А. С. Ильинский
В. В. Кравцов · А. Г. Свешников

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов
высших учебных заведений

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1991

ББК 22.311
И 46
УДК 531.1

Рецензенты: кафедра № 406 Московского авиационного института (зав. кафедрой — проф. Д. И. Воскресенский); проф. В. В. Кучеренко (Московский инженерно-строительный институт)

Ильинский А. С. и др.
И 46 Математические модели электродинамики: Учеб. пособие для вузов/А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. — М.: Высш. шк., 1991. — с. 224.
ISBN 5-06-001950-0

В книге рассмотрены математические модели, описывающие процессе распространения и дифракции акустических и электромагнитных волн в различных средах. Обоснованы состоятельность этих моделей и корректность соответствующих краевых задач. Изложены численные методы решения краевых задач электродинамики, методы антенных потенциалов и неполный метод Галеркина.

$$И \frac{1402020000(4309000000)-164}{001(01)-91} 70-91$$

ББК 22.311
530.1

ISBN 5-06-001950-0

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время одной из проблем в подготовке специалистов в области прикладной математики является освоение технологии и методов математического моделирования. В новой типовой программе по специальности 01.02 вопросам математического моделирования уделяется большое внимание. Начиная с IV курса введены дисциплины, изучение которых обеспечивает знание методов математического моделирования. Пока еще не накоплен достаточный опыт преподавания методов математического моделирования, в связи с чем остро стоит вопрос обеспечения соответствующих курсов учебными пособиями.

Предлагаемая книга посвящена методам математического моделирования в электродинамике. В ней последовательно исследуются математические модели теории дифракции, дано математическое обоснование корректности математических задач. Исследованы вопросы существования и единственности задач теории дифракции. Особое внимание уделено алгоритмам вычисления приближенных решений, оценкам погрешности вычислительных методов, обсуждению эффективности вычислительных процедур для задач дифракции на современных вычислительных средствах.

Книга написана на основе курсов лекций, читаемых на физическом факультете и на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

Гл. I посвящена основным уравнениям теории дифракции. В отличие от многих существующих руководств и пособий по электродинамике уравнения теории дифракции и краевые условия рассмотрены как условия, определяющие оператор в соответствующем функциональном пространстве. Исследованы классы функций, обеспечивающие выполнение условий на бесконечности и вблизи кромок и ребер поверхностей. Приведены теоремы существования решения краевых задач, которые были опубликованы лишь в специальной малодоступной литературе.

Материал, изложенный в гл. II, полностью оригинален. Здесь рассмотрен метод интегральных уравнений в задачах дифракции. Основное внимание уделено вопросам сведения задач дифракции к линейным интегральным уравнениям первого и второго рода типа Фредгольма, на основе которых развиваются метод построения вычислительных алгоритмов и их обоснование. К методу интегральных уравнений близко примыкает подробно изложенный метод неортогональных рядов.

В гл. III рассмотрен метод типа Галеркина для исследования задач дифракции в неоднородных средах. Этот метод является основой вычислительных алгоритмов решения широкого класса задач дифракции, эффективно применяемых для расчетов прикладных задач электродинамики. Этот метод впервые изложен в учебной литературе.

Гл. IV содержит описание методов и алгоритмов решения задач распространения колебаний в волноводах. Материал этой главы является основой вычислительных методов, широко используемых для расчета устройств техники СВЧ. Этот материал излагается в учебной литературе впервые.

Учебное пособие ориентировано на специалистов по прикладной математике и существенно отличается от аналогичных пособий по курсу «Электродинамика». Оно предназначено для студентов старших курсов, аспирантов, слушателей факультетов повышения квалификации и научных работников.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам книги — зав. кафедрой № 406 МАИ проф. Д. И. Воскресенскому и проф. В. В. Кучеренко.

Авторы

Глава I

Математические модели задач дифракции

§ 1. Уравнения Максвелла

Классическая теория дифракции электромагнитных волн основывается на следующих уравнениях Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}+\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho; \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{1.4}$$

Система уравнений Максвелла записана в СИ и введены следующие обозначения: $\mathbf{E}=\mathbf{E}(M,\ t)$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}(M,\ t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного поля; $\mathbf{D}=\mathbf{D}(M,\ t)$ — вектор электрической и $\mathbf{B}$ магнитной индукции; $\mathbf{j}=\mathbf{j}(M,\ t)$ — вектор плотности электрического тока; $\rho=\rho(M,\ t)$ плотность электрического заряда. В данной книге рассматривается случай возбуждения электромагнитных полей только сторонними токами $\mathbf{j}^{(\text{ст})}(M,\ t)$, которые будем считать заданными функциями координат и времени. Одних уравнений (1.1)—(1.4) недостаточно для определения всех входящих в них неизвестных величин, поэтому к этим уравнениям должны быть добавлены уравнения, характеризующие материальную среду, в которой распространяется электромагнитное поле. Эти уравнения являются результатом усреднения микроскопических уравнений поля и определяются на основе изучения механизма взаимодействия электромагнитных полей с атомами и молекулами. Они могут иметь различный вид в зависимости от природы исследуемых сред.

Для линейных сред без дисперсии материальные уравнения имеют следующий вид:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}; \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}; \tag{1.6}$$

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}. \tag{1.7}$$

Величины ε, μ, σ называются *диэлектрической проницаемостью, магнитной проницаемостью и проводимостью* среды соответственно. В общем случае они являются функциями точки пространства и времени. Если среда изотропна, то ε, μ и σ — скалярные величины. В анизотропной среде ε, μ и σ — тензоры (в этом случае и уравнения Максвелла следует записывать в тензорном виде). При наличии в среде дисперсии связь ε, μ и σ с электромагнитным полем имеет более сложный вид.

В настоящем пособии мы будем рассматривать задачи линейной электродинамики, когда материальные уравнения являются линейными. В последнее время все большее значение приобретают задачи нелинейной электродинамики, материальные уравнения которой являются уже нелинейными *.

Рассмотрим некоторые свойства системы уравнений Максвелла (1.1)—(1.4). Из уравнений (1.1) и (1.3) непосредственно следует закон сохранения заряда. Действительно, применяя к (1.1) операцию div и используя (1.3), получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\mathbf{j}+\mathbf{j}^{(\text{ст})})=0. \tag{1.8}$$

Это уравнение представляет собой закон сохранения электрического заряда (в дифференциальной форме). Если соотношение (1.8) проинтегрировать по некоторому объему V, ограниченному поверхностью S, и применить формулу Гаусса — Остроградского, то получим закон сохранения заряда в интегральной форме

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\oint\limits_S \mathbf{n}(\mathbf{j}+\mathbf{j}^{(\text{ст})})\,dS=0,$$

где $e=\int\limits_V \rho dV$ — полный заряд, находящийся внутри поверхности S; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

Уравнение (1.4) является следствием уравнения (1.2) и начальных условий. Действительно, применяя операцию div к уравнению (1.2), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$

т. е.

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=\text{const}.$$

Значение этой постоянной определяется начальным условием в некоторый момент времени. Уравнение (1.4), выражающее факт

---

* См.: *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики: Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах.— М.: ВИНИТИ, 1964.

отсутствия магнитных зарядов, показывает, что эта постоянная должна быть нулем. Таким образом, уравнение (1.4) фактически налагает ограничения лишь на начальные условия для электромагнитного поля. Аналогично можно показать, что уравнение (1.3) является следствием уравнения (1.1), закона сохранения электрического заряда (1.8) и начальных условий. Закон сохранения электрического заряда является независимым физическим законом. Предыдущие рассуждения показывают, что уравнения Максвелла ему не противоречат.

Итак, в уравнениях Максвелла основными являются уравнения (1.1) и (1.2). Следует заметить, что в данных рассуждениях не делалось никаких предположений относительно свойств среды (соотношения (1.5) — (1.7) нигде не использовались).

Систему уравнений Максвелла можно свести к одному уравнению второго порядка. Получим уравнение для вектора $\mathbf{E}(M, t)$, считая, что среда линейная и без дисперсии, а ее характеристики не зависят от времени. Для этого применим к уравнению (1.2) операцию rot:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}(\mu\mathbf{H}). \tag{1.9}$$

Используя уравнение (1.1), получим

$$\operatorname{rot}(\mu\mathbf{H}) = \mu\operatorname{rot}\mathbf{H} + [\operatorname{grad}\mu, \mathbf{H}] = \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{j}^{(\text{ст})} + [\operatorname{grad}\mu, \mathbf{H}]. \tag{1.10}$$

Подставляя (1.10) в (1.9), имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} - \mu\frac{\partial\mathbf{j}^{(\text{ст})}}{\partial t} - \left[\operatorname{grad}\mu, \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right]. \tag{1.11}$$

Отсюда, согласно (1.2) и (1.7), получим уравнение для вектора $\mathbf{E}(M, t)$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \left[\operatorname{grad}\mu, \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right] - \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu\frac{\partial\mathbf{j}^{(\text{ст})}}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) можно записать и в ином виде:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \left[\operatorname{grad}\mu, \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right] + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\mathbf{j}^{(\text{ст})}}{\partial t}.$$

Уравнение для вектора $\mathbf{H}$ получается аналогично, но в случае проводящей среды ($\sigma\neq 0$) оно содержит вектор электрического поля. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} + \left[\operatorname{grad}\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right] - \frac{\sigma}{\varepsilon}[\operatorname{grad}\varepsilon, \mathbf{E}] +$$

$$+ \operatorname{rot}(\sigma\mathbf{E}) - \frac{1}{\varepsilon}[\operatorname{grad}\varepsilon, \mathbf{j}^{(\text{ст})}] + \operatorname{rot}\mathbf{j}^{(\text{ст})}. \tag{1.13}$$

Уравнения (1.12) и (1.13) значительно упрощаются, если характеристики среды (ε, μ, σ) постоянны. В этом случае уравнения (1.12) и (1.13) принимают вид

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}+\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\mathbf{j}^{(\text{ст})}}{\partial t},$$

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}+\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(\text{ст})}.$$

Важным случаем электромагнитных полей являются поля, периодические во времени. Рассмотрим установившиеся колебания вида

$$\mathbf{E}(M,t)=\mathbf{E}(M)e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{H}(M,t)=\mathbf{H}(M)e^{-i\omega t}. \qquad (1.14)$$

Функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляют собой комплексные амплитуды электрического и магнитного полей соответственно. Реальный физический смысл имеют величины $\operatorname{Re}\mathbf{E}$ и $\operatorname{Re}\mathbf{H}$. Будем считать, что комплексное электромагнитное поле $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (1.14) удовлетворяет уравнениям Максвелла. Подставляя (1.14) в (1.1)—(1.4), получим следующие уравнения для амплитуд $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{H}(M)$ (при этом считаем, что сторонние токи также периодичны во времени: $\mathbf{j}^{(\text{ст})}(M,t)=\mathbf{j}^{(\text{ст})}(M)e^{-i\omega t}$, а среда линейна и характеристики ее не зависят от времени):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\mathbf{D}+\mathbf{j}+\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \qquad (1.15)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mathbf{B}; \qquad (1.16)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho; \qquad (1.17)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \qquad (1.18)$$

Поскольку $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, уравнение (1.15) можно преобразовать, введя комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}.$$

Тогда уравнения принимают следующий вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon'\mathbf{E}+\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \qquad (1.19)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}; \qquad (1.20)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})=\rho; \qquad (1.21)$$

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{H})=0. \qquad (1.22)$$

В случае установившихся колебаний уравнение (1.22) может быть опущено, так как вытекает из (1.20) при произвольном μ, а уравнение (1.21) является следствием уравнения (1.19) или (1.15) и закона сохранения электрического заряда

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}+\mathbf{j}^{(\text{ст})})-i\omega\rho=0. \tag{1.23}$$

Если среда однородна (ε, μ, $\sigma=\text{const}$), а сторонние токи отсутствуют ($\mathbf{j}^{(\text{ст})}=0$), то из уравнения (1.19) следует

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{1.24}$$

Отсюда, согласно (1.21), получаем $\rho=0$. Следовательно, в однородной среде при отсутствии сторонних токов уравнения (1.21) и (1.22) являются следствием (1.19) и (1.20).

В дальнейшем потребуются энергетические соотношения монохроматического режима. Пусть две физические величины $u(t)$ и $j(t)$ характеризуются комплексными амплитудами $u(\omega)$ и $j(\omega)$, связанными с самими величинами соотношениями

$$u(t)=\operatorname{Re}\{u(\omega)\,e^{-i\omega t}\};\quad j(t)=\operatorname{Re}\{j(\omega)\,e^{-i\omega t}\},$$

$$u(t)=|u(\omega)|\cos(\omega t-\alpha);\quad j(t)=|j(\omega)|\cos(\omega t-\beta),$$

$$\alpha=\arg u(\omega),\quad \beta=\arg j(\omega).$$

Вычисляя средние значения произведения $u(t)j(t)$ за период $T=\frac{2\pi}{\omega}$, т. е.

$$\overline{u(t)\,j(t)}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)\,j(t)\,dt,$$

получим

$$\overline{u(t)\,j(t)}=\frac{1}{2}\,|u(\omega)|\,|j(\omega)|\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{u^*(\omega)\,j(\omega)\}.$$

Для среднего значения квадрата величины $u(t)$ получим

$$\overline{u^2(t)}=\frac{1}{2}\,u(\omega)\,u^*(\omega)=\frac{1}{2}\,|u(\omega)|^2.$$

Для произведения двух функций $u(t)j(t)$ имеем представление

$$u(t)\,j(t)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{u^*(\omega)\,j(\omega)\}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{u(\omega)\,j(\omega)\,e^{-2i\omega t}\}.$$

Как известно, плотность $u(M,t)$ энергии электромагнитного поля определяется выражением

$$u(M,t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{E}(M,t)\,\mathbf{D}(M,t)+\frac{1}{2}\,\mathbf{H}(M,t)\,\mathbf{B}(M,t),$$

а плотность потока энергии — выражением

$$\mathbf{S}(M, t) = [\mathbf{E}(M, t), \mathbf{H}(M, t)]. \qquad (1.25)$$

Вектор $\mathbf{S}$ обычно называют *вектором Умова — Пойнтинга*. Из предыдущего рассмотрения следует, что среднее за период значение величин $u(M, t)$ и $\mathbf{S}(M, t)$ соответственно равно

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(M, \omega)\mathbf{D}^*(M, \omega) + \mathbf{H}(M, \omega)\mathbf{B}^*(M, \omega)\}, \qquad (1.26)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] = \operatorname{Re}\mathbf{S}^*, \quad \text{где } \mathbf{S}^* = \frac{1}{2}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]. \qquad (1.27)$$

В случае проводящей среды важной энергетической характеристикой является плотность $q(M, t)$ потерь, определяемая выражением

$$q(M, t) = (\mathbf{E}(M, t), j(M, t)). \qquad (1.28)$$

Если векторы $\mathbf{E}(M, t)$ и $\mathbf{j}(M, t)$ связаны уравнением

$$\mathbf{j}(M, t) = \sigma\mathbf{E}(M, t),$$

где $\sigma = \omega \operatorname{Im} \varepsilon'$, то для среднего за период значения величины q получим

$$\overline{q(M, t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}(M, \omega), \mathbf{j}^*(M, \omega)) = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im}\varepsilon' |\mathbf{E}(M, \omega)|^2. \qquad (1.29)$$

Рассмотрим простейшие решения однородных уравнений Максвелла в изотропной среде с постоянными характеристиками — плоские электромагнитные волны. В случае установившихся гармонических колебаний в однородной изотропной среде при отсутствии свободных зарядов ($\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$) электрический вектор $\mathbf{E}(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{E} \qquad (1.30)$$

или

$$\nabla^2\mathbf{E} + \varkappa^2\mathbf{E} = 0, \qquad (1.31)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}$, $\varkappa^2 = \omega^2\varepsilon'\mu = k^2 + i\omega\mu\sigma$, $k = \omega^2\varepsilon\mu$. В декартовой прямоугольной системе координат каждая компонента вектора $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta E_\alpha + \varkappa^2 E_\alpha = 0, \quad \alpha = x, y, z.$$

Уравнение Гельмгольца допускает решение в виде плоской волны:

$$E_\alpha = E_\alpha^0 e^{i(\varkappa_x x + \varkappa_y y + \varkappa_z z)}, \quad \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \varkappa_z^2 = \varkappa^2.$$

Следовательно, векторное уравнение Гельмгольца (1.31) имеет решение вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\varkappa_x x + \varkappa_y y + \varkappa_z z)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})},$$

где

$$\boldsymbol{\varkappa} = \{\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_z\}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}, \quad \mathbf{E}_0 = \mathrm{const}.$$

Согласно условию $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \{\mathbf{E}_0 e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\} = i e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} (\boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{E}_0) = 0,$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0$. Следовательно, направление вектора $\mathbf{E}$ ортогонально к направлению распространения волны, определяемому вектором $\boldsymbol{\varkappa}$.

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}.$$

Так как

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_0 e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}) = [\operatorname{grad} e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}, \mathbf{E}_0],$$

то

$$\sqrt{\varepsilon'}\,[\boldsymbol{\varkappa}_0, \mathbf{E}_0] = \sqrt{\mu}\,\mathbf{H}_0, \tag{1.32}$$

где $\boldsymbol{\varkappa}_0 = \dfrac{\boldsymbol{\varkappa}}{|\boldsymbol{\varkappa}|}$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Соотношение (1.32) показывает, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не только ортогональны к направлению распространения волны, но и ортогональны между собой:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0, \quad (\mathbf{E}, \boldsymbol{\varkappa}) = 0, \quad (\mathbf{H}, \boldsymbol{\varkappa}) = 0.$$

Итак, уравнения Максвелла имеют решение в виде плоской электромагнитной волны, которая представляется в виде

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_0 e^{i(\boldsymbol{\varkappa} r)}, \quad \mathbf{H}(M) = \mathbf{H}_0 e^{i(\boldsymbol{\varkappa} r)},$$

причем

$$\sqrt{\varepsilon'}\,[\boldsymbol{\varkappa}_0, \mathbf{E}] = \sqrt{\mu}\,\mathbf{H}; \tag{1.33}$$

$$\sqrt{\mu}\,[\boldsymbol{\varkappa}_0, \mathbf{H}] = -\sqrt{\varepsilon'}\,\mathbf{E}. \tag{1.34}$$

Отношение касательных составляющих электрического и магнитного поля определяет внутренний импеданс среды для плоских волн:

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{\varkappa}_0, \mathbf{E}] = \zeta\mathbf{H}, \\ \mathbf{E} = \zeta\,[\mathbf{H}, \boldsymbol{\varkappa}_0];\end{gathered} \tag{1.35}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\omega\varepsilon + i\sigma}}. \tag{1.36}$$

Значение импеданса зависит от свойств среды и частоты. Если среда непроводящая ($\sigma=0$), то

$$\zeta=\sqrt{\mu/\varepsilon} \qquad (1.37)$$

и не зависит от частоты. Отметим, что в этом случае ζ является действительной величиной и из выражений (1.35) следует, что электрический и магнитный векторы колеблются в фазе.

Величина $\varkappa$ называется *постоянной распространения волны,* при этом $\alpha=\mathrm{Re}\,\varkappa$ называется *постоянной фазы,* а $\beta=\mathrm{Im}\,\varkappa$ — *постоянной затухания волны.*

Отметим связь между внутренним импедансом среды и комплексным вектором Пойнтинга плоской волны:

$$\mathbf{S}^*=\frac{1}{2}[\mathbf{E},\mathbf{H}^*]=\frac{(\mathbf{E},\mathbf{E}^*)\,\varkappa_0}{2\zeta^*} \qquad (1.38)$$

или

$$\zeta^*=\frac{1}{2}\frac{|\mathbf{E}|^2}{(\mathbf{S}^*,\varkappa_0)}.$$

§ 2. Электромагнитные потенциалы

Для определения полного электромагнитного поля в пространстве нужно решить систему уравнений Максвелла, т. е. определить шесть скалярных функций, являющихся компонентами векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В предыдущем параграфе было показано, что система уравнений Максвелла может быть сведена к одному уравнению второго порядка относительно вектора $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. Тем самым задача сводится к определению трех скалярных функций (например, компонент вектора $\mathbf{E}$).

Во многих случаях оказывается удобным введение некоторых вспомогательных функций, называемых *электромагнитными потенциалами,* через которые определенным образом выражается электромагнитное поле.

К рассмотрению электромагнитных потенциалов мы и переходим. Пусть векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют полной системе уравнений Максвелла (1.1) — (1.4). Поскольку

$$\mathrm{div}\,(\mu\mathbf{H})=0,$$

существует такая векторная функция $\mathbf{A}$, что

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \qquad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.2), получим

$$\mathrm{rot}\left\{\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right\}=0.$$

Следовательно, существует такая скалярная функция φ, что

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi. \tag{2.2}$$

Таким образом, любое электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ может быть выражено через функции $\mathbf{A}(M, t)$ и $\varphi(M, t)$. Функция $\mathbf{A}(M, t)$ называется *векторным потенциалом*, а $\varphi(M, t)$ — *скалярным потенциалом*. Подставим (2.1) и (2.2) в два оставшихся уравнения Максвелла и определим, каким уравнениям удовлетворяют функции $\mathbf{A}$ и φ. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$. Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.1) и (1.3), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\operatorname{grad}\left\{\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sigma\varphi\right\}+\mu\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}+\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Итак, произвольное электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ может быть выражено по формулам (2.1) и (2.2) через векторный потенциал $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ, которые удовлетворяют уравнениям (2.3) и (2.4).

Верно и обратное утверждение. Пусть $\mathbf{A}$ и φ — произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям (2.3) и (2.4). Тогда векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, построенные по формулам (2.1) и (2.2), удовлетворяют уравнениям Максвелла, т. е. представляют собой электромагнитное поле. Из изложенного выше следует, что для того, чтобы векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, построенные по формулам (2.1) и (2.2), представляли собой электромагнитное поле, необходимо и достаточно, чтобы функции $\mathbf{A}$ и φ удовлетворяли уравнениям (2.3) и (2.4).

Заметим, что векторный потенциал $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ по заданному электромагнитному полю определяются неоднозначно. Из (2.1) следует, что магнитное поле $\mathbf{H}$ не изменится, если вместо вектора $\mathbf{A}$ взять вектор

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad}\psi.$$

Чтобы при этом не изменилось и электрическое поле, вместо функции φ следует использовать функцию

$$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

При этом

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}',\quad \mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi'$$

и функции $\mathbf{A}'$ и φ' удовлетворяют уравнениям (2.3) и (2.4), в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Неоднозначность определения векторного потенциала **A** и скалярного потенциала φ позволяет наложить на них некоторые дополнительные условия, которые позволяют упростить уравнения (2.3) и (2.4). Обычно такое условие записывается в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sigma\mu\varphi=0 \tag{2.5}$$

и называется *условием Лоренца* (или *условием градиентной инвариантности*). При условии (2.5) уравнения (2.3) и (2.4) принимают следующий вид:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla^2\mathbf{A}=\mu\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{2.6}$$

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{2.7}$$

где $\nabla^2\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Условие Лоренца не уничтожает неоднозначность определения **A** и φ, а требует только, чтобы произвольная функция ψ удовлетворяла уравнению

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}-\Delta\psi=0.$$

Можно попытаться связать **A** и φ между собой или выразить их через один вектор, но так, чтобы соотношения (2.5), (2.6) и (2.7) выполнялись. Условие Лоренца (2.5) «подсказывает», что это можно сделать, если считать, что

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \tag{2.8}$$

где **Π** — некоторый вектор. Вектор **Π**, удовлетворяющий условию (2.8), всегда существует. Условие (2.5) будет выполнено, если

$$\mathbf{A}=\varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}+\sigma\mu\mathbf{\Pi}. \tag{2.9}$$

Надо проверить, не являются ли при таком представлении **A** и φ соотношения (2.6) и (2.7) противоречивыми. Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.6) и (2.7), получим

$$\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}-\nabla^2\mathbf{\Pi}\right\}+\sigma\mu\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}-\nabla^2\mathbf{\Pi}\right\}=$$
$$=\mu\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div}\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}-\nabla^2\mathbf{\Pi}\right\}=-\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

Можно непосредственно проверить, что, поскольку выполняется закон сохранения заряда, который в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho+\operatorname{div}\mathbf{j}^{(\text{ст})}=0,$$

уравнения (2.10) и (2.11) непротиворечивы и следуют одно из другого. Это означает, что представление векторного потенциала $\mathbf{A}$ и скалярного потенциала φ по формулам (2.8)—(2.9) всегда возможно. Вектор $\mathbf{\Pi}$ *называется поляризационным потенциалом или вектором Герца (электрическим вектором Герца).*

Таким образом, произвольное электромагнитное поле может быть по формулам

$$\mathbf{E} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}; \tag{2.12}$$

$$\mathbf{H} = \varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} + \sigma\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} \tag{2.13}$$

выражено через вектор Герца $\mathbf{\Pi}$. Вектор Герца также определяется неоднозначно.

Соотношения (2.10) и (2.11) можно записать в другой форме. Пусть

$$\mathbf{F}(M, t) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} - \nabla^2\mathbf{\Pi}.$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что вектор $\mathbf{F}(M, t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{F} = \frac{\mathbf{j}^{(\text{ст})}}{\varepsilon} \tag{2.14}$$

с начальным условием, удовлетворяющим соотношению

$$\left.\operatorname{div}\mathbf{F} + \frac{\rho}{\varepsilon}\right|_{t=0} = 0.$$

Если учесть, что имеет место закон сохранения заряда, то уравнение для $\mathbf{F}$ можно записать в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

совпадающем с (2.11). Уравнение (2.14) допускает явное решение

$$\mathbf{F}(M, t) = \mathbf{F}|_{t=0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathbf{j}^{(\text{ст})}(M, \tau)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}(t-\tau)}d\tau.$$

Теперь отдельно рассмотрим случай непроводящей среды ($\sigma = 0$). В этом случае на основании (2.14) получаем

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{j}^{(\text{ст})}.$$

Если ввести вектор поляризации $\mathbf{P}_0$ с помощью соотношения

$$\mathbf{j}^{(ст)}=\frac{\partial P_0}{\partial t},$$

то вектор $\mathbf{F}$ с точностью до слагаемого, не зависящего от времени, совпадает с вектором поляризации

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}_0$$

(слагаемое, не зависящее от времени, будем считать равным нулю). Следовательно, вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{\Pi}=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}_0, \tag{2.15}$$

а электромагнитное поле $\{\mathbf{E},\ \mathbf{H}\}$ выражается через него так:

$$\mathbf{E}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}-\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}_0; \tag{2.16}$$

$$\mathbf{H}=\varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{2.17}$$

В случае непроводящей среды ($\sigma=0$) более подробно рассмотрим, с каким произволом задан вектор Герца. Из (2.16) и (2.17) следует, что электромагнитное поле не изменится, если в качестве вектора Герца взять вектор

$$\mathbf{\Pi}_1=\mathbf{\Pi}+\operatorname{grad}\chi,$$

где χ — некоторая произвольная функция. Если еще потребовать, чтобы $\chi(M,\ t)$ удовлетворяла уравнению

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\Delta\chi=f(t),$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени, то вектор $\mathbf{\Pi}_1$ будет удовлетворять (2.15), т. е. тем же условиям, которые определяют вектор Герца. Действительно,

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}_1}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{\Pi}_1=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{\Pi}+\varepsilon\mu\operatorname{grad}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-$$
$$-\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{grad}\chi=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}_0.$$

Таким образом, вектор Герца определен с точностью до градиента некоторой функции. Для вычисления же электромагнитного поля существенна лишь вихревая часть вектора Герца.

Итак, любое электромагнитное поле может быть выражено через векторный и скалярный потенциалы или через вектор Герца, которые вводились исходя из уравнения

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H}=0,$$

т. е. экспериментального факта отсутствия магнитного заряда.

Если в уравнениях Максвелла отсутствует электрический заряд ($\rho=0$), то, аналогично, потенциалы можно ввести исходя из уравнения

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E}=0. \tag{2.18}$$

Из (2.18) вытекает, что

$$\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{A}^*. \tag{2.19}$$

Так как $\rho=0$, то уравнение сохранения заряда имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{(\text{ст})}=0.$$

Следовательно, вектор тока $\mathbf{j}^{(\text{ст})}$ можно представить в виде

$$\mathbf{j}^{(\text{ст})}=\operatorname{rot} \mathbf{j}^*, \tag{2.20}$$

причем вектор $\mathbf{j}^*$ определяется неоднозначно и, в частности, можно произвольно задать $\operatorname{div} \mathbf{j}^*$. Подставляя (2.19) и (2.20) в уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}=\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\sigma \mathbf{E}+\mathbf{j}^{(\text{ст})},$$

получим

$$\mathbf{H}=\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{A}^*+\mathbf{j}^*-\operatorname{grad} \varphi^*. \tag{2.21}$$

Подстановка (2.19) и (2.21) в два оставшихся уравнения Максвелла приводит к уравнению, которым должны удовлетворять $\mathbf{A}^*$ и φ^*:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}^*+\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2}+\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}-\varepsilon\mu \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}=-\varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t}; \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}^*+\frac{\sigma}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{A}^*+\operatorname{div} \mathbf{j}^*-\Delta\varphi^*=0. \tag{2.23}$$

Воспользуемся произволом в определении $\mathbf{j}^*$ и будем считать

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^*=0. \tag{2.24}$$

Потенциалы $\mathbf{A}^*$ и φ^* также определены неоднозначно (аналогично потенциалам $\mathbf{A}$ и φ). Подчиним их условию

$$\varepsilon\mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}=\operatorname{div} \mathbf{A}^* \tag{2.25}$$

Это условие называется *условием градиентной инвариантности* или *условием Лоренца*. Учитывая (2.24), получаем уравнение для $\mathbf{A}^*$ и φ^*:

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2}+\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}-\nabla^2 \mathbf{A}^*=-\varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t}; \tag{2.26}$$

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial\varphi^*}{\partial t} - \nabla\varphi^* = 0. \qquad (2.27)$$

Таким образом, в случае $\rho=0$ произвольное электромагнитное поле может быть выражено через потенциалы $\mathbf{A}^*$ и φ^*.

Теперь введем магнитный вектор Герца с помощью соотношения

$$\varphi^* = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}^*.$$

Из (2.25) следует, что $\mathbf{A}^*$ можно взять в виде

$$\mathbf{A}^* = -\varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t}.$$

Тогда уравнения (2.26) и (2.27) принимают соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial\mathbf{\Pi}^*}{\partial t} - \nabla^2\mathbf{\Pi}^*\right\} = \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial t}; \qquad (2.28)$$

$$\operatorname{div}\left\{\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial\mathbf{\Pi}^*}{\partial t} - \nabla^2\mathbf{\Pi}^*\right\} = 0 \qquad (2.29)$$

(при записи уравнения (2.29) учтено, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{B}=0$). Так как вектор $\mathbf{j}^*$ определен неоднозначно, то можно считать, что

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial\mathbf{\Pi}^*}{\partial t} - \nabla^2\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{j}^*, \qquad (2.30)$$

при этом из (2.30) следует (2.28) и (2.29). Следовательно, при $\rho=0$ произвольное электромагнитное поле может быть выражено через магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi}^*$ по формулам

$$\mathbf{E} = -\mu \operatorname{rot} \frac{\partial\mathbf{\Pi}^*}{\partial t},$$

$$\mathbf{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial\mathbf{\Pi}^*}{\partial t} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^* + \mathbf{j}^* = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^*,$$

причем вектор $\mathbf{\Pi}^*$ удовлетворяет уравнению (2.30). Случай непроводящей среды ($\sigma\neq0$) мы отдельно рассматривать не будем.

Заметим, что потенциалы $\mathbf{A}^*$ и φ^* и магнитный вектор Герца можно ввести и в том случае, когда $\rho\neq0$. Для этого предварительно выполним замену

$$\mathbf{E} = \mathscr{E} + \mathbf{j}_e,$$

где $\mathbf{j}_e$ — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{j}_e = \rho. \qquad (2.31)$$

Тогда уравнения Максвелла принимают следующий вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} + \sigma\mathscr{E} + \mathbf{J},$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{j}_m,$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathscr{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0,$$

где

$$\mathbf{J} = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{j}_e}{\partial t} + \sigma\mathbf{j}_e + \mathbf{j}^{(\text{ст})},$$

$$\mathbf{j}_m = \operatorname{rot}\mathbf{j}_e.$$

Вектор $\mathbf{j}_e$ уравнением (2.31) определен неоднозначно, поэтому в большинстве случаев его подчиняют дополнительному условию $\operatorname{rot}\mathbf{j}_e = 0$. Однако в некоторых специальных случаях оказывается удобным считать магнитный ток $\mathbf{j}_m = \operatorname{rot}\mathbf{j}_e$ отличным от нуля. Теперь поле $\{\mathscr{E}, \mathbf{H}\}$ можно выразить через потенциалы $\mathbf{A}^*$ и φ^* или через магнитный вектор Герца, как это было сделано выше.

Рассмотрим случай установившихся гармонических колебаний. Пусть временна́я зависимость выбрана в виде $e^{-i\omega t}$; тогда из соотношений (2.10), (2.11) для комплексной амплитуды вектора Герца получим

$$\nabla^2\mathbf{\Pi} + \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi} = -\frac{1}{i\varepsilon'\omega}\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{2.32}$$

$$\operatorname{div}(\nabla^2\mathbf{\Pi} + \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi}) = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{2.33}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Соотношение (2.33) следует из (2.32) и закона сохранения заряда, который в случае установившихся колебаний имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^{(\text{ст})} = i\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\omega\rho.$$

Следовательно, вектор Герца (электрический) в случае установившихся колебаний удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (2.32). Электромагнитное поле, согласно (2.12) и (2.13), выражается через $\mathbf{\Pi}$ формулами

$$\mathbf{E} = \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} + \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{2.34}$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon'\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}. \tag{2.35}$$

Запишем формулы, выражающие электромагнитное поле через магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi}^*$ (при этом будем предполагать, что $\rho = 0$). Согласно (2.30), магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}^* + \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi}^* = -\mathbf{j}^*,$$

где вектор $\mathbf{j}^*$ связан со сторонним током $\mathbf{j}^{(ст)}$ соотношениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}^* = \mathbf{j}^{(ст)}, \quad \operatorname{div}\mathbf{j}^* = 0.$$

Электромагнитное поле через вектор $\mathbf{\Pi}^*$ выражается формулами

$$\mathbf{E} = i\omega\mu \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^*; \tag{2.36}$$

$$\mathbf{H} = \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi}^* + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^* + \mathbf{j}^* = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^*. \tag{2.37}$$

Как отмечалось ранее, векторы Герца определяются неоднозначно и электромагнитное поле выражается только через вихревую часть вектора Герца.

Найдем условия, которым должен удовлетворять вектор $\mathbf{\Pi}(M)$, для того чтобы векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, построенные по формулам

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} + \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{j}^{(ст)}; \tag{2.38}$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon' \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{2.39}$$

удовлетворяли уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon'\mathbf{E} + \mathbf{j}^{(ст)}; \tag{2.40}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}. \tag{2.41}$$

Заметим, что уравнение (2.40) удовлетворяется автоматически. Подставив (2.38) и (2.39) в (2.41), получим

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} + \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{j}^{(ст)} - \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} - \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi} + \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{j}^{(ст)} = \operatorname{grad} u, \tag{2.42}$$

где u — некоторая дифференцируемая функция. Таким образом, если формулы (2.38) и (2.39) определяют решение системы уравнений Максвелла (2.40) — (2.41), то выражение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} - \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi} + \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{j}^{(ст)} \tag{2.43}$$

является градиентом дифференцируемой функции. Можно проверить, что если выполнено (2.42), то формулы (2.38) и (2.39) определяют решение уравнений Максвелла.

Следовательно, для того чтобы формулы (2.38) и (2.39) определяли решение системы уравнений Максвелла, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{\Pi}$ был решением уравнения (2.42). Вектор $\mathbf{\Pi}$, удовлетворяющий этому условию, назовем *псевдовектором Герца* (электрическим). Заметим, что если потребовать, чтобы функция u в (2.42) совпадала с $\operatorname{div} \mathbf{\Pi}$, то псевдовектор Герца превратится в определенный ранее вектор Герца.

Используя векторы Герца, легко построить частные решения системы уравнений Максвелла в однородном пространстве, соответствующие фундаментальным решениям в скалярном случае. Назовем *электромагнитным полем точечного электрического диполя* решение системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon'\mathbf{E} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}; \tag{2.44}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \tag{2.45}$$

при $\mathbf{j}^{(\text{ст})}(M) = \mathbf{p}_0\delta(M, M_0)$, где $\mathbf{p}_0$ — постоянный вектор, называемый *моментом электрического диполя.*

Электрический вектор Герца, соответствующий полю электрического диполя, согласно (2.32), удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\mathbf{\Pi} + \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi} = \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{p}_0\delta(M, M_0).$$

Это уравнение имеет решение

$$\mathbf{\Pi} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{p}_0\frac{e^{i\varkappa R_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathbf{p}_0\psi(M, M_0), \quad \varkappa^2 = \omega^2\varepsilon'\mu,$$

где R_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0. Следовательно, поле электрического диполя имеет вид

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{p}_0\psi - \frac{1}{i\omega\varepsilon'}\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{p}_0\psi); \tag{2.46}$$

$$H = \operatorname{rot}(\mathbf{p}_0\psi) = [\operatorname{grad}_M\psi(M, M_0), \mathbf{p}_0]. \tag{2.47}$$

Электромагнитным полем точечного магнитного диполя назовем решение системы уравнений Максвелла (2.44) — (2.45) при

$$\mathbf{j}^{(\text{ст})}(M) = \frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}(\mathbf{m}_0\delta(M, M_0)),$$

где $\mathbf{m}_0$ — постоянный вектор, называемый *моментом магнитного диполя.* Магнитный вектор Герца для поля магнитного диполя удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}^* + \omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{\Pi}^* = -\frac{1}{i\omega\mu}\mathbf{m}_0\delta(M, M_0),$$

которое имеет решение

$$\mathbf{\Pi}^*(M) = \frac{1}{i\omega\mu}\mathbf{m}_0\psi(M, M_0).$$

Поэтому поле магнитного диполя имеет вид

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}(\mathbf{m}_0\psi); \tag{2.48}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{m}_0 \psi). \tag{2.49}$$

При изучении поля диполя, поскольку в этом случае возбуждение носит точечный характер, закон сохранения заряда следует записывать в интегральной форме. Заметим, что если $\mathbf{j}^{(\text{ст})} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{j}^*$, причем $\operatorname{div} \mathbf{j}^* = 0$, то в уравнениях Максвелла можно сделать замену

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{j}^*.$$

Тогда векторы $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}_1\}$ будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon' \mathbf{E},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H}_1 + \mathbf{j}^*,$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H}_1 = 0.$$

Поэтому $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}_1\}$ можно рассматривать как электромагнитное поле, созданное фиктивным «магнитным током».

До сих пор мы рассматривали общие методы введения электромагнитных потенциалов. Эти методы не налагают каких-либо условий на систему кординат, в которой записаны уравнения Максвелла.

Перейдем к рассмотрению специальных случаев, которые часто используются в приложениях. Покажем, что при определенных условиях электромагнитное поле можно выразить через две скалярные функции. Пусть в области определения электромагнитного поля введена ортогональная криволинейная система координат x_1, x_2, x_3, единичные векторы которой обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а коэффициенты Ламе — h_1, h_2, h_3. Будем предполагать, что введенная система координат такова, что ее коэффициенты Ламе удовлетворяют условиям

$$h_3 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = 0, \tag{2.50}$$

которые означают, что коэффициенты Ламе представимы в следующем виде: $h_1 = f_1(x_1, x_2) f(x_3)$, $h_2 = f_2(x_1, x_2) f(x_3)$, $h_3 \equiv 1$. Этим условиям удовлетворяет любая цилиндрическая система координат, в которой $x_3 = z$ (цилиндрическая ось), а x_1 и x_2 — произвольные криволинейные ортогональные координаты на плоскости. К этому же классу относится и сферическая система координат $(x_3 = r,\ x_1 = \theta,\ x_2 = \varphi)$.

Найдем в системе координат x_1, x_2, x_3 решение однородной системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}; \tag{2.51}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \varepsilon, \mu = \mathrm{const}, \tag{2.52}$$

специального вида, для которого

$$H_3 = (\mathbf{e}_3, \mathbf{H}) = 0. \tag{2.53}$$

Электромагнитное поле, удовлетворяющее условию (2.53), называется *полем электрического типа.*

Покажем, что поле электрического типа может быть выражено через одну скалярную функцию. Воспользуемся следующим простым утверждением: если векторная функция $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \quad A_3 = (\mathbf{e}_3, \mathbf{A}) = 0, \tag{2.54}$$

то существует скалярная функция U такая, что

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U).$$

Докажем это утверждение. Так как

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3)\right\},$$

то, согласно (2.54),

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) = -\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2).$$

Следовательно, существует такая функция u, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = h_2 h_3 A_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = -h_1 h_3 A_2.$$

Тогда

$$A_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad A_2 = -\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad A_3 = 0.$$

Если ввести функцию U с помощью соотношения $u = h_3 U$, то вектор $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U)$$

(в этом можно убедиться непосредственной проверкой). Заметим, что при доказательстве специальные свойства системы координат не использовались, поэтому сформулированное утверждение справедливо в любой системе координат.

Согласно доказанному, поле электрического типа может быть представлено в виде

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U); \tag{2.55}$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U). \tag{2.56}$$

Уравнение (2.52) при этом выполняется автоматически. Найдем условия, которым должна удовлетворять функция U, чтобы выполнялось уравнение (2.51). Прежде всего заметим, что, согласно (2.54),

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_3 = 0$$

и

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U) = [\operatorname{grad} U, \mathbf{e}_3].$$

Отсюда видно, что функция U определена с точностью до слагаемого, зависящего от координаты x_3.

Подставляя (2.55) и (2.56) в (2.51), получим

$$\operatorname{rot}\{\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U) - \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{e}_3 U\} = 0. \qquad (2.57)$$

Используя (2.50), выражение в фигурных скобках можно преобразовать к виду

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 U) - \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{e}_3 U = -\mathbf{e}_3\Delta U + \operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial x_3} +$$

$$+ \mathbf{e}_3\frac{\partial U}{\partial x_3}\operatorname{div}\mathbf{e}_3 - \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{e}_3 U.$$

Следовательно, учитывая, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad} v = 0$, согласно (2.57), получаем

$$\operatorname{rot}\left\{\mathbf{e}_3\left(\Delta U - \frac{\partial U}{\partial x_3}\operatorname{div}\mathbf{e}_3 + \omega^2\varepsilon\mu U\right)\right\} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{e}_3 LU = \operatorname{grad}\psi,$$

где

$$LU = \Delta U - \frac{\partial U}{\partial x_3}\operatorname{div}\mathbf{e}_3 + \omega^2\varepsilon\mu U,$$

причем функция ψ зависит только от x_3.

Итак,

$$LU = f(x_3).$$

Так как U определено с точностью до слагаемого, зависящего только от x_3, то без ограничения общности можно считать, что $f \equiv 0$. Поэтому

$$\Delta U - \frac{\partial U}{\partial x_3}\operatorname{div}\mathbf{e}_3 + \omega^2\varepsilon\mu U = 0. \qquad (2.58)$$

Таким образом, произвольное электромагнитное поле электрического типа может быть выражено через одну скалярную функцию U по формулам (2.55) и (2.56), причем U удовлетворяет уравнению (2.58) и называется *функцией Боргниса (электрической функцией Боргниса)*.

Аналогично можно показать, что произвольное электромагнитное поле магнитного типа, т. е. решение однородных уравнений Максвелла, у которого $E_3=0$, может быть выражено через скалярную функцию V по формулам

$$\mathbf{E}=i\omega\mu \operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 V), \quad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 V),$$

причем функция V удовлетворяет такому же уравнению

$$\Delta V-\frac{\partial V}{\partial x_3}\operatorname{div}\mathbf{e}_3+\omega^2\varepsilon\mu V=0.$$

Функция V называется *магнитной функцией Боргниса.*

Естественно возникает вопрос: можно ли произвольное электромагнитное поле представить как суперпозицию полей электрического и магнитного типа? Покажем, что такое представление для произвольного электромагнитного поля действительно справедливо. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение: для произвольной достаточно гладкой векторной функции $\mathbf{B}$ существуют три скалярные функции u, v и φ такие, что

$$\mathbf{B}=\mathbf{e}_3 u+\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 v)+\operatorname{grad}\varphi. \tag{2.59}$$

Согласно теореме Гельмгольца, произвольный вектор $\mathbf{B}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{C}+\operatorname{grad}w.$$

Выберем функцию ψ так, чтобы

$$\operatorname{div}\{\operatorname{rot}\mathbf{C}-\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3\operatorname{rot}\mathbf{C})-\operatorname{grad}\psi+\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3,\operatorname{grad}\psi)\}=0$$

или

$$\Delta\psi-\operatorname{div}\left\{\mathbf{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right\}=-\operatorname{div}\{\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3,\operatorname{rot}\mathbf{C})\}.$$

Тогда

$$\mathbf{B}=\mathbf{a}+\operatorname{grad}\psi-\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3,\operatorname{grad}\psi)+\operatorname{grad}w+\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3,\operatorname{rot}\mathbf{C}),$$

где

$$\mathbf{a}=\operatorname{rot}\mathbf{C}-\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3,\operatorname{rot}\mathbf{C})-\operatorname{grad}\psi+\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3,\operatorname{grad}\psi).$$

Так как $(\mathbf{e}_3, \mathbf{a})=0$ и $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, то вектор $\mathbf{a}$ представим в виде

$$\mathbf{a}=\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 v).$$

Следовательно,

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}(\mathbf{e}_3 v)+\mathbf{e}_3 u+\operatorname{grad}\varphi,$$

где

$$u=(\mathbf{e}_3,\operatorname{rot}\mathbf{C})-(\mathbf{e}_3,\operatorname{grad}\psi), \quad \varphi=w+\psi.$$

Докажем теперь, что в системе координат, удовлетворяющей условию (2.50), любое решение однородных уравнений Максвелла можно представить в виде суммы полей электрического и магнитного типа. Ранее было показано, что произвольное электромагнитное поле может быть выражено через потенциал Герца $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}; \tag{2.60}$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}. \tag{2.61}$$

Вектор Герца, как и любой вектор, может быть представлен в виде

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{e}_3 U - \frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 V) + \mathrm{grad}\,\varphi \tag{2.62}$$

(числовой множитель — $(i\omega\varepsilon)^{-1}$ введен для удобства дальнейших выкладок). Как показывают формулы (2.60) и (2.61), функция φ не влияет на значение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому в соотношении (2.62) будем считать функцию φ произвольной. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, определенные по формулам (2.60) и (2.61), должны удовлетворять однородной системе уравнений Максвелла (2.51) — (2.52). Функцию φ подберем таким образом, чтобы уравнения для U и V были наиболее простыми.

Уравнение (2.52) удовлетворяется автоматически. Подставляя (2.60) и (2.61) в (2.51), получим

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi} - \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{\Pi}) = 0,$$

или

$$\Big\{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 U) - \frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 V) - \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{e}_3 U - i\mu\omega\,\mathrm{rot}(\mathbf{e}_3 V) -$$

$$- \omega^2\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\varphi\Big\} = \mathrm{grad}\,\chi, \tag{2.63}$$

где χ — некоторая функция. Так как в системе координат, удовлетворяющей условию (2.50),

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 U) = -\mathbf{e}_3\Delta U + \mathrm{grad}\,\frac{\partial U}{\partial x_3} + \mathbf{e}_3\,\frac{\partial U}{\partial x_3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{e}_3,$$

то из (2.63) получаем

$$\mathbf{e}_3 LU + \frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 LV) =$$

$$= \omega^2\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,\chi - \mathrm{grad}\,\frac{\partial U}{\partial x_3},$$

где

$$LU = \Delta U - \frac{\partial U}{\partial x_3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{e}_3 + \omega^2\varepsilon\mu U.$$

Выберем φ таким образом, чтобы

$$\omega^2\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,\chi - \mathrm{grad}\,\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{e}_3 LU - \frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 LV) = 0.$$

Так как $(\mathbf{e}_3, \mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 LV)) = 0$, то

$$LU = 0 \text{ и } \mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 LV) = 0.$$

Отсюда (как это было сделано раньше) получаем

$$LV = 0.$$

Таким образом, показано, что произвольное электромагнитное поле может быть представлено в виде (2.60) — (2.61), где

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{e}_3 U - \frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 V) + \mathrm{grad}\,\varphi,$$

а функции U и V удовлетворяют уравнениям

$$LU = 0, \quad LV = 0. \tag{2.64}$$

Используя эти уравнения, выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перепишем в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m,$$

где

$$\mathbf{E}_e = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 U),$$

$$\mathbf{H}_e = -i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 U),$$

$$\mathbf{E}_m = i\omega\mu\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 V),$$

$$\mathbf{H}_m = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 V).$$

Согласно доказанному, при выполнении уравнений (2.64) векторы $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ представляют собой электромагнитное поле электрического типа, а $\{\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m\}$ — электромагнитное поле магнитного типа. Следовательно, произвольное электромагнитное поле представлено в виде суммы полей электрического и магнитного типа. Заметим, что аналогичное рассмотрение можно провести используя магнитный вектор Герца.

Рассмотрим теперь конкретные системы координат, в которых возможно введение функций Боргниса. Простейшим примером является декартова прямоугольная система координат (x, y, z). Так как для нее $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, то в качестве координаты x_3 можно взять любую декартову координату. Рассмотрим, например, поле электрического типа, считая $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 U),$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}_3 U).$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{e}_z = 0$, то уравнение (2.58) превращается в уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + \omega^2 \varepsilon\mu U = 0.$$

Это показывает, что введение в данном случае электрической функции Боргниса эквивалентно использованию электрического вектора Герца $\mathbf{\Pi}$, имеющего только z-компоненту, причем можно считать, что $\mathbf{\Pi} = \{0, 0, U\}$. Магнитная функция Боргниса V эквивалентна магнитному вектору Герца: $\mathbf{\Pi}^* = \{0, 0, V\}$.

Другим примером координат, в которых возможно введение функций Боргниса, является цилиндрическая система координат, причем в качестве координаты x_3 следует выбрать z, а x_1 и x_2 — произвольные ортогональные координаты на плоскости (x, y). Тогда $h_3 = 1$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{h_1}{h_2} = 0$. Так как и в этом случае $\operatorname{div} \mathbf{e}_3 = 0$, то, как и в декартовой системе координат, использование функции U эквивалентно введению вектора Герца с единственной отличной от нуля z-компонентой.

Более интересным является случай сферической системы координат

$$x_3 = r, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \varphi, \quad h_3 = 1, \quad h_1 = r, \quad h_2 = r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_1}{h_2} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{h_1}{h_2} = 0.$$

Рассмотрим поле электрического типа

$$\mathbf{E}_e = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_r U), \quad \mathbf{H}_e = -i\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\mathbf{e}_r U).$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{e}_3 = \operatorname{div} \mathbf{e}_r = \dfrac{2}{r}$, уравнение (2.58) принимает вид

$$\Delta U - \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \omega^2\varepsilon\mu U = 0.$$

Это уравнение можно упростить, если ввести новую неизвестную функцию u соотношением $U = ru$. Тогда для функции u получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \omega^2\varepsilon\mu u = 0. \qquad (2.65)$$

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r$. Выражение для электромагнитного поля можно записать в виде

$$\mathbf{E}_e = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}u); \quad \mathbf{H}_e = -i\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\mathbf{r}u). \qquad (2.66)$$

Аналогично получаем, что поле магнитного типа ($E_r = 0$) выражается через функцию v, удовлетворяющую тому же уравнению Гельмгольца, по следующим формулам:

$$\mathbf{E}_m = i\omega\mu \operatorname{rot}(\mathbf{r}v); \quad \mathbf{H}_m = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}v).$$

Функции u и v называются *потенциалами Дебая.*

Установим связь между потенциалами Дебая и вектором Герца. Пусть $\mathbf{\Pi}_1=\mathbf{r}u$. Вектор $\mathbf{\Pi}_1$ не удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца и, следовательно, не является вектором Герца. Но так как электромагнитное поле выражается через него по формулам (2.66) (ср. с формулами (2.34)—(2.35)), то отсюда следует, что вектор $\mathbf{\Pi}_1$ отличается от вектора Герца $\mathbf{\Pi}$, определяющего поле (2.66), на градиент некоторой функции χ:

$$\mathbf{\Pi}=\mathbf{\Pi}_1+\operatorname{grad}\chi=\mathbf{r}u+\operatorname{grad}\chi. \tag{2.67}$$

Функция χ должна быть такой, чтобы вектор $\mathbf{\Pi}$ удовлетворял векторному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{\Pi}=0. \tag{2.68}$$

Подставляя (2.67) в (2.68), получим

$$\nabla^2(\mathbf{r}u+\operatorname{grad}\chi)+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{r}u+\omega^2\varepsilon\mu\operatorname{grad}\chi=0. \tag{2.69}$$

Так как

$$\nabla^2(\mathbf{r}u+\operatorname{grad}\chi)=\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{r}u+\operatorname{grad}\chi)-\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}u+\operatorname{grad}\chi)=$$

$$=\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{r}u)+\operatorname{grad}\Delta\chi-\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}u),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{r}u)=3\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}(\mathbf{r}\operatorname{grad}u),$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{r}\operatorname{grad}u)=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}u)-\operatorname{grad}u+\mathbf{r}\Delta u,$$

то из (2.69) следует, что

$$\mathbf{r}(\Delta u+\omega^2\varepsilon\mu u)+\operatorname{grad}(\Delta\chi+\omega^2\varepsilon\mu\chi+2u)=0.$$

Учитывая (2.65), отсюда находим, что функция χ должна быть решением уравнения

$$\Delta\chi+\omega^2\varepsilon\mu\chi+2u=\mathrm{const}. \tag{2.70}$$

Мы не будем записывать решение этого уравнения, поскольку величина электромагнитного поля, построенного по формулам (2.66), не зависит от функции χ.

Таким образом, введение потенциала Дебая u эквивалентно использованию потенциала Герца, имеющего вид

$$\mathbf{\Pi}=\mathbf{r}u+\operatorname{grad}\chi,$$

где функция χ удовлетворяет уравнению (2.70).

Аналогично, использование потенциала Дебая v эквивалентно введению магнитного вектора Герца

$$\mathbf{\Pi}^*=\mathbf{r}v+\operatorname{grad}\chi^*,$$

где χ^* — решение уравнения

$$\Delta\chi^*+\omega^2\varepsilon\mu\chi^*+2v=\mathrm{const}.$$

Используя потенциалы Дебая, можно построить систему решений уравнений Максвелла в сферической системе координат. Пусть $\{u_n\}$ — система метагармонических функций (решений уравнений Гельмгольца)

$$u_n(r,\theta,\varphi)=R_n(r)Y_n^m(\theta,\varphi),\quad n=0,1,2,\ldots;\ |m|\leqslant n, \tag{2.71}$$

где $R_n(r)$ — сферическая цилиндрическая функция, $Y_n^m = P_n^{|m|}e^{im\varphi}$ — сферическая функция. Используя (2.71), можно построить систему решений уравнений Максвелла

$$\mathbf{E}_n=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}u_n);\quad \mathbf{H}_n=-i\omega\varepsilon\operatorname{rot}(\mathbf{r}u_n). \tag{2.72}$$

Рассмотрим эту систему подробнее и найдем систему взаимно ортогональных векторных функций, через которую удобно выразить поле $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$.

Пусть $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ — единичные векторы сферической системы координат. Поле (2.72) можно записать в виде

$$\mathbf{E}_n=\left[\mathbf{e}_r\left[\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{r}u_n),\mathbf{e}_r\right]\right]+\mathbf{e}_r\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru_n)+\omega^2\varepsilon\mu ru_n\right\};$$

$$\mathbf{H}_n=-i\omega\varepsilon\,[\operatorname{grad}u_n,\mathbf{r}].$$

Введем следующее обозначение:

$$\nabla_{\theta,\varphi}V=\mathbf{e}_\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}_n=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR_n)\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^m+\mathbf{e}_r\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR_n)+\omega^2\varepsilon\mu rR_n\right\}Y_n^m,$$

$$\mathrm{H}_n=-i\omega\varepsilon R_n(r)\left[\Delta_{\theta,\varphi}Y_n^m,\mathbf{e}_r\right],$$

так как

$$\operatorname{grad}V=\mathbf{e}_r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r}\nabla_{\theta,\varphi}V,$$

$$(\mathbf{e}_r,\nabla_{\theta,\varphi}V)=0,\quad [\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_r]=0.$$

Отсюда видно, что электромагнитное поле $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$ удобно выразить через тройку взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_rY^m{}_n$, $\nabla_{\theta,\varphi}Y^m{}_n$, $[\nabla_{\theta,\varphi}Y^m{}_n, \mathbf{e}_r]=\operatorname{rot}(\mathbf{r}Y^m{}_n)$, причем первый из них ортогонален к сфере радиуса r, а два других — касательны к этой сфере. Введем единое обозначение для касательных к сфере векторов:

$$\mathbf{L}_n(\theta,\varphi)=\begin{cases}\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^m(\theta,\varphi),\\ \left[\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^m,\mathbf{e}_r\right].\end{cases}$$

Система векторов $\{\mathbf{L}_n\}$ играет важную роль при изучении уравнений Максвелла в сферической системе координат.

Покажем, что любая векторная функция, касательная к сфере, может быть представлена суперпозицией векторов $\{\mathbf{L}_n(\theta, \varphi)\}$.

Пусть $\mathbf{f}(\theta, \varphi)$ — произвольная векторная функция, касательная к сфере в каждой ее точке:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{e}_r) = 0.$$

Согласно ранее доказанному, она может быть представлена в виде

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = [\nabla_{\theta,\varphi} Q, \mathbf{e}_r] + \nabla_{\theta,\varphi} P, \tag{2.73}$$

где $Q = Q(\theta, \varphi)$, $P = P(\theta, \varphi)$ — некоторые достаточно гладкие функции. Достаточно гладкие функции P и Q могут быть разложены в равномерно сходящиеся ряды по сферическим функциям

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Y_n(\theta, \varphi); \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Y_n(\theta, \varphi),$$

которые можно почленно дифференцировать. Подставляя последние разложения в (2.73), получим

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = \sum_n a_n [\nabla_{\theta,\varphi} Y_n \mathbf{e}_r] + \sum_n b_n \nabla_{\theta,\varphi} Y_n = \sum_n c_n \mathbf{L}_n(\theta, \varphi),$$

что и показывает возможность разложения $\mathbf{f}$ в ряд по функциям системы $\{\mathbf{L}_n\}$.

§ 3. Векторные формулы Грина

При исследовании уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

удобным аппаратом являются формулы Грина. Если u и v — функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри замкнутой области $V+S$, ограниченной поверхностью S, которая является поверхностью типа Ляпунова, и имеют непрерывные вторые производные в области V, то имеет место следующая формула Грина (вторая формула Грина):

$$\int_V \{u \Delta v - v \Delta u\} \, d\tau = \oint \left\{ u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней к области V нормали к поверхности S. Решение уравнения Гельмгольца во внутренних точках области может быть выражено через значения самого решения и его нормальной производной на граничной поверхности S по третьей формуле Грина:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(P) \frac{e^{ikR}}{R} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} \right\} dS_P,$$

где $R = R_{MP}$ — расстояние между точками M и R, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

В настоящем параграфе мы получим для установившихся электромагнитных колебаний формулы, аналогичные формулам Грина.

Пусть $\mathscr{P}(M)$ и $\mathbf{Q}(M)$ — векторные функции, непрерывные вместе со своими вторыми производными в области $V+S$, где S — граничная поверхность области V.

Применяя к вектору $\mathbf{A} = [\mathscr{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}]$ формулу Гаусса — Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau = \int_S (\mathbf{A}, \mathbf{n}) \, dS,$$

получим

$$\int_V \operatorname{div} [\mathscr{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \, d\tau = \oint_S \mathbf{n} [\mathscr{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \, dS.$$

Так как

$$\operatorname{div} [\mathscr{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}] = \operatorname{rot} \mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathscr{P} - \mathscr{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q},$$

то

$$\int_V \{\operatorname{rot} \mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathscr{P} - \mathscr{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}\} \, d\tau = \int_S \mathbf{n} [\mathscr{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \, dS. \qquad (3.1)$$

Поменяем в (3.1) местами векторы $\mathscr{P}$ и $\mathbf{Q}$ и вычтем одно соотношение из другого. Тогда получим аналог второй формулы Грина для векторного случая

$$\int_V \{\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathscr{P} - \mathscr{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}\} \, d\tau = \int_S \{[\mathscr{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}] - [\mathbf{Q}, \operatorname{rot} \mathscr{P}]\} \mathbf{n} \, dS. \qquad (3.2)$$

Формулу (3.2) удобно преобразовать следующим образом. Так как

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathscr{P} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathscr{P} - \nabla^2 \mathscr{P},$$

то

$$\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathscr{P} - \mathscr{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q} = \mathscr{P} \nabla^2 \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \nabla^2 \mathscr{P} + \mathbf{Q} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathscr{P} -$$
$$- \mathscr{P} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{Q} = \mathscr{P} \nabla^2 \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \nabla^2 \mathscr{P} + \operatorname{div} \{\mathbf{Q} \operatorname{div} \mathscr{P} - \mathscr{P} \operatorname{div} \mathbf{Q}\}.$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, приведем (3.2) к виду

$$\int\limits_V \{\mathscr{P}\,\nabla^2\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\nabla^2\mathscr{P}\}\,d\tau = \oint\limits_S \{\mathbf{n}\,[\mathscr{P},\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Q}] -$$

$$- \mathbf{n}\,[\mathbf{Q},\,\mathrm{rot}\,\mathscr{P}\,] + \mathbf{n}\mathscr{P}\,\mathrm{div}\,\mathbf{Q} - \mathbf{n}\mathbf{Q}\,\mathrm{div}\,\mathscr{P}\,\}\,dS. \qquad (3.3)$$

Отсюда легко получить интегральное представление для электромагнитного поля.

Пусть $\mathscr{P} = \mathbf{E}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{a}\psi(M,\,M_0)$, где $\mathbf{a} = \mathrm{const}$, $\psi = -\dfrac{e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}R_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}$.

