\
&+ \Omega_x\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\Bigr]\Bigr\} + m_2\Bigl\{\Bigl[\dot{x} - \dot{x}_2 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_2}\Bigr]\left(-\Omega_x\delta_{z_2}\right) + \Bigl[\dot{y} - \dot{y}_1 - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_2}\Bigr]\left(-\Omega_y\delta_{z_2}\right) +\\
&+ \Bigl[\left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right) - \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\Bigr]\Bigl[\Omega_y\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right) + \Omega_x\left(x + x_2 + \delta_{x_2}\right)\Bigr]\Bigr\};
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = \left(C_{\text{р}} + C_1 + C_2\right) p\frac{\partial r}{\partial\dot\alpha} + m_{\text{р}}\left(\mathrm{v}_{x_{\text{р}}}\frac{\partial \mathrm{v}_{x_{\text{р}}}}{\partial\dot\alpha} + \mathrm{v}_{y_{\text{р}}}\frac{\partial \mathrm{v}_{y_{\text{р}}}}{\partial\dot\alpha} + \mathrm{v}_{z_{\text{р}}}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_{\text{р}}}}{\partial\dot\alpha}\right) + \\
&+ m_1\left(\mathrm{v}_{x_1}\frac{\partial \mathrm{v}_{x_1}}{\partial\dot\alpha} + \mathrm{v}_{y_1}\frac{\partial \mathrm{v}_{y_1}}{\partial\dot\alpha} + \mathrm{v}_{z_1}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_1}}{\partial\dot\alpha}\right) + m_2\left(\mathrm{v}_{x_2}\frac{\partial \mathrm{v}_{x_2}}{\partial\dot\alpha} + \mathrm{v}_{y_2}\frac{\partial \mathrm{v}_{y_2}}{\partial\dot\alpha} + \mathrm{v}_{z_2}\frac{\partial \mathrm{v}_{z_2}}{\partial\dot\alpha}\right) = \\
&= \left(C_{\text{р}} + C_1 + C_2\right)\left(\Omega_z + \dot\alpha\right) + m_{\text{р}}\ \Big\{\Big[\dot x + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_{\text{р}}} - \left(\Omega_z + \dot\alpha\right)\left(y + \delta_{y_{\text{р}}}\right)\Big]\Big[-\left(y + \delta_{y_{\text{р}}}\right)\Big] + \\
&+ \Big[\dot y + \left(\Omega_z + \dot\alpha\right)\left(x + \delta_{x_{\text{р}}}\right) - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_{\text{р}}}\Big]\left(x + \delta_{x_{\text{р}}}\right)\Big\} + m_1\Big\{\Big[\dot x + \dot x_1 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_1} - \\
&- \left(\Omega_z + \dot\alpha\right)\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right)\Big]\Big[-\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right)\Big] + \Big[\dot y + \dot y_1 + \left(\Omega_z + \dot\alpha\right)\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right) - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_1}\Big] \times \\
&\times \left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\Big\} + m_2\Big\{\Big[\dot x - \dot x_2 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\delta_{z_2} - \left(\Omega_z + \dot\alpha\right) - \left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right)\Big]\Big[-\left(y - y_2 - \delta_{y_2}\right)\Big] + \\
&+ \Big[\dot y - \dot y_2 + \left(\Omega_z + \dot\alpha\right)\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right) - \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\delta_{z_2}\Big]\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\Big\};
\end{aligned}
\tag{4.114}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = \Big\{C_{\text{р}} + m_{\text{р}}\Big[\left(y + \delta_{y_{\text{р}}}\right)^2 + \left(x + \delta_{x_{\text{р}}}\right)^2\Big] + C_1 + m_1\Big[\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right)^2 + \left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)^2\Big] + \\
&+ C_2 + m_2\Big[\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right)^2 + \left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)^2\Big]\Big\}\ddot\alpha + \\
&+ m_{\text{р}}\Big[\left(x + \delta_{x_{\text{р}}}\right)\ddot y - \left(y + \delta_{y_{\text{р}}}\right)\ddot x\Big] + m_1\Big[\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right)\left(-\ddot x - \ddot x_1\right) + \left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\left(\ddot y + \ddot y_1\right)\Big] + \\
&+ m_2\Big[\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right)\left(-\ddot x + \ddot x_2\right) + \left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\left(\ddot y - \ddot y_2\right)\Big] + 2\left(\Omega_z + \dot\alpha\right)\Big\{m_{\text{р}}\Big[\dot y\left(y + \delta_{y_{\text{р}}}\right) + \\
&+ \dot x\left(x + \delta_{x_{\text{р}}}\right)\Big] + m_1\Big[\left(\dot y + \dot y_1\right)\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right) + \left(\dot x + \dot x_1\right)\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\Big] + \\
&+ m_2\Big[\left(\dot y - \dot y_2\right)\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right) + \left(\dot x - \dot x_2\right)\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\Big]\Big\} + M\left(\Omega_x, \Omega_y, \delta\right),
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&M\left(\Omega_x, \Omega_y, \delta\right) = \Big\{m_{\text{р}}\Big[\Omega_x\left(y + \delta_{y_{\text{р}}}\right) - \Omega_y\left(x + \delta_{x_{\text{р}}}\right)\Big]\delta_{z_{\text{р}}} + m_1\Big[\Omega_x\left(y + y_1 + \delta_{y_1}\right) - \\
&- \Omega_y\left(x + x_1 + \delta_{x_1}\right)\Big]\delta_{z_1} + m_2\Big[\Omega_x\left(y - y_2 + \delta_{y_2}\right) - \Omega_y\left(x - x_2 + \delta_{x_2}\right)\Big]\delta_{z_2}\Big\}\dot\alpha - \\
&- m_{\text{р}}\Big[\left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\dot y + \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\dot x\Big]\delta_{z_{\text{р}}} - m_1\Big[\left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(\dot y + \dot y_1\right) + \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(\dot x + \dot x_1\right)\Big]\delta_{z_1} - \\
&- m_2\Big[\left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)\left(\dot y - \dot y_2\right) + \left(\Omega_x + \Omega_y\alpha\right)\left(\dot x - \dot x_2\right)\Big]\delta_{z_2}.
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

Таким образом, в соответствии с общей формой (4.1), где производные определяются выражениями (4.113)...(4.115), получено уравнение движения МГ по координате α.

Если предположить, что малы смещения δ (с любым индексом) и угловые скорости Ω_x, $\Omega_y\left(\Omega_x < \Omega_z, \Omega_y < \Omega_z\right)$, то можно в выражениях (4.113)...(4.116) пренебречь величинами порядка их произведений (в любых сочетаниях). В этом случае $\partial T/\partial\alpha \approx 0$, $M\left(\Omega_x, \Omega_y\delta\right) \approx 0$ и уравнение движения МГ по координате α принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\Big\{C_{\text{p}} + m_{\text{p}}\Big[\big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big)^2 + \big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big)^2\Big] + C_1 + m_1\Big[\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big)^2 + \big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big)^2\Big] + \\
&+ C_2 + m_2\Big[\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big)^2 + \big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)^2\Big]\Big\}\ddot{\alpha} + \\
&+ m_{\text{p}}\Big[\big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big)\ddot{y} - \big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big)\ddot{x}\Big] + m_1\Big[-\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big)(\ddot{x} + \ddot{x}_1) + \big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big)(\ddot{y} + \ddot{y}_1)\Big] + \qquad (4.117) \\
&+ m_2\Big[\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big)(-\ddot{x} + \ddot{x}_2) + \big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)(\ddot{y} - \ddot{y}_2)\Big] + 2(\Omega_z + \dot{a})\times \\
&\times\Big\{m_{\text{p}}\dot{y}\big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big) + \dot{x}\big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big) + m_1\Big[(\dot{y} + \dot{y}_1)\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big) + (\dot{x} + \dot{x}_1)\big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big)\Big] + \\
&+ m_2\Big[(\dot{y} - \dot{y}_2)\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big) + (\dot{x} - \dot{x}_2)\big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)\Big]\Big\} = Q_\alpha.
\end{aligned}
$$

Поступая аналогично, в соответствии с общей формой (4.1) получим уравнение движения МГ по координате x без допущений о малости угловых скоростей Ω_x, Ω_y по сравнению с измеряемой Ω_z:

$$
\begin{aligned}
&\big(m_{\text{p}} + m_1 + m_2\big)\ddot{x} + m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 - \Big[m_{\text{p}}\big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big) + m_1\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big) + m_2\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big)\Big]\ddot{\alpha} - \\
&- 2(\Omega_z + \dot{\alpha})\Big[m_{\text{p}}\dot{y} + m_1(\dot{y} + \dot{y}_1) + m_2(\dot{y} - \dot{y}_2)\Big] - \Omega_x\dot{\alpha}\big(m_{\text{p}}\delta_{z_{\text{p}}} + m_1\delta_{z_1} + m_2\delta_{z_2}\big) - (\Omega_z + \dot{\alpha})\times \\
&\times\Big\{m_{\text{p}}\Big[(\Omega_z + \dot{\alpha})\big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big) - \big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\delta_{z_{\text{p}}}\Big] + m_1\Big[(\Omega_z + \dot{\alpha})\big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big) - \big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\delta_{z_1}\Big] + \\
&+ m_2\Big[(\Omega_z + \dot{\alpha})\big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big) - \big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\delta_{z_2}\Big] + m_1\Big[\big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big) - \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\times \\
&\times\big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big)\Big] + m_2\Big[\big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big) - \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)\Big]\Big\} = Q_x. \qquad (4.118)
\end{aligned}
$$

В предположении малости угловых скоростей $\Omega_x << \Omega_z$, $\Omega_y << \Omega_z$ и величин δ (с любыми индексами), если пренебречь слагаемыми порядка их произведений и выше, уравнение (4.118) запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\big(m_{\text{p}} + m_1 + m_2\big)\ddot{x} + m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 - \Big[m_{\text{p}}\big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big) + m_1\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big) + m_2\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big)\Big]\ddot{\alpha} - \\
&- 2(\Omega_z + \dot{\alpha})\Big[m_{\text{p}}\dot{y} + m_1(\dot{y} + \dot{y}_1) + m_2(\dot{y} - \dot{y}_2)\Big] - (\Omega_z + \dot{\alpha})^2\Big[m_{\text{p}}\big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big) + m_1\big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big) + \\
&+ m_2\big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)\Big] = Q_x.
\end{aligned}
\qquad (4.119)
$$

Уравнение движения МГ по координате y имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\big(m_{\text{p}} + m_1 + m_2\big)\ddot{y} + m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 - \Big[m_{\text{p}}\big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big) + m_1\big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big) + m_2\big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)\Big]\ddot{\alpha} - \\
&- 2(\Omega_z + \dot{\alpha})\Big[m_{\text{p}}\dot{x} + m_1(\dot{x} + \dot{x}_1) + m_2(\dot{x} - \dot{x}_2)\Big] - \Omega_y\dot{\alpha}\big(m_{\text{p}}\delta_{z_{\text{p}}} + m_1\delta_{z_1} + m_2\delta_{z_2}\big) - \\
&- (\Omega_z + \dot{\alpha})\Big\{m_{\text{p}}\Big[(\Omega_z + \dot{\alpha})\big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big) - \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\delta_{z_{\text{p}}}\Big] + m_1\Big[(\Omega_z + \dot{\alpha})\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big) - \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\delta_{z_1}\Big] + \\
&+ m_2\Big[(\Omega_z + \dot{\alpha})\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big) - \big(\Omega_y + \Omega_x\alpha\big)\delta_{z_2}\Big]\Big\} - \big(\Omega_x - \Omega_y\alpha\big)\times \\
&\times\Big\{m_{\text{p}}\Big[\big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\big(y + \delta_{y_{\text{p}}}\big) - \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\big(x + \delta_{x_{\text{p}}}\big)\Big] + m_1\Big[\big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\big(y + y_1 + \delta_{y_1}\big) - \\
&- \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\big(x + x_1 + \delta_{x_1}\big)\Big] + m_2\Big[\big(\Omega_x + \Omega_y\alpha\big)\big(y - y_2 + \delta_{y_2}\big) - \big(\Omega_y - \Omega_x\alpha\big)\big(x - x_2 + \delta_{x_2}\big)\Big]\Big\} = Q_y.
\end{aligned}
\qquad (4.120)
$$

Для малых значений величин Ω_x, Ω_y, δ аналогично соотношению (4.119) получим уравнение

$$\begin{aligned}&(m_\text{p}+m_1+m_2)\ddot{y}+m_1\ddot{y}_1-m_2\ddot{y}_2-\left[m_\text{p}\left(x+\delta_{x_\text{p}}\right)+m_1\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)+m_2\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)\right]\ddot{\alpha}+\\&+2(\Omega_z+\dot{\alpha})\left[m_\text{p}\dot{x}+m_1(\dot{x}+\dot{x}_1)+m_2(\dot{x}-\dot{x}_2)\right]-(\Omega_z+\dot{\alpha})^2\left[m_\text{p}\left(y+\delta_{y_\text{p}}\right)+m_1\left(y+y_1+\delta_{y_1}\right)+\right.\\&\left.+m_2\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)\right]=Q_y.\end{aligned}\qquad(4.121)$$

Для первой (масса m_1) и второй (масса m_2) ИМ в соответствии с общей формой (4.1) получим уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned}&m_1\{\ddot{x}+\ddot{x}_1-\Omega_x\delta_{z_1}\dot{\alpha}-\left(y+y_1+\delta_{z_1}\right)\ddot{\alpha}-[2(\dot{y}+\dot{y}_1)+(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)-\\&-(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\delta_{z_1}](\Omega_z+\dot{\alpha})+[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\left(y+y_1+\delta_{y_1}\right)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)]\times\\&\times(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\}=Q_{x_1};\\[2ex]&m_1\{\ddot{y}+\ddot{y}_1-\Omega_y\delta_{z_1}\dot{\alpha}-\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)\ddot{\alpha}-[2(\dot{x}+\dot{x}_1)-(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(y+y_1+\delta_{y_1}\right)+\\&-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\delta_{z_1}](\Omega_z+\dot{\alpha})-[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\left(y+y_1+\delta_{y_1}\right)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)]\times\\&\times(\Omega_x+\Omega_x\alpha)\}=Q_{y_1}.\end{aligned}\right\}\quad(4.122)$$

$$\left.\begin{aligned}&m_2\{-\ddot{x}+\ddot{x}_2-\Omega_x\delta_{z_2}\dot{\alpha}+\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)\ddot{\alpha}-[2(\dot{y}-\dot{y}_2)+(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)-\\&-(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\delta_{z_2}](\Omega_z+\dot{\alpha})-[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)]\times\\&\times(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\}=Q_{x_2};\\[2ex]&m_2\{-\ddot{y}+\ddot{y}_1-\Omega_y\delta_{z_2}\dot{\alpha}-\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)\ddot{\alpha}-[2(\dot{x}-\dot{x}_2)-(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)+\\&-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\delta_{z_2}](\Omega_z+\dot{\alpha})+[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)]\times\\&\times(\Omega_x+\Omega_y\alpha)\}=Q_{y_2}.\end{aligned}\right\}\quad(4.123)$$

Для малых значений величин Ω_x, Ω_y, δ из выражений (4.122) и (4.123) получим

$$\left.\begin{aligned}&m_1\left\{\ddot{x}+\ddot{x}_1-\left(y+y_1+\delta_{y_1}\right)\ddot{\alpha}-\left[2(\dot{y}+\dot{y}_1)+(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)\right](\Omega_z+\dot{\alpha})\right\}=Q_{x_1};\\&m_2\left\{\ddot{y}+\ddot{y}_1+\left(x+x_1+\delta_{x_1}\right)\ddot{\alpha}+\left[2(\dot{x}+\dot{x}_1)-(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(y+y_1+\delta_{y_1}\right)\right](\Omega_z+\dot{\alpha})\right\}=Q_{y_1}.\end{aligned}\right\}\quad(4.124)$$

$$\left.\begin{aligned}&m_2\left\{-\ddot{x}+\ddot{x}_2+\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)\ddot{\alpha}+\left[2(\dot{y}-\dot{y}_2)+(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)\right](\Omega_z+\dot{\alpha})\right\}=Q_{x_2};\\&m_2\left\{-\ddot{y}+\ddot{y}_2-\left(x-x_2+\delta_{x_2}\right)\ddot{\alpha}-\left[2(\dot{x}-\dot{x}_2)-(\Omega_z+\dot{\alpha})\left(y-y_2+\delta_{y_2}\right)\right](\Omega_z+\dot{\alpha})\right\}=Q_{y_2}.\end{aligned}\right\}(4.125)$$

В полученных уравнениях обобщенные силы определяются в соответствии с формулами (4.105).

Очевидно, что системы уравнений (4.117), (4.119), (4.121), (4.124), (4.125) описывают движение МГ не только для малых значений величин Ω_x, Ω_y, δ, но и для значений $\Omega_x = \Omega_y = 0$, δ – немалое.

Запишем, используя выражения (4.113)–(4.116), (4.118), (4.120), (4.122), (4.123), систему уравнений движения МГ для случая $\delta = 0$ (отсутствуют любые смещения ЦМ рамы и ИМ):

$$\begin{aligned}
&\{C_\text{p} + m_\text{p}(y^2 + x^2) + C_1 + m_1[(y + y_1)^2 + (x + x_1)^2] + C_2 + m_2[(y - y_2)^2 + (x - x_2)^2]\}\ddot{\alpha} + \\
&+ m_\text{p}(x\ddot{y} - y\ddot{x}) + m_1[-(y + y_1)(\ddot{x} + \ddot{x}_1) + (x + x_1)(\ddot{y} + \ddot{y}_1)] + \\
&+ m_2[(y - y_2)(-\ddot{x} + \ddot{x}_2) + (x - x_2)(\ddot{y} - \ddot{y}_2)] + \\
&+ 2(\Omega_z + \dot{\alpha})\{m_\text{p}(\dot{y}y + \dot{x}x) + m_1[(\dot{y} + \dot{y}_1)(y + y_1) + (\dot{x} + \dot{x}_1)(x + x_1)] + \\
&+ m_2[(\dot{y} - \dot{y}_2)(y - y_2) + (\dot{x} - \dot{x}_2)(x - x_2)]\} - (A_\text{p} + A_1 + A_2)(\Omega_x + \Omega_y\alpha)\Omega_y + \\
&+ (B_\text{p} + B_1 + B_2)(\Omega_y - \Omega_x\alpha)\Omega_x - m_\text{p}[(\Omega_x + \Omega_y\alpha)y - (\Omega_y - \Omega_x\alpha)x](\Omega_y y + \Omega_x x) - \\
&- m_1[(\Omega_x + \Omega_y\alpha)(y + y_1) - (\Omega_y - \Omega_x\alpha)(x + x_1)]\,[\Omega_y\,(y + y_1) + \Omega_x\,(x + x_1)] - \\
&- m_2[(\Omega_x + \Omega_y\alpha)(y - y_2) - (\Omega_y - \Omega_x\alpha)(x - x_2)][\Omega_y\,(y - y_2) + \Omega_x\,(x - x_2)] = Q_\alpha.
\end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned}
&(m_\text{p} + m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 - [(m_\text{p} + m_1 + m_2)y + m_1y_1 - m_2y_2]\ddot{\alpha} - \\
&- 2(\Omega_z + \dot{\alpha})[(m_\text{p} + m_1 + m_2)\dot{y} + m_1\dot{y}_1 - m_2\dot{y}_2] - (\Omega_z + \dot{\alpha})^2\,[(m_\text{p} + m_1 + m_2)x + m_1x_1 - m_2x_2] + \\
&+ (\Omega_y - \Omega_x\alpha)\{(\Omega_x + \Omega_y\alpha)[(m_\text{p} + m_1 + m_2)y + m_1y_1 - m_2y_2] - \\
&- (\Omega_y - \Omega_x\alpha)\,[(m_\text{p} + m_1 + m_2)x + m_1x_1 - m_2x_2]\} = Q_x.
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}
&(m_\text{p} + m_1 + m_2)\ddot{y} + m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 - [(m_\text{p} + m_1 + m_2)x + m_1x_1 - m_2x_2]\ddot{\alpha} + \\
&+ 2(\Omega_z + \dot{\alpha})[(m_\text{p} + m_1 + m_2)\dot{x} + m_1\dot{x}_1 - m_2\dot{x}_2] - (\Omega_z + \dot{\alpha})^2\,[(m_\text{p} + m_1 + m_2)y + m_1y_1 - m_2y_2] - \\
&- (\Omega_x - \Omega_y\alpha)\{(\Omega_x + \Omega_y\alpha)[(m_\text{p} + m_1 + m_2)y + m_1y_1 - m_2y_2] - \\
&- (\Omega_y - \Omega_x\alpha)\,[(m_\text{p} + m_1 + m_2)x + m_1x_1 - m_2x_2]\} = Q_y.
\end{aligned} \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned}
&m_1\{\ddot{x} + \ddot{x}_1 - (y + y_1)\ddot{\alpha} - [2(\dot{y} + \dot{y}_1) + (\Omega_z + \dot{\alpha})(x + x_1)](\Omega_z + \dot{\alpha}) + \\
&+ [(\Omega_x + \Omega_y\alpha)(y + y_1) - (\Omega_y - \Omega_x\alpha)(x + x_1)](\Omega_y - \Omega_x\alpha)\} = Q_{x_1};
\end{aligned} \tag{4.129}$$

$$\begin{aligned}
&m_1\{\ddot{y} + \ddot{y}_1 + (x + x_1)\ddot{\alpha} + [2(\dot{x} + \dot{x}_1) - (\Omega_z + \dot{\alpha})(y + y_1)](\Omega_z + \dot{\alpha}) - \\
&- [(\Omega_x + \Omega_y\alpha)(y + y_1) - (\Omega_y - \Omega_x\alpha)(x + x_1)](\Omega_x + \Omega_y\alpha)\} = Q_{y_1};
\end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned}
&m_2\{-\ddot{x} + \ddot{x}_2 - (y - y_2)\ddot{\alpha} + [2(\dot{y} - \dot{y}_2) + (\Omega_z + \dot{\alpha})(x - x_2)](\Omega_z + \dot{\alpha}) - \\
&- [(\Omega_x + \Omega_y\alpha)(y - y_2) - (\Omega_y - \Omega_x\alpha)(x - x_2)](\Omega_y - \Omega_x\alpha)\} = Q_{x_2};
\end{aligned} \tag{4.131}$$

$$\begin{gathered} m_2\{-\ddot{y}+\ddot{y}_2-(x-x_2)\ddot{\alpha}-[2(\dot{x}-\dot{x}_2)-(\Omega_z+\dot{\alpha})(y-y_2)](\Omega_z+\dot{\alpha})+ \\ +[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)(y-y_2)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x-x_2)](\Omega_x+\Omega_y\alpha)\}=Q_{y_2}. \end{gathered} \tag{4.132}$$

Система уравнений (4.126)–(4.132) описывает динамику МГ LL- и LR-типов при несимметрии массоинерционных и упругих характеристик их элементов при измерении угловой скорости Ω_z основания, которое, кроме того, перемещается с постоянным ускорением и вращается со скоростями Ω_x, Ω_y относительно перекрестных осей.

Наличие развитого программного обеспечения для ЭВМ делает доступным численное исследование любой из полученных систем уравнений.

Очевидно также, что и исследование на ЭВМ предполагает разумное упрощение математических моделей, имея в виду целый ряд допущений математического и физического характера, которые изначально делают исходную математическую модель любой "полноты" приближенной.

Б. Частные уравнения

Упростим математические модели на примере систем уравнений (4.126)–(4.132). Примем следующие допущения, имея в виду точность технологических процессов изготовления МГ:

$$m_1=m_2=m;\quad x_1=x_2=x_0;\quad y_1=y_2=y_0;\quad A_1=A_2;\ B_1=B_2;$$

$$C_1=C_2;\quad b_{x_1}=b_{x_2}=b_{x_0};\quad b_{y_1}=b_{y_2}=b_{y_0};\quad G_{x_1}=G_{x_2}=G_{x_0};$$

$$G_{y_1}=G_{y_2}=G_{y_0};\quad F_{x_1}=F_{x_2}=F_{x_0};\quad F_{y_1}=F_{y_2}=F_{y_0},$$

и получим систему уравнений

$$\begin{gathered} \left[C_\text{p}+(m_\text{p}+2m)(x^2+y^2)+2C_1+2m(x_0^2+y_0^2)\right]\ddot{\alpha}+b_\alpha\dot{\alpha}+\{G_\alpha+(A_\text{p}+2A_1)\Omega_y^2- \\ -(B_\text{p}+2B_1)\Omega_x^2-m_\text{p}(\Omega_y y+\Omega_x x)^2-2m\left[\Omega_y^2(y^2+y_0^2)+2\Omega_x\Omega_y(xy+x_0y_0)+\Omega_x^2(x^2+x_0^2)\right]\}\alpha+ \\ +2(\Omega_z+\dot{\alpha})\left[m_\text{p}(y\dot{y}+x\dot{x})+2m(\dot{y}y+\dot{x}x+\dot{y}_0y_0+\dot{x}_0x_0)\right]+m_\text{p}(x\ddot{y}-y\ddot{x})+ \\ +2m(x\ddot{y}-y\ddot{x}+x_0\ddot{y}_0-y_0\ddot{x}_0)=M_\alpha-\delta W/\delta\alpha; \end{gathered} \tag{4.133}$$

$$\left.\begin{aligned} &(m_\text{p}+2m)\left\{\ddot{x}+b_x\dot{x}+\left[\frac{G_x}{m_\text{p}+2m}-(\Omega_z+\dot{\alpha})^2\right]x-y\ddot{\alpha}-2(\Omega_z+\dot{\alpha})\dot{y}+\right. \\ &\left.+(\Omega_y-\Omega_x\alpha)[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)y-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)x]\right\}=F_x-\delta W/\delta x; \\ &(m_\text{p}+2m)\left\{\ddot{y}+b_y\dot{y}+\left[\frac{G_y}{m_\text{p}+2m}-(\Omega_z+\dot{\alpha})^2\right]y+x\ddot{\alpha}+2(\Omega_z+\dot{\alpha})\dot{x}-\right. \\ &\left.-(\Omega_x-\Omega_y\alpha)[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)y-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)x]\right\}=F_y-\delta W/\delta y; \end{aligned}\right\} \tag{4.134}$$

$$\left.\begin{aligned}
&m\{\ddot x+\ddot x_0-(y+y_0)\ddot\alpha-[2(\dot y+\dot y_0)+(\Omega_z+\dot\alpha)(x+x_0)](\Omega_z+\dot\alpha)+\\
&+[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)(y+y_0)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x+x_0)](\Omega_y-\Omega_x\alpha)\}=\\
&=-G_{x_0}x_0-b_{x_0}\dot x_0-\delta W/\delta x_0+F_{x_0};\\
&m\{\ddot y+\ddot y_0+(x+x_0)\ddot\alpha+[2(\dot x+\dot x_0)-(\Omega_z+\dot\alpha)(y+y_0)](\Omega_z+\dot\alpha)-\\
&-[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)(y+y_0)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x+x_0)](\Omega_x+\Omega_y\alpha)\}=\\
&=-G_{y_0}y_0-b_{y_0}\dot y_0-\delta W/\delta y_0+F_{y_0};
\end{aligned}\right\}\qquad(4.135)$$

$$\left.\begin{aligned}
&m\{-\ddot x+\ddot x_0+(y-y_0)\ddot\alpha+[2(\dot y-\dot y_0)+(\Omega_z+\dot\alpha)(x-x_0)](\Omega_z+\dot\alpha)-\\
&-[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)(y-y_0)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x-x_0)](\Omega_y-\Omega_x\alpha)\}=\\
&=-G_{x_0}x_0-b_{x_0}\dot x_0-\delta W/\delta x_0+F_{x_0};\\
&m\{-\ddot y+\ddot y_0-(x-x_0)\ddot\alpha-[2(\dot x-\dot x_0)-(\Omega_z+\dot\alpha)(y-y_0)](\Omega_z+\dot\alpha)+\\
&+[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)(y-y_0)-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x-x_0)](\Omega_x+\Omega_y\alpha)\}=\\
&=-G_{y_0}y_0-b_{y_0}\dot y_0-\delta W/\delta y_0+F_{y_0}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.136)$$

Будем полагать, что для МГ по рис. 4.10 РЧ – это поступательное движение ИМ по координате $y(\alpha=0)$ (гироскоп LL-типа).

Для рассматриваемого случая уравнение (4.133) принимает вид

$$\begin{aligned}
&2\Omega_z\left[(m_\text{р}+2m)(y\dot y+x\dot x)+2m(\dot y_0y_0+\dot x_0x_0)\right]+(m_\text{р}+2m)(x\ddot y-y\ddot x)+\\
&+2m(x_0\ddot y_0-y_0\ddot x_0)=M_\alpha-\delta W/\delta\alpha.
\end{aligned}$$

Данное уравнение может быть использовано для вычисления динамических реакций в связях, осуществляющих крепление рамки с корпусом, при расчете их на прочность.

Система уравнений (4.134) и системы (4.135), (4.136) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&(m_\text{р}+2m)\left[\ddot x+b_x\dot x+\left(\frac{G_x}{m_\text{р}+2m}-\Omega_z^2\right)x-2\Omega_z\dot y+\Omega_y(\Omega_xy-\Omega_yx)\right]=F_x-\delta W/\delta x;\\
&(m_\text{р}+2m)\left[\ddot y+b_y\dot y+\left(\frac{G_y}{m_\text{р}+2m}-\Omega_z^2\right)y+2\Omega_z\dot x-\Omega_x(\Omega_xy-\Omega_yx)\right]=F_y-\delta W/\delta y;
\end{aligned}\right\}\qquad(4.137)$$

$$\left.\begin{aligned}
&m\Bigl\{\pm\ddot x+\ddot x_0\mp\Bigl[2(\dot y\pm\dot y_0)+\Omega_z(x\pm x_0)]\Omega_z\pm[\Omega_x(y\pm y_0)-\Omega_y(x\pm x_0)]\Omega_y\}=\\
&=-G_{x_0}x_0-b_{x_0}\dot x_0-\delta W/\delta x_0+F_{x_0};\\
&m\{\pm\ddot y+\ddot y_0\pm[2(\dot x\pm\dot x_0)-\Omega_z(y\pm y_0)]\Omega_z\mp[\Omega_x(y\pm y_0)-\Omega_y(x\pm x_0)]\Omega_x\}=\\
&=-G_{y_0}y_0-b_{y_0}\dot y_0-\delta W/\delta y_0+F_{y_0}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.138)$$

В системе уравнений (4.138) верхние знаки соответствуют левой, а нижние – правой ИМ.

Очевидно, что из систем уравнений (4.137), (4.138) как частный случай могут быть получены уравнения движения гироскопа с одной ИМ (см. рис. 3.47):

$$\left.\begin{aligned} &m[\ddot{x}_0-(2\dot{y}_0+\Omega_z x_0)\Omega_z+(\Omega_x y_0-\Omega_y x_0)\Omega_y]=-G_{x_0}x_0-b_{x_0}\dot{x}_0+F_{x_0}-\delta W/\delta x_0;\\ &m[\ddot{y}_0+(2\dot{x}_0-\Omega_z y_0)\Omega_z-(\Omega_x y_0-\Omega_y x_0)\Omega_x]=-G_{y_0}y_0-b_{y_0}\dot{y}_0+F_{y_0}-\delta W/\delta y_0.\end{aligned}\right\} \quad (4.139)$$

Получим упрощенный вариант уравнений движения гироскопа LR-типа полагая, что упругие элементы подвеса ИМ допускают их движение только в направлении оси X, т.е. $x_1=x_2=x_0; y_1=y_2=0$. Система уравнений (4.134) остается без изменений, а уравнение (4.133) и системы (4.135) и (4.136) принимают вид:

$$\begin{aligned} &[C_\text{р}+(m_\text{р}+2m)(x^2+y^2)+2(C_1+mx_0^2)]\ddot{\alpha}+b_\alpha\dot{\alpha}+\{G_\alpha+(A_\text{р}+2A_1)\times\\ &\times\Omega_y^2-(B_\text{р}+2B_1)\Omega_x^2-m_\text{р}(\Omega_y y+\Omega_x x)^2-2m[\Omega_y^2 y^2+2\Omega_x\Omega_y xy+\Omega_x^2(x^2+x_0^2)]\}\alpha+\\ &+2(\Omega_z+\dot{\alpha})[m_\text{р}(y\dot{y}+x\dot{x})+2m(\dot{y}y+\dot{x}x+\dot{x}_0x_0)]+(m_\text{р}+2m)(x\ddot{y}-y\ddot{x})=M_\alpha-\delta W/\delta\alpha;\end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\left.\begin{aligned} &m\{\pm\ddot{x}+\ddot{x}_0\mp y\ddot{\alpha}\mp[2\dot{y}+(\Omega_z+\dot{\alpha})(x\pm x_0)](\Omega_z+\dot{\alpha})\pm\\ &\pm[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)y-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x\pm x_0)](\Omega_y-\Omega_x\alpha)\}=\\ &=-G_{x_0}x_0-b_{x_0}\dot{x}_0+F_{x_0}-\delta W/\delta x_0;\\ &m[\pm\ddot{y}\pm(x\pm x_0)\ddot{\alpha}\pm[2(\dot{x}\pm\dot{x}_0)-(\Omega_z+\dot{\alpha})y](\Omega_z+\dot{\alpha})\mp\\ &\mp[(\Omega_x+\Omega_y\alpha)y-(\Omega_y-\Omega_x\alpha)(x\pm x_0)](\Omega_x+\Omega_y\alpha)\}=F_{y_0}.\end{aligned}\right\} \quad (4.141)$$

В системе уравнений (4.141) верхние знаки соответствуют левой ИМ (см. рис. 4.10), а нижние – правой. Далее можно предположить, что соответствующим выбором размеров рамки и элемента подвеса, работающего на кручение, обеспечиваются равенства $x=y=0$. В таком случае система уравнений (4.134) обнуляется, а уравнения (4.140), (4.141) записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &[C_\text{р}+2(C_1+mx_0^2)]\ddot{\alpha}+b_\alpha\dot{\alpha}+\{G_\alpha+(A_\text{р}+2A_1)\Omega_y^2-[B_\text{р}+2(B_1+mx_0^2]\Omega_x^2\}\alpha+\\ &+4m(\Omega_z+\dot{\alpha})\dot{x}_0x_0=-\delta W/\delta\alpha;\\ &m\{\ddot{x}_0-[(\Omega_z+\dot{\alpha})^2+(\Omega_y-\Omega_x\alpha)^2]x_0\}=-G_{x_0}x_0-b_{x_0}\dot{x}_0+F_{x_0}-\delta W/\delta x_0.\end{aligned}\right\} \quad (4.142)$$

Полученные уравнения движения с учетом энергии W, накапливаемой на электростатических преобразователях, описывают динамику гироскопов LL- и LR-типов при разной степени учета конструктивных и возмущающих факторов. Уравнения справедливы и для других типов преобразователей (магнитоэлектрических, электромагнитных), для которых энергия W должна вычисляться в соответствии с физической природой их функционирования.

4.5.2. Микрогироскопы RR-типа

Уравнения движения МГ RR-типа различного конструктивного исполнения (рамочные, однороторные, двухроторные с кинематической связью между роторами и без нее и т.д.), а также при необходимости с учетом параметров, которые можно трактовать как технологические погрешности их изготовления, могут быть без принципиальных затруднений получены с использованием материала, изложенного в подразд. 4.5.1, в роли методического указания.

Уравнения движения (математические модели) для различных схем МГ, в том числе и роторных, приведены в работах [8, 22, 23], а также в материалах других авторов.

Получим уравнения движения роторного МГ применительно к схеме, показанной на рис. 3.9.

А. Обобщенные уравнения

При выводе уравнений движения учтем конечную жесткость упругих элементов (торсионов) на кручение и изгиб, статическую несбалансированность ротора и будем полагать, что основание наряду с переносным вращением подвергается линейному ускорению вибрации и поступательного перемещения.

Введем следующие системы координат (рис. 4.12). С корпусом связана система координат $OXYZ$. В начальный момент продольные оси торсионов совпадают с осями OX, OY. Основание вращается с угловыми скоростями Ω_x, Ω_y поступательно перемещается с линейными ускорениями a_x, a_y, a_z (в состав a_z включено ускорение силы тяжести) и подвержено линейной вибрации, отображенной в виде виброперемещений $x_в$, $y_в$, $z_в$ по соответствующим осям. Вследствие упругих смещений подвеса его геометрический центр из точки O сместился в точку O_1, координаты которой x, y, z. Оси системы координат $O_1x'y'z'$ параллельны соответствующим осям $OXYZ$. Положение системы координат O_1xyz, связанной с ротором, относительно системы координат $O_1x'y'z'$ определено

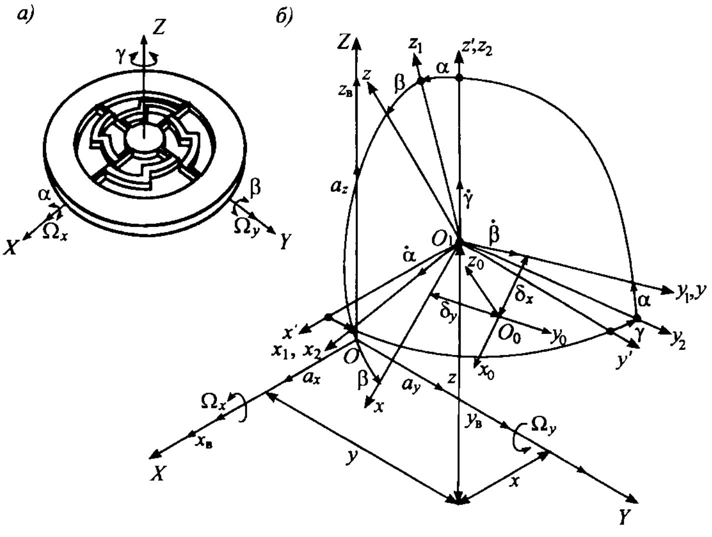


Рис. 4.12. К выводу уравнений движения МГ RR-типа:
а – кинематическая схема; *б* – системы координат

углами γ, α, β, последовательные повороты на которые определяют системы координат $O_1x_2y_2z_2$, $O_1x_1y_1z_1$ и O_1xyz. Положение ЦМ ротора в точке O_0 определено величинами δx, δy в плоскости xy. Оси системы координат $O_0x_0y_0z_0$ параллельны соответствующим осям системы координат O_1xyz.

Уравнения движения гироскопа получим аналогично предыдущему, выбирая в качестве обобщенных координат в уравнениях Лагранжа величины α, β, γ, x, y, z.

Будем полагать, что ввиду малых значений δx, δy по сравнению с геометрическими размерами ротора и подвеса главные (относительно осей системы координат O_1xyz) и главные центральные (относительно осей системы координат $O_0x_0y_0z_0$) моменты инерции гироскопа совпадают с точностью до значения величины $m\delta_x^2$ и $m\delta_y^2$ (m – масса ротора).

Выражение для кинетической энергии МГ имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left[A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2 + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 + m\left(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2\right)\right], \tag{4.143}$$

где A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции ротора; A_2, B_2, C_2 – главные моменты инерции элементов подвеса, которые перемещаются вместе с ротором по координатам α, β, γ; p_2, q_2, r_2; p_1, q_1, r_1 – проекции абсолютных угловых скоростей на оси систем координат $O_1x_1y_1z_1$ и O_1xyz соответственно; v_x, v_y, v_z – проекции абсолютной линейной скорости ЦМ на соответствующие оси.

Потенциальная энергия МГ и диссипативная функция рассеяния энергии выглядят так:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}\left(G_\alpha\alpha^2 + G_\beta\beta^2 + G_\gamma\gamma^2 + G_x x^2 + G_y y^2 + G_z z^2\right) + W; \\ \Phi &= \frac{1}{2}\left(b_\alpha\dot{\alpha}^2 + b_\beta\dot{\beta}^2 + b_\gamma\dot{\gamma}^2 + b_x\dot{x}^2 + b_y\dot{y}^2 + b_z\dot{z}^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.144}$$

где G_α, G_β, G_γ, G_x, G_y, G_z – жесткости подвеса по соответствующим обобщенным координатам.

Проекции абсолютных угловых скоростей МГ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \dot{\alpha} + \Omega_x\cos\gamma + \Omega_y\sin\gamma;\ q_2 = \Omega_y\cos\gamma - \Omega_x\sin\gamma;\ r_2 = \dot{\gamma}; \\ p_1 &= \dot{\alpha}\cos\beta + \Omega_x\cos\gamma\cos\beta + \Omega_y\sin\gamma\cos\beta - \dot{\gamma}\cos\alpha\sin\beta; \\ q_1 &= \dot{\beta} + \dot{\gamma}\sin\alpha + \Omega_y\cos\gamma\cos\alpha - \Omega_x\sin\gamma\cos\alpha; \\ r_1 &= \dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta + \dot{\alpha}\sin\beta + \Omega_x\cos\gamma\sin\beta + \Omega_y\sin\gamma\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{4.145}$$

Координаты ЦМ определяются выражениями

$$\begin{aligned} X &= x + x_{\text{в}} + \delta_x\cos\beta\cos\gamma - \delta_y\cos\alpha\sin\gamma; \\ Y &= y + y_{\text{в}} + \delta_y\cos\alpha\cos\gamma + \delta_x\cos\beta\sin\gamma; \\ Z &= z + z_{\text{в}} + \delta_y\sin\alpha - \delta_x\sin\beta\cos\alpha, \end{aligned}$$

а абсолютные линейные скорости ЦМ по координатам зависят от их производных по времени:

$$\mathrm{v}_x = \dot{X}, \qquad \mathrm{v}_\mathrm{y} = \dot{Y}, \qquad \mathrm{v}_\mathrm{z} = \dot{Z}. \tag{4.146}$$

Вычислив кинетическую энергию по формуле (4.143) с учетом выражений (4.145), (4.146), выполнив операции дифференцирования в соответствии с уравнениями Лагранжа (4.1) по обобщенным координатам и скоростям и определив обобщенные силы с учетом соотношений (4.144) и действующих на гироскоп ускорений, полагая далее, что величины α, β, γ, x, y, z малые и $\dot{\gamma} >> \Omega_x, \Omega_y$, уравнения движения роторного МГ можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned}
&(A_2 + A_1)\ddot{\alpha} + b_\alpha\dot{\alpha} + \left[G_\alpha - (B_1 + B_2 - C_1 - C_2)\dot{\gamma}^2\right]\alpha - (A_1 + B_1 - C_1)\dot{\gamma}\dot{\beta} = \\
&= -(C_2 + B_2 - A_2 + C_1 + B_1 - A_1)\dot{\gamma}\Omega_y - (A_1 + A_2)\dot{\Omega}_x - m(\ddot{z} + \ddot{z}_\text{в})\delta_y + ma_z\delta_y - \frac{\partial W}{\partial \alpha}; \\
&\quad B_1\ddot{\beta} + b_\beta\dot{\beta} + \left[G_\beta + (C_1 - A_1)\dot{\gamma}^2\right]\beta + (A_1 + B_1 - C_1)\dot{\gamma}\dot{\alpha} = -(C_1 + B_1 - A_1)\dot{\gamma}\Omega_x - \\
&\quad - B_1\dot{\Omega}_y + m(\ddot{z} + \ddot{z}_\text{в})\delta_x - ma_z\delta_z - \frac{\partial W}{\partial \beta}; \\
&C_1\ddot{\gamma} + (b_\gamma + A_1\Omega_x\alpha + B_1\Omega_y\beta)\dot{\gamma} + G_\gamma\gamma = M_0\sin pt + m\left[(\ddot{x} + \ddot{x}_\text{в})\delta_y - (\ddot{y} + \ddot{y}_\text{в})\delta x\right] + \\
&+ m(a_y\delta_x - a_x\delta_y);
\end{aligned}\right\} \tag{4.147}$$

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{x} + b_x\dot{x} + (G_x - m\dot{\gamma}^2)x - 2m\dot{y}\dot{\gamma} = m(a_x - \ddot{x}_\text{в} + \delta_y\ddot{\gamma}) - \frac{\partial W}{\partial x}; \\
&m\ddot{y} + b_y\dot{y} + (G_y - m\dot{\gamma}^2)y + 2m\dot{x}\dot{\gamma} = m(a_y - \ddot{y}_\text{в} - \delta_x\ddot{\gamma}) - \frac{\partial W}{\partial y}; \\
&m\ddot{z} + b_z\dot{z} + G_z z = m(a_z - \ddot{z}_\text{в} - \delta_y\ddot{\alpha} + \delta_x\ddot{\beta}) - \frac{\partial W}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{4.148}$$

где b_α, b_β, b_γ, b_x, b_y, b_z – коэффициенты демпфирования по соответствующим координатам; M_0, p – амплитуда и частота момента двигателя (вибропривода) по координате γ.

Уравнения (4.147), (4.148) описывают динамику роторного МГ по шести обобщенным координатам с учетом массоинерционной несимметрии ротора и подвеса и возмущений, обусловленных линейным и угловым переносным движением основания.

Б. Частные уравнения

В известных конструкциях роторных МГ масса ротора на несколько порядков больше массы подвеса, поэтому можно полагать $A_2 = B_2 = C_2 = 0$. Для случая $\delta_x = \delta_y = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\ddot{\alpha}+b_\alpha\dot{\alpha}+\left[G_\alpha+\left(C_1-B_1\right)\dot{\gamma}^2\right]\alpha-\left(A_1+B_1-C_1\right)\dot{\gamma}\dot{\beta}=-\left(C_1+B_1-A_1\right)\dot{\gamma}\Omega_y-A_1\dot{\Omega}_x-\frac{\partial W}{\partial\alpha};\\
&B_1\ddot{\beta}+b_\beta\dot{\beta}+\left[G_\beta+\left(C_1-A_1\right)\dot{\gamma}^2\right]\beta+\left(A_1+B_1-C_1\right)\dot{\gamma}\dot{\alpha}=-\left(C_1+B_1-A_1\right)\dot{\gamma}\Omega_x-B_1\dot{\Omega}_y-\frac{\partial W}{\partial\beta};\\
&C_1\ddot{\gamma}+\left(b_\gamma+A_1\Omega_x\alpha+B_1\Omega_y\beta\right)\dot{\gamma}+G_\gamma\gamma=M_0\sin pt.
\end{aligned}\right\}\quad(4.149)$$

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{x}+b_x\dot{x}+(G_x-m\dot{\gamma}^2)x-2m\dot{y}\dot{\gamma}=m(a_x-\ddot{x}_\text{в})-\frac{\partial W}{\partial x};\\
&m\ddot{y}+b_y\dot{y}+(G_y-m\dot{\gamma}^2)y+2m\dot{x}\dot{\gamma}=m(a_y-\ddot{y}_\text{в})-\frac{\partial W}{\partial y};
\end{aligned}\right\}\qquad(4.150)$$

$$m\ddot{z}+b_z\dot{z}+G_zz=m(a_z-\ddot{z}_\text{в})-\frac{\partial W}{\partial z}.\qquad(4.151)$$

Системы уравнений (4.149), (4.150) и уравнение (4.151) являются независимыми.

Воспользуемся уравнениями (4.149), в которых пренебрежем членами $\left(A_1+B_1-C_1\right)\dot{\gamma}\dot{\beta}$ и $\left(A_1+B_1-C_1\right)\dot{\gamma}\dot{\alpha}$, так как их влияние проявляется в возникновении колебаний на удвоенной частоте по отношению к частоте первичных колебаний с амплитудой, на несколько порядков меньшей амплитуды колебаний, обусловленных измеряемыми скоростями. Будем считать, что гироскопические моменты в правых частях уравнений (4.149) больше моментов $A_1\dot{\Omega}_x$ и $B_1\dot{\Omega}_y$, пренебрежем действием электростатических сил, введем обозначения $J_\alpha=A_1$, $J_\beta=B_1$, $J_\gamma=C_1$, $J_0=-A_1+B_1+C_1$ и запишем систему (4.149) в виде независимых уравнений:

$$J_\alpha\ddot{\alpha}+b_\alpha\dot{\alpha}+G_\alpha^*\alpha=J_0\dot{\gamma}\,\Omega_y;\quad(4.152)\qquad J_\beta\ddot{\beta}+b_\beta\dot{\beta}+G_\beta^*\beta=J_0\dot{\gamma}\,\Omega_x;\qquad(4.153)$$

$$J_\gamma\ddot{\gamma}+b_\gamma\dot{\gamma}+G_\gamma\gamma=M_\text{в}(t),\qquad(4.154)$$

где

$$M_\text{в}(t)=M_0\sin(pt);\quad G_\alpha^*=G_\alpha+\left(C_1-B_1\right)\dot{\gamma}^2;\quad G_\beta^*=G_\beta+\left(C_1-A_1\right)\dot{\gamma}^2.\qquad(4.155)$$

В уравнениях (4.152), (4.153) жесткости G_α^*, G_β^* в соответствии с уравнениями (4.149) состоят из жесткостей упругих элементов G_α, G_β и так называемых квазиупругих жесткостей, пропорциональных величине $\dot{\gamma}^2$. С учетом квазиупругих жесткостей частóты собственных колебаний МГ по выходным координатам определяются формулами

$$\omega_{\alpha0}=\sqrt{G_\alpha^*/A_1};\qquad\omega_{\beta0}=\sqrt{G_\beta^*/B_1}.\qquad(4.156)$$

Для больших $\dot{\gamma}$ частоты (4.156) могут значительно отличаться от их значений без учета квазиупругих жесткостей.

Пример 4.15

Воспользуемся данными примера 3.4: $A_1 = B_1 = 10^{-13}$ кг·м^2, $C_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2, $G_\alpha = 23{,}8 \times \times 10^{-6}$ Н·м, $G_\beta = 29{,}76 \cdot 10^{-6}$ Н·м, для которых без учета величины $\dot{\gamma}$ частоты $\omega_{\alpha0} = 1{,}54 \cdot 10^4$ 1/с, $\omega_{\beta0} = 1{,}73 \cdot 10^4$ 1/с. Примем $\dot{\gamma} = \omega_{\gamma0} = 1{,}32 \cdot 10^4$ 1/с и по формулам (4.156) получим $\omega_{\alpha0} = 2{,}23 \times \times 10^4$ 1/с, $\omega_{\beta0} = 2{,}36 \cdot 10^4$ 1/с.

Таким образом, учет квазиупругой жесткости привел к увеличению частот колебаний примерно на 40 % по обеим осям.

4.6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ СИЛЫ И ЧАСТОТНАЯ НАСТРОЙКА РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ МИКРОГИРОСКОПОВ

Электростатические силы взаимодействия между электродами гребенчатых структур, как показано в подразд. 3.4.2, являются причиной так называемой жесткости электростатических сил [см. формулу (3.121)], которая приводит к уменьшению частоты колебаний ИМ в РЧ [см. формулу (3.122)]. Показано также, что подбором величин потенциалов [см. формулу (3.119)] на электродах гребенчатых структур РЧ можно обеспечить компенсацию квадратурной погрешности, сил поперечного тяжения электродов, а также выполнить частотную настройку режимов колебания МГ. Рассмотрим электростатические силы более подробно.

На рис. 4.13 приведена расчетная схема МГ LL-типа с одинарными гребенчатыми электростатическими структурами, элементы которых включены в дифференциальные цепи с источниками напряжений U_1, U_3 и U_2, U_4. Предполагается, что измеряется угловая скорость Ω_z, а перемещения ЧЭ в РД и РЧ происходят соответственно в направлении осей x, y.

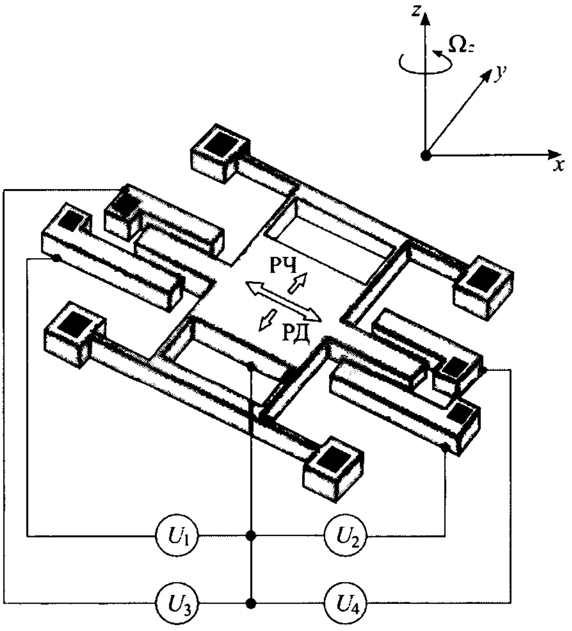


Рис. 4.13. Схема МГ LL-типа с дифференциальным включением элементов электростатических гребенчатых структур

Работа электростатических сил на возможных перемещениях Δx и Δy аналогично формуле (3.89) может быть представлена следующим выражением:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{2}\left[\frac{1}{\Delta y_0+\Delta y}\left(U_4^2-U_3^2\right)+\frac{1}{\Delta y_0-\Delta y}\left(U_2^2-U_1^2\right)\right]\Delta x-\\
&-\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{2}\left[\frac{a+\Delta x}{(\Delta y_0+\Delta y)^2}U_3^2+\frac{a-\Delta x}{(\Delta y_0+\Delta y)^2}U_4^2-\frac{a+\Delta x}{(\Delta y_0-\Delta y)^2}U_1^2-\frac{a-\Delta x}{(\Delta y_0-\Delta y)^2}U_2^2\right]\Delta y=\\
&=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{2}\left[\frac{\Delta y_0\left(U_3^2+U_1^2-U_4^2-U_2^2\right)+\Delta y\left(U_3^2-U_1^2-U_4^2+U_2^2\right)}{\Delta y_0^2-\Delta y^2}\right]\Delta x+\\
&+\frac{\varepsilon\varepsilon_0 c}{2}\left[\frac{a\left(\Delta y_0^2+\Delta y^2\right)\left(U_3^2-U_1^2+U_4^2-U_2^2\right)-2a\Delta y_0\Delta y\left(U_3^2+U_1^2+U_4^2+U_2^2\right)}{\left(\Delta y_0^2-\Delta y^2\right)^2}+\right.\\
&\left.+\frac{\Delta x\left(\Delta y_0^2+\Delta y^2\right)\left(U_3^2-U_1^2-U_4^2+U_2^2\right)-2a\Delta y_0\Delta y\left(U_3^2+U_1^2-U_4^2-U_2^2\right)}{\left(\Delta y_0^2-\Delta y^2\right)^2}\right]\Delta y.
\end{aligned}\tag{4.157}$$

Напряжения $U_1 \ldots U_4$ могут представлять следующую комбинацию (см. рис. 3.56):

$$\left.\begin{aligned}
U_1 &= U_{\text{оп}}+U_x-U_q-U_y;\\
U_2 &= U_{\text{оп}}-U_x+U_q-U_y;\\
U_3 &= U_{\text{оп}}+U_x+U_q+U_y;\\
U_4 &= U_{\text{оп}}-U_x-U_q-U_y,
\end{aligned}\right\}\tag{4.158}$$

где U_x – переменная составляющая (аналогична Δv на рис. 3.56); U_q – составляющая для компенсации квадратурной ошибки; U_y – составляющая для устранения поперечного тяжения электродов.

С учетом выражений (4.158) запишем такие равенства:

$$U_3^2-U_1^2+U_4^2-U_2^2=8\left(U_{\text{оп}}U_y+U_qU_x\right);$$

$$U_3^2-U_1^2-U_4^2+U_2^2=8\left(U_{\text{оп}}U_q+U_xU_y\right);$$

$$U_3^2+U_1^2-U_4^2-U_2^2=8\left(U_{\text{оп}}U_x+U_qU_y\right);$$

$$U_3^2+U_1^2+U_4^2+U_2^2=4\left(U_{\text{оп}}^2+U_q^2+U_x^2+U_y^2\right).$$

Работу электростатических сил [см. уравнения (4.157)] с учетом полученных равенств для случая $\Delta y \ll \Delta y_0$ можно представить в упрощенном виде:

$$A=\frac{4\varepsilon\varepsilon_0 c\left(U_{\text{оп}}U_x+U_qU_y\right)}{\Delta y_0}\Delta x-\frac{4\varepsilon\varepsilon_0 ca\left(U_{\text{оп}}U_y+U_qU_x\right)}{\Delta y_0^2}\Delta y. \tag{4.159}$$

Запишем элементы матрицы жесткости, вычисляемые в соответствии с формулой (4.157):

$$k_{xx}^{э}=0;$$

$$k_{xy}^{э}=4\varepsilon\varepsilon_0 c\left[\frac{\left(\Delta y_0^2+\Delta y^2\right)\left(U_{оп}U_q+U_xU_y\right)-2\Delta y_0\Delta y\left(U_{оп}U_x+U_qU_y\right)}{\left(\Delta y_0^2-\Delta y^2\right)^2}\right];$$

$$k_{yy}^{э}=-4\varepsilon\varepsilon_0 c\Big[2a\Delta y\left(3\Delta y_0^2+\Delta y^2\right)\left(U_{оп}U_x+U_qU_y\right)-a\Delta y_0\left(\Delta y_0^2+3\Delta y^2\right)\left(U_{оп}^2+U_q^2+U_x^2+U_y^2\right)+$$
$$+2x\Delta y\left(3\Delta y_0^2+\Delta y^2\right)\left(U_{оп}U_q+U_xU_y\right)-\frac{2x\Delta y_0\left(\Delta y_0^2+3\Delta y^2\right)\left(U_{оп}U_x+U_qU_y\right)}{\left(\Delta y_0^2-\Delta y^2\right)^3}\Big]. \qquad (4.160)$$

Для случая $\Delta y << \Delta y_0$ выражения (4.160) упрощаются и матрица коэффициентов жесткости принимает вид

$$K_э=\frac{4\varepsilon\varepsilon_0 c}{\Delta y_0^2}\begin{vmatrix}0 & U_{оп}U_q+U_xU_y\\ U_{оп}U_q+U_xU_y & -\dfrac{a}{\Delta y_0}\left(U_{оп}^2+U_q^2+U_x^2+U_y^2\right)\end{vmatrix}. \qquad (4.161)$$

Элементы матрицы жесткости электростатических сил (4.160) являются нелинейными функциями перемещений Δy и сложным, трудно прогнозируемым образом влияют на динамику МГ. Определим характер нелинейностей элементов матрицы жесткости (4.160), полагая $\Delta y << \Delta y_0$. Имеем следующие равенства:

$$k_{xy}^{э}=4\varepsilon\varepsilon_0 c\left[\frac{\Delta y_0^2\left[1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2\right]\left(U_{оп}U_q+U_xU_y\right)}{\Delta y_0^2\left[1-\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2\right]}\right]=k_{xy(\Delta y=0)}^{э}\frac{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2}. \qquad (4.162)$$

Аналогично может быть получено выражение

$$k_{yy}^{э}=k_{yy(\Delta y=0)}^{э}\frac{1+3\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2}{\left[1-\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2\right]^2}. \qquad (4.163)$$

В выражениях (4.162), (4.163) $k_{xy(\Delta y=0)}^{э}$ и $k_{yy(\Delta y=0)}^{э}$ являются соответствующими элементами матрицы (4.160), которая отвечает условию $\Delta y=0$. Наличие нелинейностей в сочетании с большими перемещениями элементов МГ может привести к их столкновению.

