Н. В. БУТЕНИН, Я. Л. ЛУНЦ, Д. Р. МЕРКИН

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В ДВУХ ТОМАХ

Том первый

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Том второй

ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

РЕКОМЕНДОВАНО
Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям

Санкт-Петербург
1998

ББК 22.25
Б 93

Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин

Б 93 Курс теоретической механики. В двух томах / Оформление обложки С. Л. Шапиро, А. А. Олексенко. — СПб.: Издательство «Лань», 1998. — 736 с.

ISBN 5—8114—0052—7

Предлагаемый читателям «Курс теоретической механики» Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина, издававшийся в двух томах, объединен в один том. На этом курсе выросло не одно поколение инженеров самых различных специальностей — механиков, машиностроителей, энергомашиностроителей, гидростроителей и др. Весьма умеренный математический аппарат в сочетании со многими методическими достоинствами и превосходно подобранными иллюстративными примерами и задачами, взятыми из практики, делают этот Курс доступным для широкого круга студентов и полезным пособием для преподавателей теоретической механики. Содержание Курса шире существующих программ и поэтому его можно использовать для самостоятельной работы в студенческих научных кружках и при подготовке магистров.

ББК 22.25

***Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона будут
преследоваться в судебном порядке.***

© Издательство «Лань», 1998
© Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц,
Д. Р. Меркин, 1998
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 1998

ОГЛАВЛЕНИЕ

Том второй. ДИНАМИКА

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Издавая «Курс теоретической механики» Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина, Издательство «Лань» исходило из следующих соображений.

По сравнению с многочисленными традиционными курсами, предназначенными для технических вузов, в предлагаемой читателям книге в двух томах более подробно рассматриваются общие теоремы динамики системы, движение материальной точки в центральном силовом поле, динамика тела переменной массы, теория гироскопов, некоторые вопросы аналитической механики, а также теории линейных и нелинейных колебаний. Большое число подробно рассмотренных задач помогает усвоению теорий; некоторые задачи имеют самостоятельное значение.

Настоящее издание осталось в основном без изменений. Исключены графические методы определения усилий в стержнях фермы (диаграмма Максвелла — Кремоны), как утратившие с появлением ЭВМ свое значение. Пересмотрен весь текст, исправлены замеченные опечатки.

Коллектив авторов понес вторую тяжелую утрату — в 1995 году скончался доктор физико-математических наук, профессор Николай Васильевич Бутенин. Из трех авторов остался только Д. Р. Меркин, который и подготовил к печати новое издание этого «Курса теоретической механики».

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика — раздел физики, в котором изучается механическое движение материальных тел, т. е. изменение с течением времени положения их относительно друг друга. Так как состояние покоя есть частный случай механического движения, то в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел.

Движение материи происходит во времени и пространстве. За пространство, в котором происходит движение тел, принимают «обычное» евклидово трехмерное пространство. Для изучения движения вводят так называемую систему отсчета, понимая под ней совокупность тела отсчета (тела, относительно которого изучается движение других тел) и связанных с ним систем координатных осей и часов. В теоретической механике принимается, что время не зависит от движения тел и что оно одинаково во всех точках пространства и всех системах отсчета (абсолютное время), В связи с этим в теоретической механике, говоря о системе отсчета, можно ограничиться указанием только тела отсчета или системы координатных осей, связанных с этим телом.

Движение тела происходит в результате действия на движущееся тело сил, вызванных другими телами. При изучении механического движения и равновесия материальных тел знание природы сил не обязательно, достаточно знать только их величины. Поэтому в теоретической механике не изучают физическую природу сил, ограничиваясь только рассмотрением связи между силами и движением тел.

Теоретическая механика построена на законах И. Ньютона, справедливость которых проверена огромным количеством непосредственных наблюдений, опытной проверкой следствий (зачастую далеких и вовсе не очевидных) из этих законов, а также многовековой практической деятельностью человека. Законы Ньютона справедливы не во всех системах отсчета. В механике постулируется наличие хотя бы одной такой системы (инерциальная система отсчета). Многочислен-

ТОМ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА

И

КИНЕМАТИКА

ные опыты и измерения показывают, что с высокой степенью точности система отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными к далеким «неподвижным» звездам, является инерциальной системой отсчета (она называется гелиоцентрической или основной инерциальной системой отсчета).