Поверхность S выберем так, чтобы она не проходила через источники поля:

$$\mathrm{div}\,E\,|_S = \rho\,|_S = 0.$$

Так как

$$\nabla^2\mathbf{E} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{j}^{(\text{ст})} - \frac{i}{\omega\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}^{(\text{ст})},$$

$$\nabla^2\mathbf{Q} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{Q} = -\mathbf{a}\delta(M,\,M_0),$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{Q} = [\mathrm{grad}_M\psi,\,\mathbf{a}],\ \mathrm{div}\,\mathbf{Q} = \mathbf{a}\,\mathrm{grad}\,\psi,$$

то из (3.3) находим

$$\mathbf{E}(M_0)\,\mathbf{a} = \int\limits_V \left\{i\omega\mu\mathbf{j}^{(\text{ст})}(M) + \frac{i}{\omega\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}^{(\text{ст})}\right\}\psi(M,\,M_0)\,\mathbf{a}\,d\tau +$$

$$+ \mathbf{a}\oint\limits_S \{[\mathrm{grad}\,\psi\,[\mathbf{n},\,\mathbf{E}]] + i\omega\mu\psi\,[\mathbf{H},\,\mathbf{n}] - (\mathbf{n},\,\mathbf{E})\,\mathrm{grad}\,\psi\}\,dS.$$

Вектор $\mathbf{a}$ — произвольный, поэтому имеем формулу

$$\mathbf{E}(M_0) = \int\limits_V \left\{i\omega\mu\mathbf{j}^{(\text{ст})} + \frac{i}{\omega\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}^{(\text{ст})}\right\}\psi\,d\tau + \oint\limits_S \{[\mathrm{grad}\,\psi\,[\mathbf{n},\,\mathbf{E}]] +$$

$$+ i\omega\mu\psi\,[\mathbf{H},\,\mathbf{n}] - (\mathbf{n},\,\mathbf{E})\,\mathrm{grad}\,\psi\}\,dS. \qquad (3.4)$$

Аналогично, полагая $\mathscr{P} = \mathbf{H}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{a}\psi(M,\,M_0)$ и учитывая, что

$$\nabla^2\mathbf{H} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H} = -\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}^{(\text{ст})},$$

получаем формулу

$$\mathbf{H}(M_0) = \int\limits_V \psi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}^{(\text{ст})}\,d\tau + \oint\limits_S \{[\mathrm{grad}\,\psi[\mathbf{n},\,\mathbf{H}]] -$$

$$- i\omega\varepsilon\psi\,[\mathbf{E},\,\mathbf{n}] - (\mathbf{n},\,\mathbf{H})\,\mathrm{grad}\,\psi\}\,dS. \qquad (3.5)$$

Формулы (3.4) и (3.5) называются формулами *Стрэттона — Чу*.

При исследовании решений уравнений Максвелла часто применяют лемму Лоренца, которая является аналогом второй формулы Грина в скалярном случае. Перейдем к выводу этой леммы.

Пусть $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ — электромагнитное поле, создаваемое в области V сторонними токами $\mathbf{j}_1^{(\text{ст})}$; $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ — электромагнитное поле, создаваемое в той же области токами $\mathbf{j}_2^{(\text{ст})}$. Эти поля удовлетворяют следующим уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_1^{(\text{ст})}; \tag{3.6}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu\mathbf{H}_1; \tag{3.7}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_2^{(\text{ст})}; \tag{3.8}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu\mathbf{H}_2. \tag{3.9}$$

Умножим (3.7) скалярно на $\mathbf{H}_2$, а (3.8) — на $\mathbf{E}_1$ и вычтем полученные соотношения одно из другого. Имеем

$$\mathbf{H}_2 \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = i\omega(\mu\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + \varepsilon\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2) - \left(\mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2^{(\text{ст})}\right). \tag{3.10}$$

Используя формулу

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

перепишем (3.10) в виде

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2] = i\omega(\mu\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + \varepsilon\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2) - \left(\mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2^{(\text{ст})}\right). \tag{3.11}$$

Теперь, умножив (3.6) на $\mathbf{E}_2$, (3.9) — на $\mathbf{H}_1$ и вычтя полученные соотношения одно из другого, найдем

$$\mathbf{E}_2 \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = -i\omega(\varepsilon\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 + \mu\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2) + \left(\mathbf{E}_2, \mathbf{j}_1^{(\text{ст})}\right),$$

или

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}_1, \mathbf{E}_2] = -i\omega(\varepsilon\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 + \mu\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2) + \left(\mathbf{E}_2, \mathbf{j}_1^{(\text{ст})}\right). \tag{3.12}$$

Складывая (3.11) и (3.12), получим соотношение, которое называется *дифференциальной формой леммы Лоренца*:

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2] + \operatorname{div}[\mathbf{H}_1, \mathbf{E}_2] = \left(\mathbf{E}_2, \mathbf{j}_1^{(\text{ст})}\right) - \left(\mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2^{(\text{ст})}\right). \tag{3.13}$$

Чтобы перейти к интегральной форме леммы Лоренца, проинтегрируем (3.13) по некоторому объему V, содержащемуся в D, ограниченному поверхностью S, и воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского. Тогда получим

$$\oint_S \{\mathbf{E}_1[\mathbf{H}_2\mathbf{n}] - \mathbf{E}_2[\mathbf{H}_1\mathbf{n}]\}\, dS = \int_V \left\{\left(\mathbf{E}_2, \mathbf{j}_1^{(\text{ст})}\right) - \left(\mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2^{(\text{ст})}\right)\right\} d\tau, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S. Формула (3.14) является аналогом второй формулы Грина для скалярного случая.

Заметим, что при выводе формулы (3.14) не использовались никакие предположения относительно свойств среды, в которой распространяется электромагнитное поле.

Лемма Лоренца позволяет получить важные энергетические соотношения для электромагнитного поля. Покажем, в частности, как получить известную теорему Пойнтинга. Для этого применим лемму Лоренца к полю $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, заданному в области V, и к комплексно сопряженному с ним полю $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$, удовлетворяющему в области V уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^* = i\omega\varepsilon^*\mathbf{E}^* + \mathbf{j}^{(\text{ст})*},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^* = -i\omega\mu^*\mathbf{H}^*.$$

При этом формула (3.14) принимает вид

$$\oint_S \{\mathbf{E}[\mathbf{H}^*\mathbf{n}] + \mathbf{E}^*[\mathbf{H}\mathbf{n}]\} dS = \int_V \{i\omega(\varepsilon - \varepsilon^*)|\mathbf{E}|^2 + i\omega(\mu - \mu^*)|\mathbf{H}|^2\} d\tau -$$

$$- \int_V \{(\mathbf{E}, \mathbf{j}^{(\text{ст})*}) + (\mathbf{E}^*, \mathbf{j}^{(\text{ст})})\} d\tau \qquad (3.15)$$

или

$$\operatorname{Re}\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\mathbf{n}\, dS = -\omega \int_V \{\operatorname{Im}\varepsilon\,|\mathbf{E}|^2 + \operatorname{Im}\mu\,|\mathbf{H}|^2\} d\tau - \operatorname{Re}\int_V (\mathbf{E}, \mathbf{j}^{(\text{ст})*}) d\tau. \qquad (3.16)$$

Последняя формула имеет простой физический смысл и выражает закон сохранения энергии: поток энергии электромагнитного поля через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, равен энергии, выделяемой источниками поля, которые находятся в этом объеме, за вычетом потерь на диссипацию энергии в среде (при комплексных значениях проницаемостей ε и μ).

Отметим еще раз, что формулы (3.14) и (3.15) имеют место в случае произвольной среды, в частности неоднородной и анизотропной.

Из формулы (3.14) теперь нетрудно получить интегральные представления для электромагнитного поля, аналогичные третьей формуле Грина.

Будем считать, что поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области V источников не имеет ($\mathbf{j}^{(\text{ст})} \equiv 0$), а поле $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ создается точечным электрическим диполем с моментом $\mathbf{p}_0$, т. е.

$$\mathbf{j}^{(\text{ст})} = \mathbf{p}_0\delta(M, M_0),$$

где $\delta(M, M_0)$ — δ-функция, так что

$$\int_V \mathbf{j}^{(\text{ст})}\mathbf{E}(M)\, d\tau_M = \mathbf{E}(M_0)\,\mathbf{p}_0,\; M_0 \in V.$$

Применяя к полям $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ в области V лемму Лоренца (3.14), получим

$$(\mathbf{E}(M_0), \mathbf{p}_0) = -\oint\limits_S \{\mathscr{H}[\mathbf{n}\mathbf{E}] - \mathscr{E}[\mathbf{H}\mathbf{n}]\}\, dS. \qquad (3.17)$$

Электромагнитное поле $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ представляет собой поле точечного электрического диполя в неограниченном пространстве.

Для того чтобы получить выражение для магнитного поля, будем считать, что поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области V источников не имеет $(\mathbf{j}_1^{(\text{ст})} = 0)$, а поле $\{\mathscr{E}_m, \mathscr{H}_m\}$ является полем точечного магнитного диполя, т. е.

$$\mathbf{j}_2^{(\text{ст})} = -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \{\mathbf{m}_0 \delta(M, M_0)\}.$$

Так как

$$\int\limits_V (\mathbf{E}(M), \operatorname{rot} \{\mathbf{m}_0 \delta(M, M_0)\})\, d\tau = \int\limits_V \delta(M, M_0)(\mathbf{m}_0, \operatorname{rot} \mathbf{E})\, d\tau =$$

$$= (\mathbf{m}_0, \operatorname{rot} \mathbf{E}(M_0)) = i\omega\mu(\mathbf{m}_0, \mathbf{H}(M_0)),$$

то, применяя лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathscr{E}_m, \mathscr{H}_m\}$, получим

$$(\mathbf{H}(M_0), \mathbf{m}_0) = \oint\limits_S \{\mathscr{H}_m[\mathbf{E}\mathbf{n}] - \mathbf{H}[\mathscr{E}_m\mathbf{n}]\}\, dS. \qquad (3.18)$$

Формулы (3.17) и (3.18) определяют проекции электрического и магнитного полей на момент соответствующего диполя. Для того чтобы выразить само поле, удобно ввести фундаментальные матрицы уравнений Максвелла.

Пусть $\{\mathscr{E}^{(\alpha)}, \mathscr{H}^{(\alpha)}\}$ — поле электрического диполя с моментом $\mathbf{e}_\alpha$, где $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ — единичный вектор декартовой прямоугольной системы координат. Построим матрицы $\widehat{\mathscr{E}}(M, M_0)$ и $\widehat{\mathscr{H}}(M, M_0)$, строками которых являются векторы $\mathscr{E}^{(\alpha)}$ и $\mathscr{H}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\widehat{\mathscr{E}} = \left\| \begin{matrix} \mathscr{E}^{(1)} \\ \mathscr{E}^{(2)} \\ \mathscr{E}^{(3)} \end{matrix} \right\|, \quad \widehat{\mathscr{H}} = \left\| \begin{matrix} \mathscr{H}^{(1)} \\ \mathscr{H}^{(2)} \\ \mathscr{H}^{(3)} \end{matrix} \right\|.$$

Матрицы $\widehat{\mathscr{E}}$ и $\widehat{\mathscr{H}}$ называются фундаментальными (электрическими) матрицами уравнений Максвелла. Так как

$$\mathbf{E}(M_0) = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{e}_\alpha (\mathbf{E}(M_0), \mathbf{e}_\alpha),$$

то, используя (3.17), электрический вектор $\mathbf{E}$ можно выразить через фундаментальные матрицы следующим образом:

$$\mathbf{E}(M_0)=\oint_S \{\hat{\mathscr{H}}(M, M_0)[\mathbf{E}n]+\hat{\mathscr{E}}(M, M_0)[\mathbf{H}n]\}\,dS. \qquad (3.19)$$

Определяя магнитное поле **H** из уравнения Максвелла и учитывая (3.19), получим

$$\mathbf{H}(M_0)=\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}_{M_0}\oint_S \{\hat{\mathscr{H}}[\mathbf{E}n]+\hat{\mathscr{E}}[\mathbf{H}n]\}\,dS.$$

Если аналогично ввести магнитные фундаментальные матрицы $\hat{\mathscr{E}}_m(M, M_0)$ и $\hat{\mathscr{H}}_m(M, M_0)$, то для электромагнитного поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ получим следующие выражения:

$$\mathbf{H}(M_0)=\oint_S \{\hat{\mathscr{H}}_m(M, M_0)[\mathbf{E}\mathbf{n}]+\hat{\mathscr{E}}_m(M, M_0)[\mathbf{H}\mathbf{n}]\}\,dS,$$

$$\mathbf{E}(M_0)=-\frac{1}{i\omega\varepsilon}\operatorname{rot}_{M_0}\oint_S \{\hat{\mathscr{H}}_m[\mathbf{E}\mathbf{n}]+\hat{\mathscr{E}}_m[\mathbf{H}\mathbf{n}]\}\,dS.$$

Лемма Лоренца (3.17) позволяет выразить электромагнитное поле внутри объема V через значения касательных составляющих векторов **E** и **H** на поверхности (границе) области. На основании этой же леммы на границе области V нельзя произвольно задавать тангенциальные составляющие и электрического, и магнитного поля, так как может получиться переопределенная задача. Действительно, значения $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S$ и $[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|_S$ должны быть согласованы между собой, поскольку между ними существует функциональная зависимость, при $\mathbf{j}^{(\text{ст})}=0$ имеющая вид

$$\oint_S \{\mathscr{H}(M, M_0)[\mathbf{n}\mathbf{E}]-\mathscr{E}(M, M_0)[\mathbf{H}\mathbf{n}]\}\,dS_M \underset{M_0 \in V}{=} 0.$$

Электромагнитное поле в области V можно выразить через значения только электрического поля на поверхности S, ограничивающей объем V. Для этого нужно ввести векторные функции Грина для уравнений Максвелла. Эти функции представляют собой электромагнитное поле, создаваемое точечным электрическим или магнитным диполем и удовлетворяющее однородным граничным условиям на поверхности S. Пусть $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ — электромагнитное поле, создаваемое точечным электрическим диполем с моментом **p**, находящимся в точке M, и удовлетворяющее граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathscr{E}]|_S=0$$

на поверхности S.

Применяя лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$, получим

$$(\mathbf{E}(M), \mathbf{p})=-\oint_S \mathscr{H}(M, P)[\mathbf{n}(P)\mathbf{E}(P)]\,dS_P. \qquad (3.20)$$

Магнитное поле определяется по электрическому полю из уравнения

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Аналогично фундаментальной матрице введем матрицу Грина. Пусть $\{\mathscr{E}^{(\alpha)}, \mathscr{H}^{(\alpha)}\}$ — электромагнитное поле, создаваемое точечным электрическим диполем с моментом $\mathbf{e}_\alpha$, расположенным в точке M_0, и удовлетворяющее граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathscr{E}^{(\alpha)}]|_S = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Матрица

$$\hat{\mathscr{H}}(M, M_0) = \begin{Vmatrix} \mathscr{H}^{(1)}(M, M_0) \\ \mathscr{H}^{(2)}(M, M_0) \\ \mathscr{H}^{(3)}(M, M_0) \end{Vmatrix}$$

называется электрической матрицей Грина для уравнений Максвелла.

Согласно (3.20), электромагнитное поле выражается через матрицу $\hat{\mathscr{H}}(M, M_0)$ следующим образом:

$$\mathbf{E}(M_0) = \oint_S \hat{\mathscr{H}}(M, M_0)[\mathbf{E}(M), \mathbf{n}(M)]\, dS,$$

$$\mathbf{H}(M_0) = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot}_{M_0} \oint_S \hat{\mathscr{H}}(M, M_0)[\mathbf{E}, \mathbf{n}]\, dS.$$

Аналогично вводятся электрическая матрица Грина для граничных условий

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|_S = 0$$

и магнитные матрицы Грина.

Электрическое поле можно выразить и через значения магнитного поля на поверхности. Для этого нужно ввести другую векторную функцию Грина, т. е. поле точечного электрического диполя, удовлетворяющее граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathscr{H}]|_S = 0.$$

Тогда, согласно лемме Лоренца,

$$(\mathbf{E}(M), \mathbf{p}) = \oint_S \mathscr{E}(M, P)[\mathbf{H}(P), \mathbf{n}(P)]\, dS_P,$$

а магнитное поле определяется через электрическое опять из уравнений Максвелла. Наконец, вводя векторные функции Грина, которые представляют собой поля точечного магнитного диполя, удовлетворяющие однородным граничным условиям на поверхности S, из формулы (3.18) получим выражение для $\mathbf{H}(M)$

через граничные значения касательных составляющих электрического или магнитного поля.

Наконец, из леммы Лоренца (3.14) получим так называемую *теорему взаимности*.

Пусть в объеме V, ограниченном поверхностью S, существуют два электромагнитных поля $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, создаваемые электрическими диполями $\mathbf{j}_1^{(\text{ст})}=\mathbf{p}_1\delta(M, M_1)$, $\mathbf{j}_2^{(\text{ст})}=\mathbf{p}_2\delta(M, M_2)$. *Пусть эти поля на поверхности удовлетворяют следующим граничным условиям:*

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1]|_S=0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2]|_S=0$$

(т. е. поверхность S *является идеально проводящей* (см. § 4 этой главы). Тогда, применяя формулу (3.14) к полям $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ в области V, получим

$$(\mathbf{E}_1(M_2), \mathbf{p}_2)=(\mathbf{E}_2(M_1), \mathbf{p}_1). \tag{3.21}$$

Если рассмотреть два поля $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, создаваемые магнитными диполями

$$\mathbf{j}_1^{(\text{ст})}=\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\{\mathbf{m}_1\delta(M, M_1)\}, \quad \mathbf{j}_2^{(\text{ст})}=\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\{\mathbf{m}_2\delta(M, M_2)\}$$

и удовлетворяющие граничным условиям

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1]|_S=0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2]|_S=0,$$

то, применив к ним лемму Лоренца, получим

$$(\mathbf{H}_1(M_2), \mathbf{m}_2)=(\mathbf{H}_2(M_1), \mathbf{m}_1). \tag{3.22}$$

Соотношения (3.21) и (3.22) называются теоремой взаимности. Она является аналогом условия симметрии функции Грина в скалярном случае. Согласно этой теореме, можно менять местами положение точки наблюдения и источники поля, что используется при решении многих практических задач, в частности при расчете антенн.

Теорема взаимности справедлива и в том случае, если оба электромагнитных поля удовлетворяют на поверхности S граничным условиям

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|_S=0$$

или

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]-\zeta[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{H}]]|_S=0.$$

§ 4. Граничные условия

Если в пространстве имеются области, на границе которых ε, μ и σ претерпевают разрывы, то на этих поверхностях раздела сред векторы напряженностей электромагнитного поля, вообще говоря, также теряют непрерывность и не удовлетворяют дифференциальным уравнениям Максвелла. На этих поверхностях разрыва должны быть сформулированы определенные условия сопряжения для векторов электромагнитного поля. Известно, что эти условия на гладких поверхностях разрыва имеют следующий вид:

$$\mu_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{n}) - \mu_2(\mathbf{H}_2, \mathbf{n}) = 0; \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_1(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}) - \varepsilon_2(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}) = \rho_{пов}; \tag{4.2}$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1] - [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2] = 0; \tag{4.3}$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] - [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2] = \mathbf{j}_{пов}, \tag{4.4}$$

где индексы 1 и 2 соответствуют первой и второй средам, $\rho_{пов}$ — плотность поверхностных зарядов, $\mathbf{j}_{пов}$ — плотность поверхностного тока.

Если $\sigma \neq \infty$, то при отсутствии заданных сторонних поверхностных токов на поверхности разрыва условие (4.4) принимает вид

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] = [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2]$$

и означает непрерывность касательных составляющих магнитного поля на даной поверхности.

Заметим, что так как условия (4.1) и (4.2) вытекают из уравнений

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0 \text{ и } \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho,$$

которые являются следствием двух других уравнений Максвелла и закона сохранения заряда, то условия (4.1) и (4.2) могут быть получены из условий (4.3) и (4.4) и уравнений Максвелла. Иными словами, основными условиями сопряжения векторов электромагнитного поля при переходе через поверхность раздела двух сред являются условия (4.3) и (4.4).

Если среда II обладает бесконечной проводимостью (т. е. граница раздела идеально проводящая), то $\mathbf{E}_2 \equiv 0$, $\mathbf{H}_2 \equiv 0$ и на поверхности идеально проводящего тела должно выполняться граничное условие

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1]|_S = 0. \tag{4.5}$$

В дальнейшем будет показано, что условие (4.5) определяет единственное решение системы уравнений Максвелла вне идеально проводящего тела. Найденные при этом значения тангенциальной составляющей магнитного поля могут быть использованы для определения наведенного поверхностного тока на идеально проводящем теле по формуле (4.4).

Если среды по обе стороны от границы раздела не являются идеально проводящими, то плотность поверхностного тока может быть отличной от нуля лишь при наличии на этой поверхности сторонних источников тока.

Во многих реальных случаях проводимость тел велика, но конечна. В этом случае на поверхности таких тел должны выполняться точные граничные условия (4.3) и (4.4). Это, в свою очередь, означает, что для определения электромагнитного поля вне хорошо проводящего тела уравнения Максвелла должны быть решены как вне, так и внутри тела с условиями сопряжения на границе раздела. Такая задача, как будет показано далее, является более сложной, чем задача определения электромагнитного поля в одной из сред с заданным граничным условием на поверхности. Поэтому желательно условия сопряжения на поверхности хорошо проводящего тела заменить граничным условием, связывающим значения векторов поля на поверхности только в одной из сред. Такими граничными условиями являются приближенные граничные условия Щукина — Леонтовича (или импедансные граничные условия). Получим граничные условия Щукина — Леонтовича для простейшего случая — падения плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред.

Пусть плоскость $z=0$ является границей раздела двух сред: среды I с параметрами ε_1, μ_1, σ_1 и среды II с параметрами ε_2, μ_2, σ_2, причем $\sigma_2 \gg 1$. Пусть на границу раздела из области I падает плоская электромагнитная волна, электрический вектор который направлен вдоль оси x. Введем приведенные электромагнитные поля:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1=\sqrt{\varepsilon_1'}\,\mathbf{E}_1 \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{H}}_1=\sqrt{\mu_1}\,\mathbf{H}_1 \qquad \text{в среде I},$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_2=\sqrt{\varepsilon_2'}\,\mathbf{E}_2 \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{H}}_2=\sqrt{\mu_2}\,\mathbf{H}_2 \qquad \text{в среде II},$$

где $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ — истинные поля, $\varepsilon_2'=\varepsilon_2+i\dfrac{\sigma_2}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость второй среды. Падающую плоскую волну можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_1=\{\tilde{E}_1,\ 0,\ 0\},$$

где

$$\tilde{E}_1=E_0 e^{ik_1(y\sin\theta_1-z\cos\theta_1)},$$

θ_1 — угол падения волны. Легко проверить, что в случае плоской волны

$$\tilde{\mathbf{H}}_1=\frac{1}{ik_1}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}}_1=\frac{1}{k_1}[\mathbf{k}_1,\ \tilde{\mathbf{E}}_1],$$

так что

$$\mathbf{k}_1=\{0,\ \sin\theta_1,\ -\cos\theta_1\},\quad k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1'\mu_1},\quad \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_1|}{|\tilde{\mathbf{H}}_1|}=1.$$

В среде II возникает прошедшая плоская волна той же поляризации, а плотность поверхностного тока равна нулю:

$$\tilde{\mathbf{E}}_2=\{\tilde{E}_2,\ 0,\ 0\},\quad \mathbf{H}_2=\frac{1}{k_2}[\mathbf{k}_2,\ \tilde{\mathbf{E}}_2],$$

$$\mathbf{k}_2=\{0,\ \sin\theta_2,\ -\cos\theta_2\},\quad k_2=\omega\sqrt{\varepsilon_2'\mu_2},\quad \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_2|}{|\tilde{\mathbf{H}}_2|}=1.$$

Касательные составляющие в среде II соответственно равны

$$\tilde{E}_{2\tau}=\tilde{E}_{2x}=\tilde{E}_2,$$

$$\tilde{H}_{2\tau}=\tilde{H}_{2y}=\tilde{H}_2\cos\theta_2,$$

где θ_2 — угол распространения плоской волны в среде II. Отсюда сразу находим отношение касательных составляющих электромагнитного поля в среде II:

$$\frac{\tilde{E}_{2x}}{\tilde{H}_{2y}}=\frac{\tilde{E}_2}{\tilde{H}_2\cos\theta_2}=\frac{1}{\cos\theta_2}.$$

Для определения $\cos\theta_2$ используем закон Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=n,$$

где $n=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2'\mu_2}{\varepsilon_1'\mu_1}}$ — показатель преломления при переходе из среды I в среду II. Так как $\sigma_2\gg 1$, то $|\varepsilon_2'|\gg 1$ и $|n|\gg 1$, поэтому

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2{}_1\theta_1}\simeq 1+\ldots$$

так как

$$\left|\frac{\sin\theta_1}{n}\right|\ll 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\tilde{E}_{2x}}{\tilde{H}_{2y}}\simeq 1.$$

Переходя к истинным полям, находим

$$\frac{\tilde{E}_{2x}}{\tilde{H}_{2y}}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2'}}.$$

Используя непрерывность касательных составляющих электрического и магнитного поля при отсутствии поверхностных токов, получаем граничное условие для полей в среде I

$$E_{1x}=\zeta H_{1y},\tag{4.6}$$

где $\zeta=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2'}}$ — *поверхностный импеданс* среды II.

Заметим, что, поскольку

$$\varepsilon_2' = \varepsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega},$$

ζ является корнем из комплексной величины. Выбираем ветвь корня, для которой $\operatorname{Im}\zeta<0$. Такой выбор соответствует тому, что $\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon_2'}>0$; это обеспечивает затухание волны, распространяющейся в среде II.

Если рассмотреть случай другой поляризации падающей волны, то получим соотношение

$$E_{1y} = -\zeta H_{1x}. \tag{4.7}$$

Обобщая (4.6) и (4.7) на случай произвольного поля и произвольной поверхности, граничное условие можно записать в виде

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{E}_1]|_S = -\zeta\,[\mathbf{n},\ [\mathbf{n}\mathbf{H}_1]]|_S. \tag{4.8}$$

Условие (4.8) и называется *граничным условием Щукина — Леонтовича*. В общем случае (для анизотропной поверхности) импеданс ζ может быть тензорной функцией точек поверхности.

Подчеркнем еще раз, что импедансные условия (4.8) являются приближенными в том смысле, что решение задачи в области I с условием (4.8) в определенном смысле мало отличается от точного решения задачи на сопряжение с условиями (4.3), (4.4) на границе раздела сред I и II. Точнее говоря, решение задачи с условием (4.8) представляет собой первый член асимптотического разложения точного решения задачи сопряжения по степеням малого параметра ζ. Можно получить импедансные условия более общего вида, определяющие и последующие члены асимптотического разложения.

Заметим, что условия (4.8) имеют место для плоской границы раздела сред или такой границы, радиусы кривизны которой много больше длины падающей волны. Более общими условиями, учитывающими кривизну поверхности раздела, являются условия вида

$$E_{\tau_1}|_S = \zeta\left(1+\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{2ik_2}\right)H_{\tau_2}|_S,$$

$$E_{\tau_2}|_S = -\zeta\left(1+\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{2ik_2}\right)H_{\tau_1}|_S,$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — главные гауссовы кривизны поверхности.

Наконец, отметим, что так как решение задачи с условиями (4.8) отличается от решения задачи сопряжения на величину порядка ζ, то будет иметь место ошибка того же порядка, если в правой части условия (4.8) вместо функции $\mathbf{H}_1$ взять функцию $\mathbf{H}_0$ — решение задачи в области I с граничным условием

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_0]|_S = 0,$$

соответствующим условию идеальной проводимости среды II.

§ 5. Поведение волновых полей на бесконечности

Типичной задачей дифракции электромагнитных волн является следующая задача.

Пусть в неограниченной среде, характеризуемой параметрами ε, μ, σ, расположены посторонние включения с параметрами ε_i, μ_i, σ_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$. В среде находятся заданные источники поля. Необходимо определить электромагнитное поле во всем пространстве. К этому кругу задач относятся и такие задачи, в которых возбуждение поля осуществляется заданием падающей плоской волны.

Поскольку электромагнитное поле должно быть определено во всем пространстве, для его единственности кроме условий на границах раздела сред нужно поставить определенные условия на бесконечности. Условия на бесконечности должны удовлетворять следующим требованиям: физическому — они должны выделять волны, уходящие в бесконечность, и исключать возможность появления волн, приходящих из бесконечности, за исключением падающей плоской волны, математическому — они должны выделять единственное решение системы уравнений Максвелла.

Чтобы сформулировать соответствующие условия, изучим поведение в бесконечности волновых полей, удовлетворяющих однородному уравнению Гельмгольца в скалярном случае и однородной системе уравнений Максвелла в электромагнитном случае.

Начнем рассмотрение со скалярного уравнения Гельмгольца и для простоты рассмотрим двумерный случай. Пусть функция $u(M)$ вне некоторого круга радиуса r_0 удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца, которое запишем в полярной системе координат (r, φ):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+k^2u=0. \tag{5.1}$$

На любой окружности радиуса $r>r_0$ функция $u(r, \varphi)$ может быть разложена в тригонометрический ряд

$$u(r, \varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r)\, e^{in\varphi}, \tag{5.2}$$

коэффициенты которого

$$u_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(r, \varphi)\,e^{-in\varphi}d\varphi$$

являются функциями r. Чтобы найти $u_n(r)$, домножим уравнение (5.1) на $\frac{1}{2\pi}e^{-in\varphi}$ и проинтегрируем по окружности радиуса r. В результате получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_n}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}u_n+k^2u_n=0, \quad n=0, \pm 1, \ldots . \tag{5.3}$$

Соотношение (5.3) справедливо при любом $r>r_0$ и представляет собой дифференциальное уравнение для $u_n(r)$. Это уравнение Бесселя n-го порядка, и его общее решение может быть записано в виде

$$u_n(r)=A_nH_n^{(1)}(kr)+B_nH_n^{(2)}(kr),$$

где $H_n^{(1,2)}(x)$ — функция Ханкеля n-го порядка первого или второго рода соответственно.

Таким образом, любое решение однородного уравнения Гельмгольца (5.1) при $r>r_0$ может быть представлено рядом

$$u(r, \varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{A_nH_n^{(1)}(kr)+B_nH_n^{(2)}(kr)\}\,e^{in\varphi}. \tag{5.4}$$

Учитывая асимптотическое поведение функций Ханкеля при $x\to+\infty$

$$H_n^{(1,2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{\pm i(x-\pi n/2-\pi/4)}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

из (5.4) можно получить оценку при действительном k:

$$u(r, \varphi)=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ при } r\to\infty. \tag{5.5}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. *Любое регулярное вне некоторого круга решение двумерного уравнения Гельмгольца представимо в виде* (5.4) *и имеет оценку* (5.5).

Аналогично доказывается теорема для трехмерного случая.

Теорема 5.2. *Любое регулярное вне некоторой сферы ре-*

шение трехмерного уравнения Гельмгольца представимо в виде ряда

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \times$$

$$\times \left\{ A_{nm} \frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + B_{nm} \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \right\} P_n^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \qquad (5.6)$$

и при действительном k имеет место оценка

$$u(r, \theta, \varphi) = O\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (5.7)$$

Заметим, что если k — комплексное, $k = k_0 + ik_1$, то из (5.4) и (5.6) видно, что решение однородного уравнения Гельмгольца можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых убывает по экспоненте, а другое — по экспоненте неограниченно увеличивается при $r \to \infty$. Поэтому ограниченное регулярное вне круга или сферы решение уравнения Гельмгольца при комплексном k на бесконечности обязательно убывает по экспоненте. В трехмерном случае ограниченное решение на бесконечности имеет оценку

$$u(r, \varphi) = e^{-|\operatorname{Im} k| r}\, O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Рассмотрим теперь поведение решения однородной системы уравнений Максвелла (электромагнитного поля) на бесконечности. Пусть $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ — регулярное вне некоторой сферы решение системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}.$$

В § 2 было показано, что произвольное электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ вне сферы может быть выражено через потенциалы Дебая u и v следующим образом:

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{r}u) + i\omega\mu \operatorname{rot} (\mathbf{r}v); \qquad (5.8)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \operatorname{rot} (\mathbf{r}u) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{r}v), \qquad (5.9)$$

причем потенциал Дебая удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu.$$

Согласно теореме 5.2, потенциалы Дебая вне некоторой сферы могут быть представлены в виде рядов

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} R_{nm}(r)\, Y_n^{(m)}(\theta, \varphi),$$

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} F_{nm}(r) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi), \tag{5.10}$$

где

$$R_{nm}(r) = A_{nm} \frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + B_{nm} \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}},$$

$$F_{nm}(r) = C_{nm} \frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + D_{nm} \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}, \tag{5.11}$$

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$

Подставляя (5.10) в (5.8) и (5.9), найдем, что поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ вне сферы $r > r_0$ представимо в виде

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big\{ U_{nm}(r)\, \mathbf{e}_r Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm}) \nabla_{\theta\varphi} Y_n^{(m)} + i\omega\mu F_{nm} [\nabla_{\theta,\varphi} Y_n^{(m)}, \mathbf{e}_r] \Big\}; \tag{5.12}$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big\{ V_{nm}(r)\, \mathbf{e}_r Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rF_{nm}) \nabla_{\theta,\varphi} Y_n^{(m)} - i\omega\varepsilon R_{nm} [\nabla_{\theta,\varphi} Y_n^{(m)}, \mathbf{e}_r] \Big\}, \tag{5.13}$$

где

$$U_{nm}(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR_{nm}) + \omega^2 \varepsilon\mu r R_{nm} = \frac{n(n+1)}{r} R_{nm},$$

$$V_{nm}(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF_{nm} + \omega^2 \varepsilon\mu r F_{nm} = \frac{n(n+1)}{r} F_{nm}.$$

Из (5.12) и (5.13) видно, что в случае непроводящей среды ($\sigma = 0$, ε, μ — действительные) электромагнитное поле на бесконечности имеет следующую оценку:

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] = O\left(\frac{1}{r}\right); \tag{5.14}$$

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{H}] = O\left(\frac{1}{r}\right); \tag{5.15}$$

$$(\mathbf{e}_r,\ \mathbf{E})=O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad (\mathbf{e}_r,\ \mathbf{H})=O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{5.16}$$

Заметим также, что справедливы следующие оценки для производных:

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial E_r}{\partial\theta}=O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}=O\left(\frac{1}{r^2}\right); \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial\theta}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial H_r}{\partial\theta}=O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad \frac{\partial H_r}{\partial\varphi}=O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{5.18}$$

при $r\to\infty$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Любое регулярное вне некоторой сферы электромагнитное поле представимо в виде (5.12)—(5.13), и в среде без проводимости на бесконечности имеют место оценки* (5.14)—(5.18).

Регулярным мы называем поле, удовлетворяющее однородным уравнениям и не имеющее особенностей.

Из представления (5.12)—(5.13) также видно, что в проводящей среде ($\sigma\neq0$, ε — комплексное) ограниченное на бесконечности электромагнитное поле экспоненциально убывает при $r\to\infty$ и имеют место следующие оценки:

$$E_{\theta,\varphi}=e^{-\omega|\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon\mu}|\,r}\,O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$H_{\theta,\varphi}=e^{-\omega|\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon\mu}|\,r}\,O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$E_r=e^{-\omega|\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon\mu}|\,r}\,O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$H_r=e^{-\omega|\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon\mu}|\,r}\,O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Представления в виде ряда для волновых полей позволяют доказать леммы, необходимые при исследовании единственности решения внешних краевых задач. Рассмотрим случай уравнения Гельмгольца для действительного k.

Лемма 5.1. *Пусть $u(M)$ — регулярное вне круга $r=r_0$ решение уравнения Гельмгольца. Если*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{C_r}|u|^2\,dl=0,$$

где C_r — окружность радиуса r, *то $u\equiv0$ при $r>r_0$.*

Доказательство. Согласно теореме 5.1,

$$\int\limits_{C_r} |u|^2 dl = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r\,|u_n(r)|^2 2\pi, \tag{5.19}$$

где

$$u_n(r) = A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr).$$

Если

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{C_r} |u|^2 dl = 0,$$

то из (5.19) получаем

$$\lim_{r\to\infty} r\,|u_n(r)|^2 = 0, \quad n = 0, \ \pm 1, \dots .$$

Используя асимптотику функций $H_n^{(1,2)}(kr)$ при действительном k и при $r\to\infty$, получаем

$$A_n = B_n = 0, \quad n = 0, \ \pm 1, \dots .$$

Следовательно, согласно представлению (5.4), $u \equiv 0$ при $r > r_0$.

В трехмерном случае лемма доказывается аналогично.

Лемма 5.2. *Пусть $u(M)$ — регулярное вне сферы S_{r_0}, $r > r_0$, решение уравнения Гельмгольца. Если*

$$\lim_{r\to\infty} \oint\limits_{S_r} |u|^2 dS = 0,$$

где S_r — сфера радиуса r, то $u \equiv 0$ при $r > r_0$.

Докажем аналогичную лемму для электромагнитного поля в непроводящей среде ($\sigma = 0$).

Лемма 5.3. *Пусть $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ — регулярное вне сферы S_{r_0} электромагнитное поле. Если*

$$\lim_{r\to\infty} \oint\limits_{S_r} |[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}]|^2 dS = 0, \tag{5.20}$$

где S_r — сфера радиуса r, *то* $\mathbf{E} \equiv 0$, $\mathbf{H} \equiv 0$ *вне* S_{r_0}.

Доказательство. Согласно теореме 5.3,

$$\oint\limits_{S_r} |[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}]|^2 dS = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm}) \right|^2 \left\| [\mathbf{e}_r, \nabla_{\theta\varphi} Y_n^{(m)}] \right\|^2_{L_2(S_r)} + \right.$$
$$\left. + \omega^2 \mu^2 |F_{nm}|^2 r^2 \left\| \nabla_{\theta\varphi} Y_n^{(m)} \right\|^2_{L_2(S_r)} \right\},$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} R_{nm} \\ F_{nm} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A_{nm} \\ C_{nm} \end{matrix} \right\} \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} + \left\{ \begin{matrix} B_{nm} \\ D_{nm} \end{matrix} \right\} \frac{H^{(2)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} .$$

Если выполнено условие (5.20), то

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm})\right|^2=0,$$

$$\lim_{r\to\infty} r^2|F_{nm}(r)|^2=0,\quad n=0,\ 1,\dots,\infty;\quad m=0,\ \pm 1,\dots,\ \pm n.$$

Учитывая асимптотическое поведение функций Ханкеля действительного аргумента, отсюда получаем

$$A_{nm}=B_{nm}=C_{nm}=D_{nm}=0,\quad n=0,\ 1,\dots,\infty;$$

$$m=0,\ \pm 1\dots,\pm n.$$

Следовательно, согласно (5.12) — (5.13), имеем

$$\mathbf{E}\equiv 0,\ \mathbf{H}\equiv 0 \text{ всюду при } r>r_0.$$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 5.4. *Пусть* $\{\mathbf{E},\ \mathbf{H}\}$ *— регулярное вне сферы* S_{r_0} *электромагнитное поле. Если*

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{S_r}|[\mathbf{e}_r,\ \mathbf{H}]|^2\,dS=0,$$

где S_r *— сфера радиуса* r, *то* $\mathbf{E}\equiv 0$, $\mathbf{H}\equiv 0$ *вне* S_{r_0}.

Подчеркнем еще раз, что леммы 5.1 и 5.2 справедливы, если k — действительное, а леммы 5.3 и 5.4 справедливы при $\sigma=0$ (в среде без поглощения).

Доказанные леммы показывают, что волновые поля в среде без поглощения на бесконечности не могут убывать быстрее чем $1/r$ в трехмерном случае и $1/\sqrt{r}$ в двумерном случае.

Как видно из теорем 5.1—5.3, в среде с поглощением (комплексное k в скалярном случае и $\sigma\neq 0$ в электромагнитном) условие ограниченности волнового поля в бесконечности выделяет единственное решение. В среде без поглощения любое волновое поле, регулярное вне сферы или круга, убывает на бесконечности по одному и тому же закону. Следовательно, в этом случае нужно поставить дополнительные условия, выделяющие единственное решение внешней краевой задачи.

Для выделения единственного решения внешней краевой задачи можно использовать различные требования: принцип предельной амплитуды, принцип предельного поглощения и аналитические условия. Мы чаще всего будем использовать простейшие аналитические условия, называемые *условиями излучения Зоммерфельда.*

В трехмерном скалярном случае условия излучения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{r}\right),\quad r\to\infty. \tag{5.21}$$

Условия (5.21) выделяют уходящую на бесконечность сферическую волну. Они соответствуют случаю, когда уходящая сферическая волна на бесконечности подобна уходящей вдоль радиуса плоской волне, амплитуда которой убывает с расстоянием, как $1/r$.

В § 1 было получено соотношение, связывающее векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в плоской электромагнитной волне:

$$[\mathbf{k}_0, \mathbf{E}] = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{k}_0[\mathbf{k}_0\mathbf{H}]],$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор, определяющий направление распространения плоской волны. Из физических соображений следует ожидать, что аналогом условий излучения в электромагнитном случае являются условия

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r\mathbf{H}]] + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{5.22}$$

При этом предполагается, что среда непроводящая ($\sigma = 0$, ε — действительное). Знак в правой части формулы (5.22) соответствует выделению уходящей или приходящей сферической волны. При временно́й зависимости $e^{-i\omega t}$ условию

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r\mathbf{H}]] + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty, \tag{5.23}$$

удовлетворяет уходящая на бесконечность сферическая волна, а условию

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] = +\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r\mathbf{H}]] + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty, \tag{5.24}$$

удовлетворяет сходящаяся волна.

Теорема 5.3 вне сферы S_{r_0} определяет любое решение однородной системы уравнений Максвелла. Используя ее, найдем общий вид вне сферы S_{r_0} для электромагнитного поля, удовлетворяющего на бесконечности условиям излучения (5.23). Для этого достаточно потребовать, чтобы частные решения $\mathbf{E}_{nm}$ и $\mathbf{H}_{nm}$

$$\mathbf{E}_{nm} = U_{nm}\mathbf{e}_r Y_n^{(m)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm})\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)} + i\omega\mu F_{nm}[\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)}, \mathbf{e}_r],$$

$$\mathbf{H}_{nm} = V_{nm}\mathbf{e}_r Y_n^{(m)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_{nm})\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)} - i\omega\varepsilon R_{nm}[\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)}, \mathbf{e}_r]$$

удовлетворяли условию (5.23).

Так как

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}_{nm}] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm})[\mathbf{e}_r, \nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)}] + i\omega\mu F_{nm}\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)},$$

$$[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r,\mathbf{H}_{nm}]] = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_{nm})\nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)} - i\omega\varepsilon[\mathbf{e}_r, \nabla_{\theta,\varphi}Y_n^{(m)}],$$

то условия (5.23) принимают следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm}) - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,R_{nm} = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_{nm}) - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,F_{nm} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\to\infty. \tag{5.25}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR_{nm}) = \frac{\partial R_{nm}}{\partial r} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_{nm}) = \frac{\partial F_{nm}}{\partial r} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

условия (5.25) можно записать в виде

$$\frac{\partial R_{nm}}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,R_{nm} = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial F_{nm}}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,F_{nm} = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{5.26}$$

Так как $R_{nm}(r)$ и $F_{nm}(r)$ определены соотношениями (5.11), то условия (5.26) выполняются только в том случае, если

$$\begin{Bmatrix} R_{nm} \\ F_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{nm} \\ C_{nm} \end{Bmatrix} \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}.$$

Известно, что если решение уравнения Гельмгольца удовлетворяет условию излучения на бесконечности, то для него справедлива третья формула Грина во внешней области.

Рассмотрим вопрос о применимости леммы Лоренца в неограниченной области вне поверхности S и покажем, что для электромагнитных полей $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, возбуждаемых локальными токами $\mathbf{j}_1^{(\text{ст})}$ и $\mathbf{j}_2^{(\text{ст})}$ соответственно и удовлетворяющих на бесконечности условиям (5.23), в неограниченном пространстве справедлива лемма Лоренца

$$\oint\limits_S \{\mathbf{H}_1[\mathbf{E}_2\mathbf{n}] - \mathbf{H}_2[\mathbf{E}_1\mathbf{n}]\}\,dS = \int\limits_V \{(\mathbf{E}_2, \mathbf{j}_1) - (\mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2)\}\,d\tau, \tag{5.27}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, направленной внутрь поверхности; V — область, в которой токи тождественно не равны нулю.

Чтобы показать справедливость формулы (5.27) для полей, заданных в неограниченной области, окружим поверхность S сферой Σ_R радиуса R так, чтобы источники поля также находились внутри Σ_R. Область между поверхностью S и Σ_R обозначим T_R. Теперь применим лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ в области T_R. Имеем

$$\oint_S \{\mathbf{H}_1[\mathbf{E}_2\mathbf{n}] - \mathbf{H}_2[\mathbf{E}_1\mathbf{n}]\}\,dS + \oint_{\Sigma_R} \{\mathbf{H}_1[\mathbf{E}_2\mathbf{e}_r] - \mathbf{H}_2[\mathbf{E}_2\mathbf{e}_r]\}\,dS =$$

$$= \int_V \{(\mathbf{E}_2, \mathbf{j}_1) - (\mathbf{E}_1, \mathbf{j}_2)\}\,d\tau. \tag{5.28}$$

Рассмотрим интеграл по сфере Σ_R и покажем, что он стремится к нулю при $R \to \infty$. Учитывая, что поля удовлетворяют условию излучения (5.23), получим

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma_R} \{\mathbf{H}_1[\mathbf{E}_2\mathbf{e}_r] - \mathbf{H}_2[\mathbf{E}_1\mathbf{e}_r]\}\,ds =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \oint_{\Sigma_R} \left\{-\mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{e}_r[\mathbf{H}_2\mathbf{e}_r]] + \mathbf{H}_1 o\left(\frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{e}_r[\mathbf{H}_1\mathbf{e}_r]] - \mathbf{H}_2 o\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \oint_{\Sigma_R} \left\{\mathbf{H}_1 o\left(\frac{1}{r}\right) - \mathbf{H}_2 o\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dS = 0,$$

так как, согласно теореме 5.3, $\mathbf{H}_{1,2} = O\left(\frac{1}{r}\right)$ *при* $r \to \infty$. Переходя к пределу в (5.28) при $R \to \infty$, получим (5.27).

Заметим, что лемма Лоренца в неограниченном пространстве справедлива и в том случае, когда оба поля удовлетворяют на бесконечности условиям (5.24). Всюду в дальнейшем будем использовать условия излучения (5.23).

Из (5.27) можно получить интегральное представление для электромагнитного поля в неограниченном пространстве. Пусть $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ — электромагнитное поле электрического диполя с моментом $\mathbf{p}_0$, который расположен в точке M_0 и удовлетворяет на бесконечности условиям (5.23). Обозначим через D_e область, внешнюю по отношению к замкнутой поверхности S. Пусть $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ — решение однородных уравнений Максвелла в D_e, удовлетворяющее на бесконечности тем же условиям излучения (5.23). Применяя к полям $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ лемму Лоренца в D_e, получим

$$(\mathbf{E}(M_0), \mathbf{p}_0) = \oint_S \{\mathscr{H}(M, M_0)[\mathbf{E}\mathbf{n}] - \mathscr{E}(M, M_0)[n\mathbf{H}]\}\,dS,$$

$$M_0 \in D_e. \tag{5.29}$$

Отсюда сразу видно, что если поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ таково, что $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S = 0$

и $[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|_S=0$, то, поскольку вектор $\mathbf{p}_0$ — произвольный, $\mathbf{E}\equiv 0$ и $\mathbf{H}=\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\equiv 0$ всюду в области D_e.

Таким образом, электромагнитное поле без источников, имеющее равные нулю касательные к поверхности S составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и удовлетворяющее на бесконечности условиям излучения, тождественно равно нулю всюду в области D_e.

Аналогично, применяя в D_e лемму Лоренца к полю $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ и $\{\mathscr{E}_m, \mathscr{H}_m\}$ — полю точечного магнитного диполя, удовлетворяющему на бесконечности условию (5.23), получим

$$(\mathbf{H}(M_0),\ \mathbf{m}_0)=\oint_S \{\mathscr{H}_m[\mathbf{E}\mathbf{n}]-\mathscr{E}_m[\mathbf{n}\mathbf{H}]\}\,dS,\quad M_0\in D_e. \qquad (5.30)$$

Отметим еще раз, что в формулах (5.29) и (5.30) $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к S, внешняя по отношению к области D_e, т. е. направлена внутрь замкнутой поверхности S.

Построенные ранее поля диполей в однородном пространстве (см. формулы (2.46)—(2.49)) удовлетворяют на бесконечности условиям (5.23), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому из леммы Лоренца в D_e можно получить формулы Стрэттона — Чу, которые также справедливы в неограниченном пространстве, если электромагнитное поле удовлетворяет условиям излучения.

Покажем, например, как из формулы (5.30) можно вывести формулу Стрэттона — Чу для магнитного поля (при этом предполагаем, что $\mathbf{j}^{(\text{ст})}=0$).

Согласно (2.48), (2.49), поле магнитного диполя имеет вид

$$\mathscr{E}_m=[\operatorname{grad}\psi(M,\ P),\ \mathbf{m}_0],$$

$$\mathscr{H}_m=\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}[\operatorname{grad}\psi,\ \mathbf{m}_0],\quad \mathbf{m}_0=\mathbf{const}.$$

Так как

$$\operatorname{rot}[\operatorname{grad}\psi,\ \mathbf{m}_0]=-\mathbf{m}_0\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi+(\mathbf{m}_0,\ \nabla)\operatorname{grad}\psi=$$
$$=\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{m}_0\psi+\operatorname{grad}(\mathbf{m}_0,\ \operatorname{grad}\psi),$$

то подынтегральное выражение в (5.30) приводится к виду

$$\mathscr{H}_m[\mathbf{E},\ \mathbf{n}]-\mathscr{E}_m[\mathbf{n}\mathbf{H}]=-i\omega\varepsilon\psi\mathbf{m}_0[\mathbf{E},\ \mathbf{n}]+$$
$$+\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{grad}(\mathbf{m}_0,\ \operatorname{grad}\psi)[\mathbf{E},\ \mathbf{n}]-[\operatorname{grad}\psi,\ \mathbf{m}_0][\mathbf{n},\ \mathbf{H}]=$$
$$=-i\omega\varepsilon\psi\mathbf{m}_0[\mathbf{E},\ \mathbf{n}]-\frac{1}{i\omega\mu}[\mathbf{E},\ \operatorname{grad}(\mathbf{m}_0,\ \operatorname{grad}\psi)]\,\mathbf{n}+$$
$$+\mathbf{m}_0[\operatorname{grad}\psi[\mathbf{n}\mathbf{H}]].$$

Используя формулу

$$\operatorname{rot}\{\mathbf{E}(\mathbf{m}_0, \operatorname{grad}\psi)\}=(\mathbf{m}_0, \operatorname{grad}\psi)\operatorname{rot}\mathbf{E}-[\mathbf{E}, \operatorname{grad}(\mathbf{m}_0, \operatorname{grad}\psi)],$$

получим

$$\mathscr{H}_m[\mathbf{E}, \mathbf{n}]-\mathscr{E}_m[\mathbf{n}, \mathbf{H}]=\Big(\mathbf{m}_0\Big\{[\operatorname{grad}\psi[\mathbf{nH}]]-i\omega\varepsilon\psi[\mathbf{E}, \mathbf{n}]-$$
$$-\frac{1}{i\omega\mu}(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\operatorname{grad}\psi\Big\}\Big)+\frac{1}{i\omega\mu}(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\{\mathbf{E}(\mathbf{m}_0, \operatorname{grad}\psi)\}). \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в (5.30) и учитывая произвольность вектора $\mathbf{m}_0$ и равенство (теорема Стокса) $\oint\limits_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})\,dS=0$, получим формулу Стрэттона — Чу (при $\mathbf{j}^{(\text{ст})}=0$)

$$\mathbf{H}(M_0)=\oint\limits_S \{[\operatorname{grad}_M\psi[\mathbf{nH}]]+i\omega\varepsilon\psi[\mathbf{n}, \mathbf{E}]-(\mathbf{n}, \mathbf{H})\operatorname{grad}_M\psi\}\,dS_M. \quad (5.32)$$

Аналогично, используя явные выражения (2.46), (2.47) для поля электрического диполя, из (5.29) получаем формулу для электрического вектора

$$\mathbf{E}(M_0)=\oint\limits_S \{[\operatorname{grad}_M\psi[\mathbf{nE}]]-i\omega\mu\psi[\mathbf{n}, \mathbf{H}]-(\mathbf{n}, \mathbf{E})\operatorname{grad}_M\psi\}\,dS_M. \quad (5.33)$$

Формулы Стрэттона — Чу (как в ограниченной области, так и в неограниченной) показывают, что в среде с постоянными характеристиками электромагнитное поле является аналитическими функциями координат, т. е. в каждой точке разлагается в сходящийся ряд Тейлора. Отсюда же сразу вытекает, что если в некоторой области, имеющей ненулевой объем, электромагнитное поле обращается тождественно в нуль, то оно тождественно равно нулю всюду в области аналитичности.

Формулы (5.32) и (5.33) дают представление электромагнитного поля через значения его на поверхности S, причем необходимо знать как тангенциальные, так и нормальные составляющие $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности S.

Эти формулы можно преобразовать так, чтобы они содержали только касательные (тангенциальные) составляющие полей. Учитывая, что

$$\operatorname{grad}_M\psi(M, M_0)=-\operatorname{grad}_{M_0}\psi(M, M_0),$$

перепишем (5.32) и (5.33) в виде

$$\mathbf{E}(M_0)=-\operatorname{rot}_{M_0}\oint\limits_S \mathbf{j}_m(M)\psi(M, M_0)\,dS_M-$$
$$-i\omega\mu\oint\limits_S \mathbf{j}_e(M)\psi(M, M_0)\,dS+\operatorname{grad}_{M_0}\oint\limits_S (\mathbf{n}, \mathbf{E})\psi\,dS;$$

$$\mathbf{H}(M_0) = -\operatorname{rot}_{M_0} \oint_S \mathbf{j}_e(M)\psi(M, M_0)\,dS_M +$$

$$+ i\omega\varepsilon \oint_S \mathbf{j}_m(M)\psi(M, M_0)\,dS + \operatorname{grad}_{M_0} \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{H})\psi\,dS,$$

где $\mathbf{j}_e = [\mathbf{n}, \mathbf{H}]$ — электрический ток на S; $\mathbf{j}_m = [\mathbf{n}, \mathbf{E}]$ — магнитный ток на S. Выражения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно упростить, если учесть, что они связаны между собой уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}.$$

Применяя к (5.33) и (5.32) операцию rot_{M_0}, получим

$$\mathbf{E}(M_0) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}_{M_0} \frac{1}{i\omega\varepsilon} \oint_S \mathbf{j}_e\psi\,dS - \operatorname{rot}_{M_0} \oint_S \mathbf{j}_m\psi\,dS,$$

$$\mathbf{H}(M_0) = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}_{M_0} \left\{\frac{1}{i\omega\mu} \oint_S \mathbf{j}_m\psi\,dS\right\} - \operatorname{rot}_{M_0} \oint_S \mathbf{j}_e\psi\,dS.$$

Эти формулы содержат только значения тангенциальных составляющих полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности S.

Заметим, что по координатам точки M_0 справедливо соотношение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}_{M_0} \oint_S \mathbf{j}\psi\,dS = \omega^2\varepsilon\mu \oint_S \mathbf{j}\psi\,dS + \operatorname{grad} \oint_S \mathbf{j}\psi\,dS,$$

где под вектором $\mathbf{j}$ можно понимать либо $\mathbf{j}_e$, либо $\mathbf{j}_m$. Поэтому формулы для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно переписать в виде

$$\mathbf{E}(M_0) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_e - i\omega\mu\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_m,$$

$$\mathbf{H}(M_0) = -i\omega\varepsilon\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_e + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_m, \quad M_0 \in D_e,$$

где

$$\mathbf{\Pi}_e(M_0) = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \oint_S \mathbf{j}_e(M)\psi(M, M_0)\,dS -$$

$$- \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu} \operatorname{rot}_{M_0} \oint_S \mathbf{j}_m(M)\psi(M, M_0)\,dS$$

— электрический вектор Герца,

$$\mathbf{\Pi}_m(M_0) = -\frac{1}{i\omega\mu} \oint_S \mathbf{j}_m(M)\psi(M, M_0)\,dS -$$

$$- \frac{1}{\omega^2\varepsilon\mu} \oint_S \operatorname{rot}_{M_0}(\mathbf{j}_e(M)\psi(M, M_0))\,dS$$

— магнитный вектор Герца.

С помощью полученных соотношений можно, зная электромагнитное поле, найти вектор Герца, который создает данное поле. Они же позволяют по заданным на гладкой замкнутой поверхности S значениям касательных составляющих векторов **E** и **H** найти выражение электрического (магнитного) вектора Герца, представляющего данное поле внутри S. Одновременно из полученных результатов следует, что для представления электромагнитного поля в замкнутой области, свободной от источников, достаточно лишь одного электрического или магнитного вектора Герца.

Сделаем еще несколько замечаний относительно условий излучения. Поскольку векторы **E** и **H** связаны между собой уравнениями Максвелла, условия (5.23) можно преобразовать, сведя их к условиям для одного из векторов.

В сферической системе координат условие (5.23) имеет вид

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H_\varphi + o\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$E_\varphi = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H_\theta + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{5.34}$$

Из уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$, учитывая оценки (5.17), находим

$$i\omega\mu H_\theta = -\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$i\omega\mu H_\varphi = \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{5.35}$$

Подставляя (5.35) в (5.34), получаем условия только для компонент вектора **E**:

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_\theta = o\left(\frac{1}{r}\right);$$
$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_\varphi = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{5.36}$$

Аналогично, используя уравнение $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$, из (5.34) получаем условие для компонент вектора **H**:

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, H_\theta = o\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, H_\varphi = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{5.37}$$

Так как при выводе условий (5.36) и (5.37) из (5.34) использовались только уравнения Максвелла и общие свойства электромагнитных полей, выраженные соотношениями (5.17) и (5.18), то все три типа условий излучения в бесконечности — (5.34), (5.36), (5.37) — эквивалентны и из любого из них следует два остальных.

При использовании условия излучения в форме (5.23) следует иметь в виду, что если электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ удовлетворяет на бесконечности условию

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{e}_r\,[\mathbf{e}_r\mathbf{H}]] + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \sigma = 0,$$

то комплексно-сопряженное поле $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$ удовлетворяет тому же условию:

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}^*] = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{e}_r\,[\mathbf{e}_r\mathbf{H}^*]] + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Этому не следует удивляться, поскольку поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$ удовлетворяют различным системам уравнений. Особенностью же системы уравнений Максвелла в отличие от уравнения Гельмгольца является то, что сама форма системы уравнений несет информацию о выбранной гармонической зависимости от времени $\{e^{-i\omega t}$ или $e^{i\omega t}\}$.

Отметим еще раз, что в среде с поглощением (комплексное k в скалярном случае и $\sigma \neq 0$ в электромагнитном) ограниченное на бесконечности волновое поле экспоненциально убывает на бесконечности. Поэтому применимость формул Грина и леммы Лоренца к таким полям в неограниченной области очевидна.

Важной характеристикой электромагнитного поля в неограниченной области является угловое распределение напряженности электрического поля в дальней зоне. Оно описывается диаграммой направленности по полю. Как было показано ранее, напряженность электрического поля в среде без потерь убывает на бесконечности как $1/r$. Поэтому диаграмма направленности обычно определяется соотношением

$$\mathbf{D}(\theta, \varphi) = \lim_{r\to\infty} e^{-ik_r r} r\mathbf{E}(r, \theta, \varphi), \qquad (5.38)$$

где r, θ, φ — сферические координаты точки наблюдения в дальней зоне.

Диаграмма направленности электромагнитного поля, создаваемого в однородном пространстве системой сторонних токов $\mathbf{j}^{(\text{ст})}$, заданных в объеме V, вычисляется с помощью введения вектора Герца и равна

$$\mathbf{D}(\theta, \varphi) = \frac{\omega\mu}{4\pi i}\,[[\mathbf{N}, \mathbf{e}_r]\,\mathbf{e}_r], \qquad (5.39)$$

где

$$\mathbf{N}=\int_V \mathbf{j}^{(\text{ст})}(P)\, e^{-ik\rho\cos\theta_{MP}} dV_P. \qquad (5.40)$$

В формуле (5.40) ρ — расстояние от начала системы координат до точки интегрирования P, а угол θ_{PM} — наименьший угол между лучами, выходящими из начала координат в точку интегрирования P, и направлением наблюдениям (θ, φ).

В том случае, когда электромагнитное поле вычисляется через интегральные представления поля по некоторой поверхности S, выражение для диаграммы направленности также может быть легко получено. Воспользуемся представлением электрического поля

$$\mathbf{E}(M)=-\operatorname{rot}_M \oint_S \mathbf{j}_m(P)\psi(M, P)\, dS_P+$$

$$+\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot}\operatorname{rot}_M \oint_S \mathbf{j}_e(P)\psi(M, P)\, dS_P.$$

Вновь выделим величины ρ и θ_{PM}. Пусть

$$R_{MP}=\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\sin\theta_{PM}},$$

$$\mathbf{N}(\theta, \varphi)=\oint_S \mathbf{j}_e e^{-ik\rho\cos\theta_{PM}} dS_P,$$

$$\mathbf{M}(\theta, \varphi)=\oint_S \mathbf{j}_m e^{-ik\rho\cos\theta_{PM}} dS_P.$$

Тогда диаграмма направленности в этом случае равна

$$\mathbf{D}(\theta, \varphi)=\frac{ik}{4\pi}\left\{[\mathbf{M}, \mathbf{e}_r]+[[\mathbf{N}, \mathbf{e}_r]\mathbf{e}_r]\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right\}.$$

§ 6. Условия на ребре

В теории дифракции электромагнитных волн большой интерес представляют исследования задач дифракции на телах, имеющих ребра или кромки. В теории краевых задач для уравнений в частных производных известно, что в областях, границы которых имеют ребра, кромки или угловые точки, для однозначной разрешимости краевых задач необходимо сформулировать условия, определяющие поведение решения в окрестности особой точки границы. Часто таким дополнительным условием может служить требование ограниченности решения краевой задачи в окрестности особой точки границы. Однако в случае задач дифракции требование ограниченности решения может оказаться слишком жестким, поскольку не будет существовать решения, ограниченного в окрестности ребер или кромок граничных поверхностей. Поэтому возникает вопрос о формулировке условий, обеспечивающих однозначную разрешимость данного класса задач дифракции. Условия, описывающие поведение волнового поля в окрестности ребер и кромок, называются *условиями на ребре*.