Следует отметить, что настройка частот резонансных режимов напрямую связана с ограничениями на возможные перемещения элементов МГ. Если, например, движение по координате y (при измерении угловой скорости Ω_z) происходит с амплитудой всего лишь в 1 % от зазора, т.е. $\Delta y = 0{,}01\Delta y_0$, и с частотой ω_y для РЧ, то амплитуда ускорения этого движения $a_y = 0{,}01\Delta y_0 \omega_y^2$ и при $\omega_y = 10^5$ рад/с, $\Delta y_0 = 10^{-6}$ м она равна $a_y = 100$ м/с^2 ≈ 10 g. Это ускорение достаточно большое и может быть соизмеримо с ускорением, действующим на корпус МГ. Резонансная частота РЧ из условий настройки МГ не отличается существенно от резонансной частоты РД, т.е. она является большой и имеет порядок указанной выше величины.

Следовательно, по условиям минимизации нелинейностей элементов матрицы жесткости и ограничения ускорения движения структур МГ перемещения Δy (измерение Ω_z) или Δz (измерение Ω_y) должны находиться в пределах 1 % от первоначальных зазоров. Это ограничение распространяется и на роторные гироскопы RR-типа и на другие.

Обратим внимание также на то, что демпфирование должно обеспечить устранение (сглаживание) нелинейностей в коэффициентах $k_{xy}^{э}$ [см. формулу (4.162)]. Очевидно и то, что коэффициент $k_{yy}^{э}$ [см. выражение (4.163)] обладает большей нелинейностью, чем $k_{xy}^{э}$, и, кроме того, определяемая им жесткость электростатических сил направлена против механической жесткости G_y подвеса. Исходя из этого, необходимо соблюдать условие

$$G_y > k_{yy}^{э}. \tag{4.164}$$

Очевидно, аналогичное условие может быть записано и для РЧ в направлении оси z (измерение Ω_y):

$$G_z > k_{zz}^{э}. \tag{4.165}$$

Неравенства (4.164), (4.165) могут быть использованы для определения предельных (критических) смещений, при которых не происходит электростатического "захвата" элементов с их возможным столкновением. Обозначим $k_{yy(\Delta y=0)}^{э} = k_{yy(0)}^{э}$ и перепишем условие (4.164) с учетом равенства (4.163):

$$G_y > k_{yy(0)}^{э} \frac{1 + 3\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)^2\right]^2}; \tag{4.166}$$

из него, заменив знак неравенства знаком равенства, найдем предельную (критическую) $\Delta y = \Delta y_{\text{кр}}$ величину перемещений:

$$\Delta y_{\text{кр}} = \Delta y_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{3k^{\text{э}}_{yy(0)}}{G_y} + 2 - \sqrt{9\left(\frac{k^{\text{э}}_{yy(0)}}{G_y}\right)^2 + 16\frac{k^{\text{э}}_{yy(0)}}{G_y}}\right]}\,. \tag{4.167}$$

Рассмотрим влияние жесткости электростатических сил на перегрузочную способность МГ по отношению к внешнему ускорению. В установившемся режиме сила инерции внешнего ускорения a_y уравновешивается силой механической жесткости подвеса. Положив для предельного случая $\Delta y = \Delta y_0$, получим $ma_y = G_y \Delta y_0$. Обозначим максимальное ускорение, которое может выдержать МГ с учетом "отрицательной" электростатической жесткости, $a_{y\text{э}}$ и запишем равенство сил: $ma_{y\text{э}} = \left(G_y - k^{\text{э}}_{yy}\right)\Delta y_{\text{кр}}$. Разделим второе из приведенных равенств на первое и, пренебрегая в выражении (4.163) вторым слагаемым числителя по сравнению с единицей, получим отношение, характеризующее перегрузочную способность МГ по отношению к внешнему ускорению:

$$\frac{a_{y\text{э}}}{a_y} = \left\{1 - \frac{k^{\text{э}}_{yy(0)}}{G_y}\frac{1}{\left[1 - \left(\dfrac{\Delta y_{\text{кр}}}{\Delta y_0}\right)^2\right]^2}\right\}\frac{\Delta y_{\text{кр}}}{\Delta y_0}\,. \tag{4.168}$$

Из выражения (4.168) следует, что перегрузочная способность МГ уменьшается при наличии силы электростатической жесткости.

Отметим также, что при расчете электростатических сил в направлении оси y не учитывались различные паразитные емкости и возможность появления сил в направлении оси z. Эти упрощения, видимо, допустимы, поскольку ширина пластин конденсаторов на гребенчатых структурах соизмерима с зазорами между ними.

Напомним, что причиной квадратурной погрешности МГ является несовпадение вектора скорости ИМ с вектором электростатических сил, вызывающих РД. Физической причиной этого может быть наличие перекрестных жесткостей G_{xy} упругого подвеса. Добавим к элементам матрицы (4.161) жесткость электростатической силы элемента матрицы механической жесткости подвеса и получим матрицу, которую назовем эффективной матрицей жесткостей МГ:

$$K_{\text{эф}} = \begin{vmatrix} G_x & G_{xy} + \dfrac{C_0}{a\Delta y_0}U_{\text{оп}}U_q \\ G_{xy} + \dfrac{C_0}{a\Delta y_0}U_{\text{оп}}U_q & G_y - \dfrac{C_0}{\Delta y_0^2}\left(U_{\text{оп}}^2 + U_q^2 + U_x^2\right) \end{vmatrix}, \tag{4.169}$$

где C_0 – номинальная емкость элементов гребенчатых структур; a – линейное перекрытие элементов гребенчатой структуры.

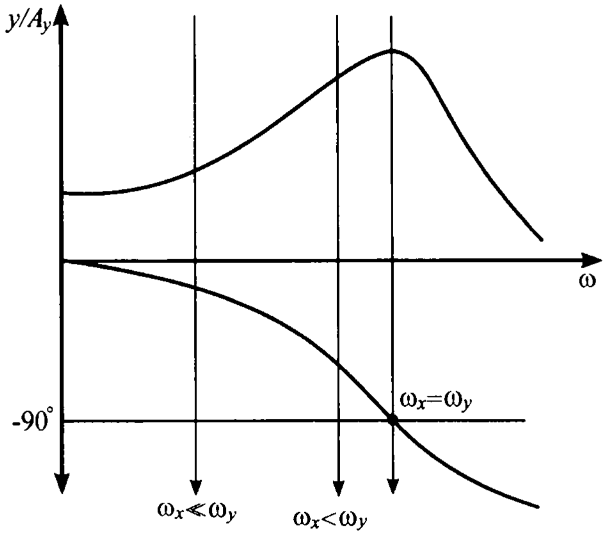


Рис. 4.14. К пояснению режимов частотной настройки МГ

Очевидно, если подобрать напряжение $U_q = -\dfrac{G_{xy} a \Delta y_0}{C_0 U_{\text{оп}}}$, то матрица (4.169) принимает вид

$$K_{\text{эф}} = \begin{vmatrix} G_x & 0 \\ 0 & G_y - \dfrac{C_0}{\Delta y_0^2}\left(U_{\text{оп}}^2 + U_q^2 + U_x^2\right) \end{vmatrix}, \tag{4.170}$$

в соответствии с которой причина (G_{xy}), приводящая к квадратурной ошибке гироскопа, устранена.

С учетом матрицы (4.170) формула (3.122) приобретает вид

$$\omega_y = \sqrt{\frac{1}{m}\left[G_y - \frac{C_0}{\Delta y_0^2}\left(U_{\text{оп}}^2 + U_q^2 + U_x^2\right)\right]}\,. \tag{4.171}$$

Используя изложенный подход, можно вычислить матрицы эффективных жесткостей подвесов и соответствующие им частоты и для других типов МГ.

Так как ускорение Кориолиса – это сигнал узкой полосы частот с центром на частоте возбуждения колебаний РД, механический коэффициент усиления РЧ может быть настроен путем соответствия или приблизительного соответствия резонансных частот режимов возбуждения и РЧ.

На рис. 4.14 показаны зависимости отношения амплитуды колебаний ИМ в РЧ к амплитуде ускорения Кориолиса и фазы этих колебаний от частоты, а также возможные режимы настройки МГ.

Когда резонансные частоты совпадают ($\omega_x = \omega_y$), механический коэффициент усиления МГ высок, но полоса частот входного сигнала небольшая и существует фазовый сдвиг на выходе. Если частота возбуждаемых колебаний намного меньше частоты колебаний РЧ ($\omega_x << \omega_y$), гироскоп имеет большую полосу пропускания частот, маленький фазовый сдвиг и незначительный коэффициент механического усиления. Наконец, если резонансные частоты не совпадают на небольшом отрезке частот (например, в 10 %), механический коэффициент усиления МГ остается большим, а полоса пропускания частот, по сравнению с первым случаем увеличивается.

Настройка частоты ω_x вынужденных колебаний осуществляется подбором частоты напряжения питания приводов. Частота колебаний РЧ настраивается изменением жесткости подвеса в направлении этих колебаний путем использования электростатических сил.

Как следует из формулы (4.171) [см. также формулу 3.122)], увеличение напряжения смещения $U_{\text{оп}}$ приводит к уменьшению частоты ω_y. Настройку частот надо начинать при $\omega_y > \omega_x$ и затем, увеличивая $U_{\text{оп}}$, обеспечить необходимое отношение частот ω_y/ω_x. Нужно отметить, что для динамики МГ более важным является отношение частот, чем их абсолютные значения.

Точная настройка частот возможна при соблюдении геометрических размеров элементов упругого подвеса, что при их малых размерах весьма затруднительно. При этом следует иметь в виду, что длина упругих элементов определяется только литографией и поэтому соблюдается с большой точностью. Ширина и толщина упругих элементов определяются не только литографией, но и травлением. Относительные размеры упругих элементов соотносятся между собой следующим образом:

$$\frac{\Delta l_{\text{т}}}{l_{\text{т}}} << \frac{\Delta b_{\text{п}}}{b_{\text{п}}}; \frac{\Delta c_{\text{п}}}{c_{\text{п}}},$$

где $\Delta l_{\text{т}}$, $\Delta b_{\text{п}}$, $\Delta c_{\text{п}}$ – погрешности изготовления длины упругого элемента, ширины и толщины его поперечного размера соответственно.

Рассмотрим зависимости отношения частот информативных колебаний к частоте вынужденных колебаний ИМ от геометрических размеров упругих элементов. Проследим вначале случай измерения угловой скорости Ω_z с подвесом ИМ по схеме, проведенной на рис. 3.7. Запишем отношение резонансных частот информативного (РЧ) и вынужденного (РД) колебаний соответственно вдоль осей y и x:

$$\frac{\omega_{y0}}{\omega_{x0}} = \sqrt{\frac{G_y}{G_x}} = \sqrt{\frac{G_{1y}}{G_{2x}}}, \tag{4.172}$$

где

$$G_{1y} = Eb_{\text{п}1}\left(\frac{c_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}}\right)^3; \ G_{2x} = Eb_{\text{п}2}\left(\frac{c_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right)^3, \tag{4.173}$$

где $b_{\text{п}i}$, $c_{\text{п}i}$, $l_{\text{т}i}$ – соответственно ширина, толщина и длина первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) упругих элементов.

После подстановки выражения (4.173) в формулу (4.172) получим

$$\frac{\omega_{y0}}{\omega_{x0}}=\sqrt{\frac{b_{\text{п}1}}{b_{\text{п}2}}\left(\frac{c_{\text{п}1}l_{\text{т}2}}{c_{\text{п}2}l_{\text{т}1}}\right)^3},$$

откуда, полагая $b_{\text{п}1}=b_{\text{п}2}$, $c_{\text{п}1}=c_{\text{п}2}$, имеем

$$\frac{\omega_{y0}}{\omega_{x0}}=\left(\frac{l_{\text{т}2}}{l_{\text{т}1}}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (4.174)$$

Рассмотрим теперь вариант измерения угловой скорости Ω_y. В этом случае информативное движение ИМ происходит в направлении оси Z и отношение резонансных частот равно

$$\frac{\omega_{z0}}{\omega_{x0}}=\sqrt{\frac{G_{1z}G_{2x}}{G_{2x}\left(G_{1z}+G_{2z}\right)}}, \qquad (4.175)$$

где

$$G_{1z}=Eb_{\text{п}1}\left(\frac{c_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}}\right)^3; \quad G_{2z}=Ec_{\text{п}2}\left(\frac{b_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right)^3; \quad G_{2x}=Eb_{\text{п}2}\left(\frac{c_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right)^2. \qquad (4.176)$$

Заметим, что формулы (4.176) записаны в предположении меньшей жесткости элементов *1* в направлении оси Z и элементов *2* в направлении оси X (см. рис. 3.7).

После подстановки величин (4.176) в отношение (4.175) получим

$$\frac{\omega_{z0}}{\omega_{x0}}=\sqrt{\frac{b_{\text{п}1}b_{\text{п}2}^2\left(\frac{c_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}}\right)^3}{c_{\text{п}2}^2\left[b_{\text{п}1}\left(\frac{c_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}}\right)^3+c_{\text{п}2}\left(\frac{b_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right)^3\right]}},$$

откуда в предположении, что $b_{\text{п}1}\approx b_{\text{п}2}\approx b_{\text{п}}$, $c_{\text{п}1}\approx c_{\text{п}2}\approx c_{\text{п}}$, следует

$$\frac{\omega_{z0}}{\omega_{x0}}=\frac{1}{\left[\left(\frac{c_{\text{п}}}{b_{\text{п}}}\right)^2+\left(\frac{l_{\text{т}1}}{l_{\text{т}2}}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (4.177)$$

Из сравнительного анализа отношений (4.174) и (4.177) заключаем, что ввиду технологической сложности точного соблюдения отношений $\frac{c_{\text{п}}}{b_{\text{п}}}$ при измерении угловой скорости Ω_y будет иметь место большая вариативность в относительном расположении резонансных частот по сравнению с измерением угловой скорости Ω_z.

Аналогично можно проанализировать влияние размеров упругих элементов на точность настройки резонансных режимов и для других схем подвесов.

Для подвеса МГ по рис. 3.11, положив, что выходной координатой является угол α, имея в виду выражения (3.28), (3.29), запишем отношение частот:

$$\frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega_{\gamma 0}}=\sqrt{\frac{C_1}{A_1}\frac{\left(\frac{2G_{(\text{п})}k'b_{\text{п}1}c_{\text{п}}^2}{l_{\text{т}1}}+\frac{E_{(\text{п})}b_{\text{п}2}^3}{l_{\text{т}2}}\right)}{E_{(\text{П})}\left(\frac{b_{\text{п}1}^3}{l_{\text{т}1}}+\frac{b_{\text{п}2}^3}{l_{\text{т}2}}\right)}}. \tag{4.178}$$

Используя полученные формулы и, в частности, (4.177) и (4.178), можно оценить влияние технологических допусков изготовления упругих элементов подвеса МГ на изменение настройки частот по отношению к настройке, рассчитанной для номинальных значений частот.

Пример 4.16

Для исходных данных по примеру 3.4, полагая, что размеры $l_{\text{т}1}$, $l_{\text{т}2}$ и параметры C_1, A_1 не меняются, вычислим изменение расстройки частот, обусловленное технологическими допусками на ширину и высоту торсионов. Примем $\Delta b_{\text{п}1}=\Delta b_{\text{п}2}=\Delta c_{\text{п}}=\pm 10^{-8}$ м (10^{-2} мкм) и по формуле (4.178) найдем:

$$\frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega_{\gamma 0}}=\sqrt{2{,}5\frac{\frac{2\cdot 0{,}79\cdot 10^{11}\cdot 0{,}2\left(20\cdot 10^{-6}\pm 10^{-8}\right)^3}{0{,}8\cdot 10^{-3}}+\frac{1{,}29\cdot 10^{11}\left(15\cdot 10^{-6}\pm 10^{-8}\right)^3}{0{,}5\cdot 10^{-3}}}{1{,}295\cdot 10^{11}\left(\frac{\left(20\cdot 10^{-6}\pm 10^{-8}\right)^3}{0{,}8\cdot 10^{-3}}+\frac{\left(15\cdot 10^{-6}\pm 10^{-8}\right)^3}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\right)}}=1{,}171.$$

Имея в виду, что $\omega_{\gamma 0}=1{,}32\cdot 10^4$ 1/с, получим $\omega_{\alpha 0}=1{,}171\cdot 1{,}32\cdot 10^4=1{,}55\cdot 10^4$ 1/с. Расстройка частот $\Delta\omega=0{,}23\cdot 10^4\ 1/\text{с}=17{,}42\%$.

В примере 3.4 получена частота $\omega_{\alpha 0}=1{,}54\cdot 10^4$ 1/с и расстройка частот составляет $\Delta\omega=0{,}22\cdot 10^4\ 1/\text{с}=$ 16,66 %. Таким образом, технологические допуски в 10^{-2} мкм на ширину и высоту упругих элементов вызывают изменение расстройки частот на 0,76 %.

Для обеспечения необходимых характеристик МГ требования к точности частотной настройки очень высоки. Например, допустимая расстройка частот может составлять сотые (и менее) доли процента. Нетрудно подсчитать, что при этом допуски на геометрические размеры упругих элементов будут $10^{-3}\ldots 10^{-6}$ мкм, что при современном уровне технологии производства МГ проблематично. Поэтому методы электронной настройки приобретают особое значение.

4.7. ДЕМПФИРОВАНИЕ ЧЭ МИКРОГИРОСКОПОВ

В МГ рассеяние энергии колебательных движений происходит за счет сил вязкого трения газовой среды (газовое демпфирование) и сил внутрикристаллического трения в материале упругих элементов подвеса (конструкционное демпфирование). Расчет демпфирований колебаний отличается большой неопределенностью, и проводимые расчеты обычно носят оценочный характер.

Универсальной метрологической характеристикой для колебательных систем (осцилляторов) является добротность по демпфированию. При наличии экспериментально определенных добротностей, увязанных с конструктивным исполнением МГ, возможно получение коэффициентов влияния для учета в расчетных формулах различных факторов: степени вакуумирования, формы ИМ осциллятора, геометрических параметров упругих элементов и др. Этот сложный вопрос требует специальных исследований, однако можно отметить, что добротность $\geq 10^4$ может быть достигнута в объеме, в котором давление $\leq 0{,}1$ Торр.

4.7.1. Газовое демпфирование

Газовое демпфирование колебаний ЧЭ происходит из-за различных механизмов взаимодействия газа и перемещающихся элементов МГ. Это взаимодействие происходит главным образом в двух режимах: перетекания газа вдоль перемещающихся элементов МГ и сдавливания (компрессии) газа между движущимися навстречу друг другу элементами конструкции.

Из основного закона Ньютона вязкого течения жидкости (газа) между параллельными пластинками следует выражение для тангенциальной силы, вызывающей сдвиг слоев жидкости:

$$F = \mu \frac{\Delta v}{h} S = b \Delta v,$$

где Δv – разность скоростей слоев в зазоре; S – площадь слоя (пластинки), по которому происходит сдвиг (перетекание); h – зазор между пластинками; b – коэффициент вязкого трения (демпфирования), равный, Н·с/м,

$$b = \mu S / h. \tag{4.179}$$

В подразд. 4.4 приведены зависимости Больцмана для вычисления вязкости газа и длины свободного пробега молекулы, которая зависит от давления, а следовательно, от давления зависит и вязкость газа. Там же на примере было показано, что значение λ при низких давлениях соизмеримо с размерами микроструктур. Когда значение λ соизмеримо с размерами h, вязкость можно представить в виде

$$\mu = \mu_0 / \left(1 + \alpha \frac{\lambda}{h}\right),$$

где α – константа; $\mu_0 = \mu$ при $\lambda \to 0$ ($\lambda \ll h$).

Так как величина λ обратно пропорциональна давлению p среды, можно записать приближенное выражение

$$\mu \approx \mu_p p h,$$

после подстановки которого в соотношение (4.179) получим

$$b \approx \mu_p S p, \tag{4.180}$$

где μ_p – параметр вязкости, соответствующий низкому (p << 0,1 ата) давлению (для азотной среды $\mu_p = 2{,}776 \cdot 10^{-6}$ с/м).

Формула (4.180) может быть использована при оценке верхней границы абсолютного коэффициента демпфирования для элементов конструкции МГ, перемещающихся параллельно друг другу. В роторных МГ RR-типа приближенную оценку вязкого трения, имеющего аналогичную природу, можно определить, считая, что

$$M = F r_c = \mu \frac{r_c^2 \omega}{h} S,$$

где $r_c = (r_0 + r)/2$; $S = \pi(r^2 - r_0^2)$; здесь r_0 – радиус окружности, в которой размещается анкер ротора (см. рис. 3.11); r – наружный радиус ротора.

С учетом выражения (4.180) получим формулу для вычисления коэффициента демпфирования ротора по координате γ, имея в виду его двустороннее обтекание газом:

$$b_{\gamma в} = k_п k_р \frac{\pi \mu_р}{2} (r - r_0)(r + r_0)^3 p, \tag{4.181}$$

где $k_п$ – коэффициент, учитывающий действительную площадь ротора, обтекаемую газом; $k_р$ – коэффициент, учитывающий радиус приложения демпфирующей силы, в долях от $(r + r_0)/2$.

Для элементов МГ типа пластинок длиной $a_м$ и шириной $b_м$, перемещающихся навстречу друг другу, демпфирование происходит в основном за счет сдавливания газа. Полагая справедливой зависимость (4.87), запишем выражение абсолютного коэффициента демпфирования для любой координаты в направлении встречного движения пластинок:

$$k_д = 2 \frac{\mu_p a_м^3 b_м^3 p}{h^2 \left(a_м^2 + b_м^2\right)}. \tag{4.182}$$

Коэффициент демпфирования за счет компрессии газа торцами пальцев гребенчатой структуры привода с учетом равенства (4.182) можно оценить по зависимости

$$b_{\gamma к} \approx 2 \frac{\mu_p c_п^3 b_п^3}{h^2 \left(b^2 + c_п^2\right)} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \right)^2 \tag{4.183}$$

где b – ширина пальца двигателя; h – толщина сдавливаемого слоя газа; n – число пальцев; $\sum r_i$ – сумма всех радиусов, на которых приложены силы компрессии газа.

Коэффициент демпфирования, обусловленный вязким трением газа вдоль поверхностей пальцев, площади которых определяются размером $c_п$ и длиной взаимного перекрытия пальцев, может быть вычислен аналогично по формулам (4.181), (4.183). Общий коэффициент демпфирования ротора определяется суммированием этих выражений:

$$b_\gamma = b_{\gamma в} + b_{\gamma к}\,.$$

Используя изложенный подход, можно получить формулы для вычисления коэффициентов демпфирования ЧЭ МГ любых конструктивных исполнений.

4.7.2. Конструкционное демпфирование

Причиной конструкционного демпфирования является внутреннее трение, которое понимается как потеря энергии при периодическом деформировании независимо от релаксационного механизма и характера затухания: релаксационного, резонансного или гистерезисного. Внутреннее трение чаще всего обозначают величиной, обратной механической добротности системы Q^{-1}. По аналогии с добротностью контура в электротехнике для внутреннего трения принимается

$$Q^{-1} = \Delta W / 2\pi W\,,$$

где W – максимальная энергия, запасенная образцом за период; ΔW – энергия рассеянная, за период в том же образце.

Рассмотрим конструкционное демпфирование на примере МГ RR-типа по рис. 3.11. Очевидно, что в РД рассеяние энергии происходит из-за изгибных деформаций всех четырех упругих элементов. В РЧ для любой из координат α, β рассеяние энергии идет в результате изгибных деформаций двух из четырех упругих элементов и вследствие деформаций кручения остающихся двух упругих элементов. Остановимся на втором, как наиболее общем, случае. Воспользуемся уравнением (4.153) и перепишем его в виде

$$\ddot{\beta} + \frac{b_\beta}{J_\beta}\dot{\beta} + \frac{G_\beta}{J_\beta}\beta = \frac{J_0}{J_\beta}\dot{\gamma}\Omega_x\,. \tag{4.184}$$

Собственные колебания ротора описываются левой частью уравнения (4.184), корни характеристического уравнения которого равны

$$r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_{\beta_0}^2}\,,$$

где $b = b_\beta / (2J_\beta)$; $\omega_{\beta_0} = \sqrt{G_\beta / J_\beta}$.

При $\omega_{\beta_0}^2 > b^2$ движение ротора носит характер затухающих колебаний с частотой $\omega_r = \sqrt{\omega_{\beta_0}^2 - b^2}$, а интенсивность уменьшения амплитуд колебаний определяется величиной b (рис. 4.15).

Декремент затухания представляет собой натуральный логарифм отношения амплитуд для двух следующих один за другим периодов:

$$\vartheta = \ln(\beta_1 / \beta_2)\,. \tag{4.185}$$

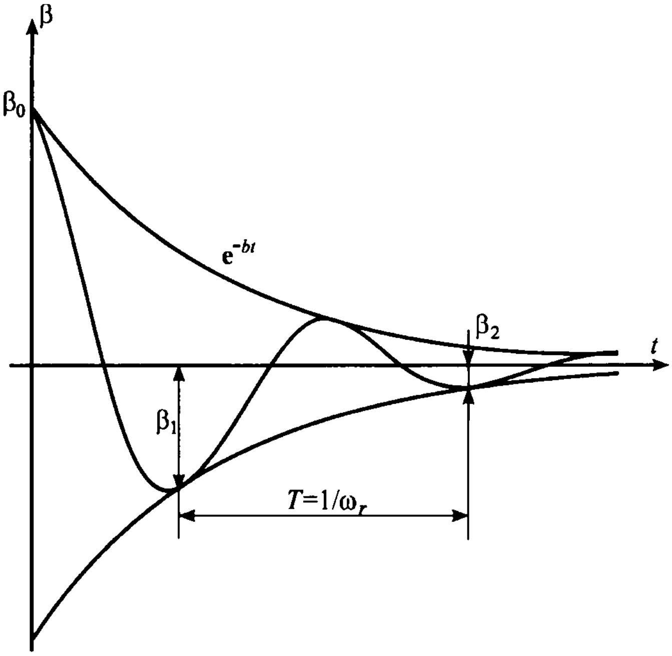


Рис. 4.15. Затухающие колебания ротора

В соответствии с рис. 4.15 запишем выражения для амплитуд:

$$\beta_1 = \beta_0 e^{-bt}; \qquad \beta_2 = \beta_0 e^{-b(t+T)},$$

после подстановки которых в уравнение (4.185) получим

$$\vartheta = \ln e^{bT} = bT = 2\pi \frac{b}{\omega_r} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \tag{4.186}$$

Запас энергии в упругих элементах при повороте ротора на угол β определяется суммой потенциальной и кинетической энергии. При колебаниях ротора энергия переходит из потенциальной в кинетическую, и наоборот. При амплитудном отклонении ротора от положения равновесия скорость и кинетическая энергия равны нулю и запас потенциальной энергии составляет

$$W = \Pi_{\max} = \frac{1}{2} G_\beta \beta_0^2, \tag{4.187}$$

где в соответствии с формулой (3.29) суммарная жесткость подвеса

$$G_\beta = 2G_{\text{кр.у}} + \frac{Ec_\text{п} b_{\text{п}1}^3}{l_{\text{т}1}} = \frac{GJ_\text{к}}{l_{\text{т}2}} + \frac{Ec_\text{п} b_{\text{п}1}^3}{l_{\text{т}1}}. \tag{4.188}$$

Жесткость упругих элементов на кручение в формуле (4.188) записана в соответствии с выражением (3.6) [$J_к = k'b_{п2}c_п^3$ – для прямоугольного сечения упругого элемента; $J_к = 0{,}141b_п^4$ – для квадратного сечения; $J_к = 0{,}1d^4$ – для круглого сечения, где $J_к$ – в м^4].

Для максимальных амплитуд затухающих колебаний, следующих в течение периода один за другим, имеем

$$\Pi_{\max(1)} = \frac{1}{2}G_\beta\left(\beta_0 e^{-bt}\right)^2; \qquad \Pi_{\max(1)} = \frac{1}{2}G_\beta\left(\beta_0 e^{-b(t+T)}\right)^2.$$

Вычислим разницу

$$\Delta W = \Pi_{\max(1)} - \Pi_{\max(2)},$$

и получим отношение рассеянной энергии к запасенной:

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - e^{-2bt} = 1 - e^{-2\vartheta}.$$

Для малых значений декремента затухания $\left(e^{-2\vartheta} \approx 1 - 2\vartheta\right)$

$$\vartheta \approx \Delta W/(2W) = \pi Q^{-1}. \qquad (4.189)$$

Объединив выражения (4.189) и (4.186), получим формулу для вычисления коэффициента конструкционного демпфирования упругих элементов:

$$b_\beta = J_\beta \vartheta \omega_r / \pi. \qquad (4.190)$$

Преобразуем формулу (4.187), введя в нее параметры конструкции МГ. Из уравнения (4.184), приняв $\dot{\gamma} = p$, выразим модуль максимального угла поворота ротора:

$$|\beta_0| = J_0 p \Omega_x / G_\beta. \qquad (4.191)$$

Формула (4.187) с учетом выражения (4.191) принимает вид

$$W = \left(J_0 p \Omega_x\right)^2 / \left(2G_\beta\right). \qquad (4.192)$$

При неоднородном распределении деформаций потеря энергии является величиной, интегрально зависящей от распределения напряжения в упругом элементе при колебаниях, так же, как и величина ее общего запаса энергии, т.е. для переменного нормального напряжения

$$\Delta W_и = \int_V c\sigma^m dV; \qquad (4.193)$$

– для переменного касательного напряжения

$$\Delta W_{\text{к}} = \int\limits_V c_\tau \tau^m dV, \tag{4.194}$$

где c, c_τ, m – коэффициенты, характеризующие материал упругих элементов; τ – переменное касательное напряжение; σ – переменное нормальное напряжение; V – объем упругого элемента.

Предположив близость характеристик кремния и стали как конструкционных материалов, выполним дальнейший анализ для обычно используемого значения $m = 3$.

Известно, что максимальное касательное напряжение в сечении упругого элемента определяется формулой

$$\tau_{\max} = M_{\text{кр}} / W_{\text{к}}, \tag{4.195}$$

где $W_{\text{к}} = k' b_{\text{п}}^2 c_{\text{п}}$ – для прямоугольного сечения упругого элемента $(b_{\text{п}}/c_{\text{п}} = n \geq 1$; k' – взято из табл. 3.2); $W_{\text{к}} = 0{,}208 b_{\text{п}}^3$ – для упругого элемента с квадратным сечением; $W_{\text{к}} = \dfrac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3$ – с круглым сечением; $M_{\text{кр}}$ – крутящий момент.

Упругие элементы круглого сечения имеют $\tau_{\max}$ на его окружности радиуса $r_{\text{т}} = d/2$, а с прямоугольным и квадратным сечениями $\tau_{\max}$ наблюдаются в середине каждой стороны его контура (в углах контура $\tau = 0$).

Переменное касательное напряжение для круглого в сечении элемента определяется известной формулой:

$$\tau = \tau_{\max} \frac{r}{r_{\text{т}}}. \tag{4.196}$$

Для упрощения изложения и имея в виду, что в углах прямоугольного и квадратного сечений $\tau = 0$, будем полагать, что и для них справедлива формула (4.196), но величину $r_{\text{т}}$ выразим через размер $b_{\text{п}}$ из условия равенства $\tau_{\max}$ для различных форм сечений. Положим $0{,}208 b_{\text{п}}^3 = 0{,}2 d^3$ и найдем

$$\frac{d}{2} = r_{\text{т}} = 1{,}016 b_{\text{п}} / 2 \approx b_{\text{п}} / 2.$$

Аналогично для прямоугольного сечения в формуле (4.196) нужно полагать $r_{\text{т}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{k' b_{\text{п}}^2}{0{,}2\pi}}$.

Запишем выражение для объема кольцевого элемента (рис. 4.16, *а*) $dV = (2\pi r dr) l$ и с учетом формулы (4.196) вычислим в соответствии с зависимостью (4.194) потерю энергии в упругом элементе, подвергающемся деформации кручения:

$$\Delta W_{\text{к}} = \int\limits_0^{r_{\text{т}}} c_\tau \left(\tau_{\max} \frac{r}{r_{\text{т}}}\right)^3 2\pi l r dr = 2\pi l c_\tau \left(\frac{\tau_{\max}}{r_{\text{т}}}\right)^3 \int\limits_0^{r_{\text{т}}} r^4 dr = \frac{2}{5} \pi l c_\tau \tau_{\max}^3 r_{\text{т}}^2.$$

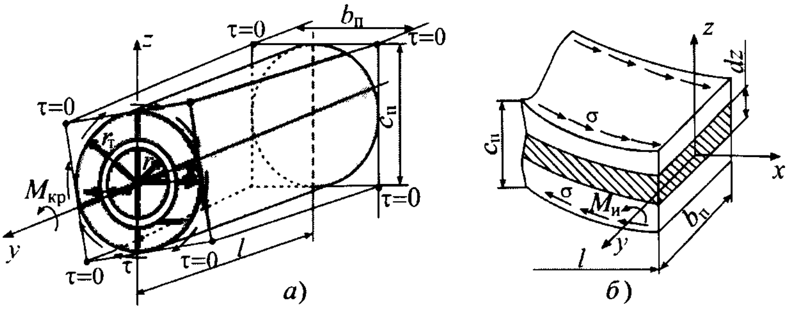


Рис. 4.16. К определению потери энергии в упругих элементах:
а – при кручении; *б* – при изгибе

Для двух упругих элементов $l = 2l_{т2}$ и получим

$$\Delta W_к = \frac{4}{5}\pi l_{т2} c_\tau \tau_{max}^3 r_т^2 . \tag{4.197}$$

Аналогичные выкладки выполним для упругих элементов, в которых рассеяние энергии происходит за счет деформации изгиба и максимальное нормальное напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{max} = M_и / W_к ,$$

где $W_к = b_{п1} c_п^2 / 6$; $M_и$ – изгибающий момент.

Переменное нормальное напряжение в сечении (рис. 4.16, *б*) находится по зависимости

$$\sigma = \sigma_{max} \frac{z}{0{,}5 c_п} . \tag{4.198}$$

Запишем выражение для элементарного объема $dV = lb_п dz$ и с учетом уравнения (4.198) вычислим по зависимости (4.193) ($m = 3$) потерю энергии в упругом элементе, подвергающемся деформации изгиба:

$$\Delta W_и = 2 \int_0^{c_п/2} c \left(\sigma_{max} \frac{z}{0{,}5 c_п} \right)^3 lb_п dz = \frac{1}{4} c \sigma_{max}^3 \, lb_п c_п .$$

Имея в виду, что $l = 2l_{т1}$, $b_п = b_{п1}$, получим

$$\Delta W_и = \frac{1}{2} c \sigma_{max}^3 \, l_{т1} \, b_{п1} \, c_п . \tag{4.199}$$

Таким образом, суммарные потери энергии равны

$$\Delta W = \Delta W_к + \Delta W_и . \tag{4.200}$$

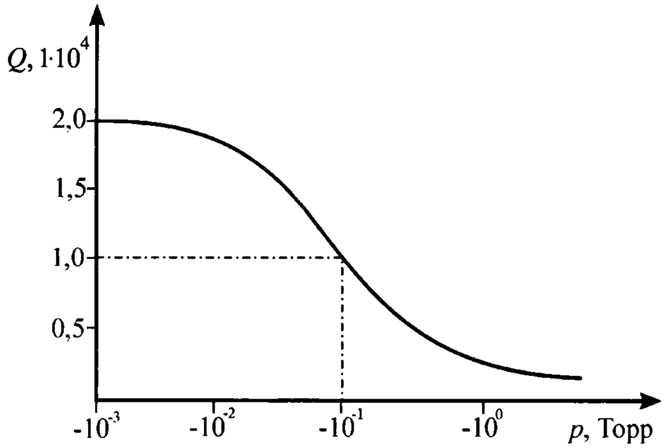


Рис. 4.17. Зависимость $Q = f(p)$

В соответствии с формулой (4.189) декремент затухания

$$\vartheta = \frac{2G_\beta\left(\Delta W_к + \Delta W_и\right)}{\left(J_0 p \Omega_x\right)^2}, \qquad (4.201)$$

и по формуле (4.190) может быть найден коэффициент конструкционного демпфирования.

Вопрос о численных значениях коэффициентов c, c_τ в формулах (4.199), (4.197) остается открытым, так как для кремния и вообще для полупроводников подобные исследования, видимо, еще не проводились. Правомерно поставить вопрос и о самой необходимости аналитического вычисления коэффициентов демпфирования, обусловленных внутренним трением, имея в виду, что достоверные результаты будут получены только после выполнения специальных экспериментов.

Сведения о подобных экспериментах крайне скудны, в частности на рис. 4.17 представлены результаты измерения добротности образца из кремния в зависимости от давления, полученные методом крутильных колебаний, из которых следует, что реализация высокой степени добротности Q возможна только при вакуумировании объема ($p = 10^{-2}\ldots10^{-3}$ мм рт.ст.), в котором находится МГ.

Следует все же обратить внимание на безусловную полезность аналитического вычисления коэффициентов демпфирования хотя бы с позиции анализа влияния на них различных конструктивных параметров МГ.

И, наконец, имея достоверные экспериментальные результаты по определению Q для конкретной конструкции МГ, можно, используя приведенные зависимости, решить обратную задачу по определению числовых значений коэффициентов c и c_τ.

Пример 4.17

Рассчитаем добротность, обусловленную внутренним трением в упругих элементах подвеса для МГ по рис. 3.11, при колебаниях ротора по координате β. Имея в виду рис. 4.17, полагаем, что ротор находится в вакуумированном корпусе.

Принимаем $c \approx c_{\text{т}} \approx 10^{-24}$ м^4/Н^2, $\Omega_x = 1$ 1/с. Воспользуемся исходными данными и результатами расчетов примера 3.4: $J_0 = C_1 = 2{,}5\cdot10^{-13}$ кг·м^2, $J_\beta = 10^{-13}$ кг·м^2, $b_{\text{п}1} = 2\cdot10^{-5}$ м, $l_{\text{т}1} = 0{,}8\cdot10^{-3}$ м, $b_{\text{п}2} = 1{,}5\cdot10^{-5}$ м, $l_{\text{т}2} = 0{,}5\cdot10^{-3}$ м, $c_{\text{п}} = 2\cdot10^{-5}$ м, $E_{(100)} = 1{,}3\cdot10^{11}$ Н/м^2, $G_{(100)} = 0{,}79\cdot10^{11}$ Н/м^2, $\omega_{\beta0} = 1{,}73\cdot10^4$ 1/с, $p = \omega_{\gamma0} = 1{,}32\cdot10^4$ 1/с.

Расчеты выполним в такой последовательности:

1. Вычислим величину G_β по формуле (4.188).

Вначале рассчитаем $J_{\text{к}} = k'b_{\text{п}2}c_{\text{п}}^3 = = 0{,}18\cdot1{,}5\cdot10^{-5}(2\cdot10^{-5})^3 = 2{,}16\cdot10^{-20}$ м^4, где коэффициент $k' = 0{,}18$ определен из табл. 3.2.

Далее получим

$$G_\beta = \frac{0{,}79\cdot10^{11}\cdot2{,}16\cdot10^{-20}}{0{,}5\cdot10^{-3}} + \frac{1{,}3\cdot10^{11}\cdot2\cdot10^{-5}\left(2\cdot10^{-5}\right)^3}{0{,}8\cdot10^{-3}} = 29{,}41\cdot10^{-6}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

2. Найдем максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max}$ в упругих элементах длиной $l_{\text{т}1}$, которые подвергаются изгибным деформациям. Используем матрицу (3.11) и запишем изгибающий момент $M_{\text{и}} = k_{22}\beta_0$, где $k_{22} = \dfrac{4E_{(100)}I}{l_{\text{т}1}}$. Определим $I = \dfrac{b_{\text{п}1}c_{\text{п}}^3}{12} = \dfrac{2\cdot10^{-5}\left(2\cdot10^{-5}\right)^3}{12} = 1{,}33\cdot10^{-20}$ м^4.

Примем $\beta_0 = 0{,}1^\circ = \dfrac{0{,}1}{57{,}3}$ рад. Следовательно,

$$M_{\text{и}} = \frac{4\cdot1{,}3\cdot10^{11}\cdot1{,}33\cdot10^{-20}\cdot0{,}1}{0{,}8\cdot10^{-3}\cdot57{,}3} = 1{,}5\cdot10^{-9}\ \text{Н·м}.$$

Максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max} = M_{\text{и}}/W_{\text{к}}$, где

$$W_{\text{к}} = \frac{2\cdot10^{-5}\left(2\cdot10^{-5}\right)^2}{6} = 1{,}33\cdot10^{-15}\ \text{м}^3$$

и, значит, $\sigma_{\max} = \dfrac{1{,}5\cdot10^{-9}}{1{,}33\cdot10^{-15}} = 1{,}13\cdot10^6$ Н/м^2.

3. Определим по формуле (4.199) потерю энергии из-за изгибных деформаций упругих элементов:

$$\Delta W_{\text{и}} = \frac{1}{2}10^{-24}\left(1{,}13\cdot10^6\right)^3 0{,}8\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-5}\cdot2\cdot10^{-5} = 0{,}23\cdot10^{-18}\ \text{Н·м}.$$

4. Вычислим максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ в упругих элементах длиной $l_{\text{т}2}$, которые подвергаются деформации кручения. Крутящий момент в упругом элементе $M_{\text{кр}} = \dfrac{G_{(100)}J_{\text{к}}}{2l_{\text{т}2}}\beta_0$, где $J_{\text{к}} = 2{,}16\cdot10^{-20}$ м^4 (см. п. 1), а $\beta_0 = 0{,}1/57{,}3$ рад. Таким образом,

$$M_{\text{кр}} = \frac{0{,}79\cdot10^{11}\cdot2{,}16\cdot10^{-20}\cdot0{,}1}{2\cdot0{,}5\cdot10^{-3}\cdot57{,}3} = 2{,}3\cdot10^{-8}\ \text{Н·м}$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}} = \frac{2{,}3\cdot10^{-8}}{0{,}21\cdot\left(1{,}5\cdot10^{-5}\right)^2\cdot2\cdot10^{-5}} = 2{,}43\cdot10^7\ \text{Н/м}^2.$$

5. Найдем по формуле (4.197) потерю энергии от крутильных деформаций упругих элементов:

$$\Delta W_{\text{к}} = \frac{4}{5}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-24}\left(2{,}43\cdot 10^{7}\right)^{3}\left(0{,}75\cdot 10^{-5}\right)^{2} = 10^{-15}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

6. Вычислим величину $(J_0 p\Omega_x)^2 = (2{,}5\cdot 10^{-13}\cdot 1{,}32\cdot 10^4\cdot 1)^2 = 27{,}22\cdot 10^{-18}$ Н^2·м^2.

7. Определим декремент затухания по формуле (4.201)

$$\vartheta = \frac{2\cdot 29{,}41\cdot 10^{-6}\left(0{,}23\cdot 10^{-18} + 10^{-15}\right)}{27{,}22\cdot 10^{-18}} \approx 2{,}16\cdot 10^{-3}$$

и по формуле (4.189) добротность МГ по координате β:

$$Q = \pi/\vartheta = \frac{3{,}14}{2{,}16}10^{3} = 1{,}45\cdot 10^{3}\,.$$

Из приведенного примера следует, что демпфирование колебаний происходит почти исключительно за счет рассеяния энергии в упругих элементах, испытывающих крутильные колебания (величина $\Delta W_{\text{к}}$ на три порядка больше величины $\Delta W_{\text{и}}$).

4.8. ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

ЧЭ микромеханических приборов содержат ИМ с упругим подвесом и независимо от функционального назначения микроприбора (МА, МДД, МГ) являются колебательными звеньями, или иначе – гармоническими осцилляторами. Возмущения, действующие на ЧЭ, – это комбинации постоянных и синусоидальных сил или моментов. Практический интерес при исследовании динамики ЧЭ представляют характеристики вынужденных колебаний, которые происходят относительно смещения ИМ, обусловленного постоянной составляющей возмущения.

4.8.1. Линейные осцилляторы

Вынужденные колебания гармонического осциллятора описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной правой частью. Нас интересует случай, когда правая часть синусоидальна, т.е. упрощенные дифференциальные уравнения ЧЭ МА, МДД или МГ по одной любой обобщенной координате приводятся к уравнению вида

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = E\cos\omega t\,, \tag{4.202}$$

где x – механическое перемещение ИМ (линейное или угловое); $E = E_0/m$ (E_0 – амплитуда и частота внешней силы, m – масса ИМ) или $E = M_0/J$ (M_0 – амплитуда внешнего момента, J – момент инерции ИМ); $2\xi = k_{\text{до}}/m$ ($k_{\text{до}}$ – осевой коэффициент демпфирования) или $2\xi = k_{\text{ду}}/J$ ($k_{\text{ду}}$ – угловой коэффициент демпфирования); $\omega_0 = \sqrt{G_{\text{о}}/m}$ ($G_{\text{о}}$ – осевая жесткость подвеса) или $\omega_0 = \sqrt{G_{\text{у}}/J}$ ($G_{\text{у}}$ – угловая жесткость подвеса).

Часто для решения уравнения (4.202) пользуются комплексными выражениями. Правую часть заменяют выражением $E\mathrm{e}^{j\omega t}$, и получается *новое* уравнение:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 = E\mathrm{e}^{j\omega t}. \qquad (4.203)$$

Действительная часть решения уравнения (4.203) является решением уравнения (4.202).

Уравнение (4.203) решается подстановкой

$$x = C\mathrm{e}^{j\omega t}. \qquad (4.204)$$

Подставляя выражение (4.204) в уравнение (4.203), получаем

$$\left(-\omega^2 + 2\xi j\omega + \omega_0^2\right)C\mathrm{e}^{j\omega t} = E\mathrm{e}^{j\omega t},$$

откуда комплексная амплитуда равна

$$C = \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi j\omega}. \qquad (4.205)$$

Нас интересует действительная часть выражения (4.204), которая имеет вид

$$x = X\cos(\omega t - \varphi), \qquad (4.206)$$

где

$$X = \frac{E}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2}}; \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\xi\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (4.207)$$

Если $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$, то наименьшее положительное значение φ находится во втором квадранте.

Мы нашли одно из частных решений неоднородного уравнения. Общее решение получим, прибавив к нему общее решение неоднородного уравнения:

$$x = X\cos(\omega t - \varphi) + A\mathrm{e}^{-\xi t}\cos(pt - \psi), \qquad (4.208)$$

где $p^2 = \omega_0^2 - \xi^2$; A, ψ – произвольные постоянные.

По истечении некоторого времени собственные колебания делаются сколь угодно близкими к нулю и наступает установившийся процесс. До этого момента говорить о резонансе бессмысленно.

Вынужденное периодическое колебание имеет частоту p, равную частоте действующей силы и, вообще говоря, отличную от ω.Частота, с которой колеблется осциллятор в установившемся режиме при вынужденных колебаниях, совершенно не зависит от его собственной частоты.

При прочих равных условиях амплитуда вынужденных колебаний X пропорциональна амплитуде действующей силы E. Амплитуда и фаза сильно зависят от того, в каком отношении находится период внешней силы к периоду собственных колебаний.

Рассмотрим, при каком соотношении частоты внешней силы и собственной частоты наступает резонанс (понимая под резонансом максимум амплитуды вынужденных колебаний).

Пусть $\omega_0 = \text{const}$, а изменяется ω. Продифференцировав X по ω, найдем, что максимум амплитуды смещения будет при частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}\,. \tag{4.209}$$

Таким образом, резонансная частота внешней силы не равна собственной частоте ω_0 и частоте затухающего осцилляторного процесса $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$. Резонанс наступает не при изохронизме, а при ω, несколько меньшей, чем ω_0.

Пусть по-прежнему $\omega_0 = \text{const}$, а изменяется ω. Но теперь мы будем интересоваться максимумом амплитуды скорости $\dot{X}$. Нужно, следовательно, искать максимум выражения

$$\dot{X} = \omega X = \frac{\omega E}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2}} = \frac{E}{\sqrt{4\xi^2 + \left(\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2}}\,. \tag{4.210}$$

Ясно, что максимум будет при

$$\omega_0^2 - \omega^2 = 0\,, \tag{4.211}$$

т.е. резонанс наступает тогда, когда период внешней силы *равен* периоду незатухающего колебания.

Для максимальных значений амплитуды и скорости имеем

$$X_{\max} = \frac{E}{2\xi\omega_0}; \qquad \dot{X}_{\max} = \frac{E}{2\xi}. \tag{4.212}$$

Итак, резонанс амплитуды смещения и резонанс амплитуды скорости этого смещения наступают при различных значениях ω. Рассмотрим, насколько велика разница между ними. Выше было показано, что максимум амплитуды смещения соответствует выражению (4.209), а максимум амплитуды скорости смещения формуле (4.211).

Перепишем уравнение (4.209) в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - 2\frac{\xi^2}{\omega_0^2}\right)$$

или, поскольку $\xi/\omega_0 = \vartheta/2\pi$ (ϑ – логарифмический декремент затухания (см. подразд. 4.7.2), получим

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - 2\frac{\vartheta^2}{4\pi^2}\right).$$

При малых значениях ϑ, что имеет место в микромеханических приборах, можно считать, что оба резонанса (смещения и скорости) наступают при $p = \omega$ и, значит, $\omega_0 \approx \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$.

Итак, если затухание осциллятора мало, можно заключить, что резонанс в микроприборах наступает при изохронизме.

Рассмотрим теперь вопрос об остроте резонансной кривой, что имеет первостепенное значение для микроприборов, так как, например, МГ работают в режиме резонансной настройки или близком к нему.

Из соотношений (4.207) легко получить выражение

$$\sin\varphi = \frac{2\xi\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2}}, \tag{4.213}$$

откуда с учетом формул (4.207) и (4.210) получим

$$X = \frac{E\sin\varphi}{2\xi\omega}; \qquad \dot{X} = \frac{E\sin\varphi}{2\xi}. \tag{4.214}$$

Допустим, что нас интересует зависимость от расстройки максимального значения кинетической энергии, т. е. величины

$$T = \frac{m}{2}\dot{X}^2. \tag{4.215}$$

Мы знаем, что $T = T_{\max}$ при $\omega_0 = \omega$, т.е. при $\sin\varphi = 1$. Поэтому на основании (4.214), (4.215) и (4.207) получаем

$$\frac{T_{\max} - T}{T} = \operatorname{ctg}^2\varphi = \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\xi\omega}\right)^2, \tag{4.216}$$

откуда

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\xi\omega}\right)^2}. \tag{4.217}$$

Разделим числитель и знаменатель выражения (4.217) на $\omega_0\omega$, введем "степень изохронизма", или расстройку частот

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta \tag{4.218}$$

и перепишем уравнение (4.217) в виде

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{\eta} - \eta\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{\vartheta}{\pi}\right)^2}. \tag{4.219}$$

Из равенства (4.219) видно, что отношение $T/T_{\max}$ зависит не от трех отдельных переменных ω, ω_0, ξ, а от двух их комбинаций (η и ϑ). В этом заключается одна из причин того, почему так существен логарифмический декремент затухания.

Возьмем, например, $\vartheta/\pi = 0{,}01$, $\eta = 0{,}8$ и получим

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1}{1 + 2 \cdot 10^3},$$

откуда становится ясно, почему резонанс имеет такое огромное значение. Здесь достаточно 20%-ной расстройки, чтобы энергия упала в 2000 раз.

При малых расстройках, т.е. когда ω_0 мало отличается от ω, имеет место приближенное равенство

$$(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega(\omega_0 - \omega),$$

и формула (4.216) принимает вид

$$\frac{T_{\max} - T}{T} = \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\xi^2} = \frac{\left(\dfrac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(\dfrac{\vartheta}{2\pi}\right)^2},$$

откуда следует, что энергия падает вдвое по сравнению с резонансом при

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\vartheta}{2\pi}. \tag{4.220}$$

Определив расстройку, при которой ордината резонансной кривой равна половине ординаты в максимуме, можно вычислить по формуле (4.220) логарифмический декремент затухания.

Остротой настройки называется обратная величина относительной расстройки $|\omega_0 / \Delta\omega|$, которая нужна для того, чтобы ордината резонансной кривой уменьшилась вдвое. Из формулы для $(T_{\max} - T)/T$ следует, что

$$\left|\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right| = \frac{2\pi}{\vartheta},$$

т.е. острота настройки обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания осциллятора.

Введем в рассмотрение так называемые равновесные амплитуды

$$X_0 = \frac{E}{G_0} \quad (\text{или } \frac{E}{G_y})$$

и перепишем выражения (4.207) в виде

$$V = \frac{X(\omega)}{X(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2}, \tag{4.221}$$

где η – относительная частота [см. формулу (4.218)].

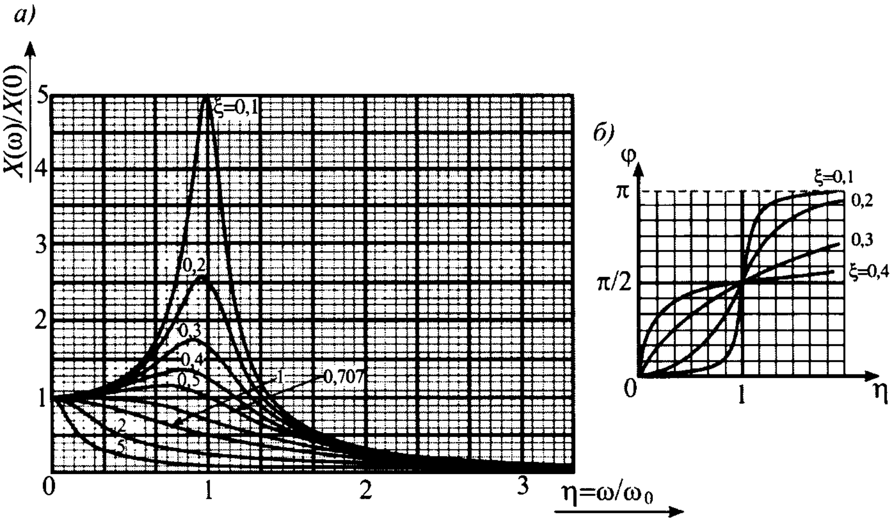


Рис. 4.18. Нормированные частотные характеристики колебательного звена:
а – амплитудные; *б* – фазовые

Коэффициент V характеризует динамическую восприимчивость колебательной системы (осциллятора) и часто называется коэффициентом динамичности. Значение V при $\eta = 1$ дает характеристику демпфирования, именуемую добротностью (по демпфированию):

$$Q = 1/2\xi. \tag{4.222}$$

Надо обратить внимание на то, что выражения (4.221) являются нормированными амплитудной и фазовой частотными характеристиками колебательного звена (рис. 4.18).

Из рис. 4.18, *а* следует, в частности, что максимум амплитуд смещения перемещается в зависимости от декремента затухания. Из рис. 4.18, *б* видно, что при малой частоте внешней силы практически $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т.е. смещение изменяется в фазе с внешней силой. Если $\omega \to \infty$, то $\operatorname{tg}\varphi$ тоже стремится к нулю, но будучи отрицательным. Следовательно, сдвиг фаз стремится к π. В тот момент, когда внешняя сила действует вправо, смещение направлено влево. При резонансе ($\eta = 1$) сдвиг фаз равен $\pi/2$. Чем меньше ξ, тем меньше нужно удаляться от резонанса, чтобы сдвиг фаз стал практически равен нулю или π.

Важной практической характеристикой колебательного звена является его полоса пропускания частот, которая в соответствии с рис. 4.19 определяется следующим образом:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\eta\omega_0 = 2\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}\omega_0. \tag{4.223}$$

Физически это означает, что при некотором снижении усиления для близких частот на n-ю часть максимальной величины $V_{\max} = Q$, осциллятор не реагирует на относительные частоты, которые отличаются от частоты ω_0 на величину $\Delta\eta$.

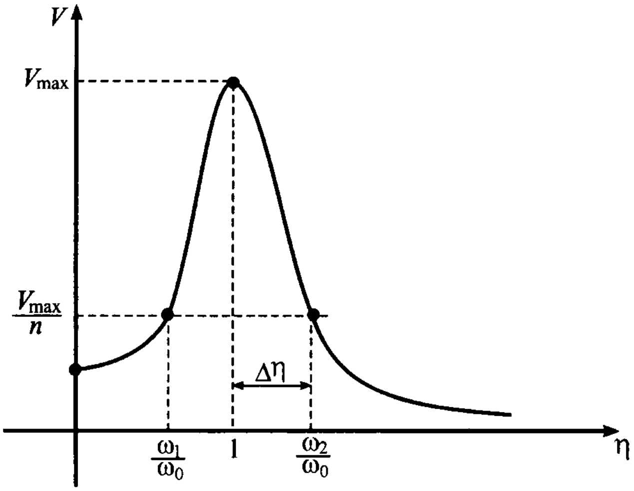


Рис. 4.19. К определению полосы пропускания частот

При снижении усиления колебательного звена в n раз справедливы равенства

$$V_\omega(1+\Delta\eta)=\frac{Q}{n}=\frac{1}{2\xi n}=\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2}},$$

откуда следует квадратное уравнение для η^2:

$$\eta^4-2(1-2\xi^2)\eta^2+1-4n^2\xi^2=0,$$

которое имеет решение

$$\eta_{1,2}=\sqrt{1-2\xi^2\pm 2\xi\sqrt{n^2-1+\xi^2}}\,. \qquad (4.224)$$

Так как $\xi << 1$, из выражения (4.224) получаем приближенное решение:

$$\eta_{1,2}\approx\sqrt{1\pm 2\xi\sqrt{n^2-1}}\approx 1\pm\xi\sqrt{n^2-1}\,.$$

Значит, имеет место приближенное равенство

$$\Delta\eta=\left|1-\eta_{1,2}\right|\approx\xi\sqrt{n^2-1},$$

и, в соответствии с формулой (4.223), полоса пропускания частот равна

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1\approx\xi\omega_0\sqrt{n^2-1}=\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{n^2-1}\,. \qquad (4.225)$$

Таким образом, расширение полосы пропускания частот возможно при сохранении требуемого усиления ($V_{\max}/n$) за счет уменьшения добротности Q.

Заметим, что полоса пропускания частот определяется по резонансной кривой при равенстве $[X(\omega)/X(0)]^2 = 0{,}5$, где $X(0), X(\omega)$ – амплитуды колебаний на резонансной частоте ω_0 и на частоте ω.

Следовательно, снижение усиления колебательного звена $n = X(0)/X(\omega) = \sqrt{2}$ и из формулы (4.225) получаем величину полосы пропускания частот

$$\Delta\omega = \omega_0 / 2Q. \tag{4.226}$$

Точки резонансной кривой, по которым определяется полоса пропускания частот [см. формулу (4.226)], называются точками половинной мощности.

4.8.2. Влияние нелинейной упругости подвеса

Нелинейные эффекты в микромеханических приборах обусловлены двумя основными причинами: электростатическими силами взаимодействия в гребенчатых структурах первичных и вторичных преобразователей и нелинейной жесткостью подвеса. Влиянием электростатических сил при условии, что перемещения ИМ находятся в пределах 10 % от первоначального зазора, можно пренебречь.

Кроме того, эффективным методом устранения влияния этого вида нелинейности является соответствующий подбор управляющих и опорного напряжений (см. подразд. 4.6).

Оценим влияние нелинейной упругости подвеса (см. подразд. 3.1.2, В) на динамику осциллятора на примере МГ RR-типа по координате первичных колебаний.

Запишем уравнение движения ЧЭ микромеханического гироскопа RR-типа относительно оси первичных колебаний в предположении, что упругая восстанавливающая сила является нелинейной [см. выражение (3.39)]:

$$J_\gamma \ddot{\gamma} + b_\gamma \dot{\gamma} + G_1 \gamma + G_3 \gamma^3 = M_0 \cos pt, \tag{4.227}$$

где J_γ – момент инерции МГ относительно оси первичных колебаний; b_γ – коэффициент демпфирования; G_1, G_3 – коэффициенты линейной и кубической жесткости соответственно; M_0, p – амплитуда и частота момента привода возбуждения первичных колебаний.