В дальнейшем будет показано, что если имеется хотя бы одна инерциальная система отсчета, то их имеется бесчисленное множество (очень часто инерциальные системы отсчета называют неподвижными системами). Во многих задачах за инерциальную систему отсчета принимают систему, связанную с Землей. Ошибки, возникающие при этом, как правило, столь незначительны, что практического значения они не имеют. Но имеются задачи, в которых уже нельзя пренебречь вращением Земли. В этом случае за неподвижную систему отсчета следует принимать введенную гелиоцентрическую систему отсчета.

Теоретическая механика является естественной наукой, опирающейся на результаты опыта и наблюдений и использующей математический аппарат при анализе этих результатов. Как во всякой естественной науке, в основе механики лежит опыт, практика, наблюдение. Но наблюдая какое-нибудь явление, мы не можем сразу охватить его во всем многообразии. Поэтому перед исследователем возникает задача выделить в изучаемом явлении главное, определяющее, отвлекаясь (абстрагируясь) от того, что менее существенно, второстепенно.

В теоретической механике метод абстракции играет очень важную роль. Отвлекаясь при изучении механических движений материальных тел от всего частного, случайного, менее существенного, второстепенного и рассматривая только те свойства, которые в данной задаче являются определяющими, мы приходим к рассмотрению различных моделей материальных тел, представляющих ту или иную степень абстракции. Так, например, если отсутствует различие в движениях отдельных точек материального тела или в данной конкретной задаче это различие пренебрежимо мало, то размерами этого тела можно пренебречь, рассматривая его как материальную точку. Такая абстракция приводит к важному понятию теоретической механики — понятию материальной точки, которая отличается от геометрической точки тем, что имеет массу. Материальная точка обладает свойством инертности, как обладает этим свойством тело, и, наконец, она обладает той же способностью взаимодействовать с другими материальными телами, какую имеет тело. Так, например, планеты в их движении вокруг Солнца, космические аппараты в их движении относительно небесных тел можно рассматривать в первом приближении как материальные точки.

Другим примером абстрагирования от реальных тел является понятие абсолютно твердого тела. Под ним понимается тело, которое сохраняет свою геометрическую форму неизменной, независимо от действий других тел. Конечно, абсолютно твердых тел нет, так как в результате действия сил все материальные тела изменяют свою форму, т. е. деформируются, но во многих случаях деформацией тела можно пренебречь. Например, при расчете полета ракеты мы можем пренебречь небольшими колебаниями отдельных частей ее, так как эти колебания весьма мало скажутся на параметрах ее полета. Но при расчете ракеты на прочность учет этих колебаний обязателен, ибо они могут вызвать разрушение корпуса ракеты.

Принимая те или иные гипотезы, следует помнить о пределах их применимости, так как, забыв об этом, можно прийти к совершенно неверным выводам. Это происходит тогда, когда условия решаемой задачи уже не удовлетворяют сделанным предположениям и неучитываемые свойства становятся существенными. В курсе при постановке задачи мы всегда будем обращать внимание на те предположения, которые принимаются при рассмотрении данного вопроса.

В высших технических учебных заведениях теоретическая механика делится обычно на три раздела: статику, кинематику и динамику. Эта сложившаяся традиция нашла отражение и в настоящем курсе.

В статике изучаются методы преобразования одних совокупностей сил в другие, эквивалентные данным, выясняются условия равновесия, а также определяются возможные положения равновесия.

В кинематике движение тел рассматривается с чисто геометрической точки зрения, т. е. без учета силовых взаимодействий между телами.

В динамике движение тел изучается в связи с силовыми взаимодействиями между телами. Более подробные сведения о задачах статики, кинематики и динамики будут даны в соответствующих разделах курса.

СТАТИКА

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

§ 1.1. Сила. Система сил. Равновесие абсолютно твердого тела

Как уже отмечалось во введении, в теоретической механике изучается движение материальных тел относительно друг друга. Для этого требуется прежде всего построить модели объектов и дать определение понятий, с которыми имеет дело механика. В теоретической механике рассматривается простейшая модель «обычного» евклидова трехмерного пространства. Постулируется, что в этом пространстве существует хотя бы одна система координат, в которой справедливы законы Ньютона (*инерциальная система*). Многочисленные опыты и измерения показывают, что с высокой степенью точности система отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными к далеким «неподвижным» звездам, является инерциальной системой. В дальнейшем будет показано, что если существует хотя бы одна инерциальная система, то их имеется бесчисленное множество*) (инерциальные системы отсчета условно называются *неподвижными*).