Рассмотрим вначале поведение скалярного поля $u(x, y, z)$ в окрестности ребра двугранного угла раствора α. Будем исходить из естественного физического положения, состоящего в том, что при отсутствии внешних источников на ребре поток энергии через любую поверхность, охватывающую ребро, стремится к нулю при стягивании этой поверхности к ребру. Окружим ребро поверхностью кругового цилиндра радиуса ρ, ось цилиндра направим вдоль ребра клина. Тогда сформулированное выше условие можно записать в виде

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{Im} \oint_{C_\rho} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dl = 0, \tag{6.1}$$

где C_ρ — часть окружности радиуса ρ, заключенная в угле $2\pi-\alpha$. Условие (6.1) выполняется равномерно вдоль ребра клина. Условие (6.1) будет выполнено, если в окрестности ребра поле u растет не быстрее, чем ρ^σ, где $\sigma > -{}^1\!/_2$.

Для определения величины показателя σ можно провести исследование поведения решения задачи дифракции в окрестности ребра, разлагая функцию в ряд по степеням ρ. Пусть ребро клина совпадает с осью z цилиндрической системы координат, полярную ось направим вдоль одной из граней клина; тогда уравнение Гельмгольца в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho^2 k^2 u = 0. \tag{6.2}$$

Рассмотрим задачу при граничных условиях первого или второго рода. Тогда на гранях клина или

$$u(\rho, \varphi=0, z)=0, \quad u(\rho, \varphi=2\pi-\alpha, z)=0, \tag{6.3}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi-\alpha} = 0. \tag{6.4}$$

Будем искать функцию u в виде ряда

$$u = \rho^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi, z)\rho^n, \quad a_0 \neq 0, \quad \sigma > -\frac{1}{2}. \tag{6.5}$$

Подставляя разложение (6.5) в уравнение (6.2) и приравнивая нулю коэффициенты при ρ^σ, для a_0 получим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial\varphi^2}+\sigma^2 a_0=0 \tag{6.6}$$

с граничными условиями

$$a_0(0)=a_0(2\pi-\alpha)=0 \tag{6.7}$$

или

$$\left.\frac{\partial a_0}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial a_0}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=2\pi-\alpha}=0, \tag{6.8}$$

откуда

$$\sigma=\frac{\pi n}{2\pi-\alpha}, \tag{6.9}$$

где $n=\pm1, \pm2,\ldots$ для первой краевой задачи и $n=0, \pm1,\ldots$ для второй. Полученные значения σ удовлетворяют условию $\sigma>-1/2$ лишь при неотрицательных n. Нас интересуют те значения n, при которых поле обладает особенностью. Как легко видеть, при

$$\sigma=\frac{\pi}{2\pi-\alpha} \tag{6.10}$$

в случае обеих задач производная $\frac{\partial u}{\partial\rho}$ имеет особенность, а само решение ограничено. При этом условие (6.1) выполнено.

Из проведенного исследования следует, что в скалярной задаче дифракции «условие на ребре» можно сформулировать в виде требования ограниченности решения в окрестности ребра и условия

$$\lim_{\rho\to0}(\rho\,\mathrm{grad}\,u)=0. \tag{6.11}$$

Отметим также, что условия на ребре можно сформулировать в форме требования интегрируемости в окрестности ребра решения и его производной по ρ со степенью $q<2$.

Рассмотрим условия на ребре для электромагнитных задач. Будем опять исследовать случай, когда на ребре отсутствуют сторонние источники поля. Тогда естественным физическим условием, определяющим поведение электромагнитных полей в окрестности ребра, также является требование, чтобы поток энергии через любую поверхность S_ρ, охватывающую ребро, стремился к нулю при стягивании этой поверхности к ребру:

$$\lim_{\rho\to0}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\oint_{S_\rho}[\mathbf{EH}^*]\,\mathbf{n}\,d\sigma\right\}=0. \tag{6.12}$$

Вновь рассмотрим поведение полей вблизи ребра клина, причем грани клина будем считать идеально проводящими. Уравнения Максвелла запишем в цилиндрической системе координат ρ, φ, z, где ось z направлена вдоль ребра клина, а полярная ось — вдоль одной из граней двугранного угла. Электромагнитное поле в данном случае можно представить в виде суперпозиции полей, порождаемых двумя функциями Боргниса: $u(\rho, \varphi, z)$ и $v(\rho, \varphi, z)$. Функция $u(\rho, \varphi, z)$ порождает поле электрического типа ($H_z \equiv 0$), а функция $v(\rho, \varphi, z)$ — поле магнитного типа ($E_z \equiv 0$). Функции u и v удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а требование обращения в нуль касательных составляющих электрического поля на гранях приводит к следующим краевым условиям для функций Боргниса:

$$u(\rho, \varphi=0, z) = u(\rho, \varphi=2\pi-\alpha, z) = 0; \tag{6.13}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right|_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi=2\pi-\alpha}} = 0. \tag{6.14}$$

Учитывая выражение касательных составляющих полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через функции Боргниса, получаем, что условие (6.12) приводит к условию (6.1) для функций u и v. Таким образом, для функций Боргниса u и v получаем скалярные краевые задачи, исследованные выше.

Представив функции u и v в виде степенных разложений в окрестности ребра

$$u(\rho, \varphi, z) = \rho^{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi, z)\rho^n, \quad \sigma_1 > -\frac{1}{2}; \tag{6.15}$$

$$v(\rho, \varphi, z) = \rho^{\sigma_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\varphi, z)\rho^n, \quad \sigma_2 > -\frac{1}{2}, \tag{6.16}$$

аналогично предыдущему найдем, что наименьшие значения σ_1 и σ_2, при которых имеет место соотношение (6.1), равны

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\pi}{2\pi-\alpha}. \tag{6.17}$$

Таким образом, в окрестности ребра клина могут иметь особенность только компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, лежащие в плоскости, перпендикулярной ребру, причем порядок особенности $1-\sigma$. Остальные компоненты векторов электромагнитного поля в окрестности ребра ограничены.

Выясним теперь вопрос о возможной особенности электромагнитных полей в окрестности криволинейного ребра идеально проводящего тела. Рассмотрим задачу дифракции на плоском экране, кромка которого представляет собой достаточно гладкую кривую C, лежащую в плоскости $z=0$. Уравнение кривой C запишем в естественной системе координат, обозначив через

s длину дуги кривой C, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки P_0 на кромке. В векторной форме уравнение кривой имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_0(s), \tag{6.18}$$

или в координатной записи

$$x = u(s), \quad y = v(s), \quad z = 0. \tag{6.19}$$

В окрестности кромки экрана введем локальную криволинейную систему координат $\{\rho, \psi, s\}$, где s — координата точки $P(x, y, 0)$, лежащей на кромке экрана; ρ и ψ — полярные координаты в плоскости, нормальной к кромке, с полюсом в точке P и полярной осью, направленной по главной нормали $\mathbf{n}$ к кривой C в точке P. Радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ в локальной системе координат можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_0(s) + \rho\mathbf{n}(s)\cos\psi + \rho\sin\psi\,\mathbf{i}_z \tag{6.20}$$

или

$$\begin{aligned} x &= u(s) - \rho\frac{\partial v}{\partial s}\cos\psi, \\ y &= v(s) - \rho\frac{\partial u}{\partial s}\sin\psi, \\ z &= \rho\sin\psi. \end{aligned} \tag{6.21}$$

При этом мы учли, что

$$\mathbf{n}(s) = [\mathbf{i}_z\mathbf{t}], \text{ а } \mathbf{t} = \dot{\mathbf{R}}_0(s). \tag{6.22}$$

Отметим, что система криволинейных координат $\{\rho, \psi, s\}$ является ортогональной, поскольку координатные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \mathbf{n}(s)\cos\psi + \mathbf{i}_z\sin\psi, \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = -\rho\mathbf{n}(s)\sin\psi + \mathbf{i}_z\rho\cos\psi, \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{t} - \rho\varkappa\mathbf{t}\cos\psi \end{aligned} \tag{6.23}$$

ортогональны между собой:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) = 0. \tag{6.24}$$

В формуле (6.23) через $\varkappa(s)$ обозначена кривизна кривой C в точке P. Коэффициенты Ляме криволинейной системы координат таковы:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1 - \rho\varkappa\cos\psi. \tag{6.25}$$

В введенной системе координат в уравнениях Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \qquad (6.26)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

векторная операция rot выражается в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} & \dfrac{\partial}{\partial s} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \qquad (6.27)$$

Из формул (6.25) следует, что при $\rho \to 0$ (6.27) отличается от соответствующего выражения в цилиндрической системе координат на величину порядка $O(\rho)$. Отсюда следует, что в окрестности криволинейного ребра порядок особенности электромагнитного поля тот же, что и в случае прямолинейного ребра, т. е. особенность вида $\rho^{-1/2}$ могут иметь лишь компоненты поля, лежащие в плоскости, которая перпендикулярна ребру.

Заметим, наконец, что уравнения Максвелла допускают формальные решения, не удовлетворяющие условию на ребре.

Мы рассмотрели условия на кромке плоского бесконечно тонкого экрана. Аналогично можно исследовать задачи дифракции на произвольных поверхностях с гладкими ребрами. При этом требование отсутствия потока энергии от ребер позволяет определить особенности компонент электромагнитных полей вблизи ребер.

Требование отсутствия потока энергии от кромок и ребер тела является достаточно универсальным принципом, который позволяет исследовать поведение полей в окрестности особых точек поверхности тела, помещенного не только в однородную среду, но и в среду с пространственно неоднородными характеристиками. В этих случаях компоненты полей также могут иметь особенность, характер которой определяется не только геометрией поверхности, но и, вообще говоря, свойствами среды (см., например: *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974). В частном случае плоского идеально проводящего экрана, лежащего на границе раздела двух различных диэлектрических сред, поведение полей не зависит от свойств сред и особенности полей такие же, как в однородной среде.

Физический принцип, лежащий в основе условий на ребре и заключающийся в требовании отсутствия внешних излучающих источников на ребре, позволяет использовать при доказательстве теорем единственности задач дифракции на телах с ребрами и кромками закон сохранения энергии.

§ 7. Теоремы единственности

Рассмотрим вопросы единственности решений задач дифракции, т. е. внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца и системы уравнений Максвелла.

Пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова. Обозначим через D область, расположенную внутри поверхности S; D_e — область вне поверхности S.

Мы не будем стремиться сформулировать и доказать теоремы единственности при предельно слабых ограничениях. Будем использовать достаточные условия, обеспечивающие единственность решений рассматриваемых задач, естественные с физической точки зрения. Всюду в этом параграфе предполагается, что поставленные задачи имеют решения, которые допускают применение формул Грина в скалярном случае и леммы Лоренца в электромагнитном случае.

Исследование единственности решений начнем с задачи дифракции электромагнитной волны на импедансной поверхности в проводящей среде ($\sigma \neq 0$). Пусть на поверхности S задана непрерывная функция $\zeta(P)$. Поставим следующую задачу: найти в области D_e решение системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}^{(cт)}, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H},$$

удовлетворяющее граничному условию на поверхности S

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] - \zeta [\mathbf{n} [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_S = f(P)|_S, \tag{7.2}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности S, и условиям на бесконечности, сформулированным в предыдущем параграфе.

Теорема 7.1. *Если* $\operatorname{Re} \zeta \leqslant 0$ *и среда проводящая*: $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}$, $\sigma \neq 0$, — *то решение краевой задачи* (7.1)—(7.2), *ограниченное на бесконечности, единственно.*

Доказательство. Задача линейная, поэтому достаточно показать, что ограниченное на бесконечности решение однородной задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E} \text{ в } D_e,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] - \zeta [\mathbf{n} [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_S = 0$$

есть тождественный нуль.

Введем комплексно-сопряженное поле $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$. Оно также ограничено на бесконечности и является решением следующей задачи:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^* = i\omega\varepsilon^* \mathbf{E}^* \text{ в } D_e,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^* = -i\omega\mu \mathbf{H}^*$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}^*] - \zeta^* [\mathbf{n} [\mathbf{n}, \mathbf{H}^*]]|_S = 0.$$

Окружим поверхность S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R. Область между S и Σ_R обозначим через T_R. Применим к полям $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$ в области T_R лемму Лоренца:

$$\oint_S \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{n} + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{n}\} dS + \int_{\Sigma_R} \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{e}_r + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{e}_r\} dS =$$

$$= i\omega \int_{T_R} (\varepsilon - \varepsilon^*) |\mathbf{E}|^2 d\tau. \tag{7.3}$$

Согласно граничным условиям, на поверхности S имеем

$$\oint_S \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{n} + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{n}\} dS = \oint_S (\zeta + \zeta^*) |[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|^2 dS.$$

Так как ограниченные на бесконечности решения уравнений Максвелла в проводящей среде ($\sigma \neq 0$) экспоненциально убывают на бесконечности, то

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{\Sigma} \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{e}_r + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{e}_r\} dS = 0,$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{T_R} (\varepsilon - \varepsilon^*) |\mathbf{E}|^2 d\tau = \int_{D_e} (\varepsilon - \varepsilon^*) |\mathbf{E}|^2 d\tau,$$

причем несобственный интеграл по области D_e является сходящимся. Следовательно, переходя к пределу при $R \to \infty$, из (7.3) находим

$$\oint_S \operatorname{Re} \zeta |[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|^2 dS - \omega \int_{D_e} \operatorname{Im} \varepsilon |\mathbf{E}|^2 d\tau = 0. \tag{7.4}$$

Поскольку $\operatorname{Re} \zeta \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon = \frac{\sigma}{\omega} > 0$, из (7.4) сразу получаем:

$$\mathbf{E} \equiv 0 \text{ всюду в } D_e,$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \text{ всюду в } D_e.$$

Таким образом, ограниченное на бесконечности решение задачи (7.1)—(7.2) единственно.

Следствием доказанной теоремы является приведенная ниже теорема.

Теорема 7.2. *В случае проводящей среды* ($\sigma \neq 0$) *ограниченное на бесконечности решение задачи*

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}^{(\text{ст})} \text{ в } D_e,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S = f(P)|_S$$

единственно.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 7.3. *При комплексном k решение задачи*

$$\Delta u + k^2 u = -f \text{ в } D_e,$$
$$u|_S = g|_S,$$

ограниченное на бесконечности, единственно.

Рассмотрим теперь задачу (7.1)—(7.2) в случае непроводящей среды ($\sigma = 0$, ε — действительное).

Теорема 7.4. *Если* $\sigma = 0$ *и* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, *то решение задачи* (7.1)—(7.2), *удовлетворяющее на бесконечности условию излучения*

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r, \mathbf{H}]] = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

единственно.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \text{ в } D_e,$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] - \zeta[\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_S = 0,$$
$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}] + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r \mathbf{H}]] = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Введем комплексно-сопряженное поле $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$, являющееся решением следующей краевой задачи:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^* = i\omega\varepsilon\mathbf{H}^*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^* = -i\omega\mu\mathbf{H}^* \text{ в } D_e,$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}^*] - \zeta^*[\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{H}^*]]|_S = 0,$$
$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}^*] + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r, \mathbf{H}^*]] = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Окружим S сферой Σ_R радиуса R и обозначим область между S и Σ_R через T_R. Применив лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ и $\{\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*\}$ в области T_R, получим

$$\oint_S \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{n} + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{n}\}\,dS + \oint_{\Sigma_R} \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{e}_r + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{e}_r\}\,ds = 0. \tag{7.5}$$

Используя граничные условия, преобразуем интеграл по S:

$$\oint_S \{\mathbf{E}\mathbf{H}^*\mathbf{n} + \mathbf{E}^*\mathbf{H}\mathbf{n}\}\,dS = -\oint_S (\zeta + \zeta^*)|[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|^2\,dS =$$
$$= -2\oint_S \operatorname{Re}\zeta\,|[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|^2\,dS.$$

Согласно условиям на бесконечности,

$$\oint\limits_{\Sigma_R} \{\mathbf{EH^*e}_r + \mathbf{E^*He}_r\} dS = 2 \oint\limits_{\Sigma_R} \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, |[\mathbf{e}_r \mathbf{H}]|^2 + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right\} dS.$$

Переходя в (7.5) к пределу при $R \to \infty$, найдем

$$\lim_{R\to\infty} \oint\limits_{\Sigma_R} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, |[\mathbf{e}_r,\ \mathbf{H}]|^2\, dS - \oint\limits_{S} \operatorname{Re}\zeta\, |[\mathbf{n},\ \mathbf{H}]|^2 dS = 0 \qquad (7.6)$$

(предел существует в силу теоремы 7.3). Если $\operatorname{Re}\zeta < 0$, то из (7.6) получаем

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{H}]|_S = 0$$

и из граничных условий $[\mathbf{n},\ \mathbf{E}]|_S = 0$. Следовательно, согласно лемме Лоренца, $\mathbf{E} \equiv 0$, $\mathbf{H} \equiv 0$ всюду в D_e.

Замечание. Если имеет место поглощение, то для существования ненулевого решения нужны источники.

Если же $\operatorname{Re}\zeta = 0$, то из (7.6) находим

$$\lim_{R\to\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \oint\limits_{\Sigma_R} |[\mathbf{e}_r,\ \mathbf{H}]|^2 dS = 0.$$

Используя лемму 5.3, отсюда получаем

$$\mathbf{H} \equiv 0,\quad \mathbf{E} \equiv 0 \text{ всюду вне сферы } \Sigma_{R_0},$$

где Σ_{R_0} — сфера минимального радиуса, содержащая поверхность S внутри себя. В силу аналитичности $\mathbf{E} \equiv 0$, $\mathbf{H} \equiv 0$ всюду в D_e. Следовательно, решение задачи (7.1)—(7.2), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, единственно.

Аналогично докажем теорему единственности для уравнения Гельмгольца в среде без потерь.

Теорема 7.5. *Если* $\operatorname{Im} h \leq 0$, *то решение краевой задачи*

$$\Delta u + k^2 u = -f \text{ в } D_e,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = g(P)|_S,$$

удовлетворяющее на бесконечности условию излучения

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

единственно.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } D_e,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Введем комплексно-сопряженное решение u^*, удовлетворяющее следующей краевой задаче (k — действительное):

$$\Delta u^* + k^2 u^* = 0 \text{ в } D_e,$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} + h^* u^* |_S = 0,$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} + iku^* = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Пусть Σ_R — сфера радиуса R, содержащая S внутри себя, T_R — область между S и Σ_R. Применим вторую формулу Грина к функциям u и u^* в области T_R, имеем

$$\oint_S \left\{u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS + \oint_{\Sigma_R} \left\{u \frac{\partial u^*}{\partial r} - u^* \frac{\partial u}{\partial r}\right\} dS = 0. \qquad (7.7)$$

Согласно граничным условиям,

$$\oint_S \left\{u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n}\right\} dS = \oint_S (h - h^*) |u|^2 dS.$$

При достаточно больших R, учитывая граничные условия и оценку (5.7) для решения уравнения Гельмгольца, получим

$$\oint_{\Sigma_R} \left\{u \frac{\partial u^*}{\partial r} - u^* \frac{\partial u}{\partial r}\right\} dS = \oint_S \left\{-2ik|u|^2 + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right\} dS.$$

Следовательно, переходя в (7.7) к пределу при $R \to \infty$, имеем

$$\oint_S \operatorname{Im} h\, |u|^2 dS - k \lim_{k \to \infty} \oint_{\Sigma_R} |u|^2 dS = 0. \qquad (7.8)$$

Если $\operatorname{Im} h < 0$ $(k > 0)$, то из (7.8) находим $u|_S \equiv 0$. Согласно граничным условиям,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$$

и по третьей формуле Грина получаем $u \equiv 0$ в D_e. Если $\operatorname{Im} h \equiv 0$, то из (7.8) имеем

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{\Sigma_R} |u|^2 dS = 0, \quad k > 0.$$

Используя лемму 5.2, отсюда находим, что $u \equiv 0$ вне сферы Σ_{R_0}, где R_0 — минимальный радиус сферы, содержащей поверхность S внутри себя. Учитывая аналитичность решения в D_e, отсюда заключаем, что $u \equiv 0$ всюду в D_e.

Следовательно, поставленная краевая задача имеет единственное решение.

Аналогично доказывается единственность решения первой внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца в среде без поглощения (k — действительное).

Теорема 7.6. *Решение краевой задачи*

$$\Delta u + k^2 u = -f \text{ в } D_e,$$

$$u|_S = g(P)|_S,$$

удовлетворяющее на бесконечности условию излучения

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty,$$

единственно.

Более сложной является задача определения электромагнитного поля в том случае, когда поле существует и внутри поверхности S, а на самой поверхности S выполняются условия сопряжения. Задачи такого типа будем называть *задачами дифракции на прозрачном теле.*

Исследование единственности решения задачи дифракции на прозрачном теле начнем с более простого скалярного случая. Пусть в неограниченном пространстве расположено тело D, ограниченное замкнутой поверхностью S. Будем предполагать, что среда в области D неоднородна и распространение волнового поля в ней описывается уравнением

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = -f,$$

где p — непрерывно дифференцируемая функция; q — непрерывная в $\bar{D}$ функция. Область вне поверхности S обозначим D_e. Будем также считать, что поле в области D_e описывается уравнением

$$\operatorname{div}(p_e \operatorname{grad} u) + q_e u = -f_e,$$

где p_e — непрерывно дифференцируемая в D_e функция, q_e — непрерывная в D_e функция. Пусть вне некоторой сферы Σ, содержащей поверхность S внутри себя, обе эти функции гладко переходят в положительные постоянные:

$$p_e(M) = p_e^0 > 0, \quad q_e(M) = q_e^0 > 0.$$

Обозначим волновое поле в области D через $u(M)$, в области D_e — через $u_e(M)$. Тогда для определения поля во всем пространстве получаем следующую задачу: найти функции $u(M)$ и $u_e(M)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = -f \text{ в } D, \\ \operatorname{div}(p_e \operatorname{grad} u_e) + q_e u_e = -f_e \text{ в } D_e, \end{gathered} \tag{7.9}$$

условиям сопряжения на поверхности S

$$u|_S = u_e|_S, \tag{7.10}$$

$$p\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = p_e\frac{\partial u_e}{\partial n}\bigg|_S$$

и условию излучения на бесконечности

$$\frac{\partial u_e}{\partial r} - iku_e = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty, \tag{7.11}$$

где $k^2 = \dfrac{q_e^0}{p_e^0}$. При этом предполагается, что коэффициенты уравнений (7.9) действительные, т. е. поглощение в среде отсутствует.

Теорема 7.7. *Решение задачи* (7.9)—(7.11) *единственно.*

Доказательство. Поскольку задача (7.9)—(7.11) линейна, достаточно показать, что соответствующая однородная задача

$$\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) + qu = 0 \text{ в } D,$$

$$\operatorname{div}(p_e\operatorname{grad} u_e) + q_e u_e = 0 \text{ в } D_e,$$

$$u|_S = u_e|_S,$$

$$p\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = p_e\frac{\partial u_e}{\partial n}\bigg|_S,$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial r} - iku_e = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty$$

имеет только тривиальное решение.

Наряду с функциями u и u_e будем рассматривать функции u^* и u_e^* (комплексно-сопряженные функции). Они удовлетворяют тем же однородным уравнениям и граничным условиям, но условие на бесконечности имеет вид

$$\frac{\partial u_e^*}{\partial r} + iku_e^* = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty.$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям u и u^* в области D, получим

$$\oint\limits_S\left\{pu\frac{\partial u^*}{\partial n} - pu^*\frac{\partial u}{\partial n}\right\}dS = 0, \tag{7.12}$$

где n — единичная нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к области D.

Пусть Σ_R — сфера достаточно большого радиуса R, содержащая область D внутри себя. Применяя формулу Грина к функциям u_e и u_e^* в области между S и Σ_R, получаем

$$\oint_S \left\{p_e u_e \frac{\partial u_e^*}{\partial n_e} - p_i u_e^* \frac{\partial u_e}{\partial n_e}\right\} dS + \oint_{\Sigma_R} \left\{p_e^0 u_e^* \frac{\partial u_e^*}{\partial r} - p_e^0 u_e^* \frac{\partial u_e}{\partial r}\right\} dS = 0, \tag{7.13}$$

где $\mathbf{n}_e$ — единичная нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к области D_e, $\mathbf{n}_e = -\mathbf{n}$. Складывая (7.12) и (7.13) и учитывая условия сопряжения на S, получаем

$$\oint_{\Sigma_R} p_e^0 \left\{u_e \frac{\partial u_e^*}{\partial r} - u_e^* \frac{\partial u_e}{\partial r}\right\} dS = 0. \tag{7.14}$$

Переходя теперь в (7.14) к пределу при $R \to \infty$ и используя условия на бесконечности, найдем

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{\Sigma_R} |u_e|^2 dS = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 5.2, имеем, что

$$u_e \equiv 0 \text{ вне сферы } \Sigma.$$

Оператор

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$$

с условиями сопряжения (7.10) имеет внутри Σ фундаментальное решение, поэтому, используя третью формулу Грина, найдем

$$u_e \equiv 0 \text{ в } \bar{D}_e,$$

$$u \equiv 0 \text{ в } \bar{D}.$$

Следовательно, однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, а решение задачи (7.9)—(7.11) единственно.

Теперь перейдем к исследованию задачи дифракции на прозрачном теле в электромагнитном случае. Пусть в однородном неограниченном пространстве расположено тело D, ограниченное замкнутой поверхностью S, причем параметры среды (ε_1, μ_1) в области D отличаются от параметров (ε_2, μ_2) в неограниченном пространстве. Электромагнитное поле в области D обозначим через $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$, поле вне поверхности S (в области D_e) — через $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$.

Для определения электромагнитного поля во всем пространстве нужно решить следующую краевую задачу для системы уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 &= -i\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_1^{(\text{ст})} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 &= i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1 \end{aligned}\right\} \text{ в } D; \tag{7.15}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 &= -i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_2^{(\text{ст})} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 &= i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2 \end{aligned}\right\} \text{ в } D_e; \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_1]|_S &= [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2]|_S; \\ [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1]|_S &= [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2]|_S; \end{aligned} \tag{7.17}$$

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}_2] + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\,[\mathbf{e}_r\,[\mathbf{e}_r, \mathbf{H}_2]] = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty. \tag{7.18}$$

Подробно рассмотрим случай постоянных сред при наличии проводимости в области D:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + i\,\frac{\sigma}{\omega}, \quad \sigma \neq 0,$$

где μ_1, μ_2, ε — действительные.

Теорема 7.8. *Решение задачи* (7.15)—(7.18) *единственно.*

Доказательство. Задача линейная, поэтому опять достаточно показать, что соответствующая однородная краевая задача

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1 \text{ в } D,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2 \text{ в } D_e,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1]|_S = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2]|_S,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1]|_S = [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2]|_S,$$

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}_2] + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\,[\mathbf{e}_r, [\mathbf{e}_r, \mathbf{H}_2]] = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty$$

имеет только тривиальное решение.

Наряду с полями $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $[\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2]$ будем рассматривать комплексно-сопряженные электромагнитные поля $\{\mathbf{E}_1{}^*\mathbf{H}_1{}^*\}$ и $\{\mathbf{E}_2{}^*\mathbf{H}_2{}^*\}$, которые удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1^* = +i\omega\varepsilon_1^* \mathbf{E}_1^*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1^* = -i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1^* \text{ в } D,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2^* = +i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_2^*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_2^* = -i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2^* \text{ в } D_e,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1^*]|_S = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2^*]|_S,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1^*]|_S = [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2^*]|_S,$$

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{E}_2^*] + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\,[\mathbf{e}_r\,[\mathbf{e}_r \mathbf{H}_2^*]] = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Применяя к полям $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\{\mathbf{E}_1^*, \mathbf{H}_1^*\}$ в области D лемму Лоренца, имеем

$$\oint_S \{\mathbf{E}_1\mathbf{H}_1^*\mathbf{n}_1 + \mathbf{E}_1^*\mathbf{H}_1\mathbf{n}_1\}\,ds = i\omega \int_D (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^*)|\mathbf{E}_1|^2 d\tau, \tag{7.19}$$

где $\mathbf{n}_1$ единичная нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к области D.

Окружим поверхность S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R и применим лемму Лоренца к полям $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ и $\{\mathbf{E}_2^*, \mathbf{H}_2^*\}$ в области T_R между поверхностью S и сферой Σ_R. В результате получим

$$\oint_S \{\mathbf{E}_2\mathbf{H}_2^*\mathbf{n}_2 + \mathbf{E}_2^*\mathbf{H}_2\mathbf{n}_2\}\,dS + \oint_{\Sigma_R} \{\mathbf{E}_2\mathbf{H}_2^*\mathbf{e}_r + \mathbf{E}_2^*\mathbf{H}_2\mathbf{e}_r\}\,dS = 0, \tag{7.20}$$

где $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.

Сложив (7.19) и (7.20), учитывая условия сопряжения на S, получим

$$\oint_{\Sigma_R} \{\mathbf{E}_2\mathbf{H}_2^*\mathbf{e}_r + \mathbf{E}_2^*\mathbf{H}_2\mathbf{e}_r\}\,dS = i\omega \int_D (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^*)|\mathbf{E}_1|^2 d\tau. \tag{7.21}$$

Принимая во внимание условия на бесконечности, в соотношении (7.21) перейдем к пределу при $R\to\infty$. Тогда имеем

$$\omega \operatorname{Im} \varepsilon_1 \int_D |\mathbf{E}_1|^2 d\tau + \lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma_R} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\,|[\mathbf{e}_r, \mathbf{H}_2]|^2 dS = 0. \tag{7.22}$$

Оба слагаемых в (7.22) неотрицательны $\left(\operatorname{Im} \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{\omega} > 0\right)$, поэтому отсюда сразу находим, что $\mathbf{E}_1 \equiv 0$ (следовательно, и $\mathbf{H}_1 \equiv 0$) всюду в $\bar{D}$. Отсюда, согласно условиям сопряжения на S, имеем

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2]|_S = 0, \quad [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2]|_S = 0$$

и, следовательно, $\mathbf{E}_2 \equiv 0$, $\mathbf{H}_2 \equiv 0$ всюду в D_e.

Таким образом, однородная задача имеет только тривиальное решение, а решение задачи (7.15)—(7.18) единственно.

Доказательство теоремы в том случае, когда в области D поглощение отсутствует ($\operatorname{Im} \varepsilon_1 = 0$), проводится аналогично скалярному случаю с использованием леммы 5.3.

При наличии поглощения в области D_e трудностей при доказательстве единственности решения соответствующей задачи не возникает, поэтому формулировку и доказательство соответствующей теоремы приводить не будем.

§ 8. Существование решения задач дифракции

Перейдем к изучению вопросов существования классических решений задач дифракции. Теоремы существования для внешних краевых задач обычно доказываются путем сведения их к интегральным уравнениям, разрешимость которых затем и исследуется.

Начнем рассмотрение со скалярной задачи дифракции на прозрачном теле: найти функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями уравнений

$$\Delta u_1+k_1^2u_1=-f_1 \text{ в } D, \tag{8.1}$$

$$\Delta u_2+k_2^2u_2=-f_2 \text{ в } D_e,$$

удовлетворяющие граничным условиям на S

$$u_1-u_2|_S=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S=0 \tag{8.2}$$

и условиям излучения в бесконечности

$$u_2=O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r}-ik_2u_2=o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty. \tag{8.3}$$

Здесь введены те же обозначения, что и в предыдущем параграфе. Мы пока рассматриваем случай, когда коэффициенты в граничных условиях равны единице. Будем искать классическое решение поставленной задачи, т. е. функции $u_1\in C^{(2)}(D)\cap \cap C^{(1)}(\bar{D})$ и $u_2\in C^{(2)}(D_e)\cap C^{(1)}(D_e+S)$, удовлетворяющие соотношениям (8.1)—(8.3).

Сведем задачу (8.1)—(8.3) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Применим формулу Грина к функциям $u_1(P)$ и $\psi(M, P)=\frac{e^{ik_1R}}{R}$, где $R=R_{MP}$, в области D:

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}-u_1\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}\right\}dS_P+$$

$$+\frac{k_1^2-k_2^2}{4\pi}\int\limits_D u_1\frac{e^{ik_1R}}{R}d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_D f_1\frac{e^{ik_1R}}{R}d\tau=$$

$$=\begin{cases} u_1(M), & M\in D,\\ 0, & M\notin D+S\,(M\in D_e).\end{cases} \tag{8.4}$$

Применяя формулу Грина к функциям $u_2(P)$ и $\psi(M, P)$ в области D_e, имеем

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S\left\{\frac{\partial u_2}{\partial n_2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}-u_2\frac{\partial}{\partial n_2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}\right\}dS_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D_e} f_2\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau=\begin{cases}0, & M\in D,\\ u_2(M), & M\in D_e.\end{cases}\tag{8.5}$$

Складывая (8.4) и (8.5) и учитывая граничные условия (8.2), получим

$$u_1(M)=\frac{k_1^2-k_2^2}{4\pi}\int\limits_D u_1(P)\,\frac{e^{ik_2R_{MP}}}{R_{MP}}\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_D f_1\,\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D_e} f_2\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau,\qquad M\in D;\tag{8.6}$$

$$u_2(M)=\frac{k_1^2-k_2^2}{4\pi}\int\limits_D u_1(P)\,\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_D f_1\,\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D_e} f_2\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau,\quad M\in D_e.\tag{8.7}$$

Таким образом, функция $u_1(M)$ определяется как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода (8.6), а функция $u_2(M)$ вычисляется по формуле (8.7) через $u_1(M)$.

Прежде чем переходить к исследованию уравнения (8.6), покажем, что уравнение (8.6) и формула (8.7) эквивалентны краевой задаче (8.1)—(8.3). Проделав вычисления, которые привели к (8.6) и (8.7), убеждаемся, что $u_1(M)$ — решение уравнения (8.6), а $u_2(M)$ выражается через $u_1(M)$ по формуле (8.7). Так как гладкость решений неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабополярным ядром не ниже гладкости его правой части, то в силу свойств объемного потенциала при $f_1\in C^{(1)}(D)\cap C(\overline{\mathbf{D}})$ и $f_2\in C^{(1)}(D_e)\cap C(\overline{\mathbf{D}}_e)$ получим, что $u_1\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\overline{\mathbf{D}})$. Считаем, что f_2 отлична от нуля лишь в ограниченной области $D_0\in D_e$. Из формулы (8.7) следует, что $u_2(M)$ обладает той же гладкостью, что и $u_1(M)$.

Теперь покажем, что любое решение уравнения (8.6) и функция, построенная по формуле (8.7), дают решение краевой задачи (8.1)—(8.3). Пусть $u_1(M)$ — решение уравнения (8.6). Покажем, что $u_1(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_1+k_1^2u_1=-f_1.$$

Применим к функции u_1 оператор $\Delta+k_1^2$:

$$\Delta u_1+k_1^2u_1=(\Delta+k_2^2)\,u_1+(k_1^2-k_2^2)\,u_1=(\Delta+k_2^2)\times$$

$$\times\left\{\frac{k_1^2-k_2^2}{4\pi}\int\limits_D u_1\,\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_D f_1\,\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau+\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D_e} f_2\frac{e^{ik_2R}}{R}\,d\tau\Bigg\}+(k_1^2-k_2^2)u_1=$$

$$=-(k_1^2-k_2^2)u_1-f_1+(k_1^2-k_2^2)u_1=-f_1,\quad M\in D.$$

Здесь использованы свойства объемного потенциала, имеющие место при достаточной гладкости функций f_1 и f_2.

Аналогично убеждаемся, что функция $u_2(M)$, построенная по формуле (8.7), в области D_e удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_2+k_2^2u_2=-f_2.$$

Выполнение условий на бесконечности для $u_2(M)$ видно из формулы (8.7), а выполнение условий сопряжения (8.2) следует из непрерывности объемного волнового потенциала и его нормальной производной.

Таким образом, краевая задача (8.1)—(8.3) эквивалентна интегральному уравнению (8.6) и формуле (8.7). Поэтому для доказательства существования решения краевой задачи достаточно доказать разрешимость интегрального уравнения (8.6). Уравнение (8.6) является уравнением Фредгольма второго рода со слабополярным ядром. Поэтому, согласно теоремам Фредгольма, оно разрешимо при любой непрерывной правой части, если соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Но однородное интегральное уравнение эквивалентно однородной краевой задаче, которая, как показано в предыдущем параграфе, имеет только нулевое решение. Следовательно, уравнение (8.6) всегда разрешимо и решение краевой задачи существует.

Сформулируем теперь следующую теорему существования краевой задачи дифракции на прозрачном теле.

Теорема 8.1. *Если поверхность S раздела характеристик среды является поверхностью Ляпунова, то при непрерывно дифференцируемых функциях f_1 и f_2 существует классическое решение краевой задачи* (8.1)—(8.3).

Замечание 1. Теорема 8.1 остается справедливой и в случае кусочно-ляпуновской поверхности.

Замечание 2. При доказательстве существования обобщенных решений задачи (8.1)—(8.3) условия на гладкости поверхности S и функций f_1 и f_2 могут быть значительно ослаблены.

В том случае, когда условия сопряжения имеют вид

$$u_1-u_2|_S=0,\quad p_1\frac{\partial u_1}{\partial n}-p_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_S=0,$$

интегральное уравнение относительно функции u_1 кроме интеграла по D содержит еще и поверхностный интеграл по S, т. е. является нагруженным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Для нагруженных интегральных уравнений справедливы альтернативы Фредгольма, поэтому доказательство существования решения не изменится.

Теорема существования классического решения задачи дифракции на неоднородном ограниченном теле, помещенном в однородную среду, доказывается по той же схеме. Будем рассматривать скалярную задачу дифракции на прозрачном неоднородном теле, которая состоит в определении функций $u_1(M)$ и $u_2(M)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\operatorname{div}(p(M)\operatorname{grad} u_1)+q_1(M)u_1=-f_1,\quad M\in D; \tag{8.8}$$

$$\Delta u_2+k_2^2u_2=-f_2,\quad M\in D_e, \tag{8.9}$$

условиям сопряжения на поверхности S

$$u_1|_S=u_2|_S,$$

$$p\frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_S=\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_S \tag{8.10}$$

и условиям излучения на бесконечности

$$u_2=O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{8.11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r}-ik_2u_2=o\left(\frac{1}{r}\right)\quad \text{при}\quad r\to\infty.$$

Пусть $p(M)\in C^2(D)\cap C^{(1)}(\mathbf{D})$ и $q_1(M)\in C^{(1)}(\mathbf{D})$. Сведем задачу (8.8)—(8.11) к интегральному уравнению. Для оператора $\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u)$ имеет место следующая интегральная формула Грина:

$$\int_D\{v\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u)-u\operatorname{div}(p\operatorname{grad} v)\}\,d\tau=\oint_S p\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS, \tag{8.12}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя к области D нормаль.

Применяя формулу (8.12) к функциям $u_1(M)$ и $\psi(M,P)=$ $=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik_2R_{MP}}}{R_{MP}}$ в области D, имеем

$$\oint_S\left(p\frac{\partial u_1}{\partial n}\psi-pu_1\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS+\int_D(q_1-k_2^2p)\,u_1\psi\,d\tau+$$

$$+\int_D f_1\psi\,d\tau+\int_D u_1\operatorname{grad} p\operatorname{grad}\psi\,d\tau=\begin{cases}p(M)\,u_1(M),& M\in R,\\ 0,& M\notin D.\end{cases} \tag{8.13}$$

В области D_e по-прежнему имеет место формула (8.5). Складывая (8.5) и (8.13) и учитывая условия сопряжения (8.10), получим интегральное уравнение для функции $u_1(M)$ в области D и представление для $u_2(M)$ в области D_e:

$$p(M)\,u_1(M) = \int_D \{(q_1 - k_2^2 p)\psi + \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad}\psi\}\, u_1\, d\tau +$$

$$+ \int_D f_1 \psi\, d\tau + \int_{D_e} f_2 \psi\, d\tau + \oint_S (p-1)\, u_1 \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS, \quad M \in D; \tag{8.14}$$

$$u_2(M) = \int_D \{(q_1 - k_2^2 p)\psi + \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad}\psi\}\, u_1\, d\tau + \int_D f_1 \psi\, d\tau +$$

$$+ \int_{D_e} f_2 \psi\, d\tau + \oint_S (p-1)\, u_1 \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS, \quad M \in D_e. \tag{8.15}$$

Таким образом, функция $u_1(M)$ определяется как решение нагруженного уравнения Фредгольма второго рода (8.14), а $u_2(M)$ вычисляется через $u_1(M)$ по формуле (8.15). Решение уравнения (8.14) обладает той же гладкостью, что и решение интегрального уравнения (8.6).

Покажем, что любое решение уравнения (8.14) и функция, построенная по формуле (8.15), дают решение краевой задачи (8.8)—(8.11). Пусть $u_1(M)$ — решение уравнения (8.14). Покажем, что $u_1(M)$ удовлетворяет в области D уравнению (8.8). Заметим, что интеграл от градиента функции ψ в уравнении (8.14) преобразуется по формуле Грина

$$\int_D u_1 \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad}\psi\, d\tau = -\int_D \operatorname{div}(u_1 \operatorname{grad} p)\psi\, d\tau + \oint_S \psi u_1 \frac{\partial p}{\partial n}\, dS. \tag{8.16}$$

Преобразуем левую часть уравнения (8.8). Имеем

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_1) + q_1 u_1 = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p u_1)) - \operatorname{div}(u_1 \operatorname{grad} p) + q_1 u_1 =$$

$$= (\Delta + k_2^2)(p u_1) - \operatorname{div}(u_1 \operatorname{grad} p) + (q_1 - k_2^2 p)\, u_1. \tag{8.17}$$

Вычислим значение первого слагаемого в правой части (8.17), используя уравнения (8.14) и (8.16):

$$(\Delta + k_2^2)(p u_1) = (\Delta + k_2^2)\Big\{\int_D [(q_1 - k^2 p)\, u_1 - \operatorname{div}(u_1 \operatorname{grad} p)]\,\psi\, d\tau +$$

$$+ \oint_S u_1 \psi \frac{\partial p}{\partial n}\, dS + \int_D f_1 \psi\, d\tau + \int_{D_e} f_2 \psi\, d\tau + \oint_S (-1 + p)\, u_1 \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS\Big\} =$$

$$= -(q_1 - k^2 p)\, u_1 + \operatorname{div}(u_1 \nabla p) - f_1. \tag{8.18}$$

Подставляя (8.18) в (8.17), получаем, что уравнение (8.8) выполняется всюду в D. Выполняя аналогичные преобразования, получим, что $u_2(M)$ удовлетворяет уравнению (8.9).

Проверим выполнение условий (8.10). Устремляя точку M в формулах (8.14) и (8.15) к точке P_0 на поверхности S, согласно свойствам потенциалов двойного слоя, получим

$$pu_1|_{P_0} = B + \frac{1}{2}(p-1)\,u_1(P_0); \tag{8.19}$$

$$u_2(P_0) = B - \frac{1}{2}(p-1)\,u_1(P_0), \tag{8.20}$$

где

$$B = \int\limits_D \{(q_1 - k_2^2 p)\psi + \nabla p\cdot\nabla\psi\}\,u_1 d\tau + \int\limits_D f_1\psi d\tau +$$

$$+ \int\limits_{D_e} f_2\psi d\tau + \int\limits_S (p-1)\,u_1 \frac{\partial\psi}{\partial n}(P_0, P)\,dS.$$

Вычитая из (8.19) (8.20), получим

$$u_1(P_0) = u_2(P_0).$$

Дифференцируя соотношения (8.14) и (8.15) по направлению внешней к области D нормали и переходя к пределу при $M \to \to P_0$, имеем

$$p\frac{\partial u_1}{\partial n} + u_1\frac{\partial p}{\partial n} = A + \frac{1}{2}u_1\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{8.21}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = A - \frac{1}{2}u_1\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{8.22}$$

где

$$A = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\int\limits_D \{(q_1 - k_2^2 p)\psi + \nabla p\cdot\nabla\psi\}\,u_1 d\tau + \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\int\limits_D f_1\psi d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\int\limits_{D_e} f_2\psi d\tau + \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\oint\limits_S (p-1)\,u_1\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS.$$

Вычитая из (8.21) (8.22), получим

$$p\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{P_0\in S} = \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{P_0\in S}.$$

Таким образом, любое решение $u_1(M)$ интегрального уравнения (8.14) дает решение краевой задачи (8.8)—(8.11).

Уравнение (8.14) есть нагруженное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с полярным ядром. Для него справедлива теорема Фредгольма. Отсюда из единственности решения краевой задачи (8.8)—(8.11) следует, что уравнение (8.14) однозначно разрешимо, а следовательно, решение краевой задачи (8.8)—(8.11) существует.

При исследовании задач дифракции на непрозрачных телах (внешняя граничная задача) будем использовать поверхностные потенциалы. Рассмотрим подробно первую краевую задачу (внешнюю задачу Дирихле): найти в области D_e (вне поверхности S) решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{8.23}$$

удовлетворяющее граничному условию на поверхности S

$$u|_S = f(P)|_S \tag{8.24}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty. \tag{8.25}$$

Здесь $f(P)$ — заданная на поверхности S функция, определяющая условия возбуждения поля; k — действительное число.

Решение задачи (8.23)—(8.25) будем искать в виде волнового потенциала двойного слоя

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P, \tag{8.26}$$

где плотность потенциала $\mu(P)$ — непрерывная функция, подлежащая определению, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к области D_e. Потенциал (8.26) в D_e удовлетворяет уравнению (8.23) и условиям на бесконечности (8.25). Функцию $\mu(P)$ следует выбрать таким образом, чтобы потенциал (8.26) удовлетворял граничному условию (8.24). Принимая во внимание свойства потенциала двойного слоя, находим, что $\mu(P)$ должно удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\mu(M) - \frac{1}{2\pi} \oint\limits_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P = -2f(M). \tag{8.27}$$

Таким образом, краевая задача (8.23)—(8.25) сведена к интегральному уравнению (8.27).

Перейдем к исследованию интегрального уравнения (8.27). Для уравнения (8.27) справедлива теорема Фредгольма. Поэтому оно имеет единственное решение при любой непрерывной правой части $f(M)$ только в том случае, когда однородное союзное уравнение

$$\nu(M) - \frac{1}{2\pi} \oint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS_P = 0 \tag{8.28}$$

имеет только тривиальное решение.

Легко видеть, что если $k^2=\lambda_m$, где λ_m — некоторое собственное значение оператора Лапласа внутренней задачи Неймана, то однородное интегральное уравнение (8.28) имеет нетривиальное решение. Нетривиальным решением уравнения (8.28) является предельное значение собственной функции $v_m(M)|_S$ внутренней задачи Неймана, соответствующей собственному значению λ_m. В этом нетрудно убедиться, применяя к $v_m(M)$ третью формулу Грина и помещая точку M на поверхность S. Если k^2 не совпадает ни с одним собственным значением внутренней задачи Неймана

$$\Delta u+\lambda u=0, \tag{8.29}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S=0,$$

то интегральное уравнение (8.28) имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $k^2\neq\lambda_n$, где λ_n — собственные значения задачи (8.29), $\nu=\nu_0(P)$ — непрерывное нетривиальное решение уравнения (8.28). Рассмотрим функцию

$$V(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \nu_0(P)\,\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}}\,dS_P.$$

Функция $V(M)$ в области D удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $\Delta V+k^2V=0$, а на поверхности S в силу уравнения (8.28) предельное значение нормальной производной функции V в области D равно нулю: $\left.\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}\right|_S=0$. Так как k^2 не совпадает с собственным значением внутренней задачи Неймана, то всюду внутри S (в области $D+S$) $V(M)\equiv 0$. Функция $V(M)$ удовлетворяет тому же уравнению Гельмгольца и вне поверхности S, равна нулю на S и удовлетворяет условиям излучения на бесконечности: $\frac{\partial V}{\partial r}+ikV=o\left(\frac{1}{r}\right)$, $r\to\infty$.

В силу единственности решения внешней задачи

$$V(M)=0 \text{ в } D_e.$$

Используя свойства нормальной производной потенциала простого слоя при переходе через поверхность, находим

$$\nu_0(P)\equiv 0.$$

Следовательно, однородное уравнение (8.28) при $k^2\neq\lambda_n$ имеет только тривиальное решение.

Отсюда сразу можно сделать следующий вывод: если k^2 не совпадает ни с одним собственным значением внутренней задачи Неймана, то интегральное уравнение (8.27) имеет решение при любой непрерывной правой части $f(M)$. Следовательно, внешняя задача Дирихле (8.23)—(8.25) разрешима и ее решение представимо в виде потенциала двойного слоя (8.26) с плотностью, являющейся единственным решением интегрального уравнения (8.27). В частности, внешняя задача Дирихле всегда разрешима при комплексном k (при наличии поглощения в среде).

В том случае, когда $k^2=\lambda_m$, интегральное уравнение (8.27) разрешимо не для любой правой части $f(M)$: должны быть выполнены условия разрешимости, т. е. $f(M)$ должна быть ортогональна ко всем собственным функциям союзного интегрального уравнения. При этом решение интегрального уравнения (8.27) уже не единственно — в решение входит произвольная линейная комбинация собственных функций однородного интегрального уравнения (8.27). Однако решение исходной краевой задачи (8.23)—(8.25), построенное по формуле (8.26), и в этом случае определено однозначно.

Действительно, пусть $\mu_0(P)$ — нетривиальное решение однородного уравнения (8.27). Построив по формуле (8.26) функцию

$$u_0(M)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \mu_0(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\,dS_P,$$

видим, что эта функция в области D_e удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, условиям излучения на бесконечности, а ее предельное значение на поверхности S равно нулю в силу выбора функции $\mu_0(P)$ как решения однородного интегрального уравнения (8.27). Отсюда следует, что

$$u_0(M)=0 \text{ в } D_e.$$

В том случае, когда условия ортогональности не выполнены, уравнение (8.27) решения не имеет. Это означает, что не существует решения краевой задачи (8.23)—(8.25), представимого в виде потенциала двойного слоя (8.26).

В этом случае решение краевой задачи (8.23)—(8.25) можно искать в виде комбинации потенциалов двойного слоя и простого слоя

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MR}}dS+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \omega(P)\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\,dS,$$

где плотность потенциала простого слоя $\omega(P)$ выражается через главные функции союзного интегрального уравнения (8.28). Тогда для $\mu(P)$ получается интегральное уравнение типа (8.27), правая часть которого удовлетворяет условию разрешимости. Подчеркнем еще раз, что в этом случае $\mu(P)$ определяется неоднозначно (с точностью до произвольной линейной комбинации собственных функций полученного интегрального уравнения).

Можно воспользоваться и другим интегральным представлением решения краевой задачи (8.23)—(8.25). Будем искать решение краевой задачи (8.23)—(8.25) в виде потенциала, ядро которого является линейной комбинацией ядер потенциалов простого и двойного слоя

$$u(M)=\oint_S \mu(P)\left\{\frac{\partial\psi}{\partial n}+\alpha\psi\right\}dS,\quad M\in D_e, \psi=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{8.30}$$

где α — постоянная; условия, которым она должна удовлетворять, будут приведены ниже. Опуская точку M на поверхность S, получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(M)-\oint_S \mu(P)\left\{\frac{\partial\psi}{\partial n_P}+\alpha\psi\right\}dS=-f(M). \tag{8.31}$$

Покажем, что всегда можно выбрать α таким образом, чтобы уравнение (8.31) было однозначно разрешимо при любой непрерывной правой части.

Рассмотрим союзное однородное уравнение

$$\frac{1}{2}\nu(P_0)-\oint_S \nu(P)\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial n_{P_0}}+\alpha^*\psi^*\right\}dS=0. \tag{8.32}$$

Пусть $\nu_0(P)$ — непрерывное нетривиальное решение уравнения (8.32), а $V(M)$ — соответствующий потенциал простого слоя:

$$V(M)=\oint_S \nu_0(P)\psi^*(M, P)\,dS_P.$$

Функция $V(M)$ является решением внутренней краевой задачи

$$\Delta V+k^2V=0,\quad M\in D,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_M}+\alpha^*V(M)=0,\quad M\in S, \tag{8.33}$$

которая имеет единственное решение при соответствующем выборе параметра α. Действительно, применяя первую формулу Грина к функциям V и V^*, имеем

$$\int_D V^*\Delta V\,d\tau=-\int_D |\nabla V|^2\,d\tau+\oint_S V^*\frac{\partial V}{\partial n}\,dS. \tag{8.34}$$

Из (8.34) в силу (8.33) получаем

$$\int_D k^2|V|^2\,d\tau=\int_D |\nabla V|^2\,d\tau+\alpha^*\oint_S |V|^2\,dS. \tag{8.35}$$

Взяв мнимую часть (8.35), получим

$$\operatorname{Im}\alpha\cdot\oint_S |V|^2 dS=0,$$

и если $\operatorname{Im}\alpha\neq 0$, то $V\equiv 0$ на поверхности S и внутри D.

Функция $V(M)$ всюду вне S удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям излучения и обращается в нуль на поверхности, следовательно, $V(M)\equiv 0$ вне S. Используя теорему о скачке предельных значений нормальных производных потенциала простого слоя, получаем, что

$$\nu_0(P)\equiv 0.$$

Следовательно, уравнение (8.32) при $\operatorname{Im}\alpha\neq 0$ имеет только нулевое решение, откуда в силу альтернативы Фредгольма следует разрешимость уравнения (8.31) при любой непрерывной правой части, а тем самым и разрешимость краевой задачи (8.23) — (8.25).

Приведем еще одно доказательство разрешимости задачи (8.23) — (8.25) в резонансном случае при $k^2=\lambda_m$. Будем искать решение задачи (8.23) — (8.25) в виде

$$u(M)=\oint_S \mu(P)\,\frac{\partial G_2}{\partial n_P}(M,\,P)\,dS_P, \tag{8.36}$$

где $G_2(M,\,P)$ — функция Грина второй краевой задачи вне сферы Σ некоторого радиуса a, целиком лежащей внутри поверхности S. Существование функции $G_2(M,\,P)$ не вызывает сомнения, так как для нее можно записать явное выражение, которое легко получить, например, методом разделения переменных. Величину радиуса сферы выберем позже. Так как функция Грина представима в виде

$$G_2(M,\,P)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}+W(M,\,P),$$

где $W(M,\,P)$ — регулярная вне сферы Σ, то, устремляя точку M в (8.36) к поверхности S с внешней стороны и используя граничное условие (8.24), получим интегральное уравнение для определения функции $\mu(P)$:

$$\frac{1}{2}\mu(M)-\oint_S \mu(P)\,\frac{\partial G_2}{\partial n_P}(M,\,P)\,dS_P=-f(M). \tag{8.37}$$

Опять для определения $\mu(P)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое в отличие от уравнения (8.27) соответствующим выбором функции $G_2(M,\,P)$ всегда может быть сделано разрешимым. Докажем это. Надо показать, что однородное союзное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2}\nu(M)-\oint_S \nu(P)\frac{\partial G_2^*}{\partial n_M}(M, P)\,dS_P=0 \tag{8.38}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $\nu=\nu_0(P)$ — непрерывное решение уравнения (8.38). Тогда функция

$$U(M)=\oint_S \nu_0(P)G_2^*(M, P)\,dS_P$$

в области между сферой Σ и поверхностью S является решением следующей однородной краевой задачи:

$$\Delta U+k^2U=0,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Sigma=0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S=0. \tag{8.39}$$

Краевая задача (8.39) имеет нетривиальные решения только в том случае, когда k^2 совпадает с ее собственными значениями. Известно также, что спектр ее собственных значений дискретный. Поэтому можно выбрать радиус сферы a таким образом, чтобы k^2 не являлось собственным значением задачи (8.39). Таким образом мы и выберем радиус сферы. Тогда $U(M)\equiv 0$ в замкнутой области между сферой Σ и поверхностью S. Вне поверхности S функция $U(M)$ удовлетворяет однородной краевой задаче для уравнения Гельмгольца и, следовательно, тождественно равна нулю. Используя разрывные свойства нормальной производной потенциала простого слоя при переходе через поверхность, найдем

$$\nu_0(P)=0.$$

Следовательно, уравнение (8.38) имеет только тривиальное решение, а уравнение (8.37) всегда разрешимо, и решение его единственно.

Таким образом, доказана следующая теорема разрешимости для внешней краевой задачи Дирихле.

Теорема 8.2. *Если граница области D является поверхностью Ляпунова и граничная функция $f(P)$ непрерывна, то существует классическое решение внешней краевой задачи* (8.23)—(8.25) *при любом значении параметра k.*

Рассмотрим вопрос о существовании решения внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u+k^2u=0, \quad M\in D_e; \tag{8.40}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)|_S; \tag{8.41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\to\infty. \tag{8.42}$$

В (8.41) производная берется по направлению внешней нормали к области D_e, т. е. нормаль направлена внутрь области D, являющейся дополнением D_e; S — поверхность типа Ляпунова.

Если воспользоваться представлением решения задачи (8.40)—(8.42) в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \oint\limits_S \psi(M, P)\nu(P)\,dS_P, \tag{8.43}$$

то задаче (8.40)—(8.42) можно сопоставить интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\frac{1}{2}\nu(P_0) + \oint\limits_S \nu(P)\frac{\partial\psi}{\partial n_{P_0}}\,dS_P = f(P_0). \tag{8.44}$$

Так же как и в случае рассмотренной в предыдущем пункте задачи Дирихле, легко показать, что если k^2 не совпадает ни с одним собственным значением первой внутренней краевой задачи для оператора Лапласа в области D (нерезонансный случай), то интегральное уравнение (8.44) эквивалентно исходной краевой задаче (8.40)—(8.42) и разрешимо единственным образом. В резонансном случае однородное уравнение (8.44) имеет нетривиальные решения, что приводит к определенным трудностям при использовании этого уравнения для доказательства разрешимости исходной краевой задачи (8.41)—(8.42). Этот вопрос был также подробно рассмотрен ранее. Обойти эти трудности можно заменив в представлении (8.43) фундаментальное решение $\psi(M, P)$ уравнения Гельмгольца функцией Грина первой внешней краевой задачи для сферы Σ, помещенной внутрь области D, и, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно доказать разрешимость исходной задачи (8.40)—(8.42) для этого случая.

Помимо приведенного способа существуют и другие методы доказательства разрешимости рассматриваемой задачи. Рассмотрим еще один метод, основанный на использовании формулы Грина и также сводящий задачу (8.40)—(8.42) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Пусть существует классическое решение задачи (8.40)—(8.42)

$$u(M)\in C^{(2)}(D_e)\cap C^{(1)}(D_e+S).$$

В силу третьей формулы Грина имеем

$$u(M)=\oint\limits_S \left\{\psi(M, P)\frac{\partial u}{\partial n_P}-\frac{\partial\psi}{\partial n_P}u\right\}dS. \tag{8.45}$$

Обозначив

$$F(M)=\oint\limits_S \psi(M, P)f(P)\,dS_P, \tag{8.46}$$

согласно граничному условию (8.41), можем записать (8.45) в виде

$$u(M)=-\oint\limits_S u(P)\frac{\partial\psi}{\partial n_P}\,dS+F(M). \tag{8.47}$$

Переходя в (8.47) к пределу при $M\to P_0\in S$ и учитывая свойства потенциалов простого и двойного слоя, получим

$$\frac{1}{2}u(P_0)+\oint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n_P}(P_0, P)u(P)\,dS_P=F(P_0),\quad P_0\in S. \tag{8.48}$$

Итак, если классическое решение задачи (8.40) — (8.43) существует, то предельное значение $u(P_0)$, $P_0\in S$, является решением интегрального уравнения (8.48). Теперь перейдем к исследованию интегрального уравнения

$$\frac{1}{2}\mu(P_0)+\oint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n_P}(P_0, P)\mu(P)\,dS_P=F(P_0),$$

$$P_0\in S,\quad \psi(M, P)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}, \tag{8.49}$$

в котором $F(P_0)$ — предельное значение на S потенциала простого слоя (8.46) с непрерывной плотностью $f(P)$.

Рассмотрим первую краевую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в области D

$$\Delta V+\lambda V=0,\quad M\in D,$$

$$V|_S=0. \tag{8.50}$$

Согласно третьей формуле Грина,

$$V(M)=\oint\limits_S \psi_\lambda(M, P)\left(\frac{\partial V}{\partial n_P}\right)_i dS_P, \tag{8.51}$$

где

$$\psi_\lambda(M, P)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{-i\sqrt{\lambda}R}}{R}$$

— фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Согласно свойствам нормальной производной потенциала простого слоя, из (8.51) получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n_P}\right)_i + \oint_S \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial n_{P_0}}(P_0, P)\left(\frac{\partial V}{\partial n_P}\right)_i dS_P = 0. \qquad (8.52)$$

Нормальная производная собственной функции первой краевой задачи не равна тождественно нулю, поэтому из (8.52) следует, что при $k^2=\lambda$ однородное уравнение

$$\frac{1}{2}\mu_0^{(i)}(P_0) + \oint_S \frac{\partial \psi^*}{\partial n}(P_0, P)\mu_0^{(i)}(P)\,dS_P = 0 \qquad (8.53)$$

одновременно с (8.52) имеет нетривиальные решения $\mu_0^{(i)}(P)$, $i=1, 2, \ldots, N_0$, где N_0 — ранг соответствующего собственного значения. Обозначим собственные функции однородного уравнения (8.52) через $\nu_0^{(i)}(P)$, $i=1, 2, \ldots, N_0$.

Образуем потенциал простого слоя

$$V_0^{(i)}(M) = \oint_S \psi_\lambda^*(M, P)\,\nu_0^{(i)}(P)\,dS_P. \qquad (8.54)$$

В силу свойств нормальной производной потенциала простого слоя и уравнения (8.52) для $\nu_0^{(i)}(P)$ функция $V_0^{(i)}(M)$ в области D_e является решением внешней краевой задачи

$$\Delta V_0^{(i)} + \lambda V_0^{(i)} = 0, \quad M \in D_l,$$

$$\left.\frac{\partial V_0^{(i)}}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad (8.55)$$

удовлетворяющим условиям излучения. По теореме единственности получим, что $V_0^{(i)}(M) = 0$, $M \in D_e + S$. Отметим, что тем самым

$$\oint_S \psi_\lambda^*(M, P)\,\nu_0^{(i)}(P)\,dS_P = 0, \quad M \in S. \qquad (8.56)$$

Это соотношение будет использовано в дальнейшем. Отсюда следует, что функция (8.54) является собственной функцией внутренней задачи (8.50). (Если $V_0^{(i)}(M) \equiv 0$ и при $M \in D_i + S$, то по формуле скачка нормальной производной потенциала простого слоя (8.54) получим $\nu_0^{(i)}(P) \equiv 0$, $P \in S$.)

Если параметр k^2 в уравнении (8.49) не совпадает ни с одним собственным значением λ задачи (8.50), то однородное уравнение (8.53) не имеет нетривиальных решений и в силу альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение (8.49) однозначно разрешимо при любой функции $F \in C(S)$.