Перепишем уравнение (4.227) в виде

$$\ddot{\gamma} + 2\xi\omega_{\gamma 0}\dot{\gamma} + \omega_{\gamma 0}^2\left(\gamma + \lambda\gamma^3\right) = M \cos pt, \tag{4.228}$$

где $\omega_{\gamma 0} = \sqrt{\dfrac{G_1}{J_\gamma}}$ – круговая частота собственных незатухающих колебаний линейного осциллятора; $\xi = \dfrac{b_\gamma}{2J_\gamma\omega_{\gamma 0}}$ – относительный коэффициент демпфирования; $\lambda = \dfrac{G_3}{G_1}$; $M = \dfrac{M_0}{J_\gamma}$ – приведенный момент привода.

Введем безразмерное время: $\tau = \omega_{\gamma 0} t$. Имеют место такие равенства:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \omega_{\gamma 0}^2 \frac{d^2\gamma}{d\tau^2}; \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \omega_{\gamma 0} \frac{d\gamma}{d\tau} . \tag{4.229}$$

С учетом формул (4.229) уравнение (4.228) относительно безразмерного времени τ примет следующий вид:

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + 2\xi \frac{d\gamma}{d\tau} + \gamma + \lambda\gamma^3 = M_* \cos\eta\tau , \tag{4.230}$$

где $M_* = \frac{M}{\omega_{\gamma 0}^2} = \frac{M_0}{G_1}; \; \eta = \frac{p}{\omega_{\gamma 0}}$.

Для решения уравнения (4.230) воспользуемся методом гармонического баланса [12], который применим для нечетных восстанавливающих сил (моментов):

$$f(x) = -f(-x). \tag{4.231}$$

Основное предположение метода гармонического баланса заключается в том, что колебания считаются близкими к гармоническим:

$$x = A\cos\omega t . \tag{4.232}$$

Если подставить выражение (4.232) в формулу (4.231), то нелинейная восстанавливающая сила $f(x)$ также станет периодической функцией времени и будет иметь именно такую же круговую частоту ω, как и x. Эту периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = f(A\cos\omega t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \tag{4.233}$$

где a_0, a_k, b_k – коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(A\cos\omega t)dt ; \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(A\cos\omega t)\cos k\,\omega t dt ;$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(A\cos\omega t)\sin k\,\omega t dt$$

($T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний).

В силу предположения (4.231) все коэффициенты b_k, а также постоянный коэффициент a_0 равны нулю. Второе предположение метода гармонического баланса состоит в том, что можно пренебречь высшими гармониками ряда (4.233), т.е. членами с $k > 1$, и учитывать только основную гармонику с круговой частотой ω. Тогда с учетом выражения (4.232) получаем

$$f(x) = f(A\cos\omega t) \approx a_1 \cos\omega t = \frac{a_1}{A} x = cx . \tag{4.234}$$

Таким образом, методом гармонического баланса нелинейная функция $f(x)$ приведена к линейному приближенному выражению cx. Однако коэффициент пропорциональности c не является постоянным и зависит от амплитуды A. После подстановки в формулу (4.234) коэффициента Фурье a_1, запишем

$$c = c(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A}\int_0^T f(A\cos\omega t)\cos\omega t d(\omega t). \qquad (4.235)$$

Интегральное соотношение (4.235) позволяет преобразовать функцию f от переменной x в функцию c от переменной A.

Следовательно, кубический восстанавливающий момент подвеса МГ можно заменить линейным выражением с коэффициентом, зависящим от отклонения:

$$\lambda x^3 \to \lambda^* x,$$

где $\lambda^* = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} A^3\cos^4\eta\tau d(\eta\tau)$.

Учитывая, что

$$\int\cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32},$$

получаем

$$\lambda^* = \frac{3\lambda A^2}{4}. \qquad (4.236)$$

Введем относительную собственную частоту η_A, также зависящую от отклонения:

$$1 + \lambda^* = 1 + \frac{3}{4}\lambda A^2 = \eta_A^2, \qquad (4.237)$$

и уравнение (4.230) приведем к виду

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + 2\xi\frac{d\gamma}{d\tau} + \eta_A^2\gamma = M_*\cos\eta\tau. \qquad (4.238)$$

Периодическое решение линейного уравнения (4.238) имеет вид

$$\gamma = A\cos(\eta\tau - \varphi),$$

где

$$A = \frac{M_*}{\sqrt{\left(\eta_A^2 - \eta^2\right)^2 + 4\xi^2\eta^2}}; \qquad (4.239) \qquad\qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\eta}{\eta_A^2 - \eta^2}. \qquad (4.240)$$

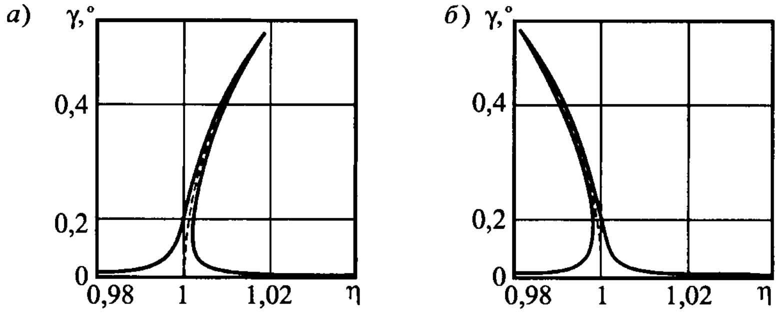


Рис. 4.20. Резонансные кривые МГ с кубическим восстанавливающим моментом: *а* – при $\lambda > 0$; *б* – при $\lambda < 0$

Отличием выражений (4.239) и (4.240) от амплитуды и фазы вынужденных колебаний МГ в случае линейного упругого подвеса является зависимость величины η_A^2 от амплитуды A, так что равенство (4.239) следует рассматривать как уравнение для A:

$$A^2\left[\left(\eta_A^2-\eta^2\right)^2+4\xi^2\eta^2\right]=M_*^2. \qquad (4.241)$$

Найдем зависимость частоты η от амплитуды $\eta=\eta(A)$ подстановкой равенства (4.237) в уравнение (4.241), в результате которой получим

$$\eta^4-2\left(1+\frac{3\lambda A^2}{4}-2\xi^2\right)\eta^2+\left[\left(1+\frac{3\lambda A^2}{4}\right)^4-\frac{M_*^2}{A^2}\right]=0, \qquad (4.242)$$

откуда следует

$$\eta_{1,2}^2=\left(1+\frac{3\lambda A^2}{4}-2\xi^2\right)\pm\sqrt{\frac{M_*^2}{A^2}-4\xi^2\left(1+\frac{3\lambda A^2}{4}-\xi^2\right)}. \qquad (4.243)$$

В зависимости от величины входящих в уравнение (4.243) параметров могут быть два, одно или же ни одного действительного решения для η. Не обсуждая возможности решения заметим, что построенные согласно соотношению (4.243) резонансные кривые оказываются гораздо разнообразнее, чем в случае линейных систем. Здесь кроме коэффициента демпфирования ξ большое влияние оказывают величины λ и M_*. Амплитуда возмущения M_* практически не влияла на поведение линейных систем. В то же время поведение нелинейных систем самым существенным образом зависит от амплитуды M_*. Рассмотрим эту зависимость.

Остановимся на некоторых характерных свойствах резонансных кривых нелинейных систем. На рис. 4.20 приведены резонансные кривые для следующих параметров МГ: $G_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ Н·м/рад; $G_3 = 1 \cdot 10^{-2}$ Н·м/рад^3; $\xi = 10^{-4}$; $J_\gamma = 3 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2; $M = 10^{-10}$ Н·м.

Нелинейность, выраженная коэффициентом λ, вызывает изгиб пиков резонансных кривых. При $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ пики изгибаются в направлении бóльших и меньших значений η

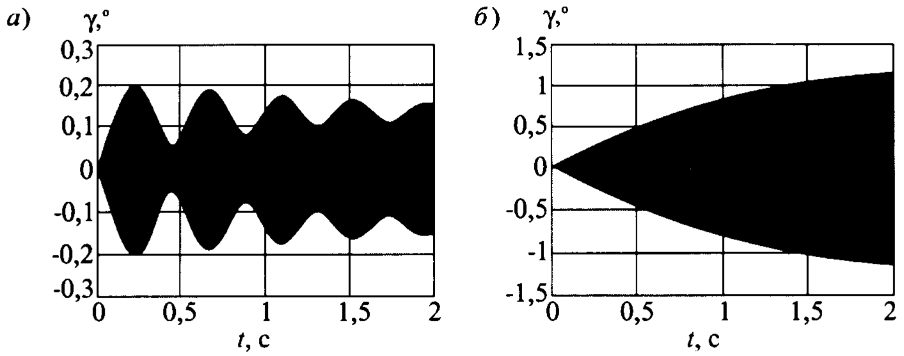


Рис. 4.21. Результаты численного интегрирования:
а – с учетом кубического восстанавливающего момента; *б* – без учета кубического восстанавливающего момента

соответственно. Следствием этих изгибов является существование областей частот η, в которых некоторому фиксированному значению η отвечают три значения амплитуды A, т.е. три возможных решения уравнения (4.243).

Чтобы определить максимумы изогнутых резонансных кривых, нужно найти кратный корень η^2 уравнения (4.243), т.е. условие, при котором подкоренное выражение обращается в нуль. Это условие дает квадратное уравнение для A^2, решение которого имеет вид [12]:

$$A_{\max}^2=-\frac{2\left(1-\xi^2\right)}{3\lambda}\pm\sqrt{\frac{4\left(1-\xi^2\right)^2}{9\lambda}+\frac{M_*^2}{3\lambda\xi^2}},$$

откуда в соответствии с формулой (4.243)

$$\eta_{\max}^2=1+\frac{3\lambda A_{\max}^2}{4}-2\xi^2. \qquad (4.244)$$

Пренебрегая в равенстве (4.244) членом $2\xi^2$ по сравнению с единицей, получаем

$$\eta^2\approx1+\frac{3}{4}\frac{G_3}{G_1}\gamma_0^2, \qquad (4.245)$$

где γ_0 – амплитуда первичных колебаний.

Из выражения (4.245) следует

$$\frac{G_3}{G_1}\approx\frac{4}{3\gamma_0^2}\left(\eta^2-1\right)=\frac{4}{3\gamma_0^2}\frac{p-\omega_{\gamma0}}{\omega_{\gamma0}}(\eta+1).$$

Введем обозначение $\delta\omega_\gamma=\dfrac{p-\omega_{\gamma0}}{\omega_{\gamma0}}$ (допустимая расстройка частоты, обусловленная нелинейностью подвеса) и, имея в виду, что $\eta\approx1$, получим

$$\lambda=\frac{G_3}{G_1}\approx\frac{8\delta\omega_\gamma}{3\gamma_0^2}. \qquad (4.246)$$

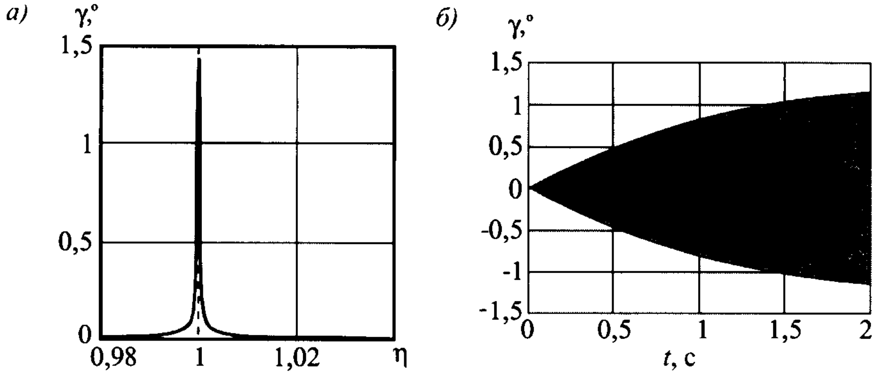


Рис. 4.22. Резонансная кривая (*а*) и переходный процесс (*б*) МГ при $\lambda = 1$

Выражение (4.246) определяет предельную величину λ, при которой не проявляется эффект нелинейной жесткости.

Очевидно, что максимальная амплитуда колебаний будет не при $\eta = 1$, как в случае МГ с линейным восстанавливающим моментом упругого подвеса. В соответствии с рис. 4.20 при $\eta = 1$ амплитуда вынужденных колебаний составляет всего 0,13°. В случае линейного восстанавливающего момента установившееся значение амплитуды колебаний МГ равнялось бы 1,4°. Оценки амплитуды первичных колебаний МГ согласуются с результатами численного интегрирования уравнения (4.227), которые представлены на рис. 4.21.

Анализ полученных результатов показывает, что кубическая жесткость подвеса значительно снижает амплитуду первичных колебаний ротора МГ и, кроме того, приводит к биениям, которые свойственны для линейного осциллятора при некоторой расстройке частот.

В соответствии с формулой (4.246) при $\lambda \leq 1$ нелинейные эффекты не оказывают заметного влияния на динамику МГ (рис. 4.22).

Эффективным методом устранения влияния кубической нелинейности подвеса, так же, как и квадратичной, зависящей от электростатических сил, является ограничение амплитуды колебаний осциллятора.

4.9. ДИНАМИКА ЧЭ МАЯТНИКОВЫХ МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРОВ

4.9.1. Микроакселерометр на вибрирующем основании

При низкочастотных колебаниях основания, меньших и соизмеримых с первой главной частотой, основной формой колебаний является первая главная форма по координате ϑ. Следовательно, возможен приближенный анализ динамики маятника на основе уравнения, полученного из системы (4.22) без учета перекрестных связей между координатами ϑ и y_r:

$$J_A\ddot{\vartheta} + k_{д\vartheta}\dot{\vartheta} + \left[k_{22} - m(\alpha\dot{\gamma})^2\right]\vartheta = Fa + F_{\gamma 0}(l + a), \qquad (4.247)$$

где функции F и $F_{\gamma 0}$ вычисляются по формулам (4.23).

В зависимости от варианта установки акселерометра относительно основания в соответствии с выражениями (4.23) реакция маятника будет различной в ответ на угловую и линейную вибрацию. Вопрос о предпочтительном варианте установки акселерометра для измерения параметров угловой и линейной вибрации основания можно решить на основе анализа системы, полученной из системы (4.22) для чувствительности акселерометра:

$$\left.\begin{aligned} k_{11}y_r + k_{12}\vartheta &= F + F_{\gamma 0}; \\ k_{21}y_r + k_{22}\vartheta &= Fa + F_{\gamma 0}(l + a). \end{aligned}\right\} \tag{4.248}$$

Систему (4.248) разрешим относительно информативного параметра ϑ, выражения для которого запишем для угловой и линейной вибрации и для различных вариантов установки акселерометра, вычисляя F и $F_{\gamma 0}$ по выражениям (4.23).

Для угловой вибрации основания ($\gamma \neq 0, x_в = y_в = 0$):

$$\vartheta = \frac{\pm m\left[k_{12} - (l + a)k_{11}\right]\left[(l + a)\ddot{\gamma} - L(\dot{\gamma})^2 + g\right]}{k_{11}k_{12} - k_{12}^2}; \tag{4.249}$$

$$\vartheta = \frac{m\left[k_{21} - (l + a)k_{11}\right]\left[\pm(L + l + a)\ddot{\gamma} \mp g\gamma\right]}{k_{11}\left[k_{22} \mp mg(l + a)\right] - k_{21}(k_{12} \mp mg)}. \tag{4.250}$$

Для линейной вибрации основания ($x_в \neq 0, y_в \neq 0; \gamma = 0$):

$$\vartheta = \frac{\pm m\left[k_{12} - (l + a)k_{11}\right](\ddot{y}_в + g)}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \tag{4.251}$$

$$\vartheta = \frac{\pm m\left[(l + a)k_{11} - k_{21}\right]\ddot{x}_в}{k_{11}\left[k_{22} \mp mg(l + a) - k_{21}(k_{12} \mp mg)\right]}. \tag{4.252}$$

В выражениях (4.249), (4.251) знак "+" в числителе соответствует углу установки $\gamma_0 = 0°$, а знак "–" – углу $\gamma_0 = 180°$, а в выражениях (4.250), (4.252) верхние знаки "+" или "–" соответствуют углу $\gamma_0 = 90°$, а нижние – углу 270°.

Из выражений (4.249)–(4.251) следует: для измерения низкочастотных изменений углов γ предпочтителен угол установки $\gamma_0 = 90°$ (перевернутый маятник); при измерении вертикальной вибрации углы установки акселерометра $\gamma_0 = 0$ и 180° равнозначны; при измерении горизонтальной вибрации ($\gamma_0 = 90$ и 270°) наибольшие значения углов ϑ будут отвечать перевернутому маятнику ($\gamma_0 = 90°$).

Предположим, что маятник подвержен угловым колебаниям основания, изменяющимся по закону $\gamma = \gamma_м \sin\omega t$ ($\gamma_м$, ω – соответственно амплитуда и частота колебаний основания). Воспользуемся зависимостями (4.23) ($\gamma_0 = 270°$) и запишем уравнение (4.247) в виде

$$\ddot{\vartheta} + \frac{k_{д\vartheta}}{J_A}\dot{\vartheta} + \frac{1}{J_A}\left[k_{22} + mg(l+\alpha) - ma^2(\gamma_0\omega)^2\cos^2\omega t\right]\vartheta =$$

$$= -\frac{m\gamma_м}{J_A}\left[a(L-l-a)\omega^2 + g(l+a)\right]\sin\omega t.$$

Будем полагать, что $\cos^2\omega t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t) \approx \frac{1}{2}$, и уравнение колебаний маятника представим в форме

$$\ddot{\vartheta} + 2\xi\omega_0\dot{\vartheta} + N\omega_0^2\,\vartheta = \frac{M_0}{J_A}\gamma_м \sin\omega t, \qquad (4.253)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{22} + mg(l+2)}{J_A}}$ – собственная частота колебаний маятника; $\varepsilon = k_{д\vartheta}/(2J_A\omega_0)$ – относительный коэффициент демпфирования; $N = 1 - \frac{ma^2(\gamma_м\omega)^2}{2[k_{22} + mg(l+a)]}$;

$$M_0 = -mg(l+a)\left[1 + \frac{a(L-l-a)\omega^2}{g(l+a)}\right].$$

В уравнении (4.253) для частот $\omega_0 \geq \omega$ коэффициент $N \approx 1$ и $-\sin\omega t = \cos(\omega t + 90°)$. Уравнение (4.253) перепишем в виде

$$\ddot{\vartheta} + 2\xi\omega_0\dot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = \frac{M_0}{J_A}\gamma_м \cos\left(\omega t + 90°\right). \qquad (4.254)$$

Так как собственное движение маятника при наличии демпфирования быстро затухает, найдем вынужденное движение маятника, описываемое частным решением уравнения (4.254) аналогично подразд. 4.8.1:

$$\vartheta = A\cos\left[(\omega t - \varphi) + 90°\right] = -A\sin(\omega t - \varphi) \ ,$$

где

$$A = \frac{M_0\gamma_0}{J_A\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_0^2}}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (4.255)$$

Отношение величины A к так называемой равновесной амплитуде $A_0 = (M_0\gamma_м)/[k_{22} + mg(l+a)]$, которая в рассматриваемом случае представляет собой статическую деформацию упругого подвеса маятника под действием максимального момента M_0 при наклоне основания на угол $\gamma_м$, определяет коэффициент динамичности:

$$\beta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\xi^2\eta^2}}, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}. \qquad (4.256)$$

Фазовый сдвиг колебаний маятника относительно колебаний основания в функции от отношения частот:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}. \tag{4.257}$$

Амплитуда колебаний маятника в функции от безразмерной частоты находится по выражению:

$$A = \frac{-mg(l+a)\left[1+\frac{a(L-l-a)(\omega_0\eta)^2}{g(l+a)}\right]\gamma_\text{м}}{J_A\,\omega_0^2\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\xi^2\eta^2}}. \tag{4.258}$$

Пример 4.18

Вычислим амплитуды колебаний ЦМ маятника и его фазовое запаздывание для значений $L = 0$ и 1 м при частотах угловых колебаний основания $\omega = 1$ (6,28 1/с), 2 (12,56 1/с) и 3 Гц (18,84 1/с) и амплитуде $\gamma_\text{м} = 8° = 0{,}139$ рад.

Параметры маятника: $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг, $l + a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2; $k_{22} = 4{,}4 \cdot 10^{-4}$ Н·м; $J_A = 7{,}093 \cdot 10^{-9}$ кг·м^2; $k_{\text{д}\vartheta} = 49{,}93 \cdot 10^{-6}$ Н·м·с, число упругих балок 3.

Получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k_{22}+mg(l+a)}{J_A}} = 431{,}28 \text{ 1/с (68,67 Гц)}; \qquad \xi = k_{\text{д}\vartheta}/(2J_A\omega_0) = 8{,}16.$$

Статическая амплитуда $A_0 = \dfrac{mg(l+a)\gamma_\text{м}}{J_A\omega_0^2} = 5{,}15'$.

Результаты вычислений по формулам (4.257), (4.258) приведены в таблице.

Параметр	L, м	ω = 6,28 1/с (1 Гц)	ω = 12,56 1/с (2 Гц)	ω =18,84 1/с (3 Гц)
Амплитуда A, ′	0	4,96	4,40	4,15
	1	22,17	68,55	133,61
Фаза φ, °	0…1	13,3	25,3	35,3

Из полученных результатов следует, что маятник при $L = 0$ не успевает отслеживать колебания основания и амплитуды его колебаний меньше статической амплитуды ($A < A_0$). При $L \neq 0$ инерционные силы, действующие на маятник, вследствие колебаний основания, приводят к резкому возрастанию амплитуды его колебаний ($A >> A_0$).

Поступая аналогичным образом, оценим влияние линейной вибрации основания на маятник. Предположим, что, как и в рассмотренных случаях, $\gamma_0 = 270°$, а угловая вибрация отсутствует ($\gamma = 0$). Уравнение (4.247) с учетом выражений (4.23) принимает вид

$$J_A\ddot{\vartheta} + k_{\text{д}\vartheta}\dot{\vartheta} + \left[k_{22} + mg(l+a)\right]\vartheta = -m\ddot{x}_\text{в}(l+a). \tag{4.259}$$

Предположим, что линейная вибрация описывается функцией $x_в = x_{в0}\sin(\omega t)$ ($x_{в0}$, ω – амплитуда и частота вибрации), и уравнение (4.259) представим следующим образом:

$$\ddot{\vartheta} + 2\xi\omega_0\dot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = \frac{F}{J_A}x_{в0}\cos\left(\omega t - 90^\circ\right), \tag{4.260}$$

где $F = m\omega^2(l + a)$, а собственная частота колебаний и относительный коэффициент демпфирования те же, что и в уравнении (4.253).

Как и в предыдущем случае, вынужденное движение представляет собой гармонические колебания с фазовым запаздыванием, где амплитуда и фаза определяются выражениями

$$A = \frac{m(l + a)\eta^2 x_{в0}}{J_A\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\xi^2\eta}}; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2}, \qquad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{4.261}$$

Имея в виду, что равновесная амплитуда вычисляется по формуле

$$A_0 = \frac{m\left(\eta\omega_0^2\right)^2(l + a)x_{в0}}{k_{22} + mg(l + a)}, \tag{4.262}$$

коэффициент динамичности находится по формуле (4.256).

Пример 4.19

Вычислим амплитуду колебаний центра масс маятника с параметрами из предыдущего примера при действии линейной вибрации: $x_{в0} = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $\omega = 200 \cdot 6{,}28$ 1/с (200 Гц).

Имеем $\eta = 200/68{,}87 = 2{,}91$, по формуле (4.262) для трех упругих балок подвеса найдем $A_0 = 0{,}85 \cdot 10^{-2}$ м. По формуле (4.256) определим коэффициент динамичности $\beta = 0{,}021$ и амплитуду колебаний ЦМ $A = A_0\beta = 17{,}8 \cdot 10^{-5}$ м.

В соответствии с известными результатами теории колебаний, при одновременном воздействии на маятник угловой и линейной вибрации движение маятника будет представлять собой низкочастотные колебания, на которые наложены высокочастотные или, иначе, высокочастотные колебания модулируются низкочастотными. Данное положение иллюстрируется рис. 4.23, на котором приведены результаты интегрирования системы уравнений (4.22) для параметров мятника по примеру 4.3: $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг, $J_c = 1{,}775 \times \times 10^{-9}$ кг·м², $l = 805 \cdot 10^{-6}$ м, $a = 4281{,}25 \cdot 10^{-6}$ м, $L = 0$, $k_{ду} = k_{д\vartheta} = 0$; $k_{11} = 2{,}036 \cdot 10^3$ Н/м, $k_{12} = k_{21} = -0{,}819$ Н, $k_{22} = 4{,}389 \cdot 10^{-4}$ Н·м; число упругих балок 3; угол установки акселерометра $\gamma_0 = 90^\circ$; угловая вибрация, град, $\gamma = \frac{8}{57{,}3^\circ}\sin(6{,}28\,t)$; линейная вибрация, м, $x_в = 10^{-3}\sin(50 \cdot 6{,}28\,t)$.

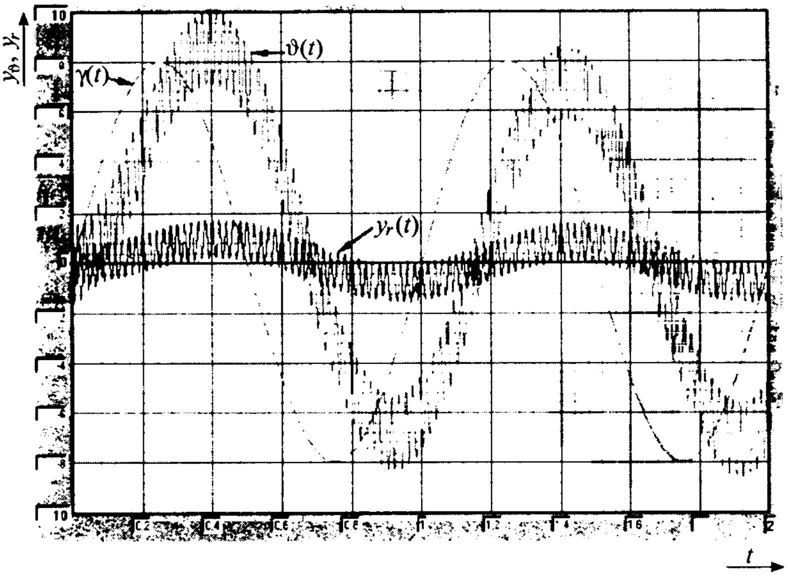


Рис. 4.23. Зависимости $\vartheta = f(t)$ и $y_r = f(t)$ для маятника, установленного на основании, совершающем низкочастотные угловые и высокочастотные линейные и вибрационные колебания (оцифровка вертикальной оси для графика возмущения дана в градусах, для графика углового перемещения – в угловых минутах, для графика линейного перемещения – в микрометрах)

Как следует из рис. 4.23, линейная вибрация привела к появлению составляющей, которая наложена на низкочастотный процесс угловых колебаний основания. Если измеряются именно угловые колебания основания, то вибрационная составляющая информативного параметра ϑ является "шумом", который должен быть отфильтрован в блоке электроники. Если же измеряется линейная вибрация, то помехой является составляющая, которая в данном случае должна быть устранена в блоке фильтрации.

4.9.2. Микроакселерометр на поступательно перемещающемся основании

В предположении, что основание, на котором установлен акселерометр, перемещается поступательно с постоянным ускорением u, и что в уравнениях (4.22) и выражениях (4.23) $x_в = y_в = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{y}_r + ma\ddot{\vartheta} + k_{11}y_r + k_{12}\vartheta + k_{ду}\dot{y}_r + \frac{k_{д\vartheta}}{a}\dot{\vartheta} = m(u \mp g); \\ & J_A\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r + k_{21}y_r + k_{22}\vartheta + k_{ду}a\dot{y}_r + k_{д\vartheta}\dot{\vartheta} = m(u \mp g)(l + a); \end{aligned}\right\} \qquad (4.263)$$

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{y}_r + ma\ddot{\vartheta} + k_{11}y_r + (k_{12} \mp mg)\vartheta + k_{\text{ду}}\dot{y}_r + \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{a}\dot{\vartheta} = mu; \\ &J_A\ddot{\vartheta} + ma\ddot{y}_r + k_{21}y_r + \left[k_{22}\dot{\vartheta} \mp mg(l+a)\right]\vartheta + k_{\text{ду}}a\dot{y}_r + k_{\text{д}\vartheta}\dot{\vartheta} = mu(l+a). \end{aligned}\right\} \quad (4.264)$$

В уравнениях (4.263) знак "–" в скобках соответствует углам $\gamma_0 = 0°$, $\beta = 90°$, а знак "+" – углам $\gamma_0 = 180°$, $\beta = 270°$. В уравнениях (4.264) знак "–" в скобках отвечает углам $\gamma_0 = 90°$, $\beta = 180°$, а знак "+" – углам $\gamma_0 = 270°$, $\beta = 0°$.

Принятый выбор знаков соответствует изменению угла ϑ под действием силы *mu* в положительном (против часовой стрелки) направлении (см. рис. 4.2).

После затухания собственных колебаний маятника значения установившихся углов ϑ могут быть определены из систем:

$$\left.\begin{aligned} &k_{11}y_r + k_{12}\vartheta = m(u \mp g); \\ &k_{21}y_r + k_{22}\vartheta = m(u \mp g)(l+a); \end{aligned}\right\} \quad (4.265)$$

$$\left.\begin{aligned} &k_{11}y_r + (k_{12} \mp mg)\vartheta = mu; \\ &k_{21}y_r + \left[k_{22} \mp mg(l+a)\right]\vartheta = mu(l+a). \end{aligned}\right\} \quad (4.266)$$

Из системы (4.265) следуют выражения для угла отклонений маятника при действии вертикального ускорения:

$$\vartheta = \frac{m(u \mp \mathrm{g})\left[k_{11}(l+a) - k_{21}\right]}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}. \quad (4.267)$$

При действии горизонтальных ускорений установившиеся углы отклонений маятника, полученные из системы (4.266), определяются выражением

$$\vartheta = \frac{mu\left[k_{11}(l+a) - k_{21}\right]}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2 + mg\left[\pm k_{21} \mp k_{11}(l+a)\right]}, \quad (4.268)$$

где верхние знаки в квадратных скобках соответствуют углам $\gamma_0 = 90°$, $\beta = 180°$, а нижние – углам $\gamma_0 = 270°$, $\beta = 0°$.

Если известно предельное значение угла поворота маятника $\vartheta_{\max}$, ограниченное прочностью упругого подвеса или конструктивными особенностями, то максимально измеряемое ускорение можно определить по зависимостям, которые следуют из формул (4.267) и (4.268):

$$u_{\max} = K\vartheta_{\max} \pm g, \quad (4.269)$$

$$u_{\max} = \vartheta_{\max}(K \mp g), \quad (4.270)$$

где $K = \dfrac{n\left(k_{11}k_{22} - k_{12}^2\right)}{m\left[k_{11}(l+a) - k_{21}\right]}$; *n* – число упругих балок подвеса.

В формуле (4.269) знак "+" перед величиной g соответствует углам $\gamma_0 = 0°$, $\beta = 90°$, а знак "–" – углам $\gamma_0 = 180°$, $\beta = 270°$. В формуле (4.270) знак "+" соответствует углам $\gamma_0 = 90°$, $\beta = 180°$, а знак "–" – углам $\gamma_0 = 270°$, $\beta = 0°$.

Пример 4.20

Рассчитаем максимальные значения ускорений, которые могут быть измерены акселерометром для углов $\gamma_0 = 0$, 90, 180 и 270° с ЧЭ, имеющем параметры: $a_м = 9\cdot10^{-3}$ м, $b_м = 10^{-2}$ м, $c_м = 0{,}35\cdot10^{-3}$ м, $\rho = 2{,}33\cdot10^3$ кг/м^3, $m = 0{,}075\cdot10^{-3}$ кг, $l + a = 5\cdot10^{-3}$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2, $h = (20...21)10^{-6}$ м, $n = 3$; $k_{11} = 2{,}036\cdot10^3$ Н/м, $k_{12} = k_{21} = -0{,}819$ Н, $k_{22} = 4{,}398\cdot10^{-4}$ Н·м.

Вычислим $\vartheta_{\max} = \dfrac{h}{a_м} = 2{,}32\cdot10^{-3}$ рад (8′).

Результаты расчетов по формулам (4.269), (4.270) сведем в таблицу:

Параметр	Положение маятника и векторов $\bar{u}$ и $\bar{g}$			
	$\gamma_0 = 0°$, $\beta = 90°$	$\gamma_0 = 180°$, $\beta = 270°$	$\gamma_0 = 90°$, $\beta = 180°$	$\gamma_0 = 270°$, $\beta = 0°$
$u_{\max}$, м/с^2	11,70	7,92	8,36	8,50

Очевидно, при изменении направления вектора $\bar{u}$ для случаев $\gamma_0 = 90$ и 270° модуль выходного сигнала, пропорционального $u_{\max}$, не изменится.

4.9.3. Первая и вторая формы колебаний маятникового ЧЭ на вибрирующем основании

В работе [22] приведены условия, при которых изменяется форма колебаний (см. подразд. 3.1.1, Б) маятника на упругом подвесе. На рис. 4.24 показана расчетная схема ЧЭ, где обозначены: ЦМ (точки C), крайние точки A и B пластины и произвольная точка E, координата которой определяется равенством

$$y_E = y_A + e\vartheta\,. \tag{4.271}$$

Воспользуемся системой уравнений (4.22) и положим для определенности $\gamma_0 = 270°$ (прямой маятник). В этом случае для измеряемой горизонтальной вибрации $x_в = A\cos\omega t$ (A, ω – амплитуда и частота вибрации), имея в виду, что $y_r = y_A$ (переобозначение координаты), система (4.22) принимает вид ($n = 1$)

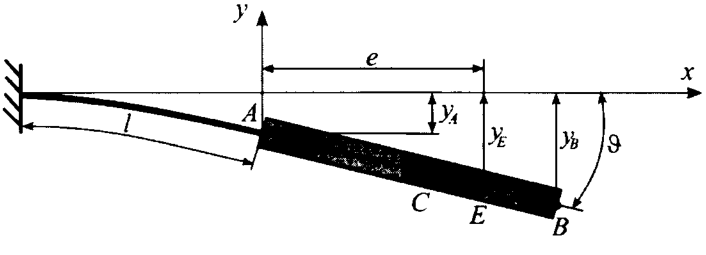


Рис. 4.24. Расчетная схема

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{y}_A + ma\ddot{\vartheta} + k_{11}y_A + (k_{12} + mg)\vartheta + k_{\text{ду}}\dot{y}_A + \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{a}\dot{\vartheta} = b\frac{\cos\omega t}{a}; \\ &J_A\ddot{\vartheta} + ma\dot{y}_A + k_{21}y_A + (k_{22} + mga)\vartheta + k_{\text{ду}}a\dot{y}_A + k_{\text{д}\vartheta}\dot{\vartheta} = b\cos\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{4.272}$$

где $b = maA\omega^2$.

Решение системы (4.272) для точки A запишем в виде выражений

$$y_A = C_A\cos(\omega t + \varphi_A - \pi/2); \quad \vartheta = C_\vartheta\cos(\omega t + \varphi_\vartheta - \pi/2), \tag{4.273}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &C_A = \pm\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_3^2}\,/\Delta;\ C_\vartheta = \pm\sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_4^2}\,/\Delta;\ \varphi_A = \operatorname{arctg}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}; \varphi_\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\Delta_4}{\Delta_2}; \\ &\Delta = (a_1a_4 - a_2a_3)^2 + (a_1a_5 - a_2a_6)^2;\ \Delta_1 = b(a_2^2a_5 - a_1a_2a_6); \\ &\Delta_2 = b(a_1a_2a_5 - a_1^2a_6);\ \Delta_3 = b(a_1a_2a_4 - a_2^2a_3);\ \Delta_4 = b(a_1^2a_4 - a_1a_2a_3); \\ &a_1 = k_{11}a - k_{12};\ a_2 = k_{12}a - k_{22} + J_\text{c}\omega^2;\ a_3 = k_{21} - ma\omega^2; \\ &a_4 = mga - J_\text{c}\omega^2 + k_{22};\ a_5 = -k_{\text{ду}}a\omega;\ a_6 = -k_{\text{д}\vartheta}\,\omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.274}$$

Частота, при которой амплитуда колебаний точки A равна нулю, определяется выражением

$$\omega_A = \sqrt{(k_{22} - k_{12}a)/J_\text{c}}\,. \tag{4.275}$$

Так как $\Delta > 0$ при любой частоте $\omega > 0$, то с учетом выражений (4.273) можно заключить, что при переходе частоты через значение ω_A амплитуды A_y, B_y меняют свой знак, поскольку выражения Δ_1, Δ_3 также его меняют. Таким образом, полагая $C_A \geq 0$, при любом $\omega > 0$ полученные выражения запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &C_A = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_3^2}\,/\Delta \text{ при } \omega > 0;\ \varphi_A = \operatorname{arctg}\frac{\Delta_3}{\Delta_1} \text{ при } \omega < \omega_A; \\ &\varphi_A = \operatorname{arctg}\frac{\Delta_3}{\Delta_1} + \pi \text{ при } \omega > \omega_A\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.276}$$

Рассуждая аналогично, заключаем, что амплитуда углового движения $C_\vartheta \neq 0$ при любой частоте $\omega > 0$, так как уравнения $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_4 = 0$ не имеют общих корней. Отсюда следует, что фаза углового движения изменяется без скачков. Следовательно, справедливы следующие выражения:

$$C_\vartheta = \sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_4^2}\,/\Delta; \qquad \varphi_A = \operatorname{arctg}\frac{\Delta_4}{\Delta_2}\,. \tag{4.277}$$

Подставим далее выражения (4.273) в равенство (4.271) и получим равенство

$$y_E = C_A \sin(\omega t + \varphi_A) + eC_э \sin(\omega t + \varphi_э) = C_E \sin(\omega t + \varphi_E) = C_E \cos\left(\omega t + \varphi_E - \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.278}$$

Воспользовавшись известной формулой для сложения колебаний, запишем выражение для амплитуды:

$$C_E = \sqrt{(eC_э)^2 + C_A^2 + 2eC_A C_э \cos(\varphi_A - \varphi_э)}\,.$$

Так как $\varphi_A = \varphi_э$ при $\omega < \omega_A$ и $\varphi_A = \varphi_э - \pi$ при $\omega > \omega_A$, получим

$$\left.\begin{aligned} &C_E = C_A + eC_э \ \text{ при } \omega < \omega_A; \quad C_E = |\,C_A - eC_э\,| \text{ при } \omega > \omega_A;\\ &\varphi_E = \varphi_э \ \text{ при } C_A > eC_э; \quad \varphi_E = \varphi_э + \pi \ \text{ при } C_A < eC_э\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.279}$$

Получим величину частоты ω_E, при которой амплитуда колебаний точки E равна 0. Имеем равенства:

$$C_E = C_A - eC_э$$

или

$$\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_3^2}\,/\,\Delta = e\sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_4^2}\,/\,\Delta\,,$$

откуда

$$\omega_E = \sqrt{\frac{eak_{11} + k_{22} - (a+e)k_{12}}{J}}\,. \tag{4.280}$$

Из формулы (4.280) при $e = 0$ следует формула (4.275).

Из выражения (4.280) найдем координату $e_ц$ точки $E_ц$, амплитуда которой равна нулю при частоте возмущения ω:

$$e_ц = \frac{k_{12}q - k_{22} + J_c\omega^2}{k_{11}q - k_{12}}\,. \tag{4.281}$$

Точку $E_ц$ можно назвать центром колебаний, относительно которого маятник совершает угловые движения. Движение точки B (см. рис. 4.24) описывается выражением

$$y_B = C_B \sin(\omega t + \varphi_B) = C_B \cos\left(\omega t + \varphi_B - \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.282}$$

Воспользуемся равенствами (4.279), (4.280) и при $e = 2a$ получим

$$\left.\begin{array}{l} C_B = C_A + 2aC_\vartheta \text{ при } \omega > \omega_A;\; C_B = \left|C_A - 2aC_\vartheta\right| \text{ при } \omega < \omega_A; \\ \varphi_B = \varphi_\vartheta \text{ при } \omega < \omega_B;\quad \varphi_B = \varphi_\vartheta + \pi \text{ при } \omega < \omega_B; \\ \omega_B = \sqrt{\dfrac{2a^2k_{11} + k_{22} - 3k_{12}q}{J_\text{c}}}. \end{array}\right\} \qquad (4.283)$$

Положив $e = a$, аналогично получим выражения для описания движения ЦМ точки C пластины:

$$y_\text{c} = C_\text{c}\sin(\omega t + \varphi_\text{c}) = C_\text{c}\cos\left(\omega t + \varphi_\text{c} - \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$\left.\begin{array}{l} C_\text{c} = C_A + aC_\vartheta \text{ при } \omega > \omega_A;\; C_\text{c} = \left|C_A - aC_\vartheta\right| \text{ при } \omega < \omega_A; \\ \varphi_\text{c} = \varphi_\vartheta \text{ при } \omega < \omega_\text{c};\quad \varphi_\text{c} = \varphi_\vartheta + \pi \text{ при } \omega > \omega_\text{c}; \\ \omega_\text{c} = \sqrt{\dfrac{a^2k_{11} + k_{22} - 2k_{12}a}{J_\text{c}}}. \end{array}\right\} \qquad (4.284)$$

Пример 4.21

Вычислим значения частот, для которых амплитуда колебаний точек A, C, B (см. рис. 4.24) пластины равна 0, а фаза меняет значение на $\pi/2$ для параметров акселерометра по примеру 4.3. Воспользуемся формулами (4.275), (4.283) и (4.284) и получим: для точки A ($e = 0$) $\omega_A = 413$ Гц, для точки C ($e = a$) $\omega_\text{c} = 1380$ Гц, для точки B ($e = 2a$) $\omega = 1917$ Гц. Воспользуемся формулой (4.281) и построим график (рис. 4.25) зависимости положения центра колебания пластины от частоты возмущения (вдоль ординат условно изображена пластина-маятник).

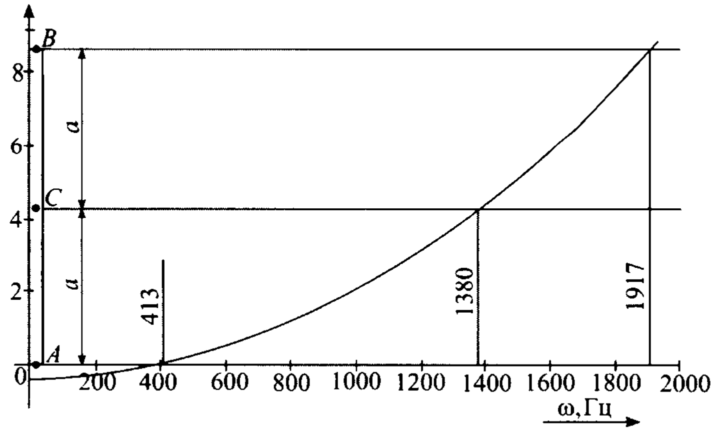


Рис. 4.25. К определению положения центра колебаний

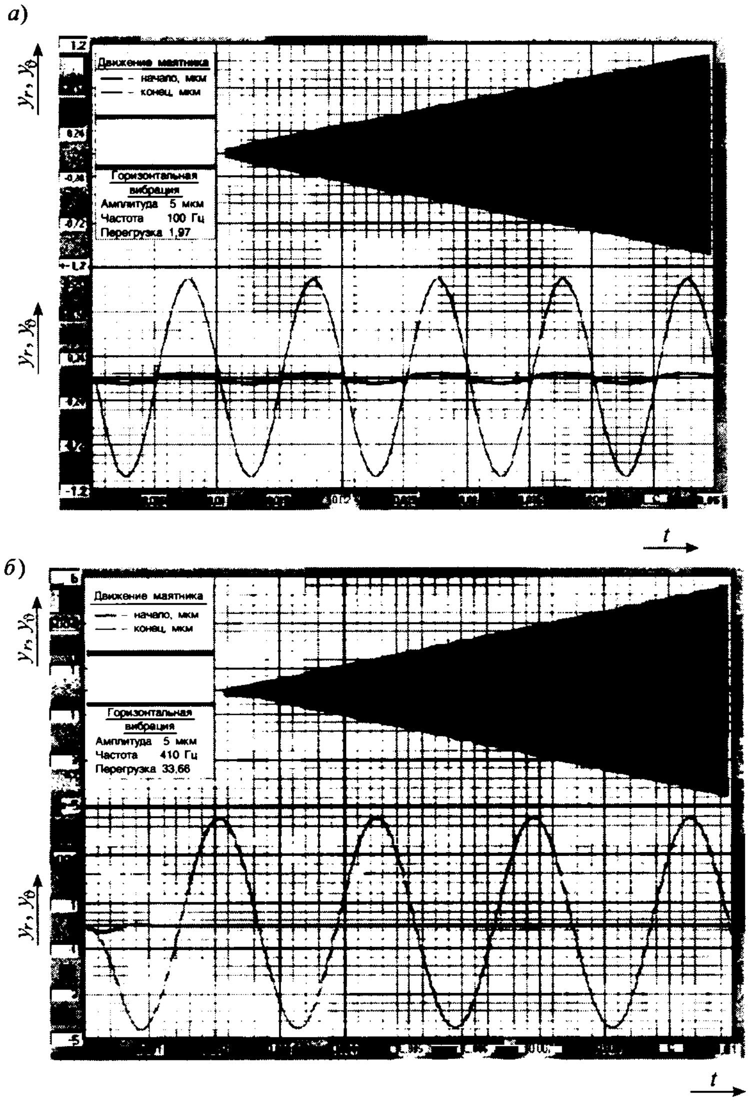


Рис. 4.26. Первые главные формы колебаний маятника
(варианты *а* и *б* отличаются параметрами вибрации)

На рис. 4.26...4.28 приведены результаты численного интегрирования уравнений (4.22) для установки акселерометра, соответствующей углу $\gamma_0 = 270°$ при отсутствии угловой вибрации ($\gamma = 0$). На маятник действует только горизонтальная вибрация $\left(x_\text{в} \neq 0\right)$, амплитуда которой $5 \cdot 10^{-6}$ м на всем диапазоне частот. Параметры акселерометра взяты из примера 4.3. Предполагается, что пластина имеет 50 % перфорации от общей площади.

На рис. 4.26...4.28 в нижней части толстой линией показаны линейные перемещения точки *А* (см. рис. 4.24), $y_r = y_A$, а тонкой линией – линейные перемещения крайней точки пластины $y_\vartheta = a_\text{м}\vartheta = y_\text{в}$.

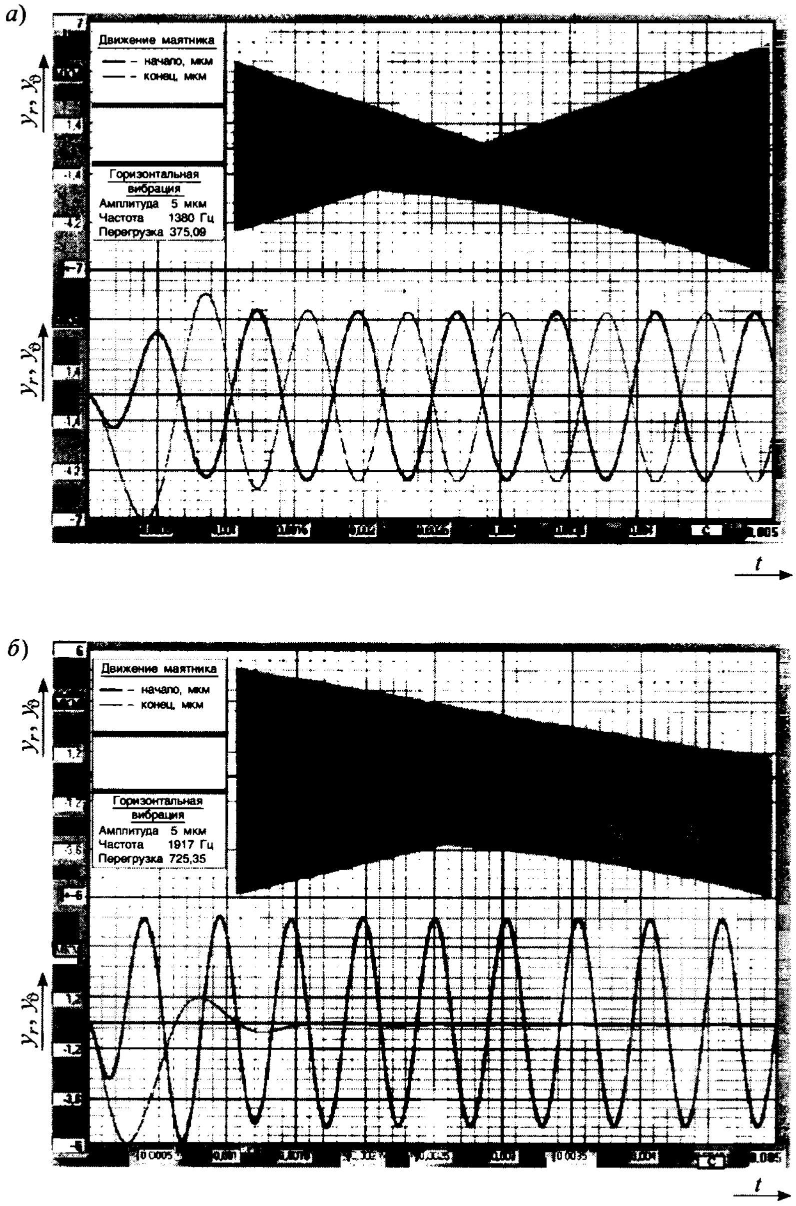


Рис. 4.27. Вторые главные формы колебаний маятника
(варианты *а* и *б* отличаются параметрами вибрации)

В верхней части рисунков светлый фон – это площадь, "ометаемая" пластиной маятника, темный – площадь, "ометаемая" пластиной маятника после затухания собственных колебаний.

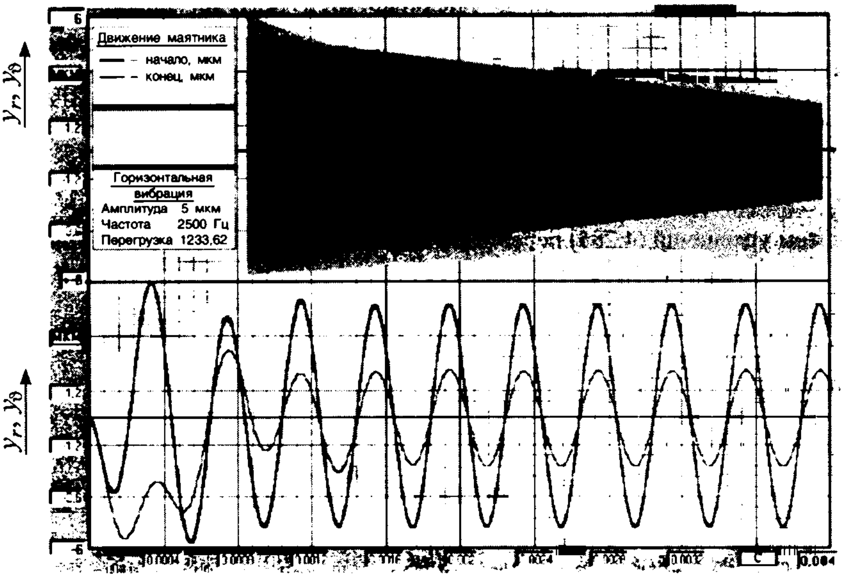


Рис. 4.28. Вторая главная форма колебаний маятника

На основании полученных результатов следуют такие выводы:

- движение пластины-маятника можно рассматривать как угловое движение относительно центра колебаний [формула (4.281)];
- для любой точки на пластине существует частота возмущения [формула (4.280)], при которой амплитуда этой точки равна 0, а фаза изменяется на 180° (если против этой точки располагается датчик перемещений, то сигнал с него будет близок к нулевому);
- на частотах возмущения, меньших ω_A, центр колебания находится вне пластины, со стороны упругого подвеса (см. рис. 4.25 и 4.26, *а*), а фазы линейных и угловых движений совпадают;
- на частоте возмущения $\omega = \omega_A$ центр колебаний совпадает с точкой *A*, амплитуда ее колебаний нулевая, а фаза движения точки *A* претерпевает скачок на 180° (см. рис. 4.25 и 4.26, *б*);
- на частотах возмущения от ω_A [формула (4.275)] до ω_B [формулы (4.283)] центр колебаний расположен на пластине. На этих частотах точки пластины между упругим подвесом и центром колебаний движутся в противофазе с угловым движением, а точка между центром колебаний и концом пластины (точка *B*) – в одной фазе с угловым движением (рис. 4.25 и 4.27);
- на частоте возмущения $\omega = \omega_B$ центр колебаний совпадает с точкой *B* (см. рис. 4.27, *б*). Ее амплитуда равна нулю, а фаза движения изменяется на 180°;
- на частотах возмущения $\omega > \omega_B$ (см. рис. 4.28) центр колебаний находится за свободным концом пластины. На этих частотах все точки пластины колеблются в противофазе с ее угловым движением.

4.10. ДИНАМИКА ЧЭ МИКРОДАТЧИКА ДАВЛЕНИЙ

Оценим амплитудные и фазовые характеристики МДД по линейной координате при $l_x = l_z = 0$ на основе анализа первого уравнения системы (4.78), полагая, что линейная вибрация и давление определяются функциями

$$y_{\text{в}} = y_{\text{в}0} \cos\omega_1 t; \quad F_{\text{д}} = F_{\text{д}0} \cos\omega_2 t; \tag{4.285}$$

где $y_{\text{в}0}$, $F_{\text{д}0}$ – амплитудные значения вибрации и давления; ω_1, ω_2 – частоты.

С учетом уравнений (4.285) перепишем первое уравнение системы (4.78):

$$m\ddot{y} + k_{\text{д}y}\dot{y} + G_y y = m(u-g) + m y_{\text{в}0}\omega_1^2 \cos\omega_1 t + F_{\text{д}0}\cos\omega_2 t, \tag{4.286}$$

которое представим в виде

$$\ddot{y} + 2\xi_{\text{д}y}\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = (u-g) + \frac{F_{\text{в}0}}{m}\cos\omega_1 t + \frac{F_{\text{д}0}}{m}\cos\omega_2 t, \tag{4.287}$$

где $F_{\text{в}0} = m y_{\text{в}0}\omega_1^2; \omega_0 = \sqrt{G_y / m}; \xi_{\text{д}y} = k_{\text{д}y} / (2\sqrt{mG_y})$.

Очевидно, что при $F_{\text{д}0} = 0$ уравнение (4.286) описывает динамику ЧЭ осевого МА.

Отметим вначале, что сила $m(u-g)$ вызывает статическое смещение жесткого центра мембраны МДД:

$$y_{\text{ст}} = m(u-g)/G_y; \tag{4.288}$$

относительно него и будут происходить его вынужденные колебания, обусловленные гармоническим изменением измеряемого давления на фоне вибрационных колебаний основания.

Решение уравнения (4.287) с учетом формулы (4.288), определяемое его правой частью, имеет вид

$$y = m(u-g)/G_y - \left[A_1\sin(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2\sin(\omega_2 t - \varphi_2)\right], \tag{4.289}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{F_{\text{в}0}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\xi_{\text{д}y}^2\omega_1^2\omega_0^2}}; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{2\xi_{\text{д}y}\omega_1\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}; \\ A_2 &= \frac{F_{\text{д}0}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\xi_{\text{д}y}^2\omega_2^2\omega_0^2}}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{2\xi_{\text{д}y}\omega_2\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.290}$$

В соответствии с решением уравнения (4.289) вынужденное движение ЧЭ датчика давления представляет собой гармонические колебания с частотой измеряемого давления ω_2 на фоне вибрационной помехи частоты ω_1 относительно смещенного положения жесткого центра мембраны.

Введем в рассмотрение равновесные амплитуды

$$A_{10}=F_{\text{в}0}/G_y;\quad A_{20}=F_{\text{д}0}/G_y$$

и запишем отношения амплитуд

$$\beta_i=\frac{A_i}{A_{i0}}=1\Big/\sqrt{\left(1-\eta_i^2\right)^2+4\xi_{\text{ду}}^2\eta_i^2}\ ;\ i=1{,}2\,, \tag{4.291}$$

где $\eta_1=\omega_1/\omega_0$, $\eta_2=\omega_2/\omega_0$ – относительные (безразмерные) частоты.

Обратим внимание на то, что выражение (4.291) есть не что иное, как нормированная амплитудная частотная характеристика ЧЭ датчика давления.

Оценим погрешности, вызванные постоянным ускорением и виброускорением. Очевидно, что смещение (4.288) жесткого центра под влиянием силы $m(u-g)$ равноценно действию силы фиктивного давления $\Delta p_\text{ф}$ на площади жесткого центра: $m(u-g)=a_\text{м}b_\text{м}\Delta p_\text{ф}$ или $a_\text{м}b_\text{м}c_\text{м}\rho(u-g)=a_\text{м}b_\text{м}\Delta p_\text{ф}$, откуда $\Delta p_\text{ф}=c_\text{м}\rho(u-g)$. Очевидно, погрешность по отношению к максимальному измеряемому диапазону давлений $\Delta p_{\max}$ определяется выражением

$$\delta_\text{и}=\left[c_\text{м}\rho(u-g)/\Delta p_{\max}\right]100\ \%. \tag{4.292}$$

Пример 4.22

Вычислим относительную погрешность, вносимую ускорением $u=100g$ м/с^2 при измерении давления $\Delta p_{\max}=10^5$ Па. Положим $c_\text{м}=0{,}35\cdot10^{-3}$ м, $\rho=2{,}33\cdot10^3$ кг/м^2 и по формуле (4.292) получим

$$\delta_\text{и}=\frac{0{,}35\cdot10^{-3}\cdot2{,}33\cdot10^3\cdot9{,}8\cdot99}{10^5}100\%=0{,}79\%\,.$$

Определим погрешность, вносимую вибрационным ускорением (виброшумом) основания, при измерении постоянного давления в виде отношения

$$\delta_\text{в}=\left(A_1/A_2\right)100\ \%\,.$$

В соответствии с равенством (4.291) имеем

$$A_1=A_{10}\Big/\sqrt{\left(1-\eta_1^2\right)^2+4\xi_{\text{ду}}^2\eta_1^2}\ ;\qquad A_2=A_{20}\,(\omega_2=0)\,.$$

Следовательно, относительная погрешность равна

$$\delta_\text{в}=\frac{A_{10}}{A_{20}}\frac{100}{\sqrt{\left(1-\eta_1^2\right)^2+4\xi_{\text{ду}}^2\eta_1^2}}=\frac{my_{\text{в}0}\omega_1^2}{\Delta p_{\max}A^2}\beta_1\cdot100\%, \tag{4.293}$$

где коэффициент динамичности β_1 определяется по рис. 4.18, судя по которому максимальная погрешность измерения постоянного давления на фоне виброшума имеет место при $\eta \approx 1$ и, значит, максимальная относительная погрешность для ЧЭ МДД определяется формулой

$$\delta_{\text{в}\max} = \frac{m y_{\text{в}0}\omega_0^2}{2\xi_{\text{ду}}\Delta p_{\max} A^2}100\% . \tag{4.294}$$

Пример 4.23

Вычислим относительную погрешность измерения постоянного давления на фоне виброшума для следующих исходных данных: $p_{\max} = 10^5$ Па , $A = 2\cdot 10^{-2}$ м , $m = 2{,}08\cdot 10^{-4}$ кг, $y_{\text{в}0} = 10^{-3}$ м, $\omega_1 = 6{,}28\cdot 10^2$ 1/с, $\omega_0 = 2{,}73\cdot 10^4$ 1/с. Так как $\omega_1/\omega_0 = 2{,}3\cdot 10^{-2}$, то по рис. 4.18 $\beta \approx 1$ и по формуле (4.293) получим:

$$\delta_{\text{в}} = \frac{2{,}08\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-3}\cdot 6{,}28\cdot 10^4}{10^5\cdot 4\cdot 10^{-4}}100\ \% = 0{,}21\ \% .$$

Максимальную относительную погрешность вычислим для случая, когда из условия прочности кремниевой пластинки виброускорение основания ограничено величиной $y_{\text{в}0}\omega_1^2 = 1000g$. Если предположить, что есть источник вибрации с частотой $\omega_1 = \omega_0$ (резонансный случай), то амплитуда вибрации ограничена значением $y_{\text{в}0} = (1000 \cdot 9{,}8)/(2{,}73 \cdot 10^4)^2 = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$ м. По формуле (4.294) получим

$$\delta_{\text{в}\max} = \frac{2{,}8\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8\cdot 10^3}{2\cdot 0{,}707\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-4}}100\ \% = 4{,}85\ \% .$$

Относительная погрешность измерения переменного по частоте ω_2 давления на фоне виброшума с частотой ω_1 с учетом формулы (4.290) определяется следующим образом:

$$\delta_{\text{в.п}} = \frac{A_1}{A_2}100\% = \frac{m y_{\text{в.о}}\omega_1^2}{\Delta p_{\max} A^2}\sqrt{\frac{\left(1-\eta_2^2\right)^2 + 4\xi_{\text{ду}}^2\eta_2^2}{\left(1-\eta_1^2\right)^2 + 4\xi_{\text{ду}}^2\eta_1^2}}100\ \%. \tag{4.295}$$

Очевидно, максимальная погрешность имеет место при $\omega_1 = \omega_2$:

$$\delta_{\text{в.п}\max} = \frac{m y_{\text{в.о}}\omega_1^2}{\Delta p_{\max} A^2}100\ \% . \tag{4.296}$$

Для значений $\eta_1 << 1$ и $\eta_2 << 1$, что соответствует реальности, величины погрешностей, вычисляемых по формулам (4.295) и (4.296), совпадают.