В статике, не внося никаких погрешностей в вычисления, можно считать, что системы координат, жестко связанные с Землей, неподвижны**). Условия относительного равновесия в других, неинерциальных системах отсчета, в частности, в системах, движущихся относительно Земли, будут выяснены в динамике.

Как для статистики, так и для динамики одним из основных является понятие силы. Первичное представление о силе дают нам мускульные ощущения. В *механике под силой понимается мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться* (изменять свою форму). Из этого определения сразу вытекают два способа измерения сил: первый, динамический способ, основан на измерении ускорения тела в инерциальной системе от-

*) Более подробно о моделях пространства и инерциальных системах отсчета будет рассказано в разделе «Динамика» (см. том II, § 1.2). Здесь же предполагается, что читатель знаком с законами Ньютона в объеме школьного курса физики.

**) Это объясняется тем, что сила тяжести имеет сложный характер, учитывающий вращение Земли (см. том II, § 6.3).

счета, а второй, статический способ, основан на измерении деформации упругих тел.

В механике не изучают физическую природу сил. Укажем только, что силы могут возникать как при непосредственном контакте тел (например, сила тяги электровоза, передаваемая вагонам, сила трения между поверхностями соприкасающихся тел и т. п.), так и на расстоянии (например, силы притяжения небесных тел, силы взаимодействия электрически заряженных или намагниченных частиц и т. п.).

Сила является векторной величиной — она характеризуется численным значением, или модулем, точкой приложения и направлением. Точка приложения силы и ее направление определяют линию действия силы. На рис. 1.1 показана сила **F**, приложенная в точке A, длина отрезка AB в соответствующем масштабе равна модулю силы, точка B называется концом силы; у конца силы ставится стрелка, указывающая направление действия силы. Прямая LM называется *линией действия силы*. Условимся обозначать силу буквой жирного шрифта, например, **F**, а ее модуль — той же буквой обычного шрифта, т. е. F.

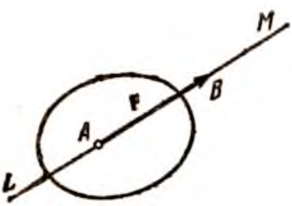


Рис. 1.1

Для измерения модуля силы ее сравнивают с некоторой силой, выбранной в качестве единицы. В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) за единицу силы принят ньютон (Н), а в технической системе единиц (система МКГСС) — килограмм-сила (кгс); ее не следует смешивать с единицей массы в системе СИ — кг. Напомним, что эти единицы связаны соотношениями

$$1 \text{ кгс} \approx 9{,}81 \text{ Н}; \quad 1 \text{ Н} \approx 0{,}102 \text{ кгс}.$$

Применяются и более крупные единицы измерения сил, в частности, 1 МН $= 10^6$ Н (меганьютон), 1 кН $= 10^3$ Н (килоньютон), 1 тс $= 10^3$ кгс (тонна-сила) и т. п.

Силу часто задают непосредственным описанием, например: к концу балки приложена сила **F**, численно равная 5 кН и направленная вертикально вниз. Но можно задать силу и способом, которым обычно определяют векторы, а именно, через ее проекции на оси прямоугольной системы координат и точку приложения силы. Если, как обычно, единичные векторы (орты) осей x, y, z обозначить через **i**, **j**, **k** (рис. 1.2), то сила **F** определится точкой приложения и равенством

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, \tag{1.1}$$

где F_x, F_y, F_z — проекции силы **F** на соответствующие координатные оси *).

*) Здесь и в дальнейшем нижними индексами x, y, z отмечаются проекции вектора на соответствующие координатные оси.

Рассматривая действие сил на материальные тела, мы будем отвлекаться не только от физической природы сил, но и от многих свойств самих тел. Так, реальные твердые тела обычно мало изменяют свою форму под действием приложенных к ним сил. Поэтому для решения многих задач механики допустимо вовсе пренебречь малыми деформациями (т. е. малыми изменениями формы) и пользоваться моделью *абсолютно твердого тела, понимая под ним тело, в котором расстояния между двумя любыми точками его остаются неизменными независимо от действия тех или иных сил* *). Для краткости мы будем часто пользоваться выражением «твердое тело» или даже просто «тело», имея в виду только что введенное понятие абсолютно твердого тела.