Покажем теперь, что неоднородное уравнение (8.49) с правой частью $F(P_0)$, определенной по формуле (8.46), разрешимо и в резонансном случае $k^2=\lambda$. Для этого достаточно установить, что выполнены условия разрешимости на спектре, т. е.

$$\oint\limits_S F^*(P_0)\,\nu_0^{(l)}(P_0)\,dS_{P_0}=0, \tag{8.57}$$

где $\nu_0^{(l)}(P)$ — собственные функции интегрального уравнения, союзного уравнению (8.49). Подставляя в (8.57) выражение (8.46) для $F(P)$ и меняя порядок интегрирования, в силу (8.56) получим

$$\oint\limits_S \oint\limits_S \psi_\lambda^*(P_0, P)\,f^*(P)\,\nu_0^{(l)}(P_0)\,dS_P\,dS_{P_0}=$$

$$=\oint\limits_S f^*(P)\,dS_P \oint\limits_S \psi_\lambda^*(P_0, P)\,\nu_0^{(l)}(P_0)\,dS_{P_0}=0, \tag{8.58}$$

что и доказывает разрешимость неоднородного уравнения (8.49) на спектре при задании правой части $F(P_0)$ в виде (8.46).

Исследовав разрешимость интегрального уравнения (8.49), вернемся к исходной краевой задаче (8.40) — (8.42). Можно показать, что всегда существует такое частное решение $\mu(P)$ уравнения (8.49), что построенная по формуле

$$u(M) = -\oint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n_P}(M, P)\,\mu(P)\,dS + F(M) \tag{8.59}$$

функция $u(M)$ является классическим решением внешней краевой задачи Неймана (8.40) — (8.42).

Развитый для скалярных задач дифракции метод доказательства теорем существования, использующий интегральные уравнения Фредгольма второго рода, может быть применен и для доказательства существования решения задач электромагнитной теории дифракции. Мы ограничимся рассмотрением задачи дифракции на прозрачном однородном теле D. Пусть ε и μ_0 — характеристики тела D, ограниченного замкнутой поверхностью S, ε_0, μ_0 — характеристики области D_e, внешней к поверхности S, причем ε, μ_0, ε_0 — постоянные. Пусть также электромагнитное поле возбуждается локальным источником $\mathbf{j}$, расположенным в области D_e. Будем считать, что $\mathbf{j}$ — непрерывно дифференцируемая функция в $D_0 \in D_e$, обращающаяся в нуль вместе со своими производными на границе Σ области D_0. Обозначим поле в D_e через $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$, а в D — через $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$. Тогда задача электромагнитной дифракции на теле D заключается в определении решения системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_e = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_e + \mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_e = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_e, \quad M \in D_e; \tag{8.60}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_i = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}_i,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_i = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_i, \quad M \in D, \tag{8.61}$$

удовлетворяющего условиям непрерывности касательных составляющих полей на поверхности S

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_i] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_e]|_S,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_i] = [\mathbf{n}, \mathbf{H}_e]|_S \tag{8.62}$$

и условию излучения в бесконечности

$$[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}_e] + \zeta[\mathbf{e}_r[\mathbf{e}_r, \mathbf{H}_e]] = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{8.63}$$

Так же как и при выводе формулы Стрэттона — Чу, с помощью векторной формулы Грина, записанной для областей D и D_e, получим соотношения

$$\left.\begin{cases} \mathbf{H}_e(M_0), & M_0 \in D_e \\ 0 & M_0 \in D \end{cases}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int_{D_0} \psi(M, M_0) \operatorname{rot} \mathbf{j} \cdot dv_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_S \{[\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}_e, \mathbf{H}_e]] - i\omega\varepsilon_0 \psi [\mathbf{E}_e, \mathbf{n}_e] - (\mathbf{n}_e, \mathbf{H}_e) \operatorname{grad}_M \psi\}\, dS, \tag{8.64}$$

$$\left.\begin{cases} 0, \ M_0 \in D_e \\ \mathbf{H}_i(M_0), \ M_0 \in D \end{cases}\right\} = -\frac{1}{4\pi}\int_D \omega^2\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)\psi \mathbf{H}_i(M)\, dv +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oint_S \{[\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}_i, \mathbf{H}_i]] - i\omega\varepsilon\psi [\mathbf{E}_i, \mathbf{n}_i] - (\mathbf{n}_i, \mathbf{H}_i) \operatorname{grad}_M \psi\}\, dS, \tag{8.65}$$

где функция $\psi = \psi(M, M_0) = \exp(ikR_{MM_0})/R_{MM_0}$ определяется только характеристиками внешней среды D_e. Здесь $\mathbf{n}_e = -\mathbf{n}_i$ — внешняя нормаль к области D_e. Умножая (8.64) на ε, (8.65) — на ε_0 и складывая полученные выражения, имеем

$$\left.\begin{cases} \varepsilon\mathbf{H}_e, \ M_0 \in D_e \\ \varepsilon_0\mathbf{H}_i(M_0), \ M_0 \in D \end{cases}\right\} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{D_0} \psi \operatorname{rot} \mathbf{j}\, dv_M + \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\int_D \omega^2\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)\psi \mathbf{H}_i\, dv +$$

$$+ \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\oint_S \{[\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}, \mathbf{H}_i]] - (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \operatorname{grad} \psi\}\, dS, \tag{8.66}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{n}_e$ и кроме условия непрерывности касательных составляющих на S учтено условие непрерывности нормальной составляющей магнитного поля, имеющее место при одинаковых значениях магнитной проницаемости μ_0 областей D_e и D:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)-(\mathbf{n}, \mathbf{H}_e)|_S=0.$$

Если точка M_0 расположена в области D, то соотношение (8.66) представляет собой объемное нагруженное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для вектора $\mathbf{H}_i(M)$:

$$\mathbf{H}_i(M_0)=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 4\pi}\int\limits_{D_0}\psi \operatorname{rot}\mathbf{j}\,dv+\frac{\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi}\int\limits_D \psi\mathbf{H}_i dv+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1\right)\oint\limits_S\{[\operatorname{grad}_M\psi[\mathbf{n},\mathbf{H}_i]]-(\mathbf{n},\mathbf{H}_i)\operatorname{grad}_M\psi\}\,dS. \quad (8.67)$$

Вектор $\mathbf{H}_e$ определяется по $\mathbf{H}_i$ квадратурой согласно (8.66). Векторы $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_i$ вычисляются через $\mathbf{H}_e$ и $\mathbf{H}_i$ из уравнений Максвелла (8.60), (8.61).

Установим, что интегральное уравнение (8.67) и квадратурная формула для $\mathbf{H}_e$ эквивалентны исходной краевой задаче (8.60)—(8.63). Пусть вектор $\mathbf{H}_i(M)$ — решение интегрального уравнения (8.67). Покажем, что

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_i=0$$

и

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}_i=\omega^2\varepsilon\mu_0\mathbf{H}_i,$$

т. е. векторы $\mathbf{H}_i$ и $\mathbf{E}_i=\frac{1}{i\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\mathbf{H}_i$ являются решением однородной системы уравнений Максвелла.

Уравнение (8.67) перепишем в виде

$$\mathbf{H}_i(M_0)=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 4\pi}\int\limits_{D_0}\psi\operatorname{rot}\mathbf{j}\,dv+\frac{\omega^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi}\int\limits_D\psi\mathbf{H}_i dv+ \quad (8.68)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\operatorname{rot}_{M_0}\oint\limits_S\psi[\mathbf{n},\mathbf{H}_i]\,dS+\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\oint\limits_S(\mathbf{n},\mathbf{H}_i)\nabla_M\psi\,dS$$

и вычислим div_{M_0} от каждого слагаемого в правой части равенства (8.68). Получим

$$\operatorname{div}_{M_0}\int\limits_{D_0}\psi\operatorname{rot}\mathbf{j}\,dv=\int\limits_{D_0}\operatorname{rot}\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}_{M_0}\psi\,dv=-\int\limits_{D_0}\operatorname{rot}\mathbf{j}\operatorname{grad}_M\psi\,dv=$$

$$=-\int\limits_{D_0}\{\operatorname{div}_M(\psi\operatorname{rot}\mathbf{j})-\psi\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{j}\}\,dv=-\oint\limits_S\psi\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{j}\,dS=0,$$

так как $\operatorname{rot} \mathbf{j}|_\Sigma = 0$;

$$\operatorname{div}_{M_0} \int_D \psi \mathbf{H}_i dv = \oint_S \psi (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) dS + \int_D \psi \operatorname{div}_M \mathbf{H}_i dv,$$

$$\operatorname{div}_{M_0} \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \operatorname{grad}_M \psi dS = -\oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \Delta_M \psi = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \psi dS.$$

Следовательно, применяя операцию div_{M_0} к равенству (8.68), получим

$$\operatorname{div}_{M_0} \mathbf{H}_i (M_0) = \frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi} \int_D \psi \operatorname{div} \mathbf{H}_i dv, \quad M_0 \in D.$$

Поскольку это уравнение не имеет действенных собственных значений, отсюда сразу вытекает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_i = 0 \text{ в } D.$$

Используя свойства объемного потенциала, из (8.68) находим

$$\Delta \mathbf{H}_i + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{H}_i = -\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{H}_i \text{ в } D,$$

т. е.

$$\Delta \mathbf{H}_i + \omega^2 \varepsilon \mu_0 \mathbf{H}_i = 0 \text{ в } D.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}_i = \omega^2 \varepsilon \mu_0 \mathbf{H}_i.$$

Для проверки выполнения граничных условий (8.62) заметим, что объемные потенциалы в формулах (8.64) и (8.65) непрерывны на S.

Учитывая, что для произвольного вектора $\mathbf{l}$, касательного к поверхности S, имеет место соотношение

$$[\operatorname{grad} \psi, \mathbf{l}] = [\mathbf{n}, \mathbf{l}] \frac{\partial \psi}{\partial n} - \mathbf{n} \left\{ l_1 \frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} - l_2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau_2} \right\},$$

где τ_1 и τ_2 — ортогональные направления на поверхности S, для скачка касательной составляющей векторного потенциала

$$\mathbf{W} = \oint_S [\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}, \mathbf{H}_i]] dS_M$$

получим формулу

$$[\mathbf{n}, \mathbf{W}]_e - [\mathbf{n}, \mathbf{W}]_i = 4\pi [\mathbf{n}, \mathbf{H}_i].$$

Касательная составляющая векторного потенциала

$$\mathbf{V} = \oint_S [\mathbf{n}, \mathbf{H}_i] \operatorname{grad}_M \psi dS$$

непрерывна. Поэтому для касательных составляющих полей $\mathbf{H}_e$ и $\mathbf{H}_i$ на S из (8.66) окончательно получим

$$\varepsilon[\mathbf{n}, \mathbf{H}_e] - \varepsilon_0[\mathbf{n}, \mathbf{H}_i]|_S = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi} \cdot 4\pi[\mathbf{n}, \mathbf{H}_i]|_S,$$

откуда и следует непрерывность на S касательных составляющих векторов $\mathbf{H}_i$ и $\mathbf{H}_e$.

Перейдем к доказательству непрерывности касательных составляющих на S векторов $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_i$. Из уравнений Максвелла (8.60), (8.61) получим

$$\varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{H}_e - \varepsilon_0 \operatorname{rot} \mathbf{H}_i|_S = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0(\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_i)|_S,$$

откуда следует, что достаточно показать непрерывность на S касательных составляющих векторов $\operatorname{rot} \varepsilon\mathbf{H}_e$ и $\operatorname{rot} \varepsilon_0\mathbf{H}_i$.

Воспользовавшись формулой векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\psi) = \psi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \psi, \mathbf{a}],$$

запишем поверхностный интеграл в формуле (8.64) в виде

$$\oint\limits_S \{[\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}, \mathbf{H}_i]] - (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \operatorname{grad}_M \psi\} \, dS =$$

$$= -\operatorname{rot}_{M_0} \oint\limits_S [\mathbf{n}, \mathbf{H}_i] \psi dS + \operatorname{grad}_{M_0} \oint\limits_S (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \psi dS.$$

Поэтому в силу непрерывности на S касательных составляющих объемного потенциала и равенства $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{a} = 0$ имеем, что величина $[\mathbf{n}, \mathbf{E}_e] - [\mathbf{n}, \mathbf{E}_i]|_S$ определяется разностью предельных значений на поверхности S интеграла

$$\left[\mathbf{n}_{M_0}, \operatorname{rot} \operatorname{rot}_{M_0} \oint\limits_S (\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) \psi dS\right].$$

Так как при $\mathbf{a} = \mathrm{const}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}\psi = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}\psi + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{a}\psi,$$

то в силу непрерывности предельных значений на S потенциала простого слоя и его касательных производных окончательно получим

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_e] - [\mathbf{n}, \mathbf{E}_i]|_S = 0,$$

что и доказывает утверждение о непрерывности на поверхности S касательных составляющих построенных векторов $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{E}_i$.

Следовательно, интегральное уравнение (8.67) эквивалентно исходной краевой задаче (8.60) — (8.63). Отсюда также вытекает существование решения интегрального уравнения (8.67).

Глава II

Методы интегральных уравнений в задачах дифракции

§ 1. Интегральные уравнения второго рода

Интегральные уравнения удобны не только для теоретических исследований задач дифракции, но и для получения численных алгоритмов решения достаточно широкого класса задач дифракции. Особенно широкое применение в задачах дифракции нашли интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

В гл. I с помощью интегральных представлений волнового поля через его значения на поверхности были получены интегральные уравнения второго рода, разрешимые при любом значении волнового числа k. Таким представлением в скалярном случае является формула Грина, а в векторном — формулы Стрэттона — Чу.

Получим интегральное уравнение для задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем ограниченном теле. Пусть электромагнитное поле возбуждается локальными сторонними токами $\mathbf{j}_0(M)$. Для определения электромагнитного поля вне идеально проводящего ограниченного тела с замкнутой поверхностью S нужно решить следующую задачу: найти векторы $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, удовлетворяющие вне поверхности S (в области D) уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{j}_0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1.1}$$

граничному условию на поверхности S

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = 0, \quad P \in S, \tag{1.2}$$

и условиям излучения на бесконечности.

Вопросы существования решения поставленной задачи были обсуждены в гл. I. Решение поставленной задачи вне поверхности S, являющейся поверхностью типа Ляпунова, можно выразить через касательные составляющие электрического и магнитного векторов на поверхности S по формулам Стрэттона — Чу. Для получения интегрального уравнения удобно воспользоваться следующей формулой, дающей представление магнитного поля вне поверхности S:

$$
\mathbf{H}(M)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D}\left[\mathbf{j}_0,\ \operatorname{grad}_Q\frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}}\right]dV_Q+
$$

$$
+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S}\left\{\left[\operatorname{grad}_P\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\ [\mathbf{n}_P,\mathbf{H}(P)]\right]+\right.
$$

$$
\left.+\,i\omega\varepsilon\,[\mathbf{n}_P,\mathbf{E}(P)]\,\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}-(\mathbf{n}_P,\mathbf{H}(P))\operatorname{grad}_P\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right\}dS_P,\quad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu},
\tag{1.3}
$$

где R_{MP} — расстояние между точками M и P; $\mathbf{n}_P$ — внешняя к области D нормаль к поверхности S в точке P. Объемный интеграл берется по области задания сторонних токов $\mathbf{j}_0(Q)$, которая считается ограниченной. Объемный интеграл в формуле (1.3), очевидно, представляет собой магнитное поле $\mathbf{H}_0(M)$ заданных источников в отсутствие идеально проводящего тела:

$$
\mathbf{H}_0(M)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D}\left[\mathbf{j}_0,\ \operatorname{grad}_Q\frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}}\right]dV_Q.
\tag{1.4}
$$

В случае идеально проводящего тела касательная составляющая электрического поля на поверхности обращается в нуль (см. граничное условие (1.2)) и, как легко показать, используя уравнения Максвелла, имеет место соотношение

$$
(\mathbf{n},\mathbf{H})|_S=0.
\tag{1.5}
$$

Вводя для поверхностного тока, наведенного на поверхности идеально проводящего тела, обозначение

$$
\mathbf{j}(P)=[\mathbf{n}_P,\mathbf{H}(P)],
\tag{1.6}
$$

можем переписать интегральное представление (1.3) в виде

$$
\mathbf{H}(M)=\mathbf{H}_0(M)+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S}\left[\operatorname{grad}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}},\ \mathbf{j}(P)\right]dS_P.
\tag{1.7}
$$

Представление (1.7) фактически является представлением магнитного поля в виде потенциала двойного слоя, так как легко проверить, что интеграл в правой части (1.7) обладает всеми свойствами потенциала двойного слоя, а его предельное значение при стремлении точки M к точке P_0 поверхности S из области D равно

$$
\lim_{M\to P_0}\oint\limits_{S}\left[\mathbf{j}(P),\ \operatorname{grad}_P\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right]dS_P=
$$

$$
= \oint\limits_S \left[\mathbf{j}(P), \operatorname{grad} \frac{e^{ikR_{P_0P}}}{R_{P_0P}} \right] dS_P - 2\pi [\mathbf{j}(P_0), \mathbf{n}_{P_0}]. \tag{1.8}
$$

Для получения интегрального уравнения относительно поверхностного тока $\mathbf{j}(P)$ перейдем к пределу в соотношении (1.7), устремляя точку M на поверхность S. Заметим, что на поверхности S в силу условия (1.5)

$$
\mathbf{H}(P_0)|_S = [\mathbf{j}(P_0), \mathbf{n}_{P_0}].
$$

Воспользовавшись соотношением (1.8), получаем

$$
\frac{1}{2}[\mathbf{j}(P_0), \mathbf{n}_{P_0}] = \mathbf{H}_0(P_0) + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left[\operatorname{grad}_P \frac{e^{ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}}, \mathbf{j}(P) \right] dS_P. \tag{1.9}
$$

Уравнение (1.9), умножив его векторно на $\mathbf{n}_{P_0}$ и введя обозначение

$$
\mathbf{j}^{\text{перв}}(P_0) = [\mathbf{n}_{P_0}, \mathbf{H}_0(P)], \tag{1.10}
$$

можно записать в виде

$$
\mathbf{j}(P_0) + \frac{1}{2\pi} \oint\limits_S \left[\mathbf{n}_{P_0} \left[\mathbf{j}(P), \operatorname{grad} \frac{e^{ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}} \right] \right] dS_P = 2\mathbf{j}^{(\text{перв})}(P_0). \tag{1.11}
$$

Соотношение (1.11) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода для поверхностной плотности тока на идеально проводящем теле. В силу разрешимости исходной краевой задачи (1.1)—(1.2) при любом способе возбуждения полученное интегральное уравнение (1.11) разрешимо для любой функции $\mathbf{j}^{\text{перв}}$, определенной заданным способом возбуждения. Следует отметить, что из единственности решения исходной краевой задачи (1.1)—(1.2), вообще говоря, не следует единственность решения уравнения (1.11). Может показаться, что, ссылаясь на теорему существования решения краевой задачи (1.1)—(1.2), мы получаем «замкнутый круг рассуждений», так как обычно сама теорема существования доказывается сведением краевой задачи к интегральным уравнениям. Однако при доказательстве теоремы существования можно строить интегральные уравнения с ядром, представляющим собой функцию Грина некоторой специальной области, что позволяет рассматривать и резонансный случай. Для скалярной задачи такое рассмотрение подробно проведено в гл. I.

Уравнение (1.9) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабополярным ядром (ядро потенциала двойного слоя) и к нему применима вся теория Фредгольма. Из этой теории следует, что если соответствующее однородное союзное уравнение имеет лишь нулевое решение, то уравнение (1.11) однозначно разрешимо для любой непрерывной правой части $\mathbf{j}^{\text{перв}}$ в классе непрерывных функций. Если однородное союзное уравнение имеет нетривиальные решения, то число линейно независимых решений конечно, уравнение (1.9) разрешимо и его решение определено с точностью до линейной комбинации решений соответствующего однородного уравнения.

Союзное к уравнению (1.9) однородное уравнение имеет вид

$$[\eta(P_0), \mathbf{n}_{P_0}] + \frac{1}{2\pi} \oint_S \left[\eta(P), \operatorname{grad}_{P_0} \frac{e^{-ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}} \right] dS_P = 0. \quad (1.12)$$

Покажем, что уравнение (1.12) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда внутренняя краевая задача для уравнений Максвелла в области, ограниченной поверхностью S с граничным условием

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}]|_S = 0, \quad (1.13)$$

имеет нетривиальные решения при данном значении k.

В силу формул Стрэттона — Чу для электрического поля внутри области, ограниченной поверхностью S, имеет место интегральное представление

$$\mathbf{E}(M) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[[\mathbf{n}(P), \mathbf{E}(P)], \operatorname{grad}_P \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right] dS_P. \quad (1.14)$$

Переходя к пределу при M, стремящейся к точке P_0 на поверхности S, и учитывая свойства потенциала двойного слоя (1.8), получим

$$\frac{1}{2} [[\mathbf{n}_{P_0}, \mathbf{E}]\, \mathbf{n}_{P_0}] = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[[\mathbf{n}(P), \mathbf{E}] \operatorname{grad}_P \frac{e^{-ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}} \right] dS_P.$$

Обозначая

$$[\mathbf{n}_P, \mathbf{E}(P)]|_S = \eta(P)$$

и учитывая равенство

$$\operatorname{grad}_P \frac{e^{-ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}} = -\operatorname{grad}_{P_0} \frac{e^{-ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}},$$

получим уравнение (1.12).

Таким образом, если внутренняя краевая задача имеет нетривиальные решения, то касательная составляющая электрического поля является решением уравнения (1.12). И наоборот,

4*

если уравнение (1.12) имеет нетривиальные решения, то соотношение (1.14) определяет электрическое поле внутри области, ограниченной поверхностью S, а соответствующая подстановка в уравнения Максвелла — магнитное поле внутри области.

Известно, что однородная краевая задача имеет не более чем счетное множество собственных частот, которым соответствуют характеристические числа однородного интегрального уравнения (1.12). Таким образом, если при заданном значении k число $\frac{1}{2\pi}$ не является характеристическим числом уравнения (1.12), то уравнение (1.11) однозначно разрешимо.

Подчеркнем еще раз, что из вывода уравнения (1.11) видно, что оно для данных значений k разрешимо для правых частей $\mathbf{j}^{\text{перв}}$, определенных формулой (1.10), причем решение уравнения может определяться неоднозначно, что следует учесть при численном решении интегрального уравнения.

Возможен и другой путь получения интегрального уравнения второго рода для идеально проводящего тела, основанный на теории потенциала. Введем формально для электрического поля вне поверхности S интегральное представление в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_0(M) - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\mathbf{j}^m(P), \operatorname{grad}_P \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right] dS_P,$$

где $\mathbf{E}_0(M)$ — поле заданных источников в отсутствие идеально проводящего тела, $\mathbf{j}^m(P)$ — плотность потенциала двойного слоя. Требуя выполнения граничного условия (1.2) на поверхности идеально проводящего тела S, получим интегральное уравнение для плотности потенциала

$$\mathbf{j}^m(P_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \left[\mathbf{n}_{P_0} \left[\mathbf{j}^m(P), \operatorname{grad}_P \frac{e^{ikR_{PP_0}}}{R_{PP_0}} \right] \right] dS_P = -2\mathbf{j}_{\text{м}}^{(\text{перв})}, \tag{1.15}$$

где

$$\mathbf{j}_m^{(\text{перв})} = [\mathbf{n}_{P_0}, \mathbf{E}_0(P_0)]. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.15) получено не как следствие краевой задачи (1.1)—(1.2), поэтому вопросы существования его решения требуют специального рассмотрения на основе теории интегральных уравнений Фредгольма со слабополярным ядром. Проведя такие рассмотрения, можно показать, что уравнение (1.15) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда объем D нерезонансный, т. е. внутренняя однородная краевая задача электродинамики для объема D с границей S с граничным условием (1.2) имеет только нулевое решение.

Для численного решения интегральных уравнений второго рода обычно применяют методы сведения к решению систем линейных алгебраических уравнений. Однако следует отметить, что исходные интегральные уравнения (1.12) и (1.15) являются векторными. Это приводит к увеличению порядка получаемых при численной реализации метода систем линейных алгебраических уравнений. Для получения достаточной точности в случае пространственных тел произвольной формы приходится рассматривать алгебраические системы линейных уравнений высокого порядка. Поэтому к настоящему времени число решенных задач для пространственных тел весьма ограничено, а диаметр тела по сравнению с длиной волны мал. Подробнее рассмотрены такие тела, для которых можно обеспечить достаточную точность решения, используя при этом системы не слишком высокого порядка.

Особый случай представляют тела вращения, для которых решение исходных уравнений (1.12) и (1.15) можно свести к решению одномерных интегральных уравнений. Рассмотрим более подробно интегральные уравнения для тел вращения.

Пусть поверхность S образована вращением кривой C вокруг оси z. Введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z). Уравнение кривой C запишем в виде

$$\rho = \rho(l), \quad z = z(l), \quad 0 \leqslant l \leqslant L,$$

где в качестве параметра l выбрана длина дуги. Тогда уравнение поверхности S можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho \rho(l) + \mathbf{e}_3 z(l),$$

где $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы цилиндрической системы координат. Вычислим единичные векторы $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_\varphi$, касательные к поверхности S в точке M с координатами (l, φ):

$$\mathbf{e}_l = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \rho}{\partial l} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial z}{\partial l} = \{\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi\} \frac{\partial \rho}{\partial l} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial z}{\partial l},$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi,$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы декартовой системы координат. Вектор нормали $\mathbf{n}(M)$ имеет вид

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_l] = \{\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi\} \frac{\partial z}{\partial l} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial \rho}{\partial l}.$$

Поверхностный ток $\mathbf{j}(M)$ разложим на составляющие вдоль $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{j}(M) = \mathbf{e}_l j_l(\varphi, l) + \mathbf{e}_\varphi j_\varphi(\varphi, l)$$

— и уравнение (1.11) перепишем в скалярном виде для компонент j_l и j_φ:

$$j_l(\varphi, l) = 2(\mathbf{e}_l(M), \mathbf{H}_0(M)) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_C\int\limits_0^{2\pi}\{j_l(\varphi', l')(\mathbf{e}_l(M), \operatorname{grad}_P\psi, \mathbf{e}_l(P)) +$$

$$+ j_\varphi(\varphi', l')(\mathbf{e}_l(M), \operatorname{grad}_P\psi, \mathbf{e}_\varphi(P)\}\rho' dl' d\varphi',$$

$$-j_\varphi(\varphi, l) = 2(\mathbf{e}_\varphi(M), \mathbf{H}_0(M)) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_C\int\limits_0^{2\pi}\{j_l(\varphi', l')(\mathbf{e}_\varphi(M), \operatorname{grad}_P\psi, \mathbf{e}_l(P)) +$$

$$+ j_\varphi(\varphi', l')(\mathbf{e}_\varphi(M), \operatorname{grad}_P\psi, \mathbf{e}_\varphi(P))\}\rho' dl' \varphi', \qquad (1.17)$$

где φ, l — координаты точки $M \in S$; φ', l' — координаты точки $P \in S$, $\psi = \exp\ \{ikR_{MP}/R_{MP}\}$. Разложим компоненты тока j_l и j_φ в ряды Фурье по φ. Имеем

$$j_l(\varphi, l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_l^{(m)}(l)\, \mathbf{e}^{im\varphi},$$

$$j_\varphi(\varphi, l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_\varphi^{(m)}(l)\, \mathbf{e}^{im\varphi}. \qquad (1.18)$$

Используя явные выражения для векторов $\mathbf{e}_l$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{n}$, легко убедиться, что ядра системы интегральных уравнений (1.17) зависят от разности $\varphi - \varphi'$. Поэтому разложение ядер в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}(\mathbf{e}_\alpha(M), \operatorname{grad}_P\psi, \mathbf{e}_\beta(P)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}^{(m)}(l, l')\, \mathbf{e}^{im(\varphi-\varphi')}, \qquad (1.19)$$

где коэффициенты разложения $K_{\alpha\beta}^{(m)}(l, l')$ определяются обычным образом.

Подставляя разложения (1.18) и (1.19) в (1.17), получим систему одномерных интегральных уравнений для гармоник тока $j_l^{(m)}(l)$ и $j_\varphi^{(m)}(l)$, имеющую вид

$$j_l^{(m)}(l) - \int\limits_C \{K_{ll}^{(m)}(l, l')\, j_l^{(m)}(l') + K_{l\varphi}^{(m)}(l, l')\, j_\varphi^{(m)}(l')\}\rho' dl' = 2f_l^{(m)}(l) \qquad (1.20)$$

и

$$j_\varphi^{(m)}(l) + \int\limits_C \{K_{\varphi l}^{(m)}(l, l')\, j_l^{(m)}(l') + K_{\varphi\varphi}^{(m)}(l, l')\, j_\varphi^{(m)}(l')\}\rho' dl' = -2f_\varphi^{(m)}(l),$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $f_l^{(m)}(l)$ и $f_\varphi^{(m)}(l)$ — гармоники Фурье возбуждения (падающего поля):

$$(\mathbf{e}_l, \mathbf{H}_0)|_S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_l^{(m)}(l)\, \mathbf{e}^{im\varphi},$$

$$(\mathbf{e}_\tau, \mathbf{H}_0)|_S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_\tau^{(m)}(l)\, e^{im\varphi}.$$

Таким образом, задача дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле вращения сводится к системе двух одномерных уравнений для гармоник поверхностного тока.

Рассмотрим задачу возбуждения импедансных тел. В случае импедансного тела граничное условие имеет вид

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S = w[\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_S \tag{1.21}$$

и формула Стрэттона — Чу (формула (5.32) гл. I) преобразуется к виду

$$\mathbf{H}(M) = \mathbf{H}_0(M) + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{ i\omega\varepsilon w[\mathbf{n}, \mathbf{j}] \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} - \left[\mathbf{j}, \operatorname{grad}_P \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right] - \right.$$

$$\left. - (\mathbf{n}, \mathbf{H}) \operatorname{grad}_P \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right\} dS_P. \tag{1.22}$$

При переходе к пределу при стремлении точки M к точке P_0 на поверхности S появится внеинтегральный член в правой части (1.22), равный $\frac{1}{2}(\mathbf{n}(P_0), \mathbf{H}(P_0))\mathbf{n}$, но когда вычисляется касательная составляющая вектора $\mathbf{H}(P_0)$ на поверхности S, это слагаемое пропадает. В силу граничного условия (1.21) имеет место соотношение

$$(\mathbf{n}, \mathbf{H}(P)) = \frac{1}{i\omega\varepsilon}(\mathbf{n}, \operatorname{rot}(w\mathbf{j})).$$

Поэтому уравнение по поверхности S относительно тока $\mathbf{j}$ имеет вид

$$\mathbf{j}(P_0) + \frac{1}{2\pi}\oint_S \left\{ \left[\mathbf{n}(P_0)\left[\mathbf{j}(P) \operatorname{grad}_P \frac{e^{ikR_{P_0P}}}{R_{P_0P}}\right]\right] - \right.$$

$$- i\omega\varepsilon w[\mathbf{n}(P_0)[\mathbf{n}(P), \mathbf{j}(P)]] \frac{e^{ikR_{P_0P}}}{R} + \frac{i}{\omega\varepsilon}(\mathbf{n}(P), \operatorname{rot} w\mathbf{j}) \times$$

$$\left. \times \left[\mathbf{n}(P_0), \operatorname{grad} \frac{e^{ikR}}{R}\right] \right\} dS = 2\mathbf{j}^{(\text{пер})}(P_0). \tag{1.23}$$

Полученное соотношение является интегродифференциальным уравнением относительно тока $\mathbf{j}$, что осложняет численную реализацию его решения. Выражение $(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{w}\mathbf{j})$ содержит производные лишь по направлениям, касательным к поверхности S, что дает возможность формальным интегрированием по частям перенести эти производные на второй сомножитель. Однако при этом получаются расходящиеся интегралы, требующие дополнительных исследований.

§ 2. Интегральные и интегрофункциональные уравнения первого рода

В предыдущей главе метод интегральных уравнений был использован для доказательства теорем существования решений задач дифракции. Аппарат интегральных уравнений удобен и при численном решении этих задач.

Если при доказательстве теорем существования удобны интегральные уравнения Фредгольма второго рода, то при численном решении используются как уравнения второго рода, так и уравнения первого рода, причем в ряде случаев уравнения первого рода имеют ряд преимуществ по сравнению с уравнениями второго рода.

Рассмотрим уравнения первого рода, к которым могут быть сведены задачи дифракции. Начнем изучение со скалярного случая. Пусть волна, создаваемая локальными источниками $f(M)$, падает на тело D, ограниченное замкнутой поверхностью S. Будем считать, что на поверхности S выполняется первое однородное краевое условие. Тогда для определения полного поля u вне поверхности S (в области D_e) нужно решить следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}\Delta u + k^2 u = f \text{ в } D_e,\\ u|_S = 0,\\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Будем считать, что функция $f(M)$ непрерывна, а S является поверхностью Ляпунова. Тогда задача (2.1) имеет, и притом единственное, решение и оно может быть выражено по формуле Грина:

$$\begin{gathered}u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} \right\} dS_P + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_T f(P) \frac{e^{ikR}}{R} d\tau_P, \quad M \in D_e,\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $R = R_{MP}$ — расстояние между точками M и P; T — носитель функции $f(M)$.

Подставляя в (2.2) граничное условие для $u(P)$, получим

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}(P) \frac{e^{ikR}}{R} dS_P + F(M), \tag{2.3}$$

где

$$F(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_T f(P) \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} d\tau_P.$$

Таким образом, для определения полного поля $u(M)$ в области D_e достаточно найти значение $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$. Для функции $\mu(P) = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ можно получить интегральное уравнение первого рода. Для этого в формуле Грина поместим точку M в область D. Тогда получим

$$\oint\limits_S \mu(P) \frac{e^{ikR}}{R_{MP}} dS_P = F(M), \quad M \in D. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) — это интегральное (или интегрофункциональное) уравнение Фредгольма первого рода относительно функции $\mu(P)$, заданной на поверхности S. Особенностью этого уравнения является то, что области определения его правой части и неизвестной функции не совпадают и имеют разную размерность.

Рассмотрим вопрос об эквивалентности уравнения (2.4) краевой задаче (2.1). Прежде всего заметим, что правая часть уравнения (2.4) имеет весьма специальный вид. Это приводит к тому, что, как видно из вывода уравнения (2.4), предельное значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ решения внешней краевой задачи (2.1) на поверхности S является решением уравнения (2.4). Следовательно, из существования решения краевой задачи (2.1) вытекает существование решения уравнения (2.4).

Установим, что непрерывное решение уравнения (2.4) единственно. Для этого нужно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$\oint\limits_S \mu(P) \psi(M, P) dS_P = 0, \quad M \in D, \tag{2.5}$$

где

$$\psi(M, P) = \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}},$$

имеет только тривиальное решение. Пусть $\mu=\mu_0(P)$ — решение уравнения (2.5). Тогда функция

$$V(M)=\oint_S \mu_0(P)\psi(M,P)\,dS_P$$

в области D обращается в тождественный нуль, в D_e удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и условиям излучения в бесконечности. Функция $V(M)$, как потенциал простого слоя, непрерывна при переходе через поверхность S. Следовательно,

$$V(M)|_S=0.$$

Поэтому функция $V(M)$, являясь решением внешней однородной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, тождественно обращается в нуль в области D_e. Учитывая разрывные свойства $\dfrac{\partial V}{\partial n}$ при переходе через поверхность S, находим

$$\mu_0(P)\equiv 0 \text{ на } S.$$

Таким образом, уравнение (2.5) имеет только тривиальное решение, а решение уравнения (2.4) единственно. Следовательно, краевая задача (2.1) и уравнение (2.4) эквивалентны. Решив уравнение (2.4) и подставив его решение $\mu(P)=\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ в соотношение (2.3), получим решение краевой задачи (2.1).

Заметим, что в уравнении (2.4) точка M может пробегать не всю область D, а некоторую подобласть D' области D. В частности, множество значений точки M может представлять собой нерезонансную замкнутую поверхность Ляпунова, целиком лежащую в D (поверхность Σ называется нерезонансной для заданных k, если однородная задача $\Delta u+k^2u=0$ внутри Σ,

$$u|_\Sigma=0$$

имеет только тривиальное решение).

Выше было показано, что в классе непрерывных на S функций уравнение (2.5) имеет только нулевое решение. Если воспользоваться свойствами потенциалов с плотностью из $L_2(S)$, то та же схема доказательства позволяет показать, что и в $L_2(S)$ уравнение (2.5) имеет только нулевое решение. Это означает, что ядро $\psi(M, P)$ уравнения (2.5) замкнуто в $L_2(S)$. Отсюда вытекает важное следствие.

Введем сферическую систему координат с центром в точке O, расположенной в области D. Пусть (r, ϑ, φ) и $(r', \vartheta', \varphi')$ — сферические координаты точек P и M соответственно, при этом $P\in S$, а точка M пробегает внутренность шара K с центром в O, радиус которого меньше, чем расстояние от точки O до поверхности S. Используя теорему сложения для цилиндрических функций и полноту системы сферических функций, получим, что уравнение (2.5) эквивалентно соотношениям

$$\oint_S \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_n(\cos\vartheta)\, e^{ im\varphi}\mu(P)\,dS = 0,$$

$$n=0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда непосредственно следует, что система частных решений уравнения Гельмгольца (система метагармонических функций)

$$\{u_\nu(M)\} = \left\{ \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_n(\cos\vartheta)\, e^{ im\varphi} \right\}, \tag{2.6}$$

$$n=0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m=0, 1, 2, \ldots, n,$$

полна и замкнута в $L_2(S)$ на любой замкнутой поверхности Ляпунова.

Аналогично, внешнюю третью краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\begin{gathered} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu\,|_S = f(P)\,|_S, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty \end{gathered} \tag{2.7}$$

можно свести к интегральному уравнению первого рода.

Решение задачи (2.7) по формуле Грина можно представить в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \psi(M, P) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + h\psi \right) u \right\} dS_P, \quad M \in D_e,$$

$$\psi(M, P) = \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}. \tag{2.8}$$

Чтобы получить интегральное уравнение для $u|_S$, поместим точку M в области D. Тогда

$$\oint_S \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n_P} + h\psi \right\} u(P)\,dS = \oint_S \psi(M, P) \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) dS.$$

Отсюда, используя граничное условие, сразу получаем уравнение

$$\oint_S \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n_P}(M, P) + h\psi(M, P) \right\} u(P)\,dS = F(M), \quad M \in D, \tag{2.9}$$

где

$$F(M)=\oint_S \psi(M,P)\,f(P)\,dS,\quad M\in D.$$

Заметим, что решением уравнения (2.9) является решение краевой задачи (2.8), взятое на поверхности S. Следовательно, для доказательства эквивалентности интегрального уравнения (2.9) краевой задаче (2.7) достаточно доказать единственность решения уравнения (2.9).

Покажем, что однородное уравнение

$$\oint_S \left\{\frac{\partial\psi}{\partial n_P}(M,P)+h\psi(M,P)\right\}\mu(P)\,dS=0,\quad M\in D, \tag{2.10}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $\tilde\mu(P)$ — решение уравнения (2.10). Построим функцию

$$V(M)=\oint_S \tilde\mu(P)\left\{\frac{\partial\psi}{\partial n_P}(M,P)+h\psi(M,P)\right\}dS_P.$$

В силу (2.10) $V(M)\equiv 0$ в области D. Подсчитаем скачки функции V и ее нормальной производной при переходе через поверхность S:

$$[V]=4\pi\tilde\mu(P),$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]=-4\pi h(P)\,\tilde\mu(P).$$

Следовательно,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n}+hV\right]=0.$$

Так как $V\equiv 0$ в D, то в D_e она является решением следующей внешней задачи:

$$\Delta V+k^2V=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n}+hV\,\Big|_S=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}-ikV=o\left(\frac{1}{r}\right)\ \text{при}\ r\to\infty.$$

Согласно теореме единственности, $V\equiv 0$ в D_e. Учитывая скачок $V(M)$ при переходе через S, получаем

$$\tilde\mu(P)=0\ \text{на}\ S.$$

Следовательно, однородное уравнение (2.10) имеет только тривиальное решение, а решение уравнения (2.9) единственно.

Определив решение уравнения (2.9), решение краевой задачи (2.7) построим по формуле Грина (2.8). Заметим, что из единственности решения интегрального уравнения (2.9) вытекает, что система функций

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n}+h\right\}\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\,e^{\pm im\varphi},$$

$$n=0,1,2,\ldots,\infty,\quad m=0,1,2,\ldots,n,$$

полна и замкнута в $L_2(S)$ на любой замкнутой поверхности Ляпунова, содержащий точку O внутри.

Выведем теперь интегральные уравнения первого рода задачи дифракции на прозрачном теле, сводящейся к следующей математической задаче:

$$\Delta u_1+k_1^2u_1=-f_1 \text{ в } D,\ \Delta u_2+k_2^2u_2=-f_2 \text{ в } D_e (f_1\neq 0 \text{ в } V_1,\ f_2\neq 0 \text{ в } V_2)$$

$$u_1-u_2|_S=0,$$

$$p_1\frac{\partial u_1}{\partial n}-p_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_S=0,\ p_1,p_2\neq 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r}-ik_2u_2=o\left(\frac{1}{r}\right),\ r\to\infty.$$

Применим формулу Грина к функциям $u_2(P)$ и $\dfrac{e^{ik_2R_{MP}}}{R_{MP}}$, $M\in D$, в области D_e. Получим

$$\oint_S\left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\frac{e^{ik_2R}}{R}-u_2\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{e^{ik_2R}}{R}\right\}dS=\int_{V_2}f_2(P)\frac{e^{ik_2R}}{R}d\tau_P,\quad M\in D. \tag{2.12}$$

Чтобы получить второе уравнение, применим формулу Грина в области D к функциям $u_1(P)$ и $\exp(ik_1R)/R_{MP}$, $M\in D_e$. Имеем

$$\oint_S\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\frac{e^{ik_1R}}{R}-u_1\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ik_1R}}{R}\right\}dS=\int_{V_1}f_1(P)\frac{e^{ik_1R}}{R}d\tau_P,\quad M\in D_e. \tag{2.13}$$

Если теперь использовать условия сопряжения на границе раздела S двух сред

$$u_2|_S=u_1|_S,\quad \frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_S=\frac{p_2}{p_1}\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_S,$$

то получим следующую систему интегральных уравнений относительно $u_2|_S$ и $\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S$:

$$\oint\limits_S \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial n} \frac{e^{ik_1R}}{R} - u_2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_2R}}{R} \right\} dS = \int\limits_{V_2} f_2(P) \frac{e^{ik_2R}}{R} d\tau_P, \quad M \in D,$$

$$\oint\limits_S \left\{ \frac{p_2}{p_1} \frac{\partial u_2}{\partial n} \frac{e^{ik_1R}}{R} - u_2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik_1R}}{R} \right\} dS = -\int\limits_{V_1} f_1(P) \frac{e^{ik_1R}}{R} d\tau_P,$$

$$M \in D_e. \tag{2.14}$$

После того как $u_2|_S$ и $\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S$ определены из системы уравнений (2.14), $u_1|_S$ и $\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S$ можно вычислить из условий сопряжения, а сами поля в D и D_e выразить квадратурами по третьей формуле Грина.

Система интегральных уравнений (2.14) имеет единственное решение и эквивалентна исходной краевой задаче. Доказательство проводится аналогично предыдущему.

Интегрофункциональное уравнение (2.4) есть двумерное интегральное уравнение. При его численном решении возникает ряд трудностей, связанных с тем, что неизвестная функция — это функция двух переменных. Поэтому представляет интерес выделить те случаи, когда уравнение (2.4) достаточно просто сводится к одномерным интегральным уравнениям. Это можно легко сделать, если поверхность S является поверхностью вращения.

Пусть поверхность S образована вращением кривой C вокруг оси z. Будем считать, что кривая C не имеет самопересечений и ее концы лежат на оси z. Будем также предполагать, что поверхность S содержит внутри себя отрезок своей оси вращения (оси z).

Воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций, уравнение (2.4) перепишем в виде соотношений

$$\oint\limits_S \mu(P) \frac{H^{(1)}_{n'+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n'}(\cos\vartheta)\, e^{\pm im\varphi} dS = F^{\pm m}_{n'},$$

$$n' = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n', \tag{2.15}$$

где

$$F^{\pm m}_{n'} = \oint\limits_S f(P) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{H^{(1)}_{n'+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n'}(\cos\vartheta)\, e^{\pm im\varphi} \right\} dS,$$

r, θ, φ — сферические координаты точки P, причем начало координат выбрано внутри S на оси z.

Разложим неизвестную функцию в ряд Фурье по углу φ:

$$\mu(P)|_S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m(l)\, e^{im\varphi},$$

где ρ, z, φ — цилиндрические координаты точки P, причем ось z направлена вдоль оси вращения, l — длина дуги образующей, $\rho(l)$ и $z(l)$ являются функциями l. Так как

$$dS = \rho\, dl\, d\varphi,$$

то соотношения (2.15) принимают следующий вид:

$$\int_C \mu_{\pm m}(l) \frac{H^{(1)}_{n'+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n'}(\cos\theta)\,\rho\, dl = F^{\pm m}_{n'},$$

$$n' = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n', \tag{2.16}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Для дальнейшего изложения удобно вместо индекса n' ввести индекс $n = n' - m$ и записать (2.16) в виде

$$\int_C \mu_{\pm m}(l) \frac{H^{(1)}_{n+m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n+m}(\cos\theta)\,\rho\, dl = F^{\pm m}_{n+m}, \tag{2.17}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ и m изменяется независимо от n и принимает значения $0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Пусть ζ — координата точки M, лежащей на оси вращения внутри S, причем ζ таково, что сфера радиуса ζ лежит внутри S. Домножив (2.17) на

$$\frac{(-1)^m 2^{2m+1/2}\Gamma(m+1/2)\, k^{-(m+1/2)}}{(2m)!}(m+n+1/2)\frac{J_{n+m+1/2}(k\zeta)}{\zeta^{n+1/2}}$$

и просуммировав по n от 0 до ∞, воспользовавшись при этом обобщенной теоремой сложения

$$r^m \frac{H^{(1)}_{m+1/2}(kR)}{R^{m+1/2}} = (-1)^m \frac{2^{2m+1/2} m!\, \Gamma(m+1/2)}{(2m)!\, k^{m+1/2}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (n+m+1/2) \frac{J_{n+m+1/2}(k\zeta)}{\zeta^{m+1/2}} \frac{H^{(1)}_{n+m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n+m}(\cos\theta),$$

где $\zeta < r$,

$$R = \sqrt{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta\cos\theta} = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Имеем следующее интегральное уравнение первого рода относительно гармоники $\mu_m(l)$:

$$\int\limits_C \mu_{\pm m}(l) \frac{H^{(1)}_{m+1/2}(kR)}{R^{m+1/2}} r^m \rho dl = F_{\pm m}(\zeta), \tag{2.18}$$

$$m=0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

где

$$F_{\pm m}(\zeta) = \int\limits_C f_{\pm m}(l) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{H^{(1)}_{m+1/2}(kR)}{R^{m+1/2}} r^m \right\} \rho dl,$$

$f_{\pm m}(l)$ — коэффициент Фурье функции $f(P)$ на поверхности S:

$$f(P)|_S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(l) e^{im\varphi}.$$

Ядро уравнения (2.18) аналитично по ζ, поэтому ζ может пробегать весь отрезок оси z, расположенный внутри S.

До сих пор внешняя краевая задача для уравнения Гельмгольца сводилась к интегрофункциональному уравнению первого рода с регулярным ядром.

На примере первой краевой задачи (2.1) рассмотрим интегральное уравнение первого рода с сингулярным ядром, к которому может быть сведена данная краевая задача.

Применяя, как и прежде, к решению задачи (2.1) третью формулу Грина, найдем, что решение может быть представлено в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} \psi(M, P) dS_P + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{D_0} f\psi d\tau_P. \tag{2.19}$$

Чтобы получить интегральное уравнение для $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$, перейдем в (2.19) к пределу, помещая точку M на поверхность S. Учитывая граничное условие, получим интегральное уравнение первого рода

$$\oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}(P) \psi(M, P) dS_P = -F(M), \quad M \in S, \tag{2.20}$$

где

$$F(M) = \int\limits_{D_0} f(P) \psi(M, P) d\tau_P, \quad M \in S.$$

Ядро полученного уравнения имеет особенность при совпадении точек M и P.

Как и прежде, вопрос о разрешимости уравнения (2.20) не возникает, поскольку правая часть его имеет специальный вид. Исследуем вопрос о единственности решения этого уравнения.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\oint_S \psi(M, P)\mu(P)\,dS_P = 0, \quad M \in S. \tag{2.21}$$

Пусть уравнение (2.21) имеет решение $\mu = \tilde{\mu}(P)$. Построим функцию

$$V(M) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \psi(M, P)\tilde{\mu}(P)\,dS_P. \tag{2.22}$$

В силу (2.21) $V(M) \equiv 0$ на S. Так как $V(M)$ в области D_e является решением внешней однородной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условиям излучения в бесконечности, то

$$V(M) \equiv 0 \text{ в } D_e.$$

В области D $V(M)$ является решением следующей задачи:

$$\Delta V + k^2 V = 0, \quad V|_S = 0. \tag{2.23}$$

Если k^2 не совпадает ни с одним собственным значением внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, то $V(M) \equiv 0$ в D. Используя в этом случае разрывные свойства $\dfrac{\partial V}{\partial n}$ при переходе через S, найдем, что $\tilde{\mu}(P) = 0$ на S.

Таким образом, в случае нерезонансной поверхности (k^2 не совпадает с собственным значением задачи Дирихле) однородное уравнение (2.21) имеет только тривиальное решение, а решение неоднородного уравнения (2.20) единственно. В этом случае интегральное уравнение (2.20) эквивалентно исходной краевой задаче.

Перейдем к исследованию случая, когда $k^2 = \lambda_m$, где λ_m — некоторое собственное значение внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа. В этом случае задача (2.23) имеет ненулевое решение, и если функция $V(M) \not\equiv 0$ в D, то она является собственной функцией $v_m(M)$ краевой задачи (2.23), т. е. $V(M) \equiv v_m(M)$ в D. Применяя к $v_m(M)$ в области D формулу Грина, получим

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial v_m}{\partial n}(P)\psi(M, P)\,dS_P = \begin{cases} v_m(M), & M \in D, \\ 0, & M \in D_e + S. \end{cases} \tag{2.24}$$

Следовательно,

$$W(M) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{\tilde{\mu} - \frac{\partial v_m}{\partial n}\right\}\psi(M, P)\,dS_P \equiv 0$$

во всем пространстве $(D+S+D_e)$. Отсюда, учитывая разрыв $\frac{\partial W}{\partial n}(M)$ при переходе через S, находим

$$\tilde{\mu}(P) = \frac{\partial v_m}{\partial n}\Big|_S.$$

Таким образом, при $k^2=\lambda_m$ однородное интегральное уравнение (2.21) имеет нетривиальные решения, причем ими являются предельные значения нормальных производных собственных функций задачи Дирихле, соответствующих собственному значению λ_m. Общее решение неоднородного интегрального уравнения (2.20) в этом случае имеет вид

$$\mu = \mu_1(P) + \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \frac{\partial v_m^{(\nu)}}{\partial n}\Big|_S, \qquad (2.25)$$

где $\mu_1(P)$ — частное решение неоднородного уравнения; N — ранг собственного значения λ_m; $v_m^{(\nu)}(M)$ - линейно независимые собственные функции задачи Дирихле, соответствующие собственному значению λ_m. Подставляя $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \mu$, где $\mu(P)$ определено формулой (2.25), в (2.19) и учитывая (2.24), найдем, что в D_e+S

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\left(\int_S \mu_1(P)\psi(M,P)\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_{D_0} f\psi d\tau\right).$$

Частные решения интегрального уравнения определены с точностью до линейной комбинации, входящей в (2.24), поэтому любое решение интегрального уравнения (2.20) приводит к одному и тому же решению краевой задачи.

Итак, интегральное уравнение (2.20) при любом значении k^2 разрешимо и позволяет построить решение внешней краевой задачи (2.1).

Выведем следующее полезное следствие. При исследовании однородного интегрального уравнения (2.21) было показано, что функция $V(M)$, определенная формулой (2.22), при всех k равна нулю в D_e+S. Пусть точка M лежит на некоторой нерезонансной сфере с центром в D, содержащей поверхность S внутри себя. Используя теорему сложения для цилиндрических функций и ортогональность сферических функций, получим

$$\oint_S \tilde{\mu}(P)\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} dS = 0, \qquad (2.26)$$

$$n=0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m=0, 1, 2, \ldots, n,$$

причем система соотношений (2.26) эквивалентна однородному интегральному уравнению (2.21). Отсюда сразу получаем, что система частных решений уравнения Гельмгольца

$$\left\{ \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(\cos\vartheta) e^{+im\varphi} \right\}, \tag{2.27}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

при $k^2 \neq \lambda_m$ полна и замкнута в $L_2(S)$ на произвольной замкнутой поверхности Ляпунова. Если же $k^2 = \lambda_m$, то система (2.27) не является замкнутой в $L_2(S)$, ее дефект равен рангу собственного значения λ_m и, чтобы она стала замкнутой, ее следует пополнить функциями

$$\left. \frac{\partial v_m^{(\nu)}}{\partial n} \right|_S, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \operatorname{rang} \lambda_m.$$

В электромагнитном случае интегральные (интегрофункциональные) уравнения первого рода получаются аналогично.

Сначала рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем теле, находящемся в среде с однородными характеристиками ε, μ. Пусть электромагнитное поле $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ падает на идеально проводящее тело D, ограниченное замкнутой поверхностью S. Представив полное электромагнитное поле $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ в области D_e в виде

$$\mathscr{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}, \quad \mathscr{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H},$$

получим для дифрагированного поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ следующую задачу: найти в области D_e решение системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{2.28}$$

удовлетворяющее на поверхности S граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E} + \mathbf{E}_0]|_S = 0 \tag{2.29}$$

и условиям излучения на бесконечности.

Решение краевой задачи (2.28) — (2.29) может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}(M) = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon} \oint_S [\mathbf{n}, \mathbf{H}]\, \psi(M, P)\, dS_P -$$

$$- \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{1}{4\pi\omega^2\varepsilon\mu} \oint_S \operatorname{rot}_M \{[\mathbf{n}, \mathbf{E}]\, \psi\}\, dS_P; \tag{2.30}$$

$$\mathbf{H}(M) = -\operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \oint_S [\mathbf{n}, \mathbf{H}]\, \psi\, dS_P -$$

$$- \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi i\omega\mu} \oint_S \operatorname{rot}_M \{[\mathbf{n}, \mathbf{E}]\, \psi\}\, dS_P, \tag{2.31}$$

где

$$\psi(M, P) = \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}, \quad M \in D_e,$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

и $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S.

Пусть $\mathbf{j}_e(P) = [\mathbf{n}, \mathbf{H}]$. Тогда в силу граничных условий (2.29) соотношения (2.30) — (2.31) принимают соответственно вид

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \oint_S \mathbf{j}_e(P)\psi(M, P)\, dS + \mathbf{E}_1(M), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{H}(M) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \oint_S \mathbf{j}_e(P)\psi(M, P)\, dS + \mathbf{H}_1(M), \quad M \in D_e,$$

(2.33)

где

$$\mathbf{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi k^2} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \oint_S [\operatorname{grad}_M\psi, [\mathbf{n}, \mathbf{E}_0]]\, dS,$$

$$\mathbf{H}_1(M) = \frac{1}{4\pi i\omega\mu} \operatorname{rot} \oint_S [\operatorname{grad}_M\psi, [\mathbf{n}, \mathbf{E}_0]]\, dS.$$

Таким образом, для определения поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области D_e достаточно определить ток $\mathbf{j}_e = [\mathbf{n}, \mathbf{H}]$ на поверхности S. Заметим, что векторы $\mathbf{E}_1(M)$ и $\mathbf{H}_1(M)$ определены всюду вне S.

Чтобы получить интегральное уравнение для тока $\mathbf{j}_e(P)$, поместим точку M внутри области D. Тогда, аналогично (2.33), получим

$$\operatorname{rot}_M \oint_S \mathbf{j}_e(P)\psi(M, P)\, dS = -4\pi\mathbf{H}_1(M), \quad M \in D, \quad (2.34)$$

или

$$\oint_S [\operatorname{grad}_M\psi(M, P), \mathbf{j}_e(P)]\, dS = -4\pi\mathbf{H}_1(M), \quad (2.35)$$

$$M \in D, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}_e) = 0.$$

Соотношение (2.35) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно тока $\mathbf{j}_e(P)$. Решив его, найдем по формулам (2.32) и (2.33) поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$.

Исследуем теперь вопрос об эквивалентности уравнения (2.35) краевой задаче (2.28) — (2.29). Прежде всего, как и в скалярном случае, отметим, что из существования решения краевой задачи вытекает разрешимость уравнения (2.35). Следовательно, для доказательства эквивалентности достаточно показать единственность решения уравнения (2.35).

Покажем, что соответствующее однородное уравнение

$$\oint\limits_S [\operatorname{grad}_M \psi(M, P), \mathbf{j}]\, dS = 0, \quad M \in D, \tag{2.36}$$

имеет только тривиальное решение. Пусть $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0(P)$ — непрерывное решение уравнения (2.36). Построим векторные функции:

$$\mathbf{V}(M) = \oint\limits_S [\operatorname{grad}_M \psi, \mathbf{j}_0]\, dS = \operatorname{rot} \oint\limits_S \mathbf{j}_0 \psi\, dS; \tag{2.37}$$

$$\mathbf{U}(M) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{V} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint\limits_S \mathbf{j}_0 \psi\, dS. \tag{2.38}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ при всех $M \notin S$ удовлетворяют однородной системе уравнений Максвелла (2.28). В силу уравнения (2.36) $\mathbf{V}(M) \equiv 0$, $\mathbf{U}(M) \equiv 0$ в области D. Используя свойства поверхностных потенциалов, находим, что $[\mathbf{n}, \mathbf{U}]$ имеет предельные значения при приближении точки M к поверхности изнутри и снаружи и эти предельные значения совпадают между собой (прямого значения $[\mathbf{n}, \mathbf{U}]$ на S не существует). Следовательно,

$$\lim_{D_e \ni M \to S} [\mathbf{n}, \mathbf{U}] = 0.$$

Поэтому функции $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ в области D_e являются решением внешней краевой задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = -i\omega\varepsilon \mathbf{U},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{U} = i\omega\mu \mathbf{V} \text{ в } D_e,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{U}]|_S = 0,$$

удовлетворяющим условиям излучения в бесконечности. Согласно теореме единственности для внешней задачи, $\mathbf{V} \equiv 0$, $\mathbf{U} \equiv 0$ всюду в D_e. Учитывая теперь, что скачок $[\mathbf{n}, \mathbf{V}]$ при переходе через поверхность S равен $4\pi \mathbf{j}_0$, получаем

$$\mathbf{j}_0(P) = 0 \text{ на } S.$$

Таким образом, однородное уравнение (2.36) имеет только тривиальное решение, а решение уравнения (2.35) единственно. Следовательно, интегральное уравнение (2.35) эквивалентно исходной краевой задаче.

Интегральное уравнение (2.35) получено для поверхностного тока $\mathbf{j}_e(P)$, определяющего дифрагированное поле. Аналогичное уравнение можно получить и для полного тока:

$$\mathbf{J}_e(P) = [\mathbf{n}, \mathscr{H}]|_S = [\mathbf{n}, \mathbf{H} + \mathbf{H}_0]|_S.$$

Для этого применим формулу (2.31) к падающему полю $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ в области D. Имеем

$$\mathbf{H}_0(M) = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \oint_S [\mathbf{n}, \mathbf{H}_0] \psi dS +$$

$$+ \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi i\omega\mu} \oint_S \operatorname{rot}_M \{[\mathbf{n}, \mathbf{E}_0] \psi\} dS, M \in D. \quad (2.39)$$

Складывая (2.34) и (2.39), получим интегральное уравнение для полного тока

$$\operatorname{rot}_M \oint_S \mathbf{J}_e(P) \psi(M, P) dS = 4\pi \mathbf{H}_0(M), \quad M \in D,$$

или

$$\oint_S [\operatorname{grad}_M \psi(M, P), \mathbf{J}] dS = 4\pi \mathbf{H}_0(M), \quad M \in D.$$

Исходя из выражения для вектора электрического поля $\mathbf{E}$, можно получить для поверхностного тока другое уравнение. Помещая точку M в область D и используя выражение для вектора $\mathbf{E}$, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S \mathbf{j}_e \psi dS = -4\pi i\omega\varepsilon \mathbf{E}_1(M), \quad M \in D. \quad (2.40)$$

Если перейти к полному поверхностному току $\mathbf{J}_e$, как это было сделано ранее, то уравнение (2.40) принимает вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S \mathbf{J}_e \psi dS \quad 4\pi i\omega\varepsilon \mathbf{E}_0(M), \quad M \in D. \quad (2.41)$$

Доказательство единственности решения уравнения (2.41) проводится аналогично предыдущему (причем, как и прежде, решение определяется из класса векторов, касательных к поверхности S, т. е. удовлетворяющих условию $(\mathbf{J}_e, \mathbf{n}) = 0$ при всех $P \in S$).

Заметим, что, так же как и в скалярном случае, в векторных уравнениях первого рода можно считать, что точка M пробегает не всю область D, а только некоторую ее подобласть или замкнутую нерезонансную поверхность Σ, расположенную строго внутри D.

Перейдем к рассмотрению интегральных уравнений первого рода, соответствующих задаче дифракции на импедансном теле.