Анализ динамики ЧЭ осевого МА может быть выполнен на основании решения (4.289) с учетом соотношений (4.290), имея в виду, что $A_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

4.11. ДИНАМИКА ЧЭ МИКРОГИРОСКОПА

Динамику ЧЭ рассмотрим на примере роторного МГ RR-типа, используя уравнения (см. подразд. 4.5.2, Б):

$$J_\alpha\ddot{\alpha} + b_\alpha\dot{\alpha} + G_\alpha\alpha = J_0\dot{\gamma}\Omega_y\,; \tag{4.297}$$

$$J_\beta\ddot{\beta} + b_\beta\dot{\beta} + G_\beta\beta = J_0\dot{\gamma}\Omega_x\,; \tag{4.298}$$

$$J_\gamma\ddot{\gamma} + b_\gamma\dot{\gamma} + G_\gamma\gamma = M_{\text{в}}(t), \tag{4.299}$$

где $M_{\text{в}}(t)$ – вибрационный момент возбуждения первичных колебаний ротора.

Рассмотрим вначале уравнение (4.299) в предположении, что момент вибропривода определяется выражением

$$M_{\text{в}}(t) = M_0\sin(pt), \tag{4.300}$$

где M_0, p – амплитуда и частота момента возбуждения колебаний ротора.

Уравнение (4.299) с учетом равенства (4.300) запишем в форме

$$\ddot{\gamma} + 2\xi_\gamma\omega_{\gamma 0}\dot{\gamma} + \omega_{\gamma 0}^2\gamma = \frac{M_0}{J_\gamma}\sin(pt), \tag{4.301}$$

где $\omega_{\gamma 0} = \sqrt{G_\gamma / J_\gamma}$; $\xi_\gamma = b_\gamma / (2J_\gamma\omega_{\gamma 0})$.

Частное решение уравнения (4.301) имеет вид

$$\gamma = E\sin(pt + \varphi), \tag{4.302}$$

где

$$E = M_0 \Big/ \left(J_\gamma\sqrt{\left(\omega_{\gamma 0}^2 - p^2\right)^2 + 4\xi_\gamma^2 p^2\omega_{\gamma 0}^2} \right); \quad \operatorname{tg}\varphi = -2\xi_\gamma p\,\omega_{\gamma 0} \big/ \left(\omega_{\gamma 0}^2 - p^2\right). \tag{4.303}$$

Условимся, что

$$\omega_{\gamma 0} = \varepsilon\, p\,, \tag{4.304}$$

где ε – коэффициент, определяющий расстройку частоты собственных колебаний ротора относительно частоты возбуждений ротора генератором колебаний.

С учетом равенства (4.304) выражения (4.303) принимают вид

$$E = \frac{M_0}{G_\gamma\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{4\xi_\gamma^2}{\varepsilon^2}}} = M_0 K_\gamma Q_\gamma; \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\xi_\gamma\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}, \tag{4.305}$$

где

$$K_\gamma = \frac{1}{G_\gamma}; \quad Q_\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{4\xi_\gamma^2}{\varepsilon^2}}}. \tag{4.306}$$

При небольшой расстройке $(\varepsilon \to 1)$ имеем

$$\varphi \approx -90^\circ; \quad Q_\gamma = 1/2\xi_\gamma \tag{4.307}$$

и решение (4.302) приобретает форму

$$\gamma \approx \gamma_0 \sin\left(pt - 90^\circ\right) \approx -\gamma_0 \cos\left(\omega_{\gamma p} t\right), \tag{4.308}$$

где

$$\gamma_0 = M_0 K_\gamma Q_\gamma; \quad \omega_{\gamma p} = p = \frac{\omega_{\gamma 0}}{\varepsilon}. \tag{4.309}$$

Учитывая идентичность уравнений (4.297) и (4.298), рассмотрим одно из них, (4.298), которое с учетом выражения (4.208) перепишем в виде

$$\ddot{\beta} + 2\xi_\beta \omega_{\beta 0} \dot{\beta} + \omega_{\beta 0}^2 \beta = \frac{H_0}{J_\beta} \Omega_x \sin\left(\omega_{\gamma p} t\right), \tag{4.310}$$

где $\omega_{\beta 0} = \sqrt{G_\beta / J_\beta}$; $H_0 = J_0 \gamma_0 \omega_{\gamma p}$ – модуль кинетического момента ротора; $\xi_\beta = b_\beta / \left(2 J_\beta \omega_{\beta 0}\right)$.

Модуль кинетического момента может быть представлен иначе. Помня, что для ротора в форме тонкого диска $J_0 \approx C_1 = J_\gamma$, и полагая, что $\omega_{\gamma 0} = \omega_{\gamma p} (\varepsilon \to 1)$, с учетом уравнений (4.309) получим

$$\begin{aligned} H_0 &= J_0 \gamma_0 \omega_{\gamma p} = J_\gamma \gamma_0 \omega_{\gamma 0} = J_\gamma M_0 K_\gamma Q_\gamma \omega_{\gamma 0} = J_\gamma M_0 \frac{1}{G_\gamma} Q_\gamma \omega_{\gamma 0} = \\ &= J_\gamma M_0 \frac{1}{J_\gamma \omega_{\gamma 0}^2} Q_\gamma \omega_{\gamma 0} = \frac{M_0 Q_\gamma}{\omega_{\gamma 0}}. \end{aligned} \tag{4.311}$$

Из выражения (4.311) следует, что кинетический момент увеличивается при уменьшении собственной частоты колебаний гироскопа по координате γ.

Частное решение уравнения (4.310) имеет вид

$$\beta = E_1 \sin\left(\omega_{\gamma p} t + \varphi_1\right), \tag{4.312}$$

где

$$E_1 = \frac{H_0 \Omega_x}{J_\beta \sqrt{\left(\omega_{\beta 0}^2 - \omega_{\gamma p}^2\right)^2 + 4\xi_\beta \omega_{\gamma p}^2 \omega_{\beta 0}^2}}; \quad \mathrm{tg}\varphi_1 = -\frac{2\xi_\beta \omega_{\beta 0} \omega_{\gamma p}}{\omega_{\beta 0}^2 - \omega_{\gamma p}^2}. \tag{4.313}$$

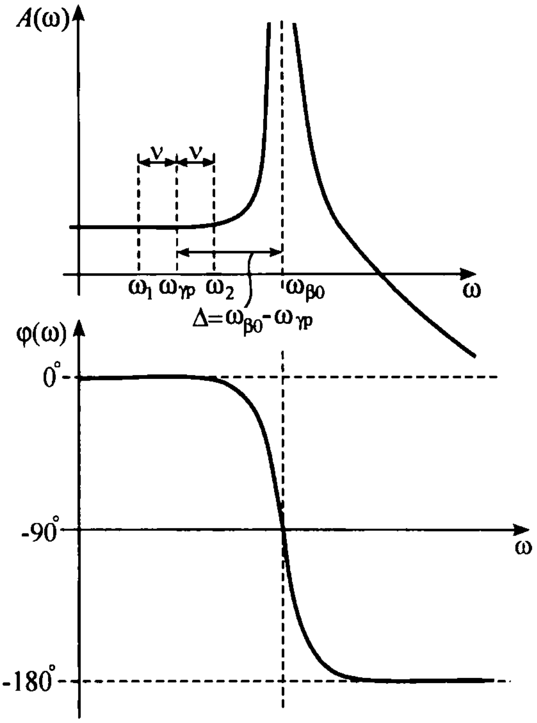


Рис. 4.29. Соотношение частот расстройки режимов колебаний

При резонансной настройке $\omega_{\beta 0} = \omega_{\gamma\text{р}}$, и из формулы (4.313) следует

$$E_1 = \frac{H_0 \Omega_x}{J_\beta 2\xi_\beta \omega_{\beta 0}^2} = K_\beta Q_\beta H_0 \Omega_x \quad \text{при } \varphi_1 = -90°, \tag{4.314}$$

где $K_\beta \approx \dfrac{1}{G_\beta}$; $Q_\beta = \dfrac{1}{2\xi_\beta}$.

Запишем решение уравнения (4.312) с учетом равенства (4.314):

$$\beta = -K_\beta Q_\beta H_0 \Omega_x \cos\left(\omega_{\gamma\text{р}} t\right). \tag{4.315}$$

В соответствии с решением (4.315) колебания ротора в РЧ носят моногармонический характер с частотой $\omega_{\gamma\text{р}}$ и фазовым сдвигом $\varphi_1 = -\pi/2$ по отношению к моменту сил инерции Кориолиса $M_x = H_0 \Omega_x \sin\left(\omega_{\gamma\text{р}} t\right)$ [см. соотношение (4.410)], вызывающему эти колебания. Колебания ротора в РД и РЧ синфазны.

Из решения уравнения (4.315) следует выражение для статического коэффициента передачи по скорости:

$$K_{\text{ст}} = \frac{\beta}{\Omega_x} = K_\beta H_0 Q_\beta = \frac{H_0}{2\xi_\beta G_\beta}. \tag{4.316}$$

Для нерезонансного режима колебаний имеет место расстройка частот (рис. 4.29): $\Delta = \omega_{\beta 0} - \omega_{\gamma p}$.

Для этого случая решение равенства (4.312) принимает вид

$$\beta = E_1 \sin\left[\left(\omega_{\beta 0} - \Delta\right)t + \varphi_1\right] = E_1\left[\sin\left(\omega_{\beta 0} - \Delta\right)\cos\varphi_1 + \cos\left(\omega_{\beta 0} - \Delta\right)\sin\varphi_1\right], \tag{4.317}$$

где

$$E_1 = \frac{H_0 \Omega_x}{J_\beta \sqrt{[(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2]^2 + 4\xi_\beta^2 \omega_{\gamma p}^2 (\omega_{\gamma p} + \Delta)^2}}; \quad \mathrm{tg}\varphi_1 = -\frac{2\xi_\beta(\omega_{\gamma p} + \Delta)\omega_{\gamma p}}{(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2}. \tag{4.318}$$

Запишем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= -\frac{2\xi_\beta(\omega_{\gamma p} + \Delta)\omega_{\gamma p}}{\sqrt{\left[(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2\right] + 4\xi_\beta^2(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 \omega_{\gamma p}^2}}; \\ \cos\varphi_1 &= \frac{(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2}{\sqrt{\left[(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 \omega_{\gamma p}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.319}$$

Перепишем решение (4.317) с учетом выражений (4.318) и (4.319):

$$\begin{aligned} \beta = {} & \frac{H_0 \Omega_x}{J_\beta \left\{\left[(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 \omega_{\gamma p}^2\right\}} \times \\ & \times \left\{\left[(\omega_{\gamma p} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma p}^2\right]\sin(\omega_{\gamma p} - \Delta)t - 2\xi_\beta(\omega_{\gamma p} + \Delta)\omega_{\gamma p}\cos(\omega_{\gamma p} - \Delta)t\right\}. \end{aligned} \tag{4.320}$$

Из выражения (4.320) следует, что колебания по выходной оси МГ имеют две составляющие, первая из которых находится в противофазе с вынужденными колебаниями ротора, а вторая – в фазе с ними. На этом основании первую составляющую колебаний можно назвать квадратурной, а вторую – синфазной.

Чувствительность МГ к измеряемой угловой скорости определяется масштабным коэффициентом:

$$K_\text{м} = \beta / \Omega_y,$$

который равен:

– для синфазной составляющей

$$K_\text{м}^\text{с} = \frac{K}{Д} 2\xi_\beta \omega_{\gamma p}\left(\omega_{\gamma p} + \Delta\right); \tag{4.321}$$

– для квадратурной составляющей

$$K_{\text{м}}^{\text{к}} = \frac{K}{Д}\left[(\omega_{\gamma р} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma р}^2\right], \tag{4.322}$$

где

$$K = H_0 / J_\beta, \quad Д = \left[(\omega_{\gamma р} + \Delta)^2 - \omega_{\gamma р}^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2(\omega_{\gamma р} + \Delta)^2\omega_{\gamma р}^2. \tag{4.323}$$

В соответствии с уравнением (4.317) и с учетом формул (4.321), (4.322) масштабный коэффициент по общей амплитуде и фазовый сдвиг определяются выражениями

$$K_{\text{м}} = \sqrt{\left(K_{\text{м}}^{\text{с}}\right)^2 + \left(K_{\text{м}}^{\text{к}}\right)^2}; \qquad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{K_{\text{м}}^{\text{к}}}{K_{\text{м}}^{\text{с}}}. \tag{4.324}$$

Выполним приближенную оценку зависимостей (4.321)...(4.324). Запишем:

$$Д = \left(2\omega_{\gamma р}\Delta + \Delta^2\right)^2 + \xi_\beta^2\left(\omega_{\gamma р}^2 + 2\omega_{\gamma р}\Delta + \Delta^2\right)^2\omega_{\gamma р}^2 \approx 4\omega_{\gamma р}^2\Delta^2 + 4\xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^4 = 4\omega_{\gamma р}^2\left(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2\right).$$

Формулы (4.321), (4.322) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} K_{\text{м}}^{\text{с}} &= \frac{K \cdot 2\xi_\beta\omega_{\gamma р}(\omega_{\gamma р} + \Delta)}{4\omega_{\gamma р}^2(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2)} \approx \frac{K\xi_\beta}{2(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2)} = \frac{J_0\gamma_0\omega_{\gamma р}\xi_\beta}{2J_\beta(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2)}; \\ K_{\text{м}}^{\text{к}} &= \frac{K(2\omega_{\gamma р}\Delta + \Delta^2)}{4\omega_{\gamma р}^2(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2)} \approx \frac{K\Delta}{2\omega_{\gamma р}(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2)} = \frac{J_0\gamma_0\omega_{\gamma р}\Delta}{2J_\beta\omega_{\gamma р}(\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.325}$$

Если конструкция допускает предположение $J_0 \approx J_\gamma \approx 2J_\beta$, то из выражений (4.325) следуют выражения:

$$K_{\text{м}}^{\text{с}} \approx \frac{\gamma_0\omega_{\gamma р}\xi_\beta}{\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2}; \qquad K_{\text{м}}^{\text{к}} \approx \frac{\gamma_0\Delta}{\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2}. \tag{4.326}$$

Формулы (4.324) принимают вид

$$K_{\text{м}} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_\beta^2\omega_{\gamma р}^2}}; \qquad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\Delta}{\xi_\beta\omega_{\gamma р}}. \tag{4.327}$$

Из соотношений (4.326) ясно, что максимальное значение $K_{\text{м}}^{\text{с}}$ имеет место при $\Delta = 0$:

$$K_{\text{м}\,\max}^{\text{с}} = \gamma_0 / \left(\xi_\beta\omega_{\gamma р}\right). \tag{4.328}$$

Вычислим производную $d(K^{\text{к}}_{\text{м}})/d\Delta$, приравняем ее нулю и получим расстройку $\Delta = \xi_\beta\omega_{\text{ур}}$, при которой значение $K^{\text{к}}_{\text{м}}$ максимально:

$$K^{\text{к}}_{\text{м}\max} = \gamma_0/(2\xi_\beta\omega_{\text{ур}}). \tag{4.329}$$

Из полученных результатов следует, что увеличить масштабный коэффициент, т.е. чувствительность, можно увеличением амплитуды первичных колебаний ротора (РД).

Увеличение расстройки (параметр Δ) и относительного коэффициента демпфирования уменьшает чувствительность гироскопа.

Пример 4.24

Для параметров гироскопа: $\gamma_0 = 1{,}5° = 2{,}62 \cdot 10^{-2}$ рад, $\xi_\beta = 10^{-4}$, $\omega_{\text{ур}} = 3$ кГц $= 1{,}88 \cdot 10^4$ рад/с рассчитаем масштабные коэффициенты и фазовый сдвиг при различных значениях расстройки Δ. Результаты расчетов по формулам (4.426), (4.427) представлены в таблице, в которой приведены также относительная расстройка $\delta = \Delta/\omega_{\text{ур}}$ и отношение $K^{\text{к}}_{\text{м}}/K^{\text{с}}_{\text{м}}$:

Δ, Гц (рад/с)	0	1(6,28)	2(12,56)	3(18,84)	4(25,120)	5(31,4)
$\delta = \Delta/\omega_{\text{ур}}$, %	0	0,033	0,066	0,095	0,132	0,165
$K^{\text{с}}_{\text{м}}$, $1 \cdot 10^{-4}$ рад/(рад/с)	139,0	11,0	3,0	1,4	0,8	0,5
$K^{\text{к}}_{\text{м}}$, $1 \cdot 10^{-4}$ рад/(рад/с)	0	38,0	20,0	13,7	10,3	8,3
$K_{\text{м}}$, $1 \cdot 10^{-4}$ рад/(рад/с)	139,0	39,56	20,22	13,77	10,33	8,32
$K^{\text{к}}_{\text{м}}/K^{\text{с}}_{\text{м}}$	0	3,45	6,66	9,78	12,87	16,6
φ_1, град	0	73,34	81,49	84,3	85,73	86,58

На рис. 4.30 приведены графические зависимости масштабных коэффициентов от значений расстройки.

Из примера следует, что уже при расстройке Δ = 5 Гц (δ = 0,165 %) фазовый сдвиг $\varphi_1 = 86{,}58°$, что приводит к превалированию квадратурной составляющей над синфазной, т.е. выходной сигнал гироскопа практически определяется его квадратурной составляющей.

Изложенный подход может быть использован для исследования динамики ЧЭ МГ других типов.

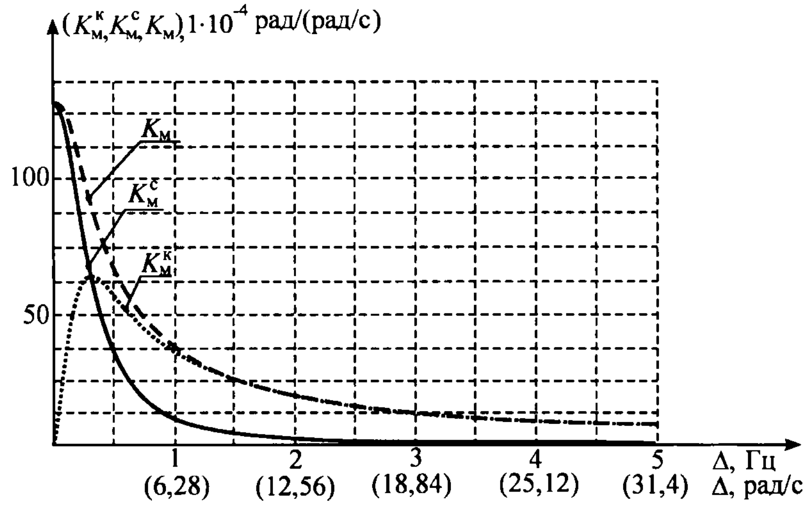


Рис. 4.30. Зависимости масштабных коэффициентов от расстройки

Темы для самоконтроля

1. Системы координат, определяющие положение ЧЭ осевого МА и МДД.
2. Системы координат, определяющие положение ЧЭ маятникового акселерометра.
3. Системы координат, определяющие положение ЧЭ МГ LL-типа.
4. Системы координат, определяющие положение ЧЭ МГ RR-типа.
5. Особенности расчета газового демпфирования МА и МДД.
6. Особенности расчета конструкционного демпфирования МГ.
7. Электростатическая жесткость подвеса.
8. Частотная настройка МГ.
9. Особенности динамики линейных осцилляторов.
10. Влияние кубической жесткости подвеса на динамику осциллятора.
11. Особенности динамики маятникового МА, установленного на вибрирующем основании.
12. Центр колебаний маятника МА и его связь с главными формами колебаний.
13. Нормированные частотные характеристики осцилляторов, коэффициент динамичности, полоса пропускания частот, добротность.
14. Особенности динамики МДД, работающего на вибрирующем основании.
15. Масштабные коэффициенты синфазной и квадратурной составляющих вторичных колебаний МГ.
16. Зависимость масштабного коэффициента от конструктивных параметров МГ.

Глава 5

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

В микромеханических приборах, как и в любых измерительных приборах, измерительный сигнал преобразуется в выходной. Измеряемыми величинами, на основе которых формируется выходной сигнал, являются: ускорение в МА, давление в МДД, угловая скорость в МГ.

Измерения происходят на фоне возмущений, которые сами могут быть объектом измерений.

В процессе измерения в микроприборе возникают собственные движения (собственные колебания), искажающие измеряемый сигнал. В зависимости от соотношения собственных движений и измеряемой величины различают статические и динамические измерения. Статическим называют такой режим измерения, при котором скорость изменения измеряемой величины значительно меньше (по крайней мере, на порядок) скорости собственных движений микроприбора (измерительной системы). Если эти скорости сравнимы, то режим измерения называется динамическим. В микроприборах преобладает статический режим измерений.

Микроприбор с позиции теории измерений представляет собой измерительную цепь, содержащую ЧЭ, первичные и вторичные преобразователи, электронные средства, в которых происходят операции преобразования измерительного сигнала. Важнейшие из них – функции изменения, сравнение, детектирование, модуляция и фильтрация. В микроприборах имеются нелинейные функции преобразования, обусловленные электростатическими и упругими силами подвеса. Конструктивными мерами и электронными средствами необходимо устранять нелинейные функции преобразования.

Измерительная цепь (схема) изображается как последовательность звеньев, в которых происходит то или иное преобразование измерительного сигнала, отображаемое в виде передаточной функции звена.

Звенья в измерительной цепи могут соединяться последовательно, параллельно-согласно (разомкнутые измерительные цепи) либо параллельно-встречно (измерительные цепи с обратной связью).

Измерительный микроприбор может одновременно воспринимать несколько параметров, например МДД – измеряемое давление и вибрационную помеху. Измерительная цепь, соответственно, будет иметь два входа.

Способность микроприбора воспроизводить измеряемые величины с допустимыми погрешностями характеризуется его измерительными свойствами, важнейшие из которых:

- статическая характеристика, представляющая собой функциональную связь между входной и выходной величинами в установившемся режиме. Если функциональная связь линейная, то коэффициент пропорциональности между входной и выходной величинами называют масштабным коэффициентом, или коэффициентом передачи;
- чувствительность, которая представляет отношение приращения выходного сигнала к приращению входного сигнала при стремлении последнего к нулю, т.е. она определяется как производная от статической характеристики по входному сигналу. Чувствительность может быть найдена через передаточную функцию и через частотную характеристику;

- переходный процесс, полоса пропускания частот и частотные искажения измеряемого сигнала, которые имеют равнозначное описание через дифференциальные уравнения системы (звена), передаточную функцию или частотную характеристику, или импульсную передаточную функцию.

5.1. МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРЫ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1.1. Осевой микроакселерометр

Измерение ускорения осевым МА представляет последовательность операций преобразования физических величин, которую в предположении отсутствия перекрестных связей в ЧЭ (см. рис. 4.3) можно изобразить в виде измерительной цепи, схема которой приведена на рис. 5.1.

Величина m ИМ ЧЭ является коэффициентом передачи первого звена, на вход которого поступает измеряемое ускорение u_y–g, а на выходе имеется инерционная сила F. На вход второго звена, передаточная функция которого W_y определяется зависимостью (4.31), подается инерционная сила F, а выходом является перемещение y ИМ, равное изменению Δh первоначального зазора между электродами емкостного датчика (преобразователя) перемещений. Выходной сигнал емкостного дифференциального датчика перемещений с передаточной функцией $W_п$ – это напряжение ΔU, которое затем посредством активного фильтра с передаточной функцией $W_ф$ преобразуется в выходное напряжение $U_{вых}$.

Наиболее просто дифференциальный преобразователь емкостного типа реализуется по рис. 3.16. При этом роль среднего электрода выполняет подвижная пластина (ИМ) МА. Емкости дифференциального измерителя определяются по известным формулам [см. (3.52)]:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h_0 + \Delta h}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{h_0 - \Delta h}. \qquad (5.1)$$

Измерительные цепи МА прямого преобразования, как правило, реализуются на дискретно-аналоговых схемах. Их выбор обусловлен необходимостью совместимости с ЧЭ по массогабаритным и метрологическим характеристикам. Один из вариантов измерительной цепи показан на рис. 5.2.

Конденсаторы C_1 и C_2, включенные последовательно, составляют два плеча мостовой схемы, а роль двух других плеч выполняют двуполярные источники питания $\pm U_{оп}$. Опорное напряжение к емкостному мосту поступает через ключевую

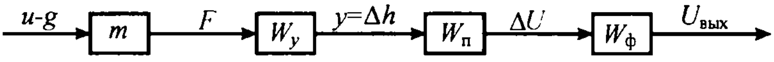


Рис. 5.1. Схема измерительной цепи осевого МА

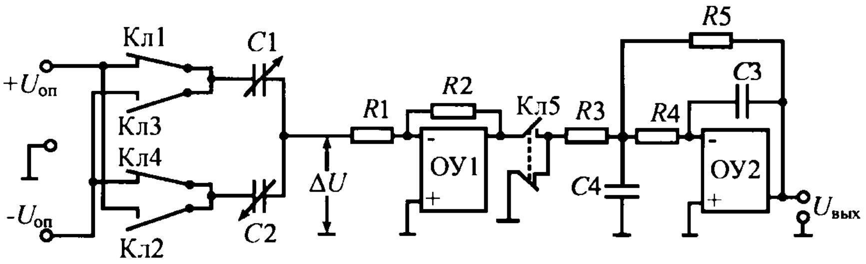
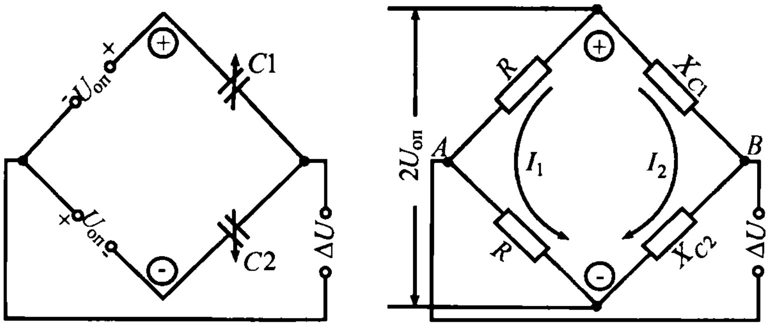


Рис. 5.2. Измерительная цепь осевого МА



а) *б*)

Рис. 5.3. Измерительный мост:
а – схема включений; *б* – эквивалентная схема

схему Кл–Кл4, управляемую специальным тактовым генератором. Выходное напряжение ΔU с измерительного моста подается на инвертирующий повторитель с большим входным сопротивлением на операционном усилителе ОУ1.

Получим выражение для определения ΔU. На рис. 5.3, *а* показана схема измерительного моста, а на рис. 5.3, *б* – эквивалентная схема, на которой обозначены: R – внутреннее сопротивление источника опорного напряжения; $X_{C1} = 1/(C_1\omega)$, $X_{C2} = 1/(C_2\omega)$ – сопротивления емкостей (ω – частота тактового генератора); I_1, I_2 – токи в ветвях мостовой схемы.

Если выбрать резисторы $R_1 = R_2 = 1$ МОм (см. рис. 5.2), то можно считать, что измерительный мост работает без нагрузки. В этом случае перезаряд конденсаторов $C1$ и $C2$ будет осуществляться через малые внутренние сопротивления источников питания R (см. рис. 5.3). Частота напряжения питания $f_п$ измерительного моста выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$t_{пз} << \frac{1}{2f_п},$$

где $t_{пз}$ – время перезаряда конденсаторов.

Тогда выходное напряжение будет иметь форму, близкую к меандру.

В соответствии с рис. 5.3, *б* величина ΔU образуется как разность потенциалов между точками A и B:

$$\Delta U = I_1 R - I_2 X_{C1} = \\ = \frac{2U_{оп}}{2R}R - \frac{2U_{оп}}{X_{C1}+X_{C2}}X_{C1} = \\ = U_{оп}\frac{X_{C2}-X_{C1}}{X_{C1}+X_{C2}} = U_{оп}\frac{C_2-C_1}{C_1+C_2}.$$

С учетом выражений (5.1), получим

$$\Delta U = (U_{оп}\Delta h)/h_0. \qquad (5.2)$$

В соответствии с формулой (5.2) напряжение в измерительной диагонали моста не зависит от частоты генератора, а передаточная функция преобразователя перемещений имеет вид

$$W_п = \frac{\Delta U}{\Delta h} = \frac{U_{оп}}{h_0}. \qquad (5.3)$$

Как отмечалось, напряжение ΔU поступает на инвертирующий повторитель, к выходу которого подсоединен ключ Кл5 синхронного детектора. Управление ключом Кл5 осуществляется прямым сигналом с частотой напряжения питания моста. Преобразование переменного напряжения после синхронного детектора в сигнал $U_{\text{вых}}$ постоянного напряжения реализуется с помощью активного фильтра нижних частот второго порядка.

Подобные фильтры могут быть реализованы разными схемами. Одна из них, показанная на рис. 5.2, построена на операционном усилителе ОУ2 и получила название "структура Рауха". С ее помощью можно реализовать фильтр с малым значением добротности. Увеличение добротности фильтра повышает его избирательные свойства. При этом сужается диапазон частот, в котором осуществляется переход от полосы пропускания частот к полосе задерживания.

Однако с увеличением добротности повышается колебательность переходного процесса в фильтре при скачкообразном воздействии. Подобная ситуация может возникнуть, например, при измерении ускорения катапультируемого объекта, при резком (удар) торможении автомобиля и т.д. В этих случаях нужно использовать фильтр с малой добротностью.

Передаточная функция фильтра второго порядка имеет известный вид:

$$W_{\phi}(s) = K_{\phi} \big/ (T_{\phi}^2 s^2 + 2T_{\phi}\xi_{\phi} s + 1), \quad (5.4)$$

где

$$K_{\phi} = -R_5/R_3\,;\; T_{\phi} = \sqrt{R_4 R_5 C_3 C_4}\,;$$

$$\xi_{\phi} = \frac{C_3\left(R_4 + R_5 + \dfrac{R_4 R_5}{R_3}\right)}{2\sqrt{R_4 R_5 C_3 C_4}}. \quad (5.5)$$

Запишем амплитудно-частотную характеристику фильтра, полагая $s = j\omega$, где ω – круговая частота:

$$A(\omega) = K_{\phi} \Big/ \sqrt{\left(1 - T_{\phi}^2\omega^2\right)^2 + 4T_{\phi}^2\xi_{\phi}^2\omega^2}\,. \quad (5.6)$$

В соответствии с формулой (5.6) амплитуда пульсации выходного сигнала определяется выражением

$$\Delta U_{\text{п}} = K_{\phi} U_{\text{оп}} \Big/ \sqrt{\left(1 - T_{\phi}^2\omega_{\text{г}}^2\right) + 4T_{\phi}^2\xi_{\phi}^2\omega_{\text{г}}^2}\,, \quad (5.7)$$

где $\omega = \omega_{\text{г}}$ – круговая частота тактового генератора.

Исходя из рис. 5.1 и с учетом выражений (4.31), (5.3), (5.4), передаточная функция МА имеет вид

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}}{a_y - g} = $$

$$= \frac{mU_{\text{оп}} K_y K_{\phi}}{h_0 (T_y^2 s^2 + 2\xi_y T_y s + 1)(T_{\phi}^2 s^2 + 2\xi_{\phi} T_{\phi} s + 1)}. \quad (5.8)$$

Из передаточной функции (5.8) при $s = 0$ следует масштабный коэффициент осевого МА, В/(м/с^2):

$$\frac{U_{\text{вых}}}{a_y - g} = \frac{mU_{\text{оп}} K_y K_{\phi}}{h_0}, \quad (5.9)$$

откуда можно определить требуемую величину коэффициента передачи фильтра:

$$K_{\phi} = \frac{U_{\text{вых}} h_0}{mgU_{\text{оп}} K_y}. \quad (5.10)$$

Пример 5.1

Рассчитаем параметры фильтра, обеспечивающие крутизну выходной характеристики $U_{\text{вых}}/u = 1\,B/g$, и значение пульсации выходного сигнала $\Delta U_{\text{п}} \le 10^{-5}$ В для параметров МА:

$m = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг, $h_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ м, $K_y = 6{,}34 \cdot 10^{-4}$ м/Н, $T_y = 3{,}55 \cdot 10^{-4}$ с, $\xi_y = 15{,}28$. Полагая $U_{\text{оп}} = 5$ В, по формуле (5.10) получаем:

$$K_{\phi} = \frac{1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 6{,}34 \cdot 10^{-4}} = 3{,}22\,.$$

Примем $K_{\phi} = 3{,}5$, тогда в соответствии с формулами (5.5) $R_5 = 3{,}5R_3$.

Условимся, что $R_3 = R_4$, и получим зависимость $\xi_{\phi} = 2{,}14\sqrt{C_3/C_4}$. Приняв

$\xi_ф = 0{,}707$, примем $C_3 = 10^{-6}$ Ф и определим $C_4 \approx 9 \cdot 10^{-6}$ Ф. Будем считать $R_3 = R_4 = 10^3$ Ом, тогда $R_5 = 3{,}5 \cdot 10^3$ Ом и $T_ф = 5{,}61 \cdot 10^{-3}$ с ($\omega_ф = 0{,}17 \cdot 10^3$ 1/c $\approx 28{,}38$ Гц). Положим, что $\omega_г = 6{,}28 \cdot 10^5$ 1/c, и получим $\underline{\Delta U_п = 0{,}157 \cdot 10^{-5}\ В < 10^{-5}\ В}$.

Пример 5.2

Рассчитаем частотные характеристики МА с параметрами из предыдущего примера: $m = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг, $U_{оп} = 5$ В, $K_y = 6{,}34 \cdot 10^{-4}$ м/Н, $K_ф = 3{,}5$, $h_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ м, $T_y = 3{,}55 \cdot 10^{-4}$ с, $\xi_y = 15{,}28$, $T_ф = 5{,}61 \cdot 10^{-3}$ с, $\xi_ф = 0{,}707$.

Воспользуемся передаточной функцией (5.8) и запишем

$$W(s) = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 6{,}34 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}5}{20 \cdot 10^{-6}\left[\left(3{,}55 \cdot 10^{-4}\right)^2 s^2 + 2 \cdot 15{,}28 \cdot 3{,}55 \cdot 10^{-4} s + 1\right]\left[\left(5{,}61 \cdot 10^{-3}\right)^2 s^2 + 2 \cdot 0{,}707 \cdot 5{,}61 \cdot 10^{-3} s + 1\right]}.$$

Имея в виду, что выражение в первой квадратной скобке знаменателя имеет два действительных корня, перепишем передаточную функцию следующим образом:

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_ф^2 s^2 + 2 T_ф \xi_ф s + 1)},$$

где $K = 0{,}11$ ($20 \lg K = -19{,}172$ дБ); $T_1 = 0{,}0108$ с, $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 92{,}59$ 1/c ($\lg\omega_1 = 1{,}966$); $T_2 = 1{,}162 \times 10^{-5}$ с, $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 86058{,}5$ 1/c ($\lg\omega_2 = 4{,}93$); $T_ф = 5{,}61 \cdot 10^{-3}$ с, $\omega_ф = \frac{1}{T_ф} = 178{,}25$ 1/c, ($\lg\omega_ф = 2{,}25$).

В данном примере из-за большого демпфирования ЧЭ соответствующее ему колебательное звено преобразуется в два апериодических. В соответствии с видом модифицированной передаточной функции и вычислениями на рис. 5.4 приведены частотные характеристики в пределах изменения частоты до 1000 1/c, так как для принятых параметров МА полоса пропускания ограничена значением частоты $\omega \approx 100$ 1/c $\approx$ 16 Гц, и при этом запаздывание по фазе достигает $\varphi = 90°$.

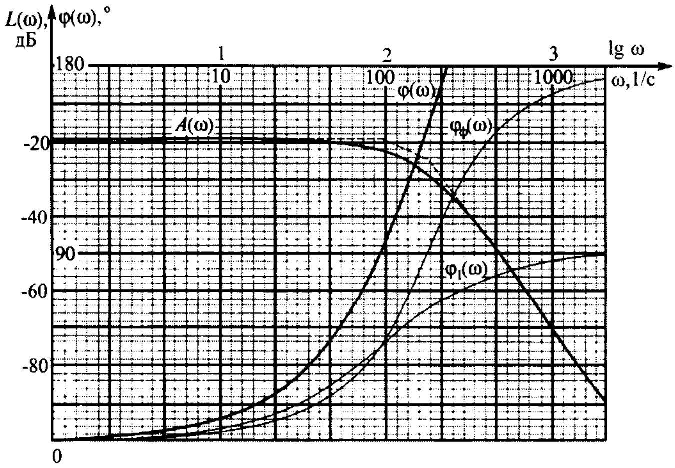


Рис. 5.4. Частотные характеристики МА:

$A(\omega)$ – амплитудная характеристика (пунктирной линией показана асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика); $\varphi_1(\omega)$ – фазовая характеристика, соответствующая постоянной времени T_1; $\varphi_ф(\omega)$ – фазовая характеристика фильтра; $\varphi(\omega)$ – суммарная фазовая характеристика

5.1.2. Маятниковый микроакселерометр

Схема измерительной цепи маятникового МА, отображающая последовательность преобразования входной величины (линейное и угловое ускорение основания) в выходную величину (напряжение выхода электрической схемы), показана на рис. 5.5. Первый блок с передаточной функцией $W_м$ отображает преобразование ускорения в колебания маятника. Второй блок с передаточной функцией $l+a$ отображает преобразование угловых колебаний ϑ маятника в линейное перемещение Δh пластин конденсаторов преобразователя перемещений, передаточная функция которого $W_п$, а напряжение ΔU, образованное на его выходе, поступает в схему фильтра с передаточной функцией $W_ф$, который создает выходное напряжение $U_{вых}$.

В предположении, что электрическая цепь МА аналогична схеме на рис. 5.2, передаточная функция $W_м$ определяется выражениями (4.71) или (4.73), а передаточные функции $W_п$ и $W_ф$ – соответственно выражениями (5.3) и (5.4), запишем передаточную функцию МА:

$$W(s)=\frac{K_п(l+a)U_{оп}K_ф}{(T^2s^2+2T\xi s+1)(T_ф^2s^2+2T_ф\xi_ф s+1)}, \qquad (5.11)$$

где коэффициент передачи $K_п$ принимает значения $K_{пГ}$, $K_{пa_x}$ [(см. формулы (4.70)] или $K_{пa_y}$ [см. выражения (4.74)] в зависимости от действующего возмущения.

Полагая в функции (5.11) $s=0$, получаем масштабные коэффициенты МА по отношению к линейным, $В/(м/с^2)$, и угловому, $В/(1/с^2)$, ускорению:

$$\frac{U_{вых}}{\ddot x_в}=KK_{пa_x}; \quad \frac{U_{вых}}{\ddot y_в}=KK_{пa_y};$$

$$\frac{U_{вых}}{\ddot\gamma_в}=KK_{пГ}, \qquad (5.12)$$

где $K=\left[(l+a)U_{оп}K_ф\right]/h_0$.

Максимальное ускорение, $м/с^2$, измеряемое МА, определяется максимальным углом поворота маятника $\vartheta_{max}\approx\frac{h_{max}}{2a}$ (h_{max} – допустимый размах конца пластины маятника) и коэффициентами $K_п$:

$$\ddot x_{вм}=\vartheta_{max}/K_{пa_x}; \quad \ddot y_{вм}=\vartheta_{max}/K_{пa_y};$$

$$\ddot\gamma_м=\vartheta_{max}/K_{пГ}. \qquad (5.13)$$

Крутизна статической характеристики для всех вариантов возмущения с учетом формул (5.12), (5.13) вычисляется из равенства $\frac{U_{вых}}{\vartheta_{max}}=\frac{(l+a)U_{оп}K_ф}{h_0}$, откуда

$$K_ф=\frac{U_{вых}h_0}{U_{оп}(l+a)\vartheta_{max}}. \qquad (5.14)$$

Пример 5.3

Рассчитаем параметры фильтра, обеспечивающего $U_{вых}=1$ В при максимальном значении измеряемой линейной вибрации и пульсации выходного сигнала $\Delta U_п<10^{-6}$ В, для акселерометра со следующими исходными данными:

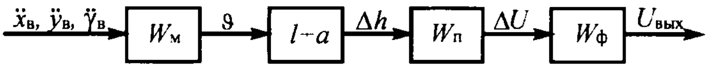


Рис 5.5. Схема измерительной цепи маятникового МА

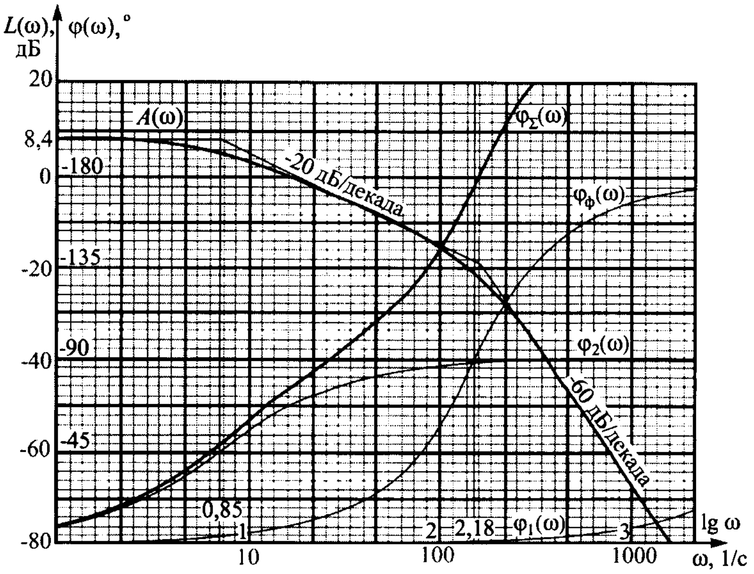


Рис. 5.6. Частотные характеристики МА

$K_{па_x} = 3{,}956 \cdot 10^{-3}$ с^2/м, $T = 4{,}545 \cdot 10^{-3}$ с, $\xi = 16{,}052$, $U_{оп} = 5$ В, $a \approx 5 \cdot 10^{-3}$ м, $l + a \approx a$, $h_{\max} = 15 \cdot 10^{-6}$ м, $h_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ м, $n = 3$.

Имеем $\vartheta_{\max} = h_{\max} / 2a = (15 \cdot 10^{-6}) / (10 \cdot 10^{-3}) = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ рад.

В соответствии с выражением (5.13): $\ddot{x}_{вм} = (1{,}5 \cdot 10^{-3}) / \ (3{,}956 \cdot 10^{-3}) = 0{,}38$ м/с^2.

По формуле (5.14) вычисляем коэффициент передачи фильтра:

$$K_ф = \frac{1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}53 .$$

Обращаясь к рис. 5.2, полагаем, что $R_3 = R_4$. Имея в виду формулы (5.5), найдем: $R_5 = 0{,}53 R_3$ и $\xi_ф = 1{,}41\sqrt{C_3 / C_4}$. Примем $\xi_ф = 0{,}707$, $C_3 = 10^{-9}$ Ф и получим $C_4 = 3{,}98 \cdot 10^{-9}$ Ф.

Определим $R_3 = R_4 = T / C_3 = 4{,}5 \cdot 10^6$ Ом и $R_5 = 2{,}38 \cdot 10^6$ Ом.

В соответствии с формулами (5.5) установим, что:

$$T_ф = \sqrt{4{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2{,}38 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9} \cdot 3{,}98 \cdot 10^{-9}} = \\ = 6{,}53 \cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

Примем частоту тактового генератора $\omega_г = 6{,}28 \cdot 10^5$ 1/с и по формуле (5.7) найдем $\Delta U_п = 1{,}57 \cdot 10^{-7}\ \text{В} < 10^{-6}$ В, что отвечает принятому ограничению.

С учетом числовых значений параметров, запишем передаточную функцию (5.11), В/(м/с^2):

$$W(s) = \frac{2{,}62}{(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)(T_ф^2 s^2 + 2T_ф \xi_ф s + 1)} ,$$

где $T = 4{,}545 \cdot 10^{-3}$ с, $\xi = 16{,}052$, $T_ф = 6{,}53 \cdot 10^{-3}$ с, $\xi_ф = 0{,}707$.

Первый сомножитель в знаменателе передаточной функции имеет два действительных корня $s_1 = -7127{,}18$, $s_2 = -7$, которые определяют две первые частоты $\omega_1 = 7127{,}18$ 1/с, $\omega_2 = 7$ 1/с и, следовательно,

$$T^2 s^2 + 2T\xi s + 1 = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) ,$$

где $T_1 = \dfrac{1}{\omega_1} = 0{,}00014\,\text{с}$, $T_2 = \dfrac{1}{\omega_2} = 0{,}14285\,\text{с}$.

Таким образом, передаточная функция принимает вид

$$W(s) = \frac{2{,}62}{(0{,}00014s+1)(0{,}14285s+1)(0{,}0065^2 s^2 + 2\cdot 0{,}707\cdot 0{,}0065s+1)}.$$

В соответствии с передаточной функцией, построим частотные характеристики.

Вычислим $20\lg 2{,}62 = 8{,}4$ дБ; $\lg\omega_1 = 3{,}85$; $\lg\omega_2 = 0{,}85$; $\omega_3 = 1/T_ф = 153{,}8$ 1/с, $\lg\omega_3 = 2{,}18$. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики МА приведены на рис. 5.6.

Из полученных характеристик следует, что до частоты излома $\omega_2 = 7$ 1/с ($\approx 1{,}11$ Гц) запаздывание по фазе колебаний маятника по отношению к колебаниям основания не превышает ~47°.

Измерительная цепь МА для входного воздействия в виде углов γ наклона основания соответствует рис. 5.5 с учетом того, что передаточная функция $W_м = W_{\vartheta,\gamma}$ и вычисляется по выражению (4.76). Передаточная функция акселерометра для этого случая определяется формулой

$$W(s) = \\ = \frac{K_\gamma(l+a)U_{оп}K_ф(T_1 s^2 - 1)}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)(T_ф^2 s^2 + 2\xi_ф T_ф s + 1)h_0}, \tag{5.15}$$

где величины K_γ, T, T_1, ξ находятся в соответствии с выражениями (4.77). Положив в формуле (5.15) $s = 0$, получим масштабный коэффициент МА, В/рад:

$$U_{вых}/\gamma = [K_\gamma(l+a)U_{оп}K_ф]/h_0.$$

Очевидно, что максимальный угол $\gamma_{\max}$ наклона основания определяется равенством $\gamma_{\max} = \vartheta_{\max}/K_\gamma$ ($\vartheta_{\max} = h_{\max}/2a$), а крутизна статической характеристики МА – выражением

$$U_{вых}/\gamma_{\max} = [K_\gamma(l+a)U_{оп}K_ф]/h_0. \tag{5.16}$$

Крутизна фильтра по-прежнему определяется формулой (5.14).

5.2. МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРЫ КОМПЕНСАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.2.1. Микроакселерометр с электростатической обратной связью

Схема, иллюстрирующая создание разностной электростатической силы на подвижной пластине (маятник) МА, являющейся подвижным электродом дифференциального конденсатора, при ее отклонении от нейтрального положения показана на рис. 5.7.

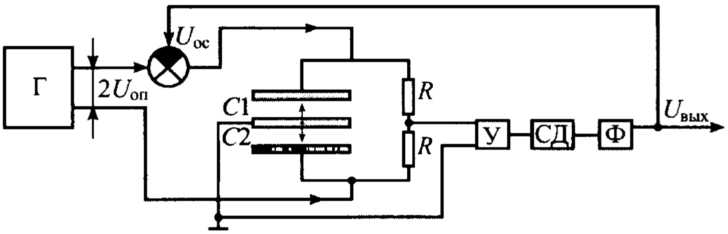


Рис. 5.7. Схема формирования электростатической обратной связи

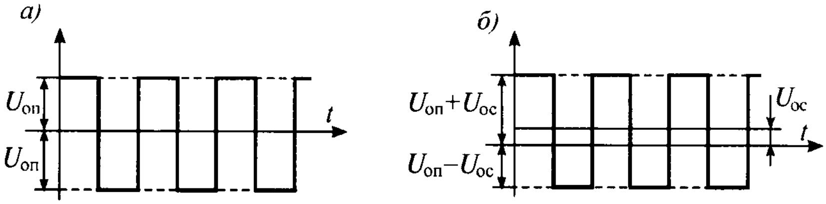


Рис. 5.8. Вид меандров:
а – формируемых генератором; *б* – смещенных относительно общего провода

Измерительный мост образован дифференциальными конденсаторами *C*1 и *C*2, у которых общий провод ("земля") соединен с электродом, расположенным на подвижной пластине МА, и резисторами *R*. Генератор Г вырабатывает опорное напряжение с амплитудой меандров $U_{оп}$, которое питает измерительный мост (рис. 5.8, *а*).

Напряжение ΔU, снимаемое с измерительного моста, через усилитель У, синхронный детектор СД и фильтр Ф низких частот, имеющих соответственно коэффициенты передачи K_1, K_2 и K_3, поступает на выход $(U_{вых})$ и по линии обратной связи – на сумматор $(U_{ос})$, на который подается также опорное напряжение генератора. Очевидно, $U_{вых} = -U_{ос} = K\Delta U$ $(K = K_1K_2K_3)$. Напряжение обратной связи смещает опорное напряжение относительно общего провода на величину $U_{ос}$ (рис. 5.8, *б*), но величина питания измерительного моста по амплитуде остается неизменной $(2U_{оп})$ и, следовательно, напряжение ΔU определяется по формуле (5.2). Вследствие смещения опорного напряжения конденсаторы *C*1 и *C*2 оказываются под разным напряжением: $U_{оп} + U_{ос}$ и $U_{оп} - U_{ос}$.

Имея в виду разностную электростатическую силу, действующую на подвижный электрод – маятник, а также равенство $U_{вых} = -2U_{ос}$, получим передаточную функцию канала обратной связи:

$$W_{ос} = \frac{F_р}{U_{вых}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s U_{оп}}{h_0^2}. \qquad (5.17)$$

В том случае, если измерительный мост образован двуполярным источником напряжения и измерительными конденсаторами аналогично рис. 5.2, электростатический датчик силы может быть реализован, как показано на рис. 5.9, путем подачи сигнала с выхода фильтра низких частот на сумматоры, выполненные на операционных усилителях ОУ1 и ОУ2. В результате измерительные конденсаторы питаются несимметричным напряжением, что приводит к возникновению электростатической силы, действующей на ЧЭ. Операционный усилитель ОУ3, включенный по схеме усилителя заряда, реагирует на приращение входного напряжения и обеспечивает перезаряд измерительных конденсаторов.

Схемы измерительных цепей акселерометров показаны на рис. 5.10.

Передаточная функция W_y вычисляется по формуле (4.31), а функция W – по формуле (4.71). Передаточные функции $W_п$ и $W_ф$ определяются соответственно выражениями (5.3) и (5.4), а функция $W_{ос}$ – выражением (5.17). Введение обратной связи увеличивает жесткость электромеханической системы "пластина на упругом подвесе с электростатическим датчиком силы".

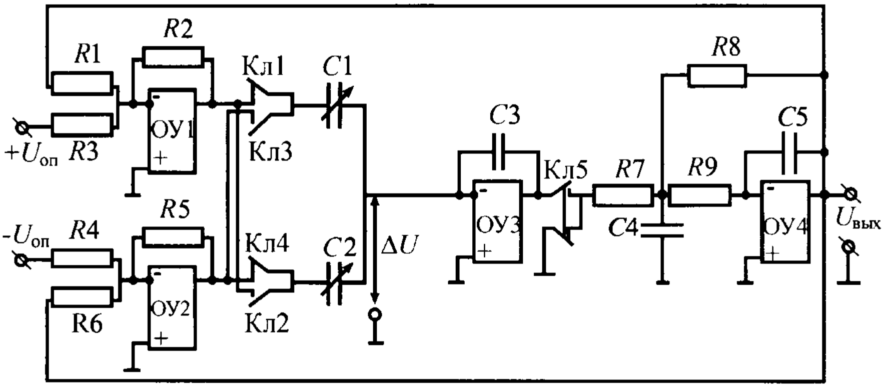


Рис. 5.9. Измерительная цепь МА с двуполярным источником напряжения:
R1...R9 – резисторы; C1...C5 – конденсаторы; ОУ1...ОУ5 – операционные усилители; Кл1...Кл5 – ключи

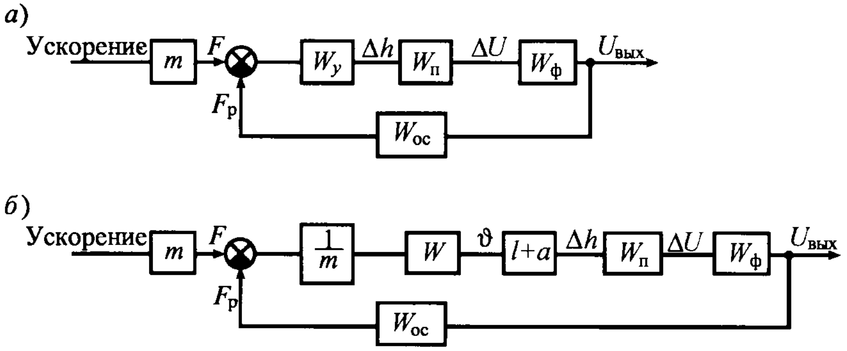


Рис. 5.10. Схемы измерительных цепей МА:
а – осевого; *б* – маятникового

Передаточные функции замкнутых цепей МА по отношению к ускорению имеют вид:

осевой МА –

$$\Phi = \frac{mW_y W_п W_ф}{1 + W_y W_п W_ф W_{ос}}; \qquad (5.18)$$

маятниковый МА –

$$\Phi = \frac{W(l+a)W_п W_ф}{1 + \frac{1}{m}W(l+a)W_п W_ф W_{ос}}. \qquad (5.19)$$

Запишем выражение (5.19) для стационарного режима ($s = 0$):

$$\Phi_{s=0} = \frac{K_п K}{1 + K_п K \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_{оп}}{m h_0^2}}, \qquad (5.20)$$

где $K_п$ находятся по формулам (4.70) или (4.77), а коэффициент K определен в выражениях (5.12).

Сравнивая выражения (5.20) и (5.12), заключаем, что с введением обратной связи максимально измеряемое ускорение увеличивается в $1 + \frac{1}{m}K_п K W_{ос}$ раз.

При исследовании МА может оказаться полезной передаточная функция с выходом не по напряжению, а по перемещению. Передаточная функция замкнутой цепи по рис. 5.10, *б* с выходом по углу ϑ имеет вид

$$\Phi^{\vartheta} = \frac{W}{1 + \frac{1}{m} W W_{\text{ос}} W_{\text{ф}} W_{\text{п}} (l + a)},$$

откуда следует выражение для статического режима:

$$\Phi^{\vartheta}_{s=0} = \frac{K_{\text{п}}}{1 + \frac{1}{m} K_{\text{п}} (l + a) \frac{U_{\text{оп}}}{h_0} K_{\text{ф}} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U_{\text{оп}}}{h_0^2}}. \tag{5.21}$$

Если задан максимально допустимый угол $\vartheta_{\max}$ поворота пластины, то максимальное значение измеряемого ускорения определяется по формуле

$$\ddot{x}_{\max} = \vartheta_{\max} / \Phi^{\vartheta}_{s=0}.$$

Пример 5.4

Рассчитаем максимальную амплитуду горизонтальной вибрации, измеряемой акселерометром с электростатической обратной связью.

Исходные данные: $m = 0{,}075 \cdot 10^{-3}$ кг; $l + a \approx 5 \cdot 10^{-3}$ м; $h_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ м; $n = 3$; $\gamma_0 = 270^{\circ}$; $k_{11} = 2{,}036 \cdot 10^3$ Н/м; $k_{12} = k_{21} = -0{,}819$ Н; $k_{22} = 4{,}398 \cdot 10^{-4}$ Н·м; $\varepsilon = 1{,}00058$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $S = 6 \cdot 10^{-5}$ м^2; $K_{\text{ф}} = 1$, $U_{\text{оп}} = 5$ В.

В соответствии с формулами (4.70) имеем: $K_{\text{п}} = K_{\text{п}a_x} = 3{,}956 \cdot 10^{-3}$ с^2/м. Пусть $h_{\max} = 15 \cdot 10^{-6}$ м ($\Delta h_{\max} = h_{\max}$) и, следовательно, максимально допустимый угол поворота пластины $\vartheta_{\max} = h_{\max} / 2a = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ рад. Максимальная амплитуда ускорения линейной вибрации, которую может измерить МА без обратной связи, равна

$$\ddot{x}_{\text{в}\max} = \vartheta_{\max} / K_{\text{п}a_x} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} / 3{,}956 \cdot 10^{-3} = 0{,}38 \text{ м/с}^2.$$

Коэффициент передачи МА с обратной связью определяем по формуле (5.21):

$$\Phi^{\vartheta}_{s=0} = \frac{3{,}956 \cdot 10^{-3}}{1 + \frac{1}{0{,}075 \cdot 10^{-3}} \cdot 3{,}956 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5}{20 \cdot 10^{-6}} \cdot 1 \cdot \frac{1{,}00058 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-5} \cdot 5}{20^2 \cdot 10^{-12}}} =$$

$$= \frac{3{,}956 \cdot 10^{-3}}{1 + 0{,}437} = 2{,}75 \cdot 10^{-3}, \text{ с}^2/\text{м}.$$

Следовательно, максимальная амплитуда ускорения, измеряемая МА с обратной связью, равна:

$$\ddot{x}_{\max} = \vartheta_{\max} / \Phi^{\vartheta}_{s=0} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{2{,}75 \cdot 10^{-3}} = 0{,}55 \text{ м/с}^2$$

и в 1,437 раз больше максимальной амплитуды ускорения, измеряемой акселерометром без обратной связи.