Совокупность нескольких сил ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$) называется системой сил. *Если, не нарушая состояния тела, одну систему сил* ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$) *можно заменить другой системой* ($\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k$) *и наоборот, то такие системы сил называются эквивалентными.* Символически это обозначается следующим образом:

$$(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim (\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k). \qquad (1.2)$$

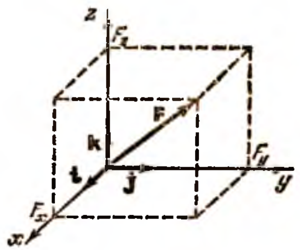


Рис. 1.2

Введенное понятие эквивалентности систем сил не устанавливает условий, при выполнении которых две системы сил будут эквивалентны. Оно означает только, что эквивалентные системы сил вызывают одинаковое состояние тела (одинаковые ускорения).

В том случае, когда система сил ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$) *эквивалентна одной силе* $\mathbf{R}$, *т. е.*

$$(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim \mathbf{R}, \qquad (1.3)$$

последняя называется равнодействующей данной системы сил. Это означает, что одна равнодействующая сила может заменить действие всех данных сил. В дальнейшем будет показано, что не всякая система сил имеет равнодействующую.

Как уже отмечалось, *в инерциальной системе координат выполняется закон инерции.* Это означает, в частности, что *тело, находящееся в начальный момент в покое, останется пребывать в этом состоянии, если на него не действуют никакие силы.* (Полная формулировка закона инерции будет дана в разделе динамики.) *Если абсолютно твердое тело остается в состоянии покоя при действии на*

*) Кроме простейшей модели абсолютно твердого тела в механике применяются другие модели твердых, жидких и газообразных тел. Так, например, имеются модели упругих и пластических тел, модели идеальной и вязкой жидкости и т. п. Эти модели изучаются в других разделах механики — в теории упругости, в механике жидкостей и газов и т. п. Конечно, все модели тел представляют лишь приближение к реальным телам, и ими можно пользоваться только в рамках сделанных предположений.

него системы сил (F_1, ..., F_n), *то последняя называется уравновешенной системой сил, или системой сил, эквивалентной нулю:*

$$(F_1, \ldots, F_n) \sim 0. \tag{1.4}$$

Часто в этом случае говорят, что *тело находится в равновесии* *).

В заключение этого параграфа обратим внимание на *различие между понятием эквивалентности сил и понятием равенства векторов, изображающих эти силы.* В математике два вектора считаются равными, если они параллельны, направлены в одну сторону и равны по модулю. Для эквивалентности двух сил этого недостаточно и из равенства $F = P$ еще не следует соотношение $F \sim P$. Из сделанных определений вытекает, что в общем случае две силы эквивалентны, если они геометрически (векторно) равны и приложены к одной точке тел . На рис. 1.3 показаны две геометрически равные, но не эквивалентные силы. В этом проявляется различие между свободными векторами, рассматриваемыми в математике, и силами.

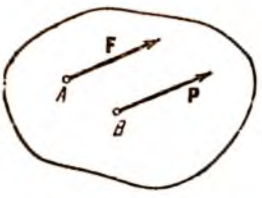


Рис. 1.3

§ 1.2. Аксиомы статики и их следствия

В аксиомах статики формулируются те простейшие и общие законы, которым подчиняются силы, действующие на одно и то же тело, или силы, приложенные к взаимодействующим телам. Эти законы установлены многочисленными непосредственными наблюдениями, а также опытной проверкой следствий (часто далеких и вовсе не очевидных), логически вытекающих из этих аксиом.

Как следует из второго закона Ньютона, тело под действием одной силы приобретает ускорение и, следовательно, оно не может находиться в покое. Это означает, что одна сила не может составлять уравновешенную систему сил. Первая аксиома устанавливает условия, при выполнении которых простейшая система сил будет уравновешена.

Аксиома 1. *Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены (эквивалентны нулю) тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.*

Это означает, что если абсолютно твердое тело находится в покое под действием двух сил, то эти силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Обратно, если на абсолютно твердое тело действуют по одной прямой в про-

*) Отметим, что введенное определение уравновешенных сил, приложенных к абсолютно твердому телу, не может быть распространено на силы, приложенные к деформируемым телам.

тивоположные стороны две равные по модулю силы и тело в начальный момент находилось в покое, то состояние покоя тела сохранится.