Пусть электромагнитное поле $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ падает на хорошо проводящее тело D. Представив полное поле $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ в виде

$$\mathscr{E} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0, \quad \mathscr{H} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0,$$

найдем, что дифрагированное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области D_e удовлетворяет однородной системе уравнений Максвелла, условию излучения в бесконечности и граничным условиям Щукина — Леонтовича на поверхности S:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}+\mathbf{E}_0]|_S=\zeta[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}+\mathbf{H}_0]]|_S. \tag{2.42}$$

Используя формулы (2.30) — (2.31) для полного поля, получим следующие представления для векторов:

$$\mathscr{E}(M)=\mathbf{E}_0(M)+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_S \mathbf{J}_e\psi dS -$$

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{4\pi k^2}\oint_S \operatorname{rot}_M\{\mathbf{J}_m\psi\}\,dS; \tag{2.43}$$

$$\mathscr{H}(M)=\mathbf{H}_0(M)-\operatorname{rot}\frac{1}{4\pi}\oint_S \mathbf{J}_e\psi dS-\operatorname{rot}\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_S \operatorname{rot}_M\{\mathbf{J}_m\psi\}\,dS, \tag{2.44}$$

где

$$M\in D_e, \quad \mathbf{J}_e=[\mathbf{n}, \mathscr{H}]|_S, \quad \mathbf{J}_m=[\mathbf{n}, \mathscr{E}]|_S$$

— полные поверхностные электрический и магнитный токи соответственно. Из граничных условий находим связь между $\mathbf{J}_e$ и $\mathbf{J}_m$:

$$\mathbf{J}_m=\zeta[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]$$

или

$$[\mathbf{n}, \mathbf{J}_m]=-\zeta\mathbf{J}_e.$$

Учитывая граничные условия, запишем выражения для поля $\{\mathscr{E}, \mathscr{H}\}$ в виде

$$\mathscr{E}=\mathbf{E}_0-\frac{1}{4\pi k^2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\oint_S\{i\omega\mu\mathbf{J}_e\psi+\zeta[\operatorname{grad}_M\psi[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]]\}\,dS; \tag{2.45}$$

$$\mathscr{H}=\mathbf{H}_0-\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\operatorname{rot}\oint_S\{i\omega\mu\mathbf{J}_e\psi+\zeta[\operatorname{grad}_M\psi[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]]\}\,dS, \quad M\in D_e. \tag{2.46}$$

Таким образом, для определения полного поля достаточно найти $\mathbf{J}_e$ на S. Чтобы получить интегральное уравнение для $\mathbf{J}_e(P)$, поместим точку M в область D. Тогда получим

$$\operatorname{rot}\oint_S\{i\omega\mu\mathbf{J}_e\psi+\zeta[\operatorname{grad}_M\psi[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]]\}\,dS=4\pi i\omega\mu\mathbf{H}_0(M), \quad M\in D. \tag{2.47}$$

Соотношение (2.47) есть уравнение первого рода относительно тока $\mathbf{J}_e(P)$. Заметим, что, как и раньше, существование решения уравнения (2.47) в этом классе следует из существования решения соответствующей краевой задачи.

Исследуем единственность решения уравнения (2.47). Рассмотрим однородное уравнение:

$$\operatorname{rot} \oint_S \{i\omega\mu \mathbf{J}_e\psi + \zeta [\operatorname{grad}\psi[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]]\} dS = 0, \qquad (2.48)$$

$$(\mathbf{J}_e, \mathbf{n}) = 0, \quad M \in D.$$

Пусть $\mathbf{J}_e^0(P)$ — непрерывное решение однородного уравнения (2.48), причем $(\mathbf{J}^0_e, \mathbf{n}) = 0$ на S. Построим векторные функции

$$\mathbf{V}(M) = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \oint_S \{i\omega\mu \mathbf{J}_e^0\psi + \zeta [\operatorname{grad}\psi[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e^0]]\} dS,$$

$$\mathbf{U}(M) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{V}.$$

Функции $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ при всех $M \notin S$ удовлетворяют однородной системе уравнений Максвелла (2.28) и в силу (2.48) $\mathbf{V} \equiv 0$, $\mathbf{U} \equiv 0$ всюду в D. Так как

$$\mathbf{V}(M) = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \oint_S \{i\omega\mu J_e^0\psi + \zeta \operatorname{rot}_M \{[\mathbf{n}, \mathbf{J}_e^0]\psi\}\} dS \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{i\omega\mu} \oint_S \{i\omega\mu [\operatorname{grad}_M \psi, \mathbf{J}_e^0] + \zeta \operatorname{rot} \operatorname{rot}_M ([\mathbf{n}, \mathbf{J}_e^0]\psi)\} dS \equiv$$

$$\equiv \oint_S \left\{[\operatorname{grad}_M \psi, \mathbf{J}_e^0] + \frac{\zeta}{i\omega\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div}_M ([\mathbf{n}, \mathbf{J}_e^0]\psi) - i\omega\varepsilon\zeta [\mathbf{n}, \mathbf{J}_e^0]\psi\right\} dS,$$

то легко проверить, что скачок функции

$$[\mathbf{n}, \mathbf{U}] - \zeta [\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{V}]]$$

при переходе через поверхность S равен нулю. Следовательно, в области D_e функции $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — решения однородных уравнения Максвелла, удовлетворяющие условию излучения в бесконечности и предельному условию на S:

$$\lim_{D_e \ni M \to S} \{[\mathbf{n}, \mathbf{U}] - \zeta [\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathbf{V}]]\} = 0.$$

Согласно теореме единственности, $\mathbf{U} \equiv \mathbf{V} \equiv 0$ в D_e. Вычисляя скачок $[\mathbf{n}, \mathbf{V}]$ при переходе через S, найдем

$$\mathbf{J}_e^0 = 0 \text{ всюду на } S.$$

Следовательно, решение однородного уравнения тривиально, а решение уравнения (2.47) единственно (в классе функций, касательных к поверхности S).

Интегральное уравнение для тока $\mathbf{J}_e$ можно получить и исходя из выражения для вектора $\mathscr{E}$. Исследование его проводится аналогично.

Сделаем несколько замечаний, относящихся к интегральным уравнениям первого рода, которые выведены в данном параграфе. Для определенности будем говорить об уравнении (2.47), соответствующем задаче дифракции на импедансной поверхности.

Если падающее поле выразить через потенциал Герца $\mathbf{\Pi}(M)$, т. е.

$$\mathbf{H}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_0,$$

то уравнение (2.47) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \left\{ \oint_S (i\omega\mu \mathbf{J}_e \psi + \zeta [\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]]) \, dS - 4\pi i\omega\mu \mathbf{\Pi}_0(M) \right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\oint_S \{ i\omega\mu \mathbf{J}_e \psi + \zeta [\operatorname{grad}_M \psi [\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]] \} \, dS = 4\pi i\omega\mu \mathbf{\Pi}_0(M) + \operatorname{grad} u, \quad M \in D.$$

Так как однородное уравнение (2.48) не имеет нетривиальных решений, то не существует вектора $\mathbf{J}_e^0(P)$, касательного в каждой точке к поверхности S, такого, что интеграл

$$\oint_S \{ i\omega\mu \mathbf{J}_e^0 \psi + \zeta \operatorname{rot}_M ([\mathbf{n}, \mathbf{J}_e^0] \psi) \} \, dS \tag{2.49}$$

в области D является градиентом какой-либо функции, не равной тождественно нулю в D. Следовательно, интеграл (2.49) выражает вихревую часть вектора Герца падающего поля в области D. Чтобы это утверждение сформулировать более точно, представим в области D вектор Герца $\mathbf{\Pi}_0$, согласно теореме Гельмгольца, в виде

$$\mathbf{\Pi}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} v = \mathbf{\Pi}_{\text{rot}} + \operatorname{grad} v,$$

причем функцию v выберем так, чтобы вектор $\mathbf{\Pi}_{\text{rot}} = \mathbf{\Pi}_0 - \operatorname{grad} v$ имел минимальную норму в области D. Тогда в соответствии с доказанным ранее уравнение

$$\oint_S \{ i\omega\mu \mathbf{J}_e \psi + \zeta \operatorname{rot}_M ([\mathbf{n}, \mathbf{J}_e] \psi) \} \, dS = 4\pi i\omega\mu \mathbf{\Pi}_{\text{rot}} \tag{2.50}$$

имеет, и притом единственное, решение, удовлетворяющее условию $(\mathbf{J}_e(P), \mathbf{n}(P)) = 0$. Уравнения (2.47) и (2.50) эквивалентны. Чтобы избежать выделения вихревой части вектора $\mathbf{\Pi}_0(M)$, можно рассматривать вариационную задачу, эквивалентную уравнению (2.50): найти вектор $\mathbf{J}_e(P)$, касательный к поверхности S в каждой точке и реализующий минимум функционала

$$\int_D \left| \oint_S \{ i\omega\mu \mathbf{J}_e \psi + \zeta \operatorname{rot} ([\mathbf{n}, \mathbf{J}_e] \psi) \} \, dS - 4\pi i\omega\mu \mathbf{\Pi}_0 \right|^2 d\tau. \tag{2.51}$$

Отметим, что, как и в скалярном случае, в векторных уравнениях первого рода точка M может пробегать не всю область D, а только ее некоторую замкнутую подобласть D' или нерезонансную замкнутую поверхность Ляпунова Σ, целиком расположенную в D. В этом случае функционал (2.51) строится как интеграл по поверхности Σ.

Векторные интегральные уравнения первого рода удобно записать в следующем скалярном виде. Пусть точка M принадлежит нерезонансной поверхности $\Sigma \subset D$. В каждой точке поверхности Σ построим два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, касательных к Σ. Умножив (2.47) на $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, получим систему двух скалярных уравнений первого рода:

$$\left(\mathbf{e}_\alpha, \operatorname{rot} \oint\limits_S \{i\omega\mu \mathbf{J}_e \psi + \zeta [\operatorname{grad}\psi [\mathbf{n}, \mathbf{J}_e]]\} dS\right) = 4\pi i\omega\mu (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{H}_0),$$

$$\alpha = 1, 2, \quad M \in \Sigma. \tag{2.52}$$

Доказательство единственности решения системы (2.52) проводится так же, как и в предыдущих случаях.

§ 3. Метод неортогональных рядов

При численном исследовании задач дифракции наряду с методом интегральных уравнений часто используют прямые численные методы. Одним из таких методов является метод неортогональных рядов.

Общая схема метода неортогональных рядов в случае линейных краевых задач состоит в следующем. Пусть задача сведена к решению дифференциального уравнения

$$Lu = 0 \tag{3.1}$$

с заданным на поверхности S граничным условием

$$\mathbf{P}[u]|_S = f(P)|_S \tag{3.2}$$

и в случае внешних задач условиями на бесконечности, обеспечивающими единственность решения. Предположим, что известна бесконечная последовательность решений уравнения (3.1)

$$\{v_n(M)\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

удовлетворяющая тем же условиям на бесконечности, что и решение исходной задачи, и обладающая тем свойством, что система функций

$$\{\varphi_n(P)\} = \{\mathbf{P}[v_n]|_S\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

полна в $L_2(S)$, т. е. любая функция $f(P) \in L_2(S)$ может быть приближена в норме L_2 конечной линейной комбинацией функций $\{\varphi_n\}$:

$$\left\| f(P)-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n(P)\right\|_{L_2(S)}\leqslant\varepsilon.$$

Построим функцию

$$u_N(M)=\sum_{n=1}^{N} c_n v_n(M).$$

Если рассматриваемая краевая задача устойчива по граничным условиям (3.2), то можно показать, что всюду в замкнутой подобласти вне S

$$\|u(M)-u_N(M)\|\leqslant C\varepsilon,$$

где $C=\mathrm{const}$. Тем самым функцию $u_N(M)$ можно считать приближенным решением исходной задачи.

Не исследуя общую схему метода неортогональных рядов, в качестве примера рассмотрим более подробно первую краевую задачу скалярной дифракции:

$$\begin{gathered}\Delta u+k^2u=0 \text{ в } D_e,\\ u|_S=f(P)|_S,\\ \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty.\end{gathered}\tag{3.3}$$

Пусть $\{v_n(M)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots, \infty$, — решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям излучения в бесконечности, и система

$$\{\varphi_n(P)\}=\{v_n(P)|_S\},\quad n=1, 2,\ldots, \infty,$$

полна в $L_2(S)$.

Построим функцию

$$u_N(M)=\sum_{n=1}^{N} a_n v_n(M),$$

где N и коэффициенты $a_1, \ldots, a_N$ определяются из условия приближения граничной функции с заданной точностью $\varepsilon>0$:

$$\left\| f(P)-\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(P)\right\|_{L_2(S)}\leqslant\varepsilon.$$

Покажем, что в любой замкнутой подобласти области D_e функция $u_N(M)$ равномерно приближает решение краевой задачи (3.3).

Действительно, решение краевой задачи (3.3) может быть записано в виде

$$u(M)=-\oint\limits_S \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P)\,f(P)\,dS,$$

где $G(M, P)$ — функция Грина задачи Дирихле в области D_e. Аналогично имеем

$$u_N(M) = -\oint_S \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P)\, u_N(P)\, dS.$$

Следовательно,

$$|u(M) - u_N(M)| \leqslant \oint_S \left|\frac{\partial G}{\partial n}(M, P)\right| |f(P) - u_N(P)|\, dS \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\oint_S \left|\frac{\partial G}{\partial n}(M, P)\right|^2 dS \cdot \oint_S \left|f(P) - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right|^2 dS\right\}^{1/2}.$$

В замкнутой подобласти $\overline{D}'_e$ области D_e

$$\oint_S \left|\frac{\partial G}{\partial n}(M, P)\right|^2 dS \leqslant C;$$

следовательно, всюду в $\overline{D}'_e$

$$|u(M) - u_N(M)| \leqslant C\varepsilon,$$

т. е. последовательность $u_N(M)$ равномерно в $\overline{D}'_e$ сходится к решению $u(M)$.

В методе неортогональных рядов имеется два основных момента: выбор системы функций и построение приближения (равномерного или среднеквадратичного) по выбранной системе функций.

Рассмотрим некоторые системы решений уравнения Гельмгольца, которые чаще всего применяются в методе неортогональных рядов. При исследовании интегральных уравнений первого рода было показано, что система решений Гельмгольца (метагармонические функции)

$$\{v_\nu(M)\} = \left\{\frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\, e^{\pm im\varphi}\right\}, \qquad (3.4)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

где r, ϑ, φ — сферические координаты точки M, полна и замкнута в L_2 на любой поверхности Ляпунова, содержащей начало сферической системы координат внутри себя. Изучим подробнее свойства системы (3.4).

Система (3.4) на любой замкнутой поверхности Ляпунова является линейно независимой. Действительно, возьмем произвольное конечное число функций системы (3.4) и покажем, что если

$$c_1 v_1 + \ldots + c_N v_N \equiv 0 \qquad (3.5)$$

всюду на S, то $c_i=0$ при всех $i=1, 2, \ldots, N$. Так как каждая функция системы (3.4) является решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условиям излучения в бесконечности, то в силу (3.5)

$$U(M)=\sum_{i=1}^{N} c_i v_i(M)$$

— решение внешней однородной краевой задачи для уравнения Гельмгольца в D_e и в силу теоремы единственности $U(M)\equiv 0$ всюду в D_e. Рассмотрим функцию $U(M)$ на сфере с центром в начале координат, содержащей S внутри себя. Учитывая ортогональность сферических функций, найдем, что $c_i=0$ при всех $i=1, 2, \ldots, N$. Следовательно, система (3.4) является линейно независимой на любой замкнутой поверхности Ляпунова, содержащей начало координат внутри себя.

Ранее уже отмечалось, что система (3.4) полна и замкнута в L_2 на указанной поверхности Ляпунова. Интересно поставить вопрос о базисности этой системы в $L_2(S)$, т. е. выяснить, можно ли для произвольной функции $f(P)\in L_2(S)$ однозначно определить коэффициенты a_i ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i v_i(M)$, сходящегося к $f(M)$ по норме L_2. Как будет показано ниже, ответ на этот вопрос в общем случае произвольной замкнутой поверхности S отрицательный. Рассматриваемая система метагармонических функций оказывается базисной только на поверхности сферы с центром в начале системы координат. В других случаях система (3.4) не будет базисом в $L_2(S)$. Покажем это. Пусть S не является сферой с центром в начале координат. Обозначим область внутри S через D, вне поверхности S — через D_e. Построим сферу σ с центром в начале координат, такую, что внутри нее имеются точки области D_e, а вне сферы — точки области D. Пусть T — область, расположенная вне σ и принадлежащая D. Возьмем точку $M_0\in T$ и рассмотрим функцию

$$f(M)=\psi(M, M_0)=\frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}. \tag{3.6}$$

Покажем, что функция (3.6) на поверхности S не может быть разложена в ряд по системе (3.4), сходящейся к ней в среднем (по норме $L_2(S)$).

Предположим противное, т. е. что существуют такие коэффициенты $\{a_i\}_1^\infty$, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(P), \quad P\in S,$$

сходится к функции $f(P)$ по крайней мере в среднем на S. Тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(M), \quad M \in D_e,$$

как было доказано ранее, будет сходиться всюду в D_e, причем в любой замкнутой подобласти D'_e области D_e сходимость равномерная и данный ряд сходится к решению следующей внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } D_e,$$

$$u|_S = f(M)|_S = \psi(M, M_0)|_{M \in S},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty.$$

Согласно теореме единственности, всюду в D_e

$$u(M) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(M) = \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \quad M_0 \in T.$$

Помещая точку M на сферу достаточно большого радиуса с центром в начале координат и используя теорему сложения для цилиндрических функций, найдем коэффициенты a_ν:

$$a_\nu = \frac{\pi i}{2k} \frac{J_{n+1/2}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} P_n^{(m)}(\cos\theta_0) e^{\pm im\varphi_0}, \tag{3.7}$$

где r_0, ϑ_0, φ_0 — координаты точки $M_0 \in T$. Рассматривая ряд $\Sigma a_i v_i(M)$ с коэффициентами (3.7) в точке $M \in D_e$, но расположенной внутри σ, легко убедиться, что он расходится. Это противоречие показывает, что функция (3.6) не может быть разложена на S в ряд по системе (3.4), сходящийся к ней в $L_2(S)$. Следовательно, в этом случае система (3.4) не является базисом в $L_2(S)$.

Система (3.4) на сфере с центром в начале координат превращается в систему сферических функций, т. е. образует базис в L_2 на сфере, поэтому отсюда заключаем, что, для того чтобы система (3.4) была базисом в $L_2(S)$, необходимо и достаточно, чтобы поверхность S являлась сферой с центром в начале координат.

Мы достаточно подробно рассмотрели случай первой краевой задачи. Аналогично устанавливается возможность использования системы (3.4) для построения приближенного решения второй и третьей краевых задач для уравнения Гельмгольца.

Рассмотрим другую систему функций, которая часто используется при реализации метода неортогональных рядов. Пусть

S — замкнутая поверхность Ляпунова. Внутри S выберем замкнутую нерезонансную поверхность Σ. Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — счетное всюду плотное на Σ множество точек. Построим систему функций

$$\{\psi_n(M)\}=\{\psi(M, M_n)\}, \quad n=1, 2,\dots, \infty, \tag{3.8}$$

где

$$\psi(M, M_n)=\frac{e^{ikR_{MM_n}}}{R_{MM_n}}.$$

Каждая функция ψ_n системы (3.8) удовлетворяет при $M\neq\neq M_m$ уравнению Гельмгольца и условиям излучения в бесконечности. Докажем, что система (3.8) полна и замкнута в L_2 на поверхности S.

Пусть существует функция $\mu(P)\in L_2(S)$, ортогональная ко всем функциям системы (3.8):

$$\oint\limits_S \mu^*(P)\psi(P, M_n)\,dS_P=0, \quad n=1, 2,\dots, \infty. \tag{3.9}$$

Покажем, что $\mu^*(P)=0$ почти всюду на S. Построим функцию

$$V(M)=\oint\limits_S \mu^*(P)\psi(P, M)\,dS_P,$$

являющуюся потенциалом простого слоя с плотностью $\mu^*(P)$. Функция $V(M)$ непрерывна на Σ и, согласно (3.9), обращается в нуль на всюду плотном на Σ множестве точек $\{M_n\}_1^\infty$. Следовательно, $V(M)|_\Sigma=0$. Поэтому $V(M)$ — решение следующей однородной краевой задачи:

$$\Delta V+k^2V=0 \text{ внутри } \Sigma,$$

$$V|_\Sigma=0.$$

Поверхность Σ нерезонансная, поэтому $V(M)\equiv 0$ всюду внутри Σ. В силу аналитичности $V(M)\equiv 0$ всюду внутри S (в области D) и по непрерывности равна нулю на границе: $V|_S=0$. Следовательно, в области D_e функция $V(M)$ — решение задачи

$$\Delta V+k^2V=0 \text{ в } D_e,$$

$$V|_S=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}-ikV=o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty.$$

Согласно теореме единственности, $V(M)\equiv 0$ в $\overline{D}_e$. Используя разрывные свойства нормальной производной потенциала простого слоя с плотностью из $L_2(S)$, отсюда получаем, что $\mu^*(P)=0$ почти всюду на S. Следовательно, система (3.8) полна и замкнута в L_2 на поверхности S.

Рассмотрим некоторые другие свойства системы (3.8). Система (3.8) линейно независима на S. Действительно, пусть существуют такие постоянные $c_1, \ldots, c_N$, что

$$c_1\psi_1(M)+\ldots+c_N\psi_N\equiv 0$$

всюду на S. Тогда функция

$$U(M)=\sum_{i=1}^{N} c_i\psi_i(M)$$

— удовлетворяющее условию излучения решение однородной внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области D_e и, согласно теореме единственности, $U(M)\equiv 0$ в D_e+S. Так как $U(M)$ аналитична вне Σ, то $U(M)\equiv 0$ в области аналитичности. Но, согласно построению, в окрестности любой точки $M_i\in\Sigma$, $i=1, 2, \ldots, N$, функция $U(M)$ неограниченна по абсолютной величине. Следовательно, $c_1=c_2=\ldots c_N=0$, что означает линейную независимость системы (3.8).

Мы показали, что система (3.8) полна и замкнута в $L_2(S)$. Покажем теперь, что тем не менее базисом в $L_2(S)$ она не является.

Предварительно докажем следующее простое утверждение. Пусть $\{y_k\}$ — бесконечная система функций из L_2. Если из системы $\{y_k\}$ можно выделить две различные подсистемы $\{y_{k_n}\}$ и $\{y_{k_m}\}$, являющиеся базисами в L_2, то сама система $\{y_k\}$ базисом в L_2 не является.

Действительно, так как $\{y_{k_n}\}$ и $\{y_{k_m}\}$ — базисы в L_2, то любая функция $f\in L_2$ однозначно представима в виде

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_{k_n}=\sum_{m=1}^{\infty} b_m y_{k_m}. \qquad (3.10)$$

Так как $\{y_{k_n}\}\subset\{y_k\}$ и $\{y_{k_m}\}\subset\{y_k\}$, то (3.10) означает, что любая функция $f\in L_2$ представима в виде

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} A_k y_k,$$

но коэффициенты A_k этого разложения определяются неоднозначно. Следовательно, система $\{y_k\}_1^\infty$ не является базисом в L_2.

Исследуем теперь систему (3.8). Предположим, что она является базисом в $L_2(S)$. Тогда, согласно устойчивости базиса в L_2, для системы $\{\psi_k(M)\}_1^\infty$ как базиса в $L_2(S)$ существует такая последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, что любая последовательность функций $\{\varphi_k(M)\}_1^\infty\subset L_2(S)$, для которой

$$\|\psi_k-\varphi_k\|_{L_2}\leqslant\varepsilon_k,$$

также является базисом в $L_2(S)$.

Поскольку функция $\psi(M, P)$ при $M \in S$, $P \in \Sigma$ равномерно непрерывна, можно построить последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}_1^\infty$ такую, что

$$\|\psi_k(M) - \psi(M, P)\|_{L_2} \leqslant \varepsilon_k \tag{3.11}$$

при таких $P \in \Sigma$, для которых $R_{M_k P} < \delta_k$, где $R_{M_k P}$ — расстояние между точками M_k и P.

Из последовательности точек $\{M_k\}_1^\infty$, всюду плотно покрывающей поверхность Σ, выделим две подпоследовательности следующим образом.

Пусть M_{n_1} и M_{m_1} — две различные точки последовательности $\{M_k\}$, не совпадающие с M_1 и такие, что $R_{M_1 M_{n_1}} < \delta_1$, $R_{M_1 M_{m_1}} < \delta_1$. Затем выберем две различные точки M_{n_2}, $M_{m_2} \subset \{M_k\}$, отличные от M_1, M_2, M_{n_1}, M_{m_1} и такие, что $R_{M_2 M_{n_2}} < \delta_2$, $R_{M_2 M_{m_2}} < \delta_2$. Продолжая эту процедуру далее, получим две различные подпоследовательности $\{M_{n_k}\}$ и $\{M_{m_k}\}$ последовательности $\{M_k\}$ такие, что

$$R_{M_k M_{n_k}} < \delta_k, \quad R_{M_k M_{m_k}} < \delta_k. \tag{3.12}$$

Теперь построим две системы функций:

$$\psi_{n_k}(M) = \psi(M, M_{n_k}), \quad \psi_{m_k}(M) = \psi(M, M_{m_k}).$$

Заметим, что $\{\psi_{n_k}\} \subset \{\psi_k\}$, $\{\psi_{m_k}\} \subset \{\psi_k\}$. Согласно (3.11) и (3.12), функции этих систем удовлетворяют условию

$$\|\psi_k - \psi_{n_k}\|_{L_2} \leqslant \varepsilon_k, \quad \|\psi_k - \psi_{m_k}\|_{L_2} \leqslant \varepsilon_k.$$

Следовательно, в силу выбора $\{\varepsilon_k\}$ системы $\{\psi_{n_k}\}$ и $\{\psi_{m_k}\}$ являются базисами в $L_2(S)$. Но тогда, согласно доказанному ранее, система $\{\psi_k\}_1^\infty$ не может быть базисом в $L_2(S)$, что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие и показывает, что система (3.8) не является базисом в пространстве L_2.

Мы подробно рассмотрели случай задачи Дирихле. Аналогично обосновывается применимость системы (3.8) для построения приближенного решения второй и третьей краевых задач теории дифракции.

Возможны и другие способы построения систем базисных функций метода неортогональных рядов.

При рассмотрении электромагнитного случая воспользуемся результатами, полученными при исследовании соответствующего векторного интегрофункционального уравнения первого рода. Из § 2 этой главы следует, что в качестве базисной системы при решении краевой задачи для уравнений Максвелла можно взять систему решений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega\mu \operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha U_n^{\pm m}(M)) \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha U_n^{\pm m}(M)) \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где

$$U_n^{\pm m}(M) = \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi},$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\dots,\infty,\quad m=0,\ 1,\ 2,\dots,n,\quad \alpha=1,\ 2,\ 3,$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — три взаимно ортогональных единичных вектора. Каждая из функций системы (3.13) представляет электромагнитное поле магнитного мультиполя соответствующего порядка.

Обозначим через $L_2^\tau(S)$ пространство векторных функций, заданных на S и касательных к S в каждой точке, скалярное произведение в котором определено формулой

$$(\mathbf{g},\ \mathbf{f}) = \oint_S \mathbf{g}(M)\, \mathbf{f}^*(M)\, dS_M.$$

Покажем, что система

$$\{[\mathbf{n}(M),\ \operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha U_n^{\pm m}(M))]\}, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к S, полна и замкнута в $L_2^\tau(S)$.

Пусть функция $\boldsymbol{\mu}(M) \in L_2^\tau(S)$ ортогональна ко всем функциям системы (3.14), т. е.

$$\oint_S \boldsymbol{\mu}^*(M)\, [\mathbf{n}(M),\ \operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha U_n^{\pm m})]\, dS = 0 \tag{3.15}$$

при всех $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ \infty$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$, $\alpha=1,\ 2,\ 3$. Введем обозначение

$$\mathbf{j}(M) = [\boldsymbol{\mu}^*,\ \mathbf{n}].$$

Соотношение (3.15) можно переписать в виде

$$\mathbf{e}_\alpha \oint_S [\mathbf{j},\ \operatorname{grad} U_n^{\pm m}]\, dS = 0, \tag{3.16}$$

$$n=0,\ 1,\dots,\infty,\quad m=0,\ 1,\dots,n,\quad \alpha=1,\ 2,\ 3.$$

Пусть σ — нерезонансная сфера, расположенная строго внутри поверхности S. Соотношения (3.15) эквивалентны векторному интегральному уравнению

$$\oint_S [\mathbf{j}(M),\ \operatorname{grad}\psi(M,\ P)]\, dS = 0,\quad P \in \sigma.$$

Как было показано в § 2 этой главы, решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $(\mathbf{j},\ \mathbf{n}) = 0$, единственно. Следовательно, $\mathbf{j}(M)\equiv 0$ на S, а значит, и $\mu(M)\equiv 0$, т. е. система (3.14) полна и замкнута в $L_2^\tau(S)$.

Полнота системы (3.14) позволяет приблизить касательные составляющие электрического вектора $\mathbf{E}$ на поверхности S, а следовательно, и построить приближенное решение задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем теле.

Система (3.13) может быть использована и для построения приближенного решения задачи дифракции электромагнитных волн на импедансном теле. В качестве базисной системы в задаче дифракции на идеально проводящем или импедансном теле можно использовать систему решений уравнений Максвелла, соответствующую полю электрических мультиполей, расположенных в одной точке.

Системы, представляющие поля магнитных или электрических мультиполей, являются аналогом системы (3.4) в скалярном случае. Аналогом системы (3.8) являются системы полей электрических или магнитных диполей, расположенных на поверхности Σ, т. е. системы

$$\begin{pmatrix} i\omega\mu \operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha\psi_n(M)) \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha\psi_n(M)) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha=1,2,3, \\ n=1,2,\ldots,\infty \end{matrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha\psi_n(M)) \\ -i\omega\varepsilon \operatorname{rot}(\mathbf{e}_\alpha\psi_n(M)) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha=1,2,3, \\ n=1,2,\ldots,\infty, \end{matrix}$$

где $\mathbf{e}_\alpha$, Σ и $\psi_n(M)$ имеют тот же смысл, что и ранее.

Кратко рассмотрим некоторые методы определения коэффициентов. Для простоты будем рассматривать скалярный случай.

После того как выбрана система функций $\{v_n(M)\}_1^\infty$, определение коэффициентов c_n в представлении решения

$$u(M)=\sum_{n=1}^{N} c_n v_n(M) \tag{3.17}$$

может быть проведено с помощью общих численных алгоритмов определения наилучшего равномерного или среднеквадратичного приближения заданной функции $f(P)$ по системе функций $\varphi_n(P)=v_n(P)|_S$, $n=1, 2, \ldots$. В частности, если система $\{\varphi_n(P)\}_1^\infty$ оказалась ортонормированной, то наилучшее среднеквадратичное приближение определяется с помощью коэффициентов Фурье функции $f(P)$ по указанной системе. Однако в большинстве случаев система $\{\varphi_n\}_1^\infty$ неортогональна. Тогда можно или провести предварительную ортонализацию системы $\{\varphi_n(P)\}_1^\infty$, например с помощью треугольных преобразований, или определять коэффициенты c_n как решение алгебраической системы

$$\sum_{m=1}^{N} a_{nm} c_m = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

где

$$a_{nm} = \oint\limits_S \varphi_m(P) \overset{*}{\varphi}_n(P)\, dS,$$

$$b_n = \oint\limits_S f(P) \overset{*}{\varphi}_n(P)\, dS,$$

соответствующей условию минимума функционала

$$\left\| f(P) - \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi_m(P) \right\|^2_{L_2(S)}. \tag{3.18}$$

Отметим в заключение, что как задача минимизации функционала (3.18), так и суммирование выражения (3.17) с не точно определенными коэффициентами c_n являются, вообще говоря, неустойчивыми процессами и требуют при своей численной реализации применения регуляризирующих алгоритмов.

§ 4. Метод антенных потенциалов

Рассмотрим метод антенных потенциалов решения задач дифракции скалярных и электромагнитных волн. Основы метода антенных потенциалов рассмотрим на примере задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } D_e; \tag{4.1}$$

$$u|_S = f(P)|_S; \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty. \tag{4.3}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(M) = \int\limits_C \mu(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\, dl_P, \tag{4.4}$$

где C — некоторая кривая заданной длины l, расположенная внутри поверхности S (в области D). Функцию u, определенную формулой (4.4), будем называть антенным потенциалом, $\mu(P)$ — плотностью антенного потенциала, кривую C — носителем антенного потенциала.

Антенный потенциал (4.4) удовлетворяет уравнению Гельмгольца всюду вне C и условиям излучения в бесконечности, поэтому для построения решения краевой задачи нужно удовлетворить граничному условию (4.2). Здесь и возникает вопрос о том, всегда ли можно с помощью антенного потенциала приблизить заданную на поверхности S функцию и каким условиям должны удовлетворять плотность и носитель потенциала, чтобы такое приближение было возможно.

Рассмотрим этот вопрос. Выделим класс пространственных кривых L, удовлетворяющих следующим условиям:

1) кривая L задана параметрически:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t_0\leqslant t<\infty,$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — аналитические функции параметра t;

2) кривая L всюду плотно покрывает некоторую замкнутую нерезонансную поверхность Ляпунова Σ.

Кривые, принадлежащие этому классу, можно построить следующим образом. Пусть

$$x=x(u,\,v),\quad y=y(u,\,v),\quad z=z(u,\,v),$$

$$-1\leqslant u,\ v\leqslant 1, \tag{4.5}$$

— параметрические уравнения замкнутой нерезонансной поверхности Σ, причем $x(u,\,v)$, $y(u,\,v)$ и $z(u,\,v)$ — аналитические функции. Кривую на поверхности (4.5) выделим условием

$$u=\cos\omega_1 t,\quad v=\cos\omega_2 t,\quad 0\leqslant t<\infty, \tag{4.6}$$

где числа ω_1 и ω_2 несоизмеримы. Тогда, как известно, кривая, заданная параметрическими уравнениями (4.5) — (4.6), всюду плотно покрывает поверхность (4.5).

Всюду далее, если не оговорено противное, будем считать, что носителем C антенного потенциала является отрезок кривой указанного класса заданной длины, причем поверхность Σ расположена строго внутри D, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

Обозначим через $\{v_n(P)\}$, $n=1,\,2,\,\ldots,\,\infty$, некоторую полную и замкнутую в $L_2(C)$ систему функций, заданных на C. Построим систему антенных потенциалов:

$$u_n(M)=\int\limits_C v_n(P)\,\psi(M,\,P)\,dl_P,\quad n=1,\,2,\ldots,\,\infty, \tag{4.7}$$

$$\psi(M,\,P)=\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}.$$

Пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова, содержащая Σ внутри себя.

Теорема 4.1. *Система* (4.7) *полна и замкнута в* $L_2(S)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi(M)\in L_2(S)$ ортогональна ко всем функциям системы (4.7):

$$\oint\limits_S u_n(M)\,\varphi^*(M)\,dS=0,\quad n=1,\,2,\ldots,\,\infty.$$

Тогда

$$\oint_S \varphi^*(M)\,dS \int_C \psi(M, P)\,v_n(P)\,dl = \int_C v_n(P)\,dl \oint_S \psi\varphi^* dS = 0.$$

В силу замкнутости системы $\{v_n(P)\}_1^\infty$ отсюда получаем

$$\oint_S \psi(M, P)\,\varphi^*(M)\,dS = 0 \text{ для всех } P \in C, \tag{4.8}$$

поскольку данный интеграл является непрерывной функцией $P \in C$.

Рассмотрим функцию

$$V(P) = \oint_S \psi(M, P)\,\varphi^*(M)\,dS_M.$$

Функция $V(P)$ — потенциал простого слоя, заданный на поверхности S с плотностью из $L_2(S)$. При всех $P \notin S$ $V(P)$ является аналитической функцией P. На кривой C $V(P)$ — аналитическая функция параметра t, и на основании (4.8) она обращается в нуль при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. В силу аналитичности она обращается в нуль при всех $t_0 \leqslant t < \infty$, т. е. всюду на кривой L, частью которой является C. Так как кривая L всюду плотно покрывает поверхность Σ, то $V|_\Sigma = 0$. Поверхность Σ является нерезонансной; следовательно, $V(P) \equiv 0$ всюду внутри Σ, а в силу аналитичности и всюду внутри S (в области D). Далее, аналогично тому, как это сделано в § 2, найдем

$$\varphi(M) = 0 \text{ почти всюду на } S.$$

Следовательно, система (4.7) полна и замкнута в $L_2(S)$.

Пусть $f(M) \in L_2(S)$. В силу полноты системы (4.7) она может быть приближена по норме $L_2(S)$ конечной линейной комбинацией функций (4.7), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ и постоянные $c_1, \ldots, c_N$ такие, что

$$\left\| f(M) - \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(M) \right\|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon.$$

Подставляя явные выражения для $u_n(M)$, получим

$$\left\| f(M) - \int_C \mu_N(P)\,\psi(M, P)\,dl \right\|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon,$$

где

$$\mu_N = \sum_{n=1}^{N} c_n v_n(P).$$

Пусть функции $v_n(P)$ непрерывны на C. Тогда $\mu_N(P)$ также непрерывная функция. Следовательно, справедлива следующая теорема о приближении функции на поверхности S антенным потенциалом.

Теорема 4.2. *Пусть $f(M)\in L_2(S)$. Для любого $\varepsilon>0$ существует непрерывная функция $\mu(P)$, заданная на C и такая, что*

$$\left\| f(M)-\int\limits_C \psi(M, P)\mu(P)\,dl \right\|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon. \tag{4.9}$$

Доказанная выше теорема позволяет построить приближенное решение задачи (4.1) — (4.3) в виде антенного потенциала:

$$u_\varepsilon(M)=\int\limits_C \psi(M, P)\mu_\varepsilon(P)\,dl.$$

Действительно, так как антенный потенциал удовлетворяет в D_e уравнению Гельмгольца и условию излучения в бесконечности, а его плотность $\mu_\varepsilon(P)$, согласно теореме 4.2, может быть выбрана так, что с заданной точностью приближается в норме $L_2(S)$ граничное условие (4.2), то в силу устойчивости внешней задачи антенный потенциал дает приближенное решение краевой задачи (4.1) — (4.3). При этом в любой замкнутой подобласти $\bar{D}'_e$ области D_e приближение будет равномерным вместе с производными. Перенося граничные условия (4.2) на «параллельную» поверхность S', расположенную строго внутри S, можно построить метагармоническую функцию (т. е. решение уравнения Гельмгольца), удовлетворяющую условиям излучения в бесконечности, которая на поверхности S равномерно мало отличается от $f(P)\,|_S$. Отсюда вытекает, что антенный потенциал $u_\varepsilon(M)$ равномерно приближает решение задачи (4.1) — (4.3) вплоть до границы S.

Рассмотрим приближение диаграммы направленности для решения задачи (4.1)—(4.3). Напомним, что диаграмма направленности $D(\vartheta, \varphi)$ описывает угловое распределение поля в дальней зоне и определяется соотношением

$$D(\vartheta, \varphi)=\lim_{r\to\infty} re^{-ikr}u(M),$$

где (r, ϑ, φ) — сферические координаты точки $M\in D_e$. Пусть

$$u_\varepsilon(M)=\int\limits_C \mu(P)\psi(M, P)\,dl$$

— антенный потенциал, приближающий точное решение $u(M)$ краевой задачи

$$\|u(M)-u_\varepsilon(M)\|_{L_2(S)}<\varepsilon,$$

$$D_\varepsilon(\vartheta, \varphi)=\lim_{r\to\infty} re^{-ikr}u_\varepsilon=\int\limits_C \mu(P)e^{-ikr\cos\beta}\,dl,$$

$$\cos\beta=\cos\vartheta\cos\vartheta_P+\sin\vartheta\sin\vartheta_P\cos(\varphi-\varphi_P),$$

$$P=(r_P, \vartheta_P, \varphi_P).$$

Тогда

$$u(M)-u_\varepsilon(M)=-\oint\limits_S \{u(P)-u_\varepsilon(P)\}\frac{\partial G}{\partial n}(M, P)\,dS, \quad (4.10)$$

где $G(M, P)$ — функция Грина внешней задачи Дирихле для оператора Гельмгольца. Введем диаграмму направленности $D_G(\vartheta, \varphi, P)$ функции Грина

$$D_G=\lim_{r\to\infty} re^{-ikr}G(M, P).$$

Заметим, что $D_G(\vartheta, \varphi, P)$ и ее первые производные по координатам точки P ограничены:

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_P} D_G(\theta, \varphi, P)\right|_{P\in S}\leqslant C_0=\text{const}.$$

Домножая (4.10) на re^{-ikr} и переходя к пределу при $r\to\infty$, получим

$$D(\vartheta, \varphi)-D_\varepsilon(\vartheta, \varphi)=-\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n} D_G\{u-u_\varepsilon\}\,dS.$$

Отсюда используя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$|D(\vartheta, \varphi)-D_\varepsilon(\vartheta, \varphi)|\leqslant C_0\sqrt{S_0}\|u-u_\varepsilon\|_{L_2(S)},$$

где S_0 — площадь поверхности S. Следовательно, приближение граничных условий в норме $L_2(S)$ обеспечивает равномерное приближение диаграммы направленности.

Таким образом, решение краевой задачи (4.1) — (4.3) и вычисление характеристик рассеянного поля сведены к задаче приближения функции, заданной на поверхности, антенным потенциалом (4.4), т. е. к определению одной функции одного действительного переменного — плотности антенного потенциала как функции длины кривой C. Алгоритм определения плотности μ рассмотрим ниже.

Сделаем несколько замечаний. Система функций (4.7) представляет собой систему решений уравнения Гельмгольца, полную и замкнутую в $L_2(S)$. Поэтому эта система может служить исходной системой функций в методе неортогональных рядов. Специальным выбором системы $\{v_n(P)\}$, заданной на C, можно добиться ортогональности системы $\{u_n(M)\}$ на поверхности S.

Обоснование метода антенных потенциалов для случая второй и третьей краевых задач для уравнения Гельмгольца проводится по той же схеме и особых трудностей не вызывает.

Рассмотрим осесимметричный случай. Пусть S — поверхность, образованная вращением кривой Γ вокруг оси z. При этом будем предполагать, что концы кривой Γ лежат на оси z, других общих точек с осью z она не имеет и не имеет самопересечений. Пусть $f(P)|_S$ обладает той же осевой симметрией, так что краевая задача (4.1) — (4.3) имеет осесимметричное решение. В этом случае в качестве носителя C антенного потенциала (4.4) можно взять отрезок C_0 оси z, лежащий внутри области D.

Для обоснования метода антенных потенциалов при таком выборе кривой C_0 достаточно показать, что осесимметричное ограниченное решение уравнения Гельмгольца, обращающееся в нуль на конечном отрезке оси симметрии, есть тождественный нуль. Покажем это. Пусть $u(M)$ — симметричная относительно оси z ограниченная метагармоническая функция, обращающаяся в нуль при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, $z_1 \neq z_2$. Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) с центром в точке $z = z_0 \in [z_1, z_2]$ оси z и полярной осью, направленной вдоль оси z. Тогда функция u в окрестности начала координат может быть представлена в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta) \tag{4.11}$$

(учтена симметрия относительно оси z). Согласно условию, при $0 \leqslant r \leqslant r_0$

$$u(r, \vartheta)_{\theta=0} = 0.$$

Следовательно,

$$u(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} = 0 \tag{4.12}$$

при $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Переходя к пределу при $r \to 0$, из (4.12) находим $a_0 = 0$. Теперь домножим (4.12) на r и затем перейдем к пределу при $r \to 0$. Получаем $a_1 = 0$. Продолжая этот процесс далее, обнаружим, что из (4.12) следует, что $a_n = 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Согласно (4.11), $u \equiv 0$ внутри шара $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Следовательно, $u(M) \equiv 0$ всюду в области аналитичности.

Теперь, повторяя схему доказательства теоремы 4.1, легко показать, что система (4.4), где $C = C_0$ — отрезок оси z, принадлежащий D, полна и замкнута в подпространстве осесимметричных функций из $L_2(S)$. Отсюда сразу вытекает теорема о приближении осесимметричной на S функции антенным потенциалом с носителем на оси симметрии. Следовательно, осесимметричное решение краевой задачи приближается осесимметричным же антенным потенциалом.

Теперь сформулируем алгоритм решения задачи приближения функции $f(M) \in L_2(S)$ антенным потенциалом (4.4). Согласно теореме 4.2, функцию $f(M)$ можно представить в виде

$$f(M) = \int_C \psi(M, P)\mu(P)\,dl + g(M), \tag{4.13}$$

где $\|g(M)\|_{L_2(S)} < \varepsilon$. Если (4.13) переписать в виде

$$\int\limits_C \psi(M, P)\mu(P)\,dl = f_\varepsilon(M), \quad M \in S, \tag{4.14}$$

$$f_\varepsilon(M) = f(M) - g(M),$$

для функции μ получим интегральное (интегрофункциональное) уравнение первого рода, правая часть которого известна лишь с заданной точностью ε в норме $L_2(S)$. Тем самым и в данном случае мы имеем некорректно поставленную задачу. Для получения ее устойчивого решения применим метод регуляризации А. Н. Тихонова, согласно которому приближенное решение уравнения (4.14) определим как функцию, реализующую минимум сглаживающего функционала

$$\left\| f - \int\limits_C \psi\mu\,dl \right\|^2_{L_2(S)} + \alpha \|\mu\|^2_{W_2^1(C)}, \tag{4.15}$$

причем параметр α регуляризации следует выбрать так, чтобы достигалась заданная точность приближения, т. е.

$$\left\| f - \int\limits_C \psi\mu\,dl \right\|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon.$$

Это позволит определить гладкую плотность μ, при которой антенный потенциал приближает $f(M)$ с заданной точностью.

Минимум функционала (4.15) удобнее всего находить решая соответствующее уравнение Эйлера, которое в данном случае является одномерным интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Проведенные рассмотрения предполагали, что носитель антенного потенциала C задан. В этом случае соответствующее уравнение Эйлера для плотности $\mu(P)$ является линейным. Эффективность решения конкретных задач во многом зависит от удачного выбора контура C. Процесс выбора можно алгоритмизировать, если при решении задачи минимизации соответствующего сглаживающего функционала считать искомыми как функцию $\mu(P)$, так и функции, задающие контур C.

Рассмотрим электромагнитный случай. Пусть вне поверхности S (в области D_e) задано регулярное электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, удовлетворяющее условиям излучения в бесконечности. Обозначим через D' некоторую область, принадлежащую D, через $\bar{D}_e'$ — дополнение D' до полного пространства.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и в области $\bar{D}_e'$ построим удовлетворяющее условиям излучения в бесконечности регулярное электромагнитное поле $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ такое, что

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_1\|_{L_2(S)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_1\|_{L_2(S)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.16}$$

Для построения поля $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ можно воспользоваться методом неортогональных рядов. Поле $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ назовем приближенным продолжением поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в некоторую область внутрь поверхности S.

Выразим поле $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ через потенциал Герца $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{E}_1 = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}.$$

Вектор Герца $\mathbf{\Pi}(M)$ определен всюду в $\bar{D}_e'$. Каждую декартову компоненту вектора $\mathbf{\Pi}$, как метагармоническую функцию, можно приблизить антенным потенциалом в области D_e'. Следовательно, вектор $\mathbf{\Pi}$ будет приближен векторным антенным потенциалом

$$\int_C \mu(P)\psi(M, P)\,dl$$

с носителем C, расположенным в области D'. При этом в области $\bar{D}_e$ приближение будет равномерным вместе со вторыми производными. Поэтому

$$\left\|\mathbf{E}_1 - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_C \boldsymbol{\mu}\psi\,dl\right\|_{L_2(S)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left\|\mathbf{H}_1 + i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\int_C \boldsymbol{\mu}\psi\,dl\right\|_{L_2(S)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.17)$$

Объединяя (4.16) и (4.17), получим

$$\left\|\mathbf{E} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_C \boldsymbol{\mu}\psi\,dl\right\|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon,$$

$$\left\|\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\int_C \boldsymbol{\mu}\psi\,dl\right\|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon. \qquad (4.18)$$

Таким образом, электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ может быть на S аппроксимировано с произвольной точностью в норме $L_2(S)$ векторным антенным потенциалом.

Введем на контуре C систему векторных функций $\{\mu_j(P)\}_1^\infty$, полную и замкнутую в $L_2(S)$. Пусть

$$\mathcal{E}_j(M) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_C \mu_j\psi\,dl,$$

$$\mathcal{H}_j(M) = -i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\int_C \mu_j\psi\,dl,$$

$$j = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Из неравенств (4.18) следует, что на поверхности S в норме L_2 приближаются все компоненты поля. Отсюда вытекает полнота и замкнутость в $L_2^\tau(S)$ (т. е. в пространстве интегрируемых с квадратом на S векторных функций, касательных к поверхности S) следующих систем векторных функций:

$$[\mathbf{n}, \mathcal{E}_j],$$

$$[\mathbf{n}, \mathcal{H}_j],$$

$$[\mathbf{n}, \mathcal{E}_j]-\zeta[\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathcal{H}_j]],$$

$$[\mathbf{n}[\mathbf{n}, \mathcal{E}_j]]+\zeta[\mathbf{n}, \mathcal{H}_j], \quad j=1, 2, \ldots, \infty,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S; $\zeta(M)$ — некоторая функция, заданная на S, причем $\operatorname{Re}\zeta\leqslant 0$ (импеданс поверхности). Поэтому произвольная функция $\mathbf{f}(M)\in L_2^\tau(S)$ может быть приближена в норме $L_2^\tau(S)$ любым из следующих векторных потенциалов:

$$\int_C [\mathbf{n}(M), \operatorname{rot}\operatorname{rot}_M(\mu\psi)]\, dl_P,$$

$$\int_C [\mathbf{n}(M), \operatorname{rot}_M(\mu\psi)]\, dl_P,$$

$$\int_C [\mathbf{n}(M), \operatorname{rot}\operatorname{rot}_M(\mu\psi)+i\omega\varepsilon\zeta[\mathbf{n}(M), \operatorname{rot}_M(\mu\psi)]]\, dl_P,$$

$$\int_C [\mathbf{n}(M)[\mathbf{n}(M), \operatorname{rot}\operatorname{rot}_M(\mu\psi)]-i\omega\varepsilon\zeta\operatorname{rot}_M(\mu\psi)]\, dl_P.$$

В качестве примера рассмотрим задачу дифракции падающего поля $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на идеально проводящем теле D. Если полное поле в D_e представить в виде

$$\{\mathbf{E}_0+\mathbf{E}, \mathbf{H}_0+\mathbf{H}\},$$

то для рассеянного поля $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ получим задачу о нахождении в D_e удовлетворяющего условиям излучения в бесконечности решения системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$$

с граничным условием на S

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_S=-[\mathbf{n}, \mathbf{E}_0]|_S.$$

Приближенное решение поставленной задачи можно, например, искать в виде

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_C \mu\psi\, dl,$$

$$\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\operatorname{rot}\int_C \mu\psi\, dl.$$

Функция $\mu(P)$ должна быть определена так, чтобы с заданной точностью ε выполнялось граничное условие. Как и в скалярном случае, она может быть найдена как функция, реализующая минимум сглаживающего функционала

$$\| [\mathbf{n}, \mathbf{E} + \mathbf{E}_0] \|^2_{L_2(S)} + \alpha \| \mu \|^2_{W_2^1(C)},$$

причем параметр α выбирается исходя из условия

$$\| [\mathbf{n}, \mathbf{E} + \mathbf{E}_0] \|_{L_2(S)} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, задача сводится к определению одной векторной функции одного переменного.

Рассмотренные выше антенные потенциалы в электромагнитном случае построены на основе вектора Герца. Заметим, что антенные потенциалы, приближающие электромагнитное поле, можно построить и на основе потенциалов Дебая.

Глава III

Численные методы решения задач дифракции в неоднородной среде

Настоящая глава посвящена численным методам решения задач дифракции волн на локально неоднородном теле. Для таких задач не удается в общем случае построить функции Грина и получить поверхностные интегральные уравнения. Поэтому более эффективным для расчетов здесь являются прямые численные методы типа метода Галеркина.

§ 1. Общие свойства решения задачи дифракции в локально неоднородной среде

Задачи дифракции являются внешними краевыми задачами. Дифракционное поле необходимо определить в неограниченном пространстве, удовлетворяя условиям излучения, которые могут быть сформулированы в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Среди задач дифракции в неоднородной среде можно указать достаточно широкий класс задач, для которых оказывается возможным свести исходную внешнюю краевую задачу к решению некоторой краевой задачи в ограниченной области. В частности, это можно сделать в том случае, когда характеристики среды являются переменными функциями координат лишь в ограниченной области пространства. Тогда сведение внешней краевой задачи к задаче в ограниченной области достигается специальной формулировкой условий излучения в виде парциальных условий излучения.

Рассмотрим скалярную задачу дифракции. Пусть в неограниченном пространстве расположено тело T, ограниченное замкнутой поверхностью S. Характеристики среды вне поверхности S являются произвольными гладкими функциями координат, причем вне некоторой сферы Σ_{R_0} радиуса R_0 с центром, расположенным внутри области T, характеристики среды постоянные. Внутри тела T характеристики среды таковы, что влияние тела T на внешнее поле может быть описано с помощью импедансных граничных условий на поверхности S. Тогда определение рассеянного поверхностью S поля u сводится к решению следующей математической задачи: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую в неоднородной среде вне тела T уравнению

$$L[u] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(M) u = 0, \tag{1.1}$$

переходящему вне сферы Σ_{R_0} в уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0, \tag{1.2}$$

неоднородному граничному условию на поверхности S

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha(P) u = \varphi(P), \quad P \in S, \tag{1.3}$$

и условиям излучения на бесконечности. Функция $p(M) = 1 + p_0(M)$, где $p_0(M)$ — действительная неотрицательная ограниченная функция с локальным носителем, содержащимся в области D_e, образованной поверхностями S и Σ_{R_0}, $q(M) = k_0^2 + q_0(M)$, где $q_0(M)$ — комплекснозначная функция с локальным носителем в D_e, $\operatorname{Im} q_0(M) > 0$. Будем считать, что функции $p(M)$, $q(M)$ и $\alpha(P)$ обладают достаточной гладкостью, обеспечивающей существование и единственность классического решения задачи дифракции, причем $\operatorname{Im} \alpha > 0$.

Обычные условия излучения в форме Зоммерфельда — Реллиха имеют асимптотический характер и определяют предельное поведение решения на бесконечности. Эта форма условий неудобна для сведения задачи дифракции к краевой задаче для ограниченной области. Более удобна форма так называемых «парциальных» условий излучения *. Из постановки рассматриваемой задачи следует, что требование отсутствия волн, приходящих из бесконечности, позволяет записать представление решения вне сферы Σ_{R_0}, где характеристики среды однородны, в виде разложения по полной системе расходящихся сферических волн:

$$u|_{r \geq R_0} = \sum_{n,m} T_{nm} \zeta_n^{(1)}(k_0 r) Y_n^m(\vartheta, \varphi), \tag{1.4}$$

где $\{Y_n^m(\theta, \varphi)\}$ — ортонормированная на единичной сфере система сферических функций, $\zeta_n^1(k_0 r)$ — сферические функции Ханкеля первого рода, соответствующие расходящимся сферическим волнам. Функция u является аналитической вне сферы Σ_{R_0}, поэтому ряд (1.4) сходится равномерно, абсолютно и допускает почленное дифференцирование. Это означает, что коэффициенты разложения T_{nm} достаточно быстро убывают с ростом n и m.

Итак, в качестве исходной задачи будем рассматривать задачу (1.1)—(1.4). В представлении (1.4) коэффициенты T_{nm} неизвестны, и во многих случаях решение задачи дифракции заключается в определении только этих коэффициентов, поскольку они определяют решение в дальней зоне.

---

* См.: *Свешников А. Г.* Дифракция на ограниченном теле // ДАН СССР. 1969. Т. 184. № 1. С. 63.

Заметим, что представление (1.4) можно рассматривать как разложение решения по полной системе сферических функций $v_k(\vartheta, \varphi) = Y_{n(k)}^{m(k)}(\vartheta, \varphi)$:

$$u = \sum_k u_k(r) v_k(\vartheta, \varphi). \tag{1.5}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что для коэффициентов разложения

$$u_k(r) = T_k \zeta_{n(k)}^1(k_0 r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(r, \vartheta, \varphi)\, v_k^*(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

имеют место следующие соотношения:

$$\frac{du_k}{dr} - \gamma_k(r) u_k(r) = 0, \quad r \geqslant R_0, \tag{1.6}$$

где

$$\gamma_k(r) = \frac{d}{dr}\left(\zeta_{n(k)}^1(k_0 r)\right)/\zeta_{n(k)}^1(k_0 r). \tag{1.7}$$

Соотношения (1.6) можно трактовать как аналог одномерных условий излучения для коэффициентов $u_k(r)$. Их обычно называют парциальными условиями излучения.

Сразу отметим, что для решения u уравнения (1.1), удовлетворяющего принципу излучения, имеет место соотношение

$$\operatorname{Im} \int_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial n} u^* dS = \frac{1}{k_0} \sum_{n,m} |T_{nm}|^2. \tag{1.8}$$

Сумма в правой части (1.8) соответствует условию аддитивности энергии отдельных сферических гармоник в однородной среде. Соотношение (1.8) легко получить из представления (1.4), условия ортогональности сферических гармоник и соотношения

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dr}\left(\zeta_n^1(k_0 r)\right) \zeta_n^{1*}(k_0 r)\right\} = \frac{1}{k_0 r^2}, \tag{1.9}$$

являющегося следствием выражения для определителя Вронского цилиндрических функций.

Условия (1.6) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\oint_{\Sigma_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial n} v_k^* dS = T_k R_0^2 \frac{d}{dr}\left(\zeta_{n(k)}^1(k_0 r)\right)\Big|_{r=R_0}. \tag{1.10}$$

Это представление условий излучения позволяет распространить «парциальные» условия излучения, записанные в интегральной форме, на случай, когда интегралы берутся уже не по сфере Σ_{R_0}, а по любой замкнутой поверхности S_0, охватывающей сферу Σ_{R_0}. Рассмотрим систему решений уравнения Гельмгольца, удовлетворяющих условиям излучения

$$w_k = \zeta^1_{n(k)}(k_0 r)\, v_k(\vartheta, \varphi). \tag{1.11}$$

Система $\{w_k\}$ — полная на рассматриваемой поверхности S_0. В силу (1.4) на поверхности имеет место представление решений

$$u(P)|_{S_0} = \sum_k T_k w_k, \tag{1.12}$$

откуда

$$\int_{S_0} \frac{\partial u}{\partial n} w_l^* dS = \sum_k \gamma_{lk} T_k, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{1.13}$$

где

$$\gamma_{lk} = \int_{S_0} \frac{\partial w_k}{\partial n} w_l^* dS. \tag{1.14}$$

Заметим, что из второй формулы Грина, примененной к функциям u и u^* в области между поверхностями Σ_{R_0} и S_0, следует, что

$$\operatorname{Im} \int_{S_0} \frac{\partial u}{\partial n} u^* dS = \frac{1}{k_0} \sum_k |T_k|^2. \tag{1.15}$$

Поэтому на основании формулы (1.8) окончательно получаем

$$\operatorname{Im} \int_{S_0} \frac{\partial u}{\partial n} u^* dS = \frac{1}{k_0} \sum_k |T_k|^2. \tag{1.16}$$

Соотношения (1.15) и (1.16) имеют очевидный физический смысл постоянства полного потока энергии через любую замкнутую поверхность, содержащую Σ_{R_0}.

Соотношения (1.13) представляют собой общие парциальные условия излучения для уравнения Гельмгольца. С их помощью внешнюю краевую задачу (1.1)—(1.4) можно свести к решению внутренней краевой задачи для уравнения (1.1) в двусвязной области D_e^*, ограниченной поверхностями S и S_0, с условиями (1.3) и (1.13) на этих поверхностях соответственно.

В некоторых случаях поверхность S_0 удобно выбирать внутри сферы Σ_{R_0}, но так, чтобы всюду вне S_0 выполнялось уравнение Гельмгольца (1.2). В этом случае на поверхности S_0 решение исходной краевой задачи нельзя представить в виде разложения (1.12), однако парциальные условия излучения можно поставить на поверхности S_0 и получить выражение для коэффициентов T_k в представлении (1.4), справедливом вне сферы Σ_{R_0}, не вычисляя решения уравнения Гельмгольца в области между поверхностями S_0 и Σ_{R_0}. Действительно, в силу второй формулы Грина, примененной вне поверхности S_0 к функциям u и w_k, получим

$$\int\limits_{S_0} \left(\frac{\partial u}{\partial n} w_k - \frac{\partial w_k}{\partial n} u \right) dS = 0.$$

Таким образом, искомое условие излучения имеет вид

$$\int\limits_{S_0} \frac{\partial u}{\partial n} w_k dS = \int\limits_{S_0} u \frac{\partial w_k}{\partial n} dS, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{1.17}$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям u и w_k^* в области, ограниченной поверхностями S_0 и Σ_{R_0}, и воспользовавшись представлением (1.4) на Σ_{R_0}, получаем

$$T_k = \frac{k_0}{2i} \int\limits_{S_0} \left(\frac{\partial u}{\partial n} w_k^* - \frac{\partial w_k^*}{\partial n} u \right) dS. \tag{1.18}$$

Соотношение (1.18) можно рассматривать как нелокальное импедансное условие на поверхности S_0, эквивалентное условиям излучения Зоммерфельда — Реллиха.

Получим интегральные тождества для решения поставленной задачи, которые выражают законы сохранения энергии для задачи дифракции. Применив первую формулу Грина к функциям u и u^* в области D_e^*, получим соотношение

$$\int\limits_{D_e^*} u^* L[u]\, dv = \int\limits_{S+S_0} p u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int\limits_{D_e^*} p\, |\operatorname{grad} u|^2 dv +$$

$$+ \int\limits_{D_e^*} q\, |u|^2 dv = 0.$$

Из мнимой части этого соотношения, учитывая граничные условия на поверхности S, имеем

$$\operatorname{Im} \int\limits_{D_e^*} q\, |u|^2 dv + \operatorname{Im} \int\limits_{S} (\Phi + \alpha u)\, p u^* dS + \operatorname{Im} \int\limits_{S_0} \frac{\partial u}{\partial n} u^* dS = 0. \tag{1.19}$$

Учитывая парциальные условия излучения, соотношения (1.15) и очевидное тождество

$$\operatorname{Im} \{(\Phi + \alpha u)\, p u^*\} = \frac{p}{2i} \{(\Phi + \alpha u)\, u^* - (\Phi^* + \alpha^* u^*)\, u\} =$$

$$= p \left\{ \alpha_2 \left| u + \frac{\Phi}{2i\alpha_2} \right|^2 - \frac{1}{4} \frac{|\Phi|^2}{\alpha_2} \right\},$$

справедливое при $\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha > 0$, преобразуем соотношение (1.19) к виду

$$\int\limits_{D_e^*} \operatorname{Im} q\, |u|^2 dv + \int\limits_S p\alpha_2 \left| u + \frac{\Phi}{2i\alpha_2} \right|^2 dS + \frac{1}{k_0} \sum_k |T_k|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_S \frac{p\,|\Phi|^2}{\alpha_2}\, dS. \qquad (1.20)$$

Соотношение (1.20) выражает закон сохранения энергии. Оно справедливо в случае непрерывной функции q, и в случае разрывной ограниченной функции q. В последнем случае исходная краевая задача должна быть дополнена условиями непрерывности поля u и его конормальной производной на границах раздела непрерывности сред.