Частотные характеристики акселерометров могут быть получены на основе передаточных функций (5.18), (5.19) для замкнутых по каналу обратной связи измерительных цепей, а также на основе передаточных функций, найденных из уравнений движения ИМ (пластины) акселерометра, в которые необходимо ввести выражения для сил, действующих на пластину со стороны датчика силы. Рассмотрим вначале акселерометр с электростатическим датчиком силы.

Воспользуемся, например, рис. 5.10, *б* и, имея в виду, что функции $W_{\text{п}}$ и $W_{\text{ос}}$ определяются выражениями (5.3) и (5.17), а также полагая $W_{\text{ф}} = K_{\text{ф}}$, получаем выражение силы, сформированной электростатическим датчиком:

$$F_{\text{р}} = \Delta h K_{\text{э}} = K_{\text{э}} (y_r + a\vartheta),$$

где $K_{\text{э}} = (K_{\text{ф}} \varepsilon \varepsilon_0 S U_{\text{оп}}^2) / h_0^3$ (здесь $K_{\text{э}}$ – в ньютонах на метр).

Добавим к левой части первого уравнения системы (4.68) величину $F_р$, а к левой части второго уравнения величину $F_р(l+a)$ и, положив, что имеется n упругих элементов подвеса ИМ, получим

$$\left.\begin{aligned}&(nk_{12} \pm mg + K_э a)\vartheta(s) + (nk_{11} + K_э)y_r(s) = \left.\begin{matrix}+mL_1\\ -mL_2\end{matrix}\right\}\Gamma(s) \mp ma_x(s);\\ &\left[J_A s^2 + k_{д\vartheta}s + nk_{22} \pm mag + K_э a(l+a)\right]\vartheta(s) +\\ &+\left[nk_{21} + K_э(l+a)\right]y_r(s) = \left.\begin{matrix}+maL_1\\ -maL_2\end{matrix}\right\}\Gamma(s) \mp maa_x(s).\end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

Правило использования знаков в правых частях уравнений то же, что и в системе (4.68).

Решение системы (5.22) относительно параметра $\vartheta(s)$ аналогично выражению (4.69), а именно:

$$\vartheta(s) = \frac{K^э_{п\Gamma}\Gamma(s) + K^э_{па_x}a_x(s)}{T_э^2 s^2 + 2\xi_э T_э s + 1}, \qquad (5.23)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&K^э_{п\Gamma} = \frac{\mp m(ak_{11} - k_{21})\}^{L_1}_{L_2}}{\Delta_э}; \quad K^э_{па_x} = \frac{\mp m(ak_{11} - k_{21})}{\Delta_э};\\ &T_э = \sqrt{\frac{J_A\left(k_{11} + \frac{1}{n}K_э\right)}{\Delta_э}}; \qquad \xi_э = \frac{k_{д\vartheta}}{2}\sqrt{\frac{k_п + \frac{1}{n}K_э}{J_A\Delta_э}};\\ &\Delta_э = n\left(k_{11}k_{22} - k_{12}^2\right) \mp mg(k_{21} - ak_{11}) + K_э R.\end{aligned}\right\} \qquad (5.24)$$

Здесь $R = -\left[(l+a)(k_{12} - ak_{11}) - k_{22} + ak_{12}\right]$; $\Delta_э$ – в ньютонах в квадрате; R – в ньютонах на метр.

В системах двойных знаков у величин в формулах (5.24) верхние знаки и параметр L_1 соответствуют углу установки $\gamma_0 = 270^\circ$, а нижние и параметр L_2 – углу $\gamma_0 = 90^\circ$.

Из выражения (5.23) следуют передаточные функции ЧЭ МА с учетом обратной связи:

$$W^э = \frac{K^э_{пм}}{T_э^2 s^2 + 2\xi_э T_э s + 1}, \qquad (5.25)$$

где $K^э_{пм} = K^э_{п\Gamma}$ для угловой вибрации основания и $K^э_{пм} = K^э_{па_x}$ – для линейной вибрации.

Передаточная функция ЧЭ МА по возмущению $(\ddot{y}_в + g)$ в соответствии с выражениями (4.73), (4.74) будет также иметь вид (5.25), где параметры $T = T_э$, $\xi = \xi_э$ вычисляются по выражениям (5.24), в которых следует положить $g = 0$, и при этом $K^э_{пм} = K^э_{па_x} = K^э_{па_y}$.

Передаточная функция ЧЭ МА по возмущению в виде угла наклона основания находится по выражению (4.76), в котором параметр T_1 вычисляется в соответствии с формулами (4.77), параметры $T = T_э$, $\xi = \xi_э$ – по выражениям (5.24), а коэффициент передачи

$$K_\gamma = K^э_\gamma = [\pm mg(k_{21} - ak_{11})]/\Delta_э. \qquad (5.26)$$

Исходя из рис. 5.10, *б*, запишем, например, передаточную функцию МА по отношению к линейной вибрации $a_x(s)$ так:

$$\Phi(s)=\frac{K^{э}_{па_x}K}{T_э^2 s^2+2\xi_э T_э s+1}, \qquad (5.27)$$

где $K=\left[(l+a)U_{оп}K_ф\right]/h_0$ [см. формулу (5.12)].

Пример 5.5

Рассчитаем параметры передаточной функции (5.25) и построим частотные характеристики МА для исходных данных: $a_м=9\cdot10^{-3}$ м, $b_м=10^{-2}$ м, $c_м=0{,}35\cdot10^{-3}$ м, $a=4{,}5\cdot10^{-3}$ м, $l=0{,}8\cdot10^{-3}$ м, $\rho=2{,}33\cdot10^3$ кг/м^3, $L_1=L_2=l+a=5{,}3\cdot10^{-3}$ м, $k_{11}=2{,}036\cdot10^3$ Н/м, $k_{12}=k_{21}=-0{,}819$ Н, $k_{22}=4{,}398\cdot10^{-4}$ Н·м, $k_{д\vartheta}=49{,}93\cdot10^{-6}$ Н·м·с, $n=3$, $h_0=20\cdot10^{-6}$ м, $\varepsilon=1{,}00058$, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, $S=60\cdot10^{-6}$ м^2; $U_{оп}=5$ В; $K_ф=1$.

Вычислим ИМ $m=a_м b_м c_м\rho=$ $=0{,}075\cdot10^{-3}$ кг и ее моменты инерции:

$$J_c=\frac{m}{12}(a_м^2+c_м^2)=0{,}51\cdot10^{-9}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2;\ J_A=$$
$$=J_c+ma^2=2{,}03\cdot10^{-9}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Найдем коэффициенты:

$$K_э=\frac{1{,}00058\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot60\cdot10^{-6}\cdot5^2}{(20\cdot10^{-6})^3}=1{,}66\ \text{Н/м};$$

$$R=-[5{,}3\cdot10^{-3}(-0{,}819-4{,}5\cdot10^{-3}\cdot2{,}036\cdot10^3)-$$
$$-4{,}398\cdot10^{-4}-4{,}5\cdot10^{-3}\cdot0{,}819]=0{,}057\quad \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Выполним вычисления в соответствии с выражениями (5.24) и результаты представим в таблице для двух вариантов установки МА: $\gamma_0=270$ (прямой маятник) и 90° (обратный маятник) и двух значений коэффициента: $K_э=1{,}66$ Н/м (наличие обратной связи) и 0 (отсутствие обратной связи).

γ_0, °	$K_э$, Н/м	Параметр			
		$K^э_{па_x}$, $1\cdot10^{-3}$ с^2/м	$K^э_{пГ}$, $1\cdot10^{-6}$ с^2	$T_э$, $1\cdot10^{-3}$ с	$\xi_э$, безразмерный
270	1,66	0,963	5,103	2,305	28,369
	0	1,097	5,815	2,461	30,281
90	1,66	0,980	5,194	2,326	28,616
	0	1,119	5,932	2,486	30,583

Из полученных результатов следует, что для принятых исходных данных электростатическая обратная связь незначительно влияет на параметры передаточной функции.

Запишем передаточную функцию (5.27) для $\gamma_0=270°$:

$$\Phi=\frac{0{,}963\cdot10^{-3}\cdot5{,}3\cdot10^{-3}\cdot5}{20\cdot10^{-6}\left(T_э^2 s^2+2\xi_э T_э s+1\right)}=$$
$$=\frac{1{,}28}{(0{,}00231)^2 s^2+2\cdot0{,}00231\cdot28{,}369 s+1}.$$

Корни знаменателя передаточной функции: $s_1=-8{,}44$; $s_2=-24580{,}67$, и, следовательно, передаточная функция принимает вид

$$\Phi=\frac{1{,}28}{(T_{1э}s+1)(T_{2э}s+1)}.$$

Имеем далее:

$$T_{1э}=\frac{1}{s_1}=0{,}118\ \text{с};\quad \omega_1=8{,}44\ 1/\text{с};\quad \lg\omega_1=0{,}93;$$

$$T_{2э}=\frac{1}{s_2}=4{,}1\cdot10^{-5}\ \text{с};\quad \omega_2=24580{,}67\ 1/\text{с};$$

$$\lg\omega_2=4{,}39;\quad 20\lg1{,}28=2{,}144.$$

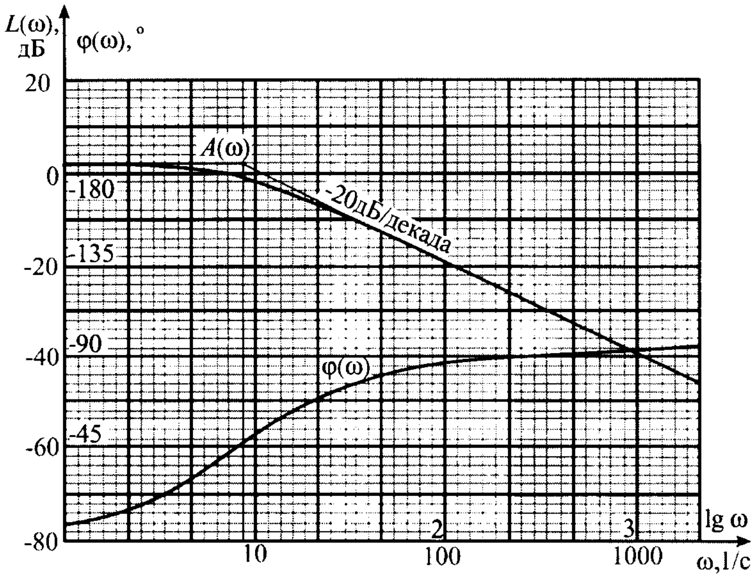


Рис. 5.11. Частотные характеристики МА с электростатической обратной связью

Частотные характеристики для ограниченного диапазона частот приведены на рис. 5.11.*

Очевидно, что, выполнив преобразования в соответствии с формулой (5.19), получим выражение (5.27). При этом полезно привести формулы, показывающие характер зависимости параметров передаточной функции (5.27) от коэффициента $K_э$, характеризующего обратную связь измерительной цепи:

$$K^{э}_{па_x} = K_{па_x}/(1+Q)\ ;\ T^{э} = T/\sqrt{1+Q}\ ;$$

$$\xi^{э} = \xi/(1+Q), \qquad (5.28)$$

где $Q = \frac{1}{m} K_{па_x}(l+a)K_э$.

Заметим, что все МА фирма Analog Devices (США) имеют электростатические первичные преобразователи и электростатическую обратную связь.

5.2.2. Микроакселерометр с магнитоэлектрической обратной связью

Схема, иллюстрирующая формирование магнитоэлектрической обратной связи, приведена на рис. 5.12.

Датчик силы включается в канал обратной связи. Измерительные конденсаторы $C1$ и $C2$ входят во времязапаздывающие цепи генератора Г, который формирует на выходе напряжение U_1, поступающее на фильтры Ф1 и Ф2, которые выделяют постоянную составляющую сигнала. Напряжения $U_{Ф1}$ и $U_{Ф2}$ пропорциональны отношениям t_1/T и t_2/T, где t_1 и t_2 – время, в течение которого напряжение на конденсаторах $C1$ и $C2$ достигает пороговых значений, а величина $T = t_1 + t_2$ определяет период импульсной последовательности генератора.

---

[*] Напомним, что логарифмические амплитудные характеристики могут быть построены для безразмерных передаточных функций. Если передаточная функция имеет размерность, например В/(м/с^2), то в этом случае под модулем понимаем отношение модуля частотной передаточной функции к размерной единице 1 В/(м/с^2).

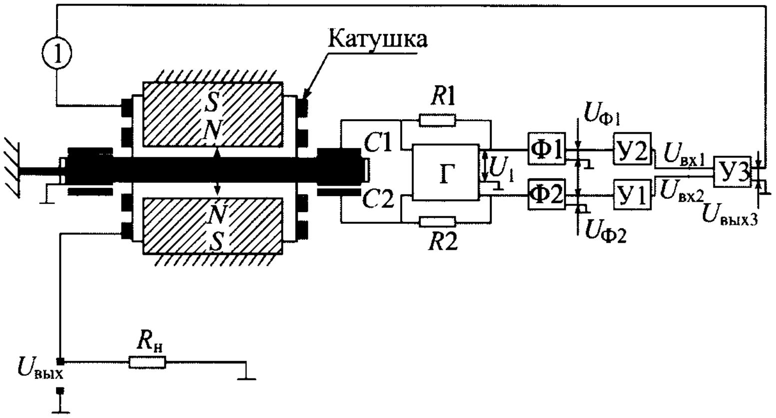


Рис. 5.12. Схема формирования магнитоэлектрической обратной связи

Напряжение $U_{Ф1}$ и $U_{Ф2}$ поступает на масштабные усилители У1 и У2, выходное напряжение которых является входами для усилителя У3: $U_{вх1}$ и $U_{вх2}$. Напряжение на выходе усилителя У3, равное $U_{вых3} = U_{вх2} - U_{вх1}$, включено в последовательную цепь, образованную катушками датчика силы с общим сопротивлением R_L и сопротивлением нагрузки $R_н$. По каналу обратной связи протекает ток I, пропорциональный перемещению ИМ и создающий силу и момент, действующие заодно с упругим моментом подвеса ИМ. Ток I и напряжение $U_{вых}$ пропорциональны ускорению, действующему на ИМ (пластину) МА.

На рис. 5.13 приведена электрическая схема измерительной цепи акселерометра АТ-1104. Она состоит из генератора несущей частоты на микросхеме *DD*1, фильтров низких частот *C*3, *R*3 и *C*4, *R*4, усилителей напряжения на микросхемах *DA*1 и *DA*2, дифференциального усилителя на микросхеме *DA*3, усилителя мощности на транзисторах *VT*1 и *VT*2, катушки магнитоэлектрического датчика момента R_L и сопротивления нагрузки $R_н$.

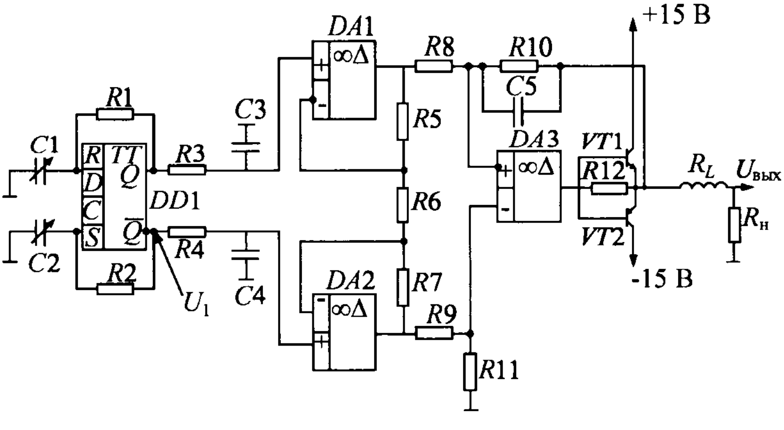


Рис. 5.13. Электрическая схема МА с магнитоэлектрической обратной связью

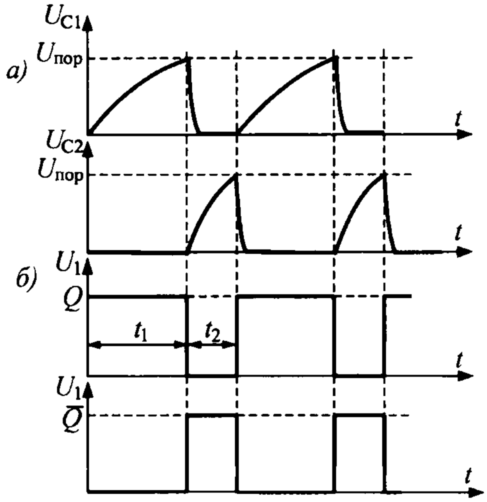


Рис. 5.14. Формирование напряжения на измерительных емкостях (*а*) и импульсных последовательностей на выходах генератора (*б*)

Генератор несущей частоты построен на микросхеме *D*-триггера *DD*1, работающий в режиме асинхронного *RS*-триггера. Особенностью данной схемы генератора является то, что измерительные конденсаторы *C*1 и *C*2 включены во времязапаздывающие цепи генератора. При изменении емкостей конденсаторов *C*1 и *C*2 вследствие перемещения пластины с центральным электродом на прямом и инверсном выходах микросхемы *DD*1 формируются импульсы, длительность которых пропорциональна емкостям конденсаторов *C*1 и *C*2.

На рис. 5.14 показаны зависимости от времени величин напряжения U_{C1} и U_{C2} на измерительных емкостях, а также импульсные последовательности, формирующиеся на выходах генератора Q и $\overline{Q}$.

Если при включении питания на выходе Q установилась логическая "1", то конденсатор *C*1 через резистор *R*1 (см. рис. 5.13) начинает заряжаться этим напряжением. В момент времени t_1, когда напряжение на конденсаторе *C*1 достигнет пороговой величины напряжения логической "1" $U_{пор}$, *RS*-триггер переходит в режим сброса, на выходе Q устанавливается значение логического "0", а на выходе $\overline{Q}$ – логической "1". Под действием этого напряжения через резистор *R*2 начинается заряд конденсатора *C*2, а конденсатор *C*1 быстро разряжается через внутреннее сопротивление микросхемы *DD*1. За время t_2 напряжение на входе *S* *RS*-триггера достигает пороговой величины напряжения логической "1" и триггер переходит в режим установки "1" на выходе Q.

Таким образом, длительности импульсов t_1 и t_2 зависят от постоянных времени C_1R_1 и C_2R_2. Если $R_1 = R_2$ и ускорение, действующее на ИМ, равно нулю ($C_1 = C_2$), то на выходах микросхемы *DD*1 формируются импульсы одинаковой длительности.

Получим зависимости для t_1 и t_2 от значений C_1 и C_2.

Запишем выражения для напряжений:

$$U_{C1} = U_1\left(1 - e^{-\frac{t_1}{R_1C_1}}\right); \; U_{C2} = U_1\left(1 - e^{-\frac{t_2}{R_2C_2}}\right), \tag{5.29}$$

где U_1 – значение напряжения логической "1" на выходе микросхемы $DD1$.

Учитывая, что переключения триггера осуществляются при достижении напряжениями U_{C1} и U_{C2} величины $U_{\text{пор}}$, выразим из формул (5.29) t_1 и t_2:

$$t_1 = -R_1C_1 \ln\frac{U_1 - U_{\text{пор}}}{U_1};$$
$$t_2 = -R_2C_2 \ln\frac{U_1 - U_{\text{пор}}}{U_1}. \quad (5.30)$$

Фильтры низких частот $C3$, $R3$ и $C4$, $R4$ предназначены для выделения постоянных составляющих сигналов на выходах триггера $DD1$. Коэффициенты передачи RC-цепей по постоянному току в данном случае равны единице, так как нагрузкой для них являются операционные усилители $DA1$ и $DA2$, включенные по схеме неинвертирующих усилителей и имеющие очень большое входное сопротивление. Поэтому напряжение на выходах фильтров низких частот можно записать в виде

$$U_{\Phi1} = U_1\frac{t_1}{T}; \quad U_{\Phi2} = U_1\frac{t_2}{T},$$

где $T = t_1 + t_2$ – период импульсной последовательности генератора.

Микросхемы $DA1$ и $DA2$ включены по стандартной схеме неинвертирующего усилителя и выполняют функции масштабирующих усилителей, коэффициенты усиления которых вычисляются по формулам

$$K_1 = 1 + \frac{R_5}{R_6}; \quad K_2 = 1 + \frac{R_7}{R_6}.$$

Для того чтобы коэффициенты усиления были равны между собой, выбирают $R5 = R7$ и тогда $K_1 = K_2 = K_y$.

Микросхема $DA3$ формирует сигнал, пропорциональный разности напряжения на выходах усилителей $DA1$ и $DA2$, а также выполняет функцию дополнительного фильтра низких частот с постоянной времени $T_ф = R_{10}C_5$, предназначенного для подавления пульсаций несущей частоты. Напряжение на выходе DA_3 определяется по формуле

$$U_{\text{вых3}} = \frac{R_{11}}{R_9 + R_{11}}\left(1 + \frac{R_{10}}{R_8}\right)U_{\text{вх2}} - \frac{R_{10}}{R_8}U_{\text{вх1}}, \quad (5.31)$$

где $U_{\text{вх1}}$ и $U_{\text{вх2}}$ – напряжения на выходах усилителей $DA1$ и $DA2$ соответственно.

Если выбрать резисторы $R8$–$R11$ равными, то коэффициенты усиления по каждому из входов будут равны единице и формула (5.31) примет вид

$$U_{\text{вых3}} = U_{\text{вх2}} - U_{\text{вх1}}. \quad (5.32)$$

Транзисторы VT1 и VT2 включены по схеме двухтактного эмиттерного повторителя и выполняют функцию усилителя тока с коэффициентом усиления по напряжению, равным единице. Поэтому, подставив в выражение (5.32) значения $U_{\text{вх2}}$ и $U_{\text{вх1}}$, получим напряжение, приложенное к обмотке R_L датчика момента и сопротивлению нагрузки $R_н$, с которого снимается выходной сигнал МА. Учитывая, что $R_н >> R_L$, можно записать

$$U_{\text{вых}} = K_yU_1\frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}. \quad (5.33)$$

Таким образом, напряжение на выходе акселерометра пропорционально относительному приращению величины измерительной емкости и, следовательно, действующему на него ускорению. Имея в виду, что $C_1 = \varepsilon\varepsilon_0 S/(h_0 + \Delta h)$ и $C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 S/(h_0 - \Delta h)$, в соответствии с формулой (5.33) получим

$$U_{\text{вых}} = (K_yU_1\Delta h)/h_0. \quad (5.34)$$

Ток, протекающий в канале обратной связи, равен (см. рис. 5.13),

$$I = U_{\text{вых}}/(R_н + R_L), \quad (5.35)$$

где $R_н$, R_L – активные сопротивления нагрузки и обмоток катушек.

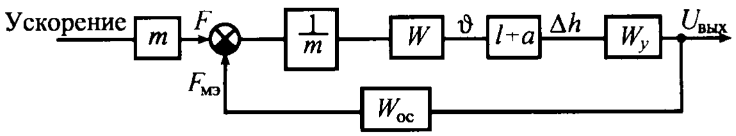


Рис. 5.15. Измерительная цепь МА с магнитоэлектрической обратной связью

Формулу (3.97) для вычисления силы, развиваемой магнитоэлектрическим датчиком, учитывая, что $U = U_{\text{вых}}$, $L = nl$, запишем следующим образом:

$$F_{\text{мэ}} = IB_3L = K_{\text{мэ}}\Delta h, \qquad (5.36)$$

где $K_{\text{мэ}}$, кг/с^2,

$$K_{\text{мэ}} = (K_yU_1B_3L)/[h_0(R_{\text{н}} + R_L)]. \qquad (5.37)$$

Измерительная цепь МА показана на рис. 5.15.

Передаточная функция W вычисляется по выражению (4.71) или (4.73). Если возмущающим воздействием является угол наклона основания, то передаточную функцию W следует вычислить по выражению (4.76). Передаточная функция W_y по напряжению определяется из формулы (5.34):

$$W_y = U_{\text{вых}} / \Delta h = (K_yU_1) / h_0. \qquad (5.38)$$

Передаточная функция обратной связи в соответствии с формулами (5.35) и (5.36) определяется выражением

$$W_{\text{ос}} = F_{\text{мэ}} / U_{\text{вых}} = B_3L / (R_{\text{н}} + R_L). \qquad (5.39)$$

Передаточная функция (5.39) с учетом зависимости (3.98) может быть представлена также в виде

$$W_{\text{ос}} = [L(\mu_3\sigma H_{\text{м}}B_{\text{м}}V_{\text{м}} / V_3)^{0,5}]/(R_{\text{н}} + R_L). \qquad (5.40)$$

Передаточная функция замкнутой цепи имеет форму

$$\Phi = \frac{W(l+a)W_y}{1 + \frac{1}{m}W(l+a)W_yW_{\text{ос}}} = \frac{W(l+a)W_y}{1 + \frac{1}{m}W(l+a)K_{\text{мэ}}}. \qquad (5.41)$$

Для статического режима ($s = 0$) получим, В/(м/с^2),

$$\Phi_{s=0} = \frac{K_{\text{п}}(l+a)W_y}{1 + \frac{1}{m}K_{\text{п}}(l+a)K_{\text{мэ}}}, \qquad (5.42)$$

где $K_{\text{п}}$ определяется по формулам (4.70) или (4.74).

Пусть, например, $K_{\text{п}} = K_{\text{п}a_x}$, тогда выражение (5.42), которое по физическому смыслу соответствует крутизне рабочей характеристики МА, может быть приведено к виду

$$\Phi_{s=0} = q = K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}(l+a)W_y, \qquad (5.43)$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}} &= [\pm m(ak_{11} - k_{21})]/\Delta_{\text{мэ}};\\ \Delta_{\text{мэ}} &= n(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) \mp mg(k_{21} - ak_{11}) + k_{\text{мэ}}R;\\ &\text{определение } R \text{ дано в формуле (5.24).} \end{aligned}\right\} \qquad (5.44)$$

Аналогично могут быть получены выражения для вычисления крутизны рабочих характеристик при возмущениях в виде вертикальной вибрации основания, угловой вибрации либо углов наклона основания.

Пример 5.6

Вычислим крутизну рабочей характеристики МА для следующих исходных данных: $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг; a = 4,5·10^{-3} м; $l + a$ = 5,3 × × 10^{-3} м; n = 3; k_{11} = 2,036·10^{-3} Н/м; $k_{12} = k_{21} = -0{,}819$ Н; $k_{22} = 4{,}398 \cdot 10^{-4}$ Н·м; $h_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ м; $U_1 = 2{,}7$ В; $K_y = 8{,}5$; $R_{\text{н}} = 1000$ Ом; $R_L = 160$ Ом; $B_3 = 0{,}25$ Тл; $L = 10$ м.

Найдем:

$$W_y = (K_y U_1)/h_0 = \frac{8{,}5\cdot 2{,}7}{20\cdot 10^{-6}} = 1{,}147\cdot 10^6 \text{ В/м};$$

$$K_{\text{мэ}} = W_y \frac{BL}{R_{\text{н}} + R_L} = \frac{1{,}147\cdot 10^6 \cdot 0{,}25\cdot 10}{1000+160} =$$

$$= 2{,}475\cdot 10^3 \text{ кг/с}^2; \quad R = 0{,}057 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\Delta_{\text{мэ}} = 3\left(2{,}036\cdot 10^3 \cdot 4{,}398\cdot 10^{-4} - 0{,}819^2\right) \mp$$
$$\mp 0{,}29\cdot 10^{-2}\cdot 9{,}8\left(-0{,}819 - 4{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}036\cdot 10^3\right) +$$

$+2{,}472\cdot 10^3 \cdot 0{,}057$, откуда для $\gamma_0 = 270^{\circ}$ получим $\Delta_{\text{мэ}} = 141{,}70$, а для $\gamma_0 = 90^{\circ}$ $\Delta_{\text{мэ}} = 141{,}645$. Полученные значения отличаются несущественно, поэтому примем $\Delta_{\text{мэ}} = 141{,}7$ Н^2.

Вычислим

$$K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}} =$$
$$= \frac{\mp 0{,}29\cdot 10^{-3}(4{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}036\cdot 10^3 + 0{,}819)}{141{,}7} =$$
$$= 2{,}0\cdot 10^{-5} \text{ с}^2\text{/м}.$$

По формуле (5.43) рассчитаем крутизну характеристики

$$q = 2{,}0\cdot 10^{-5}\cdot 5{,}3\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}147\cdot 10^6 = 0{,}121 \text{ В/(м/с}^2).$$

При действии ускорения $a_x = 9{,}81$ м/с^2 на выходе получим напряжение:

$U_{\text{вых}} = 9{,}81q = 1{,}185$ В или ток $I_{\text{вых}} = \dfrac{1{,}185}{1160} = 1{,}02\cdot 10^{-3}$ А.

В МА с обратной связью второе слагаемое в знаменателе передаточной функции (5.41) обычно значительно больше единицы. Имея это в виду, из передаточной функции (5.42) найдем

$$\Phi_{s=0} = \frac{U_{\text{вых}}}{a_{x,y}} = \frac{mW_y}{K_{\text{мэ}}} = \frac{m\dfrac{K_y U_1}{h_0}}{\dfrac{K_y U_1 B_3 L}{h_0(R_{\text{н}} + R_L)}} =$$
$$= \frac{m}{\dfrac{B_3 L}{R_{\text{н}} + R_L}},$$

откуда следует

$$\frac{U_{\text{вых}}}{R_{\text{н}} + R_L} B_3 L = m a_{x,y}, \text{ т.е. } I B_3 L = m a_{x,y}. \tag{5.45}$$

Равенство (5.45) является общепринятым расчетным соотношением, которое имеет простой физический смысл: сила, развиваемая магнитоэлектрическим датчиком в цепи обратной связи, уравновешивает инерционную силу маятникового ЧЭ, обусловленную измеряемым ускорением (a_x, a_y). Из равенства (5.45) можно получить, например, требуемое значение индукции магнитной цепи $B_3 = (m a_{x,y})/(IL)$ при заданных значениях остальных параметров.

Для понимания физических процессов, приводящих в итоге к соотношению (5.45), важно подчеркнуть, что сигнал в измерительной цепи при действии ускорения возникает вследствие поворота маятника на угол ϑ. Покажем связь между углом ϑ и ускорением.

В соответствии с рис. 5.15 запишем равенство

$$\vartheta = (m a_x - F_{\text{мэ}})\frac{1}{m} W,$$

которое для установившегося режима $\left(W = K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}\right)$ принимает вид

$$\vartheta = \left(a_x - \frac{F_{\text{мэ}}}{m}\right) K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}.$$

Имея в виду выражения (5.37) и (5.43), преобразуем последнее равенство:

$$-\frac{\vartheta}{K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}} = a_x\left[1 - \frac{B_3 L q}{m(R_{\text{н}} + R_L)}\right],$$

откуда, приняв $\vartheta = \vartheta_{\max}$ и $a_x = a_{\max}$, получим

$$a_{\max} = \frac{\vartheta_{\max}}{K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}\left[1 - \dfrac{B_3 L q}{m(R_{\text{н}} + R_L)}\right]}, \tag{5.46}$$

где $\vartheta_{\max}$ – максимальный угол поворота пластины акселерометра.

Пример 5.7

Рассчитаем максимальное значение ускорения на основании формулы (5.46), которое может быть измерено МА с параметрами из предыдущего примера: $K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ с^2/Н; B_3 = 0,25Тл; L = 10 м; $q = 0{,}121$ В/(м/с^2); $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг; $R_\text{н} + R_L = 1160$ Ом.

Пусть линейное перемещение конца пластины ограничено значением $\Delta h_{\max} = 5 \cdot 10^{-6}$ м, тогда $\vartheta_{\max} = \dfrac{\Delta h_{\max}}{2a} = \dfrac{5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}55 \times$ $\times 10^{-3}$ рад. По формуле (5.46) получим

$$a_{\max} = \frac{0{,}55 \cdot 10^{-3}}{2{,}0 \cdot 10^{-5}\left(1 - \dfrac{0{,}25 \cdot 10 \cdot 0{,}121}{0{,}29 \cdot 10^{-3} \cdot 1160}\right)} =$$
$$= 275 \text{ м/с}^2 = 28\, g \text{ м/с}^2.$$

Передаточная функция МА с магнитоэлектрической обратной связью может быть получена на основании уравнений движения (5.22), в которых вместо величины $K_\text{э}$ нужно применять величину $K_\text{мэ}$, вычисляемую по формуле (5.37). При этом выражения (5.25), (5.26) справедливы и для МА с магнитоэлектрической обратной связью, но при этом нужно полагать $K_\text{э} = K_\text{мэ}$, $\Delta_\text{э} = \Delta_\text{мэ}$, $K_{\text{п}a_x} = K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}$ [см. формулы (5.44)] и, далее

$$\left.\begin{aligned} &K_{\text{пГ}}^{\text{мэ}} = \left[\mp m(ak_{11} - k_{21})\}_{L_2}^{L_1}\right]/\Delta_\text{мэ}; \quad T_\text{мэ} = \sqrt{J_A\left(k_{11} + \frac{1}{n}K_\text{мэ}\right)/\Delta_\text{мэ}}; \\ &\xi_\text{мэ} = \frac{k_{\text{д}\vartheta}}{2}\sqrt{\left(k_{11} + \frac{1}{n}K_\text{мэ}\right)/(J_A\,\Delta_\text{мэ})}. \end{aligned}\right\}; \qquad (5.47)$$

Запишем передаточную функцию МА по отношению к линейной вибрации a_x (см. рис. 5.15), В/(м/с^2):

$$\Phi_u = \frac{K_{\text{п}a_x}^{\text{мэ}}(l + a)\dfrac{K_y U_1}{h_0}}{T_\text{мэ}^2 s^2 + 2\xi_\text{мэ} T_\text{мэ} s + 1} = \qquad (5.48)$$
$$= \frac{q}{T_\text{мэ}^2 s^2 + 2\xi_\text{мэ} T_\text{мэ} s + 1}.$$

Если в качестве выходной величины МА считать не напряжение, а ток, передаточная функция примет вид, А/(м/с^2),

$$\Phi_I = \frac{q/(R_\text{н} + R_L)}{T_\text{мэ}^2 s^2 + 2\xi_\text{мэ} T_\text{мэ} s + 1}. \qquad (5.49)$$

Если в качестве возмущений, действующих на МА, рассматривать наклоны основания, то передаточная функция ЧЭ МА вычисляется по выражению (4.76), где параметр T_1 необходимо определять в соответствии с выражениями (4.77), параметры $T = T_\text{мэ}$ и $\xi = \xi_\text{мэ}$ – по формулам (5.47), а коэффициент передачи следующим образом:

$$K_\gamma = K_\gamma^{\text{мэ}} = [\pm mg(k_{21} - ak_{11})]/\Delta_\text{мэ}. \qquad (5.50)$$

Динамические характеристики МА: нормированную амплитудно-частотную $I(\omega)/I(0)$, фазочастотную $\varphi(\omega)$ и функцию переходного процесса $h(t)$ – можно представить известной системой соотношений, если в выражениях (5.48) и (5.49) положить $s = j\omega$ и выполнить соответствующие преобразования:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A(\omega)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 T_\text{мэ}^2\right)^2 + 4\xi_\text{мэ}^2 T_\text{мэ}^2 \omega^2}}; \\ &\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\xi_\text{мэ} T_\text{мэ}\omega}{1 - \omega^2 T_\text{мэ}^2} \text{ для } \omega \le \frac{1}{T_\text{мэ}}; \\ &\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg}\frac{2\xi_\text{мэ} T_\text{мэ}\omega}{1 - \omega^2 T_\text{мэ}^2} \text{ для } \omega > \frac{1}{T_\text{мэ}}; \\ &h(t) = K\left[1 - \frac{1}{\lambda T_\text{мэ}}\exp\left(\frac{-\xi_\text{мэ} t}{T_\text{мэ}}\right)\sin(\lambda t + \vartheta)\right]; \\ &\lambda = \frac{1}{T_\text{мэ}}\sqrt{1 - \xi_\text{мэ}^2}; \ \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\lambda T}{\xi_\text{мэ}}, \end{aligned}\right\}$$
$$(5.51)$$

где $A(\omega)$, $A(0)$ – соответственно выходное напряжение (или выходной ток) акселерометра на произвольной частоте и при постоянном выходном сигнале, например $a_x = 9{,}81$ м/с^2; $K = q$ либо $K = q/(R_н + R_L)$.

Наконец, отметим, что справедливы и замечания, выраженные в форме равенств (5.28), в которых для рассматриваемого варианта магнитоэлектрической обратной связи следует полагать $K_э = K_{мэ}$.

Пример 5.8

Рассчитаем частотные характеристики МА с магнитоэлектрическим датчиком силы в канале обратной связи.

Для маятника (пластины) имеем: $J_A = 7{,}093 \cdot 10^{-9}$ кг·м^2, $k_{д\vartheta} = 49{,}93 \cdot 10^{-6}$ Н·м·с; для упругого подвеса: $n = 3$, $k_{11} = 2{,}036 \cdot 10^3$ Н·м.

Используем данные, полученные в примере 5.6:

$$K_{мэ} = 2{,}475 \cdot 10^3 \text{ Н·м}; \quad \Delta_{мэ} = 141{,}7 \text{ Н}^2;$$

$$q = 0{,}121 \text{ В/(м/с}^2) = 1{,}04 \cdot 10^{-4} \text{ А/(м/с}^2).$$

Вычислим параметры передаточной функции (5.48):

$$T_{мэ} = \sqrt{J_A\left(k_{11} + \frac{1}{n}K_{мэ}\right)/\Delta_{мэ}} =$$

$$= \sqrt{7{,}093 \cdot 10^{-9}\left(2{,}036 \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 2{,}472 \cdot 10^3\right)\Big/141{,}7} =$$

$$= 3{,}78 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

$$\xi_{мэ} = \frac{k_{д\vartheta}}{2}\sqrt{\left(k_{11} + \frac{1}{n}K_{мэ}\right)/(J_A\Delta_{мэ})} =$$

$$= \frac{49{,}93 \cdot 10^{-6}}{2}\sqrt{\frac{2{,}036 \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 2{,}472 \cdot 10^3}{7{,}093 \cdot 10^{-9} \cdot 141{,}7}} = 1{,}33.$$

Найдем собственную частоту:

$$\omega_{мэ} = \frac{1}{T_{мэ}} = 2645{,}5 \text{ 1/с} = 421{,}26 \text{ Гц.}$$

Так как $\xi > 1$, передаточная функция (5.48) принимает вид

$$\Phi_u = \frac{q}{(T_{мэ1}s + 1)(T_{мэ2}s + 1)},$$

где $T_{мэ1} = 1/s_1 = 8{,}34 \cdot 10^{-4}$ с; $T_{мэ2} = 1/s_2 = 1{,}71 \cdot 10^{-4}$ с; $s_1 = -1198{,}91$; $s_2 = -5838{,}46$ – корни знаменателя передаточной функции (5.48).

Имеем далее: 20 lg (0,121) = –18,34дБ. $\omega_1 = 1/T_{мэ1} = 1198{,}91$ 1/с, $\lg\omega_1 = 3{,}08$; $\omega_2 = 1/T_{мэ2} = 5838{,}46$ 1/с, $\lg\omega_2 = 3{,}76$. На рис. 5.16 выполнено построение амплитудной частотной и фазовой частотной характеристик.

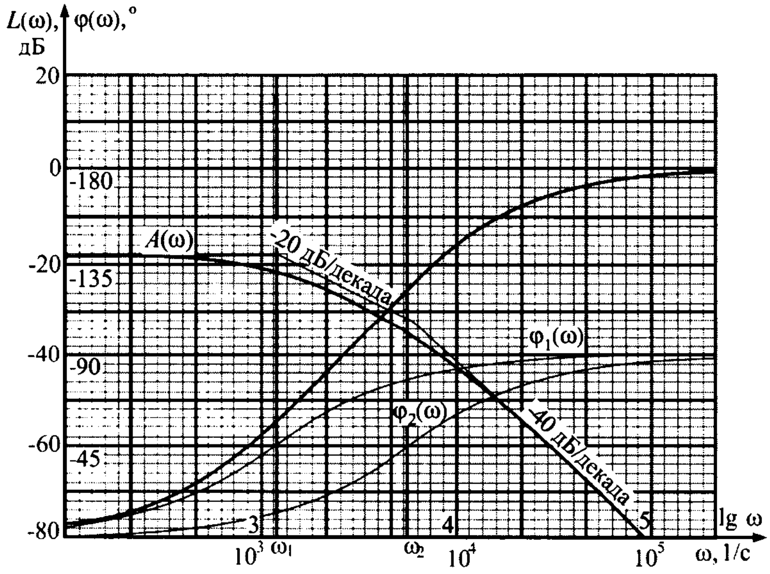


Рис. 5.16. Частотные характеристики МА с магнитоэлектрической обратной связью

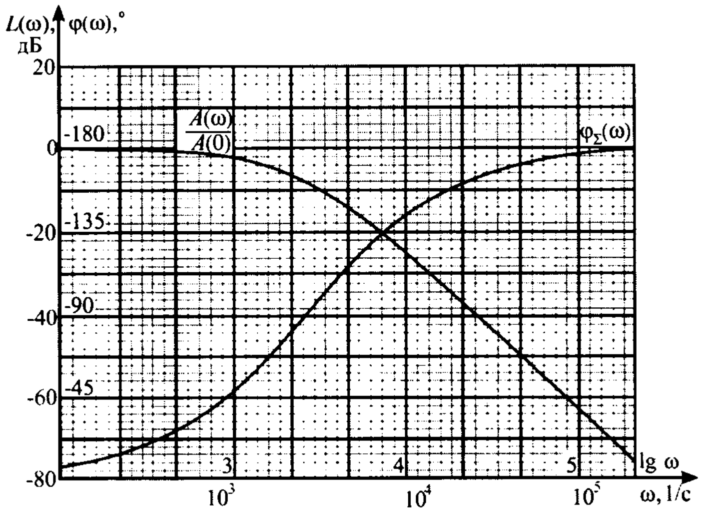


Рис. 5.17. Нормированная амплитудная и фазовая частотные характеристики МА с магнитоэлектрической обратной связью

Пример 5.9

Рассчитаем нормированные частотные характеристики для МА с исходными данными из предыдущего примера.

Результаты расчетов приведены в таблице, в которой значения $[A(\omega)/A(0)]$ даны в безразмерных цифрах, переведенных также в децибелы, имея в виду, что изменение в 3 дБ в линейном масштабе соответствует отношению примерно в $\left[\sqrt{2}=1{,}41\right]$ раза.

Характеристика		Частота ω, 1/с					
$A(\omega)/A(0)$	безразмерная	100	500	1000	2000	2645,5	5000
	дБ	0,996	0,919	0,757	–	0,282	0,177
φ, °		–2,13	–2,31	–2,81		–7,5	–12,0
		–5,7	–	–49,4	–77,9	–89,99	–

По данным таблицы на рис. 5.17 построены частотные характеристики.

Очевидно, если амплитудную характеристику на рис. 5.16 "поднять" до оси абсцисс, то получим нормированную характеристику, идентичную характеристике $\omega = \omega_{\text{мэ}} = 42645{,}5$ 1/с ($\lg\omega_{\text{мэ}} = 3{,}42$) $\varphi = -90°$.

5.3. КОРРЕКЦИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Газодинамическое, а тем более жидкостное, демпфирование приводит к передемпфированию ЧЭ даже при наличии перфорационных отверстии. Вместе с тем, при вакуумировании корпуса демпфирование может оказаться недостаточным.

Кроме того, для конструкции МА характерны малая масса ЧЭ и большая жесткость подвеса, обусловленная наличием датчика силы в цепи обратной связи (электрическая пружина), что приводит к увеличению собственной частоты колебаний ЧЭ. При этом увеличивается восприимчивость МА к высокочастотным виброшумам.

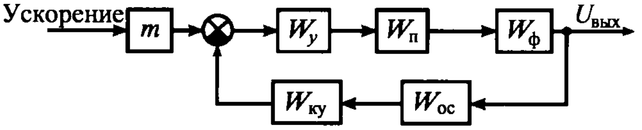


Рис. 5.18. Схема измерительной цепи МА с корректирующим устройством

Исправление (коррекция) относительного коэффициента демпфирования в нужную сторону (уменьшение или увеличение), а также постоянной времени МА обеспечивается специальными корректирующими устройствами, включаемыми в цепь обратной связи. Рассмотрим коррекцию относительного коэффициента демпфирования и постоянной времени на примере осевого МА, схема измерительной цепи которого, выполненная в соответствии с рис. 5.10, *а*, приведена на рис. 5.18.

Передаточная функция замкнутой цепи МА имеет вид

$$\Phi = \frac{mW_yW_{п}W_{ф}}{1+W_yW_{п}W_{ф}W_{ос}W_{ку}}. \qquad (5.52)$$

Типовые электрические схемы корректирующих устройств приведены на рис. 5.19.

Корректирующие устройства выполнены на операционных усилителях (ОУ) с внешними RC-цепями и имеют следующие передаточные функции:

схема (5.19, *а*) – $W_{ку} = R_2/R_1 + R_2Cs$;

схема (5.19, *б*) – $W_{ку} = R_2/R_1 - R_3Cs$;

схема (5.19, *в*) –

$$W_{ку} = R_2R_4C_1C_2s^2 + \left(\frac{R_4}{R_3}R_2C_1 + \frac{R_2}{R_1}R_4C_2\right)s + \frac{R_2R_4}{R_1R_3}.$$

Для того чтобы статические характеристики МА не зависели от введенных устройств и сохранялась возможность коррекции динамических характеристик, необходимо соблюсти ряд условий: 1) коэффициенты передачи ОУ должны быть единичными; 2) резисторы должны быть выполнены в одном технологическом цикле и иметь один номинал, т.е. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$.

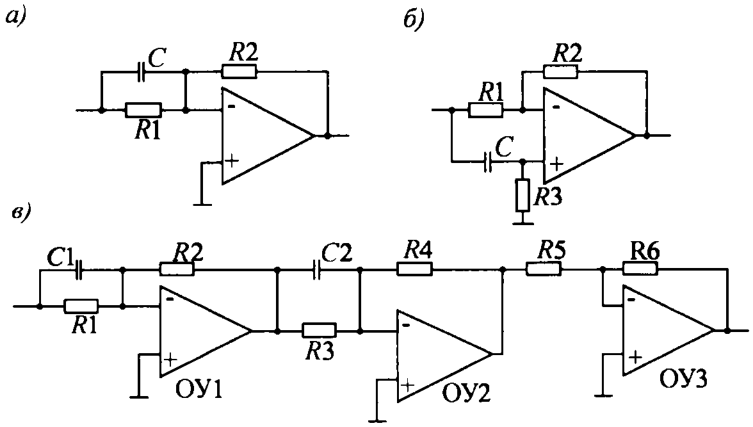


Рис. 5.19. Электрические схемы корректирующих устройств:
а, *б* – для увеличения и уменьшения коэффициента демпфирования; *в* – для коррекции коэффициента демпфирования и постоянной времени

При выполнении указанных условий передаточные функции корректирующих устройств принимают вид

схема (5.19, *а*) –

$$W_{\text{ку}} = 1 + RCs; \qquad (5.53)$$

схема (5.19, *б*) –

$$W_{\text{ку}} = 1 - RCs; \qquad (5.54)$$

схема (5.19, *в*) –

$$W_{\text{ку}} = R^2C_1C_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1. \qquad (5.55)$$

Подгонка требуемых номиналов коэффициентов демпфирования и собственной частоты обеспечивается подбором конденсаторов $C1$, $C2$.

В выражении (5.52) функцию $W_y(s)$ определим зависимостью (4.31), величину $W_{\text{п}}$ – формулой (5.3), передаточную функцию фильтра из выражения (5.4) будем считать $W_{\text{ф}} = K_{\text{ф}}$, станем полагать, что фильтр выполняет функции масштабного усилителя. Передаточную функцию обратной связи в предположении, что $W_{\text{ос}} = K_{\text{ос}}$ будем вычислять либо по формуле (5.17) для электростатической обратной связи, либо по формуле (5.39) для магнитоэлектрической обратной связи. При этих условиях передаточная функция (5.52) принимает вид

$$\Phi = \frac{mK_{\text{э}}}{ms^2 + K_{\text{ду}}s + G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}W_{\text{ку}}}, \qquad (5.56)$$

где $K_{\text{э}} = U_{\text{оп}}K_{\text{ф}}/h_0$.

Подставим в выражение (5.56) последовательно формулы (5.53) и (5.54) и получим

$$\Phi = \frac{mK_{\text{э}}}{ms^2 + (K_{\text{ду}} \pm K_{\text{э}}K_{\text{ос}}RC)s + G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}}. \qquad (5.57)$$

Из выражения (5.57) следует, что при использовании корректирующего устройства с передаточной функцией (5.53) увеличивается абсолютный коэффициент демпфирования (знак "+" в скобках знаменателя), а корректирующего устройства с передаточной функцией (5.54) уменьшается коэффициент демпфирования ЧЭ МА.

После подстановки передаточной функции (5.55) в функцию (5.56) определим

$$\Phi = \frac{mK_{\text{э}}}{(m + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}R^2C_1C_2)s^2 + \left[k_{\text{ду}} + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}R(C_1 + C_2)\right]s + G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}} = \frac{K_{\text{ст}}}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}, \qquad (5.58)$$

где

$$T = \left(\frac{m + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}R^2C_1C_2}{G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}}\right)^{0,5}; \; K_{\text{ст}} = \frac{mK_{\text{э}}}{G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}}; \; \xi = \frac{k_{\text{ду}} + R(C_1 + C_2)K_{\text{э}}K_{\text{ос}}}{2\sqrt{(m + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}R^2C_1C_2)(G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}})}}. \qquad (5.59)$$

В соответствии с выражениями (5.58), (5.59) корректирующее устройство с передаточной функцией (5.55) приводит к изменению коэффициента демпфирования и постоянной времени МА.

Функция (5.57) также может быть приведена к виду (5.58), а ее параметры будут равны

$$K_{\text{ст}} = \frac{mK_{\text{э}}}{G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}}; \quad T = \sqrt{\frac{m}{G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}}}};$$

$$\xi = \frac{K_{\text{ду}} \pm K_{\text{э}}K_{\text{ос}}RC}{2\sqrt{m(G_y + K_{\text{э}}K_{\text{ос}})}}. \qquad (5.60)$$

Пример 5.10

Рассчитаем емкость для передаточной функции (5.54), которая обеспечит относительный коэффициент демпфирования $\xi = 0{,}707$ для осевого компенсационного МА с магнитоэлектрической обратной связью со следующими исходными данными: $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг, $K_{\text{ду}} = 17{,}166$ Н·с/м, $G_y = 1575$ Н/м. В соответствии с выражением (5.37) $K_{\text{э}}K_{\text{ос}} = K_{\text{мэ}}$ и из примера (5.6) имеем $K_{\text{мэ}} = 2{,}475 \cdot 10^3$ кг/с^2. Условимся, что $R = 1000$ Ом и из формул (5.60) для ξ получим

$$C = \frac{17{,}116 - 2 \cdot 0{,}707\sqrt{0{,}29 \cdot 10^{-3}(1575 + 2475)}}{1000 \cdot 2{,}475 \cdot 10^3} =$$

$= 6{,}29 \cdot 10^{-6}$ Ф $= 6{,}29$ мФ.

5.4. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРАМИ

Если прибор состоит из звеньев, преобразующих входной сигнал x в выходные сигналы звеньев $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то вследствие погрешностей звеньев $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n$ погрешность прибора

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i\gamma_i), \qquad (5.61)$$

где $\gamma = \Delta y/y$; $\gamma_i = \Delta y_i/y_i$; β_i – коэффициент влияния i-го звена на суммарную погрешность.

Для определения β_i предположим, что все звенья, кроме i-го, не имеют погрешностей, и тогда из формулы (5.61) получим

$$\beta_i=\frac{\Delta y/y}{\Delta y_i/y_i},$$

а так как $\Delta y/y = \Delta S/S$ (S, ΔS – соответственно крутизна и приращение крутизны характеристики прибора); $\Delta y_i/y_i = \Delta S_i/S_i$ (S_i, ΔS_i – крутизна и приращение крутизны i-го звена), то $\beta_i = (\Delta S/\Delta S_i)/(S_i/S)$. Приняв $\Delta S/\Delta S_i \approx \partial S/\partial S_i$, найдем:

$$\beta_i=\frac{\partial S}{\partial S_i}\frac{S_i}{S}. \qquad (5.62)$$

Для схемы прибора с последовательным соединением звеньев (см. рис. 5.1) имеем $S=\prod_{i=1}^{n}S_i$ и получим $\partial S/\partial S_i = S/S_i$, т.е. $\beta_i = 1$, и, следовательно, суммарная погрешность равна сумме погрешностей всех звеньев.

Для схемы прибора с параллельно-встречным содинением звеньев (см. рис. 5.15) имеем $S = k_{пр}/(1 + \beta k_{пр})$ ($k_{пр}$, β – соответственно коэффициенты передачи прямой и обратной цепи), а частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial k_{пр}}=\frac{1}{(1+\beta k_{пр})^2};\ \frac{\partial S}{\partial \beta}=-\frac{k_{пр}^2}{(1+\beta k_{пр})^2}.$$

В соответствии с выражением (5.62) коэффициенты влияния прямой β_1 и обратной β_2 цепей:

$$\beta_1=\frac{1}{1+k_{пр}\beta};\ \beta_2=\frac{k_{пр}\beta}{1+k_{пр}\beta}, \qquad (5.63)$$

а общая погрешность согласно формуле (5.61) равна

$$\gamma=\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2; \qquad (5.64)$$

где γ_1, γ_2 – погрешности, вносимые прямой и обратной цепями.

На рис. 5.20 показана измерительная цепь акселерометра, эквивалентная схеме на рис. 5.15 для установившегося режима с учетом ошибок прямой $\delta_{пр}$ и обратной $\delta_{ос}$ цепей, где $k_{пр} = k(l + a)W_y$; $\beta = \frac{1}{m}W_{ос}$.

В соответствии с формулами (5.63), (5.64) и рис. 5.20 суммарная погрешность МА определяется равенством: $\delta_{\Sigma}=\delta_{пр}\beta_1+\delta_{ос}\beta_2$.

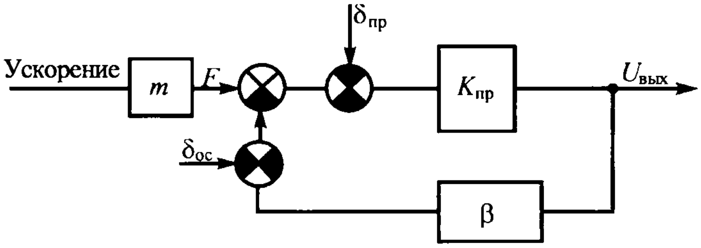


Рис. 5.20. Структурная схема МА

Пример 5.11

Рассчитаем коэффициенты влияния ошибок $\delta_{\text{пр}}$ и $\delta_{\text{ос}}$ для МА с параметрами (из примера 5.6): $K_{\text{п}} = K^{\text{мэ}}_{\text{п}a_x} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ с^2/м; $l + a = 5{,}3 \cdot 10^{-3}$ м; $W_y = 1{,}147 \cdot 10^6$ В/м; $W_{\text{ос}} = 2{,}15 \times 10^{-3}$ Тл/Ом.

Вычислим

$$K_{\text{пр}} = K_{\text{п}}(l + \alpha)W_y = $$
$$= 2 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}147 \cdot 10^6 = 0{,}122 \text{ В} \cdot \text{с}^2/\text{м};$$

$$\beta = W_{\text{ос}}/m = 2{,}15 \cdot 10^{-3}/0{,}29 \cdot 10^{-3} = 7{,}41 \ \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{Ом} \cdot \text{кг}}.$$

По формулам (5.63)получим $\beta_1 = 1/(1 + 0{,}122 \cdot 7{,}41) = 0{,}53$; $\beta_2 = 0{,}53 \cdot 0{,}122 \cdot 7{,}41 = 048$.

Основными причинами, вызывающими погрешность измерений МА, являются температура, вибрация и перекрестное ускорение. Изменение температуры окружающей среды приводит к изменению значения диэлектрической проницаемости ε, зазора h и линейных размеров маятника и провода катушек магнитоэлектрического датчика момента. Поясним последнее утверждение.

Помня, что с большой точностью имеют место приближенные равенства: $\Delta_{\text{мэ}} \approx K_{\text{мэ}}R$, $R \approx (l + a)(ak_{11} - k_{12})$ [см. формулу (5.44)], выражение (5.43) для крутизны характеристики МА с выходом по напряжению запишем в следующем виде, В/(м/с^2):

$$q \approx m(R_{\text{н}} + R_L)/(B_3 L). \qquad (5.65)$$

Выражение для крутизны характеристики с выходом по току:

$$q_I = m/(B_3 L) = (\rho a_{\text{м}} b_{\text{м}} c_{\text{м}})/(B_3 L). \qquad (5.66)$$

Пример 5.12

Вычислим погрешность расчета по приближенной формуле (5.66). Исходные данные: $m = 0{,}29 \cdot 10^{-3}$ кг, $B_3 = 0{,}25$ Тл, $L = 10$ м. Значение крутизны, вычисленное по "точным" формулам (см. пример 5.6), $q_I = 1{,}04 \cdot 10^{-4}$ А/(м/с^2). Вычислим крутизну характеристики по формуле (5.66), А/(м/с^2):

$$q_I = \frac{0{,}29 \cdot 10^{-3}}{0{,}25 \cdot 10} = 1{,}16 \cdot 10^{-4}.$$

Относительная погрешность вычислений 11,54 %.

На основании расчета, выполненного в примере, заключаем, что выражение (5.66) может быть использовано для анализа погрешностей МА.

Установим влияние температуры на погрешность измерений МА, полагая $B_3 = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$.

Вычислим частные производные по температуре от величин, входящих в q, перейдем к конечной разности и результаты разделим на исходное выражение (5.66). В итоге получим выражение для относительной температурной погрешности МА:

$$\delta_{\Sigma} = \left(\frac{1}{a_{\text{м}}} \frac{\partial a_{\text{м}}}{\partial T} + \frac{1}{b_{\text{м}}} \frac{\partial b_{\text{м}}}{\partial T} + \frac{1}{c_{\text{м}}} \frac{\partial c_{\text{м}}}{\partial T} - \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \right) \Delta T. \qquad (5.67)$$

Отметим, что конструктивными приемами относительная ошибка крутизны от температурного расширения монокристаллического маятника может быть скомпенсирована. Это относится и к зазору, если маятник и крышки, между которыми он находится, выполнены из одного материала. В случае, если крышки изготовлены из другого материала, например оптического стекла, полной стабилизации зазоров достичь не удается.

Таким образом, температурная погрешность МА обусловлена изменением зазоров между пластиной маятника и крышками, длиной провода катушек и, следовательно, изменением нормированного тока. Следовательно, требуется тщательная температурная калибровка МА.

Погрешность МА, обусловленная несимметрией магнитоэлектрической системы датчика момента, рассмотрена в работе [11]. Доля этой составляющей погрешности незначительна.