На рис. 1.4 показаны уравновешенные силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, удовлетворяющие соотношениям: $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim 0$, $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim 0$.

При решении некоторых задач статики приходится рассматривать силы, приложенные к концам жестких стержней, весом которых

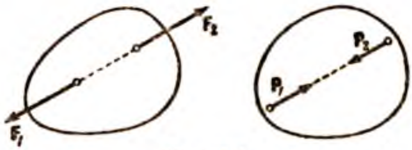


Рис. 1.4

можно пренебречь, причем известно, что стержни находятся в равновесии. Из сформулированной аксиомы непосредственно следует, что действующие на такой стержень силы направлены вдоль прямой, проходящей через концы стержня, противоположны по направлению и равны друг другу по модулю (рис. 1.5, *а*). Этот вывод сохраняется и в случае, когда ось стержня криволинейная (рис. 1.5, *б*).

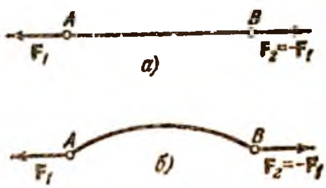


Рис. 1.5

Первая аксиома устанавливает необходимые и достаточные условия уравновешивания только двух сил, но, конечно, уравновешенная система сил может состоять и из большего числа сил.

Две следующие аксиомы устанавливают простейшие действия с силами, при которых состояние тела не изменяется.

Аксиома 2. *Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, к нему можно прикладывать или отбрасывать силы тогда и только тогда, когда они составляют уравновешенную систему, в частности, если эта система состоит из двух сил, равных по модулю, действующих по одной прямой и направленных в противоположные стороны.*

Рис. 1.6

Из этой аксиомы вытекает следствие: *не нарушая состояния тела, точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.*

Действительно, пусть сила $\mathbf{F}_A$ приложена к точке A (рис. 1.6, *а*). Приложим в точке B на линии действия силы $\mathbf{F}_A$ две уравновешенные силы $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}'_B$, полагая, что $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A$ (рис. 1.6, *б*). Тогда согласно аксиоме 2 будем иметь

$$\mathbf{F}_A \sim (\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B).$$

Так как силы $\mathbf{F}_A$ и $\mathbf{F}'_B$ образуют также уравновешенную систему сил (аксиома 1), то согласно аксиоме 2 их можно отбросить (рис. 1.6, *в*). Таким образом,

$$\mathbf{F}_A \sim (\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B) \sim \mathbf{F}_B, \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_A \sim \mathbf{F}_B,$$

что доказывает следствие.

Это следствие показывает, что *сила, приложенная к абсолютно твердому телу, представляет собой скользящий вектор.*

Рис. 1.7

Обе аксиомы и доказанное следствие нельзя применять к деформируемым телам, в частности, перенос точки приложения силы вдоль линии ее действия меняет напряженно-деформированное состояние тела.

Аксиома 3. *Не меняя состояния тела, две силы, приложенные к одной его точке, можно заменить одной равнодействующей силой, приложенной в той же точке и равной их геометрической сумме (аксиома параллелограмма сил).*

Эта аксиома устанавливает два обстоятельства: первое — две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 1.7), приложенные к одной точке, имеют равнодействующую, т. е. эквивалентны одной силе

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim \mathbf{R};$$

второе — аксиома полностью определяет модуль, точку приложения и направление равнодействующей силы

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \tag{1.5}$$

Другими словами, равнодействующую $\mathbf{R}$ можно построить как диагональ параллелограмма со сторонами, совпадающими с $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

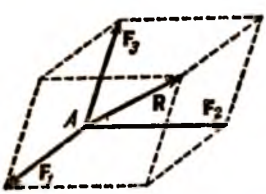


Рис. 1.8

Модуль равнодействующей определится равенством

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α—угол между данными векторами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

Отметим, что третья аксиома применима к любым, не обязательно абсолютно твердым телам.

Вторая и третья аксиомы статики дают возможность переходить от одной системы сил к другой системе, ей эквивалентной. В частности, они позволяют разложить любую силу $\mathbf{R}$ на две, три и т. д. составляющие, т. е. перейти к другой системе сил, для которой сила $\mathbf{R}$ является равнодействующей. Задавая, например, два направления, которые лежат с $\mathbf{R}$ в одной плоскости, можно построить параллелограмм, у которого диагональ изображает силу $\mathbf{R}$. Тогда силы, направленные по сторонам параллелограмма, составят систему, для которой сила $\mathbf{R}$ будет равнодействующей (рис. 1.7). Аналогичное построение можно провести и в пространстве. Для этого достаточно из точки приложения силы **R** провести три прямые, не лежащие в одной плоскости, и построить на них параллелепипед с диагональю, изображающей силу **R**, и с ребрами, направленными по этим прямым (рис. 1.8).