§ 2. Построение приближенного решения в сферическом слое

Перейдем к построению приближенного решения задачи (1.1)—(1.3), (1.13) в области D_e^*. Особенностью этой задачи является то, что, как правило, частота колебаний $f = \frac{k_0 c}{2\pi}$, где c — скорость распространения волн в среде, больше первых собственных частот области D_e^*. Согласно «парциальным» условиям излучения (1.13), задача оказывается несамосопряженной. Эти обстоятельства затрудняют применение прямых численных методов для решения данного класса задач. В настоящее время для их решения разработаны прямые проекционные методы типа метода Галеркина. В частности, достаточно эффективным оказался метод, сводящий исходную задачу к краевой задаче для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная идея метода достаточно проста. Пусть область Ω решения исходной задачи такова, что можно выделить криволинейную координату ζ такую, что сечение S_ζ области Ω координатной поверхностью $\zeta = \mathrm{const}$ односвязно. Выберем в каждом сечении S_ζ полную систему функций $\{\chi_k\}$, параметрически зависящую от ζ. Приближенное решение задачи (1.1)—(1.3), (1.13) будем искать в виде конечной суммы

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} f_k(\zeta)\, \chi_k$$

с подлежащими определению функциями $f_k(\zeta)$. Для их нахождения используем условия типа проекционных соотношений ортогональности

$$\int_{S_\zeta} L[u_N]\psi_k ds = 0, \; k = 1, \dots N,$$

где ψ_k — некоторая полная на S_ζ система функций. Часто в качестве функций ψ_k выбираются функции χ_k^*.

Подставляя выражение для u_N в условие ортогональности, получим конечную систему линейных дифференциальных уравнений для определения функций f_k. Краевые условия для этой системы дифференциальных уравнений получаются из требования удовлетворения в интегральном смысле краевому условию (1.3) и условиям (1.13) в граничных сечениях S_{ζ_1} и S_{ζ_2}.

Преимущество такого метода по сравнению с обычным методом Галеркина заключается в том, что в представлении для u_N лишь часть функций, определяющих приближенное решение, выбирается априорно (функции χ_k), остальные же функции определяются из условий задачи. Этот метод принято называть неполным методом Галеркина *.

Построим приближенное решение задачи (1.1)—(1.3), (1.13) начиная со случая, когда поверхность S представляет собой сферу радиуса r_0. Как будет следовать из дальнейшего рассмотрения, такое предположение не ограничивает общности рассмотрения проблемы. В этом случае естественно в качестве области D_e^* решения задачи рассматривать шаровой слой, ограниченный концентрическими сферами радиусов r_0 и R_0, а парциальные условия излучения задавать на поверхности сферы Σ_{R_0}. Очевидно, что здесь роль координаты ζ играет радиальная координата, а S_ζ — концентрические сферы S_r.

Выберем в качестве базисной системы неполного метода Галеркина систему сферических функций $\{v_k(\theta, \varphi)\}$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} Z_k(r)\, v_k. \tag{2.1}$$

Для определения коэффициентов Z_k, согласно неполному методу Галеркина, надо сформулировать проекционные условия ортогональности. Целесообразно эти условия поставить таким образом, чтобы приближенное решение (2.1) удовлетворяло тому же энергетическому соотношению (1.20), что и точное решение исходной задачи (1.1)—(1.3), (1.13). В данном случае условия ортогональности могут быть выбраны в форме

$$\int_{S_r} L[u_N]\, v_k^* ds = 0, \; r_0 \leqslant r \leqslant R_0, \; k = 1, \dots, N. \tag{2.2}$$

* См.: ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1076—1079.

Из условия (2.2) получаем систему N обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $Z_k(r)$. Граничные условия для этой системы получим из требования удовлетворения приближенным решением граничному условию (1.3) в интегральном смысле и условиям излучения (1.10):

$$\int\limits_{S_{r_0}} P\left(\frac{\partial u_N}{\partial n} - \alpha u_N - \Phi\right) v_k^* ds = 0, \quad k = 1, \dots N; \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{S_{R_0}} \frac{\partial u_N}{\partial n} v_k^* ds = Z_k R_0^2 \gamma_{k(R_0)}, \quad k = 1, \dots N, \tag{2.4}$$

где

$$\gamma_k = \frac{d}{dr} (\zeta_{n(k)}^{(1)}) / \zeta_{n(k)}^1 \big|_{r = R_0}.$$

В области вне S_{R_0} приближенное решение определим в виде конечной суммы

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} T_k^N \zeta_{n(k)}^1 v_k, \quad r > R_0, \tag{2.5}$$

где коэффициент

$$T_k^N = \frac{Z_k(R_0)}{\zeta_{n(k)}^1 (kR_0)}.$$

Из представления (2.5) следует, что приближенное решение u_N удовлетворяет условиям излучения и непрерывно всюду вне S_{r_0}. Решение u_N задачи (2.2)—(2.4) удовлетворяет сформулированному выше основному требованию: для функции u_N должно выполняться энергетическое соотношение (1.20). Действительно, умножив соотношения (2.3) на $Z_k^*(r_0)$, а соотношения (2.4) — на $Z_k^*(R_0)$ и просуммировав по k от 1 до N соответственно, получим

$$\int\limits_{S_{r_0}} p\left(\frac{\partial u_N}{\partial n} - \alpha u_N - \Phi\right) u_N^* ds = 0 \tag{2.6}$$

и

$$\operatorname{Im} \int\limits_{S_{R_0}} \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* ds = \frac{1}{k_0} \sum_{k=1}^{N} |T_k^N|^2. \tag{2.7}$$

Умножая соотношения (2.2) на Z_k^*, суммируя по k от 1 до N и интегрируя по r в пределах от r_0 до R_0, имеем

$$\int\limits_{D_e^*} L[u_N] u_N^* dv = 0. \tag{2.8}$$

Преобразуя (2.8), используя первую формулу Грина и учитывая соотношения (2.6) и (2.7), для функции u_N получаем следующее энергетическое соотношение:

$$\int\limits_{D_e^*} \operatorname{Im} q\, |u_N|^2 dv + \int\limits_{S_{r_0}} p\alpha_2 \left| u_N + \frac{\Phi}{2i\alpha_2} \right|^2 ds + \tag{2.9}$$

$$+ \frac{1}{k_0} \sum_k |T_k^N|^2 = \frac{1}{4} \int\limits_{S_{R_0}} \frac{p\,|\Phi|^2}{\alpha_2}.$$

Итак, задача построения приближенного решения u_N сведена к решению линейной краевой задачи (2.2)—(2.4) для системы N обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[r_0, R_0]$. Для исследования однозначной разрешимости этой системы используем альтернативы Фредгольма. Итак, достаточно показать, что соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Для решения u_N^0 однородной задачи ($\Phi \equiv 0$) энергетическое тождество (1.20) принимает вид

$$\int\limits_{D_e^*} \operatorname{Im} q\, |u_N^0|^2 dv + \int\limits_{S_{r_0}} p\alpha_2 |u_N^0|^2 ds + \frac{1}{k_0} \sum_k |T_k^{0N}|^2 = 0. \tag{2.10}$$

Все слагаемые в левой части (2.10) неотрицательны, поэтому при $\operatorname{Im} q > 0$ получим $u_N^0 \equiv 0$ в D_e^*. Если $\operatorname{Im} q = 0$ в D_e^*, то из равенства нулю второго из слагаемых в левой части (2.10) следует, что $u_N^0 \equiv 0$ на S_{r_0}, откуда из (2.1) получаем $Z_k^0(r_0) = 0$, $k = 1, \ldots, N$, отсюда в силу (2.3) при $\Phi \equiv 0$ имеем

$$\frac{d}{dr} Z_k^0 = 0, \quad r = r_0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Следовательно, для определения Z_k^0 получена однородная задача Коши, которая имеет только тривиальное решение, что и доказывает однозначную разрешимость краевой задачи для Z_k.

Исследуем теперь сходимость последовательности приближенных решений $\{u_N\}$ при $N \to \infty$. Ограничимся случаем $\operatorname{Im} q > 0$. Прежде всего заметим, что из соотношения (2.9) вытекает равномерная по N ограниченность нормы u_N:

$$\|u_N\|_{L_2}^2 = \int\limits_{D_e^*} |u_N|^2 dv \leqslant \frac{1}{4 \min \operatorname{Im} q} \int\limits_{S_{r_0}} \frac{p\,|\Phi|^2}{\alpha_2} ds,$$

$$\left| \int\limits_{S_{r_0}} p \frac{\partial u_N}{\partial n} \overset{*}{v}_k ds \right| = |Z_k'(r_0)| = \left| \int\limits_{S_{r_0}} p (\alpha u_N + \Phi) \overset{*}{v}_k ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |(\alpha u_N)_k| + |\Phi_k|; \quad \Phi_k = \int\limits_{S_{r_0}} p \Phi v_k^* ds,$$

$$\sum_k |Z_k'(r_0)|^2 \leqslant 2\left(\sum_k |(\alpha u_N)_k|^2 + \sum_k |\Phi_k|^2\right),$$

$$\sum_k |\Phi_k|^2 \leqslant \|\Phi\|^2 = \overline{C}_1,$$

$$\int\limits_{S_{r_0}} p |\alpha u_N|^2 ds < C_2, \quad \sum_k |(\alpha u_N)_k|^2 < C_2,$$

$$\int\limits_{D_e^*} L[u_N] u_N^* dv = \int\limits_{S_{r_0} \cup S_{R_0}} p \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* ds - \int\limits_{D_e^*} p |\operatorname{grad} u_N|^2 dv +$$

$$+ \int\limits_{D_e^*} q |u_N|^2 dv = 0,$$

$$\operatorname{Re} \int\limits_{S_{R_0}} p(\Phi + \alpha u_N) u_N^* ds - \int\limits_{D_e^*} p |\operatorname{grad} u_N|^2 dv +$$

$$+ \operatorname{Re} \int\limits_{D_e^*} q |u_N|^2 dv = 0. \tag{2.11}$$

Отсюда следует равномерная ограниченность grad_N в энергетической норме.

Рассмотрим разность точного и приближенного решений

$$w_N = u - u_N.$$

При любом $r_0 \leqslant r \leqslant R_0$ имеет место разложение точного решения в равномерно и абсолютно сходящий ряд по системе $\{v_n\}$:

$$u = \sum_k A_k(r) v_k. \tag{2.12}$$

Для функций w_N имеем разложение

$$w_N = \sum_n c_n(r) v_n, \tag{2.13}$$

где

$$c_n(r) = \begin{cases} A_n - Z_n, & 1 \leqslant n \leqslant N, \\ A_n, & n \geqslant N+1. \end{cases}$$

В силу линейности задач для u и u_N из соотношений (2.2) и (1.1) получаем соотношения

$$\int\limits_{S_r} L[w_N]\,v_k^* ds = \begin{cases} 0, & k \leqslant N, \\ -\int\limits_{S_r} L[u_N]\,v_k^* ds, & k \geqslant N+1, \end{cases} \qquad (2.14)$$

а при $r=r_0$ и $r=R_0$ из соотношений (2.3) и (2.14) и соответствующих условий для точного решения — соотношения

$$\int\limits_{S_{r_0}} p\left(\frac{\partial w_N}{\partial n} - \alpha w_N\right) v_k^* ds = \begin{cases} 0, & k \leqslant N, \\ -\int\limits_{S_{r_0}} \left(\frac{\partial u_N}{\partial n} - \alpha u_N - \Phi\right) v_k^* ds \end{cases} \qquad (2.15)$$

и

$$\int\limits_{S_{R_0}} \frac{\partial w_k}{\partial n} v_k^{(*)} ds = T_{w_k}^N R_0^2 \frac{d}{dr}(k_0 r)\Big|_{r=R_0} \zeta_{n(k)}^1, \qquad (2.16)$$

где

$$T_{w_k}^N = \begin{cases} T_k - T_k^N, & k \leqslant N, \\ T_k, & k \geqslant N+1. \end{cases}$$

Из (2.14)—(2.16) для функции w_N имеем следующее интегральное соотношение:

$$\int\limits_{D_e^*} \operatorname{Im} q\,|w_N|^2 dv + \int\limits_{S_{r_0}} p\,\alpha_2 |w_N|^2 ds + \frac{1}{k_0} \sum_k |T_{wk}^N|^2 =$$

$$= -\operatorname{Im} \int\limits_{D_e^*} L[u_N] R_N^* dv - \operatorname{Im} \int\limits_{S_{r_0}} p(\alpha u_N + \Phi) R_N^* ds, \qquad (2.17)$$

где

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k(r)\, v_k. \qquad (2.18)$$

Оценим интеграл в правой части формулы (2.17) и покажем, что он стремится к нулю при $N \to \infty$:

$$\int\limits_{D_e^*} L[u_N] R_N^* dv = \int\limits_{S_{r_0} \cup S_{R_0}} p R_N^* \frac{\partial u_N}{\partial n} ds -$$

$$- \int\limits_{D_e^*} p(\operatorname{grad} u_N, \operatorname{grad} R_N^*)\, dv + \int\limits_{D_e^*} q u_N R_N^* dv.$$

Применяя неравенства Коши — Буняковского и учитывая, что $\|u_N\|_{L_2}$ и $\|\operatorname{grad} u_N\|_{L_2}$ равномерно ограничены по N, нормы $\left\|\frac{\partial u_N}{\partial n}\right\|_{L_2}$ также равномерно ограничены по N, а $\|R_N\|_{W_2^1(D_e^*)}$ и $\|R_N\|_{L_2(S)}$ стремятся к нулю при $N \to \infty$, получаем

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Im} \int\limits_{D_e^*} L[u_N] R_N^* dv = 0.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Im} \int\limits_{S_{r_0}} p(\alpha u_N + \Phi) R_N^* ds = 0.$$

Из (2.17) при $N \to \infty$ получаем

$$\lim_{N\to\infty} \|w_N\|_{W_2^1(D_e^*)} = 0$$

и

$$\lim_{N\to\infty} |T_k - T_k^N| = 0.$$

Следовательно, указанный алгоритм действительно позволяет получить приближенное решение исходной задачи дифракции на неоднородном теле.

Сделаем теперь важное замечание, позволяющее придать значительную общность полученным результатам. До сих пор мы строили приближенное решение для случая, когда поверхность S, ограничивающая тело, являлась сферой. В случае произвольной поверхности S задачу легко свести к только что рассмотренной, отобразив двусвязную область D_e^*, ограниченную поверхностями S и S_0, на сферический слой. При этом коэффициенты уравнения (1.1) изменятся, но, поскольку исходное уравнение было с переменными коэффициентами, это не приводит к принципиальным трудностям.

Рассмотрим более подробно систему проекционных соотношений (2.2). Подставляя в (2.2) представление приближенного решения в виде (2.1) и используя явный вид линейного оператора, имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} A_{kn}(r)\,\Delta_r Z_n + B_{kn}(r)\,Z_n' + \left(C_{kn} - \frac{\mu_n}{r^2} A_{kn}\right) Z_n = 0, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2.19}$$

где

$$A_{kn} = \int\limits_{S_r} p v_n v_k^* r^2 d\Omega; \tag{2.20}$$

$$B_{kn}=\int\limits_{S_r}\frac{\partial}{\partial r}pv_n\overset{*}{v}_k r^2 d\Omega; \qquad (2.21)$$

$$C_{kn}=\int\limits_{S_r}\left\{\frac{1}{r}(\mathrm{grad}_\perp p,\ \mathrm{grad}_\perp v_n)+qv_n\right\}\overset{*}{v}_k r^2 d\Omega. \qquad (2.22)$$

Через Δ_r и $\mathrm{grad}_\perp$ обозначены следующие дифференциальные операции:

$$\Delta_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\mathrm{grad}_\perp=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\mathbf{i}_\varphi.$$

Таким образом, соотношения (2.2) образуют линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, не разрешенную относительно старшей производной. Численные методы во многих случаях более удобно применять к нормальным системам линейных дифференциальных уравнений, поэтому возникает вопрос о приведении системы (2.19) к нормальной форме. В том случае, когда положительную функцию $p(r,\ \theta,\ \varphi)$ можно представить в виде произведения функции, зависящей от r, и функции, которая зависит от координат θ, φ, т. е.

$$p(r,\ \theta,\ \varphi)=p_0(r)P_\perp(\theta,\ \varphi), \qquad (2.23)$$

матрица A_{kn} также имеет общий множитель, зависящий от переменной интегрирования

$$A_{kn}(r)=p_0(r)r^2\bar{A}_{kn},$$

где матрица $\bar{A}_{kn}$ при $p_\perp(\theta,\ \varphi)>0$—постоянная неособенная матрица, и систему (2.19) можно разрешить относительно старшей производной сразу для всех значений переменной r. Функция $p(r,\ \theta,\ \varphi)$, как правило, описывает материальные характеристики среды, которые часто можно задать в виде (2.23).

Существует и более радикальный метод получения разрешенной относительно старшей производной системы дифференциальных уравнений. Он связан с выбором базисной системы функций, отличной от $\{v_k\}$ и связанной с характеристиками среды. Для простоты будем считать, что положительная функция $p(r,\theta,\varphi)$ при $r\to R_0$ непрерывно и гладко стремится к 1. При каждом значении r на отрезке $[r_0,\ R_0]$ вместо базисной системы функций $\{v_n\}$, которая не зависит от r, введем базисную систему функций на сфере радиуса r, ортогональную на этой сфере с весом $p\{v_n(r, \theta, \varphi\}$:

$$\int\limits_{S_r} p v_n \overset{*}{v}_k ds = \delta_{nk}. \tag{2.24}$$

Приближенное решение u_N по-прежнему строим в виде

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} Z_n(r) v_n,$$

а коэффициенты Z_n определяем из системы соотношений (2.2). В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая следует из соотношений (2.2), имеет следующий нормальный вид:

$$\Delta_r Z_k + \sum_{n=1}^{N} B_{kn} Z_n' + \left(C_{kn} - \frac{\overline{\mu}_k}{r^2} \delta_{kn}\right) Z_n = 0. \tag{2.25}$$

Если функции v_n выбрать как собственные функции оператора

$$(\Delta_\perp + \mu_k p) v_k = 0 \tag{2.26}$$

на единичной сфере с весом p, зависящим от r, как от параметра, то коэффициенты C_{nk} будут определены формулой (2.22). Так как $p(r) \to 1$ при $r \to R_0$, то условия излучения (1.13) не изменяются, а система проекционных соотношений дает нормальную систему уравнений (2.25). Построение системы функций $\{v_n\}$ в этом случае усложняется и зависит от вида функции p, однако эта система функций определенным образом связана с коэффициентами исходного уравнения. Вопрос обоснования при таком выборе базиса не вызывает дополнительных сложностей.

Рассмотрим теперь случай, когда функции $p(M)$ и $q(M)$ имеют разрывы первого рода на некоторых гладких поверхностях Г. Разрыв функций q и p требует постановки для точной краевой задачи дополнительных условий согласования на поверхностях разрыва Г. Будем считать, что на поверхности Г выполняются условия согласования

$$[u]|_\Gamma = \left[p \frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_\Gamma = 0, \tag{2.27}$$

где

$$[u]|_\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} (u(P_{+\varepsilon}) - u(P_{-\varepsilon})), \tag{2.28}$$

а точки $P_{+\varepsilon}$ и $P_{-\varepsilon}$ лежат на нормали в точке P на поверхности Г по разные стороны от поверхности Г на расстоянии ε от точки P. Хотя с точки зрения теоремы существования и единственности положение поверхности разрыва по отношению к поверхности тела может быть произвольным, ограничимся рассмотрением случая, когда поверхность разрыва Г объемлет сферу S_{r_0} радиуса r_0. При этом сначала рассмотрим случай, когда Г — сфера, концентрическая сфере S_{r_0}. В этом случае область D_e^*, где необходимо построить приближенное решение задачи, разбивается сферой Г на две подобласти D_e^+ и D_e^-, в каждой из которых могут быть построены приближенные решения u_N^+ и u_N^- в соответствии с соотношениями (2.1) и (2.2). На сфере Г потребуем выполнения следующих проекционных условий согласования:

$$\int\limits_{\Gamma} p_-(u_N^+ - u_N^-)\, v_k^* ds = 0, \quad k=1,\ldots,N; \tag{2.29}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left(p_+ \frac{\partial u_N^+}{\partial n} - p_- \frac{\partial u_N^-}{\partial n}\right) v_k^* ds = 0, \quad k=1,\ldots,N. \tag{2.30}$$

Умножая соотношение (2.29) на $\frac{d}{dr} Z_k^*$ в точке $r-0$, соответствующей поверхности Г, а соотношение (2.30) — на $Z_k^*(r+0)$, получаем

$$\int\limits_{\Gamma} p_- u_N^+ \frac{\partial u_N^{-*}}{\partial n} ds = \int\limits_{\Gamma} p_- u_N^- \frac{\partial u_N^{-*}}{\partial n} ds; \tag{2.31}$$

$$\int\limits_{\Gamma} p_+ \frac{\partial u_N^+}{\partial n} u_N^{+*} ds = \int\limits_{\Gamma} p_- \frac{\partial u_N^-}{\partial n} u_N^{+*} ds. \tag{2.32}$$

Из (2.31) и (2.32) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} p_+ \frac{\partial u_N^+}{\partial n} u_N^{+*} ds = \int\limits_{\Gamma} p_- \frac{\partial u_N^-}{\partial n} u_N^- ds. \tag{2.33}$$

Это означает, что для приближенного решения с условиями сопряжения (2.29) и (2.30) на поверхности Г выполняются условия непрерывности потока энергии через поверхность так же, как и для точного решения. Это позволяет вновь получить интегральное соотношение (2.9), из которого следует разрешимость задачи для функции u_N. Соотношения (2.29) и (2.30) дают условия сопряжения для коэффициентов $Z_k(r-0)$ и $Z_k(r+0)$ в точке разрыва:

$$\sum_{n=1}^{N} Z_n(r-0)\, \alpha_{kn}^- = \sum_{n=1}^{N} Z_n(r+0)\, \alpha_{kn}^-; \tag{2.34}$$

$$\sum_{n=1}^{N} Z'(r-0)\, \alpha_{kn}^- = \sum Z'(r+0)\, \beta_{kn}^+, \tag{2.35}$$

где

$$\alpha_{kn}^{-}=\int_{\Gamma} p_{-}v_{n}v_{k}^{*}ds; \tag{2.36}$$

$$\beta_{kn}^{+}=\int_{\Gamma} p_{+}v_{n}v_{k}^{*}ds. \tag{2.37}$$

Поскольку p_{-} — положительная весовая функция, матрица α_{kn}^{-} невырождена и уравнение (2.34) имеет единственное решение

$$Z_n(r-0)=Z_n(r+0),\quad n=1,\ldots N. \tag{2.38}$$

Соотношение (2.35) дает линейную систему уравнений относительно производных $Z_n'(r-0)$ и $Z_n'(r+0)$ в точке разрыва. Особенно простыми соотношения (2.35) становятся для функции p, зависящей только от радиуса, т. е. когда среда сферически-симметрична.

В том случае, когда представления решения в области D_e^{-} и D_e^{+} выбираются различными, т. е.

$$u_N^{-}=\sum_{n} Z_n^{-}v_n^{-}, \tag{2.39}$$

$$u_N^{+}=\sum_{n} Z_n^{+}v_n^{+},$$

а функции v_n^{+}, v_n^{-} ортогональны с весом p_{+}, p_{-}, соотношения согласования записываются в виде

$$\int_{\Gamma} p_{-}(u_N^{+}-u_N^{-})v_k^{-}ds=0,\quad k=1,\ldots,N^{-}; \tag{2.40}$$

$$\int_{\Gamma}\left(p_{+}\frac{\partial u_N^{+}}{\partial n}-p_{-}\frac{\partial u_N^{-}}{\partial n}\right)v_k^{+}ds=0,\quad k=1,\ldots,N^{+}. \tag{2.41}$$

Умножая (2.40) на $(Z_k^{-*})'$ и суммируя по k, получаем

$$\int_{\Gamma} p_{-}(u_N^{+}-u_N^{-})\frac{\partial u_N^{-*}}{\partial n}ds=0. \tag{2.42}$$

Умножая (2.41) на Z_k^{+*} и суммируя по k, получаем

$$\int_{\Gamma} p_{+}\frac{\partial u_N^{+}}{\partial n}u_N^{+*}ds=\int_{\Gamma} p_{-}\frac{\partial u_N^{-}}{\partial n}u_N^{+}ds. \tag{2.43}$$

Из соотношений (2.42) и (2.43) опять следует непрерывность потока энергии через поверхность разрыва Г, а соотношения

(2.39) и (2.40) преобразуются к следующим уравнениям относительно $Z_n^{\pm}$ и их производных:

$$\sum_{k=1}^{N^+} Z_k^+ a_{nk} = Z_n^-, \quad n=1,\ldots, N^- ; \tag{2.44}$$

$$\frac{dZ_k^+}{dr} = \sum_{n=1}^{N} \beta_{kn} \frac{dZ_n^-}{dr}, \quad k=1 \ldots N^+; \tag{2.45}$$

$$a_{kn} = \int\limits_{\Gamma} p_- v_n^+ v_k^{-*} ds; \tag{2.46}$$

$$\beta_{kn} = \int\limits_{\Gamma} p_- v_n^- v_k^{+*} ds. \tag{2.47}$$

Таким образом, если при разложении по функциям v_n приходится выбирать одинаковое число гармоник в каждой из областей D_e^- и D_e^+, то в случае разложения по системе функций, связанной с весом p, можно выбирать разное число базисных функций в каждой из областей. Соотношения (2.44) и (2.45) образуют систему $N^- + N^+$ линейных уравнений, связывающих функции Z_n^- и ее первые производные с функцией Z_n^+ и ее производными в точке разрыва. Соотношения (2.44) и (2.45) образуют невырожденную систему уравнений как относительно $Z_n^+(Z_n^+)'$, так и относительно $Z_n^-(Z_n^-)'$. Тем самым для случая, когда поверхность разрыва Γ совпадает с координатной поверхностью, мы получаем трехточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть поверхность Γ не совпадает с поверхностью сферы S_r. В этом случае проекционные соотношения следует изменить так, чтобы для приближенного решения выполнялись те же энергетические соотношения, что и для точного решения. Согласно условиям сопряжения, на поверхности Γ (2.27) интегральное соотношение для точного решения имеет вид (2.9). Потребуем, чтобы приближенное решение задачи имело вид конечной суммы

$$u_N = \sum_{k=1} Z_k(r) v_k,$$

а коэффициенты Z_k определим из проекционных соотношений

$$\int\limits_{S_r^+ \cup S_r^-} L[u_N] v_k^* ds = \int\limits_{L} \left[p \frac{\partial u_N}{\partial n} \right] v_k^* dl, \tag{2.48}$$

где кривая L представляет собой пересечение сферы S_r поверхностью Γ разрыва характеристик среды, S_r^+ и S_r^- — части поверхности сферы, на которые она разбита поверхностью Г, dl — элемент дуги данного пересечения.

Соотношения (2.48) образуют для функций Z_k систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.19) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, что позволяет в этом случае не накладывать дополнительные условия сопряжения типа (2.43), (2.35) на функции Z_n. Отметим, что при этом приближенное решение u_N в отличие от точного решения оказывается функцией, непрерывной вместе со своей нормальной производной на поверхности Г разрыва характеристик среды. Однако система соотношений (2.48) выбрана таким образом, что для приближенного решения u_N по-прежнему сохраняется основное энергетическое соотношение (2.9). Действительно, умножая соотношения (2.48) на Z_k^*, суммируя k от 1 до N, а затем интегрируя по r от r_0 до R_0, имеем

$$\int\limits_{D_e^*} L[u_N]\overset{*}{u}_N dv = \int\limits_{\Gamma} [p]\frac{\partial u_N}{\partial n}\overset{*}{u}_N ds. \tag{2.49}$$

Применив в каждой из областей D_e^+ и D_e^- формулу Грина, получим соотношение (2.9), из которого вновь следует разрешимость краевой задачи для системы уравнений (2.48).

§ 3. Задача дифракции на теле произвольной формы в неоднородной среде

Пусть внутри локальной неоднородности находится тело T, ограниченное замкнутой поверхностью S, причем характеристики среды внутри тела таковы, что влияние тела T на внешнее поле может быть описано с помощью импедансного граничного условия (1.3) на поверхности тела S. Выберем некоторую точку O внутри тела T такую, чтобы поверхность S была звездной относительно этой точки O, и введем сферическую систему координат r, θ, φ с центром в точке O. В силу свойств неоднородной среды найдется такая сфера S_{R_0}, что вне этой сферы решение задачи дифракции может быть представлено в виде суперпозиции расходящихся сферических волн с неизвестными коэффициентами (1.12), а для любой поверхности S_0, лежащей в области, где среда однородна, имеют место парциальные условия излучения (1.17). Задача дифракции заключается в построении в области $\bar{D}_e$, ограниченной поверхностями S и S_0, решения уравнения (1.1) с условиями (1.3) и (1.17) на поверхностях S и S_0 соответственно.

Для построения решения задачи отобразим область $\bar{D}_e$ на сферический слой K $\{1\leqslant\xi\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta'\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi'\leqslant 2\pi\}$ так, чтобы поверхность S перешла в сферу радиуса $\xi=1$, а поверхность S_0 — в сферу радиуса $\xi=2$. Конкретный вид отображения, а также поверхность S_0 могут быть выбраны различными способами. В том случае, когда поверхность S_0 гомеоморфна поверхности тела S, одним из наиболее простых способов отображения является следующий. Пусть задано уравнение поверхности S в сферических координатах

$$r=R_0(\theta, \varphi). \tag{3.1}$$

Тогда уравнение поверхности S_0 можно выбрать в виде

$$r=pR_0(\theta, \varphi), \quad p>1,$$

а отображение задать соотношениями

$$\begin{gathered}\xi=1+\frac{r-R_0(\theta, \varphi)}{(p-1)\,R_0(\theta, \varphi)},\\ \theta'=\theta, \quad \varphi'=\varphi, \\ r=pR_0-(2-\xi)(p-1)\,R_0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Отображение (3.2) переводит оператор L в соответствующий оператор в частных производных в новых переменных ξ, θ, φ, который будем обозначать той же буквой L. В сферическом слое K при любом ξ можно ввести ортогональный базис

$$\chi_n=Y_{k(n)}^{m(n)}(\theta', \varphi'),$$

где $Y_k{}^m$ — сферическая функция новых координат θ', φ'. Сферические расходящиеся гармоники

$$w_n=N_n\zeta^1_{k(n)}Y_{k(n)}^{m(n)}$$

на поверхности S_0 образуют систему функций

$$v_n(2, \theta', \varphi')=w_n(pR_0, \theta', \varphi') \tag{3.3}$$

в новой системе координат $\xi\theta'$, φ'.

Функции $v_n(2, \theta', \varphi')$ связаны с базисом $\{\chi_n\}$ следующим образом:

$$\chi_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}v_k,$$

где a_{nk} — треугольная матрица ортогонализации функций v_n.

Приближенное решение задачи дифракции в слое K будем искать в виде

$$u_N=\sum_{n=1}^{N}A_n(\xi)\,\chi_n, \tag{3.4}$$

где коэффициенты A_n определим из следующей системы соотношений ортогональности:

$$\int\limits_{\xi=\mathrm{const}} L[u_N]\,\chi_n^* ds=0,\quad n=1,\ldots,N; \tag{3.5}$$

$$\int\limits_{\xi=1}\left(\frac{\partial u_N}{\partial\nu}-\alpha u_N-\Phi\right)\chi_n^* ds=0,\quad \nu \text{ — конормаль}; \tag{3.6}$$

$$\int\limits_{\xi=2}\left(\frac{\partial u_N}{\partial n}-\frac{\partial u_N^+}{\partial n}\right)\chi_n^* ds=0,\quad n=1,\ldots,N; \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\xi=2}(u_N-u_N^+)\,\chi_n^* ds=0,\quad n=1,\ldots,N. \tag{3.8}$$

Функция u_N^+ — решение однородного уравнения Гельмгольца вне поверхности S_0, удовлетворяющее условиям излучения, — определяется формулой (1.12):

$$u_N^+=\sum_{k=1}^{\infty} T_k^N w_k. \tag{3.9}$$

Тем самым и на поверхности S_0 и вне ее сама функция u_N^+ и ее нормальная производная разлагаются по системе функций $\{v_n(2,\theta,\varphi)\}$. Очевидно, что в силу (3.9) и (3.4) коэффициенты

$$T_k^N=\sum_n a_{nk}A_n(2),\quad k=1,\ldots, \tag{3.10}$$

и соотношения (3.7) и (3.8) дают граничное условие при $\xi=2$

$$\int\limits_{\xi=2}\frac{\partial u_N}{\partial n}\chi_n^* ds=\sum_m c_{nm}A_m(2); \tag{3.11}$$

$$c_{nm}=\sum_{k,l}\gamma_{kl}a_{kn}^* a_{ml}. \tag{3.12}$$

Проекционные соотношения (3.5)—(3.9) выбраны таким образом, что как приближенное, так и точное решения удовлетворяют энергетическому соотношению, из которого следуют разрешимость задачи определения u_N и сходимость u_N к u в энергетических нормах.

Рассмотрим более подробно данную схему для осесимметричной задачи. Будем считать, что поверхность S является поверхностью вращения, ось вращения совпадает с осью z, уравнение (3.2) имеет вид

$$\Delta u+k^2(r,\theta)\,u=0, \tag{3.13}$$

а функции α и Φ не зависят от угла φ. Вне поверхности S_0 решение будем представлять в виде суперпозиции функций, имеющих осевую симметрию. Имеем:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r, \theta); \tag{3.14}$$

$$w_n = A_n \zeta_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos\theta); \tag{3.15}$$

$$\zeta_n^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x); \tag{3.16}$$

$$A_n = \sqrt{\frac{(2n+1)k_0}{\pi}}. \tag{3.17}$$

Применяя вторую формулу Грина к u и u^* в области $\bar{D}_e$ и используя уравнение (3.2) и граничные условия, получим энергетическое соотношение

$$\int_{D_e} k_2^2 |u|^2 dv + \int_S \alpha_2 |u|^2 ds + 4 \sum_n |T_n|^2 + \mathrm{Im}\int_S \Phi u^* ds = 0,$$

$$k_2^2 = \mathrm{Im}\, k^2, \quad \alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha. \tag{3.18}$$

Преобразование (3.2) переводит область $\bar{D}_e$ в сферический слой K и в силу осевой симметрии можно рассматривать уравнение

$$Lu + k^2(\xi, \theta) u = 0$$

в двумерной области $K\{1 \leqslant \xi \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ с соответствующими краевыми условиями.

Пусть на кривой $\xi = 2$, соответствующей поверхности S_0, выбрана система линейно независимых функций $\{\psi_k(\theta)\}$ таких, что любую гладкую функцию, заданную на отрезке $[0, \pi]$, можно приблизить с любой степенью точности в норме $W_2^{(1)}([0, \pi])$ линейной комбинации функций ψ_k. В гильбертовом пространстве любую полную систему функций $\{\psi_k\}$ можно ортонормировать и эта ортогонализация может быть реализована с помощью треугольной матрицы a_{nk} ($a_{nk} = 0$ при $k > n$). При этом полученная система функций χ_n

$$\chi_n = \sum_k a_{nk} \psi_k \tag{3.19}$$

является ортогональным базисом в $W_2^{(1)}([0, \pi])$.

Выберем в качестве исходной системы ψ_k на кривой $\xi = 2$ систему функций $w_n(\rho_{R0}(\theta), \theta)$, выполним ее ортогонализацию и получим функции $\chi_n(\theta)$ в соответствии с формулой (3.19). Приближенное решение в области K зададим в виде

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} Z_n(\xi)\chi_n(\theta) \qquad (3.20)$$

с коэффициентами, зависящими от ξ. Для коэффициентов Z_n сформулируем одномерную краевую задачу, поставив проекционные аналоги уравнения (3.13) и граничных условий. Проекционные соотношения сформулируем таким образом, чтобы u_N удовлетворяло тому же энергетическому равенству, что и точное решение. Потребуем, чтобы

$$\int_0^{\pi} (Lu_N + k^2 u_N)\chi_n^* g(\theta)\, d\theta = 0,$$

$$1 \leqslant \xi \leqslant 2, \quad n = 1, \dots, N; \qquad (3.21)$$

$$g(\theta) = \frac{D(r, \theta, \varphi)}{D(\xi, \theta, \varphi)}; \qquad (3.22)$$

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u_N}{\partial n} - \alpha u_N - \Phi\right)\chi_n^* g(\theta)\, d\theta = 0, \qquad (3.23)$$

где $g(\theta)\,d\theta = dl$ — дифференциал дуги, образующей тело вращения.

При $\xi = 2$ потребуем выполнения равенств

$$\sum_{n=0}^{N} Z_n(2)\chi_n = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^N w_k; \qquad (3.24)$$

$$\int_{\xi=2} \left(\frac{\partial u_N}{\partial n} - \frac{\partial u_N^+}{\partial n}\right)\chi_n^* ds = 0; \qquad (3.25)$$

$$u_N^+ = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^N w_k(r, \theta), \quad r > pR_0(\theta). \qquad (3.26)$$

Умножая равенство (3.21) на Z_n^*, суммируя по n от 0 до N, интегрируя по ξ и φ и переходя к старым координатам r, θ, φ, получим

$$\int_{\tilde{D}_e} \Delta u_N u_N^* dv + \int_{\tilde{D}_e} k^2 |u_N|^2 dv = 0. \qquad (3.27)$$

Аналогично, умножая (3.23) на Z_n^* и суммируя по n, получаем

$$\int_S \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* ds - \int_S (\alpha |u_N|^2 + \Phi u_N^*)\, ds = 0. \qquad (3.28)$$

Умножив (3.25) на Z_n^* и суммируя по n, имеем

$$\int\limits_{S_0} \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* ds = 4 \sum_{n=0}^{\infty} |T_n^N|^2. \quad (3.29)$$

Применяя к u_N и u_N^* вторую формулу Грина и воспользовавшись соотношениями (3.28) — (3.29), получим энергетическое соотношение

$$\int\limits_{D_e} k_2^2 |u_N|^2 dv + 4 \sum_{n=0}^{\infty} |T_n^N|^2 + \int\limits_{S} \alpha_2 |u_N|^2 ds + \operatorname{Im} \int\limits_{S} \Phi u_N^* ds = 0. \quad (3.30)$$

Заметим, что

$$\alpha_2 |u_N|^2 + \frac{\Phi u_N^* - \Phi^* u_N}{2i} = \left| \sqrt{\alpha_2} u_N + \frac{\Phi}{2i \sqrt{\alpha_2}} \right|^2 - \frac{|\Phi|^2}{4\alpha_2}.$$

Интегральное соотношение имеет вид

$$\int\limits_{D_e} k_2^2 |u_N|^2 dv + \int\limits_{S} \left| \sqrt{\alpha_2} u_N + \frac{\Phi}{2i \sqrt{\alpha_2}} \right|^2 ds + 4 \sum_{n} |T_n^N|^2 =$$

$$= \int\limits_{S} \frac{|\Phi|^2}{4\alpha_2} ds = \Phi_1. \quad (3.31)$$

Из соотношения (3.31) следуют оценки

$$\|u_N\|_{L_2} \leqslant \frac{1}{\bar{k}_2^2} \Phi_1; \quad (3.32)$$

$$\|u_N\|_{L_2(S)} \leqslant \frac{1}{\bar{\alpha}_2} \Phi_1, \quad (3.33)$$

где $\bar{k}_1^2$ и $\overline{\alpha_1}$ — средние значения k_2^2 и α_2.

Из энергетического соотношения (3.31) и линейности краевой задачи вновь вытекает разрешимость задачи определения приближенного решения u_N.

Обоснование сходимости приближенного решения к точному проводится по схеме, приведенной в § 2. При этом для оценки разности w_N имеет место соотношение *

$$\int\limits_{D_e} k_1^2 |w_N|^2 dv + \int\limits_{S} \alpha_1 |w_N|^2 ds + 4 \sum_{n} |T_n - T_n^N|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\bar{k}_1^2} \Phi_1 \right)^{1/2} \|\Delta R_N\|_{L_2(D)} + \left(\frac{2}{\alpha_1} \Phi \right)^{1/2} \|R_N\|_{W_2^{(1)}(S)} +$$

---

* Отметим, что сходимость приближенного решения к точному не следует из результатов доказательства § 1.

$$+\frac{|k|}{\sqrt{\bar{k}_1^2}}(\Phi_1)^{1/2}\|R_N\|_{L_2(D)}+(\Phi_1)^{1/2}\|R_N\|_{L_2(S)}+2\left(\sum_{N+1}|T_n|^2\right)^{1/2}(\Phi_1)^{1/2}, \tag{3.34}$$

где Φ_1 определено в (2.35).

Равенство (3.34) является оценкой скорости сходимости приближенного решения к точному в области $\bar{D}_e$ и на поверхностях S и S_0. Каждое из трех слагаемых в левой части (3.34) стремится к нулю вместе с $\|R_N\|$ в правой части неравенства при $N\to\infty$. Скорость сходимости зависит прежде всего от гладкости точного решения u, поскольку она определяет скорость убывания $\|R_N\|$. Достаточно потребовать, чтобы $u\in W_2^{(2)}(D)$, тогда все нормы R_N в правой части (3.34) стремятся к нулю, так как нормы $\|R_N\|_{W_2^{(1)}(S)}\to 0$ и $\|R_N\|_{L_2(S)}$ в силу теорем вложения $W_2^{(2)}(D)$ в $W_2^{(1)}(S)$ и $L_2(S)$. То же справедливо и для остатка ряда $\sum\limits_{N+1}|T_n|^2$, так как $u\in W_2^{(1)}(S)$, если $u\in W_2^{(2)}(D)$, а

$$\sum_{N+1}^{\infty}|T_n|^2=\frac{1}{4}\int\limits_{S_0}\frac{\partial\tilde{R}_N}{\partial n}\tilde{R}_N^*ds,$$

где

$$R_N=\sum_{N+1}T_n w_n,\quad r>pR_0$$

— остаток ряда, который представляет точное решение u вне поверхности S_0, удовлетворяющее условиям излучения.

Если тело находится в однородной среде, когда $p=1$ и поверхность S совпадает с S_0, то скорость сходимости наибольшая, а задача становится чисто алгебраической. В этом случае метод переходит в метод неортогональных рядов.

Рассмотрим особенности реализации метода. Вместо переменной ξ введем переменную ξ' с помощью соотношения

$$\xi=1-(\xi'-1)\frac{1}{p-1};$$

имеем

$$\xi'=1+(p-1)(\xi-1).$$

Штрих далее опустим. Запишем оператор Лапласа в переменных ξ, θ:

$$L+k^2=\frac{1}{R_0}[1+(\ln' R_0)^2]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi R_0}F(\theta)\frac{\partial}{\partial\xi}-$$

$$-\frac{2}{\xi R_0^2}\ln' R_0\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\theta}+\frac{1}{\xi^2 R_0^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\xi^2 R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+k^2,$$

$$F(\theta)=2+(\ln' R_0)^2-\ln' R_0\operatorname{ctg}\theta-\ln'' R_0.$$

Проекционное соотношение (3.21) дает систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка размерности $N+1$ относительно вектор-функции $\{Z_n(\xi)\}$:

$$\xi^2 \sum_{k=0}^{N} Z_n'' A_{nk} + \xi \sum_{k=0}^{N} Z_n' H_{nk} + \sum_{k=0}^{N} Z_n V_{nk} + \xi^2 \sum_{k=0}^{N} Z_n W_{nk} = 0,$$

$$k = 0, \dots, N,$$

где матрицы

$$A_{nk} = \sum_{l=0} a_{nl} \int_0^{\pi} R_0(\theta) \sin\theta \,[1 + (\ln' R_0)^2]\, v_l v_k^* d\theta,$$

$$H_{nk} = \sum_{l=0} a_{nl} \int_0^{\pi} R_0(\theta) \sin\theta \,[F(\theta)\, v_l v_k^* - 2\ln' R_0 v_l' v_k^*]\, d\theta,$$

$$V_{nk} = \sum_{l=0} a_{nl} \int_0^{\pi} (R_0 \cos\theta v_l' (v_k^*)' + R_0 \sin\theta\, v_l' v_k^*)\, d\theta,$$

$$W_{nk} = \sum_{l=0} a_{nl} \int_0^{\pi} R_0 \sin\theta k^2(\xi, \theta)\, v_l v_k^* d\theta.$$

Выполняя замену $\tilde{Z}_l = \sum_n a_{nl} Z_n$ и представляя матрицы в виде

$$A_{nk} = \sum_l a_{nl} \tilde{A}_{lk},$$

получим систему дифференциальных уравнений, не содержащую явно матрицу ортогонализации:

$$\xi^2 \sum_l \tilde{Z}_l'' A_{lk} + \xi \sum_l \tilde{Z}_l' \tilde{H}_{lk} + \sum_l (\tilde{V}_{lk} + \xi^2 \tilde{W}_{lk}) \tilde{Z}_l = 0.$$

Краевые условия (3.23), (3.24)—(3.26) также можно преобразовать к виду, не содержащему матрицы ортогонализации явно относительно функций $\tilde{Z}_l(\xi)$.

Матрица $\tilde{A}_{lk}$ не зависит от переменной ξ, поэтому решение краевой задачи сводится к решению краевой задачи для нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. На каждом шаге интегрирования этой системы необходимо вычислить значения матриц, что сводится к вычислению квадратур от произведений полиномов Лежандра на плавно изменяющиеся функции. Для быстрого вычисления таких интегралов могут быть применены специальные методы, учитывающие характер осцилляций полиномов Лежандра.

Рассмотренная схема метода Галеркина удобна тем, что позволяет получить сравнительно простую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако при достаточно вытянутой форме поверхности S значение параметра p может быть велико, что приводит к краевой задаче на большом интервале изменения переменной ξ. Кроме того, скорость сходимости приближенного решения к точному для достаточно вытянутых поверхностей S может быть медленной. В этом случае следует обратиться к другой системе базисных функций.

Пусть $\{M_p\}$ — счетное, всюду плотное множество точек, расположенных на образующей нерезонансной поверхности вращения S^0, которая помещена внутри тела T. Система функций

$$s_p(r,\,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\exp\left(ik_0R_{MM_p}\right)}{R_{MM_p}}\,d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца в области $r>pR_0(\theta)$ и условиям излучения на бесконечности. При $r\to\infty$

$$s_p=\frac{e^{ik_0r}}{r}\,\omega_p(\theta)+O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где

$$\omega_p=\exp\left(-ik_0r_p(\cos\theta_p-\cos\theta)\right)J_0\left(k_0r_p(\sin\theta_p-\sin\theta)\right),$$

а r_p, θ_p — координаты точек M_p на образующей.

Система $\{\omega_p\}$ полна в пространстве $L_2([0,\,\pi])$ с весом $\sin\theta$.

Пусть задана произвольная непрерывная функция $f(\theta)$. Определим функцию

$$u(r,\,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_p\zeta_p^{(1)}(k_0r)P_p(\cos\theta)$$

так, чтобы

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^{\pi}|r\exp(-ik_0r)\,u-f(\theta)|^2\sin\theta\,d\theta=0.$$

В силу полноты системы полиномов Лежандра коэффициенты c_p определяются однозначно. На поверхности сферы S_{R_0} функция u равна u_0. Очевидно, что u является решением внешней задачи для уравнения Гельмгольца вне сферы S_{R_0}. С другой стороны, вне сферы

$$u(r,\,\theta)=\sum_{p=0}d_ps_p,\tag{3.35}$$

где коэффициенты d_p определяются однозначно через u. Ряд

(3.35) сходится не просто равномерно, а таким образом, что при $r \to \infty$ справедлива оценка

$$\left| u - \sum_{p=0}^{N} d_p s_p \right| < \frac{\varepsilon}{r}. \quad (3.36)$$

В силу (3.36) имеем оценку

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_p d_p \omega_p - f(\theta) \right|^2 \sin\theta d\theta < 2\varepsilon.$$

Последнее доказывает полноту системы ω_p. Пусть теперь поверхность S задана уравнением $r = R_0(\theta)$. Отобразим область D, заключенную между поверхностью и сферой S, на шаровой слой K с помощью отображения

$$\xi = 1 + \frac{r - R_0(\theta)}{R_0 - R_0(\theta)}.$$

Внутри шарового слоя приближенное решение будем находить по формуле (3.20), в которой под функциями $\chi_k(\theta)$ понимаем функции ω_k. Имеем

$$u_N(\xi, \theta) = \sum_n Z_n(\xi) \omega_n(\theta).$$

Тогда соотношения (3.21)—(3.26) определяют приближенное решение u_N, удовлетворяющее соотношению (3.31). Основное преимущество данной схемы метода состоит в том, что число N для обеспечения той же точности в случае вытянутых поверхностей может быть выбрано небольшим.

§ 4. Электромагнитная задача дифракции на прозрачном неоднородном теле

Рассмотрим следующую задачу дифракции электромагнитных волн. Пусть внутри области D, ограниченной поверхностью S, среда характеризуется тензорами $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\mu}$, которые можно представить соответственно в виде $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}\varepsilon + \boldsymbol{\varepsilon}'$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{I}\mu + \boldsymbol{\mu}'$, где $\boldsymbol{\varepsilon}'$ и $\boldsymbol{\mu}'$ — эрмитовы тензоры, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, ε, μ — скалярные функции с положительной мнимой частью. Вне области D среда описывается постоянными параметрами ε_0 и μ_0. Электромагнитное поле возбуждается системой локальных токов $\mathbf{j}$, расположенных в области D и колеблющихся с частотой ω. Будем предполагать, что характеристики среды и заданные токи, определяющие способ возбуждения, являются достаточно гладкими функциями для того, чтобы существовало классическое решение поставленной задачи. Математическая задача дифракции в такой постановке сводится к определению ограниченного решения неоднородной системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j} \end{aligned} \tag{4.1}$$

во всем пространстве, при этом оно должно удовлетворять условиям излучения, которые заключаются в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности. На границе S области D, которую будем считать достаточно гладкой, выполняются условия сопряжения в виде требования непрерывности касательных составляющих электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей. В том случае, когда характеристики среды непрерывны на поверхности S, задача рассматривается без дополнительных условий сопряжения.

В дальнейшем удобно применять условия излучения в форме парциальных условий излучения. Для формулировки этих условий потребуется понятие нормальных сферических волн. Известно, что система однородных уравнений Максвелла в неограниченной среде с постоянными характеристиками $\varepsilon_0 \mu_0$ имеет счетную систему решений $\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n$, удовлетворяющих условиям излучения. Эта система волн однозначно определяется системой скалярных функций ψ_n, являющихся решением скалярного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат с центром в произвольной точке O, которую в дальнейшем будем помещать внутри области D:

$$\psi_n(M) = \zeta^{(1)}_{k(n)}(k_0 r)\, Y^{m(n)}_{k(n)}(\theta, \varphi), \quad k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0, \tag{4.2}$$

где Y_k^m — сферические функции. Под индексом n здесь, как и ранее, будем подразумевать произвольно упорядоченную последовательность пар чисел (k, m), а через $\zeta_k^{(1)}$ обозначать сферические бесселевы функции, соответствующие расходящимся сферическим волнам

$$\zeta_k^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, \mathrm{H}^{(1)}_{k+1/2}(x),$$

где $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$. Выбор сферических функций первого рода определяется зависимостью от времени $\exp(-i\omega t)$. Поля нормальных волн связаны соотношениями

$$\mathbf{E}_n = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2} \operatorname{rot} \mathbf{H}_n, \quad \mathbf{H}_n = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_n \tag{4.3}$$

и выражаются через функцию ψ_n для волн магнитного типа следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^{(1)} &= -\operatorname{rot}(\mathbf{R}\psi_n), \\ \mathbf{H}_n^{(1)} &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{R}\psi_n), \end{aligned} \tag{4.4a}$$

а для волн электрического типа — в виде

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_n^{(2)} &= -\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{R}\psi_n),\\
\mathbf{H}_n^{(2)} &= -\frac{k_0^2}{i\omega\mu_0}\operatorname{rot}(\mathbf{R}\psi_n).
\end{aligned}
\tag{4.4б}
$$

Здесь $\mathbf{R} = r\mathbf{i}_r$, где $\mathbf{i}_r$ — единичный вектор сферической системы координат.

Любое решение однородной системы уравнений (4.1) в однородной среде, удовлетворяющее условиям излучения, представимо в виде суперпозиции полей нормальных волн электрического и магнитного типа:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \sum_{n,j} a_n^{(j)} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(j)} \\ \mathbf{H}_n^{(j)} \end{pmatrix}, \quad r > R_0, \tag{4.5}
$$

при этом формула (4.5) представляет собой аналитическую форму условий излучения.

Поля нормальных волн $\mathbf{E}_n^{(j)}\mathbf{H}_n^{(j)}$ ортогональны на любой сфере с центром в начале координат. Действительно, ортогональность полей электрического и магнитного типа между собой следует из формул (4.4а)—(4.4б). Ортогональность полей одного типа является следствием определения функций ψ_n, так как справедливы соотношения

$$
\int_{S_r} \left[\mathbf{E}_n^{(1)}\mathbf{H}_m^{(1)}\right] \mathbf{i}_r ds = \frac{1}{i\omega\mu_0} r\zeta_k^{(1)}(k_0 r)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\zeta_k^{(1)*}\right)\delta_{nm}; \tag{4.6а}
$$

$$
\int_{S_r} \left[\mathbf{E}_n^{(2)}\mathbf{H}_m^{(2)}\right] \mathbf{i}_r ds = \frac{-1}{i\omega\mu_0} r\zeta_k^{(1)*}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\zeta_k^{(1)}\right)\delta_{nm}. \tag{4.6б}
$$

В формулах (4.6) использована следующая нормировка сферических функций:

$$
\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\nabla_\perp Y_n|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1,
$$

где

$$
\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi .
$$

При такой нормировке

$$
Y_n = N_n P_{k(n)}^{m(n)}(\cos\theta)\begin{pmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix}.
$$

В дальнейшем нормировочные коэффициенты в соотношениях

(4.6) будем обозначать через β_n или $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$ соответственно для волн магнитного или электрического типа:

$$\beta_n^{(1)} = \frac{1}{i\omega\mu_0} r\zeta_{k(n)}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\zeta_{k(n)}^{(1)*} \right),$$

$$\beta_n^{(2)} = \frac{i}{\omega\mu_0} r\zeta_{k(n)}^{(1)*} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\zeta_{k(n)}^{(1)} \right).$$

Используя условия ортогональности (4.6), условия излучения (4.5) можно записать в следующей эквивалентной интегральной форме:

$$a_n = \frac{1}{\beta_n} \int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{E}\mathbf{H}_n^*]\, \mathbf{i}_r ds = \frac{1}{\beta_n^*} \int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{E}_n^*\mathbf{H}]\, \mathbf{i}_r ds, \tag{4.7}$$

где a_n — коэффициенты разложения в (4.5).

Из соотношений (4.5) и (4.7) следует выражение для потока энергии полного поля через поверхность S_{R_0}:

$$\int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\, \mathbf{i}_r ds = \sum_n \beta_n |a_n|^2. \tag{4.8}$$

Применяя к полю **E**, **H** и **E***, **H*** лемму Лоренца в области, которая ограничена сферой радиуса R_0, объемлющей область D и область задания токов **j**, получим соотношение

$$\operatorname{Re} \int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\, \mathbf{i}_r ds + \int\limits_{K_{R_0}} \left| \sqrt{k_0 \operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0}\,\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{k_0 \operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0}} \right|^2 dv +$$

$$+ \operatorname{Im} \int\limits_{K_{R_0}} k_0 \operatorname{Im} \frac{\mu}{\mu_0} |\mathbf{H}|^2 dv = \int\limits_{K_{R_0}} \frac{|\mathbf{j}|^2}{4k_0 \operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0} dv, \tag{4.9}$$

где K_{R_0} — шар, ограниченный сферой радиуса R_0.

Учитывая, что $\operatorname{Im} \beta_n^{(1)} = \frac{1}{k_0}$, $\operatorname{Im} \beta_n^{(2)} = -\frac{1}{k_0}$, и соотношение (4.8), соотношение (4.9) можно переписать в виде

$$\frac{1}{k_0 \omega\mu_0} \sum_n |a_n|^2 + \int\limits_{K_{R_0}} \left| \sqrt{k_0 \operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0}\,\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{k_0 \operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0}} \right|^2 dv +$$

$$+ \int\limits_{K_{R_0}} k_0 \operatorname{Im} \mu/\mu_0 |\mathbf{H}|^2 dv = \int\limits_{K_{R_0}} \frac{|\mathbf{j}|^2}{4k_0 \operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0} dv. \tag{4.10}$$

Равенство (4.10) имеет смысл закона сохранения энергии. Таким образом, внешняя задача дифракции в среде с переменными характеристиками сведена к задаче определения решений уравнений Максвелла внутри сферы радиуса R_0 с условиями (4.7).

Для решения задачи в конечной области используем прямой проекционный метод, сводящий задачу к краевой задаче для системы линейных дифференциальных уравнений. При этом построим последовательность функций, каждая из которых удовлетворяет энергетическому соотношению (4.10). Семейство приближенных решений построим используя некоторые условия ортогональности, заменяющие исходные дифференциальные уравнения. Для формулировки таких условий ортогональности введем базис, позволяющий аппроксимировать любую вектор-функцию, определенную на единичной сфере.

Произвольный вектор, касательный к сфере, представим в виде линейной суперпозиции вектор-функций, образующих базис на сфере. Для удобства рассмотрим две системы вектор-функций: электрических $\mathbf{e}_n$ и магнитных $\mathbf{h}_n$. Эти системы вектор-функций выберем следующим образом:

для функций магнитного типа

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^{(1)} &= [\nabla_\perp Y_n \mathbf{i}_r], \\ \mathbf{h}_n^{(1)} &= \nabla_\perp Y_n; \end{aligned} \tag{4.11а}$$

для функций электрического типа

$$\mathbf{e}_n^{(2)} = \nabla_\perp Y_n, \quad \mathbf{h}_n^{(2)} = -[\nabla_\perp Y_n, \ \mathbf{i}_r]. \tag{4.11б}$$

В силу свойств сферических функций каждая из систем $\{\mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{h}_n\}$ является базисной на единичной сфере. Функции $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ пропорциональны тангенциальным составляющим нормальных сферических волн на единичной сфере.

Будем искать приближенное решение краевой задачи (4.1), (4.7) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^N &= \sum_{n=1}^{N} c_n^N(r)\, \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{H}_t^N &= \sum_{n=1}^{N} b_n^N(r)\, \mathbf{h}_n. \end{aligned} \tag{4.12}$$

При этом радиальные компоненты приближенного решения вычисляются из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{E}^N - i\omega\mu \mathbf{H}^N)_r &= 0, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{H}^N + i\omega\varepsilon \mathbf{E}^N)_r &= j_r. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Для определения коэффициентов c_n^N и b_n^N потребуем выполнения следующих интегральных соотношений:

$$\begin{aligned} &\int_{S_r} (\operatorname{rot} \mathbf{E}^N - i\omega\mu \mathbf{H}^N)_t + \overset{*}{\mathbf{h}}_n ds = 0, \\ &\int_{S_r} (\operatorname{rot} \mathbf{H}^N + i\omega\varepsilon \mathbf{E}^N)_t + \overset{*}{\mathbf{e}}_n ds = \int_{S_r} (\mathbf{j}\overset{*}{\mathbf{e}}_n) ds, \quad 0 < r \leqslant R_0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

При $r=R_0$ поля $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$ должны удовлетворять парциальным условиям излучения (4.7). Продолжение приближенного решения $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$ из области $r \leqslant R_0$ с помощью условий излучения (4.7) определяет при $r \geqslant R_0$ поле $\tilde{\mathbf{E}}^N$, $\tilde{\mathbf{H}}^N$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла, условиям излучения и непрерывно примыкающее к значениям $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$ на сфере S_{R_0}. Для этого поля вне поверхности S_{R_0} справедливо разложение (4.5) по расходящимся сферическим волнам:

$$\begin{matrix} \tilde{\mathbf{E}}^N \\ \tilde{\mathbf{H}}^N \end{matrix} = \sum_n a_n^N \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{H}_n \end{pmatrix}, \quad r > R_0.$$

В силу условий непрерывности на сфере $r=R_0$ и пропорциональности вектор-функций $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ касательным составляющим полей нормальных расходящихся сферических волн на концентрической сфере любого радиуса имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{E}_t^N = \tilde{\mathbf{E}}_t^N, \quad \mathbf{H}_t^N = \tilde{\mathbf{H}}_t^N.$$

Учитывая ортогональность функций $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ и $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{H}_n$ на сфере S_{R_0}, имеем

$$\begin{aligned} a_n^N &= \alpha_n c_n^N (R_0), \quad n = 1, \ldots, N, \\ a_n^N &= 0, \quad n \geqslant N+1, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} \int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{e}_n, \mathbf{H}_n^* (R_0, \theta, \varphi)]\, \mathbf{i}_r ds, \tag{4.16}$$

$$a_n^N = \bar{\alpha}_n b_n^N, \quad n = 1, \ldots, N,$$

$$\bar{\alpha}_n = \frac{1}{\beta_n^*} \int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{E}_n^*, \mathbf{h}_n]\, \mathbf{i}_r ds.$$

Парциальные условия (4.7) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\alpha_n c_n^N (R_0) = \bar{\alpha}_n b_n^N (R_0), \quad n = 1, \ldots, N. \tag{4.17}$$

Таким образом, соотношения (4.17) образуют систему соотношений при $r=R_0$, обеспечивающих выполнение парциальных условий излучения, и однозначно определяют продолжение приближенного решения в область вне поверхности S_{R_0} в виде расходящихся волн.

Соотношения (4.14) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно записать в следующей форме:

$$\frac{d}{dr} c_n^N + \frac{1}{r} c_n^N + \sum_{k=1}^{N} (A_{nk} c_k^N + B_{nk} b_k^N) = f_n(r),$$

$$\frac{d}{dr} b_n^N + \frac{1}{r} b_n^N + \sum_{k=1}^{N} (\bar{A}_{nk} c_k^N + \bar{B}_{nk} b_k^N) = \bar{f}_n(r),$$

где матрицы коэффициентов A_{nk}, B_{nk}, $\bar{A}_{nk}$, $\bar{B}_{nk}$ выражаются через характеристики среды и базисные функции, а функции f_n и $\bar{f}_n$ являются коэффициентами разложения токов по векторной системе базисных функций $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{h}_n$. Тем самым коэффициенты уравнений и правые части являются заданными функциями независимой переменной r.

Используя условие ограниченности решений в нуле, легко построить численный алгоритм решения поставленной краевой задачи (4.14), (4.17) при любом N. Легко показать, что краевая задача (4.14), (4.17) однозначно разрешима при любом N, а при $N \to \infty$ функции $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$ стремятся к решению исходной краевой задачи.