При действии перекрестного ускорения возникают дополнительная деформация упругих элементов подвеса и соответствующие им перемещения маятника. Перемещения вдоль оси y совпадают с направлением оси чувствительности и компенсируются датчиком момента, т.е. ошибки не вносят. Перемещения маятника вдоль оси z относительно неподвижных электродов датчика перемещений изменяют эффективную площадь перекрытия электродов и без принятия конструктивных мер могут привести к случайной ошибке. Вероятность появления указанной ошибки предотвращается увеличением площади электродов на крышках.

Заметим, что изложенный материал по погрешностям имеет в основном ознакомительный характер, так как эта проблема носит самостоятельное значение. В частности, вопросы виброустойчивости акселерометров, в том числе с монокристаллическим маятником, рассмотрены в работе [11].

5.5. МИКРОДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Измерительная цепь МДД может быть выполнена по рис. 5.2. В соответствии с ним и с учетом первого уравнения системы (4.78) предложена структурная схема измерительной цепи МДД, представленная на рис. 5.21.

Имея в виду, что площадь квадратной пластины (мембраны) A^2, передаточная функция пластины с жестким центром W_y определяется выражением (4.40), а передаточные функции датчика перемещений $W_п$ и $W_ф$ фильтра – соответственно выражениями (5.3) и (5.4), запишем передаточную функцию МДД прямого преобразования по отношению к давлению:

$$W(s) = \frac{U_{вых}}{\Delta p} =$$

$$= \frac{A^2 K_y K_ф U_{оп}}{h_0 (T_y^2 s^2 + 2T_y \xi_{ду} s + 1)(T_ф^2 s^2 + 2T_ф \xi_ф s + 1)}, \tag{5.68}$$

где коэффициент $K_y = 1/G_y$; время $T_y = 1/\omega_0 = \sqrt{m/G_y}$; $\xi_{ду} = k_{ду} / \left(2\sqrt{mG_y}\right)$; h_0 – зазор между неподвижными электродами и подвижными, расположенными на мембране; $U_{оп}$ – опорное напряжение питания измерительной цепи; $T_ф$, $K_ф$, $\xi_ф$ – параметры фильтра, определяемые выражениями (5.5).

Пример 5.13

Рассчитаем параметры фильтра (см. рис. 5.2) измерительной цепи МДД, работающего в диапазоне измерения давления $10^5 \ldots 10^6$ Па (1 ата = 10^5 Па). Исходные данные: $U_{оп}$ = 5 В, требуемая крутизна характеристики выходного сигнала $\frac{U_{вых}}{p}$ = 1 В/ата = 1 В/(10^5 Па) = 10^{-5} В/(Н/м^2); амплитуда пульсации выходного сигнала $U_п < 10^{-6}$ В.

Параметры ЧЭ МДД: m = 2,08·10^{-4} кг, A = 2·10^{-2} м, $\xi_{ду}$ = 0,22, G_y =15,55·10^4 Н/м, ω_0 = 2,73·10^4 1/с, h_0 = 20·10^{-6} м.

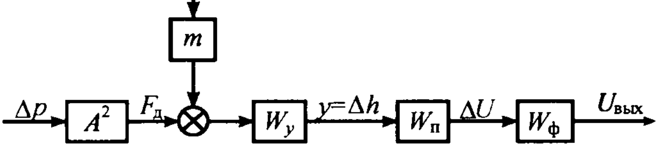


Рис. 5.21. Схема измерительной цепи МДД

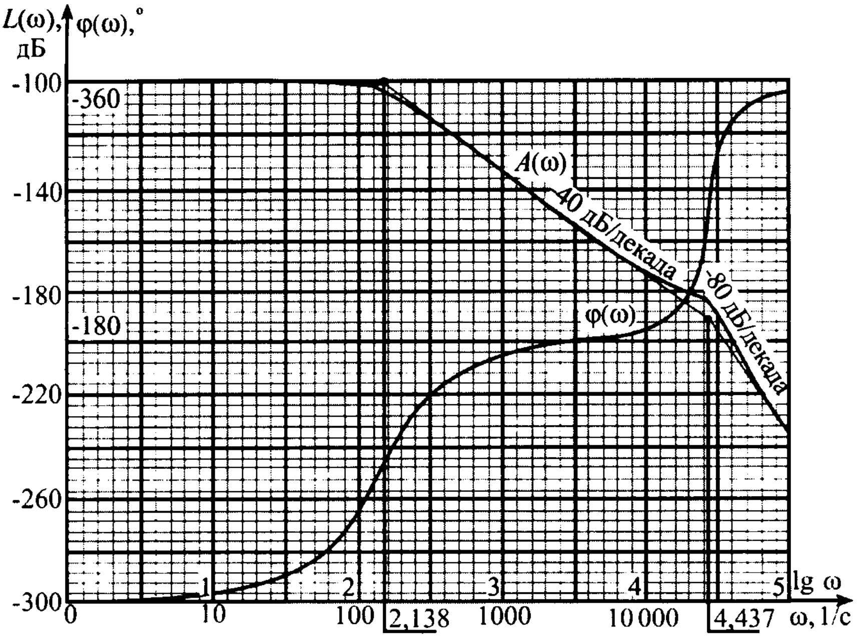


Рис. 5.22. Частотные характеристики МДД

Вычислим $K_y = 1/G_y = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ м/Н; $T_y = 1/\omega_0 = 3{,}66 \cdot 10^{-5}$ с. В выражении (5.68) положим $s = 0$ и получим статическую характеристику $U_{\text{вых}}/\Delta p = A^2 K_y K_\text{ф} U_{\text{оп}}/h_0$, откуда

$$K_\text{ф} = \frac{U_{\text{вых}} h_0}{\Delta p A^2 K_y U_{\text{оп}}} = \frac{1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 5} =$$

$$= 1{,}56 \cdot 10^{-2}.$$

В соответствии с зависимостями (5.5) $R_5 = 1{,}56 \cdot 10^{-2} R_3$. Примем $R_3 = R_4 = 10^4$ Ом, тогда $R_5 = 1{,}56 \cdot 10^2$ Ом. Далее [см. формулы (5.5)] для полученных значений сопротивлений $\xi_\text{ф} = 4{,}13\sqrt{C_3/C_4}$. Условимся, что $C_3 = 10^{-6}$ Ф и найдем для $\xi_\text{ф} = 0{,}707$ значение $C_4 = 34 \cdot 10^{-6}$ Ф. Вычислим $T_\text{ф} = \sqrt{R_4 R_5 C_3 C_4} = \sqrt{10^4 \cdot 1{,}56 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 34 \cdot 10^{-6}} = 7{,}28 \cdot 10^{-3}$ с ($\omega_\text{ф} = 1{,}37 \cdot 10^2$ 1/с). Примем $\omega_\text{г} = 6{,}28 \cdot 10^5$ 1/с и по формуле (5.7) получим $\Delta U_\text{п} < 10^{-6}$ В. Запишем передаточную функцию (5.68) для вычисленных параметров:

$$W(s) = \frac{10^{-5}}{(T_y^2 s^2 + 2T_y \xi_{\text{ду}} s + 1)(T_\text{ф}^2 s^2 + 2T_\text{ф} \xi_\text{ф} s + 1)},$$

где

$$T_y = 3{,}66 \cdot 10^{-5}\text{ с},\ \xi_{\text{ду}} = 0{,}22,\ \omega_0 = 2{,}7 \cdot 10^4\text{ 1/с}$$

$$(\lg\omega_0 = 4{,}047),\ T_\text{ф} = 7{,}28 \cdot 10^{-3}\text{ с},\ \xi_\text{ф} = 0{,}707,$$

$$\omega_\text{ф} = 1{,}37 \cdot 10^2\text{ 1/с}\ (\lg\omega_\text{ф} = 2{,}024).$$

Вычислим $20\lg 10^{-5} = -99/65$ дБ. Амплитудная $A(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$ частотные характеристики МДД приведены на рис. 5.22.

Из частотных характеристик следует, что ЧЭ (мембрана), обладая большой собственной частотой ω_0, не влияет на характеристики МДД для входных воздействий в диапазоне частот до 10^2 1/с.

5.6. МИКРОДАТЧИКИ ДАВЛЕНИЯ КОМПЕНСАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.6.1. Микродатчик давления с электростатической обратной связью

Принципиальная схема датчика давления, объединенная с электрической схемой, приведена на рис. 5.23. ЧЭ этого датчика давления выполнен из двух одинаковых кремниевых мембран с жестким центром, своими кромками приваренных к основанию из боросиликатного стекла. Предполагается, что плоскость каждой мембраны совмещена с кристаллографической плоскостью (100). Оси координат совпадают с направлением [110]. Упругая перемычка по периметру пластинки сформирована симметричной лункой с наклоном граней 54°44′ в семействе четырех плоскостей [111]. Для снижения массы жесткого центра с внешней стороны каждой мембраны часть материала вытравлена. Демпфирование мембран осуществляется за счет перекачки жидкости, находящейся в подмембранных полостях, через калиброванное отверстие.

Измерительные конденсаторы C_1 и C_2 образованы неподвижными электродами, выполненными на стеклянном основании, и подвижными, функции которых выполняют жесткие центры проводящих кремниевых мембран. Разностное давление $\Delta p = p_1 - p_2$ вызывает перемещение мембран относительно неподвижного электрода, которое емкостным мостом преобразуется в электрическое напряжение, интегрируется (операционным усилителем ОУ1), масштабируется (операционным усилителем ОУ2), и выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ в противофазе смещению мембран поступает на подвижные электроды, реализуя принцип силовой обратной связи.

Электрическая схема включает в себя также генератор высокой частоты с триггерным делителем (Т), логические элементы, ключевое устройство Кл1... Кл4 для питания емкостного преобразова-

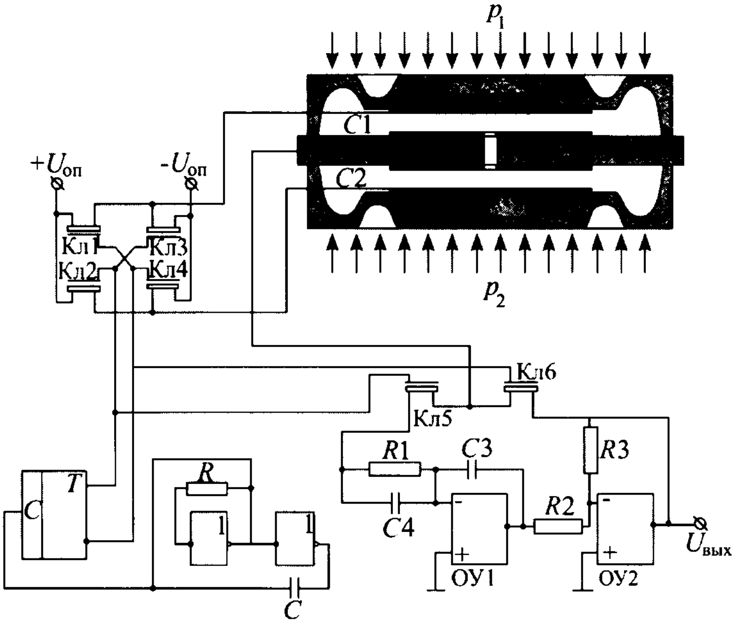


Рис. 5.23. Электрическая схема включения МДД с электростатической обратной связью

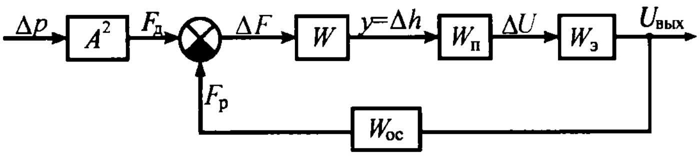


Рис. 5.24. Схема измерительной цепи МДД с электростатической обратной связью

теля и ключевое устройство Кл5, Кл6 для переключения схемы с режима измерения в режим силовой компенсации. Схема измерительной цепи МДД приведена на рис. 5.24

В соответствии с рис. 5.24 разностное давление Δp воспринимается квадратной мембраной площадью A^2. На ЧЭ (мембрану) с передаточной функцией

$$W = \frac{y}{\Delta F} = \frac{1}{ms^2 + k_{ду}s + G_y} \qquad (5.69)$$

действует разностная сила $\Delta F = F_д - F_р$. Электростатическая сила цепи обратной связи $F_р = U_{вых}W_{ос}$. Передаточная функция $W_{ос}$ определяется выражением (5.17). Перемещение мембраны $y = \Delta h$ измеряется преобразователем перемещений (емкостный мост), передаточная функция $W_п$ которого находится по формуле (5.3). Напряжение ΔU с емкостного моста преобразуется в электронном блоке в напряжение $U_{вых}$, поступающее также в цепь обратной связи. Полагая, что динамика электронного блока определяется интегратором, запишем его передаточную функцию:

$$W_э = (1 + \tau_2 S)/(\tau_1 S), \qquad (5.70)$$

где $\tau_1 = R_1C_3$; $\tau_2 = R_1C_4$; S – площадь взаимного перекрытия электродов емкостного преобразователя.

Будем полагать, что в выражении (5.70) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, и запишем передаточную функцию замкнутой цепи по рис. 5.24 с учетом формул (5.69), (5.17) и (5.3):

$$\Phi(s) = \frac{U_{вых}(s)}{\Delta p(s)} = \frac{K(1+\tau s)}{\alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + 1}, \quad (5.71)$$

где

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{h^2A^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп} S}; \quad \alpha = \frac{mh^3\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S};\\ \beta &= \frac{k_{ду}h^3\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S}; \quad \gamma = \frac{\tau(h^3G_y + 2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S)}{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S}, \end{aligned}\right\} \quad (5.72)$$

где S – площадь взаимного перекрытия электродов емкостного преобразователя.

Расчет частотных характеристик МДД по передаточной функции (5.71) при наличии ЭВМ не представляет затруднений. Впрочем, возможен и аналитический расчет частотных характеристик, так как решение кубического уравнения в знаменателе выражения (5.71), например, с помощью формул Кардана не связан с большими вычислительными трудностями. Покажем, что передаточную функцию МДД можно представить в виде колебательного звена, введя некоторые ограничения на его параметры.

Параметры МДД таковы, что знаменатель передаточной функции имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, и, следовательно, функцию (5.71) можно представить в виде

$$\frac{K(1+\tau s)}{\alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + 1E} =$$

$$= \frac{K(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1)} =$$

$$= \frac{K(1+\tau s)}{T_1T_2 s^3 + (T_2^2 + 2\xi T_1T_2)s^2 + (T_1 + 2\xi T_2)s + 1}.$$

Потребуем выполнения условия $T_1 = \tau$ и из равенства $\alpha = T_1 T_2$, имея в виду соотношения (5.72), получим

$$T_2 = \sqrt{\frac{mh^3}{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S}}. \qquad (5.73)$$

Далее, учитывая, что $T_2^2 << 2\xi T_2 T_1$, из равенства $2\xi T_2 T_1 = \beta$ найдем:

$$\xi = \frac{K_{ду}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S}{h^3}}}. \qquad (5.74)$$

Выражение (5.74) запишем в стандартной форме:

$$\xi = \frac{K_{ду}}{2\sqrt{mG_\Sigma}}, \qquad (5.75)$$

где

$$G_\Sigma = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S}{h^3}. \qquad (5.76)$$

Из неравенства $T_1 >> 2\xi T_2$ и равенства $\gamma = T_1$ следует, что выполнение условия $T_1 = \tau$ возможно, если $G_y << \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}^2 S}{h^3} \left(G_y << G_\Sigma\right)$, т.е. жесткость мембраны должна быть значительно меньше жесткости, создаваемой электростатической силой.

Можно наложить также ограничение на значение h, исходя из того, что при $\Delta p = p_{max}$ выходное напряжение должно быть максимальным $U_{вых} = U_{оп}$. Положив в (5.71) $s = 0$, получим

$$U_{вых} = U_{оп} = Kp_{max} = \left(h^2 p_{max}\right) / \left(2\varepsilon\varepsilon_0 U_{оп}\right),$$

откуда

$$h = \sqrt{\left(2\varepsilon\varepsilon U_{оп}^2\right) / p_{max}}. \qquad (5.77)$$

Таким образом, для принятых допущений передаточная функция МДД с электростатической компенсацией может быть представлена в виде

$$\Phi(s) = \frac{K}{T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1}, \qquad (5.78)$$

где K определяется из формул (5.72), а T_2 и ξ – по формулам (5.73), (5.74).

Пример. 5.14

Вычислим параметры передаточной функции (5.78) МДД. Исходные данные: $p_{max} = 50$ Па, $U_{оп} = 5$ В, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; кремниевая пластина ориентирована в плоскости (100) и имеет параметры $E_{(100)} = 1{,}69 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0{,}358$, ρ = 2,33 × × 10^3 кг/м^3. Размеры пластины: $A = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $a = 0{,}5A$; толщина жесткого центра $c_м = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м; толщина упругой перемычки $c_п = 10^{-5}$ м; ранее был определен коэффициент абсолютного демпфирования $k_{ду} = 0{,}624$ Н·с/м.

По формуле (5.77) рассчитаем зазор между электродами:

$$h = \sqrt{\left(2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 25\right)/50} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

По формуле (5.76) вычислим жесткость, обеспечиваемую электростатическими силами цепи обратной связи:

$$G_\Sigma = \left(2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\right)/27 \cdot 10^{-18} = \\ = 6{,}5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}.$$

Рассчитаем жесткость упругих перемычек. Вначале определим цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{E_{(100)} c_п^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1{,}69 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-15}}{12(1 - 0{,}358^2)} = \\ = 1{,}62 \cdot 10^{-5} \text{ Н·м}.$$

По формуле (3.50) получим:

$$G_y = \frac{8 \cdot 3{,}14^4 \cdot 1{,}62 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-4}(1 - 0{,}5)^4} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м}.$$

Значение величины G_y на порядок меньше значения G_Σ, что отвечает одному из условий, принятых для получения функции (5.78). Вычислим массу мембраны $m = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$ кг и по формуле (5.73) найдем постоянную времени:

$$T_2 = \sqrt{\frac{1{,}23\cdot10^{-4}\cdot3^3\cdot10^{-18}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot25\cdot4\cdot10^{-4}}} = 1{,}37\cdot10^{-4}\ \text{с}$$

$$(\omega_2 = 0{,}73\cdot10^4\ 1/\text{с}).$$

По формулае (5.75) рассчитаем относительный коэффициент демпфирования:

$$\xi = \frac{0{,}624}{2\sqrt{1{,}23\cdot10^{-4}\cdot6{,}5\cdot10^3}} = 0{,}35\,.$$

В соответствии с формулами (5.72) получим

$$K = \frac{9\cdot10^{-12}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot5} = 0{,}1\ \text{В/Па}\,.$$

Из приведенного примера следует, что возможен подбор конструктивных параметров МДД, для которых справедлива передаточная функция вида (5.78).

Анализируя цифровые данные при выполнении примера, нетрудно было заметить, что обеспечить $G_\Sigma > G_y$ для давления $p_{\max} > 100$ Па уже затруднительно.

МДД с электростатической обратной связью обладают приемлемыми динамическими характеристиками при измерении давления, не превышающего 100...200 Па.

5.6.2. Микродатчик давления с магнитоэлектрической обратной связью

МДД с магнитоэлектрической цепью компенсации имеют увеличенный на два-три порядка диапазон измерений по сравнению с МДД, имеющими электростатическую цепь компенсации. На рис. 5.25 приведена схема ЧЭ МДД в гибридном исполнении.

ЧЭ содержит три кремниевые мембраны: рабочую *1* и две промежуточные – *3* и *8*, которые непосредственно воспринимают давление p_1 и p_2. Газ, заполняющий полость ЧЭ, под действием разностного давления $\Delta p = p_1 - p_2$ через калиброванное отверстие *7* воздействует на рабочую мембрану *1*, которая имеет внешние размеры $A \times A$ и жесткий центр с размерами $a \times a$. На жестком центре размещены катушки *5*. На стеклянных крышках *2* в магнитопроводах предусмотрены постоянные магниты *4*. Измерение перемещений рабочей мембраны может быть выполнено с помощью тензо- или магниторезисторов, имплантированных в рабочую мембрану.

В качестве возможного варианта на рис. 5.25 показан электростатический преобразователь перемещений, подвижные электроды которого расположены на жестком центре мембраны, а неподвижные – на торцах магнитов. В исходном положении между парой электродов *9* зазор одинаков (h_0). Принцип формирования магнитоэлектрической обратной связи изложен в подразд. 5.2.2, а схема измерительной цепи может быть выполнена аналогично рис. 5.13.

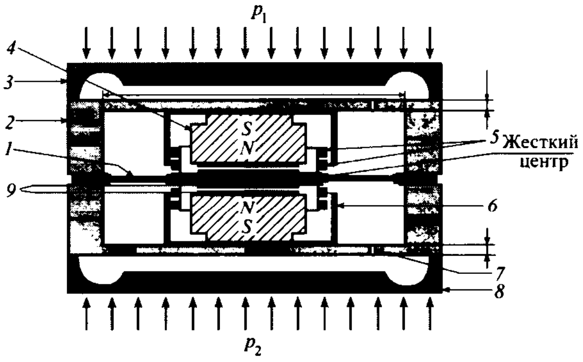


Рис. 5.25. ЧЭ МДД с магнитоэлектрическим силовым преобразователем в гибридном исполнении:
1 – рабочая мембрана; *2* – стеклянная крышка; *3*, *8* – промежуточные мембраны; *4* – постоянный магнит; *5* – катушка; *6* – магнитопровод; *7* – калиброванное отверстие; *9* – электроды

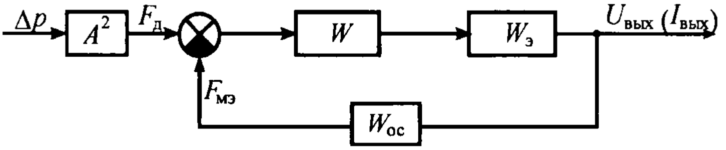


Рис. 5.26. Схема измерительной цепи МДД с магнитоэлектрической обратной связью

Схема измерительной цепи МДД приведена на рис. 5.26, на которой передаточная функция $W(s)$ ЧЭ соответствует формуле (5.69), а передаточные функции блока электроники и звена обратной связи определяются из выражений (5.34) и (5.37):

$$W_э = (K_y U_1) / h_0; \; W_{ос} = BL / (R_н + R_L), \tag{5.79}$$

где K_y, U_1 – параметры электрической схемы, определенные в подразд. 5.2.2; B – индукция, создаваемая магнитами; L – общая длина провода катушек; $R_н$, R_L – активное и индуктивное сопротивления обмоток катушек.

В соответствии с рис. 5.26 получим передаточную функцию замкнутой цепи:

$$\Phi(s) = \frac{I_{вых}}{\Delta p} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}, \tag{5.80}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &T = \sqrt{m(G_y + K_{мэ})}; \; \xi = k_{ду} / 2\sqrt{(G_y + K_{мэ})}; \\ &K = A^2 K_{мэ} / \left[BL(G_y + K_{мэ})\right]; \\ &K_{мэ} = (K_y U_1 BL) / \left[h_0 (R_н + R_L)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.81}$$

Заметим, что величина $K_{мэ}$ вычисляется по формуле (5.37), а величина G_y по формуле (3.50).

Пример 5.15

Рассчитаем параметры передаточной функции (5.80) для исходных данных: полагаем, что промежуточные мембраны передают давление на рабочую мембрану с единичным коэффициентом передачи; квадратная рабочая мембрана изготовлена из кремния в плоскости (100) и имеет размеры $A = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $a = 0{,}5$ A, $c_м = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м, $c_п = 10^{-5}$ м (в предыдущем примере была вычислена жесткость мембраны $G_y = 5 \cdot 10^2$ Н/м); $h_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ м; масса мембраны вместе с катушками – $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг. Принимаем: $B = 0{,}25$ Тл, $R_н = 1000$ Ом, $R_L = 160$ Ом ($L = 10$ м); для электрической схемы по рис. 5.13 было получено $U_1 = 2{,}7$ В, $K_y = 8{,}5$.

Полагаем, что полость ЧЭ заполнена азотом [$\mu = 1{,}67 \cdot 10^{-5}$ кг/ (см·с)], калиброванные отверстия имеют $l = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м и диаметр $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м. По формуле (4.99) вычислим коэффициент демпфирования $k_{ду} = 2{,}68 \times 10^{-2}$ Н·с/м.

По соотношениям (5.81) вычислим:

$$K_{мэ} = \frac{8{,}5 \cdot 2{,}7 \cdot 0{,}25 \cdot 10}{(1000 + 160) 5 \cdot 10^{-6}} \approx 10^4 \text{ Н/м};$$

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^2 + 10^4}} = 1{,}38 \cdot 10^{-4} \text{ c};$$

$$\xi = \frac{2{,}68 \cdot 10^{-2}}{2\sqrt{2 \cdot 10^{-4} (5 \cdot 10^2 + 10^4)}} \approx 0{,}01,$$

$$K = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4}{0{,}25 \cdot 10 (5 \cdot 10^2 + 10^4)} = 1{,}52 \cdot 10^{-4} \text{ А/(Н·м}^2\text{)}.$$

Напомним, что давление является важной физической характеристикой многих процессов. Датчики давления применяются в авиационных приборах: измерителях воздушной скорости и скорости подъема (вариометры), высотомерах и др.

5.7. ФОРМИРОВАНИЕ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ МИКРОГИРОСКОПОВ

5.7.1. Прямое преобразование

А. Микрогироскопы LR- и LL-типов

Рассмотрим на примерах гироскопов LR- и LL-типов прямое преобразование измеряемой физической величины – угловой скорости в выходной сигнал МГ – напряжение на выходе измерительной схемы.

Воспользуемся вначале уравнениями системы (4.142) применительно к схеме на рис. 4.10 для варианта гироскопа LR-типа (РД – изменение координаты x; РЧ – изменение координаты α). Определим электростатические силы в правых частях уравнений системы (4.142).

В МГ по рис. 4.10 движение по координате α не изменяет зазора между пластинами гребенчатых структур приводов. В РД по координате X происходит изменение площадей взаимного перекрытия пластин, но возникающие электростатические силы между ними направлены вдоль оси Z. Таким образом, взаимодействие между пластинами гребенчатых структур приводов не приводит к возникновению момента сил вокруг оси Z.

Пусть расстояние от оси Z до ЦМ ИМ $x_0 = l + \Delta x$ (l – постоянный геометрический размер, Δx – смещение из-за упругой деформации подвеса). При угловых колебаниях по координате α изменяется зазор Δy_0 между пластинами конденсаторов $C1$ и $C2$ съема информации (рис. 4.10 и 5.27). Если площадь взаимного перекрытия пластин S не меняется, то в соответствии с формулой (3.85) получим электростатические силы

$$F_{эy} = -(\varepsilon\varepsilon_0 S U_{оп}^2)/2(\Delta y_0 \pm \Delta y)^2,$$

где $U_{оп}$ – опорное напряжение на пластинах конденсаторов; знак "+" для конденсатора $C1$, а знак "–" для конденсатора $C2$.

Момент электростатических сил

$$M_{эл} = -\frac{\delta W}{\delta\alpha} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U_{оп}^2}{2}(l+\Delta x)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{(\Delta y_0+\Delta y)^2} - \frac{1}{(\Delta y_0-\Delta y)^2}\right] =$$
$$= \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S U_{оп}^2 (l+\Delta x)\Delta y_0 \Delta y}{(\Delta y_0+\Delta y)^2(\Delta y_0-\Delta y)^2}.$$

Имея в виду, что $\Delta y << \Delta y_0$ и $\Delta y \approx$ $\approx (l + \Delta x)\alpha$, получим

$$\frac{\delta W}{\delta\alpha} \approx -\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S U_{оп}^2}{\Delta y_0^3}(l+\Delta x)\Delta y = -2C_s\left(\frac{U_{оп}}{\Delta y_0}\right)^2 \times$$
$$\times(l+\Delta x)^2\alpha, \tag{5.82}$$

где $C_s = (\varepsilon\varepsilon_0 S)/\Delta y_0$ – емкость конденсаторов при $\Delta y = 0$.

Полагая ширину пальцев гребенчатых структур приводов такой, чтобы при наличии угловых движений по координате α изменение площадей взаимного перекрытия пластин происходило только за счет координаты $x_0 = l + \Delta x$, в соответствии с формулой (3.126) запишем

$$F_x^э = -\delta W/\delta x_0 = 4n\frac{\delta C_i}{\delta x_0}U_0 U_x \sin pt, \tag{5.83}$$

где $p = \omega_x$ для резонансного случая РД.

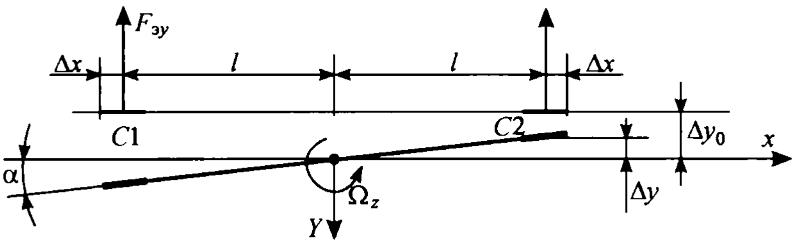


Рис. 5.27. К определению электростатического момента

С учетом электростатических сил и, имея в виду, что $x_0 = l + \Delta x$ и $l >> \Delta x$, запишем уравнения системы (4.142) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}&\left[C_p + 2\left(C_1 + ml^2\right)\right]\dot{\alpha} + b_\alpha\dot{\alpha} + \left\{G_\alpha - G_э + \left(A_p + 2A_1\right)\Omega_y^2 - \right.\\&\left. - \left[B_p + 2\left(B_1 + ml^2\right)\right]\Omega_x^2\right\}\alpha = -4m\left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\Delta\dot{x}l;\\&m\left\{\Delta\ddot{x} - \left[\left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)^2 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)^2\right]l\right\} + b_{x0}\Delta\dot{x} + G_{x0}\Delta x = ma_x + F_0\sin pt,\end{aligned}\right\} \quad (5.84)$$

где $G_э = 2C_s\left(\frac{U_{оп}}{\Delta y_0}\right)^2 l^2$; $F_0 = 4n\frac{\delta C_i}{\delta x_0}U_{оп}U_x$.

Из первого уравнения системы (5.84) следует, что момент, обусловленный ускорением Кориолиса, приводит к колебаниям МГ по координате α. Электростатическая жесткость $G_э$ уменьшает эффективную жесткость подвеса. Наличие перекрестных угловых скоростей Ω_x, Ω_y нелинейным образом влияет на эффективную жесткость подвеса. Из второго уравнения системы (5.84) видно, что скорости Ω_x, Ω_y, Ω_z создают центробежное ускорение и соответствующие им силы инерции.

Выполним приближенное аналитическое исследование уравнений системы (5.84), имея в виду, что угол α – малая величина и $\Omega_z >> \Omega_x$, Ω_y. При таких условиях наблюдается приближенное равенство: $\left(\Omega_z + \dot{\alpha}\right)^2 + \left(\Omega_y - \Omega_x\alpha\right)^2 \approx \Omega_z^2 + \Omega_y^2 + \left(2\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\dot{\alpha}$ – и система (5.84) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}C_\Sigma\ddot{\alpha} + b_\alpha\dot{\alpha} + G_\Sigma\alpha = -4m\Omega_z l\Delta\dot{x} - 4m\dot{\alpha}l\Delta\dot{x};\\m\Delta\ddot{x} + b_{x0}\Delta\dot{x} + G_{x0}\Delta x = ma_\Sigma + F_0\sin pt + m\left(2\Omega_z + \dot{\alpha}\right)\dot{\alpha}l,\end{aligned}\right\} \quad (5.85)$$

где $C_\Sigma = C_p + 2\left(C_1 + ml^2\right)$; $G_\Sigma = G_\alpha - G_э + \left(A_p + 2A_1\right)\Omega_y^2 - \left[B_p + 2\left(B_1 + ml^2\right)\right]\Omega_x^2$; $a_\Sigma = a_x + l\left(\Omega_z^2 + \Omega_y^2\right)$.

Последнее слагаемое в правой части первого уравнения можно рассматривать как погрешность, вносимую в измерение угловой скорости Ω_z относительной скоростью вращения рамки $\dot{\alpha}$. Последнее слагаемое в правой части второго уравнения является инерционной силой, также обусловленной угловой скоростью $\dot{\alpha}$, которая несколько искажает РД. Можно предположить, что влияние этих составляющих удается минимизировать соответствующим подбором параметров МГ и режимов его настройки. В любом случае нужно вначале решить систему (5.85) без учета этих слагаемых, а затем оценить их влияние. Пойдем по этому пути, и в таком случае второе уравнение становится независимым от первого и может быть записано в форме:

$$\Delta\ddot{x} + 2\xi_x\Delta\dot{x} + \omega_{x0}^2\Delta x = a_\Sigma + \frac{F_0}{m}\sin pt, \quad (5.86)$$

где $2\xi_x = b_{x0}/m$; $\omega_{x0}^2 = G_{x0}/m$.

Решение уравнения (5.86) имеет известный вид:

$$\Delta x = e^{-\xi_x t}\left\{-\frac{1}{\omega_x}\left[\xi_x\left(E\sin\gamma + E_1\right) + Ep\cos\gamma\right]\sin\omega_x t - \right.$$
$$\left. - \left(E\sin\gamma + E_1\right)\cos\omega_x t\right\} + E\sin\left(pt + \gamma\right) + E_1, \quad (5.87)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\omega_x = \sqrt{\omega_{x0}^2 - \xi_x^2} = \sqrt{\frac{G_{x0}}{m}\left(1 - \frac{b_{x0}^2}{4mG_{x0}}\right)};\\E = F_0 \Big/ \left(m\sqrt{\left(\omega_{x0}^2 - p^2\right)^2 + 4\xi_x^2 p^2}\right);\\E_1 = \left[a_x + l\left(\Omega_z^2 + \Omega_y^2\right)\right] \Big/ \omega_{x0}^2;\ \operatorname{tg}\gamma = -\frac{2\xi_x p}{\omega_{x0}^2 - p^2}.\end{aligned}\right\} \quad (5.88)$$

Имея в виду затухание собственных колебаний МГ, а также подбор параметров электроники и привода, обеспечивающих нейтрализацию сил демпфирования в РД, можно ограничиться частным решением

$$\Delta x = E\sin(pt+\gamma)+E_1 . \qquad (5.89)$$

Судя по формуле (5.89), ИМ в РД совершают гармонические колебания относительно положения равновесия E_1 со сдвигом по фазе γ по отношению к колебаниям, генерируемым источником переменного напряжения U_x.

Аналогично уравнению (5.86) и при тех же допущениях перепишем первое уравнение системы (5.85) с учетом формулы (5.89):

$$\ddot{\alpha}+2\xi_\alpha\dot{\alpha}+\omega_{\alpha0}^2=\frac{D}{C_\Sigma}\cos(pt+\gamma), \qquad (5.90)$$

где $2\xi_\alpha = b_\alpha / G_\Sigma$; $\omega_{\alpha0}^2 = G_\Sigma / C_\Sigma$; $D = -4m\Omega_z lpE$.

Имея в виду затухание собственных колебаний, запишем частное решение уравнения (5.90):

$$\alpha=\frac{-\Omega_z 4F_0 lp\cos(pt+\gamma)}{C_\Sigma\sqrt{\left[\left(\omega_{x0}^2-p^2\right)^2+4\xi_x^2p^2\right]\left[\left(\omega_{\alpha0}^2-p^2\right)^2+4\xi_\alpha^2p^2\right]}}, \qquad (5.91)$$

где $\operatorname{tg}(\gamma-\delta)=2\xi_\alpha p/\left(\omega_{\alpha0}^2-p^2\right)$.

Так как произведение $\dot{\alpha}\Delta\dot{x}$ в первом уравнении системы (5.85) приводит к появлению возмущающего момента на двойной частоте p, то соответствующая ему составляющая сигнала по углу α может быть отфильтрована средствами электроники.

Учитывая малый порядок величин ξ_x, ξ_α, запишем приближенное выражение

$$\alpha \approx \frac{4K_{\text{м.у}}F_0 l\Omega_z\cos pt}{C_\Sigma p^3}, \qquad (5.92)$$

где $K_{\text{м.у}}=1/\left[\left(1-\omega_{x0}^2/p^2\right)\left(1-\omega_{\alpha0}^2/p^2\right)\right]$ – механический коэффициент "усиления" гироскопа.

В соответствии с формулой (5.92) для первого этапа преобразования входного сигнала получим коэффициент передачи:

$$\alpha/\Omega_z=\left(4F_0lK_{\text{м.у}}\right)/\left(C_\Sigma p^3\right).$$

Из рис. 5.27 следует геометрический коэффициент передачи:

$$\Delta y/\alpha = l .$$

Если принять, что конденсаторы $C1$, $C2$ включены в мостовую схему, например аналогично рис. 3.18, то, используя формулу (3.57), получим

$$\Delta U/\Delta y = U_{\text{оп}}/2\Delta y_0 .$$

С выхода электронной схемы с коэффициентом усиления $K_{\text{у}}$ будет получено выходное напряжение $U_{\text{вых}} = K_{\text{у}}\Delta U$.

Объединим приведенные зависимости и получим масштабный коэффициент передачи МГ, В/(1/с):

$$U_{\text{вых}}/\Omega_z=\left(2F_0l^2U_{\text{оп}}K_{\text{м.у}}K_{\text{у}}\right)/\left(C_\Sigma p^3\Delta y_0\right). \qquad (5.93)$$

Очевидно, что крутизна характеристики нелинейным образом зависит от режима настройки гироскопа (см. выражение для $K_{\text{м.у}}$).

Рассмотрим теперь схему МГ по рис. 4.10, в котором РЧ – это поступательное движение ИМ перпендикулярно к плоскости, в которой осуществляется РД, а перемещение по координате α отсутствует (α = 0). Уравнение (4.133) для этого случая принимает вид

$$2\Omega_z\left[\left(m_\text{р}+2m\right)\left(y\dot{y}+x\dot{x}\right)+2m\left(\dot{y}_0y_0+\dot{x}_0x_0\right)\right]+$$
$$+\left(m_\text{р}+2m\right)\left(x\ddot{y}-y\ddot{x}\right)+2m\left(x_0\ddot{y}_0-y_0\ddot{x}_0\right)=$$
$$=M_\alpha-\frac{\partial W}{\partial\alpha}.$$

Данное уравнение может быть использовано для вычисления динамических реакций в элементах крепления рамки с корпусом при расчете их на прочность.

Полагая, что малые приращения x, y за счет упругости рамки значительно меньше текущих координат x_0, y_0 ИМ либо рамка выполнена такой жесткости, что $x=y=0$, систему (4.137) исключим из рассмотрения.

Имея в виду, что $x_0=l+\Delta x$ и $l>>\Delta x$, а $y_0=\Delta y$, запишем систему (4.138) в виде

$$\left.\begin{aligned}&m\Delta\ddot{x}+b_{x0}\Delta\dot{x}+G_{x0}\Delta x=m\left[a_x+l\left(\Omega_z^2\pm\Omega_y^2\right)\mp\Omega_x\Omega_y\Delta y\right]+\\&+F_0\sin pt+2m\Delta\dot{y}\Omega_z;\\&m\Delta\ddot{y}+b_{y0}\Delta\dot{y}+G_{y0}\Delta y=m\left[a_y\pm\left(\Omega_z^2\pm\Omega_x^2\right)\Delta y-\Omega_x\Omega_y\Delta x\right]+\\&+F_{\text{эу}}\mp2m\Delta\dot{x}\Omega_z,\end{aligned}\right\}\qquad(5.94)$$

где F_0 определяется в пояснении к системе (5.84), а электростатическая сила притяжения пластин конденсаторов – в соответствии с формулой (3.85): $F_{\text{эу}}\approx\left(\varepsilon\varepsilon_0SU_\text{оп}^2\right)/\left(2\Delta y_0^2\right)$, ($\Delta y_0$–расстояние между пластинами измерительных конденсаторов, $\Delta y_0>>\Delta y$).

Если, как и в предыдущем случае, иметь в виду, что применение МГ предполагает $\Omega_z >> \Omega_x$, Ω_y и считать, что привод обеспечивает выполнение условия $\left|F_0\right|>>2m\Delta\dot{y}\Omega_z$, то первое уравнение системы (5.94) становится идентичным уравнению (5.86) и для него справедливы решения (5.87), (5.89). Используем решение (5.89) и перепишем второе уравнение системы (5.94) в виде

$$\begin{aligned}&\Delta\ddot{y}+2\xi_{y0}\Delta\dot{y}+\omega_y^2\Delta y=\\&=a_{\Sigma y}-EL\sin\left[\left(pt+\gamma\right)\pm\nu\right],\end{aligned}\qquad(5.95)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&2\xi_{y0}=b_{y0}/m;\ \omega_y^2=\omega_{y0}^2\mp\left(\Omega_z^2+\Omega_x^2\right);\ \omega_{y0}^2=G_{y0}/m;\\&a_{\Sigma y}=a_y-\Omega_x\Omega_yE_1+F_{\text{эу}}/m;\ E,E_1,\gamma\ -\text{см. формулы (5.88)};\\&L=\sqrt{4\left(\Omega_zp\right)^2+\left(\Omega_x\Omega_y\right)^2};\ \text{tg}\nu=\left(2\Omega_zp\right)/\left(\Omega_x\Omega_y\right).\end{aligned}\right\}\qquad(5.96)$$

Запишем частное решение уравнения (5.95) для нулевых, начальных условий:

$$\Delta y=\frac{a_{\Sigma y}}{\omega_y^2}+\frac{EL\cos\vartheta}{p^2-\omega_y^2}\sin\left[\left(pt+\gamma\right)\pm\nu\right],\qquad(5.97)$$

где $\text{tg}\vartheta=2\xi_{y0}/\left(p^2-\omega_y^2\right)$.

Имея в виду, что $\xi_{y0}\approx0$, $\nu\approx90°$, $\vartheta\approx90°$ с учетом формул (5.87), (5.96) решение (5.97) принимает вид

$$\Delta y\approx\frac{a_{\Sigma y}}{\omega_y^2}\mp\frac{2F_0\Omega_z\cos\left(pt+\gamma\right)}{mp^3\left(1-\dfrac{\omega_{x0}^2}{p^2}\right)\left(1-\dfrac{\omega_y^2}{p^2}\right)}.\qquad(5.98)$$

Очевидно, что гармоническая составляющая выражения (5.98) физически идентична выражению (5.91). Формальное их совпадение можно получить, если положить $C_\Sigma = 2ml^2$ и $\Delta y = l/\alpha$. Из формулы (5.98) следует, что имеет место постоянное смещение ИМ, не зависящее от измеряемой угловой скорости, которое приведет к появлению ложного сигнала на выходе электронной схемы. Очевидно, что этот сигнал может быть отфильтрован от полезного сигнала.

Аналогично предыдущему можно получить выражение для масштабного коэффициента МГ:

$$U_{\text{вых}}/\Omega_z = \left(F_0 K_{\text{м}y} K_y U_{\text{оп}}\right)/\left(mp^3 \Delta y_0\right), \tag{5.99}$$

где в выражении для $K_{\text{м}y}$ вместо величины $\omega_{\alpha 0}$ нужно записать ω_y.

Уравнения системы (4.138) пригодны для схемы МГ по рис. 3.8, имея в виду, что структура МГ расположена в плоскости *xy*. Для тех же условий, при которых записана система (5.94), первое уравнение этой системы, описывающее РД, остается без изменений и для рассматриваемой схемы МГ. Электростатические силы для этой схемы рассмотрены в подразд. 4.6. Пусть выполнено условие, при котором компенсируется квадратурная ошибка. Воспользуемся матрицей коэффициентов жесткости (4.170) и второе уравнение системы (4.138) для РЧ запишем в виде

$$m\Delta\ddot{y} + b_{y0}\Delta\dot{y} + G_{\text{э}}y =$$
$$= m\left[a_y + \left(\Omega_z^2 + \Omega_x^2\right)\Delta y - \Omega_x\Omega_y\Delta x\right] - 2m\Delta\dot{x}\Omega_z, \tag{5.100}$$

где $G_{\text{э}} = G_{\text{y}0} - \dfrac{C_0}{\Delta y_0^2}\left(U_0^2 + U_q^2 + U_x^2\right)$ – эффективная жесткость подвеса.

Уравнение (5.100) перепишем в форме

$$\begin{aligned} &\Delta\ddot{y} + 2\xi_{y0}\Delta\dot{y} + \omega_y^2\Delta y = \\ &= a_{\Sigma y} - EL\sin\left[(pt + \gamma) + \nu\right], \end{aligned} \tag{5.101}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\omega_y^2 = \omega_{y0}^2 - \left(\Omega_z^2 + \Omega_x^2\right) - C_0\left(U_0^2 + U_q^2 + U_x^2\right)/\left(m\Delta y_0^2\right); \\ &a_{\Sigma y} = a_y - \Omega_x\Omega_y E_1;\ \text{величины } \omega_{y0}, E, E_1, L, \gamma, \nu \\ &\text{определяются по зависимостям (5.88), (5.96).} \end{aligned}\right\} \tag{5.102}$$

Уравнение (5.101) по форме идентично уравнению (5.95), и, следовательно, для него справедливо решение (5.98).

Получим выражение для масштабного коэффициента МГ, полагая, что измерительные конденсаторы включены по схеме 3.55 (паразитные емкости учитывать не будем). Измерительная цепь МГ включает в себя такую последовательность преобразований: $\Omega_z \to \Delta y \to \Delta C \to U_{\text{и}} \to U_{\text{вых}}$. Величина Δy определим из выражения (5.98). Вычислим изменение емкости:

$$\Delta C = C_1 - C_2 =$$
$$= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\Delta y_0 - \Delta y} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\Delta y_0 + \Delta y} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S 2\Delta y}{\Delta y_0^2 - \Delta y^2}$$

при $S = \text{const}$.

Имея в виду, что $\Delta y_0 \gg \Delta y$, получим $\Delta C = \dfrac{2C_0\Delta y}{\Delta y_0}$, где C_0 – начальное значение измерительных емкостей.

Напряжение на выходе интегратора:

$$U_{\text{и}} = U_{\text{оп}}\left(C_1 - C_2\right)/C_{\text{и}} = U_{\text{оп}}\Delta C/C_{\text{и}}.$$

Если имеется дополнительное усиление, то $U_{\text{вых}} = K_y U_{\text{и}}$. Таким образом, масштабный коэффициент МГ, В/(1/с), определяется выражением

$$\frac{U_{\text{вых}}}{\Omega_z} = \frac{\Delta y}{\Omega_z}\frac{\Delta C}{\Delta y}\frac{U_{\text{и}}}{\Delta C}\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{и}}} = \frac{4F_0 K_{\text{м}y} K_y U_{\text{оп}} C_0}{mp^3 C_{\text{и}} \Delta y_0}, \qquad (5.103)$$

где в коэффициенте $K_{\text{м}y}$ величину $\omega_{\alpha 0}$ нужно заменить величиной ω_y из системы (5.102).

Аналогично изложенному могут быть определены коэффициенты передач и измерительных цепей прямого преобразования для любых типов МГ.

Пример 5.16

Рассчитаем параметры и характеристики МГ с одной ИМ.

Схема МГ с соблюдением масштаба относительных размеров ИМ и элементов упругого подвеса приведена на рис. 5.28.

МГ предназначен для измерения угловой скорости Ω_z, диапазон изменения которой будет определен в процессе расчета. Поперечные угловые скорости и поступательные ускорения основания отсутствуют.

ЧЭ ИМ *1* выполнен в виде стержневой структуры, которая включает в себя также восемь пальцев конденсаторов чувствительности *6*. ЧЭ в РЧ перемещается в направлении оси *У* под действием сил инерции Кориолиса на четырех торсионах *2* относительно жесткого элемента *4* и корпуса прибора. Вся стержневая структура, в том числе элементы *4*, на четырех торсионах *3* в РД перемещается в направлении оси *X* с помощью конденсаторов движения *5*. МГ изготовлен из кремния с параметрами

$$E_{[110]} = 1{,}68 \cdot 10^{11}\ \text{Н/м}^2;$$

$$G_{[110]} = 6{,}17 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2;\ \rho = 2{,}33 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3.$$

Размеры всех стержневых элементов приняты одинаковыми: $10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \times \times 2 \cdot 10^{-5}$ м, так же, как и размеры пальцев кон-

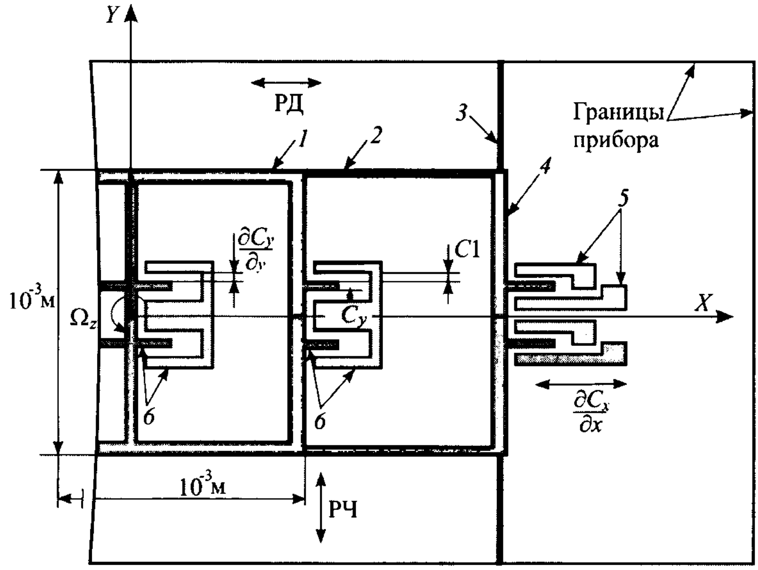


Рис. 5.28. Расчетная схема МГ:
1 – стержневая ИМ; *2*, *3* – упругие элементы (торсионы); *4* – стержневой элемент; *5* – конденсаторы движения; *6* – конденсаторы чувствительности

денсаторов чувствительности: $23\cdot10^{-5}\times\times2\cdot10^{-5}\times 2\cdot10^{-5}$ м. Размеры пальцев конденсаторов движения $0{,}5\cdot10^{-3}\times2\cdot10^{-5}\times2\cdot10^{-5}$ м. Зазор между пластинами конденсаторов $\Delta y_0=2\cdot10^{-6}$ м. Амплитуда колебаний ИМ в РД $X_0=10^{-5}$ м. Частота генератора, обеспечивающего РД, $p=10^5$ рад/с. Напряжение на конденсаторах движения $U_{\text{оп}}=10$ В, а на конденсаторах чувствительности $U_0=1$ В. Масса ЧЭ $m_{\text{ч}}=5\cdot10^{-9}$ кг. В РД к массе ЧЭ добавляется масса элементов *4*, т.е. $m_{\text{д}}=6{,}5\cdot10^{-9}$ кг.

Расчет выполним в следующей очередности.

1. Определим размеры торсионов, исходя из резонансных частот: РД $\omega_{x0}=0{,}9p==0{,}9\cdot10^5$ рад/с; РЧ $\omega_{y0}=1{,}1\omega_{x0}$.

Резонансная частота для РД $\omega_{x0}==2\sqrt{G_{x0}/m_{\text{д}}}$, откуда жесткость одного торсиона в направлении оси X

$$G_{x3}=\frac{m_{\text{д}}\omega_{x0}^2}{4}=\frac{6{,}5\cdot10^{-9}\left(0{,}9\cdot10^5\right)^2}{4}=13{,}2\ \text{Н/м}.$$

Так как $G_{x3}=E_{[110]}b_{\text{п}}\left(c_{\text{п}}/l_3\right)^3$, то, полагая для всех торсионов ширину $b_{\text{п}}=2\cdot10^{-5}$ м, а толщину $c_{\text{п}}=10^{-5}$ м, вычислим длину торсиона *3*:

$$l_3=c_{\text{п}}\sqrt[3]{\left(E_{[110]}b_{\text{п}}\right)/G_{x3}}=$$
$$=10^{-5}\sqrt[3]{(1{,}68\cdot10^{11}\cdot2\cdot10^{-5})/13{,}2}=0{,}64\cdot10^{-3}\ \text{м}.$$

Аналогично для РЧ имеем $\omega_{y0}==2\sqrt{G_{y2}/m_{\text{ч}}}$, откуда жесткость одного торсиона *2* в направлении оси Y

$$G_{y2}=\frac{m_{\text{ч}}\omega_{y0}^2}{4}=\frac{5\cdot10^{-9}\left(1{,}1\cdot0{,}9\cdot10^5\right)^2}{4}=$$
$$=11{,}75\ \text{Н/м}.$$

Вычислим длину одного торсиона *2*:

$$l_2=c_{\text{п}}\sqrt[3]{\left(E_{[110]}b_{\text{п}}\right)/G_{y2}}=$$
$$=10^{-5}\sqrt[3]{(1{,}68\cdot10^{11}\cdot2\cdot10^{-5})/11{,}75}=0{,}66\cdot10^{-3}\ \text{м}.$$

2. Рассчитаем изменение емкости конденсаторов чувствительности при перемещении ЧЭ в направлении оси Y.

При отсутствии движения емкость каждого из конденсаторов чувствительности ($a=21\cdot10^{-5}$ м, $c=2\cdot10^{-5}$, $\varepsilon=1$):

$$C_{\text{о.ч}}=\frac{\varepsilon_0 S}{\Delta y_0}=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot21\cdot10^5\cdot2\cdot10^5}{2\cdot10^{-6}}=$$
$$=0{,}02\cdot10^{-12}\ \Phi(0{,}02\,\text{п}\Phi).$$

Каждая гребенчатая структура конденсаторов чувствительности содержит четыре емкости (по две емкости C_1 и C_2). Все емкости C_1 включены параллельно друг с другом (всего их 8). Емкости C_2 также соединены между собой параллельно. Таким образом, при перемещении ЧЭ в направлении оси Y изменяется емкость, Ф, конденсаторов чувствительности:

$$\Delta C=8\left(C_1-C_2\right)=8\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{\Delta y_0-\Delta y}-\frac{1}{\Delta y_0+\Delta y}\right)\approx$$
$$\approx\frac{16\varepsilon S\Delta y}{\Delta y_0^2}=\frac{16C_{\text{о.ч}}}{\Delta y_0}\Delta y=\frac{16\cdot0{,}02\cdot10^{-12}}{2\cdot10^{-6}}\Delta y=$$
$$=\left(16\cdot10^{-8}\right)\Delta y.$$

Отношение $\Delta C/\Delta y=16\cdot10^{-8}$ Ф/м будет использовано при вычислении масштабного коэффициента МГ.

3. Определим уменьшение собственной частоты МГ для РЧ из-за электростатического притяжения между пластинами конденсаторов чувствительности. Воспользуемся формулой (3.122) и получим:

$$\omega_{y0}=\sqrt{2\left(2G_{y2}-8\frac{C_{\text{о.ч}}}{\Delta y^2}U_0^2\right)/m_{\text{ч}}}=$$
$$=\sqrt{2\left(2\cdot11{,}75-\frac{8\cdot0{,}02\cdot10^{-12}}{\left(2\cdot10^{-6}\right)^2}1^2\right)/5\cdot10^{-9}}=$$
$$=0{,}97\cdot10^5\ \text{рад/с},$$

т.е. начальная частота $\omega_{y0}=0{,}95\cdot10^5$ рад/с уменьшается на 2 %.

4. Вычислим добротность МГ для РД и РЧ.

Вначале найдем коэффициент демпфирования структуры МГ. Демпфирование осуществляется путем вязкого трения газа, находящегося в зазорах между крышками корпуса и поверхностями подвижных элементов, и путем сжатия газа между торцами пальцев конденсаторов и элементами конструкции. Структура МГ содержит семь стержневых элементов, восемь пальцев конденсаторов чувствительности и четыре пальца конденсаторов движения. Скольжение происходит с двух сторон структуры. Общая площадь скольжения

$$S = 2[7(10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5}) + \\ + 8(23 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5}) + 4(0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5})] \approx \\ \approx 4 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^2.$$

Для давления газовой среды в корпусе $p = 1$ Торр $= 1{,}33 \cdot 10^2$ Н/м^2 найдем

$$b = \mu_p S p = 2{,}776 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}33 \cdot 10^2 = \\ = 14{,}76 \cdot 10^{11}\ \text{кг/с}.$$

Вычислим демпфирование за счет сжатия и последующего перетекания газа в торцах пальцев. Предположим, что минимальный зазор в районе торцев $h = 2 \cdot 10^{-6}$ м. Общая площадь всех десяти торцев $S = 10(2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5}) = 40 \cdot 10^{-10}\ \text{м}^2$. По формуле (4.94) получим

$$k_д = (\mu_р S^2 p)/h^2 = \left[2{,}776 \cdot 10^{-6}(40 \cdot 10^{-10})^2 \times \\ \times 1{,}33 \cdot 10^2\right]/(2 \cdot 10^{-6})^2 = 1{,}48 \cdot 10^{-9}\ \text{кг/с}.$$

Объединим оба результата и найдем абсолютный коэффициент демпфирования для РД:

$$b_x = (14{,}76 + 148)10^{-11} = 162{,}76 \cdot 10^{-11}\ \text{кг/с}.$$

Вычислим $2\xi_x = b_x / (m_д \omega_{x0}) = 162{,}76 \times \times 10^{-11} / (6{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}9 \cdot 10^5) = 2{,}78 \cdot 10^{-6}$ и получим добротность в РД:

$$Q_x = 1/2\xi_x = 1{,}8 \cdot 10^5.$$

Рассчитаем добротность для РЧ. Площадь поверхности двух сторон стержневых элементов ЧЭ и восьми пальцев конденсаторов чувствительности:

$$2\left[5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5} + 8\left(23 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5}\right)\right] \approx \\ \approx 2{,}73 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^2.$$

Получим $b = 2{,}776 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}73 \cdot 10^{-7} \times \times 1{,}33 \cdot 10^2 \approx 10^{-10}$ кг/с. В восьми зазорах между боковыми поверхностями пальцев общей площадью, равной $S = 8(23 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5}) = 366 \cdot 10^{-10}$ м^2, происходят сжатие и последующее перетекание газа через зазоры $h = \Delta y_2 = 10^{-6}$ м. Получим коэффициент демпфирования:

$$k_д = (2{,}776 \cdot 10^{-6} \cdot (366)^2 \cdot 10^{-20} \cdot 1{,}33 \cdot 10^2) / \\ (10^{-6})^2 = 4{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{кг/с}.$$

Следовательно,

$$b_y = b + k_д \approx 4{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{кг/с}.$$

Аналогично предыдущему вычислим

$$2\xi_y = b_y / (m_ч \omega_{y0}) = (4{,}95 \cdot 10^{-7}) / \\ (5 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}95 \cdot 10^5) = 10^{-3}$$

и, значит,

$$Q_y = 1/2\xi_y = 10^3 << Q_x.$$

5. Определим коэффициенты передачи МГ для различных режимов настройки. Имея в виду, что $X = X_0 \sin pt$ и, следовательно, $F_0 = m\ddot{X} = mX_0 p^2$, воспользуемся зависимостью (5.98) и запишем величину амплитуды ИМ в РЧ:

$$\Delta y = \frac{2F_0\Omega_z}{mp^3\left(1 - \dfrac{\omega_{x0}^2}{p^2}\right)\left(1 - \dfrac{\omega_{y0}^2}{p^2}\right)} = \\ = \frac{2X_0\Omega_z}{p\left(1 - \varepsilon^2\right)\left[1 - \varepsilon^2\left(\omega_{y0}/\omega_{x0}\right)^2\right]}.$$

Положим $\varepsilon = \omega_{x0}/p = 0{,}95$ и получим выражение для коэффициента передачи:

$$\frac{\Delta y}{\Omega_z}=\frac{2\cdot 10^{-5}}{10^5(1-0{,}9)\left[1-0{,}9(\omega_{y0}/\omega_{x0})^2\right]}.$$

Очевидно, максимальный коэффициент передачи будет при $\omega_{y0}=1{,}054\omega_{x0}$. Значения $\Delta y/\Omega_z$ для различных режимов настройки приведены в таблице.