Аксиома 4 (3-й закон Ньютона). *Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.*

Заметим, что силы взаимодействия двух тел не составляют систему уравновешенных сил, так как они приложены к разным телам.

Если тело *I* действует на тело *II* с силой **P**, а тело *II* действует на тело *I* с силой **F** (рис. 1.9), то эти силы равны по модулю ($F = P$) и направлены по одной прямой в противоположные стороны, т. е. **F** = — **P**.

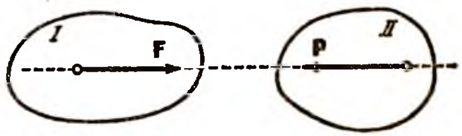


Рис. 1.9

Если обозначить через **F** силу, с которой Солнце притягивает Землю, то Земля притягивает Солнце с такой же по модулю, но противоположно направленной силой — **F**.

При движении тела по плоскости к нему будет приложена сила трения **T**, направленная в сторону, противоположную движению. Это — сила, с которой неподвижная плоскость действует на тело. На основании четвертой аксиомы тело действует на плоскость с такой же силой, но ее направление будет противоположно силе **T**. На рис. 1.10 показано тело, движущееся вправо; сила трения **T** приложена к движущемуся телу, а сила **T**′ = —**T** — к плоскости.

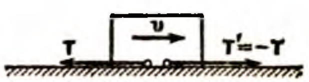


Рис. 1.10

Рассмотрим еще покоящуюся систему, изображенную на рис. 1.11, *а*. Она состоит из двигателя *A*, установленного на фундаменте *B*, который в свою очередь находится на основании *C*. На двигатель и фундамент действуют силы тяжести $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соответственно (они представляют собой действие Земли на эти тела). Кроме указанных двух сил, действуют также следующие силы:

$\mathbf{F}_3$ — сила действия тела *A* на тело *B* (она равна весу тела *A*);

$\mathbf{F}_3'$ — сила обратного действия тела *B* на тело *A*;

$\mathbf{F}_4$ — сила действия тел *A* и *B* на основание *C* (она равна суммарному весу тел *A* и *B*);

$\mathbf{F}_4'$ — сила обратного действия основания *C* на тело *B*. Эти силы показаны на рис. 1.11, *б*, *в*, *г*.

Согласно аксиоме 4

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_3', \quad \mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_4',$$

причем эти силы взаимодействия определяются заданными силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

Для нахождения сил взаимодействия необходимо исходить из аксиомы 1. Вследствие покоя тела A (рис. 1.11, *б*) должно быть

$$\mathbf{F}_3' = -\mathbf{F}_1,$$

а значит, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$.

Точно так же из условия равновесия тела B (рис. 1.11, *в*) следует

$$\mathbf{F}_4' = -(\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3),$$

т. е.

$$\mathbf{F}_4' = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

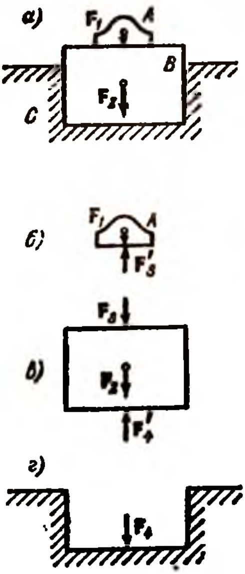


Рис. 1.11

Аксиома 5. *Равновесие деформируемого тела не нарушится, если жестко связать его точки и считать тело абсолютно твердым.*

Этой аксиомой (ее называют иногда *принципом отвердевания*) пользуются в тех случаях, когда речь идет о равновесии тел, которые нельзя считать твердыми. Приложенные к таким телам внешние силы должны удовлетворять условиям равновесия твердого тела, однако для нетвердых тел эти условия являются лишь необходимыми, но не достаточными. Проиллюстрируем это положение простым примером. На стр. 19 было показано, что для равновесия абсолютно твердого невесомого стержня необходимо и достаточно, чтобы приложенные к концам стержня силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ действовали по прямой, соединяющей его концы, были равны по модулю и направлены в разные стороны. Эти же условия необходимы и для равновесия отрезка невесомой нити, но для нити они недостаточны — необходимо дополнительно потребовать, чтобы силы, действующие на нить, были растягивающими (рис. 1.12, *б*), в то время как для стержня они могут быть и сжимающими (рис. 1.12, *а*).