Покажем, что функции $\mathbf{E}^N$, $\mathbf{H}^N$ удовлетворяют энергетическому соотношению (4.10), которое позволяет доказать существование и единственность решения краевой задачи (4.14), (4.17). Умножая первое из соотношений (4.14) на b_n^{N*}, а второе — на c_n^{N*}, суммируя по n и интегрируя по r, получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{K_{R_0}} (\operatorname{rot} \mathbf{E}^N - i\omega\mu\mathbf{H}^N)_t \mathbf{H}_t^{N*} dv = 0, \\ \int\limits_{K_{R_0}} (\operatorname{rot} \mathbf{H}^N + i\omega\varepsilon\mathbf{E}^N)_t \mathbf{E}_t^{N*} dv = \int\limits_{K_{R_0}} (\mathbf{j}_t \mathbf{E}_t^{N*})\, dv.\end{gathered} \tag{4.18}$$

Из соотношений (4.13) следует, что

$$\int\limits_{K_{R_0}} (\operatorname{rot} \mathbf{E}^N - i\omega\mu\mathbf{H}^N)_r H_r^{N*} dv = 0,$$

$$\int\limits_{K_{R_0}} (\operatorname{rot} \mathbf{H}^N + i\omega\varepsilon\mathbf{E}^N)_r \mathbf{E}_r^{N*} dv = \int j_r E_r^{N*} dv.$$

Применяя к $\mathbf{E}^N$, $\mathbf{H}^N$ и $\mathbf{E}^{N*}$, $\mathbf{H}^{N*}$ в области K_{R_0}, ограниченной сферой S_{R_0}, формулу Лоренца, имеем

$$\operatorname{Re} \int\limits_{S_{R_0}} [\mathbf{E}^N \mathbf{H}^{N*}]\, \mathbf{i}_r ds + k_0 \int\limits_{K_{R_0}} (\operatorname{Im} \varepsilon/\varepsilon_0 |\mathbf{E}^N|^2 + \operatorname{Im} \mu/\mu_0 |\mathbf{H}^N|^2) dv +$$

$$+\operatorname{Re}\int_{K_{R_0}} (\mathbf{j}\mathbf{E}^N)\,dv=0. \tag{4.19}$$

Из соотношения (4.19), учитывая, что на сфере S_{R_0} приближенное решение удовлетворяет условиям (4.17), получаем соотношение

$$\frac{1}{\omega\mu_0 k_0}\sum_n |a_n^N|^2+\int_{K_{R_0}}\left|\sqrt{k_0\operatorname{Im}\varepsilon/\varepsilon_0}\,\mathbf{E}^N+\frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{k_0\operatorname{Im}\varepsilon/\varepsilon_0}}\right|^2 dv+$$

$$+\int_{K_{R_0}} k_0\operatorname{Im}\mu/\mu_0|\mathbf{H}^N|^2\,dv=\int_{K_{R_0}}|\mathbf{j}|^2\frac{1}{4k_0\operatorname{Im}\varepsilon/\varepsilon_0}\,dv. \tag{4.20}$$

На основании общих свойств линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений из соотношений (4.20) следует, что однородная краевая задача имеет только единственное решение и, следовательно, неоднородная краевая задача всегда разрешима.

Рассмотрим функции $\mathscr{E}^N=\mathbf{E}-\mathbf{E}^N$ и $\mathscr{H}^N=\mathbf{H}-\mathbf{H}^N$. Эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\int_{S_r}(\operatorname{rot}\mathscr{E}^N-i\omega\mu\mathscr{H}^N)_t\,\mathbf{h}_n^*\,ds=$$

$$=\begin{cases} 0, & n\leqslant N,\\ -\int_{S_r}(\operatorname{rot}\mathbf{E}^N-i\omega\mu\mathbf{H}^N)_t\,\mathbf{h}_n^*\,ds, & n\geqslant N+1,\end{cases}$$

$$\int_{S_r}(\operatorname{rot}\mathscr{H}^N+i\omega\varepsilon\mathscr{E}^N)_t\,\mathbf{e}_n^*\,ds=$$

$$=\begin{cases} 0, & n\leqslant N,\\ -\int_{S_r}(\operatorname{rot}\mathbf{H}^N+i\omega\varepsilon\mathbf{E}^N)_t\,\mathbf{e}_n^*\,ds, & n\geqslant N+1.\end{cases}$$

Разложим функции $\mathscr{E}^N$ и $\mathscr{H}^N$ в ряды:

$$\mathscr{E}_t^N=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c}_n\mathbf{e}_n,\qquad \tilde{c}_n=\begin{cases} c_n-c_n^N, & n\leqslant N,\\ c_n, & n\geqslant N+1,\end{cases}$$

$$\mathscr{H}_t^N=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_n\mathbf{h}_n,\qquad \tilde{b}_n=\begin{cases} b_n-b_n^N, & n\leqslant N,\\ b_n & n\geqslant N+1\end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{P}_N=\sum_{N+1}^{\infty}c_n\mathbf{e}_n,\quad \mathbf{Q}_N=\sum_{N+1} b_n\mathbf{h}_n,$$

где c_n, b_n — коэффициенты разложения точного решения **EH**. При $r \geqslant R_0$ функции $\mathcal{E}^N$ и $\mathcal{H}^N$ удовлетворяют уравнениям Максвелла и условиям излучения (4.7). Вновь используя лемму Лоренца для функций $\mathcal{E}^N$ и $\mathcal{H}^N$, получим соотношение

$$\operatorname{Re} \oint_{S_{R_0}} [\mathcal{E}^N, \mathcal{H}^{N*}] \mathbf{i}_r dS + \int_{K_{R_0}} \left(k \operatorname{Im} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} |\mathcal{E}^N|^2 + k_0 \operatorname{Im} \frac{\mu}{\mu_0} |\mathcal{H}^N|^2 \right) dv =$$
$$= \operatorname{Re} \int_{K_{R_0}} (j_t P_N^*) dv + \omega \operatorname{Im} \int_{S_{R_0}} \{ (\mu \mathbf{H}^N)_t^* \mathbf{Q}_N - (\varepsilon \mathbf{E}^N)_t P_N^* \} dv. \tag{4.21}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathcal{E}^N$ и $\mathcal{H}^N$ удовлетворяют радиальным уравнениям Максвелла. Используя условия излучения (4.7), соотношение (4.21) окончательно перепишем в виде

$$\frac{1}{\omega k_0 \mu_0} \sum_n |\widetilde{a}_n|^2 + k_0 \int_{K_{R_0}} \left(\operatorname{Im} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} |\mathcal{E}^N|^2 + \operatorname{Im} \frac{\mu}{\mu_0} |\mathcal{H}^N|^2 \right) dv =$$
$$= \operatorname{Re} \int_{K_{R_0}} (\mathbf{j}_t \mathbf{P}_N^*) dv + \omega \operatorname{Im} \int_{K_{R_0}} ((\mu \mathbf{H}^N)_t^* \mathbf{Q}_N - (\varepsilon \mathbf{E}^N)_t \mathbf{P}_N^*) dv. \tag{4.22}$$

Соотношение (4.22) позволяет обосновать сходимости приближенного решения к точному по изложенной выше схеме.

В заключение отметим, что мы подробно рассмотрели алгоритм решения задачи дифракции для случая, когда ε, μ — непрерывные функции координат. Его можно легко обобщить и на случай разрывного заполнения. При этом необходимо ввести в соотношение (4.14) слагаемые, учитывающие разрывы в среднем. Обоснование алгоритма проводится в этом случае аналогично.

Выше был рассмотрен метод численного решения задач дифракции в неоднородной среде. Рассмотрим теперь метод решения задач дифракции на отражающем теле в неоднородной среде. Рассмотрим следующую задачу дифракции электромагнитных волн. Имеется хорошо проводящий шар T_R радиуса R, ограниченный поверхностью S_R, на которой выполняются импедансные граничные условия. Вне шара T_R среда характеризуется тензорами ε и μ, которые являются комплексными функциями координат и на достаточно больших расстояниях переходят в постоянные ε_0 и μ_0, соответствующие пустоте. Электромагнитное поле возбуждается системой токов $\mathbf{j}$, сосредоточенных в ограниченной области V, где $\operatorname{Im} \varepsilon \neq 0$. В такой постановке задача дифракции сводится к решению системы уравнений Максвелла (4.1) в области D^∞, являющейся внешностью шара T_R, с условиями

$$[\mathbf{nE}] = \zeta [\mathbf{n} [\mathbf{nH}]], \quad P \in S_R, \tag{4.23}$$

и условиями излучения на бесконечности, которые можно сформулировать в виде представления решения как суперпозиции сферических волн, удовлетворяющих условиям излучения.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа и используя условие (4.23), получим интегральное соотношение

$$\frac{1}{\omega\mu_0 k_0}\sum_n |a_n|^2+\omega\int_D\left|\sqrt{\operatorname{Im}\varepsilon}\,\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{\operatorname{Im}\varepsilon}}\right|^2 dv+$$

$$+\omega\int_D \operatorname{Im}\mu\,|\mathbf{H}|^2 dv+\operatorname{Re}\int_{S_{R_0}}\zeta\,|\mathbf{H}_t|^2 ds=\int_D\frac{|\mathbf{j}|^2}{4\operatorname{Im}\varepsilon}\,dv. \qquad (4.24)$$

Для построения приближенного решения можно воспользоваться представлениями (4.12), (4.18). При этом условие ограниченности в нуле следует заменить граничным условием при $r=R$, записанным в виде

$$\int_{S_R}\{[\mathbf{n}\mathbf{E}^N]-\zeta\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\mathbf{H}^N]]\}\,\mathbf{H}^*_{n t}\,ds=0. \qquad (4.25)$$

Теперь легко показать, что приближенное решение удовлетворяет основному энергетическому соотношению

$$\frac{1}{\omega\mu_0 k_0}\sum_n |c_n^N|^2+\operatorname{Re}\int_{S_R}\zeta\,|\mathbf{H}_t^N|^2 ds+\omega\int_D\left|\sqrt{\operatorname{Im}\varepsilon}\,\mathbf{E}^N+\frac{\mathbf{j}}{2\sqrt{\operatorname{Im}\varepsilon}}\right|^2 dv+$$

$$+\omega\int_D \operatorname{Im}\mu\,|\mathbf{H}^N|^2 dv=\int_D\frac{|\mathbf{j}|^2}{4\operatorname{Im}\varepsilon}\,dv. \qquad (4.26)$$

Соотношение (4.26) имеет тот же смысл закона сохранения энергии, что и соотношение (4.20). Из выполнения соотношения (4.26) следует единственность и разрешимость краевой задачи определения приближенного решения. Рассматривая разности $\mathbf{E}-\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}-\mathbf{H}^N$, легко получить аналогичное соотношение, из которого следует сходимость $\mathbf{E}^N$, $\mathbf{H}^N$ к $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ при $N\to\infty$ в энергетической норме.

Рассматриваемый алгоритм легко переносится на случай задачи дифракции на произвольном гладком теле в неоднородном пространстве. В этом случае парциальные условия излучения удобно записать не на сфере радиуса R_0, а на произвольной поверхности S вне сферы радиуса R_0. Затем отобразить область D, ограниченную поверхностью тела и поверхностью S, на шаровой слой. При этом уравнения Максвелла (4.1) в новой системе координат можно записать в виде некоторой новой системы уравнений Максвелла с некоторыми переменными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости. Однако, поскольку вид тензоров ε и μ произволен, для задачи дифракции на произвольном выпуклом теле справедливы все построения данного параграфа.

При реализации алгоритма численного решения задач дифракции наиболее трудоемко вычисление матричных элементов системы обыкновенных дифференциальных уравнений на каждом шаге интегрирования системы. Каждый элемент матрицы представляется в виде интеграла по поверхности единичной сферы, и, следовательно, процедура вычисления таких элементов в общем случае является процедурой вычисления поверхностных интегралов. Однако в том случае, когда свойства неоднородной среды описываются функциями, имеющими осевую симметрию, вычисление матриц упрощается и сводится к вычислению однократных интегралов.

В тех случаях, когда токи локализованы в однородной области и расстояние между областью неоднородности и областью локализации токов велико, применять условия излучения (4.7) на сфере, охватывающей и область D неоднородности и область токов, неудобно, так как в этом случае интервал интегрирования приближенной задачи неоправданно велик. В этом случае целесообразно поставить неоднородные условия излучения. Это особенно важно при исследовании задачи дифракции плоской волны. Будем считать, что в области D, ограниченной поверхностью S, заданы переменные характеристики ε и μ, а в области V заданы токи $\mathbf{j}(M)$, причем вне области D параметры среды постоянны и в области D найдется такая точка O, что существует сфера радиуса R, охватывающая полностью область D и такая, что область V лежит вне шара K_R. Решение задачи дифракции состоит в определении векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющих системе уравнений Максвелла (4.1) и условиям излучения.

Полное поле внутри шара K_R удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла. Будем его обозначать через $\mathbf{E}^1\mathbf{H}^1$. Вне шара K_R полное поле можно представить в виде суммы первичных полей $\mathbf{E}^0\mathbf{H}^0$ токов в неограниченном однородном пространстве и полей $\mathbf{E}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)}$, рассеянных неоднородностью. Поле $\mathbf{E}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)}$ удовлетворяет условиям излучения, однако его нельзя представить в виде нормальных волн, расходящихся от области D. Поля $\mathbf{E}^{(2)}\mathbf{H}^{(2)}$ представляют собой суперпозицию волн, расходящихся от области D. Для построения численного метода решения задачи дифракции в данном случае требуется ввести систему прямых $\mathbf{E}_n\mathbf{H}_n$ расходящихся волн и систему обратных $\widehat{\mathbf{E}}_n\widehat{\mathbf{H}}_n$ нормальных сферических волн. Система прямых волн определена соотношениями (4.4), а система обратных волн — соотношениями (4.4), если функцию ψ_n заменить функцией

$$\widehat{\psi}_n=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H^{(2)}_{k+1/2}(x).$$

Полное поле $\mathbf{E}^1\mathbf{H}^1$ на сфере S_R можно представить в виде суперпозиции нормальных прямых и обратных сферических волн:

$$\begin{matrix}\mathbf{E}^1 \\ \mathbf{H}^1\end{matrix} = \sum_n a_n \begin{pmatrix}\mathbf{E}_n \\ \mathbf{H}_n\end{pmatrix} + \hat{a}_n \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{E}}_n \\ \hat{\mathbf{H}}_n\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, полное поле на сфере S_R можно представить в виде

$$\begin{matrix}\mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^0\end{matrix} = \sum_n R_n \begin{pmatrix}\mathbf{E}_n \\ \mathbf{H}_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0\end{pmatrix}.$$

Учитывая, что поля прямых и обратных волн ортогональны на сфере S_R, а электромагнитное поле в некоторой окрестности сферы S_R является аналитической функцией, получим следующие неоднородные условия излучения на поверхности S_R:

$$\int_{S_R} [\mathbf{E}^1\mathbf{H}_n^*]\, \mathbf{i}_r ds = \beta_n R_n + A_n;$$

$$A_n = \int_{S_R} [\mathbf{E}^0\mathbf{H}_n^*]\, \mathbf{i}_r ds, \quad \beta_n = \int_{S_R} [E_n H_n^*]\, i_r ds$$

Полное поле $\mathbf{E}^1\mathbf{H}^1$ на сфере S_R можно разложить в ряды по системе угловых функций $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}_t^1 \\ \mathbf{H}_t^1\end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix}c_n(R)\,\mathbf{e}_n \\ b_n(R)\,\mathbf{h}_n\end{pmatrix}.$$

Коэффициенты c_n и b_n связаны на сфере S_R следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\alpha_n^* c_n(R) - \alpha_n b_n^*(R) = \alpha_n^* c_n^0(R) - \alpha_n b_n^{0*}(R), \\ \alpha_n = \int_{S_R} [\mathbf{e}_n\mathbf{H}_n^*]\, \mathbf{i}_r ds, \\ c_n^0 = \int_{S_R} [\mathbf{E}^0\mathbf{h}_n^*]\, \mathbf{i}_r ds, \\ b_n^{0*} = \int_{S_R} [\mathbf{e}_n^*\mathbf{H}^0]\, \mathbf{i}_r ds.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Соотношения (4.27) являются искомыми граничными условиями на сфере S_R и позволяют ограничиться рассмотрением задачи для внутренности шара радиуса R. Использование различных типов граничных условий зависит от различных конкретных условий и позволяет оптимизировать алгоритмы решения задач дифракции.

Глава IV
Задачи дифракции электромагнитных волн в волноводах

В настоящей главе рассматриваются общие математические методы теории колебаний и волн в волноводах. Теория волноводов возникла как теория звуковых волн в металлических трубах, и ее первоначальное развитие связано с именем Рэлея. Дальнейшее развитие этой теории тесно связано с возникновением техники сверхвысоких частот, где полые металлические волноводы нашли широкое применение (линии передачи СВЧ-энергии и элементы различных радиотехнических устройств).

В настоящее время построена теория регулярных цилиндрических волноводов. Для широкого класса задач распространения волн в нерегулярных волноводах разработаны методы, позволяющие проводить автоматизированное проектирование устройств и систем сверхвысоких частот. В этой главе описаны основные подходы к исследованию задач распространения электромагнитных колебаний в волноводах.

§ 1. Нормальные волны в регулярных волноводах

Рассмотрим регулярный акустический волновод с идеально жесткими стенками. Он представляет собой цилиндрическую трубу, которая заполнена однородной средой, характеризуемой скоростью звука $c=\sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}}$, где ρ_0 и P_0 — соответственно равновесная плотность и давление, γ — постоянная адиабаты. Обозначая через $P=pe^{-i\omega t}$ избыточное давление, для малых установившихся колебаний внутри объема волновода имеем уравнение

$$\Delta p+k^2p=0, \tag{1.1}$$

где $k=\dfrac{\omega}{c}$ — волновое число. Потенциал скоростей u также удовлетворяет уравнению Гельмгольца. На абсолютно жесткой боковой поверхности цилиндра скорости равны нулю, следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial n}=0,\quad M\in S, \tag{1.2}$$

где n — нормаль к поверхности S.

Обозначим замкнутую плоскую направляющую кривую цилиндрической поверхности волновода через C, а саму поверхность — через S.

Математическая задача определения нормальных волн в регулярном акустическом волноводе ставится как задача определения решений уравнения Гельмгольца (1.1), удовлетворяющих условию (1.2) на боковой поверхности S, ограниченных во всем объеме регулярного волновода и представляющих собой волны, распространяющиеся вдоль оси волновода. Направим ось z декартовой системы координат вдоль образующей поверхности S. Поперечное сечение волновода образуется плоскостью, нормальной к оси z. Будем искать функцию $p(x, y, z)$ в виде $p(x, y)e^{i\gamma z}$. Для функции $p(x, y)$ получим следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta_2 p + (k^2 - \gamma^2) p = 0,$$
$$\left.\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_C = 0, \tag{1.3}$$

где ν — нормаль к контуру C. Обозначив $k^2 - \gamma^2 = \lambda$, получим задачу на собственные значения для оператора Лапласа на плоскости:

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0,$$
$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_C = 0. \tag{1.4}$$

Задача (1.4) имеет систему действительных собственных значений λ_p. Значение $\lambda = 0$ вырожденное, ему соответствует решение однородной задачи Неймана для уравнения Лапласа. Обозначим множество собственных значений через $\{\lambda_p\}$, а соответствующие им собственные функции — через $\{\psi_p(x, y)\}$. Собственные значения будем считать упорядоченными в порядке возрастания:

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots .$$

Известно, что для достаточно гладкого контура C собственные значения возрастают, причем точка накопления собственных значений расположена на бесконечности. Из выражения $\gamma = \sqrt{k^2 - \lambda_p}$ видно, что для любого значения k может существовать не более чем конечное число λ_p, при которых γ действительно. Для остальных λ_p значение γ — чисто мнимое. Решения задачи (1.3) при действительных γ представляют собой распространяющиеся нормальные волны, при чисто мнимых γ — экспоненциально затухающие (возрастающие) нормальные волны. Знак γ определяет направление распространения нормальной волны (или направление затухания нераспространяющейся нормальной волны). Нормальные волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z, будем называть прямыми нормальными волнами, распространяющиеся в противоположном направлении — обратными. Обратные волны будем обозначать

$$p_{-p}=\psi_p(x, y)\,e^{i\gamma_{-p}z}=\psi_p e^{i\gamma_{-p}z},$$

$$\gamma_{-p}=-\gamma_p.$$

Найдем величину потока энергии, которая переносится через сечение $S_\perp$ регулярного волновода нормальной волной, имеющей номер p. Имеем

$$W_z=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{S_\perp}(p^*\nabla p)_z\,dS=\frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\int\limits_{S_\perp}\left(p^*\frac{\partial p}{\partial z}-p\frac{\partial p^*}{\partial z}\right)dS=$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\gamma_p\int\limits_{S_\perp}|\psi_p|^2\,dS.$$

Если рассматривать сумму искомых распространяющихся волн, то поток энергии в силу ортогональности собственных функций равен сумме потоков каждой нормальной волны. Поток энергии затухающих волн равен нулю.

Для волноводов круглого поперечного сечения, если начало координат цилиндрической системы (r, φ, z) поместить в центр круга поперечного сечения, собственные значения равны

$$\hat{\lambda}_p=\left(\frac{\nu_k^m}{a}\right)^2,$$

где a — радиус круга, $\nu^m{}_k$ — занумерованные в порядке возрастания корни уравнения $J'_k(\nu)=0$, а собственные функции имеют вид

$$\hat{\psi}_p=N_pJ_{k(p)}\left(\sqrt{\lambda_p}\,r\right)e^{ik\varphi},\quad \gamma_p=\sqrt{k^2-\lambda_p}.$$

Здесь через $J_k(x)$ обозначена функция Бесселя первого рода.

Отметим, что двойная нумерация корней уравнения $J'_k(\nu)=0$ возникла в связи с применением метода разделения переменных при аналитическом определении решения задачи на собственные значения. В общем случае, когда поперечное сечение ограничено произвольной кривой C, соответствующие собственные значения и собственные функции определяются численными методами и нумерация в порядке возрастания собственного значения является более естественной и удобной для последовательного вычисления собственных функций и собственных значений.

Для волноводов с идеально мягкими стенками граничное условие (1.2) следует заменить на следующее условие первого рода:

$$\varphi|_S = 0.$$

Система собственных функций оператора Лапласа в этом случае хорошо известна, что позволяет построить систему нормальных волн в регулярном волноводе:

$$u_p = e^{i\gamma_p z}\varphi_p(x, y),$$

где $\varphi_p(x, y)$ — собственные функции первой краевой задачи для оператора Лапласа

$$\Delta\varphi_p + \lambda_p\varphi_p = 0, \tag{1.5}$$

$$\varphi_p|_C = 0,$$

$$\gamma_p = \sqrt{k^2 - \lambda_p}, \quad \lambda_p > 0.$$

Множество собственных значений λ_p хорошо изучено, установлены теоремы о расположении собственных чисел на действительной оси.

Для волновода круглого поперечного сечения явный вид функции φ_p можно найти методом разделения переменных в цилиндрической системе координат r, φ, z:

$$\varphi_p = N_p J_{k(p)}\left(\sqrt{\lambda_p}\, r\right) e^{ik(p)\varphi},$$

$$\lambda_p = \left(\frac{\mu_k^m}{a}\right)^2, \quad J_k(\mu) = 0.$$

Рассмотрим нормальные волны в электромагнитном случае. Регулярным волноводом будем называть цилиндрическую трубу, неограниченно простирающуюся вдоль оси z. Боковые стенки трубы непрозрачны для электромагнитного поля, и мы будем считать их либо идеально проводящими, либо обладающими конечной, но большой проводимостью. Обозначим через R боковую поверхность трубы, S — поперечное сечение трубы, C — контур, ограничивающий это сечение и являющийся направляющей цилиндрической поверхности R. Контур C всегда будем считать замкнутой плоской кривой без точек самопересечения. Электродинамические характеристики среды, заполняющей трубу, в случае регулярного волновода постоянны, их обозначают через ε и μ. Колебания, распространяющиеся внутри волновода, удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}. \tag{1.6}$$

На боковой поверхности R в случае идеальной проводимости касательные составляющие электрического поля равны нулю:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_R = 0, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя к волноводу нормаль к поверхности R. В случае конечной проводимости на поверхности R выполняются граничные условия Леонтовича.

Рассмотрим случай идеальной проводимости боковой поверхности R. В этом случае в регулярном волноводе существует счетная система нормальных волн, которая распадается на две подсистемы TE- и TM-волн.

Покажем, что внутри волновода с идеальными стенками не могут существовать TEM-волны, т. е. волны, у которых одновременно и E_z и H_z равны нулю:

$$\mathbf{E}=\tilde{\mathbf{E}}(x, y)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H}=\tilde{\mathbf{H}}(x, y)e^{i\gamma z},$$

$E_z\equiv 0_z\equiv H$ внутри волновода.

Из уравнений Максвелла следует, что

$$\begin{aligned} -i\gamma\tilde{H}_y &= -i\omega\varepsilon\tilde{E}_x, \quad i\gamma\tilde{H}_x = -i\omega\varepsilon\tilde{E}_y,\\ i\gamma\tilde{E}_x &= i\omega\mu\tilde{H}_y, \quad -i\gamma\tilde{E}_y = i\omega\mu\tilde{H}_x. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.8) могут выполняться лишь при следующих условиях:

$$\gamma=k, \quad \tilde{H}_y=\tilde{E}_x, \quad \tilde{H}_x=-\tilde{E}_y, \quad k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Условия одновременного равенства $\tilde{E}_z$ и $\tilde{H}_z$ нулю приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{E}_y}{\partial y}&=0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\tilde{E}_x\cos(n\widehat{\ }x)+\tilde{E}_y\cos(n\widehat{\ }y)=0, \quad (x, y)\in C. \tag{1.10}$$

Соотношения (1.9) и (1.10) представляют собой краевую задачу Гильберта для аналитической функции $W=\tilde{E}_x+i\tilde{E}_y$ в односвязной плоской области S с однородным граничным условием (1.10) на контуре C. Такая задача имеет лишь нулевое решение, т. е.

$$\tilde{E}_x\equiv 0, \quad \tilde{E}_y\equiv 0 \text{ в области } S.$$

Это означает, что TEM-волны внутри регулярного волновода распространяться не могут.

Задача определения TE-волн, т. е. таких, для которых $E_z=0$, сводится к исследованию краевой задачи Неймана на собственные значения для оператора Лапласа в плоской области S:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\psi}+\hat{\lambda}\hat{\psi}&=0, \quad (x, y)\in S,\\ \left.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial n}\right|_C&=0, \quad \hat{\gamma}=\sqrt{k^2-\hat{\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

При этом поля TE-волн проще всего получить используя магнитный вектор Герца $\Pi^{м}=\{0, 0, \Pi^{м}\}$, $\Pi^{м}=e^{i\widehat{\gamma} z}\widehat{\psi}(x, y)$. Имеем

$$\mathbf{E}=i\omega\mu \operatorname{rot}\Pi^M, \quad \mathbf{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi^M+k^2\Pi^M. \tag{1.12}$$

Задача определения TM-волн, для которых $H_z=0$, сводится к исследованию краевой задачи Дирихле на собственные значения для оператора Лапласа в плоской области S:

$$\Delta\psi+\lambda\psi=0, \quad (x, y)\in S,$$
$$\psi|_C=0,$$
$$\gamma=\sqrt{k^2-\lambda}. \tag{1.13}$$

TM-поля выражаются через электрический вектор Герца следующим образом:

$$\Pi^{э}=(0, 0, \Pi^{э}), \quad \Pi^{э}=e^{i\gamma z}\psi(x, y),$$
$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi^{э}+k^2\Pi^{э}, \quad \mathbf{H}=-i\omega\varepsilon \operatorname{rot}\Pi^{э}.$$

Знак корня при определении γ и $\widehat{\gamma}$ выбирают так, чтобы $\operatorname{Re}\gamma>0$; если $\operatorname{Re}\gamma=0$, то $\operatorname{Im}\gamma>0$. Такому знаку корня соответствуют прямые волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z. Для обратных волн введем обозначения с отрицательным значением индекса. При этом

$$\begin{aligned} &\gamma_{-p}=-\gamma_p, \\ &\mathbf{E}_{-pt}=\pm\mathbf{E}_{pt}, \quad \mathbf{H}_{-pt}=\mp\mathbf{H}_{pt}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где верхний знак для TM-волн, а нижний — для TE-волн.

Спектральные задачи (1.11) и (1.13) соответствуют задачам (1.4) и (1.5), свойства которых были рассмотрены выше.

Нормальные волны в регулярном волноводе являются естественным базисом для представления любого решения однородной системы уравнений Максвелла. Для любого электромагнитного поля в регулярном волноводе справедлива следующая теорема о представимости его в виде суперпозиции TE- и TM-волн.

Теорема. *Любое решение однородной системы уравнений Максвелла внутри регулярного волновода представимо в виде суперпозиции полей нормальных TE- и TM-волн.*

Пусть в волноводе задано электромагнитное поле, удовлетворяющее условиям (1.6) и (1.7). Обозначим его через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Если по данному полю построить два вектора $\Pi^{м}$ и $\Pi^{э}$ с компонентами $(0, 0, \Pi^{м})$ и $(0, 0, \Pi^{э})$ соответственно, то тем самым мы разобьем данное поле на поля типа TE и TM. Определим вектор Герца $\Pi^{э}$ по компоненте поля E_z из уравнения Пуассона $\Delta_2\Pi^{э}=-E_z(x, y, z)$ при любом z при условии, что $\Pi^{э}|_C=0$. Решение уравнения Пуассона в сечении S представимо через функцию

Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в области S

$$\Pi^{э} = \int_S G(M, P) E_z(P, z)\, dS_p,$$

где функция $G(M, P)$ имеет явное представление через собственные функции первой краевой задачи:

$$G(M, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(M)\psi_i(P)}{\lambda - \lambda_i},$$

при этом

$$\frac{\partial^2 \Pi^{э}}{\partial z^2} + k^2 \Pi^{э} = \int_S G \cdot \left\{ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z \right\} dS =$$

$$= -\int_S G \cdot \triangle_2 E_z dS = E_z(M, z).$$

Последнее равенство является следствием второй формулы Грина и условия

$$E_z|_C = 0.$$

Итак, компонента поля, определенная через вектор $\Pi^{э}$, совпадает с компонентой E_z заданного поля, а вектор Герца удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\triangle \Pi^{э} + k^2 \Pi^{э} = \triangle_2 \Pi^{э} + E_z = 0.$$

Аналогично определим $\Pi^{м}$ как решение второй краевой задачи:

$$\triangle_2 \Pi^{м} = -H_z(M, z),$$

$$\left.\frac{\partial \Pi^{м}}{\partial \nu}\right|_C = 0,$$

$$\Pi^{м} = \int_S \widehat{G}(M, P) H_z(P, z)\, dS_P,$$

при этом $\Pi^{м}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

Вычислим поперечные составляющие полей $\tilde{E}_x$, $\tilde{E}_y$, $\tilde{H}_x$, $\tilde{H}_y$ через векторы $\Pi^{э}$ и $\Pi^{м}$. Так как векторы Герца удовлетворяют уравнению Гельмгольца, поля поперечных составляющих вместе с компонентами E_z и H_z удовлетворяют уравнениям Максвелла. Составим разность заданных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и полей, вычисленных через векторы Герца. В силу линейности уравнений Максвелла эта разность удовлетворяет соотношениям (1.6) и (1.7) и, кроме того, она является TEM-полем, а так как в волноводе не может существовать TEM-поля, отличного от нуля, то компоненты $\tilde{E}_x$, $\tilde{E}_y$, $\tilde{H}_x$, $\tilde{H}_y$, вычисленные через векторы Герца $\Pi^{э}$ и $\Pi^{м}$ совпадают с E_x, E_y, H_x, H_y. Поля TE- и TM-волн являются суперпозицией полей нормальных TE- и TM-волн соответственно. При этом необходимо рассматривать как прямые, так и обратные нормальные волны.

Нормальные волны определены с точностью до нормировки собственных функций. Нормировку собственных функций следует выбирать лишь в зависимости от геометрии области S и не включать в эту нормировку постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды. Нормальные волны TE- и TM-волн ортогональны в том смысле, что

$$\int\limits_S [\mathbf{E}_m\mathbf{H}_n^*]_z\, dS = \int\limits_S (\mathbf{E}_m\mathbf{E}_n^*)\, dS = \int\limits_S (\mathbf{H}_m\mathbf{H}_n^*)\, dS = 0, \quad m \neq n.$$

Здесь $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{H}_m$ — нормальные волны как электрического, так и магнитного типа.

Нормировку волн выберем таким образом:

$$\int\limits_S [\mathbf{E}_n\mathbf{H}_n^*]_z\, dS = \beta_n = \begin{cases} \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\gamma - TM\text{-волны}, \\ \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\gamma^* - TE\text{-волны}; \end{cases}$$

$$\int\limits_S |\mathbf{E}_{nt}|^2\, dS = \begin{cases} |\gamma_n|^2 - TM\text{-волны}, \\ k^2 - TE\text{-волны}; \end{cases}$$

$$\int\limits_S |\mathbf{H}_{nt}|^2\, dS = \begin{cases} k^2 - TE\text{-волны}, \\ |\hat{\gamma}_n|^2 - TM\text{-волны}; \end{cases}$$

при этом

$$\int\limits_S |\nabla\psi_n|^2 dS = \int\limits_S |\nabla\hat{\psi}_n|^2\, dS = 1.$$

Продольные и поперечные составляющие нормальных волн имеют следующее явное выражение через собственные функции области S:

для нормальных TE-волн

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{mt} e^{i\hat{\gamma}_m z}, \quad \mathbf{E}_{mt} = i\omega\mu\nabla\hat{\psi}_m,$$

$$\mathbf{H}_m = (\mathbf{H}_{mt} + \mathbf{H}_{mz}\mathbf{i}_z)\, e^{i\hat{\gamma}_m z},$$

$$\mathbf{H}_{mt} = i\hat{\gamma}_m[\mathbf{i}_z, \nabla\hat{\psi}_m], \quad \mathbf{H}_{mz} = \hat{\lambda}_m\hat{\psi}_m;$$

для TM-волн

$$\mathbf{E}_m = (\mathbf{E}_{mt} + \mathbf{E}_{mz}\mathbf{i}_z)\, e^{i\gamma_m z},$$

$$\mathbf{E}_{mt} = -i\gamma_m[\mathbf{i}_z, \nabla\psi_m], \quad \mathbf{E}_{mz} = \lambda_m\psi_m,$$

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_{mt} e^{i\gamma_m z}, \quad \mathbf{H}_{mt} = i\omega\varepsilon\nabla\psi_m.$$

§ 2. Возбуждение регулярных волноводов

Рассмотрим задачу возбуждения акустического волновода произвольно распределенными источниками колебаний. Распределение источников колебаний будем описывать функцией $f(x, y, z)$ с локальным носителем, расположенным внутри волновода, и считать, что вне отрезка $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ функция $f(x, y, z) \equiv \equiv 0$. Задача возбуждения регулярного акустического волновода заключается в решении неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = -f \tag{2.1}$$

внутри области, ограниченной поверхностью R, с условием

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_R = 0. \tag{2.2}$$

Поскольку волновод представляет собой неограниченную область с границей, уходящей в бесконечность, для однозначной постановки задачи возбуждения регулярного волновода следует сформулировать условия излучения, обеспечивающие отсутствие волн, приходящих из бесконечности. Эти условия, получившие название парциальных условий излучения, можно получить из принципа предельного поглощения. Они заключаются в требовании представления решения по системе нормальных волн, расходящихся от области внутри волновода, где $f(x, y, z) \neq 0$. Решение уравнения (2.1) вне отрезка $[z_1, z_2]$ должно иметь представление

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(1)} e^{-i\hat{\gamma}_n z} \hat{\psi}(x, y), \quad z < z_1; \tag{2.3}$$

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(2)} e^{i\hat{\gamma}_n z} \hat{\psi}_n(x, y), \quad z > z_2. \tag{2.4}$$

Коэффициенты $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$ однозначно определяются функцией $f(x, y, z)$.

Решение поставленной задачи легко получить спектральным методом; оно имеем вид

$$p(x, y, z) = \int\limits_D f(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z')\, dv, \tag{2.5}$$

где D — носитель функции $f(x, y, z)$, а

$$G(x, y, z, x', y', z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(x, y)\hat{\psi}_n(x', y')}{-2i\hat{\gamma}_n} e^{i\hat{\gamma}_n |z-z'|} \tag{2.6}$$

является функцией Грина второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца в регулярном волноводе. Используя оценки собственных функций оператора Лапласа, легко установить, что ряд (2.6) сходится равномерно всюду вне замкнутой окрестности точки (x, y, z), а в точке (x, y, z) оператор Гельмгольца от функции G является δ-функцией.

Коэффициенты $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$ имеют следующий вид:

$$T_n^{(1)}=\int_D f(x', y', z')\,\frac{\widehat{\psi}_n(x', y')}{-2i\widehat{\gamma}_n}\,e^{i\widehat{\gamma}_n z'}\,dx'dy'dz'\,; \tag{2.7}$$

$$T_n^{(2)}=\int_D f(x', y', z')\,\frac{\widehat{\psi}_n(x', y')}{-2i\widehat{\gamma}_n}\,e^{-i\widehat{\gamma}_n z'}\,dx'dy'dz'. \tag{2.8}$$

Установим теорему единственности этой задачи. Как обычно, предположим, что существуют два решения p_1 и p_2. Их разность $v=p_1-p_2$ удовлетворяет однородному уравнению (2.1) и условиям (2.2)—(2.4) с некоторыми коэффициентами $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$. Покажем, что внутри волновода $v\equiv 0$.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка внутри волновода. Применим третью формулу Грина к функциям v и G в области, ограниченной боковой поверхностью и сечениями волновода S_1 и S_2 так, чтобы точка M лежала внутри области. Получим представление $v(M)$ через значения v и G в сечениях S_1 и S_2:

$$v=\int_{S_1+S_2}\left\{\frac{\partial v}{\partial n}G-v\frac{\partial G}{\partial n}\right\}dS. \tag{2.9}$$

Вычисляя правую часть соотношения (2.9), получим, что $v\equiv 0$ для любой точки M внутри области D. В силу непрерывности $v(M)$, $\frac{\partial v}{\partial z}(M)$ в замкнутой области $\overline{D}$, $v\equiv 0$ для точек $M\in S_1\cup S_2$ и, следовательно,

$$T_n^{(1)}=0,\quad T_n^{(2)}=0.$$

Таким образом, исходная неоднородная задача имеет единственное решение, а представление (2.5) дает явное выражение этого решения. Из теоремы единственности вытекает, что функция Грина может быть представлена в виде

$$G=\frac{\exp(ikR_{MP})}{4\pi R_{MP}}+w,$$

где w — регулярное решение уравнения Гельмгольца.

Теорему единственности для задачи возбуждения легко доказать не прибегая к функции Грина. Действительно, классическое решение уравнения (2.1) при любом фиксированном z удовлетворяет условиям теоремы разложимости Стеклова по полной системе собственных функций $\widehat{\psi}(x, y)$ задачи (1.11):

$$v(x, y, z)=\sum_n Z_n(z)\widehat{\psi}_n(x, y),$$

где

$$Z_n(z)=\frac{1}{\|\widehat{\psi}_n\|^2}\int\limits_S v(x,\ y,\ z)\widehat{\psi}_n(x,\ y)\,dS.$$

При этом в силу свойств гладкости решения

$$Z_n''(y)=\frac{1}{\|\widehat{\psi}_n\|^2}\int\limits_S \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,\widehat{\psi}_n\,dS.$$

Умножая однородное уравнение (2.1) на $\widehat{\psi}_n(x,\ y)$ и интегрируя по S, получим, что при $-\infty<z<\infty$ функции Z_n являются решениями однородного уравнения

$$Z_n''+\widehat{\gamma}_n^2 Z_n=0,\quad \widehat{\gamma}_n^2=k^2-\widehat{\lambda}_n,$$

для которых в силу парциальных условий излучения (2.3), (2.4) справедливы соотношения

$$Z_n'-i\widehat{\gamma}_n Z_n=0,\quad z>z_1;$$

$$Z_n'+i\widehat{\gamma}_n Z_n=0,\quad z<z_2.$$

Отсюда следует $Z_n(z)=0$, что и доказывает теорему единственности.

Перейдем к рассмотрению задачи возбуждения регулярного волновода для электромагнитных колебаний. Пусть в регулярном цилиндрическом волноводе задан сторонний электрический ток $\mathbf{j}(M,\ t)=\mathbf{j}(M)\exp(-i\omega t)$, представляющий собой финитную функцию ($\mathbf{j}\neq 0$ только в интервале $z_1\leqslant z\leqslant z_2$). Требуется определить решение уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{j},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H},\tag{2.10}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{E}]|_R=0\tag{2.11}$$

и условиям излучения при $z\to\pm\infty$, которые заключаются в представлении полей при $z>z_2$ и $z<z_1$ в виде суперпозиции полей, уходящих от источника.

Метод решения этой задачи принадлежит А. Н. Тихонову и А. А. Самарскому *. Рассмотрим вначале задачу возбуждения волновода электрическим диполем, ориентированным вдоль оси волновода и расположенным в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Такая задача может быть сведена к определению электрического вектора Герца, направленного вдоль оси волновода. Пусть

$$\Pi=\mathbf{i}_z\Pi^e(x,\ y,\ z),\tag{2.12}$$

* См.: ЖТФ. 27. Вып. 11, 12 (1947).

где

$$\triangle \Pi^e + k^2 \Pi^e = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0); \tag{2.13}$$

$$\Pi^e|_R = 0. \tag{2.14}$$

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются через $\mathbf{\Pi}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}, \\ \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}; \end{aligned} \tag{2.15}$$

в частности,

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial z^2} + k^2 \Pi^e. \tag{2.16}$$

Пусть $\mathbf{E}$ — поле, созданное продольным электрическим диполем. В этом случае $\mathbf{j} = \mathbf{i}_z\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$, а уравнение (2.13) с учетом (2.16) можно записать в виде

$$\Delta_{xy}\Pi^e = -\left(E_z + \frac{1}{i\omega\varepsilon}(\mathbf{j},\,\mathbf{i}_z)\right), \tag{2.17}$$

$$\Pi^e|_R = 0. \tag{2.18}$$

Решение Π^e, удовлетворяющее (2.17) и (2.18), имеет вид

$$\Pi^e(x,\,y,\,z) = \int\limits_S G(x,\,y,\,\xi,\,\eta)\left[E_z + \frac{(\mathbf{j},\,\mathbf{i}_z)}{i\omega\varepsilon}\right]dS, \tag{2.19}$$

где $G(x,\,y,\,\xi,\,\eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в плоской области S. Вновь легко установить, что (2.19) удовлетворяет уравнению (2.13); следовательно, E_z однозначно определяет Π^e. Покажем, что функция H_z в случае возбуждения продольным электрическим диполем равна нулю. Из системы уравнений Максвелла (2.10), учитывая поляризацию, имеем

$$\begin{aligned} &\triangle H_z + k^2 H_z = 0, \\ &\left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right|_R = 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

В силу условий излучения $H_z \equiv 0$.

Таким образом, по вектору $\mathbf{\Pi}$ внутри волновода, согласно формулам (2.15), определяется некоторое электромагнитное поле, причем E_z и H_z совпадают с полем, возбуждаемым продольным электрическим диполем $\mathbf{j}$. Следовательно, в силу отсутствия в волноводе TEM-полей это электромагнитное поле совпадает с полем продольного электрического диполя. Итак, достаточно построить функцию Π^e, что легко выполнить спектральным методом с помощью разложения по собственным функциям оператора Лапласа плоской области S. Имеем

$$\Pi^e = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x, y)\,\psi_n(x_0, y_0)}{-2i\gamma_n} e^{i\gamma_n|z-z_0|} \tag{2.21}$$

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}, \quad \operatorname{Re}\gamma_n > 0; \quad \operatorname{Re}\gamma_n = 0, \quad \operatorname{Im}\gamma_n > 0,$$

где $\psi_n(x, y)$ — собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Аналогично может быть рассмотрена задача о возбуждении волновода продольным магнитным диполем (элементом магнитного тока), расположенным в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Электромагнитное поле представляется с помощью вектора Герца

$$\begin{gathered} \mathbf{\Pi}^m = \mathbf{i}_z \Pi^m, \\ \mathbf{E} = i\omega\mu \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}^m, \\ \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^m + k^2 \mathbf{\Pi}^m, \end{gathered} \tag{2.22}$$

который определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} \Delta\Pi^m + k^2\Pi^m = \frac{1}{i\omega\mu}\,\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - z_0), \\ \left.\frac{\partial\Pi^m}{\partial n}\right|_R = 0. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Вектор Герца имеет вид

$$\Pi^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat\psi_n(x, y)\,\hat\psi_n(x_0, y_0)}{2(i\hat\gamma_n)(i\omega\mu)} e^{i\hat\gamma_n|z-z_0|}, \tag{2.24}$$

где $\hat\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}$, а $\hat\lambda_n$, $\hat\psi_n$ — соответственно собственные значения и собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа.

Рассмотрим теперь возбуждение волновода единичным электрическим диполем, произвольно ориентированным по отношению к оси волновода. Пусть единичный вектор $\mathbf{l}$ характеризует направление электрического диполя в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Направляющие косинусы вектора $\mathbf{l}$ обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$. Искомое поле можно представить в виде электромагнитного поля диполя в свободном пространстве и регулярного поля, обеспечивающего выполнение граничных условий на боковой поверхности волновода. Поля диполя в свободном пространстве удобно выразить через вектор Герца:

$$\mathbf{\Pi}^э = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} \mathbf{l}.$$

Таким образом, задача возбуждения поля в волноводе сводится к определению полей, представимых в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi^{э} + k^2 \Pi^{э} + \mathbf{E}^0,$$
$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \operatorname{rot} \Pi^{э} + \mathbf{H}^0,$$

где $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ — регулярные решения однородной системы уравнений Максвелла такие, что полное поле удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности волновода и условиям излучения. Поля $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ являются суперпозицией полей электрического и магнитного типа, причем для построения этих полей достаточно определить продольные компоненты поля. Продольные компоненты полного поля являются решениями уравнения Гельмгольца, удовлетворяющими условиям

$$E_z|_R = 0, \quad \left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right|_R = 0. \tag{2.25}$$

Легко проверить, что таким условиям удовлетворяют функции

$$E_z = -\cos\alpha \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial x_0 \partial z} - \cos\beta \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial y_0 \partial z} + \cos\gamma \left(\frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial z^2} + k^2 \Pi^e\right);$$
$$H_z = -i\omega\varepsilon \left(\cos\alpha \frac{\partial \Pi^m}{\partial y_0} - \cos\beta \frac{\partial \Pi^m}{\partial x_0}\right).$$

Отметим, что дифференцирование по x_0, y_0 и z не меняет краевых условий для функций Π^e и Π^m и условия (2.25) проверяются непосредственно. Проверка удовлетворению уравнению Гельмгольца проводится так же, как и выше. Легко установить, что полученные поля имеют заданную особенность в точке M_0.

Если обозначить через $\Pi^{le}\mathbf{i}_z$ и $\Pi^{lm}\mathbf{i}_z$ векторы Герца полей, возбуждаемых электрическим диполем, направленным вдоль вектора $\mathbf{l}$, а через Π^e и Π^m — векторы Герца, соответствующие продольному электрическому и продольному магнитному диполю, то

$$\Pi^{le} = -\left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y_0}\right)\Pi^e + \cos\gamma \Pi^e;$$
$$\Pi^{lm} = -i\omega\varepsilon \left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial y_0} - \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_0}\right)\widehat{R}, \tag{2.26}$$

где $\widehat{R}$ получается из Π^m и имеет следующий вид:

$$\widehat{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_n(x_0, y_0)\, \widehat{\psi}_n(x, y)}{(2i\widehat{\gamma}_n)\, \widehat{\lambda}_n} e^{-i\widehat{\gamma}_n |z - z_0|}. \tag{2.27}$$

Если волновод возбуждается распределенным электрическим током $\mathbf{j}(x, y, z)$, то электромагнитное поле находится как суперпозиция полей элементарных излучателей и общее поле может быть выражено через векторы Герца $\mathbf{Z}^э$ и $\mathbf{Z}^м$, определяемые формулами

$$\mathbf{Z}^э = \int\limits_D \Pi^{Iе} \mathbf{j} dv; \tag{2.28}$$

$$\mathbf{Z}^м = \int\limits_D \Pi^{Im} \mathbf{j} dv. \tag{2.29}$$

Построенные векторы $\mathbf{Z}^э$ и $\mathbf{Z}^м$ не только дают решение задачи возбуждения поля, но и позволяют получить представление полей в виде разложения на TE- и TM-волны.

Решение задачи возбуждения можно получить и разлагая решение непосредственно по векторным собственным функциям. Условия излучения, если область локализации токов расположена между сечениями S_1 $(z=z_1)$ и S_2 $(z=z_2)$, можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \sum_n R_n e^{-i\gamma_n z} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n(x, y) \\ \mathbf{H}_n(x, y) \end{pmatrix}, \quad z \leqslant z_1; \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \sum_n T_n e^{i\gamma_n z} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n(x, y) \\ \mathbf{H}_n(x, y) \end{pmatrix}, \quad z > z_2. \tag{2.31}$$

В качестве базисных функций разложения решения в области $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ выберем следующие вектор-функции, пропорциональные касательным компонентам нормальных волн регулярного волновода:

$$\mathbf{e}_n = \begin{cases} \nabla_2 \psi_k & \text{для электрических волн,} \\ [\mathbf{i}_z; \nabla_2 \widehat{\psi}_m] & \text{для магнитных волн;} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{h}_n = \begin{cases} [\mathbf{i}_z, \nabla_2 \psi_k] & \text{для электических волн,} \\ \nabla_2 \widehat{\psi}_m & \text{для магнитных волн;} \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\int\limits_S [\mathbf{e}_n \mathbf{h}_m^*]_z \, dS = \int\limits_S (\mathbf{e}_n \mathbf{e}_m^*) \, dS = \int\limits_S (\mathbf{h}_n \mathbf{h}_m^*) \, dS = \delta_{nm}; \tag{2.34}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{e}_n)_z = \begin{cases} 0 & \text{для электрических волн,} \\ \widehat{\lambda}_m \widehat{\psi}_m & \text{для магнитных волн;} \end{cases} \tag{2.35}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{h}_n)_z = \begin{cases} \lambda_n \psi_n & \text{для электрических волн,} \\ 0 & \text{для магнитных волн.} \end{cases}$$

Каждая из систем векторов $\{\mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{h}_n\}$ является базисной системой на пространстве вектор-функций, определенных в области

S, интегрируемых с квадратом по области S и удовлетворяющих краевому условию

$$[\mathbf{v}, \mathbf{A}]|_C = 0.$$

Следовательно, при любом значении $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ имеют место разложения полей:

$$\mathbf{E}_t(M, z) = \mathbf{E}_t(x, y, z) = \sum_n A_n(z)\,\mathbf{e}_n(M); \tag{2.37}$$

$$\mathbf{H}_t(M, z) = \mathbf{H}_t(x, y, z) = \sum_n B_n(z)\,\mathbf{h}_n(M). \tag{2.38}$$

Так как функции $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{E}_{nt}$ различаются лишь множителями, то имеют место очевидные соотношения

$$A_n(z) = \alpha_n^1 R_n e^{-i\gamma_n z}, \quad z \leqslant z_1; \tag{2.39}$$

$$A_n(z) = \alpha_n^1 T_n e^{i\gamma_n z}, \quad z \geqslant z_2. \tag{2.40}$$

Из уравнений Максвелла следует, что при любом z удовлетворяются следующие соотношения:

$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E})_t\,\mathbf{e}_n dS = \int_S (\mathbf{j}, \mathbf{e}_n)\,dS; \tag{2.41}$$

$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H})_t\,\mathbf{h}_n dS = 0; \tag{2.42}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H}_t)_z = -i\omega\varepsilon E_z + j_z; \tag{2.43}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E}_t)_z = i\omega\mu H_z. \tag{2.44}$$

Учитывая, что

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H})_t = \operatorname{rot}(H_z\mathbf{i}_z) + \left[\mathbf{i}_z, \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z}\right]; \tag{2.45}$$

$$\operatorname{rot}(H_z\mathbf{i}_z) = [\nabla_2 H_z, \mathbf{i}_z], \tag{2.46}$$

и вычисляя интегралы по поперечному сечению S, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения поля $\mathbf{H}$:

для волн электрического типа

$$B_k'' + (k^2 - \lambda_k)\,B_k = i\omega\varepsilon\,j_{kt} + \lambda_k j_{kz} = f_k^э, \tag{2.47}$$

$$A_k = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} B_k';$$

$$j_{kt} = \int_S (\mathbf{j}, \mathbf{e}_k)\,dS, \quad j_{kz} = \int_S j_z \psi_k dS; \tag{2.48}$$

для волн магнитного типа

$$B_m'' + (k^2 - \widehat{\lambda}_m) B_m = \frac{\widehat{\lambda}_m - k^2}{i\omega\varepsilon} j_{mt} = f_m^{\text{м}},$$

$$A_m = \frac{ik\mu}{k^2 - \widehat{\lambda}_m} B_m'; \tag{2.49}$$

$$j_{mt} = \int\limits_S (\mathbf{j}, \mathbf{e}_m)\, dS. \tag{2.50}$$

Учитывая условия излучения, получим

$$B_k(z) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-p_k|z-\zeta|}}{2p_k} f_k^{\text{э}}(\zeta)\, d\zeta; \tag{2.51}$$

$$B_m(z) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{e^{-p_m|z-\zeta|}}{2p_m} f_m^{\text{м}}(\zeta)\, d\zeta; \tag{2.52}$$

$$p_m = \sqrt{\lambda_m - k^2}.$$

Подставляя выражения (2.51) и (2.52) в (2.38), окончательно имеем

$$\mathbf{H}_t = \int\limits_D \mathbf{j}_t(M_0) \left\{ \sum_k \mathbf{h}_k(M) \otimes \mathbf{e}_k(M_0) \frac{i\omega\varepsilon}{2p_k} e^{-p_k|z-z_0|} + \right.$$
$$\left. + \sum_m \mathbf{h}_m(M) \otimes \mathbf{e}_m(M_0) \frac{\widehat{\lambda}_m - k^2}{i\omega\varepsilon \cdot 2p_m} e^{-p_m|z-z_0|} \right\} dv_{M_0} +$$
$$+ \int\limits_D j_z(M_0, z_0) \left\{ \sum_k \mathbf{h}_k(M) \widehat{\lambda}_k \widehat{\varphi}_k(M_0) \right\} dV_{M_0}. \tag{2.53}$$

Здесь через $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ обозначено диадное произведение векторов. Аналогично можно записать выражение для вектора $\mathbf{E}_t$. Поля E_z и H_z определяются из уравнений Максвелла (2.43), (2.44). Для определения поля в дальней зоне достаточно вычислить амплитуды поля $B_k(z)$ и $B_m(z)$, поскольку через них определяются амплитудные коэффициенты нормальных волн в области вне источников поля.

§ 3. Локально неоднородные акустические волноводы

Рассмотрим задачу распространения акустических колебаний в волноводе с регулярной боковой поверхностью и локально неоднородным заполнением. Основной целью исследования является разработка метода расчета полной матрицы рассеяния неоднородного участка волновода.

Нерегулярный волновод представляет бесконечную цилиндрическую трубу постоянного сечения S, на конечном участке боковой поверхности которого выполняются импедансные граничные условия. Плотность внутренней среды, заполняющей волновод, постоянна, а скорость распространения колебаний в волноводе на конечном участке его длины, ограниченном сечениями S_1 и S_2, является произвольной, ограниченной кусочно-непрерывной функцией координат, принимающей постоянные значения вне данного участка. Скорости распространения колебаний в областях левее S_1 и правее S_2 могут быть различны. Для определения полной матрицы рассеяния данного нерегулярного участка достаточно решить задачу возбуждения волновода приходящей из бесконечности произвольной нормальной волной соответствующего полубесконечного регулярного волновода.

В такой постановке задача дифракции в нерегулярном волноводе заключается в определении решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом $k^2(x, y, z)$

$$Lu = \Delta u + k^2(x, y, z)\, u = -f(x, y, z) \tag{3.1}$$

в области D^∞, ограниченной боковой поверхностью R. Произвольная, ограниченная, комплекснозначная функция $k^2(x, y, z)$ такова, что вне сечений S_1 $(z \leqslant z_1)$ и $S_2 (z \geqslant z_2)$ она равна постоянной:

$$k^2(x, y, z) = k_1^2, \quad z \leqslant z_1,$$

$$k^2(x, y, z) = k_2^2, \quad z \geqslant z_2.$$

На участке боковой поверхности R, заключенной между сечениями S_1 и S_2, выполняются следующие граничные условия третьего рода с переменной функцией $\alpha(P)$:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P)\, u = 0, \quad P \in R, \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2, \tag{3.2}$$

причем на полубесконечных участках боковой поверхности условие (3.2) переходит в одно из граничных условий

$$u|_R = 0, \quad z \notin [z_1, z_2] \tag{3.2а}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_R = 0, \quad z \notin [z_1, z_2]. \tag{3.2б}$$

В регулярных полубесконечных волноводах выполняются условия возбуждения и излучения

$$u=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n^{(1)}(z-z_1)}\psi_n+Ae^{i\gamma_{n_0}^{(1)}(z-z_1)}\psi_{n_0}, & z\leqslant z_1,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n^{(2)}(z-z_2)}\psi_n, & z\geqslant z_2,\end{cases}\tag{3.3}$$

где $\psi_n(x, y)$ — ортонормированные собственные функции первой или второй краевой задачи для оператора Лапласа плоской области S, ограниченной контуром C;

$$\gamma_n^{(l)}=\sqrt{k_l^2-\lambda_n}.\tag{3.4}$$

Постоянная A — заданная амплитуда падающей нормальной волны, имеющей номер n_0, а R_n и T_n — неизвестные коэффициенты отражения и прохождения нормальных волн в регулярных полубесконечных волноводах. Поверхность R будем считать достаточно гладкой, не имеющей ребер и кромок. В дальнейшем задачу (3.1) — (3.3) будем называть основной краевой задачей. Такая задача является типичной для теории нерегулярных волноводов. На примере этой простой скалярной задачи легко проследить основные идеи метода исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах. Рассмотрим случай $A=0$.

Решение краевой задачи (3.1) — (3.3) будем понимать в обобщенном смысле. Рассмотрим уравнение

$$L[u]=\Delta u+k^2(x, y, z)u=-f$$

в ограниченной области D с границей $\partial D=R\cup S_1\cup S_2$, где R — участок боковой поверхности волновода, ограниченного сечениями S_1 и S_2. Пусть $f\in L_2(D)$. На поверхности R потребуем выполнения граничного условия

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(P)u=0,\quad P\in R,$$

в поперечных сечениях S_l, $l=1, 2$, парциальных условий излучения (3.3), которые перепишем в виде (здесь $A=0$)

$$\int\limits_{S_l}\frac{\partial u}{\partial n}\psi_k dS=i\gamma_k^l\int\limits_{S_l}u\psi_k dS,\quad l=1, 2.\tag{3.5}$$

В (3.2) и (3.5) производные берутся по внешней нормали к области D.

Обобщенным из $W^1{}_2(D)$ решением задачи (3.1) — (3.3) будем называть функцию $u\in W^1{}_2(D)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_D(\nabla u\nabla\eta^*-k^2(M)u\eta^*)\,dv-i\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^l u_k^{(l)}\eta_k^{(l)*}+$$
$$+\int\limits_R\sigma u\eta^* dS=\int\limits_D f\eta^* dv,\quad\forall\eta\in W_2^1(D),\tag{3.6}$$

где $u_k^{(l)}$ — коэффициент Фурье по системе функций $\{\psi_k\}$ следа функции $u(м)\in W^1{}_2(D)$ на S_l. Следы функции $u\in W^1{}_2(D)$ существуют и принадлежат $L_2(\partial D)$ на ∂D в силу кусочной гладкости границы области ∂D. Функции $k^2(M)$ и $\sigma(P)$ будем считать измеримыми, ограниченными функциями в соответствующих областях.

Тождество (3.6) может быть получено формальным применением формулы Грина к тождеству

$$-\int_D (L[u]+f)\,\eta dv=0, \quad \forall \eta\in W_2^1(D) \tag{3.7}$$

с использованием граничных условий (3.2), (3.5).

В оставшихся полубесконечных частях области D^∞ решение определяется как решение уравнений (3.1) в полубесконечных областях, удовлетворяющее условиям излучения и совпадающее со следом функции $u\in W^1{}_2(D)$ на S_l в смысле $L_2(S_l)$. След однозначно определяется коэффициентами Фурье $u^l{}_k$, поэтому решение в полубесконечных областях однозначно определяется условиями (3.3).

Можно показать *, что если $u\in W^1{}_2(D)\cap W^2{}_2(D')\,\forall D'\subset D$, то тождества (3.5) и (3.6) эквивалентны между собой и эквивалентны условию удовлетворения уравнения (3.1) почти всюду в D. В общем случае, когда известна лишь принадлежность u пространству $W^1{}_2(D)$, условие (3.5) является естественным обобщением понятия решения краевой задачи (3.1)—(3.3). При этом сохраняются основные свойства краевых задач для уравнений эллиптического типа — их фредгольмова разрешимость.

С помощью определения скалярного произведения в пространстве $W^1{}_2(D)$ комплекснозначных функций

$$[u,\ v]_{W_2^1(D)}=\int_D (\nabla u\nabla v^*+uv^*)\,dv \tag{3.8}$$

тождество (3.6) можно переписать в виде

$$[u,\ \eta]-[Au,\ \eta]-[Bu,\ \eta]+[Cu,\ \eta]=[F,\ \eta], \tag{3.9}$$

где линейные операторы A, B, C определяются на всем пространстве $W^1{}_2(D)$ их билинейными формами

$$[Au,\ \eta]=\int_D (k^2(M)+1)\,u\eta^* dv,$$

$$[Bu,\ \eta]=i\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^l u_k^l \eta_k^{l*},$$

$$[Cu,\ \eta]=\int_R \sigma(P)\,u\eta^* dS, \tag{3.10}$$

* См., например: *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. В этой книге приведено доказательство аналогичных утверждений для общих эллиптических уравнений.