ω_{y0}/ω_{x0}	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,05	1,054	1,08	1,1	1,3	1,5
$\frac{\Delta y}{\Omega_z}10^{-8}$, м/(1/с)	0,206	0,223	0,264	0,366	0,756	2,05	26,45	2329,54	75,09	–2,3	–0,29	–0,164

Величина $\omega_{y0}=1{,}08\omega_{x0}$, которой соответствует достаточно большой коэффициент усиления и в которой не изменяется фаза выходного сигнала, близка к рекомендуемому режиму настройки: $\omega_{y0}=1{,}1\omega_{x0}$.

Большой коэффициент усиления может привести к перемещениям Δy, соизмеримым с зазором Δy_0, что недопустимо, так как будут проявляться нелинейности в электростатических структурах.

6. Рассчитаем крутизну рабочей характеристики МГ, полагая, что используется схема с интегратором. Считая емкость $C_\text{и}=10^{-10}$ Ф, получаем

$$U_\text{и}/\Delta C=U_\text{оп}/C_\text{и}=1\text{ В}/10^{-12}\text{ Ф}=10^{12}\text{ В/Ф}.$$

Пусть обеспечивается коэффициент усиления $U_\text{вых}/U_\text{и}=10$. Выберем режим настройки $\omega_{y0}=\omega_{x0}$, для которого $\Delta y/\Omega_z=2{,}05\cdot 10^{-8}$ м/(1/с) и в соответствии с формулой (5.103) вычислим:

$$\frac{U_\text{вых}}{\Omega_z}=\frac{\Delta y}{\Omega_z}\frac{\Delta C}{\Delta y}\frac{U_\text{и}}{\Delta C}\frac{U_\text{вых}}{U_\text{и}}=$$
$$=(2{,}05\cdot 10^{-8})\,(16\cdot 10^{-8})10^{12}\cdot 10=32{,}6\cdot 10^{-3}\text{ В}.$$

Определим максимальную скорость Ω_z, при которой $\Delta y=0{,}1\Delta y_0=2\cdot 10^{-7}$ м. Из отношения $\Delta y/\Omega_z=2\cdot 10^{-7}/\Omega_z=2{,}052\cdot 10^{-8}$ находим $\Omega_{z\max}\approx 10$ рад/с.

Из приведенного материала следует определяющее влияние на выходной сигнал МГ коэффициента передачи первого звена измерительной цепи, который определяет реакцию ЧЭ на входной сигнал – измеряемую угловую скорость. Рассмотрим частотные характеристики МГ. Обратимся, например, к уравнению (5.101).

Положим Ω_x и (или) Ω_y равными нулю, $\omega_{x0}=p$, в соответствии с системой (5.96) вычислим $\gamma\approx 90°$, $L=2\Omega_z p$, введем оператор $S=d/dt$ и запишем уравнение (5.101) в операторной форме:

$$\Delta y(s)\omega_y^2\left(\frac{1}{\omega_y^2}s^2+\frac{2\xi_{y0}}{\omega_y^2}s+1\right)=\frac{2F_0\Omega_z(s)}{mp^2\left(\frac{1}{p^2}s^2+1\right)},$$

откуда получим частотную передаточную функцию

$$W(s)=\frac{\Delta y(s)}{\Omega_z(s)}=$$
$$=\frac{K_0}{(T_1^2s^2+1)\,(T_2^2s^2+2\xi T_2s+1)},\qquad(5.104)$$

где $K_0=2F_0/mp\omega_y^2$; $T_1=1/p$; $T_2=1/\omega_y$; $\xi=\xi_{y0}/\omega_0^2$.

При наличии даже очень малого относительного коэффициента демпфирования $\xi_{x0}\neq 0$ консервативное звено $1/(T_1^2s^2+1)$ становится колебательным.

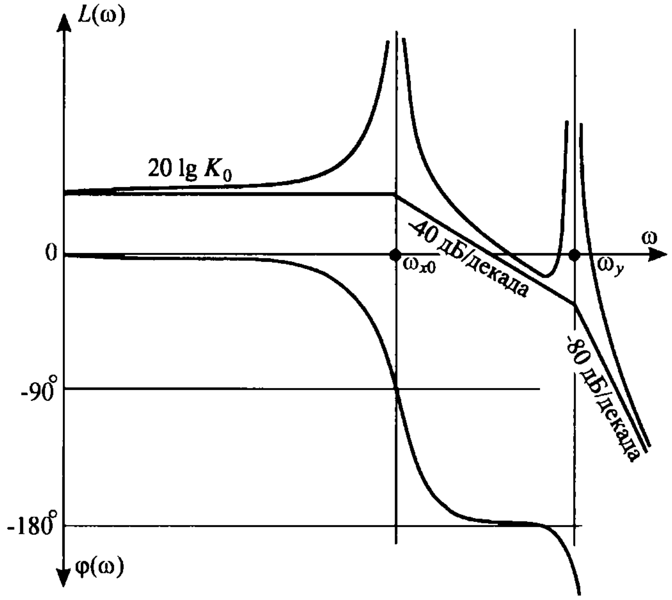


Рис. 5.29. Частотные характеристики МГ

Общий вид амплитудно- и фазочастотных характеристик, соответствующих функции (5.104), показан на рис. 5.29.

Следует отметить, что одним из первых исследование динамики роторных МГ RR-типа в отечественной литературе было, видимо, выполнено в работе [23].

Б. Микрогироскопы RR-типа

Рассмотрим общий случай измерения переменной скорости, полагая нормированную по Ω_0 скорость $\Omega_x=\cos(\nu t)$ для МГ RR-типа по рис. 3.11. Уравнение (4.110) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\beta}+2\xi_\beta\omega_{\beta0}\dot{\beta}+\omega_{\beta0}^2= \\ =\frac{H_0}{J_\beta}\Omega_x\sin(pt)\cos(\nu t)=K\omega_y^{\text{м}}, \qquad (5.105)$$

где $K=\dfrac{H_0}{J_\beta}$; $\omega_y^{\text{м}}=\Omega_x\sin(pt)\cos(\nu t)$ – модулированный входной сигнал.

Уравнению (5.105) соответствует передаточная функция

$$W(s)=\frac{\beta(s)}{\omega_y^{\text{м}}(s)}=\frac{K}{s^2+2\xi_\beta\omega_{\beta0}s+\omega_{\beta0}^2}. \qquad (5.106)$$

Перепишем уравнение (5.105) в виде

$$\ddot{\beta}+2\xi_\beta\omega_{\beta0}\dot{\beta}+\omega_{\beta0}^2= \\ =\frac{K}{2}\Omega_0\left[\sin(p-\nu)t+\sin(p+\nu)t\right]. \qquad (5.107)$$

Составляющая решения для первой боковой частоты $\omega_1=p-\nu$

$$\beta_1=E_1\left[\sin(\omega_1 t)\cos\varphi_1+\cos(\omega_1 t)\sin\varphi_1\right], \qquad (5.108)$$

а для второй $\omega_2=p+\nu$

$$\beta_2=E_2\left[\sin(\omega_2 t)\cos\varphi_2+\cos(\omega_2 t)\sin\varphi_2\right], \qquad (5.109)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
E_i &= \frac{K\Omega_0}{2\sqrt{\left(\omega_{\beta 0}^2 - \omega_i^2\right)^2 + 4\xi_\beta^2\omega_i^2\omega_{\beta 0}^2}};\\
\sin\varphi_i &= -\frac{2\xi_\beta\omega_{\beta 0}\omega_i}{\sqrt{\left(\omega_{\beta 0}^2 - \omega_i^2\right)^2 + 4\xi_\beta^2\omega_i^2\omega_{\beta 0}^2}};\\
\cos\varphi_i &= -\frac{\omega_{\beta 0}^2 - \omega_i^2}{\sqrt{\left(\omega_{\beta 0}^2 - \omega_i^2\right)^2 + 4\xi_\beta^2\omega_i^2\omega_{\beta 0}^2}};
\end{aligned}\right\}$$

$$(i = 1, 2). \tag{5.110}$$

Таким образом, решения (5.108), (5.109) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\Omega_0}{2}\left[U_1\sin(\omega_1 t) + V_1\cos(\omega_1 t)\right];\\
\beta_2 &= \frac{\Omega_0}{2}\left[U_2\sin(\omega_2 t) + V_2\cos(\omega_2 t)\right];
\end{aligned}\right\} \tag{5.111}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
U_1 &= \frac{K\left[\omega_{\beta 0}^2 - (p-\nu)^2\right]}{\left[\omega_{\beta 0}^2 - (p-\nu)^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2\omega_{\beta 0}^2(p-\nu)^2};\\
V_1 &= \frac{K2\xi_\beta\omega_{\beta 0}(p-\nu)}{\left[\omega_{\beta 0}^2 - (p-\nu)^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2\omega_{\beta 0}^2(p-\nu)^2};\\
U_2 &= \frac{K\left[\omega_{\beta 0}^2 - (p+\nu)^2\right]}{\left[\omega_{\beta 0}^2 - (p+\nu)^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2\omega_{\beta 0}^2(p+\nu)^2};\\
V_2 &= \frac{K2\xi_\beta\omega_{\beta 0}(p+\nu)}{\left[\omega_{\beta 0}^2 - (p+\nu)^2\right]^2 + 4\xi_\beta^2\omega_{\beta 0}^2(p+\nu)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.112}$$

Сложим решения (5.111) и, имея в виду, что $\sin(\omega_{1,2}t) = \sin(p \mp \nu)t$, $\cos(\omega_{1,2}t) = \cos(p \mp \nu)t$, получим решение на частоте модуляции (огибающей):

$$\beta = \frac{\Omega_0}{2}\left[(U_2 - U_1)\sin(\nu t) + \right.$$
$$\left. + (V_1 + V_2)\cos(\nu t)\right]\cos(pt) + \frac{\Omega_0}{2}\left[(U_1 + U_2)\times\right.$$
$$\left.\times\cos(\nu t) + (V_1 - V_2)\sin(\nu t)\right]\sin(pt). \tag{5.113}$$

Первая составляющая решения (5.113) синфазная, так как она совпадает по фазе с первичными колебаниями ротора, а вторая составляющая квадратурная.

Выполним в передаточной функции (5.106) замену $s = i(p - \nu)$ (первая боковая частота) и получим

$$W_1(s) = U_1 + iV_1. \tag{5.114}$$

Аналогично при замене $s = i(p + \nu)$ (вторая боковая частота) передаточная функция (5.106) примет вид

$$W_2(s) = U_2 + iV_2. \tag{5.115}$$

В соответствии с выражением (5.113) запишем амплитуды огибающей выходного сигнала для синфазной и квадратурной составляющих:

$$\left.\begin{aligned}
A_{\text{c}}^{\text{o}} &= \frac{\Omega_0}{2}\left[(U_2 - U_1)\sin(\nu t) + (V_1 + V_2)\cos(\nu t)\right];\\
A_{\text{к}}^{\text{o}} &= \frac{\Omega_0}{2}\left[(U_2 - U_1)\sin(\nu t) + (V_1 + V_2)\cos(\nu t)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{5.116}$$

Рассматривая в системе (5.116) множители при гармонических составляющих колебаний амплитуд как вещественные и мнимые части частотных характеристик по огибающей выходного сигнала, можно записать, имея в виду замену $s = i\nu$, следующие выражения:

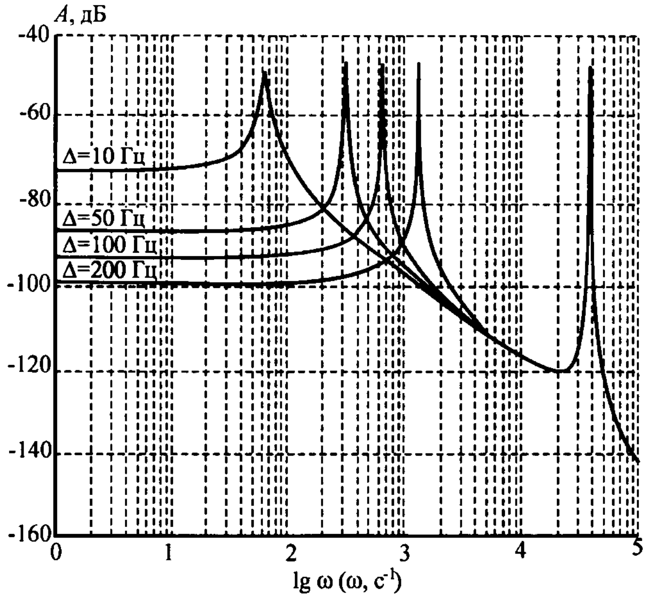


Рис. 5.30. АЧХ для различных значений частот (по огибающей)

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{c}}^{\text{o}}(s) &= K\frac{2p\left[s+\xi_\beta(p+\Delta)\right]}{\left[s^2+2\xi_\beta(p+\Delta)s+(p+\Delta)^2-p^2\right]^2+4p^2\left[\xi_\beta(p+\Delta)+s\right]^2};\\ W_{\text{к}}^{\text{o}}(s) &= K\frac{s^2+2\xi_\beta(p+\Delta)s+(p+\Delta)^2-p^2}{\left[s^2+2\xi_\beta(p+\Delta)s+(p+\Delta)^2-p^2\right]^2+4p^2\left[\xi_\beta(p+\Delta)+s\right]^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.117)$$

На рис. 5.30 приведены результаты вычислений на ЭВМ по формулам (5.117) результирующих амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для различных значений расстройки и следующих исходных данных: $J_\gamma \approx 2J_\beta = 3 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2; $p = 1{,}88 \times$ $\times\ 10^4$ рад/с; $\gamma_0 = 1{,}5°$; $Q_\alpha = Q_\beta = Q_\gamma = 10^4$.

Предположим, что выполнена резонансная настройка режимов колебаний ($\Delta = 0$), с учетом того, что $\xi^2 << 1$, а также $\omega_{\text{ур}} = 2 \ldots 5$ кГц и имея в виду, что диапазон частот измеряемой скорости не превышает, как правило, 50 Гц из (5.117) получим

$$W_{\text{c}}^{\text{o}}(s) \approx \frac{K \cdot 2p\left(s+\xi_\beta p\right)}{4p^2\left(s+\xi_\beta p\right)^2} = \frac{K}{2p^2\xi_\beta(Ts+1)} = \frac{K_{\text{ст}}}{Ts+1}; \qquad (5.118)$$

$$W_{\text{к}}^{\text{o}}(s) \approx \frac{K\left(s^2+2\xi_\beta ps\right)}{4p^2\left(s+\xi_\beta p\right)^2} = \frac{Ks(T_1 s+1)}{2p^3\xi_\beta(Ts+1)^2} = \frac{K_{\text{ст}} s(T_1 s+1)}{p(Ts+1)}, \qquad (5.119)$$

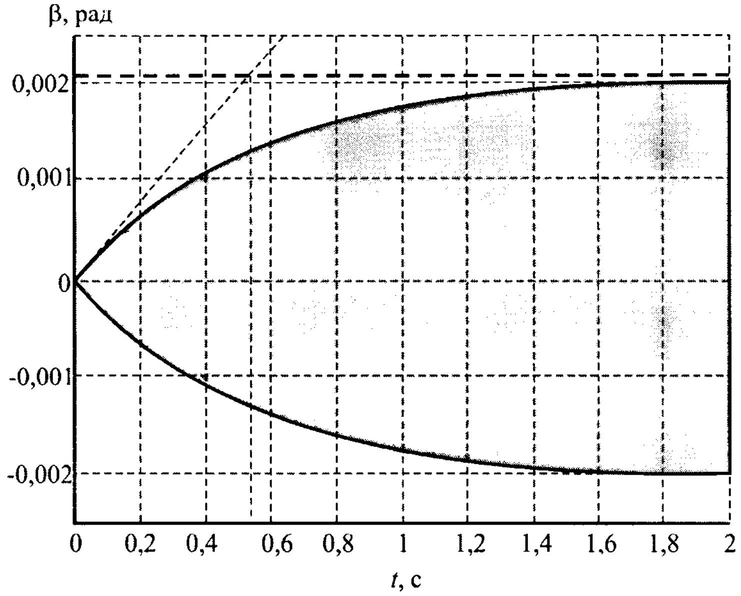


Рис. 5.31. Огибающие выходного сигнала МГ

где $T = 1/\xi_\beta p$; $T_1 = 1/2\xi_\beta p$; $K_{\text{ст}} = K/(2\xi_\beta p^2)$.

Как следует из выражения (5.118), при условии резонансной настройки для МГ, работающего в режиме прямого преобразования, передаточная функция по синфазной составляющей приближается к прибору интегрирующего типа с передаточной функцией апериодического звена. Квадратурная составляющая выходного сигнала, как видно из формулы (5.119), меньше синфазной составляющей.

Приведенные результаты показали, что рабочая полоса частот гироскопа определяется в основном параметром расстройки Δ и слабо зависит от параметра затухания ξ_β.

Полная передаточная функция МГ и его масштабный коэффициент могут быть получены аналогично для МГ LL- и LR-типов.

5.7.2. Компенсационное преобразование

Динамические характеристики МГ могут быть улучшены, если обеспечить контур компенсации момента сил инерции Кориолиса, т.е. гироскоп в этом случае будет работать в режиме компенсационного преобразования. Воспользуемся передаточной функцией (5.118), которая хорошо подходит для описания выходного сигнала МГ по огибающей. Для иллюстрации этого обстоятельства на рис. 5.31 приведен результат решения на ЭВМ уравнения (4.310).

Из передаточной функции (5.118) следует, что для увеличения полосы пропускания частот необходимо увеличивать параметр ξ_β, что иллюстрируется рис. 5.32.

Вместе с расширением полосы пропускания частот пропорционально увеличению ξ_β уменьшается коэффициент передачи [см. формулы (4.328), (4.329)]. Для снятия этого противоречия необходимо реализовать работу МГ в режиме замкнутого контура компенсации моментов по информации о выходной координате β с использованием на подложке МГ электродов датчика момента (ДМ).

Контур компенсации (цепь обратной связи) включает ДМ, формирующий мо-

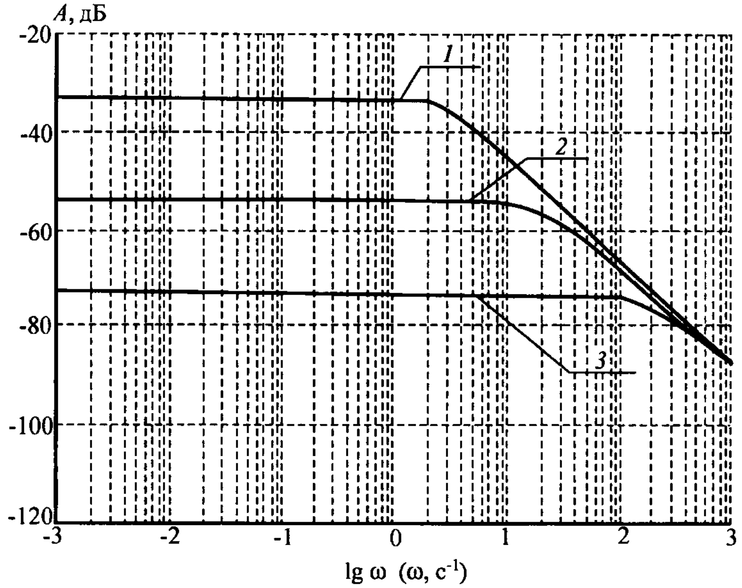


Рис. 5.32. АЧХ для относительных коэффициентов демпфирования:
1 – $\xi_\beta = 10^{-4}$; *2* – $\xi_\beta = 10^{-3}$; *3* – $\xi_\beta = 10^{-2}$

мент $M_{\text{ДМ}}$, противоположный моменту сил инерции Кориолиса $M_{\text{К}}$, т.е. сдвинутый по фазе на угол π на несущей частоте p. ДМ должен компенсировать амплитуду огибающей колебаний на частоте ν измеряемой угловой скорости. Так как управление идет на частоте огибающей, резонансная настройка МГ не нарушается.

Структурная схема ММГ с контуром компенсации $M_{\text{К}}$ приведена на рис. 5.33.

Передаточная функция по скорости МГ с контуром обратной связи по моменту имеет вид

$$W(s)=\frac{K^*}{T^*s+1}, \qquad (5.120)$$

где

$$T^*=\frac{T}{1+\dfrac{Q_\beta K_{\text{ДУ}} K_{\text{у}} K_{\text{ДМ}}}{G_\beta}};$$

$$K^*=\frac{H_0}{K_{\text{ДМ}}\left(1+\dfrac{G_\beta}{Q_\beta K_{\text{ДУ}} K_{\text{у}} K_{\text{ДМ}}}\right)}; \qquad (5.121)$$

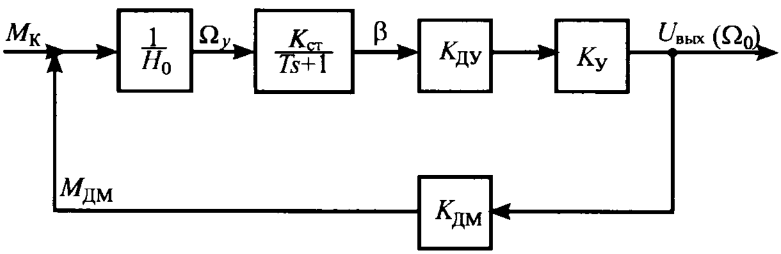


Рис. 5.33. Структурная схема МГ с контуром обратной связи по моменту:
$K_{\text{ДУ}}$, $K_{\text{у}}$, $K_{\text{ДМ}}$ – коэффициенты передачи датчика угла (ДУ), усилителя и ДМ

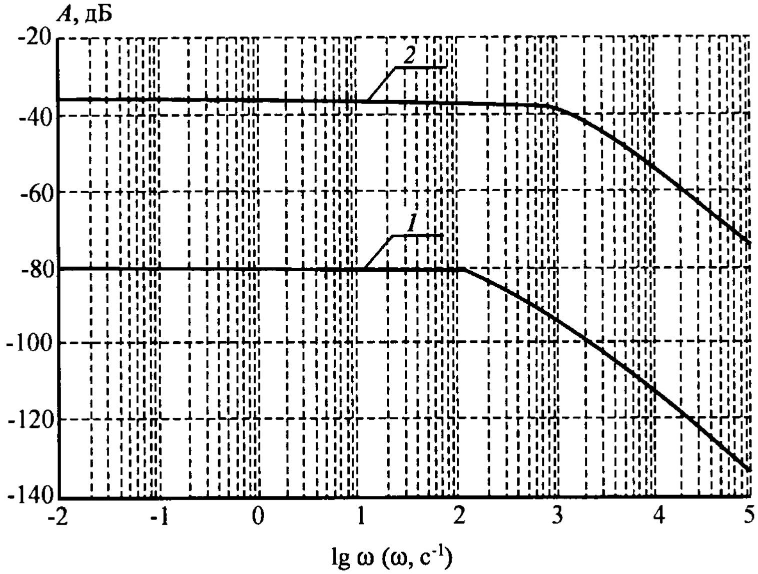


Рис. 5.34. Частотные характеристики МГ по огибающей:
1 и *2* – режимы прямого и компенсационного преобразования соответственно

При большом коэффициенте передачи контура обратной связи параметры (5.119) принимают вид

$$T^* = \frac{TG_\beta}{Q_\beta K_{ДУ} K_{У} K_{ДМ}}; \; K^* = \frac{H_0}{K_{ДМ}}. \quad (5.122)$$

На рис. 5.34 приведены частотные характеристики МГ для режимов прямого ($\xi = 10^{-2}$) и компенсационного преобразований ($K_{ДУ}$ = 1 В/рад; $K_У$ =100; $K_{ДМ} = 10^{-9}$ Н·м/В; $T^* = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ с; $Q_\beta = 10^4$).

Коэффициент передачи, который в режиме компенсационного преобразования определяется в основном значением $K_{ДМ}$, не зависит от степени демпфирования. Большое значение постоянной времени T вследствие малого демпфирования может быть уменьшено выбором соответствующего значения коэффициента $K_У$.

Таким образом, введение контура компенсации момента сил инерции Кориолиса расширяет полосу пропускания частот МГ, и при этом может быть обеспечена требуемая чувствительность.

5.8. ЗАВИСИМОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ МГ ОТ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

5.8.1. Масштабный коэффициент и частотная настройка

Напомним, что возможны следующие режимы частотной настройки, т.е. соотношений между частотами первичных (РД) и вторичных колебаний (РЧ) (см. рис. 4.14). Перечислим их.

1. Частоты РД и РЧ совпадают (резонансная настройка). Имеет место резонансное усиление вторичных колебаний, а полоса пропускания частот определяется резонансной кривой.

2. Частоты РД и РЧ значительно разнесены. Наблюдается большая полоса пропускания частот и отсутствие резонансного усиления вторичных колебаний.

3. Имеет место расстройка частот РД и РЧ, при которой обеспечиваются заданные полоса пропускания частот и масштабный коэффициент.

Максимальная чувствительность МГ к измеряемой угловой скорости обеспечивается в режиме резонансной настройки. Применительно к МГ RR-типа, имея в виду материал, изложенный в подразд. 4.11 и полагая, что справедливы равенства $J_\gamma \approx 2J_\beta$, $\omega_{\gamma 0} \approx \omega_{\beta 0} \approx \omega$, запишем приближенную, без учета потерь из-за связанности колебаний, формулу для масштабного коэффициента, который определяет чувствительность МГ при резонансной настройке:

$$K_{\text{м}} = \frac{\beta}{\Omega_y} = \frac{M_0 Q_\gamma Q_\beta}{\omega_{\gamma 0}\omega_{\beta 0} J_\beta} = \frac{2M_0 Q_\gamma Q_\beta}{J_\gamma \omega_{\gamma 0}^3} = \frac{2\gamma_0 Q_\beta}{\omega}, \tag{5.123}$$

где γ_0, β – угловые отклонения ротора относительно осей первичных и вторичных колебаний; Ω_y – измеряемая угловая скорость; M_0 – момент двигателя для создания первичных колебаний; Q_γ, Q_β – добротность МГ относительно осей первичных и вторичных колебаний; ω – частота, равная частотам первичных и вторичных колебаний; J_γ, J_β – осевой и экваториальный моменты инерции ротора.

Из выражения (5.123) следует, что при резонансной настройке максимальная чувствительность МГ обеспечивается поддержанием угла первичных колебаний ротора и добротности по оси вторичных колебаний на максимально возможном уровне при минимально возможной частоте первичных колебаний.

Надо отметить, что при уменьшении частоты первичных колебаний увеличивается кинетический момент МГ. В самом деле, кинетический момент определяется зависимостью (4.311):

$$H_0 = J_\gamma \gamma_0 \omega_{\gamma 0}. \tag{5.124}$$

При установившемся режиме колебаний из уравнения (4.301) следует

$$\gamma_0 = \frac{M_0 \sin pt}{J_\gamma \omega_{\gamma 0}^2}, \tag{5.125}$$

т.е. величина угла первичных колебаний при поддержании постоянной амплитуды возбуждающего момента обратно пропорциональна квадрату частоты первичных колебаний. После подстановки равенства (5.125) в формулу (5.124) получаем искомый результат [см. также выражение (4.311)]:

$$H_0 = \frac{M_0}{\omega_{\gamma 0}} \sin pt \text{, где } p \approx \omega_{\gamma 0}. \tag{5.126}$$

В связи с положительным эффектом увеличения амплитуды первичных колебаний следует заметить, что ограничением на ее рост является сопровождающее возрастание напряжения в элементах упругого подвеса.

Отметим далее, что увеличению масштабного коэффициента, т.е. чувствительности МГ, как видно из формулы (4.316), способствует уменьшение собственной частоты МГ:

$$K_{\text{ст}} = \frac{\beta}{\Omega_y} = \frac{H_0}{J_\beta 2\xi_\beta \omega^2} = \frac{M_0 Q_\gamma Q_\beta}{J_\beta \omega^3} = \frac{M_0 Q_\gamma Q_\beta}{G_\beta \omega}.$$

Для уменьшения собственной частоты необходимо снижать жесткость подвеса и увеличивать момент инерции ротора либо путем увеличения его диаметра или толщины. Для уменьшения частот целесообразно увеличивать диаметр ротора, а не его толщину. В то же время следует иметь в виду, что уменьшение толщины ротора делает его менее жестким и могут возникать возмущения, вызванные вибрацией основания.

Напомним, что масштабный коэффициент МГ RR-типа определяется зависимостью (4.327), которая при $\omega_{\gamma p} = \omega_{\gamma 0}$ принимает вид

$$K_{\text{м}} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_\beta^2 \omega_{\gamma 0}^2}}, \qquad (5.127)$$

где $\Delta = \omega_{\beta 0} - \omega_{\gamma 0}$ – абсолютная расстройка МГ.

При отсутствии расстройки ($\Delta = 0$) из уравнения (5.127) следует

$$K_{\text{м}0} = \frac{\gamma_0}{\xi_\beta \omega_{\gamma 0}}. \qquad (5.128)$$

С учетом выражений (5.127) и (5.128) запишем относительное изменение масштабного коэффициента, обусловленное расстройкой частот:

$$\delta K_\beta = 1 - \frac{K_{\text{м}}}{K_{\text{м}0}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_\beta{}^2 \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\omega_{\gamma 0}} - 1 \right)^2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_\beta{}^2 \left(\frac{\Delta}{\omega_{\gamma 0}} \right)^2}},$$

где $Q_\beta = \frac{1}{2\xi_\beta}$.

Имея в виду, что $\sqrt{1 + 4Q_\beta{}^2 \left(\frac{\Delta}{\omega_{\gamma 0}} \right)^2} \approx 1 + 2Q_\beta{}^2 \left(\frac{\Delta}{\omega_{\gamma 0}} \right)^2$, получим $\delta K_\beta = 1 - \frac{1}{1 + 2Q_\beta{}^2 \left(\frac{\Delta}{\omega_{\gamma 0}} \right)^2}$, откуда вычисляется величина расстройки в зависимости от относительного изменения масштабного коэффициента:

$$\Delta = \frac{\omega_0}{Q_\beta} \sqrt{\frac{\delta K_\beta}{2(1 - \delta K_\beta)}} \approx \frac{\omega_{\beta 0}}{Q_\beta} \sqrt{\frac{\delta K_\beta}{2}}. \qquad (5.129)$$

Положим в (4.226) $\omega_0 = \omega_{\beta 0}$, $Q = Q_\beta$ и запишем выражение для полосы пропускания частот:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\beta 0}}{2Q_\beta}. \qquad (5.130)$$

Объединим формулы (5.129), (5.130) и получим

$$\Delta = 1{,}41 \Delta\omega \sqrt{\delta K_\beta}. \qquad (5.131)$$

Пример 5.17

Пусть требуется полоса пропускания частот $\Delta\omega = 20$ Гц, а $\omega_{\beta 0} = 3000$ Гц. По формуле (5.130) найдем добротность $Q_\beta = \frac{3000}{2 \cdot 20} = 75$. Примем далее $\delta K_\beta = 0{,}1\%$ (0,001) и по формуле (5.129) получим допустимое значение расстройки $\Delta = \frac{3000}{75} \sqrt{\frac{0{,}001}{2}} = 0{,}9$ Гц, или в относительных единицах $\frac{\Delta}{\omega_{\beta 0}} 100\% = \frac{0{,}9}{3000} 100 = 0{,}03\%$.

Предположим теперь, что обеспечена добротность $Q_\beta = 10^4$. По формуле (5.129) рассчитаем $\Delta = \frac{3000}{10^4} \sqrt{\frac{0{,}001}{2}} = 0{,}0067$ Гц, или в относительных единицах: $\frac{\Delta}{\omega_{\beta 0}} 100\,\% = \frac{0{,}0067}{3000} 100 =$ $= 2{,}2 \cdot 10^{-4}\,\%$.

Из приведенного примера следует, что для МГ как с низкой добротностью, так и с высокой допускаются очень незначительные значения расстроек.

Обеспечить требуемую расстройку и, тем самым, полосу пропускания частот можно только при очень жестких допусках на размеры упругих элементов подвеса в пределах 10^{-3} (низкая добротность) ... 10^{-5} мкм (высокая добротность). Очевидно, что погрешность в расчете частот не

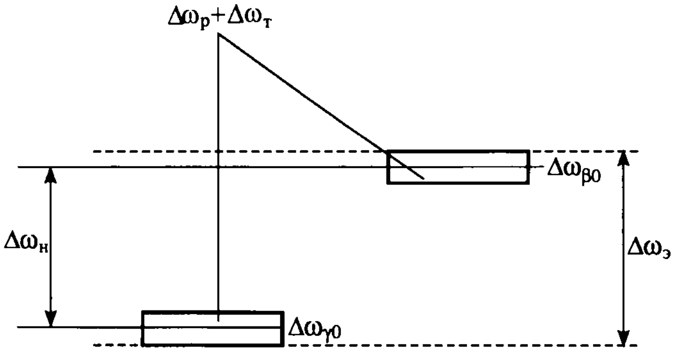


Рис. 5.35. Соотношения собственных частот и допусков на них

должна превышать тысячных долей процента от номинального значения частоты.

При существующем уровне технологии выполнение таких требований проблематично, и для МГ с резонансной настройкой необходима электрическая система подстройки частот, которая создает отрицательную жесткость при подаче постоянных потенциалов на электроды датчика системы подстройки. Последняя частота должна быть рассчитана так, чтобы частота вторичных колебаний несколько превышала частоту первичных (см. гл. 3).

Для МГ RR-типа система подстройки частот представляет собой емкость, электроды которой площадью S расположены на роторе и подложке с зазором h_0 между ними. При расстоянии r от центра подвеса до центра электродов и напряжении подстройки U электростатическая жесткость, создаваемая системой подстройки, может быть определена зависимостями

$$G_{\text{э}} = KU^2; \qquad K = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 r^2 S}{h_0^2}. \tag{5.132}$$

Собственная частота упругого подвеса с учетом выражений (5.132) равна

$$\omega_{\beta 1} = \sqrt{\frac{G_{\text{п}} - G_{\text{э}}}{J_\beta}}, \tag{5.133}$$

где $G_{\text{п}}$ – номинальная жесткость упругого подвеса; J_β – момент инерции ротора относительно выходной оси.

Из формулы (5.133) следует приближенное равенство

$$G_{\text{э}} = G_{\text{п}} - J_\beta \omega_{\beta 1}^2 = J_\beta(\omega_{\beta 0}^2 - \omega_{\beta 1}^2) = \\ = J_\beta(\omega_{\beta 0} - \omega_{\beta 1})(\omega_{\beta 0} + \omega_{\beta 1}) \approx 2J_\beta \Delta\omega_{\text{э}} \omega_{\beta 0}, \tag{5.134}$$

где $\Delta\omega_{\text{э}} = \omega_{\beta 0} - \omega_{\beta 1}$ – частота, создаваемая системой подстройки.

Напряжение, которое требуется для изменения частоты ω_0 на $\Delta\omega_{\text{э}}$, определяется с учетом выражений (5.132) и (5.134) по формуле

$$U = \sqrt{\frac{2J_\beta \Delta\omega_{\text{э}} \omega_{\beta 0}}{K}}. \tag{5.135}$$

Из литературы известно, что допуск на расстройку частот первичных и вторичных колебаний представляет собой сумму допусков на неточность расчета собственной частоты $\Delta\omega_{\text{р}}$ и технологического допуска $\Delta\omega_{\text{т}}$, обусловленного неточностью изготовления. Система подстройки частоты используется только для уменьшения частоты вторичных колебаний. Поэтому можно считать, что начальное превышение $\Delta\omega_{\text{н}}$ частоты вторичных колебаний над первичными определяется неравенством (рис. 5.35)

$$\Delta\omega_{\text{н}} > \Delta\omega_{\text{р}} + \Delta\omega_{\text{т}}. \tag{5.136}$$

Из рис. 5.35 следует также ограничение на величину расстройки:

$$\Delta\omega_э > \Delta\omega_н + 2(\Delta\omega_р + \Delta\omega_т). \qquad (5.137)$$

При расчете системы электрической подстройки следует иметь в виду ее ограниченную мощность и, следовательно, затруднения с обеспечением неравенства (5.137).

Пример 5.18

Предположим, что неопределенность в методах расчета приводит к ошибкам в определении частот ≤ 2 %, что при 3000 Гц составляет $\Delta\omega_р = 60$ Гц. Будем считать, что при допуске на уровне 0,2 мкм, что достижимо, изменение частоты вследствие погрешностей изготовления также находится на уровне 2 %. Таким образом, $\Delta\omega_т = \Delta\omega_р = 60$ Гц, и по формуле (5.136) $\Delta\omega_н > 120$ Гц (4 %). На основании формулы (5.137) система подстройки частоты должна компенсировать изменение частоты в пределах $\Delta\omega_э = 360$ Гц.

Для параметров гироскопа $\varepsilon = 1$ (вакуум), $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $r = 10^{-3}$ м, $S = 3 \cdot 10^{-7}$ м^2, $h_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м, $J_\beta = 10^{-13}$ кг·м^2, $\omega_{\beta 0} = 3040$ Гц имеем $K = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ Дж/В^2 и по формуле (5.135) получаем

$$U = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 360 \cdot 2\pi \cdot 3040}{6{,}6 \cdot 10^{-7}}} \approx 3{,}6\,\text{В} \approx 4\,\text{В}.$$

Итак, для изменения частоты в 360 Гц в системе подстройки требуется напряжение $U = 4$ В.

5.8.2. Зависимость частот, расстройки частот и масштабных коэффициентов от изменения геометрических размеров ротора и упругих элементов подвеса

Зависимости основных характеристик МГ от геометрических параметров ЧЭ не являются универсальными и определяются типом МГ и конструкцией упругого подвеса.

Рассмотрим указанные зависимости для МГ RR-типа с подвесом по рис. 3.11, выполненного из кремния (см. пример 3.4) с размерами, м: $R = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$, $l_{т1} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$, $b_{п1} = 20 \cdot 10^{-6}$, $l_{т2} = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$, $b_{п2} = 18{,}4 \cdot 10^{-6}$, $c_п = 20 \cdot 10^{-6}$. По формулам (3.28) и (3.29) вычислены частоты первичных ω_γ и вторичных по одной координате колебаний ω_β в зависимости от геометрических размеров ротора и упругих элементов (торсионов) подвеса. Результаты вычислений приведены на рис. 5.36.

Определим коэффициенты влияния $K_{1,2}$ изменения геометрических размеров МГ на его частоты по формуле

$$K_{1,2} = \frac{\omega_{\max 1,2} - \omega_{\min 1,2}}{\Delta p},$$

где $\omega_{\max 1,2}$, $\omega_{\min 1,2}$ – соответственно максимальная и минимальная частоты для первичных (1) и вторичных (2) колебаний при изменении геометрического параметра на величину Δp.

В соответствии с зависимостями по рис. 5.36 имеем:

рис. 5.36, *а*

$\Delta p = 100$ мкм ; $\omega_{\max 1} = 3468{,}9$ Гц ;

$\omega_{\min 1} = 2653{,}1$ Гц ; $K_1 = 8{,}158 \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$;

$\omega_{\max 2} = 3519{,}8$ Гц ; $\omega_{\min 2} = 2692$ Гц ;

$K_2 = 8{,}278 \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$.

рис. 5.36, *б*

$\Delta p = 3$ мкм ; $\omega_{\max 1} = 3000$ Гц ;

$\omega_{\min 1} = 3000$ Гц ; $K_1 = 0 \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$;

$\omega_{\max 2} = 3100{,}4$ Гц ; $\omega_{\min 2} = 2990{,}7$ Гц ;

$K_2 = 36{,}567 \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$.

рис. 5.36, *в*

$\Delta p = 5$ мкм ; $\omega_{\max 1} = 3249{,}3$ Гц ;

$\omega_{\min 1} = 2547{,}3$ Гц ; $K_1 = 140{,}4 \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$;

$\omega_{\max 2} = 3075{,}7$ Гц ; $\omega_{\min 2} = 2975{,}6$ Гц ;

$K_2 = 20{,}02 \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$.

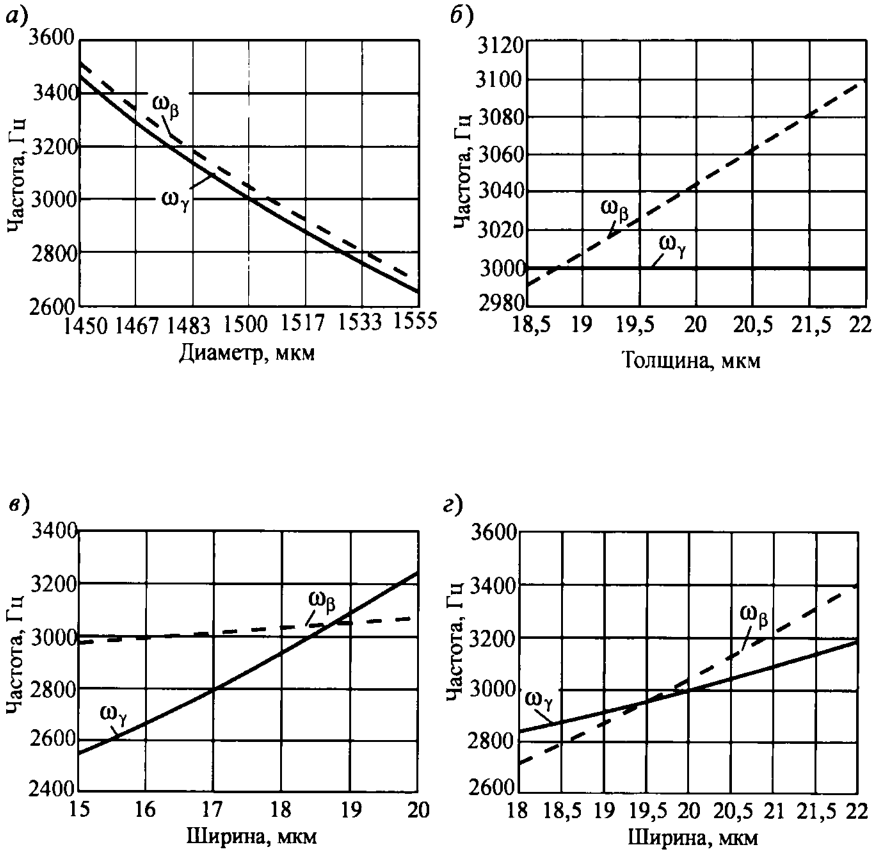


Рис. 5.36. Зависимости частот МГ от изменения:
а – наружного радиуса ротора; *б* – толщины структуры; *в* – ширины коротких торсионов; *г* – ширины длинных торсионов

рис. 5.36, *г*

$\Delta p = 4$ мкм ; $\omega_{\max 1} = 3188{,}2\,\text{Гц}$;

$\omega_{\min 1} = 2836{,}6\,\text{Гц}$; $K_1 = 87{,}9\ \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$;

$\omega_{\max 2} = 3405{,}2\,\text{Гц}$; $\omega_{\min 2} = 2712{,}7\,\text{Гц}$;

$K_2 = 173{,}125\ \dfrac{\text{Гц}}{\text{мкм}}$.

Результаты расчета приведены на рис. 5.37.

Из полученных значений коэффициентов влияния следует, что критичными геометрическими параметрами для рассмотренной конструкции МГ являются ширина коротких и длинных торсионов. Следовательно, допуск на эти размеры должен быть минимально возможным.

Средние квадратические величины коэффициентов влияния определяются по формуле

$$\overline{K}_{1,2} = \sqrt{\sum (K_{1,2})^2}\,.$$

Используя полученные выше числовые данные, вычислим:

$$\overline{K}_1 = \sqrt{8{,}158^2 + 0^2 + 140{,}4^2 + 87{,}9^2} =$$

$$= 165{,}847\ \frac{\text{Гц}}{\text{мкм}}\,;$$

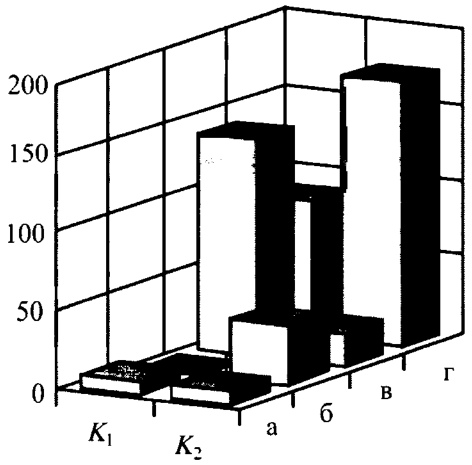


Рис. 5.37. Гистограмма влияния изменения геометрических размеров МГ на собственные частоты:
а – радиус ротора; *б* – толщина структуры; *в* – ширина длинных торсионов; *г* – ширина коротких торсионов

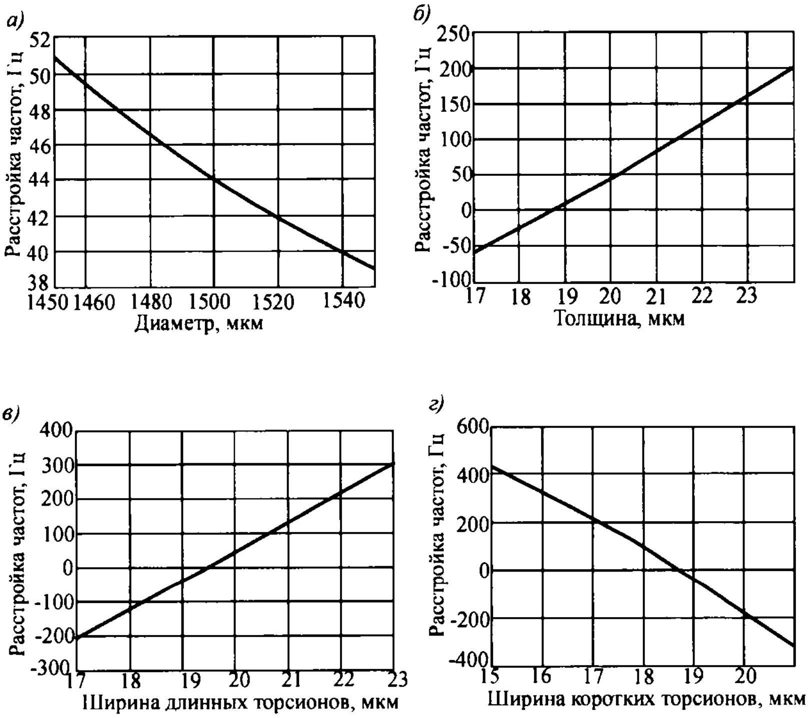


Рис. 5.38. Зависимости расстройки частот от изменения:
а – наружного диаметра ротора; *б* – толщины структуры; *в* – ширины длинных торсионов; *г* – ширины коротких торсионов

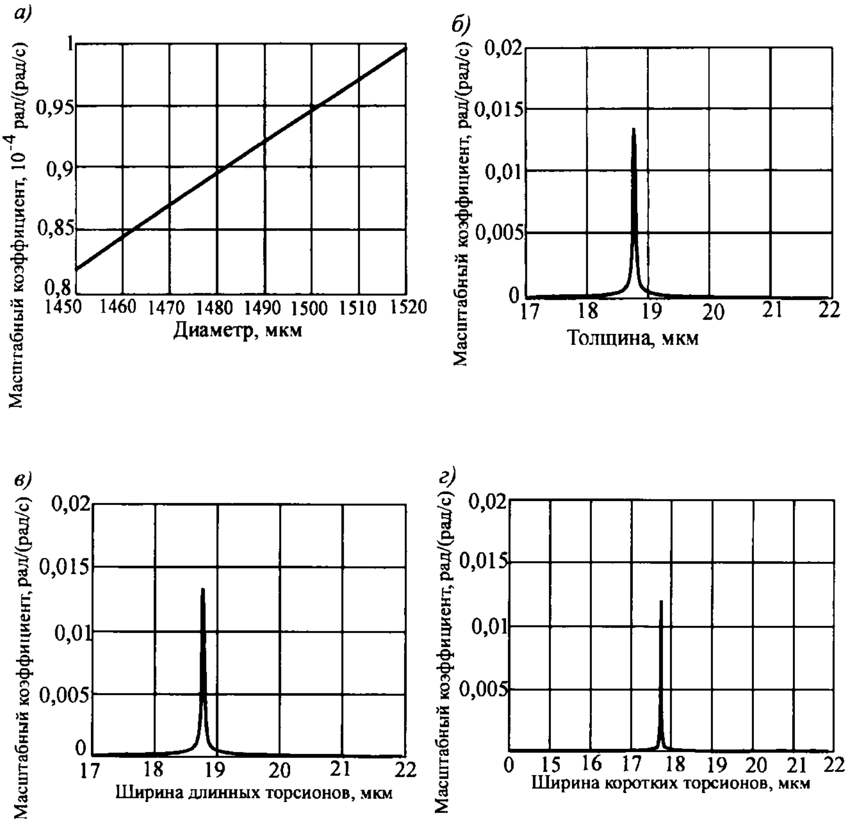


Рис. 5.39. Зависимости масштабных коэффициентов от изменения:
а – наружного радиуса ротора; *б* – толщины структуры; *в* – ширины длинных торсионов;
г – ширины коротких торсионов

$$\overline{K}_2 = \sqrt{8{,}278^2 + 36{,}567^2 + 20{,}02^2 + 173{,}125^2} = $$

$$= 178{,}266\ \frac{\text{Гц}}{\text{мкм}}.$$

Если принять допуск на изготовление на уровне 0,2 мкм, что является достижимым, то изменение частоты вследствие погрешностей изготовления составит

$$\Delta\omega_{\text{т}1} = 0{,}2\overline{K}_1 = 0{,}2 \cdot 165{,}847 = 33{,}169\ \text{Гц};$$

$$\Delta\omega_{\text{т}2} = 0{,}2\overline{K}_2 = 0{,}2 \cdot 178{,}266 = 35{,}653\ \text{Гц}.$$

Можно считать, что рассчитанные погрешности приводят к ошибкам при вычислении частот $\leq$ 2 %, что при $\omega_\gamma = 3000$ Гц составляет 60 Гц, т.е. $\delta\omega_{\text{т}1} \approx \frac{1}{2}\delta\omega_\gamma$.

Зависимости расстройки частот $\Delta = \omega_\beta - \omega_\gamma$ от размеров ротора и упругих элементов подвеса (торсионов) для принятых выше исходных данных приведены на рис. 5.38 (расстройка для номинальных размеров составляет Δ = 3044 – 3000 = = 44 Гц).

Из графиков на рис. 5.38 следует, что расстройка частот в меньшей степени зависит от изменения размеров диаметра ротора и в большей от изменения толщины структуры и ширины длинных и коротких торсионов.

Масштабные коэффициенты для синфазной и квадратурной составляющих при условии, что для ротора $J_\gamma \approx 2J_\beta$, определяются по формулам (4.326), а суммарный масштабный коэффициент по формуле (4.224). Для принятых номинальных размеров имеем: $\Delta = 2\pi \cdot 44 \approx 276{,}6$ рад/с; $\omega_\gamma = 3000 \cdot 2\pi = 1{,}885 \cdot 10^4$ рад/с и, принимая $\gamma_0 = 1{,}5° \cdot \pi / 180 = 0{,}026$ рад, $\xi_\beta = 10^{-4}$, по формулам (4.326) и (4.224) получим $K_м^с = 6{,}45 \cdot 10^{-7}$ рад/(рад/с), $K_м^к = 9{,}46 \times$ $\times 10^{-5}$ рад/(рад/с), $K_м = 9{,}46 \cdot 10^{-5}$ рад/(рад/с).

Результаты вычисления суммарного масштабного коэффициента в зависимости от изменения геометрических размеров МГ приведены на рис. 5.39.

Из рис. 5.39 следует сильная зависимость масштабного коэффициента от геометрических размеров упругих элементов (торсионов) подвеса, что понятно и отмечалось ранее, так как отклонение размеров от номинальных (допуск) вызывает изменение частотной расстройки.

Аналогично изложенному может быть проанализировано влияние изменения геометрических размеров на характеристики МГ любых других типов.

5.8.3. Влияние линейной и угловой вибрации основания

Оценим вначале влияние линейной вибрации основания на МГ с неравножестким упругим подвесом.

На рис. 5.40 показана схема МГ с первичными колебаниями относительно оси *OZ*, (координата γ) и вторичными относительно оси *OX* (выходная координата α). Измеряемая угловая скорость Ω_y.

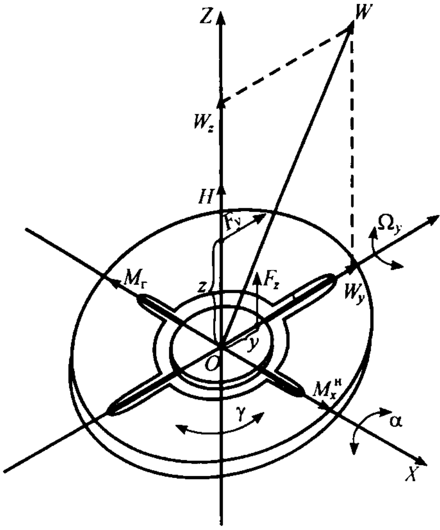


Рис. 5.40. К определению погрешности МГ

Очевидно, что наибольшее влияние на погрешность МГ в измерении угловой скорости Ω_y будет оказывать линейная вибрация в плоскости *YZ*, так как момент $M_x^н$, обусловленный неравножесткостью подвеса и инерционными силами, действующими на ротор вследствие виброускорения *W*, влияет так же, как и гироскопический момент $M_г = H\Omega_y$ вокруг выходной оси *OX*. В соответствии с рис. 5.40 имеем

$$M_x^н = F_z y - F_y z\,, \tag{5.138}$$

где $F_y = -mW_y$; $F_z = -mW_z$; $y = mW_y / G_y$; $z = mW_z / G_z$; m – масса ротора; W_y, W_z – виброускорения в направлении соответствующих осей; G_y, G_z – жесткости упругого подвеса в направлении соответствующих осей.

Преобразуем равенство (5.138) следующим образом:

$$M_x^н = -m^2 W_y W_z \left(\frac{1}{G_y} - \frac{1}{G_z}\right) = -mW_y W_z \left(\frac{1}{\omega_{y0}^2} - \frac{1}{\omega_{z0}^2}\right) = \frac{mW_y W_z}{\omega_{z0}^2}\left(1 - \frac{\omega_{z0}^2}{\omega_{y0}^2}\right), \tag{5.139}$$

где ω_{y0}, ω_{z0} – частоты собственных колебаний МГ в направлении соответствующих осей.

Введем в рассмотрение коэффициент неравножесткости подвеса:

$$K_{yz}^н = 1 - \omega_{z0} / \omega_{y0} \tag{5.140}$$

и перепишем выражение (5.139) в виде

$$M_x^{\text{н}} = (K_{yz}^{\text{н}} m W_y W_z) / \omega_{z0}^2. \qquad (5.141)$$

Очевидно, что при равенстве $\omega_{z0} = \omega_{y0}$ (подвес равножесткий) $M_x^{\text{н}} = 0$.

Предположим, что составляющие виброускорений имеют одинаковые частоты $\omega_{\text{в}}$, но смещены по фазе воздействия ψ:

$$W_y = W_0 \sin \omega_{\text{в}} t\,; \quad W_z = W_0 \sin(\omega_{\text{в}} t + \psi)\,,$$

где $W_0 = W_{y0} = W_{z0}$ – амплитуда виброускорения.

Далее запишем

$$W_y W_z = \\ = W_0{}^2 \left[(1 - \cos^2 \omega_{\text{в}} t) \cos\psi + \frac{1}{2} \sin(2\omega_{\text{в}} t) \sin\psi \right], \qquad (5.142)$$

откуда в соответствии с равенством (5.141) следует, что имеют место постоянная составляющая возмущающего момента и составляющая на удвоенной частоте вибрации.

Из выражения (5.142) видно, что при $\omega_{\text{в}} = 0{,}5\omega_{\alpha 0}$ ($\omega_{\alpha 0}$ – частота собственных колебаний МГ относительно выходной оси) наблюдается резонансное усиление момента (5.141), поскольку частота его изменения при этом равна частоте $\omega_{\alpha 0}$. Очевидно для того чтобы влияние неравножесткости было минимальным, необходимо соблюдение неравенства

$$M_{\text{г}} = H_0 \Omega_y >> (K_{yz}^{\text{н}} m W_0{}^2) / \omega_{z0}^2, \qquad (5.143)$$

откуда следуют ограничения на коэффициент неравножесткости:

$$K_{yz}^{\text{н}} \le \frac{H_0 \Omega_y \omega_{z0}^2}{m W_0{}^2}. \qquad (5.144)$$

На основании формулы (5.144) заключаем, что коэффициент неравножесткости тем больше, чем больше частота ω_{z0}. Однако в силу малой толщины ротора по сравнению с его диаметром затруднительно получить высокое значения ω_{z0}, так как ротор при значительных вибрационных возмущениях способен деформироваться.

Из выражения (5.143) может быть получено ограничение на максимальную величину амплитуды вибрации:

$$W_0 \le \omega_{z0} \sqrt{\frac{H_0 \Omega_y}{m K_{yz}^{\text{н}}}}\,. \qquad (5.145)$$

Пример 5.19

Рассчитаем коэффициент неравножесткости для следующих исходных данных: $\Omega_y = 100\ {}^\circ/\text{ч} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ 1/с, $m = 2 \cdot 10^{-7}$ кг, $W_0 = 100$ м/с^2 (~ 10 g). Из примера 3.4 имеем $C_1 = J_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2, $\omega_{z0} = 6458$ Гц $=$ $= 4{,}06 \cdot 10^4$ 1/с, $\omega_{\gamma 0} = 2100$ Гц $=$ $1{,}32 \cdot 10^4$ 1/с. Принимаем $\gamma_0 = 1{,}5^\circ = \dfrac{1{,}5}{57{,}3}$ рад и получаем $H_0 = J_0 \gamma_0 \omega_{\gamma 0} = 2{,}5 \cdot 10^{-13} \dfrac{1{,}5}{57{,}3} 1{,}32 \cdot 10^4 =$ $= 0{,}86 \cdot 10^{-10}\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$. По формуле (5.144) находим

$$K_{yz}^{\text{н}} \le \frac{0{,}86 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^{-4} (4{,}06 \cdot 10^4)^2}{2 \cdot 10^{-7} (100)^2} \le 0{,}034.$$

Для реальных параметров МГ разница в частотах ω_{y0} и ω_{z0} существенна и значение коэффициента неравножесткости приближается к единице, вследствие чего усиливается влияние линейной вибрации на погрешности МГ.

Пример 5.20

Рассчитаем возмущающий момент, обусловленный линейной вибрацией, и сопоставим его с гироскопическим моментом для параметров МГ из примера 3.4: $\omega_{z0} = 4{,}06 \cdot 10^4$ 1/с; $\omega_{y0} = 8{,}17 \cdot 10^4$ 1/с.

Вычислим коэффициент $K_{yz}^{\text{н}} =$ $= 1 - \left(\dfrac{4{,}06}{88{,}17} \right)^2 = 0{,}998$ и получим $M_x^{\text{н}} =$ $= \dfrac{0{,}998 \cdot 2 \cdot 10^{-7} (100)^2}{(4{,}06 \cdot 10^4)^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ Н·м.