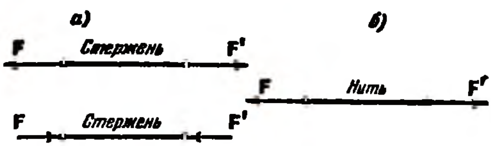


Рис. 1.12

В заключение этого параграфа рассмотрим случай эквивалентности нулю трех непараллельных сил, приложенных к твердому телу (рис. 1.13, *а*).

Теорема о трех непараллельных силах. *Если под действием трех сил тело находится в равновесии и линии действия двух сил* *пересекаются, то все силы лежат в одной плоскости, и их линии действия пересекаются в одной точке.*

Пусть на тело действует система трех сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$, причем линии действия сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ пересекаются в точке A (рис. 1.13, *а*). Согласно следствию из аксиомы 2 силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ можно перенести в точку A (рис. 1.13, *б*), а по аксиоме 3 их можно заменить одной силой $\mathbf{R}$, причем (рис. 1.13, *в*)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

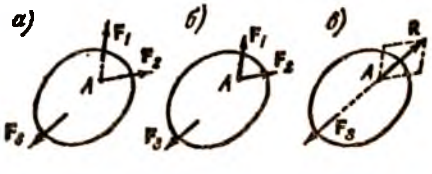


Рис. 1.13

Таким образом, рассматриваемая система сил приведена к двум силам $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}_3$ (рис. 1.13, *в*). По условиям теоремы тело находится в равновесии, следовательно, по аксиоме 1 силы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}_3$ должны иметь общую линию действия, но тогда линии действия всех трех сил должны пересекаться в одной точке.

§ 1.3. Активные силы и реакции связей

Условимся называть тело *свободным*, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называется *несвободным*, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, — *связями*. Как уже упоминалось, в точках контакта возникают силы взаимодействия между данным телом и связями. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются *реакциями связей*. При перечислении всех сил, действующих на данное тело, необходимо, разумеется, учитывать и эти контактные силы (реакции связей).

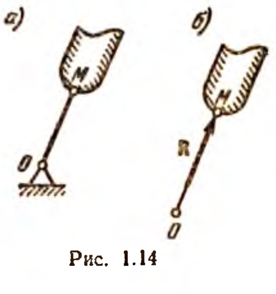


Рис. 1.14

В механике принимают следующее положение, называемое иногда *принципом освобождаемости*: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить реакциями их, приложенными к данному телу.*

В статике полностью определить реакции связей можно с помощью условий или уравнений равновесия тела, которые будут установлены в дальнейшем, но направления их во многих случаях можно определить из рассмотрения свойств связей.

В качестве простейшего примера на рис. 1.14, *а* представлено тело, точка M которого соединена с неподвижной точкой O при помощи стержня, весом которого можно пренебречь; концы стержня имеют шарниры, допускающие свободу вращения. В данном случае для тела связью служит стержень OM; стеснение свободы перемещения точки M выражается в том, что она вынуждена находиться на неизменном удалении от точки O. Но, как мы видели выше (см. рис. 1.5, *б*), сила действия на такой стержень должна быть направлена по прямой OM, и согласно аксиоме 4 сила противодействия стержня (реакция) $\mathbf{R}$ должна быть направлена вдоль той же прямой. Таким образом, направление реакции стержня совпадает с прямой OM (рис. 1.14, *б*). (В случае криволинейного невесомого стержня — по прямой, соединяющей концы стержня; см. рис. 1.5, *б*.)

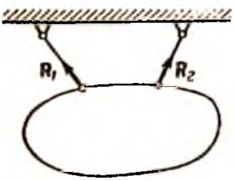


Рис. 1.15

Аналогично сила реакции гибкой нерастяжимой нити должна быть направлена вдоль нити. На рис. 1.15 показано тело, висящее на двух нитях, и реакции нитей $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.