а элемент F — тождеством

$$[F, \eta]=\int_D f\eta^* dv. \qquad (3.11)$$

В силу произвольности $\eta \in W^1{}_2(D)$ тождество (3.9) эквивалентно в пространстве $W^1{}_2$ операторному уравнению

$$u-Au-Bu+Cu=F. \qquad (3.12)$$

В силу явных представлений (3.10) операторы A, B, C являются вполне непрерывными в $W^1{}_2(D)$. Полная непрерывность оператора B следует из того, что $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_l} \in L_2(S_l)$, и равенства

$$i\gamma_k^l u_k^l=\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_k^l,$$

являющегося следствием условия (3.5). Из полной непрерывности следует фредгольмовость операторного уравнения (3.12) в $W^1{}_2(D)$. Тем самым для доказательства существования обобщенного решения задачи (3.1)—(3.3) достаточно установить, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Установим этот факт.

Вначале выведем основное энергетическое тождество. Рассмотрим выражение

$$\int_D (|\nabla u|^2-k^2|u|^2)\,dv-i\sum_{l,k}\gamma_k^l|u^l|^2+\int_R \sigma|u|^2\,dS=\int_D fu^* dv. \qquad (3.13)$$

Введем обозначения

$$\operatorname{Im} k^2=q(M)>0,\quad \operatorname{Re}\gamma_k^l=p_k^l>0,$$
$$\operatorname{Im}\sigma=-s(P)<0$$

и преобразуем мнимую часть (3.13) к виду

$$\int_D q(M)\left|u+\frac{f}{2iq}\right|^2 dv+\sum_{l,k} p_k^l|u_k^l|^2+\int_R s|u|^2\,dS=\int_D \frac{|f|}{4q}\,dv. \qquad (3.14)$$

Так как $q(M)>0$, $p^l{}_k>0$, $s(P)>0$, то из (3.14) получим следующие оценки нормы $\|u\|_{L_2(D)}$:

$$\|u\|_{L_2(D)}<C_1\|f\|_{L_2(D)}, \qquad (3.15)$$

где C_1 не зависит ни от u, ни от f.

Переписав действительную часть (3.13) в виде

$$\int_D |\nabla u|^2 dv+\sum_{l,k}\operatorname{Im}\gamma_k^l|u_k^l|^2+\int_R \operatorname{Re}\sigma|u|^2\,dS=$$
$$=\int_D \operatorname{Re} k^2|u|^2 dv+\operatorname{Re}\int_D fu^* dv, \qquad (3.16)$$

получим следующую оценку:

$$\|u\|_{W^1_2(D)} < C_2 \|f\|_{L_2(D)}, \tag{3.17}$$

где постоянная C_2 не зависит ни от u, ни от f. Из полученной оценки (3.17) и следует, что однородная задача (3.1) — (3.3) имеет только тривиальное обобщенное решение из $W^1{}_2(D)$.

Рассмотрим задачу (3.1)—(3.3) при $f=0$, $A\neq 0$. Для каждого поперечного сечения S нерегулярного волновода можно определить след решения S как элемент $L_2(S)$, причем эти следы непрерывно меняются как элементы $L_2(S)$ при непрерывном сдвиге сечения S. Согласно основным условиям разложимости функций в ряды Фурье, для обобщенного решения можно получить разложение

$$u(x,\ y,\ z)|_S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z)\psi_n(x,\ y). \tag{3.18}$$

Для построения приближенного решения воспользуемся методом типа Бубнова — Галеркина, который сводит исходную основную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Система дифференциальных уравнений должна быть определена так, чтобы как точное, так и приближенное решение удовлетворяли некоторым интегральным соотношениям. Будем далее считать, что на боковой поверхности R всюду выполняются условия (3.2а) или (3.2б). Из уравнений (3.1), (3.3) для точного решения u исходной задачи при условии, что $f\equiv 0$, следуют интегральные соотношения

$$\int\limits_S (\triangle u + k^2(\text{м})\, u)\psi_n dS = 0, \quad n=1,\ 2, \ldots; \tag{3.19}$$

$$\int\limits_{S_l} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - i\gamma_n^l u\right)\psi_n dS = -2i\gamma_{n_0}^{(1)} A e^{i\gamma_{n_0}^{(1)}(z-z_l)}\, \delta_{nn_0}\delta_{1l}, \tag{3.20}$$

$$l=1,\ 2,\ n=1,\ 2, \ldots .$$

Приближенное решение $u^N(x,\ y,\ z)$ основной задачи определим как конечную сумму

$$u^N(x,\ y,\ z) = \sum_{n=1}^{N} A_n^N(z)\psi_n(x,\ y), \quad (x,\ y,\ z)\in D^\infty,$$

что обеспечивает выполнение граничного условия (3.2) при произвольных коэффициентах $A^N{}_n(z)$. Коэффициенты $A^N{}_n(z)$ определим из условий ортогональности

$$\int\limits_S (\triangle u^N + k^2 u)\psi_n(x,\ y)\, dS = 0, \quad n=1, \ldots, N, \tag{3.21}$$

$$z_1 \leqslant z \leqslant z_2;$$

$$\int_{S_l}\left(\frac{\partial u^N}{\partial n}-i\gamma_n^l u^N\right)\psi_n dS=-2i\gamma_{n_0}^{(1)}A\,\delta_{nn_0}\delta_{1l},\quad n=1,\dots,N. \tag{3.22}$$

Соотношения (3.21) — (3.23) имеют место лишь для первых N номеров и представляют собой линейную краевую задачу для функций $A^N{}_n(z)$. Систему (3.21) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 A_n^N}{\partial z^2}-\lambda_n A_n^N+\sum_{m=1}^{N}K_{nm}(z)\,A_m^N=0,$$

$$K_{nm}(z)=\int_S k^2(x,\,y,\,z)\,\psi_n\psi_m dS. \tag{3.23}$$

Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (3.21) — (3.22) при условии, что коэффициент $k^2(м)$ является комплексным и $\operatorname{Im}k^2\geqslant 0$, причем среднее значение $\operatorname{Im}k^2>0$. В этом случае $\operatorname{Im}\gamma^l{}_n>0$. Умножим соотношение (3.21) на $A_n{}^{N*}(z)$, проинтегрируем по z и просуммируем по n. В результате получим

$$\int_D(\Delta u^N+k^2u^N)\,u^{N*}dv=0. \tag{3.24}$$

Из соотношений (3.22) следуют соотношения

$$\int_{S_1}\frac{\partial u^N}{\partial z}u^{N*}dS=-i\sum_{m=1}^{N}\gamma_m^{(1)}\left|A_m^N(z_1)\right|^2+2i\gamma_{n_0}^{(1)}A_{n_0}^{N*}(z_1)\,B(z_1),$$

$$B(z_1)=A; \tag{3.25}$$

$$\int_{S_2}\frac{\partial u^N}{\partial z}u^{N*}dS=i\sum_{m=1}^{N}\gamma_m^{(2)}\left|A_m^N(z_2)\right|^2. \tag{3.26}$$

Из формулы Грина, примененной к u^N и u^{N*}, и соотношений (3.13) — (3.15) получаем

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m=1}^{N}\gamma_m^{(1)}\left|A_m^N(z_1)\right|^2+\sum_{m=1}^{N}\gamma_m^{(2)}\left|A_m^N(z_2)\right|^2\right\}-$$

$$-2\operatorname{Re}\left(\gamma_{n_0}^{(1)}A_{n_0}^{N*}B\right)+\operatorname{Im}\int_D k^2|u^N|^2dv=0. \tag{3.27}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Re}\gamma_{n_0}^{(1)}\left|A_{n_0}^N(z_1)\right|^2-\left(\gamma_{n_0}^{(1)}A_{n_0}^{N*}B+\gamma_{n_0}^{(1)*}A_{n_0}^N B^*\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\bar{\gamma}_{n_0}^{(1)}\left|A_{n_0}^N-\frac{\gamma_{n_0}^{(1)}}{\operatorname{Re}\gamma_{n_0}^{(1)}}A\right|^2-\frac{\left|\gamma_{n_0}^{(1)}\right|^2}{\operatorname{Re}\gamma_{n_0}^{(1)}}|A|^2, \tag{3.28}$$

соотношение (3.27) можно переписать в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{m \neq n_0}^{N} \gamma_m^{(1)} |A_m^N(z_1)|^2\right\} + \sum_{m=1}^{N} \gamma_m^{(2)} |A_m^N(z_2)|^2\Bigg\} +$$

$$+\mathrm{Re}\,\gamma_{n_0}^{(1)}\left|A_{n_0}^N(z_1) - \frac{\gamma_{n_0}^{(1)}}{\mathrm{Re}\,\gamma_{n_0}^{(1)}} A\right|^2 + \mathrm{Im}\int_D k^2|u^N|^2 dv = \frac{|\gamma_{n_0}^{(1)}|^2}{\mathrm{Re}\,\gamma_{n_0}^{(1)}} |A|^2. \tag{3.29}$$

Из соотношения (3.29) следуют следующие основные свойства решения краевой задачи (3.21) — (3.22):

а) однородная задача, соответствующая (3.21) — (3.22), имеет только нулевое решение. Действительно, все слагаемые в левой части (3.29) положительны; следовательно, каждое из них равно нулю при $|A|=0$, отсюда

$$\int_D \mathrm{Im}\, k^2 |u^N|^2 dv = 0,$$

а это возможно лишь при условии, что $u^N=0$ в D;

б) в силу общих свойств линейных дифференциальных операторов из единственности следует существование решения задачи при любом N;

в) из соотношения (3.29) следуют равномерные по N оценки

$$\int_D |u^N|^2 dv < C_1, \quad \|u^N\|_{W_2^1(D)} < C_2; \tag{3.30}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \mathrm{Re}\,\gamma_m^{(l)} |A_m^N(z_l)|^2 < C_3. \tag{3.31}$$

Выше было показано, что условия (3.30), (3.31) имеют место и для точного решения, при этом суммирование в соотношениях (3.31) следует проводить от 1 до ∞.

Рассмотрим вопрос о сходимости приближенного решения u^N к решению основной задачи $u(M)$ при $N\to\infty$. Введем разность

$$w_N = u - u^N; \tag{3.32}$$

$$w_N = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^w(z)\psi_n(x, y), \quad A_n^w = \begin{cases} A_n - A_n^N, & n \leqslant N, \\ A_n, & n > N. \end{cases} \tag{3.33}$$

Для функции w_N имеют место следующие интегральные соотношения:

$$\int_S (\Delta w_N + k^2 w_N)\psi_n dS = \begin{cases} 0, & n \leqslant N, \\ -\int_S (\Delta u^N + k^2 u^N)\psi_n dS, & n > N; \end{cases} \tag{3.34}$$

$$\int\limits_{S_1}\left(\frac{\partial w_N}{\partial z}+i\gamma_n^{(1)}w_N\right)\psi_n dS=\begin{cases}0, & n\leqslant N,\\ -\int\limits_{S_1}\left(\frac{\partial u^N}{\partial z}+i\gamma_n^{(1)}u^N\right)\psi_n dS, & n>N;\end{cases} \tag{3.35}$$

$$\int\limits_{S_2}\left(\frac{\partial w_N}{\partial z}-i\gamma_n^{(2)}w_N\right)\psi_n dS=\begin{cases}0, & n\leqslant N,\\ -\int\limits_{S_2}\left(\frac{\partial u^N}{\partial z}-i\gamma_n^{(2)}u^N\right)\psi_n dS, & n>N.\end{cases} \tag{3.36}$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям для функции u^N, для функции w_N получим следующее энергетическое соотношение:

$$\sum_n \operatorname{Re}\gamma_n^{(1)}|A_n^w(z_1)|^2+\sum_m \operatorname{Re}\gamma_m^{(2)}|A_m^w(z_2)|^2+\operatorname{Im}\int\limits_D k^2|w_N|^2 dv=$$
$$=\int\limits_D \operatorname{Im}k^2(u^N R_N^*)\,dv, \tag{3.37}$$

где

$$R_N=\sum_{N+1}^{\infty}A_n(z)\psi_n(x, y) \tag{3.38}$$

— остаток в разложении точного решения в ряд Фурье по системе функций $\{\psi_n(x, y)\}$. Для доказательства сходимости решения задачи u^N к u в норме $L_2(D)$ достаточно показать, что при $N\to\infty$ правая часть (3.37) стремится к нулю при $N\to\infty$. Так как $k^2(M)$ равномерно ограничена в D, а норма функции u^N равномерно ограничена в силу соотношения (3.20), то достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_D |R_N|^2 dv=0.$$

Действительно,

$$\int\limits_S |R_N|^2 dS=\int\limits_S\left|u-\sum_{n=1}^{N}A_n\psi_n\right|^2 dS=\sum_{N+1}^{\infty}|A_n|^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_n|A_n|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}\int\limits_S|\nabla_2 u|^2 dS.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_D |R_N|^2 dv\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}\int\limits_D|\nabla_2 u|^2 dS\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}\|u\|^2_{W_2^1(D)},$$

откуда следует равномерная ограниченность интеграла. Таким образом, при $N \to \infty$ приближенное решение u^N сходится в среднем к точному решению основной задачи.

§ 4. Метод Галеркина с локальными координатными функциями

Приведенная схема метода Галеркина использует естественные координатные функции $\{\psi_n\}$, связанные с представлением решения в полубесконечных регулярных волноводах. Эти координатные функции образуют ортогональный базис в $\overset{0}{W}{}^1_2(D)$, однако с ростом номера функций растет число осцилляций базисных функций, а это приводит к необходимости вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций, что связано с увеличением объема работы при вычислении элементов матрицы $\|K_{mn}(z)\|$. В некоторых случаях «определенную выгоду» может дать использование координатных функций, отличных от $\{\psi_n\}$.

В качестве примера рассмотрим применение координатных функций метода конечных элементов. Для простоты изложения рассмотрим задачу распространения колебаний в двумерном случае. Нерегулярный волновод представляет собой полосу D^∞: $\{0 \leqslant x \leqslant a,\ -\infty < z < \infty\}$. Будем рассматривать первую краевую задачу в области D^∞ для уравнения

$$\Delta_{xz} u + k^2(x, z)\, u = 0 \tag{4.1}$$

с условиями

$$u(0, z) = u(a, z) = 0 \tag{4.2}$$

и условиями излучения

$$u(x, z) = u_0(x, z) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n^{(1)} z}\, \varphi_n(x), \quad z \leqslant 0; \tag{4.3}$$

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n^{(2)} z}\, \varphi_n(x), \quad z \geqslant L. \tag{4.4}$$

Функция $k^2(x, z)$ равна k^2_1 для $z \leqslant 0$ и k^2_2 для $z \geqslant L$; $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a}$ — собственные функции регулярного волновода,

$\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$, $l = 1, 2,$ — постоянные распространения полубесконечных волноводов. В качестве базисных функций метода Галеркина рассмотрим кусочно-линейные функции $\{\psi_p(x)\}_1^N$ на отрезке $[0, a]$. Имеем

$$
\psi_p(x)=\begin{cases} \dfrac{x-(p-1)h}{h}, & (p-1)h\leqslant x\leqslant ph, \\ \dfrac{h(p+1)-x}{h}, & ph\leqslant x\leqslant (p+1)h, \\ 0 & x\notin(p-1)h,(p+1)h), \end{cases} \tag{4.5}
$$

$$
h=\frac{a}{N+1}.
$$

В области D: $\{0\leqslant x\leqslant a),\ 0\leqslant z\leqslant L\}$ приближенное решение задачи (4.1)—(4.4) $u^N(x,\ z)$ определим как конечную сумму:

$$
u^N(x,\ z)=\sum_{p=1}^{N} Z_p(z)\psi_p(x). \tag{4.6}
$$

Очевидно, что $u^N(x,\ z)$ удовлетворяет краевым условиям (4.2). Функции $Z_p(z)$ определяются из условий ортогональности невязки уравнений (4.1) к каждой базисной функции. Учитывая, что базисные функции — кусочно-линейные и финитные, условия ортогональности запишем в слабой форме:

$$
\int_0^a \left\{\frac{\partial^2 u^N}{\partial z^2}\ \psi_p-\frac{\partial u^N}{\partial x}\psi_p'+k^2u^N\psi_p\right\}dx=0,\quad p=\overline{1,\ N}. \tag{4.7}
$$

Вне области $\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant L\}$ потребуем, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнению (4.1) с постоянными значениями $k^2=k_l^2$ и условиям излучения (4.3), (4.4), т. е. имело вид

$$
u_l^N=u_0(x,\ z)+\sum_{n=1}^{\infty} R_n^N e^{-i\gamma_n^{(1)}z}\ \varphi_n(x),\quad z\leqslant 0,
$$

$$
u_l^N=\sum_{n=1}^{\infty} T_n^N e^{i\gamma_n^{(2)}z}\ \varphi_n(x),\quad z\geqslant L,\quad l=1,\ 2.
$$

На границе области потребуем, чтобы приближенное решение удовлетворяло проекционным условиям сшивания

$$
\begin{gathered}
\int_0^a (u_l^N-u^N)\varphi_n dx=0,\quad z=0,\ L,\ n=1,2,\dots, \\
\int_0^a \left(\frac{\partial u_l^N}{\partial n}-\frac{\partial u^N}{\partial n}\right)\psi_p dx=0,\ z=0,\ L,\ p=1,\dots,N.
\end{gathered} \tag{4.8}
$$

Здесь в точках $z=0$, L рассматриваются предельные значения $u_l^N(x,\ 0-0)$, $u^N(x,\ 0+0)$, $u_l^N(x,\ L+0)$, $u^N(x,\ L-0)$ соответственно. Система $\{\psi_n\}$ — полная в $L_2[0, a]$, поэтому можно воспользоваться разложением

$$\psi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{pn}\varphi_n(x), \quad \alpha_{pn} = \int_0^a \psi_p\varphi_n dx. \tag{4.9}$$

Из условий ортогональности (4.7), учитывая вид базисных функций (4.5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A\mathbf{Z}''(z) + B(z)\mathbf{Z}(z) = 0. \tag{4.10}$$

Здесь A — симметричная трехдиагональная матрица, элементы которой имеют вид

$$A_{pj} = \begin{cases} 4\cdot\dfrac{h}{6}, & j = p, \\ \dfrac{h}{6}, & j = p-1,\ p+1, \\ 0, & j \neq p,\ p \pm 1. \end{cases}$$

Матрица $B(z)$ — трехдиагональная и равна сумме матриц $B_1 + B_2$, где

$$(B_1)_{pj} = \begin{cases} 2/h, & j = p, \\ -1/h, & j = p-1,\ p+1, \\ 0, & j \neq p,\ p \pm 1; \end{cases}$$

$$(B_2)_{pj} = \begin{cases} \int_0^a k^2\psi_p\psi_j dx, & j = p,\ p \pm 1, \\ 0, & j \neq p,\ p \pm 1. \end{cases}$$

Условия сшивания (4.8) и разложения (4.9) позволяют получить краевые условия для системы (4.10)

$$\begin{aligned} &A\mathbf{Z}'(0) + D_1\mathbf{Z}(0) = \mathbf{b}, \\ &A\mathbf{Z}'(L) + D_2\mathbf{Z}(L) = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Координаты вектора $\mathbf{b}$ равны $b_p = 2i\gamma_{n_0}^{(1)}\alpha_{pn_0}$. Элементы матрицы D_1, D_2 имеют вид

$$(D_l)_{pj} = \sum_{n=1}^{\infty} i\alpha_{pn}\alpha_{jn}\gamma_n^{(l)}, \quad p,\ j = 1, \dots, N. \tag{4.12}$$

Вычисляя значения α_{pn} (4.9) и подставляя их в ряд (4.12), получаем

$$(D_l)_{pj} = 8i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(l)} \left(\frac{a}{\pi n}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi n}{a} jh\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} ph\right) \times$$

$$\times\left(1-\cos\frac{\pi n}{a}h\right)\frac{1}{ah^2}.$$

Нетрудно видеть, что ряд (4.12) сходится не хуже ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^3}$. Приближенные значения коэффициентов отражения и прохождения нормальных волн вычисляются по формулам

$$R_n^N=\sum_{p=1}^{N}Z_p(0)\,\alpha_{pn}-\delta_{pn_0},$$

$$T_n^N=\sum_{p=1}^{N}Z_p(L)\,\alpha_{pn}\exp(-i\gamma_n^{(2)}L),\quad n=1,\ldots. \tag{4.13}$$

Итак, для приближенного решения $u^N(x, z)$ получена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.10) — (4.11). Обоснуем сходимость приближенного решения к точному при $N\to\infty$. При решении практических задач обычно требуется знать коэффициенты отражения и прохождения нормальных волн R_n и T_n в волноводе.

Точное решение u задачи (4.1) — (4.2) в области D: $\{0\leqslant x\leqslant\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant L\}$ принадлежит пространству $W^2{}_2(\bar{D})$. Для $u(x, z)$ существует приближение

$$u^{\mathrm{I}}(x, z)=\sum_{p=1}^{N}u_p(z)\psi_p(x),\quad u_p(z)\in W_2^2([0, L]),$$

и справедливы оценки

$$\|u-u^{\mathrm{I}}\|_C\leqslant C_1h^2,\quad \left\|\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2u^{\mathrm{I}}}{\partial z^2}\right\|_\infty\leqslant C_2h^2,$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}\right\|_C\leqslant C_3h \tag{4.14}$$

на отрезке $[0, a]$ при любом $0\leqslant z\leqslant L$. Норма $\|\,.\,\|_\infty$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,\,a]}|f|.$$

Введем следующие функции:

$$w_-^N(x, z)|_{z=0,L}=(u(x, z)-u_-^N(x, z))|_{z=0,L},\quad u_l^N\equiv u_-^N,$$

$$w^N(x, z)|_{z=0,L}=(u(x, z)-u^N(x, z))|_{z=0,L}.$$

Тогда из условий сшивания (4.8) и непрерывности точного решения $u(x, z)$ следует, что

$$\int_0^a (w_-^{N*}-w^{N*})|_{z=0,L}\,\varphi_n dx=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$\int_0^a \left(\frac{\partial w_-^N}{\partial z}-\frac{\partial w^N}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0,L}\psi_p dx=0,\quad p=1,\ldots,N. \tag{4.15}$$

Умножая первое из соотношений (4.15) на

$$-i\gamma_n^{(1)}(R_n-R_n^N)e^{-i\gamma_n^{(1)}z}\Big|_{z=0,L}$$

и суммируя по n от 1 до ∞, получим

$$\int_0^a (w_-^{N*}-w^{N*})\frac{\partial w_-^N}{\partial z}\bigg|_{z=0,L}dx=0. \tag{4.16}$$

Введем функции

$$S^N(x,z)|_{z=0,L}=(u^1(x,z)-u^N(x,z))|_{z=0,L},$$

$$R(x,z)|_{z=0,L}=(u(x,z)-u^1(x,z))|_{z=0,L}.$$

Умножая второе соотношение (4.15) на $u_p^*(z)-Z_p^*(z)$, где $u_p(z)$ и $Z_p(z)$ — коэффициенты разложения u^1 и u^N по базисным функциям, и суммируя по p от 1 до N, имеем

$$\int_0^a \left(\frac{\partial w_-^N}{\partial z}-\frac{\partial w^N}{\partial z}\right)S^{N*}|_{z=0,L}dx=0. \tag{4.17}$$

Очевидно, $S^{N*}=w^{N*}-R^*$. Используя это соотношение, из (4.16) и (4.17) получаем

$$\int_0 \frac{\partial w^N}{\partial z}w^{N*}dx=\int_0^a \frac{\partial w_-^N}{\partial z}w_-^{N*}dx-\int_0^a\left(\frac{\partial u^N}{\partial z}-\frac{\partial u_-^N}{\partial z}\right)R^*dx. \tag{4.18}$$

Рассмотрим на $W^2{}_2(D)$ следующий билинейный функционал:

$$a(u,v)=\int_0^a\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}v-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+k^2uv\right\}dx,$$

$$a^*(u,v^*)=\int_0^a\left\{\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}v-\frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+(k^*)^2uv\right\}dx. \tag{4.19}$$

Для точного решения задачи (4.1)—(4.2) справедливы соотношения

$$a(u,\psi_p)=0,\quad a(u^*,\psi_p)=0,\quad p=1,\ldots,N.$$

Приближенное решение $u^N(x,z)$ удовлетворяет условиям ортогональности (4.7), а следовательно,

$$a(u^{N*},\psi_p)=0.$$

Так как базисные функции $\psi_p(x)$ действительные, из этих соотношений следует, что для любой функции

$$v=\sum_{p=1}^{N} v_p(z)\psi_p(x)$$

справедливы соотношения

$$a(u, v)=a(u, v^*)=a^*(u, v^*)=a^*(u^*, v^*)=0,$$

$$a(u^N, v)=a(u^N, v^*)=a^*(u^N, v^*)=a^*(u^{N*}, v^*)=0.$$

Учитывая последние соотношения, нетрудно показать, что

$$a(u-u^N, u^*-u^{N*})=a(u-u^N, u^*-u^{1*}),$$

$$a^*(u-u^N, u^*-u^{N*})=a^*(u^*-u^{N*}, u^*-u^{1*}). \qquad (4.20)$$

Обозначая, как и выше, $u-u^N=w^N$, $u-u^1=R$, вычитая из первого равенства (4.20) второе и учитывая (4.19), получим

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial z^2} w^{N*}-\frac{\partial^2 w^{N*}}{\partial z^2} w^N\right)dx+2i\,\mathrm{Im}\int_0^a k^2|w^N|^2\,dx=$$

$$=\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial z^2} R^*-\frac{\partial w^{N*}}{\partial z^2} R\right)dx-2i\,\mathrm{Im}\int_0^a \frac{\partial w^N}{\partial x}\frac{\partial R^{N*}}{\partial x}dx+$$

$$+2i\,\mathrm{Im}\int_0^a k^2 w^N R^* dx.$$

Проинтегрируем это равенство по z от 0 до L. Применим в области D к первым интегралам в левой и правой частях равенства вторую формулу Грина. Учитывая граничные условия (4.2), справедливые для u, u^N, u^1, и соотношение (4.18), получим

$$\mathrm{Im}\int_0^a \frac{\partial w^N_-}{\partial z} w^{N*}_-|_{z=L}\,dx-\mathrm{Im}\int_0^a \frac{\partial w^N_-}{\partial z} w^{N*}_-|_{z=0}\,dx+$$

$$+\mathrm{Im}\int_D k^2|w^N|^2\,dv=\mathrm{Im}\int_0^a \frac{\partial w^N}{\partial z} R^*|_{z=L}\,dx-\mathrm{Im}\int_0^a \frac{\partial w^N}{\partial z} R^*|_{z=0}\,dx+$$

$$+\mathrm{Im}\int_D \frac{\partial w^N}{\partial x}\frac{\partial R^*}{\partial x}dv+\mathrm{Im}\int_D k^2 w^N R^* dv+\mathrm{Im}\int_0^a \left(\frac{\partial u^N}{\partial z}-\frac{\partial u^N_-}{\partial z}\right)R^* dx-$$

$$-\mathrm{Im}\int_0^a \left(\frac{\partial u^N}{\partial z}-\frac{\partial u^N_-}{\partial z}\right)R^*|_{z=L}\,dx. \qquad (4.21)$$

Будем считать постоянную k комплексной, $\mathrm{Im}\,k^2>0$. Покажем, что правая часть (4.21) есть $O(h)$. Используя проекционные соотношения для приближенного решения, можно показать, что справедливы следующие оценки:

$$\int_D |u|^2 dv < C_4, \quad \int_D |u^N|^2 dv < C_5,$$

$$\int_D |\operatorname{grad} u|^2 dv < C_6, \quad \int_D |\operatorname{grad} u^N|^2 dv < C_7, \tag{4.22}$$

причем постоянные C_i не зависят от N. Точное решение u принадлежит $W^2{}_2(D)$, поэтому подобные оценки справедливы и для w^N:

$$\int_D |w^N|^2 dv < C_8, \quad \int_D \left|\frac{\partial w^N}{\partial x}\right|^2 dv < C_9,$$
$$\int_0^a \left|\frac{\partial w^N}{\partial z}\right|^2 dx < C_{10}. \tag{4.23}$$

Справедливость оценок

$$\int_0^a \left|\frac{\partial u^N}{\partial z} - \frac{\partial \underline{u}^N}{\partial z}\right|^2 \Bigg|_{z=0,\,L} dx < C_{11} \tag{4.24}$$

следует из (4.22) и определения $\underline{u}^N$.

Полученные оценки позволяют доказать, что правая часть (4.21) есть $O(h)$. Преобразуя первые два слагаемых левой части (4.21) с помощью условий излучения, получим $R^N{}_n \to R_n$, $T^N{}_n \to T_n$ при $N \to \infty$.

Итак, обоснована сходимость приближенных значений коэффициентов отражения и прохождения нормальных волн в волноводе к точным.

В данном случае мы воспользовались финитными функциями метода конечных элементов. Однако можно рассмотреть и более общие координатные функции. Из метода доказательства следует, что могут быть использованы координатные функции достаточно общего вида, для которых можно установить теоремы аппроксимации точного решения. Финитные функции имеют преимущество, состоящее в том, что в этом случае получается краевая задача с достаточно просто вычисляемыми коэффициентами.

§ 5. Нерегулярные радиоволноводы с переменным заполнением

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитных волн в нерегулярных волноводах с переменным заполнением. Боковая поверхность Σ нерегулярного волновода представляет собой идеально проводящую регулярную цилиндрическую поверхность с поперечным сечением S, ограниченным контуром C. Среда, заполняющая волновод, характеризуется тензорами диэлектрической ε и магнитной проницаемости μ, компоненты которых являются ограниченными кусочно-непрерывными функциями координат, причем среда бесконечных участков волновода левее сечения S_1 и правее сечения S_2 однородна, изотропна и характеризуется постоянными ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 соответственно. Поставим задачу определения матрицы рассеяния нерегулярного участка волновода. Чтобы найти матрицу рассеяния, достаточно решить задачу возбуждения нерегулярного волновода одной из нормальных волн регулярных полубесконечных волноводов.

Такая постановка задачи дифракции в нерегулярном волноводе сводится к определению решения системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \tag{5.1}$$

с однородным условием $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_\Sigma = 0$ и следующими условиями излучения и возбуждения на бесконечности:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = A \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n^{(1)} z} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{-n}^{(1)} \\ \mathbf{H}_{-n}^{(1)} \end{pmatrix} + A e^{i\gamma_{n_0}^{(1)} z} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n_0}^{(1)} \\ \mathbf{H}_{n_0}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$z \leqslant z_1$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = A \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n^{(2)} z} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(2)} \\ \mathbf{H}_n^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$z \geqslant z_2.$$

Здесь координаты z_1 и z_2 характеризуют положение сечений S_1 и S_2, а $\{\mathbf{E}_n^{(j)}, \mathbf{H}_n^{(j)}\} e^{i\gamma_n^{j} z}$, $j = 1, 2,$ — нормальные волны регулярных волноводов с изотропным заполнением, соответствующие регулярным полубесконечным волноводам. Положительным индексам n соответствуют прямые волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z, отрицательным значениям индексов n — обратные волны. Постоянная распространения нормальной волны

$$\gamma_n^{(j)} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_j \mu_j - \alpha_n},$$

где α_n — поперечное собственное число, которое равно либо λ_n, либо $\tilde{\lambda}_n$ в зависимости от типа нормальной волны.

Для дальнейшего изложения потребуется следующее свойство решения краевой задачи. Для любого $z \leqslant z_1$ имеет место выражение

$$\int\limits_S [\mathbf{E}^*, \mathbf{H}]_z dS = -\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^1 |P_n^{(1)}|^2 + 2\beta_{n_0}^{(1)} B P_{n_0}^{*(1)}, \tag{5.2}$$

где

$$P_n^{(1)}(z) = \begin{cases} \pm A R_{n_0} e^{-i\gamma_{n_0}^{(1)} z} + A e^{i\gamma_n^{(1)} z}, & n = n_0; \\ \pm A R_n e^{-i\gamma_{n_0}^{(1)} z}, & n \neq n_0; \end{cases}$$

$$B = A e^{i\gamma_{n_0}^{(1)} z}, \quad \beta_n^1 = \int\limits_S [\mathbf{E}_n^{(1)*}, \mathbf{H}_n^{(1)}]_z dS.$$

Коэффициент $P_n^{(1)}(z)$ имеет смысл коэффициента разложения функции $\mathbf{E}(M, z)$ по системе функций $\{\mathbf{E}_m^{(1)}(M)\}$ при $z \leqslant z_1$:

$$\mathbf{E}(M, z) = \sum_n P_n^{(1)}(z) \mathbf{E}_n^{(1)}(M).$$

Аналогично, при $z \geqslant z_2$ имеем

$$\begin{gathered} \int\limits_S [\mathbf{E}^*, \mathbf{H}]_z dS = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(2)} |T_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(2)} |P_n^{(2)}|^2, \\ P_n^{(2)} = T_n e^{i\gamma_n^{(2)} z}, \quad \beta_n^{(2)} = \int\limits_S [\mathbf{E}_n^{(2)*}, \mathbf{H}_n^{(2)}]_z dS. \end{gathered} \tag{5.3}$$

В силу замкнутости системы нормальных волн соотношения (5.2) и (5.3) эквивалентны следующим парциальным условиям излучения:

$$\int\limits_S [\mathbf{E}_{nt}^{(1)*}, \mathbf{H}]_z dS = \beta_n^{(1)} (-P_n^{(1)} + 2B\delta_{nn_0}), \quad z \leqslant z_1,$$

$$\int\limits_S [\mathbf{E}_{nt}^{(2)*}, \mathbf{H}]_z dS = \beta_n^{(2)} P_n^{(2)}, \quad z \geqslant z_2.$$

Перейдем к построению приближенного метода на основе формулировки соотношений ортогональности и сведем исходную краевую задачу для уравнений Максвелла к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В электромагнитной задаче возможны различные схемы применения метода. Они могут отличаться способами представления компонент полей. Потребуем, чтобы приближенное решение удовлетворяло не только интегральным соотношениям ортогональности, но и некоторым дифференциальным соотношениям, справедливым для точного решения. В зависимости от выбора совокупности соотношений можно получать различные схемы метода, отличающиеся как формой систем дифференциальных соотношений, так и характером сходимости приближенных значений компонент полей к их точным значениям. В настоящем параграфе ограничимся схемой, в которой продольные компоненты полей удовлетворяют продольным уравнениям Максвелла, а поперечные компоненты определяются из соотношений ортогональности.

В качестве координатных функций метода Галеркина выберем вектор-функции, соответствующие поперечным компонентам нормальных волн незаполненного волновода данного поперечного сечения:

$$\mathbf{e}^n = \begin{cases} \nabla_2\varphi_k & \text{в случае электрических волн,} \\ [\nabla_2\hat{\varphi}_m, \mathbf{i}_z] & \text{в случае магнитных волн;} \end{cases}$$

$$\mathbf{h}^n = \begin{cases} [\mathbf{i}_z, \nabla_2\varphi_k] & \text{в случае электрических волн,} \\ \nabla_2\hat{\varphi}_m & \text{в случае магнитных волн.} \end{cases}$$

Поперечные компоненты $\mathbf{E}_{nt}^{(j)}$ нормальных волн и $\mathbf{e}^n$ отличаются только множителями:

$$\mathbf{E}_{nt}^{(j)} = \alpha_n^j \mathbf{e}^n.$$

Функции $\mathbf{e}^n$ и $\mathbf{h}^n$ ортонормированы, т. е.

$$\int_S [\mathbf{e}^n, \mathbf{h}^m]_z \, dS = \int_S (\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) \, dS = \int_S (\mathbf{h}^n, \mathbf{h}^m) \, dS = \delta_{nm},$$

и удовлетворяют следующим условиям:

$$-\operatorname{div} \mathbf{h}^n = (\operatorname{rot} \mathbf{e}^n)_z = \begin{cases} 0 & \text{— электрические волны,} \\ \hat{\lambda}_m \hat{\varphi}_m & \text{— магнитные волны;} \end{cases}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{h}^n)_z = \operatorname{div} \mathbf{e}^n = \begin{cases} \lambda_k \varphi_k & \text{— электрические волны,} \\ 0 & \text{— магнитные волны.} \end{cases}$$

При любом значении z имеют место разложения

$$\mathbf{E}_t(M, z) = \sum_n A_n(z) \mathbf{e}^n(M),$$

$$\mathbf{H}_t(M, z) = \sum_n B_n(z) \mathbf{h}^n(M).$$

Приближенное решение краевой задачи (5.1) — (5.3) будем искать в виде конечных сумм

$$\mathbf{E}_t^N = \sum_n A_n^N(z) \mathbf{e}^n(M); \tag{5.4}$$

$$\mathbf{H}_t^N = \sum_n B_n^N(z) \mathbf{h}^n(M), \tag{5.5}$$

а продольные компоненты определим через поперечные с помощью дифференциальных соотношений

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H}^N)_z=(\operatorname{rot}\mathbf{H}_t^N)_z=-i\omega(\varepsilon\mathbf{E}^N)_z, \tag{5.6}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E}^N)_z=(\operatorname{rot}\mathbf{E}_t^N)_z=i\omega(\mu\mathbf{H}^N)_z. \tag{5.7}$$

Коэффициенты A^N и B^N найдем из систем соотношений

$$\int\limits_S(\operatorname{rot}\mathbf{H}^N+i\omega\varepsilon\mathbf{E}^N)_t\mathbf{e}^n dS=-\int\limits_{C_l}[H_z^N]_{\Sigma_l}\mathbf{e}^n[\mathbf{v},\ \mathbf{i}_z]\frac{dl}{\cos\alpha}; \tag{5.8}$$

$$\int\limits_S(\operatorname{rot}\mathbf{E}^N-i\omega\mu\mathbf{H}^N)_t\mathbf{h}^n dS=-\int\limits_{C_l}[\mathbf{E}_z^N]_{\Sigma_l}\mathbf{h}^n[\mathbf{v},\ \mathbf{i}_z]\frac{dl}{\cos\alpha}. \tag{5.9}$$

Мы предполагаем, что внутри волновода имеется конечное число поверхностей Σ_i, на которых компоненты тензоров ε и μ терпят разрывы первого рода, причем поверхности Σ_l достаточно гладкие и не имеют точек пересечения. Согласно обычным электродинамическим условиям сопряжения, касательные составляющие напряженности электрического и магнитного полей непрерывны на поверхности Σ_i, а нормальные компоненты могут иметь разрывы первого рода. Здесь $[f]_{\Sigma_l}$ — скачок функции на поверхности Σ_l:

$$[f]_{\Sigma_l}=(f_e-f_i)|_{\Sigma_l};$$

C_l — совокупность кривых, по которым плоскость $z=\text{const}$ пересекает поверхности Σ_l; $\mathbf{v}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ_l; $\mathbf{v}_0$ — единичный вектор нормали к контуру C_l в плоскости $z=\text{const}$; $\cos\alpha=(\mathbf{v},\ \mathbf{v}_0)$, где α — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$.

Правые части соотношений ортогональности (5.9) выбраны таким образом, чтобы обеспечить выполнение условий непрерывности касательных составляющих полей $\mathbf{H}^N$ и $\mathbf{E}^N$ на поверхностях в интегральном смысле.

Граничные условия для определения $A^N(z)$ и $B^N(z)$ получим, потребовав выполнения следующих интегральных соотношений:

$$\int\limits_S[\mathbf{E}_{nt}^{(1)*},\ \mathbf{H}^N]_z dS=\beta_n^{(1)}(-\tilde{P}_n^{(1)}+2B\delta_{nn_0}),\quad z\leqslant z_1; \tag{5.10}$$

$$\int\limits_S[\mathbf{E}_{nt}^{(2)*},\ \mathbf{H}^N]_z dS=\beta_n^{(2)}\tilde{P}_n^{(2)},\quad z\geqslant z_2, \tag{5.11}$$

где $\tilde{P}_n^{(1)}$ и $\tilde{P}_n^{(2)}$ — коэффициенты разложения вектора $\mathbf{E}^N$ по системе функций $\{\mathbf{E}_n^{(j)}\}$ при $z\leqslant z_1$ и $z\geqslant z_2$ соответственно, связанные с функциями $A^N{}_n(z_j)$ соотношениями

$$A_n^N(z_j) = \alpha_n^{(j)}\bar{p}_n^{(j)}.$$

Область D, заключенная между сечениями $z=z_1$, $z=z_2$ и боковой поверхностью волновода, разбивается поверхностями Σ_i на подобласти D_i.

Из соотношений (3.6) — (3.9) следует, что

$$\int_{D_i} \{\operatorname{rot} \mathbf{H}^N + i\omega\varepsilon \mathbf{E}^N\} \mathbf{E}^{N*} dv = \int_{\Sigma_i} [H_z^N] \mathbf{E}_t^{N*} [\mathbf{v}, \mathbf{i}_z] dS,$$

$$\int_{D_i} \{\operatorname{rot} \mathbf{E}^N - i\omega\mu \mathbf{H}^N\} \mathbf{H}^{N*} dv = \int_{\Sigma_i} [\mathbf{E}_z^N] \mathbf{H}_t^{N*} [\mathbf{v}, \mathbf{i}_z] dS.$$

В каждой подобласти D_i имеет место векторная формула

$$\int_{D_i} \operatorname{div} [\mathbf{H}^N, \mathbf{E}^{N*}] dv = \int_{\partial D_i} [\mathbf{H}^N, \mathbf{E}^{N*}] \mathbf{v} dS. \tag{5.12}$$

Разбивая интеграл $\int_D \operatorname{div} [\mathbf{H}^N, \mathbf{E}^{N*}] dv$ на интегралы по областям D_i и учитывая, что интегралы по всем Σ_i сократятся, получим основное интегральное соотношение:

$$i\omega \int_D \{(\varepsilon \mathbf{E}^N) \mathbf{E}^{N*} - (\mu^* \mathbf{H}^*) \mathbf{E}^N\} dv = \int_{S_1+S_2} [\mathbf{H}^N, \mathbf{E}^{N*}]_n dS. \tag{5.13}$$

В дальнейшем будем требовать, чтобы тензоры ε и μ имели следующий вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon^0 \mathbf{I},$$

$$\mu = \mu_1 + \mu^0 \mathbf{I},$$

где ε_1 и μ_1 — эрмитовы тензоры, I — единичный тензор, а ε^0, μ^0 — комплексные функции с положительной мнимой частью:

$$\operatorname{Im} \varepsilon^0 > 0, \quad \operatorname{Im} \mu^0 > 0. \tag{5.14}$$

При этом из соотношения (5.13) получаем

$$\operatorname{Re} \int_{S_1+S_2} [\mathbf{H}^N, \mathbf{E}^{N*}]_n dS - \omega \operatorname{Im} \int_D \{\mu^0 |\mathbf{H}^N|^2 + \varepsilon^0 |\mathbf{E}^N|^2\} dv = 0. \tag{5.15}$$

Подставляя в соотношение (5.15) соотношения (5.10) и (5.11), перепишем (5.15) в форме

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} \{\beta_n^{(1)} |\bar{P}_n^{(1)}|^2 + \beta_n^{(2)} |\bar{P}_n{}^{(2)}|^2\} + \omega \operatorname{Im} \int_D \{\varepsilon^0 |\mathbf{E}^N|^2 + \mu^0 |\mathbf{H}^N|^2\} dv =$$

$$=2\,\mathrm{Re}\,\beta_{n_0}^{(1)} B \tilde{P}_{n_0}^{(1)}$$

или

$$\mathrm{Re} \sum_{n \neq n_0}^{N} \beta_n^{(1)} |\tilde{P}_n^{(1)}|^2 + \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{N} \beta_n^{(2)} |\tilde{P}_n^{(2)}|^2 +$$

$$+ \omega\, \mathrm{Im} \int_D \{\varepsilon^0 |\mathbf{E}^N|^2 + \mu^0 |\mathbf{H}^N|^2\}\, dv +$$

$$+ \mathrm{Re}\,\beta_{n_0}^{(1)} \left| \tilde{P}_{n_0}^{(1)} - B \frac{\beta_{n_0}^{(1)}}{\mathrm{Re}\,\beta_{n_0}^{(1)}} \right|^2 = \frac{|\beta_{n_0}^{(1)}|^2}{\mathrm{Re}\,\beta_{n_0}^{(1)}} |B|^2. \qquad (5.16)$$

Из соотношения (5.16) вытекают следующие утверждения.

Однородная задача для приближенного решения имеет только тривиальное решение. В силу нормальной разрешимости краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений неоднородная краевая задача для приближенного решения однозначно разрешима.

Решение $\{\mathbf{E}^N, \mathbf{H}^N\}$ удовлетворяет условиям равномерной по N ограниченности

$$\sum_n \mathrm{Re}\,\beta_n^{(1)} |\tilde{P}_n^{(1)}|^2 < C_1, \quad \sum_n \mathrm{Re}\,\beta_n^{(2)} |\tilde{P}_n^{(2)}|^2 < C_1,$$

$$\int_D |\mathbf{E}^N|^2 dv < C, \quad \int_D |\mathbf{H}^N|^2 dv < C.$$

Постоянные C и C_1 зависят от способа возбуждения.

Доказательство сходимости приближенного решения к точному проводится по общей схеме, изложенной в гл. III.

§ 6. Исследование нерегулярных волноводов с локально неоднородной боковой поверхностью

В этом параграфе рассмотрим применение метода Галеркина для исследования нерегулярных волноводов с нерегулярной боковой поверхностью, которая представляет собой трубу сложной формы. При исследовании волноводов переменного поперечного сечения определенную трудность вызывает постановка математической задачи распространения электромагнитных колебаний. В настоящем параграфе будем считать, что боковая поверхность волновода является идеально проводящей и локально неоднородной, гладко сопрягающейся с регулярными полубесконечными волноводами поперечных сечений S_1 и S_2, а среда, заполняющая волновод, однородна. В качестве способа возбуждения выберем нормальную волну регулярного цилиндрического волновода, распространяющуюся из $-\infty$.

В такой постановке задача заключается в определении решения однородной системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \tag{6.1}$$

в области D, ограниченной боковой поверхностью R нерегулярного волновода и сечениями S_1 и S_2, которое удовлетворяет граничному условию

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_R = 0 \tag{6.2}$$

и парциальным условиям излучения и возбуждения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}_{z_1<0} = \sum_n R_n(z_1)\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{-n}^{(1)}(M_1) \\ \mathbf{H}_{-n}^{(1)}(M_1) \end{pmatrix} + B(z_1)\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n_0}^{(1)}(M_1) \\ \mathbf{H}_{n_0}^{(1)}(M_1) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}_{z_2>0} = \sum_n T_n(z_2)\begin{pmatrix} \mathbf{E}_n^{(2)}(M_2) \\ \mathbf{H}_n^{(2)}(M_2) \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Здесь (M_1, z_1) и (M_2, z_2) — цилиндрические координаты регулярных полубесконечных волноводов с поперечными сечениями S_1 и S_2. Вновь введем обозначения

$$P_m(z_1) = \pm R_m(z_1) + B(z_1)\,\delta_{nn_0}$$

и запишем парциальные условия излучения в сечениях S_1 и S_2:

$$\int_{S_1} [\mathbf{H}, \mathbf{E}_n^{(1)*}]_n\, dS = -(P_n - 2B\delta_{nn_0})\,\beta_n^{(1)}; \tag{6.5}$$

$$\int_{S} [\mathbf{H}, \mathbf{E}_n^{(2)*}]_n\, dS = -T_n\beta_n^{(2)}. \tag{6.6}$$

Одна из трудностей решения поставленной задачи состоит в удовлетворении граничному условию (6.2) на боковой поверхности R. Чтобы выполнить это краевое условие, с помощью замены независимых переменных преобразуем область D в регулярный цилиндр G таким образом, чтобы сечения S_1 и S_2 преобразовались в сечения регулярного цилиндра. В качестве регулярного цилиндра G выберем круговой цилиндр единичного радиуса. Введем новую систему координат (ρ, φ, ξ) в области D, связанную со старой системой соотношениями

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(x, y, z), \\ \varphi &= \varphi(x, y, z), \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \end{aligned} \tag{6.7}$$

так, чтобы S_1 и S_2 деформировались лишь в плоскости поперечного сечения, при этом ось ζ должна переходить в оси z_1 и z_2. Достаточно простым способом введения новых координат является метод сжатия, в котором поперечное сечение деформируется в круг единичного радиуса.

Пусть в области D задана гладкая кривая $\mathscr{L}$, характеризующаяся кривизной $\varkappa(s)$ и кручением $\nu(s)$, которые являются функциями длины дуги s, отсчитываемой от сечения S_1. Кривая $\mathscr{L}$ гладко переходит в оси z_1 и z_2 соответственно. Вдоль кривой $\mathscr{L}$ движется плоскость S, оставаясь все время нормальной к этой кривой, причем кривая $\mathscr{L}$ пересекает плоскость S всегда в одной и той же точке O, а фиксированное направление в плоскости S совпадает с направлением главной нормали к кривой в точке пересечения кривой и плоскости. Зададим в плоскости S замкнутый контур C, содержащий внутри себя точку O, и пусть при перемещении плоскости S вдоль кривой $\mathscr{L}$ контур C деформируется заданным способом так, чтобы диаметр контура C не превышал радиусов кривизны и кручения кривой $\mathscr{L}$ в соответствующей точке. Контур C при движении образует боковую поверхность R нерегулярного волновода. Часть плоскости S, заключенную внутри поверхности R, называют поперечным сечением данного нерегулярного волновода. Введем в плоскости S полярные координаты ρ, φ с полюсом в точке O и полярной осью $\varphi=0$, совпадающей с направлением главной нормали к кривой $\mathscr{L}$ в соответствующей точке пересечения кривой $\mathscr{L}$ и плоскости S. Тогда, если контур C является звездным относительно точки O, он может быть описан уравнением

$$r=r_0(\varphi,\ s), \tag{6.8}$$

в котором s играет роль параметра, определяющего положение плоскости S на кривой $\mathscr{L}$.

Положение точки M внутри области D, ограниченной поверхностью R, однозначно определяется координатами r, φ, s. Эти координаты, вообще говоря, неортогональны и связаны следующим образом с декартовыми координатами точки M:

$$\begin{aligned} x&=x(r,\ \varphi,\ s)=X(s)+r\cos\varphi n_x(s)+r\sin\varphi b_x(s),\\ y&=y(r,\ \varphi,\ s)=Y(s)+r\cos\varphi n_y(s)+r\sin\varphi b_y(s),\\ z&=z(r,\ \varphi,\ s)=Z(s)+r\cos\varphi n_z(s)+r\sin\varphi b_z(s). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Здесь

$$x=X(s),\quad y=Y(s),\quad z=Z(s) \tag{6.10}$$

— нормальное уравнение кривой $\mathscr{L}$, а $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ — единичные векторы главной нормали и бинормали к кривой в точке $O(s)$. Координаты

$$\rho=\frac{r}{r_0(\varphi,\ z)},\quad \varphi=\varphi,\quad \zeta=s \tag{6.11}$$

задают отображение области D на единичный цилиндр G. При этом с помощью соотношений (6.9) и (6.11) легко получить в явном виде выражения для метрического тензора:

$$
\begin{gathered}
g_{11}=r_0^2(\varphi,\ s),\quad g_{12}=\rho r_0\frac{\partial r_0}{\partial\varphi},\\
g_{13}=\rho r_0\frac{\partial r_0}{\partial\zeta},\quad g_{22}=\rho^2\left(r_0^2+\left(\frac{\partial r_0}{\partial\varphi}\right)^2\right),\\
g_{23}=\rho^2\left(-r_0^2\nu(s)+\frac{\partial r_0}{\partial\varphi}\,\frac{\partial r_0}{\partial\zeta}\right),\\
g_{33}=h_1^2+\rho^2\left(r_0^2\nu^2(s)+\left(\frac{\partial r_0}{\partial\zeta}\right)^2\right),\\
h_1=1-\rho r_0(\varphi,\ \zeta)\,\varkappa(s)\cos\varphi,\\
\sqrt{g}=\rho r_0^2h_1^2.
\end{gathered}
\tag{6.12}
$$

Рассмотренный способ отображения дает возможность задать в явном виде широкий класс поверхностей R. Введенная криволинейная система координат $(\rho,\ \varphi,\ \zeta)$ определяет основной $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3)$ и взаимный $(\mathbf{a}^1,\ \mathbf{a}^2,\ \mathbf{a}^3)$ базисы, разлагая по которым произвольный вектор получим его контрвариантные и ковариантные координаты *.

Для дальнейшего изложения удобно воспользоваться ковариантными координатами векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, обозначив их следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}&=E_\rho\mathbf{a}^1+\rho E_\varphi\mathbf{a}^2+E_\zeta\mathbf{a}^3,\\
\mathbf{H}&=H_\rho\mathbf{a}^1+\rho H_\varphi\mathbf{a}^2+H_\zeta\mathbf{a}^3.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Согласно условиям ортогональности, для основных $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и взаимных $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ векторов граничные условия (6.2) можно переписать в виде

$$
E_\varphi|_{\rho=1}=0,\quad E_\zeta|_{\rho=1}=0. \tag{6.14}
$$

Уравнения Максвелла (6.1) в неортогональной системе координат принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial H_\zeta}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial\zeta}=-i\omega\varepsilon\frac{\sqrt{g}}{\rho}\,(g^{11}E_\rho+g^{12}\rho E_\varphi+g^{13}E_\zeta),\\
\frac{\partial H_\rho}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_\zeta}{\partial\rho}=-i\omega\varepsilon\sqrt{g}\,(g^{12}E_\rho+g^{22}\rho E_\varphi+g^{23}E_\zeta),\\
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\varphi)-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi}=-i\omega\varepsilon\frac{\sqrt{g}}{\rho}\,(g^{13}E_\rho+g^{23}\rho E_\varphi+g^{33}E_\zeta);
\end{gathered}
\tag{6.15}
$$

---

* Подробнее о криволинейных системах координат см.: *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. II. — М.: Наука, 1973.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\zeta}{\partial \varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial \zeta}=i\omega\mu\frac{\sqrt{g}}{\rho}(g^{11}H_\rho+g^{12}\rho H_\varphi+g^{13}H_\zeta),$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial \zeta}-\frac{\partial E_\zeta}{\partial \rho}=i\omega\mu\sqrt{g}(g^{12}H_\rho+g^{22}\rho H_\varphi+g^{23}H_\zeta), \qquad (6.16)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\varphi)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}=i\omega\mu\frac{\sqrt{g}}{\rho}(g^{13}H_\rho+g^{23}\rho H_\varphi+g^{33}H_\zeta). \quad (6.17)$$

Введем в регулярном цилиндре G ортогональную систему координат с ортами $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\zeta$. Полученную систему уравнений (6.15), (6.16) можно рассматривать в области G как систему уравнений относительно векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в ортогональной цилиндрической системе координат $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\zeta$. При этом вектор $\mathbf{E}_t=E_\rho\mathbf{e}_\rho+E_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ можно рассматривать как поперечную составляющую вектора $\mathbf{E}$ в регулярном цилиндре G, а $E_\zeta\mathbf{e}_\zeta$ — как его продольную составляющую. Систему (6.15), (6.16) перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mu\mathbf{H}, \qquad (6.18)$$

где тензорные функции $\varepsilon(\rho, \varphi, z)$ и $\mu(\rho, \varphi, z)$ имеют вид

$$\varepsilon=\mu=\sqrt{g}\begin{Vmatrix} \frac{1}{\rho}g^{11} & g^{12} & \frac{1}{\rho}g^{13} \\ g^{12} & \rho g^{22} & g^{23} \\ \frac{1}{\rho}g^{13} & g^{23} & \frac{1}{\rho}g^{33} \end{Vmatrix}. \qquad (6.19)$$

Система уравнений (6.17) описывает задачу распространения электромагнитных колебаний в регулярном цилиндрическом волноводе с переменным анизотропным заполнением, характеризуемым тензорами ε и μ. Последние определяются метрическими коэффициентами g^{ik}, которые определяются формой боковой поверхности волновода. Итак, установлена эквивалентность задач распространения электромагнитных колебаний в волноводе с нерегулярной боковой поверхностью и в регулярном цилиндрическом волноводе с соответствующим анизотропным заполнением.

В любом поперечном сечении регулярного цилиндра G, соответствующем фиксированному значению ζ, введем кординатную систему вектор-функций $\mathbf{e}^n(\rho, \varphi)$, $\mathbf{h}^n(\rho, \varphi)$, определенных в ортогональной системе координат $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\zeta$ формулами (6.13).

В силу полноты систем координатных вектор-функций при любом фиксированном ζ имеют место следующие разложения векторов $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$:

$$\mathbf{E}_t=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\zeta)\,\mathbf{e}^n(\rho, \varphi), \qquad (6.20)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\zeta)\,\mathbf{h}^n(\rho, \varphi), \tag{6.21}$$

причем в силу граничных условий (6.14) ряды сходятся равномерно при любом фиксированном значении ζ.

Согласно свойствам преобразования, на регулярных участках волновода поперечное сечение области G отображается на поперечное сечение S_1 и S_2 соответственно. Поэтому имеют место разложения

$$\mathbf{e}^n(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(j)} \mathbf{E}_{mt}^{(j)}(M_j)|_{S_j}, \quad j=1, 2, \tag{6.22}$$

где $\mathbf{E}_{mt}^{(j)}$ — поперечные части нормальных волн регулярных участков волновода. Они имеют вид

$$\mathbf{E}_{mt}^{(j)} = \left(\mathbf{E}_{mt}^{(j)}\right)_\rho \mathbf{a}^1 + \rho\left(\mathbf{E}_{mt}^{(j)}\right)_\varphi \mathbf{a}^2. \tag{6.23}$$

При этом справедливы следующие соотношения:

$$P_m(z_1 \leqslant 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(1)} A_n(\zeta), \quad \zeta \leqslant \zeta_1(z_1); \tag{6.24}$$

$$T_m(z_2 \geqslant 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(2)} A_n(\zeta), \quad \zeta \geqslant \zeta_2(z_2). \tag{6.25}$$

Условия (6.5) и (6.6) можно записать в виде

$$\int_{S_1} [\mathbf{H}, \mathbf{e}^n]_n\, dS = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(1)*} \beta_m^{(1)} P_m + 2\alpha_{nn_0}^{(1)*} \beta_{m_0}^{(1)} B, \quad n=1, \ldots; \tag{6.26}$$

$$\int_{S_2} [\mathbf{H}, \mathbf{e}^n]_n\, dS = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(2)*} \beta_m^{(2)} T_m, \quad n=1, \ldots . \tag{6.27}$$

Построим приближенное решение исходной задачи. Как и в случае волновода с нерегулярным заполнением, для построения приближенного решения воспользуемся методом сведения граничной задачи для уравнений Максвелла к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичным методу Галеркина.

Приближенное решение задачи будем строить в ортогональной системе координат $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\zeta$. Определим векторы $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$:

$$\mathbf{E}_t^N = \sum_{n=1}^{N} A_n^N(\zeta)\,\mathbf{e}^n(\rho, \varphi); \tag{6.28}$$

$$\mathbf{H}_t^N = \sum_{n=1}^{N} B_n^N(\zeta)\,\mathbf{h}^n(\rho, \varphi). \tag{6.29}$$

Продольные части векторов $\mathbf{E}^N$ и $\mathbf{H}^N$ определим из соотношений

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E}_t^N)_\zeta = i\omega(\mu\mathbf{H}^N)_\zeta; \tag{6.30}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H}_t^N)_\zeta = -i\omega(\varepsilon\mathbf{E}^N)_\zeta. \tag{6.31}$$

Для нахождения коэффициентов $A^N{}_n$ и $B^N{}_n$ потребуем, чтобы при любом фиксированном значении ζ выполнялись интегральные соотношения

$$\int\limits_{\zeta=\mathrm{const}} \{\operatorname{rot}\mathbf{H}^N + i\omega\varepsilon\mathbf{E}^N\}_t \mathbf{e}^n \sqrt{g}\,dS = 0, \quad n = 1,\dots, N; \tag{6.32}$$

$$\int\limits_{\zeta=\mathrm{const}} \{\operatorname{rot}\mathbf{E}^N - i\omega\mu\mathbf{H}^N\}_t \mathbf{h}^n \sqrt{g}\,dS = 0, \quad n = 1,\dots, N,$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi, \tag{6.33}$$

а также соотношения

$$\int\limits_{S_1} [\mathbf{H}^N,\ \mathbf{e}^n]_n\, dS = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(1)*}\beta_m^{(1)} P_m^N + 2\alpha_{nm_0}^{(1)*}\beta_{m_0}^{(1)} B, \quad n = 1,\dots, N; \tag{6.34}$$

$$\int\limits_{S_2} [\mathbf{H}^N,\ \mathbf{e}^n]_n\, dS = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(2)*}\beta_m^{(1)} T_m^N, \quad n = 1,\dots, N, \tag{6.35}$$

где $P^N{}_m$, $T^N{}_m$ определяются коэффициентами разложения $A^N{}_n$ в сечениях S_1 и S_2 соответственно:

$$P_m^N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_{nm}^{(1)} A_n^N, \quad \zeta \leqslant \zeta_1, \tag{6.36}$$

$$T_m^N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_{nm}^{(2)} A_n^N, \quad \zeta \geqslant \zeta_2. \tag{6.37}$$

Функции $P^N{}_m$ и $T^N{}_m$ определяют разложение приближенных полей в регулярных полубесконечных областях.

Задача нахождения приближенного решения $\mathbf{E}^N$, $\mathbf{H}^N$ разрешима для любого N и имеет единственное решение.

Рассмотренная схема приближенного метода приводит к краевой задаче определения коэффициентов $A^N{}_n$ и $B^N{}_n$, разрешенной относительно старших производных. Это удобно для построения численных алгоритмов решения соответствующих краевых задач. Поэтому данная схема нашла широкое применение для решения задач теории нерегулярных волноводов с переменной боковой поверхностью. Этим методом исследованы как прямолинейные нерегулярные волноводы, так и изогнутые нерегулярные волноводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Е. Н., Марков Г. Т.* Математические методы прикладной электродинамики. — М.: Сов. радио, 1970.
2. *Васильев Е. Н.* Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987.
3. *Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З.* Основы теории дифракции. — М.: Наука, 1982.
4. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1989.
5. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987.
6. *Кисунько Г. В.* Электродинамика полых систем. — М.—Л.: Изд-во ВКАС, 1949.
7. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
8. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. — М.—Л.: ОГИЗ, 1948.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.

Учебное издание

Ильинский Анатолий Серафимович
Кравцов Владимир Владимирович
Свешников Алексей Георгиевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Зав. редакцией *Е. С. Гридасова.* Редактор *Ж. И. Яковлева.* Художник *А. И. Шавард.* Художественный редактор *В. И. Пономаренко.* Технический редактор *Л. А. Муравьева.* Корректор *Г. И. Кострикова*

ИБ № 9001

Изд. № ФМ-41. Сдано в набор 15.08.90. Подп. в печать 22.01.91. Формат 60×88$^1/_{16}$. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 13,72 усл. печ. л. 13,97 усл. кр.-отт. 11,87 уч.-изд. л. Тираж 4500 экз. Зак. № 557. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8 Государственного комитета СССР по печати, 101898, Москва, Хохловский пер., 7.