Этот момент, равный по величине гироскопическому $M_x^{\text{н}} = M_{\text{г}}$, возник бы при действии угловой скорости $\Omega_y = M_x^{\text{н}} / H_0$.

Из предыдущего примера $H_0 = 0{,}86 \cdot 10^{-10} \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$ и, следовательно,

$$\Omega_y = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-12}}{0{,}86 \cdot 10^{-10}} = 0{,}014 \frac{1}{\text{с}} = 0{,}014 \cdot 57{,}3 \cdot 3600 =$$

$= 2878{,}3$ °/ч. Заметим, что для $\Omega_y = 100$ °/ч гироскопический момент $M_{\text{г}} = 0{,}86 \cdot 10^{-10} \times$ $\times 5 \cdot 10^{-4} = 4{,}3 \cdot 10^{-14}$ Н·м, что практически на два порядка меньше значения $M_x^{\text{н}} = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ Н·м.

Из примера следует, что линейная вибрация при коэффициенте неравножесткости $K_{yz}^{\text{н}} \to 1$ может приводить к существенным искажения вторичных (выходных) колебаний МГ. При этом нужно иметь в виду, что возмущающий момент имеет частоту вторичных колебаний и поэтому его нельзя устранить с помощью фильтрации выходного сигнала МГ.

Пример 5.21

Вычислим допустимую амплитуду линейного ускорения вибрации при измерении угловой скорости $\Omega_y = 100$ °/ч $= 5 \cdot 10^{-4} \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$ для параметров МГ из предыдущих примеров: $\omega_{z0} = 4{,}06 \cdot 10^4 \dfrac{1}{\text{с}}$; $H_0 = 0{,}86 \cdot 10^{-10} \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$; $m = 2 \cdot 10^{-7}$ кг; $K_{yz}^{\text{н}} = 0{,}997$. По формуле (5.145) имеем

$$W_0 \le 4{,}06 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{0{,}86 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}997}} =$$

$$= 18{,}85 \text{ м/с}^2 = 1{,}92g \ (\sim 2g).$$

Рассчитаем амплитуду линейной вибрации при $\omega_{\alpha 0} = 1{,}73 \cdot 10^4 \dfrac{1}{\text{с}}$: $A_0 = W_0 / \omega_{\alpha 0}^2 =$ $= 18{,}85/(1{,}73 \cdot 10^4)^2 = 63$ мкм.

Из приведенного материала следует, что при $\omega_{\text{в}} < 0{,}5\,\omega_{\alpha 0}$ резонансное усиление возмущающего момента, обусловленное неравножесткостью подвеса, отсутствует, т.е. отпадает требование к равножесткости подвеса. Очевидно, в этом случае вывод о влиянии его неравножесткости надо делать на основании равенства

$$M_x^{\text{н}} = H_0 \Omega_y Q_\alpha, \qquad (5.146)$$

где $M_x^{\text{н}}$ определяется по формуле (5.141).

В данном случае частоты вибрации и вторичных колебаний МГ не совпадают и может быть применена фильтрация для выделения полезного сигнала.

Пример 5.22

Сравним моменты неравножесткости и гироскопического. Из примеров 5.19 и 5.20 имеем

$M_x^{\text{н}} = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ Н·м, $H_0 = 0{,}86 \cdot 10^{-10} \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$, $\Omega_y = 100°/\text{ч} = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/с и положим $Q_\alpha = 75$. Вычислим $M_{\text{г}} = 0{,}86 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 75 =$ $= 3{,}2 \cdot 10^{-12}$ Н·м, т.е. гироскопический момент по амплитуде соизмерим с возмущающим моментом, но его можно устранить фильтрацией сигналов, так как они (возмущающий и полезный) разночастотны.

Оценим влияние неравножесткости подвеса в плоскости *XY* на возбуждение первичных колебаний ротора вокруг оси *OZ*. Момент вокруг оси *OZ* может быть записан аналогично формулам (5.138), (5.139) в виде

$$M_z^{\text{н}} = (K_{xy}^{\text{н}} m W_x W_y) / \omega_{x0}^2, \qquad (5.147)$$

где $K_{xy}^{\text{н}} = 1 - \omega_{x0}^2 / \omega_{y0}^2$.

Амплитуда момента двигателя возбуждения первичных колебаний с учетом (4.311) определяется выражением

$$M_0 = \frac{J_0 \omega_{\gamma 0}^2 \gamma_0}{Q_\gamma}, \qquad (5.148)$$

где γ_0 – амплитуда первичных колебаний; J_0 – момент инерции ротора относительно оси *OZ*; $\omega_{\gamma 0}, Q_\gamma$ – частота собственных колебаний и добротность ротора относительно оси OZ соответственно.

Пример 5.23

Выполним сравнительную оценку возмущающего момента, обусловленного неравножесткостью подвеса относительно оси OZ, и момента двигателя возбуждения первичных колебаний ротора для следующих исходных данных:

$J_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2, $m = 2 \cdot 10^{-7}$ кг, $\omega_{\gamma 0} = 3000\text{Гц} = 18{,}84 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}}, \gamma_0 = 1{,}5° = 2{,}62 \cdot 10^{-2}$ рад, $Q_\gamma = 10^4$, $\omega_{x0} = 80{,}5 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{с}}$, $\omega_{y0} = 88{,}14 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{с}}$, $W_x = W_y = 100$ м/с^2.

Вычислим $K_{xy}^{\text{н}} = 0{,}17$ и по формуле (5.145) получим:

$$M_z^{\text{н}} = \frac{0{,}17 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot (100)^2}{(80{,}5 \cdot 10^4)^2} = 5{,}2 \cdot 10^{-16} \text{ Н·м}.$$

По формуле (5.148) вычислим модуль момента двигателя возбуждения:

$$M_0 = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-13} \cdot (18{,}84 \cdot 10^3)^2 \cdot 2{,}62 \cdot 10^{-2}}{10^4} = \\ = 2{,}37 \cdot 10^{-10} \text{ Н·м}.$$

Из примера следует, что возмущающий момент от неравножесткости подвеса на несколько порядков меньше момента двигателя возбуждения и его можно не учитывать.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие заключения о методах снижения влияния на выходной сигнал МГ линейной вибрации:

- уменьшение коэффициента неравножесткости подвеса в плоскости перпендикулярной к оси вторичных (выходных) колебаний ротора;
- увеличение частоты собственных колебаний ротора (при этом возможно применение частотных методов фильтрации для выделения полезного сигнала);
- контроль частоты вибрационных возмущений, которая должна быть меньше половины частоты собственных колебаний МГ относительно выходной оси (возможна частотная фильтрация выходного сигнала).

Оценим теперь влияние угловой вибрации основания относительно выходной оси подвеса на измерительные свойства МГ. Оценку выполним, сравнивая максимальные амплитуды угловых отклонений ротора относительно выходной оси, вызванных инерционным моментом вследствие углового ускорения основания и гироскопическим моментом в результате измеряемой угловой скорости.

Амплитуда углового отклонения ротора из-за угловой вибрации основания определяется формулой

$$\alpha_{\max}^{\text{в}} = \frac{J_x \varepsilon}{G_\alpha} = \frac{\varepsilon}{\omega_{\alpha 0}^2}, \qquad (5.149)$$

где J_x, G_α, $\omega_{\alpha 0}$ – момент инерции ротора, жесткость подвеса и частота собственных колебаний относительно выходной оси соответственно; ε – амплитуда угловых ускорений основания.

Амплитуда углового отклонения ротора под действием гироскопического момента вследствие измеряемой угловой скорости находится по выражению:

$$\alpha_{\max}^{\text{г}} = \frac{M_{\text{г}} Q_\alpha}{G_\alpha} = \frac{H_0 \Omega_y Q_\alpha}{\omega_{\alpha 0}^2 J_x} = \frac{H_0 \Omega_y}{2 \Delta\omega J_x \omega_{\alpha 0}}, \qquad (5.150)$$

где H_0 – кинетический момент ротора; Ω_y – измеряемая угловая скорость; $\Delta\omega$ – полоса пропускания частот.

Пример 5.24

Оценим влияние угловой вибрации основания с амплитудой 5° и частотой 5 Гц при измерении угловой скорости $\Omega_y = 100$ °/ч =

$=5\cdot10^{-4}$ 1/с и полосой пропускания частот $\Delta\omega = 20$ Гц $=125{,}6$ 1/с для параметров гироскопа: $H_0 = 0{,}86\cdot10^{-10}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$, $J_x = 10^{-13}$ кг·м², $\omega_{\alpha0} = 2700$ Гц $= 16{,}9\cdot10^3$ 1/с.

Вычислим амплитуду углового ускорения основания $\varepsilon = \frac{5}{57{,}3}(5\cdot2\pi)^2 = 86$ 1/с² и по формуле (5.149) получим $\alpha^{\text{в}}_{\max} = \frac{86}{\left(16{,}9\cdot10^3\right)^2} = 3\cdot10^{-7}$ рад = 0,06″. По формуле (5.150) рассчитаем $\alpha^{\text{г}}_{\max} = \frac{0{,}86\cdot10^{-10}\cdot5\cdot10^{-4}}{2\cdot125{,}6\cdot10^{-13}\cdot16{,}9\cdot10^3} = 10^{-7}$ рад = 0,02″.

Таким образом, амплитуда колебаний ротора под действием углового ускорения основания оказалась больше амплитуды колебаний ротора, обусловленных измеряемой угловой скоростью.

При анализе возмущений, вносимых угловой вибрацией основания [см. формулу (5.149)], следует иметь в виду, что вынужденные колебания ротора относительно выходной оси имеют частоту угловых колебаний, а измерительная информация [см. выражение (5.150)] идет на частоте собственных колебаний ротора относительно выходной оси МГ.

Из примера 5.24 следует также, что датчик перемещений МГ должен обладать очень большой чувствительностью. В самом деле, линейное перемещение ротора, соответствующее измеряемой угловой скорости (100 °/ч), составляет всего $\Delta z = R\alpha^{\text{г}}_{\max}$ (R – радиус ротора) и равно $\Delta z = 1{,}5\cdot10^{-3}\cdot10^{-7} = 1{,}5\cdot10^{-10}$ м $= 1{,}5\cdot10^{-4}$ мкм.

Таким образом, если номинальная емкость датчика перемещений составляет единицы пикофарад (10^{-12} Ф), датчик должен реагировать на изменения емкости в сотые доли пикофарада [фемтофарад (10^{-15} Ф)].

5.8.4. Влияние ориентации упругих элементов подвеса на пластине монокристаллического кремния

Анизотропия свойств кремния рассмотрена в подразд. 2.1.2, где в табл. 2.2 показаны изменения модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона в зависимости от кристаллографических направлений для трех наиболее часто используемых при производстве микромеханических приборов плоскостей: (100), (110) и (111).

Рассмотрим влияние анизотропии кремния на характеристики МГ, выполненного по рис. 3.11. На рис. 5.41 угол ϑ определяет ориентацию топологии упругих элементов, совпадающих с осями X, Y относительно кристаллографических направлений X_1, Y_1.

Запишем формулы (3.28), (3.29) с учетом угла ϑ ориентации топологии МГ относительно кристаллографических направлений:

$$\left.\begin{aligned}
G_\gamma(\Pi) &= \frac{c_\text{п}}{3}\left[\frac{E_\text{п}(\vartheta)b^3_{\text{п}1}}{l_{\text{т}1}} + \frac{E_\text{п}\left(\vartheta+90^\circ\right)b^3_{\text{п}2}}{l_{\text{т}2}}\right];\ \omega_\gamma(\Pi) = \sqrt{\frac{G_\gamma(\Pi)}{J_\gamma}};\\
G_\alpha(\Pi) &= 2\frac{G_\text{п}(\vartheta)k'b_{\text{п}1}c^3_\text{п}}{l_{\text{т}1}} + \frac{1}{3}\frac{E_\text{п}\left(\vartheta+90^\circ\right)b_{\text{п}2}c^3_\text{п}}{l_{\text{т}2}};\ \omega_\alpha(\Pi) = \sqrt{\frac{G_\alpha(\Pi)}{J_\alpha}};\\
G_\beta(\Pi) &= 2\frac{G_\text{п}\left(\vartheta+90^\circ\right)k'b_{\text{п}2}c^3_\text{п}}{l_{\text{т}2}} + \frac{1}{3}\frac{E_\text{п}(\vartheta)b_\text{п}c^3_\text{п}}{l_{\text{т}1}};\ \omega_\beta(\Pi) = \sqrt{\frac{G_\beta(\Pi)}{J_\beta}},
\end{aligned}\right\} \tag{5.151}$$

где $E_\text{п}(\vartheta)$, $G_\text{п}(\vartheta)$ – модули Юнга и сдвига, зависящие от кристаллографической плоскости (П) и кристаллографического направления (ϑ).

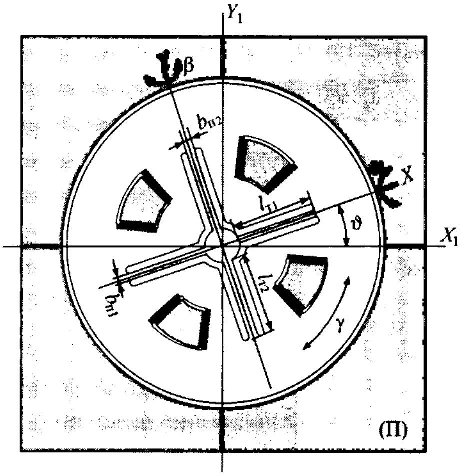


Рис. 5.41. Топология МГ на кристаллографической плоскости (П)

Примем следующие значения параметров МГ: $k' = 0{,}2$, $J_\gamma = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ кг·м^2, $J_\alpha = J_\beta = 10^{-13}$ кг·м^2 (см. пример 3.4), $b_{п1} = b_{п2} = 27 \cdot 10^{-6}$ м, $l_{т1} = l_{т2} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ м, $c_п = 20 \cdot 10^{-6}$ м, определим из табл. 2.2 значения $E_п$, $G_п$ для различных кристаллографических плоскостей и направлений и по формулам (5.151) рассчитаем зависимости частот первичных $\omega_{\gamma 0}(П)$ и вторичных $\omega_{\alpha 0}(П) = \omega_{\beta 0}(П)$ колебаний МГ, графики которых приведены на рис. 5.42.

Анализ зависимостей на рис. 5.42, *а* позволяет сделать следующие выводы.

1. Максимальная частота первичных колебаний соответствует расположению структуры МГ в плоскости (110) с ориентацией торсионов под углом 54,7° к направлению [100] (см. табл. 2.2). Этому направлению отвечает символ [110].

2. При формировании МГ в плоскости (111) частота колебаний не зависит от ориентации торсионов, что объясняется изотропностью кремния в этой плоскости.

3. Максимальная частота первичных колебаний для МГ в плоскости (100) соответствует направлению, лежащему под углом 45° к оси [100]. Этому направлению соответствует символ [110].

Из рис. 5.42, *б* следует, что максимальные значения частот вторичных колебаний соответствуют тем же направлениям, что и для первичных колебаний.

Выполним оценку чувствительности МГ к измеряемой угловой скорости для различных кристаллографических плоскостей и направлений, определяемую статическим коэффициентом передачи (5.123). Для принятых параметров МГ, считая $\gamma_0 = 1°$, $Q_\beta = 10^4$, получим зависимости, приведенные на рис. 5.43.

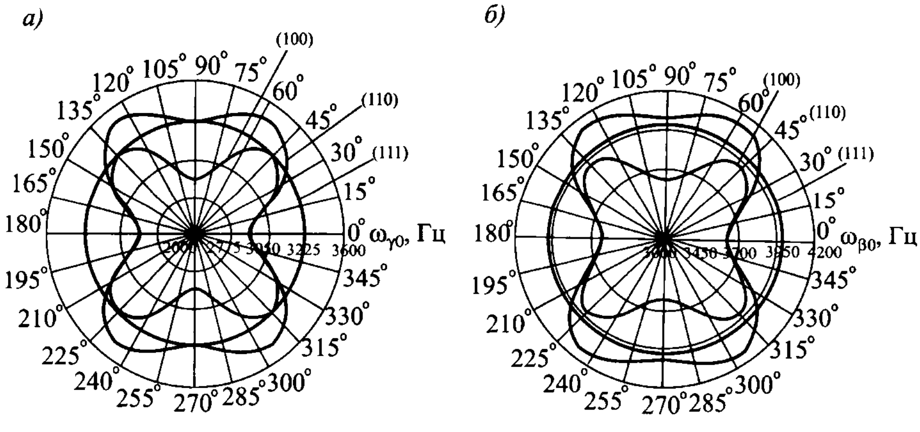


Рис. 5.42. Зависимости частот колебаний МГ от кристаллографических плоскостей и направлений:
а – первичные колебания (РД); *б* – вторичные колебания (РЧ)

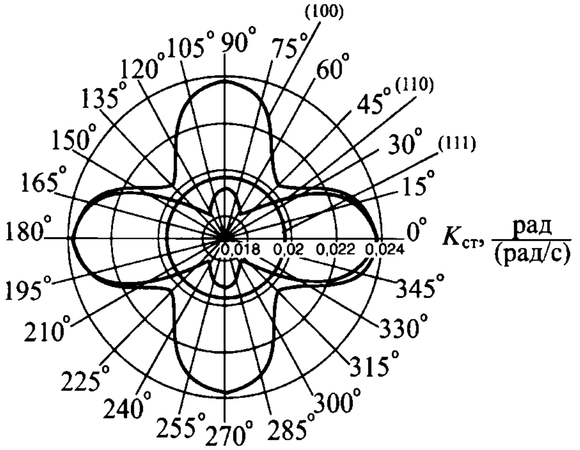
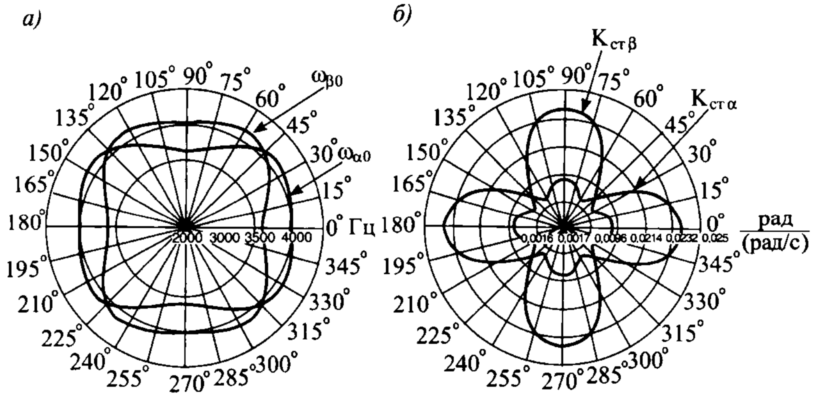


Рис. 5.43. Зависимости статического коэффициента передачи от кристаллографических плоскостей и направлений

Анализ рис. 5.43 позволяет заключить, что максимальная чувствительность МГ к измеряемой угловой скорости наблюдается в случае, когда структура МГ выполнена в плоскости (100), причем торсионы упругого подвеса должны располагаться по направлениям [100] и [010].

Изготовление МГ в плоскости (110) имеет некоторые особенности, связанные с изменением модуля Юнга в зависимости от направления (см. таблицу 2.2). Если, например, выполнить одну пару торсионов вдоль направления [100], а другую пару по углом 90° – вдоль направления [011], то этим направлениям будут соответствовать различные значения модуля Юнга (168,9 и 130,2 ГПа). Такая его асимметрия приведет к различным значениям собственной частоты и чувствительности МГ по каналам α и β (рис. 5.44).

Как следует из рис. 5.44, *а*, равенство собственных частот вторичных колебаний относительно осей *X* и *Y* (см. рис. 5.41) имеет место при ориентации торсионов под углом 45° к направлению [100], но при этом минимальна чувствительность МГ (см. рис. 5.44, *б*).


а)

б)

Рис. 5.44. Зависимости собственных частот колебаний (*а*) и статического коэффициента передачи (*б*) от направления в плоскости (110)

Таким образом, можно сделать вывод, что при проектировании МГ возможен выбор оптимальной ориентации его структуры в определенной кристаллографической плоскости. Критерии оптимальности могут быть различными: максимум собственных частот, максимум чувствительности и др.

5.9. ШУМ В МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРАХ

Шумом микромеханического прибора можно назвать любую составляющую в выходном сигнале, которую допустимо представить как результат воздействия измеряемой физической величины (ускорение, давление, угловая скорость и т.д.), в действительности являющуюся следствием внешних и внутренних помех (источником шума). Например, при измерениях в условиях вибрации в выходном сигнале микроприбора возникает составляющая, которую можно назвать вибрационным шумом.

Механические микроструктуры и электронные средства являются внутренними (конструктивными) источниками шума, имеющими различную физическую природу. Так называемый броуновский шум происходит от столкновения между молекулами газа и механическими микроструктурами, имеет тепловую природу и обусловливает теоретическую предельно возможную разрешающую способность (чувствительность) микроприбора. Преобразователи и электронные средства (усилители, интеграторы, фильтры и т.д.) служат источниками (генераторами) теплового шума. Шумовой спектр выходного сигнала равен спектру шума на входе, умноженному на частотную характеристику системы, т.е. зависит от схемотехники конструкции. Электронный шум зависит от конкретной схемы электроники и здесь не рассматривается.

5.9.1. Происхождение теплового шума

Наличие резистора в электронной схеме ассоциируется с некоторым генератором шума, источником напряжения которого является тепловая энергия $\frac{1}{2}kT$ (k – постоянная Больцмана; T – температура). На рис. 5.45 приведена схема RLC-резонатора (R – резистор; L – индуктивность; C – конденсатор) с генератором шума $U_ш$.

Очевидно, что тепловая энергия эквивалентна энергии, запасенной в индуктивности и конденсаторе. Уравнение напряжений резонатора имеет вид

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=U_ш, \qquad (5.152)$$

или

$$\frac{d^2I}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{dI}{dt}+\omega_0^2I=\frac{U_ш}{L},$$

где $\omega_0=\sqrt{1/LC}$ – собственная частота резонатора; $\xi=R/(2\omega_0L)$ – относительный коэффициент демпфирования.

Добротность резонатора определяется выражением

$$Q=1/2\xi=\omega_0L/R. \qquad (5.153)$$

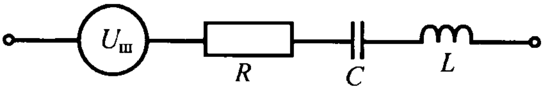


Рис. 5.45. RLC-резонатор с генератором шума

Перепишем уравнение (5.152) в виде

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I dt=f(t)=U_{ш}, \quad (5.154)$$

перейдем к операторной форме записи ($s=d/dt$) и запишем выражение для тока в цепи из-за шумового напряжения в форме

$$I=\frac{U_{ш}}{R+sL+\frac{1}{sC}}. \quad (5.155)$$

Положим в формуле (5.155) $s=i\omega$ и выполним следующие преобразования:

$$I=\frac{U_{ш}}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{U_{ш}\left[R-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=$$

$$=\frac{U_{ш}R}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}-\frac{iU_{ш}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Запишем среднюю квадратическую величину тока следующим образом:

$$\bar{I}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{U_{ш}^2R^2}{\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2}+\frac{U_{ш}^2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2}\right)}=\frac{U_{ш}}{\sqrt{2\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}}. \quad (5.156)$$

Выражение для собственной энергии тока в резонаторе преобразуем с учетом формул (5.153), (5.156) и, имея в виду, что $L=RQ/\omega_0$, получим

$$E=\frac{1}{2}L\bar{I}^2=\frac{LU_{ш}^2}{4\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}=\frac{LU_{ш}^2}{4R^2\left[1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{U_{ш}^2Q}{4R\omega_0\left[1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}.$$

Приравняем тепловую и электрическую энергию $\frac{1}{2}kT=E$, и из этого равенства найдем

$$\overline{U}_{ш}^2=2kTR\frac{\omega_0\left[1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{Q}. \quad (5.157)$$

Полоса пропускания частот определяется выражением

$$\Delta\omega=\omega_0/2Q, \quad (5.158)$$

из которого выразим ω_0 и подставим в формулу (5.157):

$$\overline{U}_{ш}^2=4kTR\Delta\omega\left[1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]. \quad (5.159)$$

Энергия резонатора сосредоточена в узком диапазоне частот в районе резонанса. Можно считать, что $\omega/\omega_0\to 1$ и $\omega_0/\omega\to 1$ и, кроме того, энергия равномерно распределяется во всем частотном диапазоне и не зависит от частоты. Таким образом, средняя квадратическая величина теплового шума является внутренней помехой типа белого шума, спектральная плотность которого из формулы (5.159) определяется приближенной зависимостью

$$S_R(\omega)=[\overline{U}_{\text{ш}}^2/\Delta\omega]\approx 4kTR\,. \qquad (5.160)$$

5.9.2. Происхождение механического шума

Рассмотрим механический резонатор (рис. 5.46), который состоит из ИМ m, пружины с жесткостью G_x и демпфера с коэффициентом демпфирования b_x.

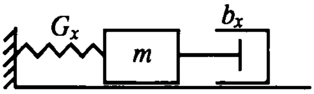


Рис. 5.46. Механический резонатор

Уравнение движения ИМ имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b_x\frac{dx}{dt}+G_x x=F\,, \qquad (5.161)$$

где F – внешняя возмущающая сила.

Перейдем к операторной форме записи $(s=d/dt)$ и, имея в виду, что $dx/dt=\mathrm{v}=sx$, перепишем уравнение (5.161) в виде

$$sm\mathrm{v}+b_x\mathrm{v}+\frac{G_x}{s}\mathrm{v}=F\,,$$

откуда, полагая $s=i\omega$, получим

$$\mathrm{v}=\frac{F}{b_x+i\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)}=\frac{F\left[b_x-i\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)\right]}{b_x^2+\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)^2}\,.$$

Запишем среднюю квадратическую величину скорости:

$$\bar{\mathrm{v}}=\bar F\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{b_x^2}{\left[b_x^2+\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)^2\right]^2}+\frac{\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)^2}{\left[b_x^2+\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)^2\right]^2}\right\}}=\frac{\bar F}{\sqrt{2\left[b_x^2+\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)^2\right]}}\,.$$

Имея в виду, что собственная частота и добротность механического резонатора определяются выражениями $\omega_0=\sqrt{G_x/m}$, $Q_x=\omega_0 m/b_x$, запишем величину

$$\bar{\mathrm{v}}^2=\frac{\bar F^2}{2\left[b_x^2+\left(\omega m-\frac{G_x}{\omega}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\bar F^2}{2b_x^2\left[1+Q_x^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}\,. \qquad (5.162)$$

С учетом формул (5.158) и (5.162) получим зависимость для вычисления кинетической энергии механического резонатора:

$$E=\frac{1}{2}m\bar{\mathrm{v}}^2=\frac{1}{4b_x}\left\{\frac{\bar F Q_x}{\omega_0\left[1+Q_x^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}\right\}=$$

$$=\frac{\bar F^2}{8b_x\Delta\omega\left[1+Q_x^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}\,.$$

Из равенства $\frac{1}{2}kT = E$ получим

$$\overline{F}^2 = 4kTb_x\Delta\omega\left[1+Q_x{}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]. \tag{5.163}$$

Для резонансной области ($\omega/\omega_0 \to 1$, $\omega_0/\omega \to 1$) вычислим из формулы (5.163) среднюю квадратическую величину механического шума, который также является внутренней помехой типа белого шума со спектральной плотностью

$$S_в(\omega) = \overline{F}^2/\Delta\omega \approx 4kTb_x. \tag{5.164}$$

Покажем аналогию шумов электрического и механического резонаторов.

В уравнении (5.161) введем обозначение $dx/dt = I$ (электрический ток-аналог механической скорости) и перепишем его в виде

$$m\frac{dI}{dt} + b_xI + G_x\int Idt = f(t) = U_ш. \tag{5.165}$$

Сравнивая эквивалентные уравнения (5.154) и (5.165), запишем равенства

$$L = m, \quad C = 1/G_x, \; R = b_x = \sqrt{G_xm}/Q_x.$$

В операторной форме уравнения (5.154), (5.165) имеют вид

$$sLI + RI + \frac{I}{sC} = U_ш, \tag{5.166}$$

откуда следует величина I, эквивалентная выражению (5.155), и, следовательно, для равенства (5.166) справедливо выражение (5.160). Помня, что $f = U_ш$, $R = b_x$, получим

$$\overline{f}^2/\Delta\omega \approx 4kTb_x. \tag{5.167}$$

Таким образом, из сравнения выражений (5.160), (5.167) следует заключение об эквивалентности шумового напряжения и механического шума.

5.9.3. Механический шум микроакселерометров и микродатчиков давления

Математическая модель осевого МА в линейной постановке описывается уравнением (5.161), в котором $F = ma$ (a – измеряемое ускорение). Математическая модель маятникового (углового) МА по структуре аналогична уравнению (5.161).

Шумовой спектр выходного сигнала равен спектру входа, умноженному на частотную характеристику системы, в данном случае – МА. Имея в виду выражения (5.161) и (5.164), получим

$$\overline{x}_ш^2 = \frac{4kTb_x}{b_x{}^2\omega^2 + (G_x - m\omega^2)^2}. \tag{5.168}$$

Средний квадратический шум, м/(рад/с)$^{1/2}$, определяется по формуле

$$<\overline{x}_ш> = \sqrt{\overline{x}_ш^2} = \frac{2\sqrt{kTb_x}}{\sqrt{b_x^2\omega^2 + (G_x - m\omega^2)^2}}. \tag{5.169}$$

На рис. 5.47 для исходных данных: m = 7,5·10^{-5} кг; k = 1,38·10^{-23} Дж/К; T = = 293 К; G_x = 1575 Н/м и величине $b_x = (\omega_0m)/Q$ ($\omega_0 = 2800$ 1/с), определенной для Q_x = 1; 2; 5; 10, приведена шумовая характеристика, рассчитанная по формуле (5.169).

МА используется для измерений на частотах, меньших частоты резонанса, т.е. из формулы (5.169) следует приближенное равенство:

$$\overline{x}_ш^2 \approx \frac{2\sqrt{kTb_x}}{G_x}. \tag{5.170}$$

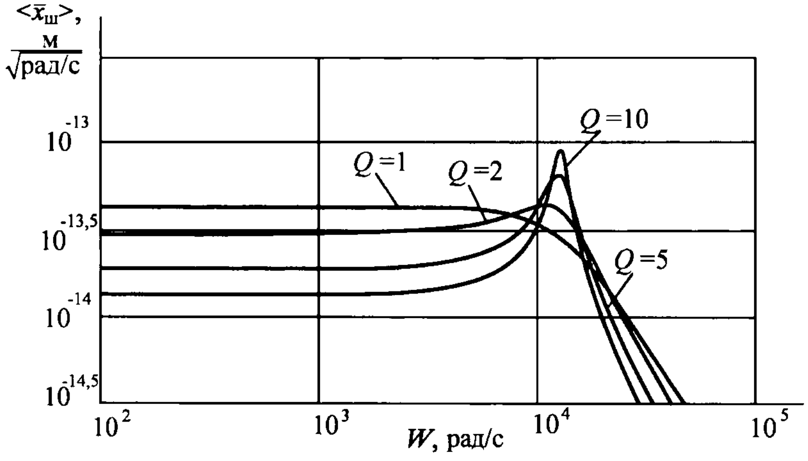


Рис. 5.47. Расчетный спектр шума МА
(значения частоты приведены в логарифмическом масштабе)

Для установившегося (статического) режима измерений на частоте ниже резонанса $x = ma/G_x$. Значит, механический шум осевого МА, (м·с$^{-2}$)/(рад/с)$^{1/2}$, с учетом выражения (5.170) определяется следующим образом:

$$<\bar{a}_ш> = \frac{G_x}{m}\frac{2\sqrt{kTb_x}}{G_x} = \frac{2\sqrt{kT2\xi\omega_0 m}}{m} = $$

$$= 2\sqrt{\frac{kT2\xi\omega_0}{m}}.$$

Окончательно получаем

$$<\bar{a}_ш> = 2\sqrt{\frac{kT\omega_0}{mQ}}. \qquad (5.171)$$

Из анализа выражения (5.171) следует, что отношение сигнал/шум может быть увеличено следующим образом: увеличением массы, улучшением добротности, уменьшением полосы пропускания частот. Чрезмерное повышение добротности при отсутствии обратной связи может привести к слишком большому шуму на резонансной частоте. Так как полоса пропускания частот является одним из важных эксплуатационных параметров, единственная мера увеличения характеристики сигнал/шум – увеличение массы.

Рассмотрим теперь маятниковый МА на поступательно перемещающемся основании. Положим в формулах (4.263) $y_r = 0$ и получим уравнение движения МА:

$$J_A\ddot{\vartheta} + k_{д\vartheta}\dot{\vartheta} + k_{22}\vartheta = m(u \mp g)(l + a),$$

где J_A – момент инерции маятника относительно точки закрепления упругого элемента; m – масса маятника; $k_{д\vartheta}$ – коэффициент углового демпфирования; k_{22} – угловая жесткость подвеса; $l + a$ – расстояние от точки закрепления упругого элемента до ЦМ маятника; u – измеряемое ускорение.

Шумовой спектр выходного сигнала определяется выражением, аналогичным равенству (5.168):

$$\overline{\vartheta}^2_ш = \frac{4kTk_{д\vartheta}}{k^2_{д\vartheta}\omega^2 + \left(k_{22} - J_A\omega^2\right)^2},$$

а средний квадратический шум, рад/(рад/с)$^{1/2}$, находится по формуле

$$<\overline{\vartheta}_{\text{ш}}>=\frac{2\sqrt{kTk_{\text{д}\vartheta}}}{\sqrt{k_{\text{д}\vartheta}^2\omega^2+\left(k_{22}-J_A\omega^2\right)^2}};\quad(5.172)$$

Для статического режима измерений средний квадратический шум определяется приближенной формулой

$$<\overline{\vartheta}_{\text{ш}}>=\frac{2\sqrt{kTk_{\text{д}\vartheta}}}{k_{22}};\qquad(5.173)$$

Так как в статическом режиме угол поворота маятника соответствует выражению $\vartheta=m(u\mp g)(l+a)/k_{22}$, с учетом равенства (5.173) запишем формулу для вычисления механического шума маятникового МА, $(\text{м}\cdot\text{с}^{-2})/(\text{рад/с})^{1/2}$, в виде

$$<\overline{u\mp g}>=\frac{k_{22}}{m(l+a)}\frac{2\sqrt{kTk_{\text{д}\vartheta}}}{k_{22}}=$$

$$=\frac{2}{m(l+a)}\sqrt{\frac{kTJ_A\omega_0}{Q_\vartheta}},\qquad(5.174)$$

где $Q_\vartheta=1/2\xi_\vartheta=J_A\omega_0/k_{\text{д}\vartheta}$.

Имея в виду пример 3.2, запишем $J_A=J_C+m(l+a)^2\approx m(l+a)^2$ и после подстановки этой величины в формулу (5.174) получим

$$<\overline{u\mp g}>\approx 2\sqrt{\frac{kT\omega_0}{mQ_\vartheta}}.\qquad(5.175)$$

Формулы (5.175) и (5.171) совпадают, и, следовательно, рекомендации по увеличению отношения сигнал/шум для осевого МА справедливы и для маятникового МА.

Найдем шумовые характеристики МДД с жестким центром, полагая, что на него действует сила $F_{\text{д}}=pS$ (p – измеряемое давление; S – площадь жесткого центра). Из системы (4.78) при $l_x=l_z=0$ получим уравнение движения жесткого центра:

$$m\ddot{y}+k_{\text{ду}}\dot{y}+G_y y=pS\,,$$

где m – масса жесткого центра; $k_{\text{ду}}$ – коэффициент демпфирования мембраны; G_y – жесткость мембраны.

Аналогично предыдущему средний квадратический шум, м/(рад/с)$^{1/2}$, определяется формулой

$$<\overline{y}_{\text{ш}}>=\frac{2\sqrt{kTk_{\text{ду}}}}{\sqrt{k_{\text{ду}}^2\omega^2+\left(G_y-m\omega^2\right)^2}},$$

откуда для статического режима измерений следует приближенная зависимость

$$<\overline{y}_{\text{ш}}>\approx\frac{2\sqrt{kTk_{\text{ду}}}}{G_y}.\qquad(5.176)$$

В статическом режиме перемещение жесткого центра мембраны $y=pS/G_y$ и в соответствии с формулой (5.176) механический шум МДД, $(\text{Н}\cdot\text{м}^{-2})/(\text{рад/с})^{1/2}$, с жестким центром определяется зависимостью

$$<\overline{p}>=\frac{G_y}{S}\frac{2\sqrt{kTk_{\text{ду}}}}{G_y}=\frac{2}{S}\sqrt{\frac{kT\omega_0 m}{Q_y}},\quad(5.177)$$

где $Q_y=1/2\xi_y=\dfrac{m\omega_0}{k_{\text{ду}}}$.

Из выражения (5.177) следует, что отношение сигнал/шум может быть увеличено следующим образом: расширением площади жесткого центра и уменьшением его массы, что является предпочтительным, а также повышением добротности и сужением полосы пропускания частот.

5.9.4. Механический шум микрогироскопов

Рассмотрим вычисление механического шума МГ RR-типа на примере одного измерительного канала, математическая модель которого в соответствии с равенством (4.153) имеет вид

$$J_\beta\ddot{\beta} + b_\beta\dot{\beta} + G_\beta\beta = H_0\Omega_x\,,$$

где J_β – экваториальный момент инерции ротора; b_β, G_β – коэффициент демпфирования и жесткость упругого подвеса ротора по оси вторичных колебаний; Ω_x – измеряемая угловая скорость; H_0 – модуль кинетического момента ротора.

Частотная передаточная функция МГ записывается так:

$$\frac{\beta(\omega)}{\Omega_x(\omega)} = W(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{b_\beta^2\omega^2 + (G_\beta - J_\beta\omega^2)^2}}\,. \qquad (5.178)$$

Аналогично формуле (5.164) получим величину

$$\left[\frac{\overline{M}_в^2}{\Delta\omega}\right] \approx 4kTb_\beta\,, \qquad (5.179)$$

откуда следует средний квадратический возмущающий момент, обусловленный тепловыми флуктуациями и эквивалентный некоторому гироскопическому моменту:

$$\overline{M}_в = H_0\Omega_x = \sqrt{4kTb_\beta\Delta\omega}\,. \qquad (5.180)$$

С учетом выражений (5.178), (5.180) получим формулу для вычисления среднего квадратического шума, рад/(рад/с)$^{1/2}$,

$$< \overline{\beta}_ш > = \frac{2\sqrt{kTb_\beta}}{\sqrt{b_\beta^2\omega^2 + \left(G_\beta - J_\beta\omega^2\right)^2}}\,. \qquad (5.181)$$

На рис. 5.48 приведена шумовая характеристика МГ, рассчитанная по формуле (5.181) для следующих исходных данных: $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, $T = 293$ К, $J_\beta = 10^{-13}$ кг·м^2, $G_\beta = 29{,}76\cdot10^{-6}$ Н·м $\left(\omega_{\beta 0} = 1{,}73\cdot10^4 \text{ рад/с}\right)$ и для различных значений добротности: $Q_\beta = 50;\ 100;\ 200;\ 1000$, которым отвечают коэффициенты демпфирования $\left(b_\beta = J_\beta\omega_{\beta 0}/Q_\beta\right)$, $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$, равные соответственно $3{,}46\cdot10^{-11}$; $1{,}73\cdot10^{-11}$; $8{,}65\cdot10^{-12}$; $1{,}73\cdot10^{-12}$.

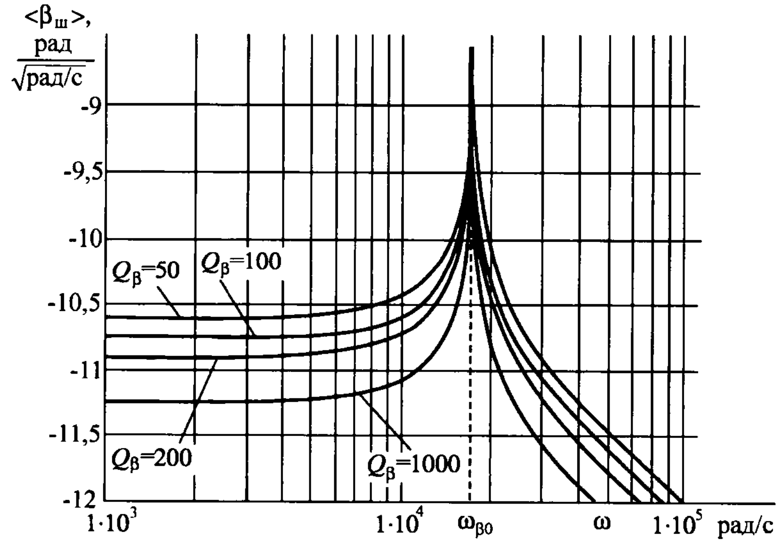


Рис. 5.48. Расчетный спектр шума МГ

Оценим шум МГ, полагая, что на основании формулы (5.181) имеет место приближенное равенство

$$<\overline{\beta}_{ш}> = \frac{2\sqrt{kTb_{\beta}}}{G_{\beta}}. \qquad (5.182)$$

Считаем далее, что гироскопический момент (момент силы инерции Кориолиса), обусловленный шумовой скоростью Ω_x, уравновешивается упругим моментом подвеса:

$$H_0 <\overline{\Omega}_x> \approx G_{\beta} <\overline{\beta}_{ш}>. \qquad (5.183)$$

Из сравнения выражений (5.182) и (5.183) получим формулу для вычисления среднеквадратического шума гироскопа, (рад/с)/(рад/с)$^{1/2}$,

$$<\overline{\Omega}_x> \approx \frac{G_{\beta} <\overline{\beta}_{ш}>}{H_0} \approx \frac{2\sqrt{kTb_{\beta}}}{H_0}. \qquad (5.184)$$

Приняв, что для ротора, выполненного в виде тонкого диска, $J_{\gamma} \approx 2J_{\beta}$ и $H_0 = J_{\gamma}\gamma_0\omega_{\gamma p}$ (J_{γ} – осевой момент инерции ротора, γ_0 – амплитуда колебаний ротора в РД), формулу (5.184) преобразуем следующим образом:

$$<\overline{\Omega}_x> \approx \sqrt{\frac{2kT}{J_{\gamma}\gamma_0^2\omega_{\beta 0}Q_{\beta}}}, \qquad (5.185)$$

откуда следует формула для вычисления минимально возможной угловой скорости, которую мог бы обнаружить МГ, соответствующей его максимальной чувствительности, рад/с$^{1/2}$:

$$\Omega_{\min} = <\overline{\Omega}_x> \sqrt{\Delta\omega} = \sqrt{\frac{2kT\Delta\omega}{J_{\gamma}\gamma_0^2\omega_{\beta 0}Q_{\beta}}}. \qquad (5.186)$$

Из формулы (5.185) ясно, что уменьшение механического шума МГ RR-типа возможно увеличением кинетического момента, амплитуды первичных колебаний ротора и добротности по оси вторичных колебаний (РЧ).

Вычисление механического шума МГ LL-типа рассмотрим на примере одномассового МГ (см. рис. 3.7 и 3.47). В предположении, что в РД ИМ имеет скорость $\dot{x} = x_0\omega_x \cos\omega_x t$ (x_0, ω_x – амплитуда и частота перемещений ИМ в РД), в соответствии с формулой (1.12) движение ИМ в РЧ описывается уравнением

$$m\ddot{y} + b_y\dot{y} + G_y y = -2m\Omega_z x_0\omega_x \cos\omega_x t,$$

где m – масса подвижной микроструктуры (ИМ); b_y – коэффициент демпфирования; G_y – жесткость упругого подвеса; Ω_z – измеряемая угловая скорость.

Находим, что броуновский шум приводит к шуму ускорения вследствие теплового движения молекул газа, который определяется аналогично формуле (5.171):

$$<\overline{a}_y> = 2\sqrt{\frac{kT\omega_y}{mQ_y}}, \qquad (5.187)$$

где $Q_y = 1/2\xi_y = m\omega_y / b_y$, где $\omega_y = \sqrt{G_y / m}$ – собственная частота ИМ в РЧ.

Сила воздействия на ИМ определяется шумовым ускорением [см. формулу (5.187)] и уравновешивается силой инерции Кориолиса:

$$m <\overline{a}_y> = 2mx_0\omega_x <\overline{\Omega}_z>,$$

откуда с учетом выражения (5.187) следует механический шум МГ LL-типа, (рад/с)/(рад/с)$^{1/2}$, эквивалентный измеряемой угловой скорости:

$$<\overline{\Omega}_z> = \frac{1}{x_0\omega_x}\sqrt{\frac{2kT\omega_y}{mQ_y}}. \qquad (5.188)$$

Минимально возможная угловая скорость, которую мог бы обнаружить

МГ, определяется аналогично формуле (5.186):

$$\Omega_{\min} = \frac{1}{x_0\omega_x}\sqrt{\frac{2kT\omega_y\,\Delta\omega}{mQ_y}}. \qquad (5.189)$$

Из формулы (5.188) видно, что уменьшение механического шума МГ LL-типа можно обеспечить увеличением амплитуды, собственной частоты ИМ, а также ее массы и добротности по оси вторичных колебаний.

В заключение обратим внимание на то, что механический шум и шум электронных средств имеет один порядок величин.

Темы для самоконтроля

1. Измерительная цепь осевого МА прямого преобразования.
2. Измерительная цепь маятникового МА прямого преобразования.
3. Измерительные цепи МА компенсационного преобразования.
4. Формирование в МА электростатической обратной связи.
5. Формирование в МА магнитоэлектрической обратной связи.
6. Частотные характеристики МА прямого преобразования.
7. Частотные характеристики МА компенсационного преобразования.
8. Коррекция частотных характеристик.
9. Ошибки измерения МА.
10. Измерительная цепь МДД прямого преобразования.
11. МДД с электростатической обратной связью.
12. МДД с магнитоэлектрической обратной связью.
13. Формирование выходного сигнала в МГ LL-типа.
14. Формирование выходного сигнала в МГ LR-типа.
15. Формирование выходного сигнала в МГ RR-типа.
16. Частотные характеристики МГ без обратной связи.
17. Частотные характеристики МГ с обратной связью.
18. Зависимость масштабного коэффициента МГ от конструктивных параметров.
19. Зависимость частотной расстройки МГ от конструктивных параметров.
20. Влияние линейной и угловой вибрации основания на измерительные свойства МГ.
21. Влияние анизотропии материала на измерительные свойства МГ.
22. Тепловой шум.
23. Аналогия теплового и механического шума.
24. Механический шум МА.
25. Механический шум МДД.
26. Механический шум МГ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор понимает, что не весь предложенный для изучения материал одинаково интересен, охватывает все вопросы, возникающие при рассмотрении конкретных тем и что по некоторым из них имеются более глубокие разработки.

Вместе с тем, появление у ряда предприятий интереса к микромеханике и связанная с этим потребность в подготовке специалистов делают издание своевременным. Кроме того, увеличивающееся число публикаций, зачастую дублирующих друг друга по затронутым проблемам, методам и результатам, а также малая тиражность большинства из них требуют упорядоченности знаний в области микромеханических приборов.

Основную свою заслугу автор видит в том, что он в ущерб другим приоритетам нашел время систематизировать результаты собственных исследований и исследований других авторов и подготовить отечественный вариант учебного издания, зная, что предлагается значительное число электронных образовательных программ по вопросам МЭМС.

Изложенный материал соответствует современному научному уровню и тематике публикаций, посвященных микромеханическим приборам, в чем можно убедиться, ознакомившись с источниками из списка публикаций. Наличие большого числа вычислительных примеров по каждому изучаемому материалу дает достаточно полное представление о расчетных процедурах, выполняемых при проектировании микромеханических приборов.

К сожалению, остались совсем не рассмотренными из-за ограничений по объему, такие вопросы, как расчет шума в электронике, тепловое воздействие на микроприборы и автоматизация их проектирования, а также такие перспективные МГ, как волновые и камертонные. Солидные публикации по этим вопросам имеются, что отражено в списке литературы.

Любые замечания по содержанию и возможному развитию издания будут приняты с благодарностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аш Ж.** и др. Датчики измерительных систем: пер. с франц. / под ред. А.С. Обухова. М.: Мир, 1992. Кн. 1. 480 с.
2. **Бидерман В.Л.** Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972. 451 с.
3. **Браславский Д.А., Петров В.В.** Точность измерительных устройств. М.: Машиностроение, 1976. 312 с.
4. **Броудай И., Мерай Д.** Физические основы микротехнологии. М.: Мир, 1985. 494 с.
5. **Ваганов В.И.** Интегральные тензопреобразователи. М.: Энергоатомиздат, 1983. 136 с.
6. **Вавилов В.Д.** Интегральные датчики. Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2003. 499 с.
7. **Гутников В.С.** Интегральная электроника в измерительных устройствах. М.: Энергоатомиздат, 1988. 304 с.
8. **Джашитов В.Э., Панкратов В.М.** Датчики, приборы и системы авиакосмического приборостроения в условиях тепловых воздействий / под общей ред. акад. РАН В.Г. Пешехонова. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. 402 с.
9. **Журавлев В.Ф., Климов Д.М.** Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
10. **Зимин В.Н., Панков В.В., Подволоцкая Е.В.** Микроэлектронные чувствительные элементы давления и тензомодули // Датчики и системы. 1999. № 2. С. 55–59.
11. **Коновалов С.Ф.** Теория виброустойчивости акселерометров. М.: Машиностроение, 1991. 270 с.
12. **Магнус К.** Колебания. М: Мир, 1982. 302 с.
13. **Малов В.В.** Пьезорезонансные датчики. М.: Энергоатомиздат, 1989. 270 с.
14. **Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
15. **Мэзон У.** Полупроводниковые преобразователи // Физическая акустика / под ред. К. Мэзона. Т. 1. М.: Мир. 1967. С. 139–186.
16. **Най Дж.** Физические свойства кристаллов. М.: Мир, 1967. 388 с.
17. **Обухов В.И.** Технология интегральных измерительных преобразователей. Нижний Новгород: РИО НГТУ, 1996. 150 с.
18. **Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д.** Динамически настраиваемые гироскопы. М.: Машиностроение, 1988. 260 с.
19. **Пешехонов В.Г.** Ключевые задачи современной автономной навигации // Гироскопия и навигация. 1996. № 1. С. 48–55.
20. **Пичугин И.Г., Таиров Ю.М.** Технология полупроводниковых приборов. М.: Высш. шк., 1984. 288 с.
21. **Повх И.Г.** Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1969. 650 с.
22. **Распопов В.Я.** Микромеханические приборы. Тула: Гриф и К, 2004. 466 с.
23. **Северов Л.А., Пономарев В.К., Панферов А.И.** и др. Микромеханические гироскопы: конструкции, характеристики, технологии, пути развития // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. № 1. С. 57–73.
24. **Справочник** машиностроителя. В 6 т. Т. 3 / под ред. С.В. Серенсена. М.: Машгиз, 1955. 563 с.
25. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
26. **Петерсен К.Э.** Кремний как механический материал // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 5. С. 5–49.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреева Т.А., Некрасов Я.А.** Система подавления квадратурной помехи в выходном сигнале микромеханического гироскопа / Навигация и управление движением: матер. VII конф. молодых ученых. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2006. С. 175–181.

2. **Багаева С.В., Моисеев Н.В.** Стенд для проверки динамических характеристик микромеханических гироскопов / Навигация и управление движением: матер. VII конф. молодых ученых. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2006. С. 163–168.

3. **Баранский П.И., Клочков В.П., Потыкевич И.В.** Полупроводниковая электроника. Свойства материалов: справочник. Киев: Наукова думка, 1975. 704 с.

4. **Березин А.С., Мочалкина О.Р.** Технология и конструирование интегральных микросхем: учебное пособие для вузов / под ред. И.П. Степаненко. М.: Радио и связь, 1983. 232 с.

5. **Будкин В.Л., Паршин В.А., Прозоров С.А.** и др. Разработка кремниевых датчиков первичной информации для систем навигации и управления // Гироскопия и навигация. 1988. № 3. С. 149–153.

6. **Евстифеев М.И.** Погрешности микромеханического гироскопа на вибрирующем основании // Гироскопия и навигация. 2002. № 2. С. 19–26.

7. **Евстифеев М.И., Смирнов М.Ф., Унтилов А.А.** Анализ механических, электрических и тепловых характеристик при проектировании микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2002. № 3 (38). С. 128.

8. **Евстифеев М.И.** Оценка порога чувствительности микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. 2003. № 1. С. 13–19.

9. **Евстифеев М.И., Унтилов А.А.** Требования к точности изготовления упругого подвеса микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2003. № 2. С. 24–31.

10. **Евстифеев М.И.** Проблемы расчета и проектирования микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. 2004. № 1 (44). С. 27–39.

11. **Евстифеев М.И., Ковалев А.С.. Лычев Д.И.** и др. Исследование поведения чувствительного элемента микромеханического гироскопа на вибрирующем основании / Навигация и управление движением: матер. VII конф. молодых ученых. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2006. С. 168–175.

12. **Збруцкий А.В., Кисиленко С.П., Коржевич Д.А.** Собственные колебания микромеханического вибрационного гироскопа / Механика гироскопических систем: респ. межведом. науч.-техн. сб. Киев. 1993. Вып. 12. С. 86–92.

13. **Збруцкий А.В., Кисиленко С.П., Шахов С.А.** Частотные характеристики динамически симметричного микромеханического вибрационного гироскопа / Механика гироскопических систем: респ. межведом. науч.-техн. сб. Киев. 1993. Вып. 12. С. 93–99.

14. **Зимин В.Н., Данилова Н.Л., Панков В.В., Шабратов Д.В.** Базовые конструкции интегральных тензопреобразователей на ряд давлений от 0,01 до 40 МПа / Датчики и системы. 1999. № 2. С. 52–55.

15. **Зимин В.Н., Чаплыгин Ю.А., Шабратов Д.В., Шелепин Н.А.** Интегральные преобразователи давлений на нормальный ряд от 0,04 до 30 МПа // Измерительная техника. 1994. № 2. С. 22–25.

16. **Ковалев А.С., Лычев Д.И., Щадрин Ю.В**. Результаты экспериментального исследования характеристик микромеханического гироскопа при совмещении резонансных частот / Навигация и управление движением: матер. VII конф. молодых ученых. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2006. С. 158–163.

17. **Коновалов С.Ф., Кулешов А.В., Подчезерцев В.П.** и др. Разработка вибрационного гироскопа, предназначенного для эксплуатации в условиях экстремальных ударных воздействий: матер. XI Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2004. С. 200–207.

18. **Концевой Ю.А., Литвинов Ю.М., Фаттахов Р.Ш.** Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур. М.: Радио и связь, 1982. 240 с.

19. **Кривченко Т., Чепурин И.** Полупроводниковые датчики компании Motorola // Электронные компоненты. 2003. № 2. С. 43–49.

20. **Кучерков С.Г.** Определение необходимой степени вакуумирования рабочей полости осциллятора микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2002. № 1. С. 52–56.

21. **Кучерков С.Г.** Использование интегрирующих свойств вибрационного микромеханического микрогироскопа с резонансной настройкой для построения датчика угловой скорости компенсационного типа // Гироскопия и навигация. 2002. № 2. С. 12–18.

22. **Лестев А.М., Попова И.В.** Современное состояние теории и практических результатов разработки микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. 1998. № 3. С. 138–148.

23. **Лестев А.М., Попова И.В., Пятышев Е.Н.** и др. Разработка и исследование микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 1999. № 2 (25). С. 3–10.

24. **Лестев А.М.** Влияние нелинейности подвеса и вибраций основания на динамику системы автогенерации колебаний микромеханических гироскопов / Навигация и управление движением: матер. VII конф. молодых ученых. СПб.: «Электроприбор». 2006. С. 150–158.

25. **Липень А.** Монолитные акселерометры Analog devices ADXL 150/250 // Электронные компоненты. 2003. № 2. С. 61–63.

26. **Лукьянов Д.П., Филатов Ю.В., Шевченко С.Ю.** и др. Разработка и исследование микроакселерометра на поверхностных акустических волнах / матер. XI Санкт-Петербургской междунар. конференции по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2004. С. 181–188.

27. **Лукьянов Д.П., Тихонов А.А., Филатов Ю.В.** и др. Разработка и оптимизация схемы построения микроакселерометра на поверхностных акустических волнах. Ч. 1 // Гироскопия и навигация. 2005. № 2(49). С. 79–94.

28. **Мезенцев А.П., Доронин В.П., Новиков Л.З.** и др. Основные проблемы создания инерциальных измерительных блоков на базе микромеханических гироскопов и акселерометров // Гироскопия и навигация. 1987. № 1. С. 13–15.

29. **Распопов В.Я.** Микромеханический акселерометр прямого преобразования: математическая модель и частотные характеристики // Датчики и системы. 2002. № 8. С. 5–9.

30. **Распопов В.Я.** Зависимость динамических характеристик микромеханических гироскопов от стабильности режимов настройки // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. № 8. С. 9–17.

31. **Северов Л.А., Пономарев В.К., Панферов А.И.** Микромеханические гироскопы – новый класс инерциальных чувствительных элементов // Приборы и системы: сб. матер. всерос. науч.-техн. конф. «Приборы и приборные системы». Тула. 2001. С. 66–71.

32. **Северов Л.А., Пономарев В.К., Панферов А.И.** Информационные характеристики микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2003. № 1. С. 76–82.

33. **Тилл У., Лахсон Дж.** Интегральные схемы: матер., приборы, изготовление. М.: Мир, 1985. 504 с.

34. **Унтилов А.А.** Методы исследования движения ротора микромеханического гироскопа на подвижном основании // Гироскопия и навигация. 2003. № 4 (43). С. 109.

35. **Унтилов А.А.** Влияние анизотропии монокристаллического кремния на характеристики микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2005. № 1 (48). С. 92.

36. **Шадрин Ю.В., Ковалев А.С.** Оценка резонансных частот упругого подвеса микромеханического гироскопа в условиях наличия дополнительных электрических связей // Навигация и управление движением: сб. докл. VI конф. молодых ученых. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор». 2005. С. 176–180.

37. **Шаскольская М.П.** Кристаллография. М.: Высш. шк., 1976. 391 с.

38. **Шелепин Н.** Датчики и микросхемы на базе технологии производства микросхем // Электронные компоненты. 2003. № 2. С. 40–42.

39. **Элексион Марс.** Внедрение технологии интегральных схем в производство датчиков // Электроника. 1986. Т. 59. № 11. С. 49–56.

40. **Barbure N., Connelly I., Gilmore I et al.** Micro-electromechanical instrument and systems development at Draper laboratory // III St.-Petersburg International conference on gyroscopic technology and navigation, May, 1996. P. 3–10.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Распопов Владимир Яковлевич

МИКРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *А.П. Лебедева*
Художественный редактор *Т.Н. Галицына*
Технический редактор *Г.Ю. Корабельникова*
Корректор *М.Я. Барская*

Сдано в набор 04.10.2006 г. Подписано в печать 06.12.2006 г.
Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,5. Уч.-изд. л. 33,0.
Тираж 2000 экз. Заказ № 5114

Ордена Трудового Красного Знамени ОАО "Издательство "Машиностроение",
107076, Москва, Стромынский пер., 4
www.mashin.ru

Оригинал-макет изготовлен в ООО "Издательство Машиностроение-1"

Отпечатано в ГУП ППП "Типография "Наука" РАН,
121099, Москва, Шубинский пер., 6