Возвращаясь к общему случаю, отметим, что силы, действующие на несвободное тело (или на несвободную материальную точку), можно разделить на две категории. Одну категорию образуют силы, не зависящие от связей, а другую категорию — реакции связей. При этом реакции связей, в сущности, носят пассивный характер — они возникают лишь постольку, поскольку на тело действуют те или иные силы первой категории. Поэтому силы, не зависящие от связей, называют *активными* силами (иногда они называются *заданными*), а реакции связей — *пассивными* силами.

На рис. 1.16, *а* вверху показаны две равные по модулю активные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, растягивающие стержень AB, внизу показаны реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ растянутого стержня. На рис. 1.16, *б* вверху показаны

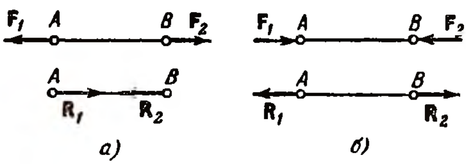


Рис. 1.16

активные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, сжимающие стержень, внизу показаны реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ сжатого стержня.

Рассмотрим еще некоторые типичные виды связей и укажем возможные направления их реакций; конечно, модули реакций определяются активными силами и не могут быть найдены, пока последние не заданы определенным образом. При этом мы будем пользоваться некоторыми упрощенными представлениями, схематизирующими действительные свойства реальных связей.

1. Если твердое тело опирается на идеально гладкую (без трения) поверхность, то точка контакта тела с поверхностью может свободно скользить вдоль поверхности, но не может перемещаться в направлении вдоль нормали к поверхности. *Реакция идеально*

гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям (рис. 1.17, *а*).

Если твердое тело имеет гладкую поверхность и опирается на острие (рис. 1.17, *б*), то реакция *направлена по нормали к поверхности самого тела.*

Если твердое тело упирается острием в угол (рис. 1.17, *в*), то связь препятствует перемещению острия как по горизонтали, так

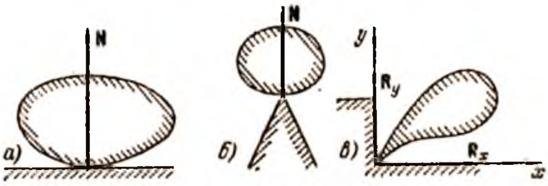


Рис. 1.17

и по вертикали. Соответственно реакция **R** угла может быть представлена двумя составляющими — горизонтальной $\mathbf{R}_x$ и вертикальной $\mathbf{R}_y$, величины и направления которых в конечном счете определяются заданными силами.

2. *Сферическим шарниром* называется устройство, изображенное на рис. 1.18, *а*, которое делает неподвижной точку *O* рассматриваемого тела. Если сферическая поверхность контакта идеально гладкая, то реакция сферического шарнира имеет направление нормали

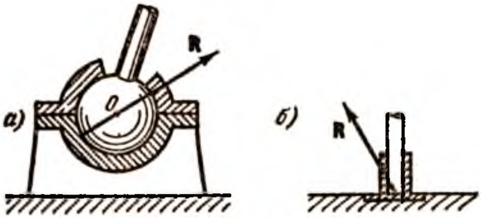


Рис. 1.18

к этой поверхности. Поэтому единственное, что известно относительно реакции, — это то, что она проходит через центр шарнира *O*; направление реакции может быть любым и определяется в каждом конкретном случае в зависимости от заданных сил и общей схемы закрепления тела. Точно так же нельзя заранее определить направление реакции *подпятника*, изображенного на рис. 1.18, *б*.

3. *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора* (рис. 1.19, *а*). Реакция такой опоры проходит через ее ось, причем направление реакции может быть любым (в плоскости, перпендикулярной оси опоры).

4. *Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора* (рис. 1.19, *б*) препятствует перемещению закрепленной точки тела по перпен-

дикуляру к плоскости $I—I$; соответственно реакция такой опоры также имеет направление этого перпендикуляра.

Рис. 1.19

На одно и то же тело может быть наложено одновременно несколько связей, возможно, различного типа. Три примера такого рода представлены на рис. 1.20, *а*. На рис. 1.20, *б* изображены соответствующие системы сил; здесь, в соответствии с принципом освобождаемости, связи отброшены и заменены реакциями. Реакции стержней направлены вдоль стержней (левая схема); при этом предполагается, что стержни невесомы и соединены с телом и опорами с помощью шарниров. Реакции идеально гладких опорных поверхностей направлены по нормали к этим поверхностям (средняя и правая схемы). Кроме того, реакция

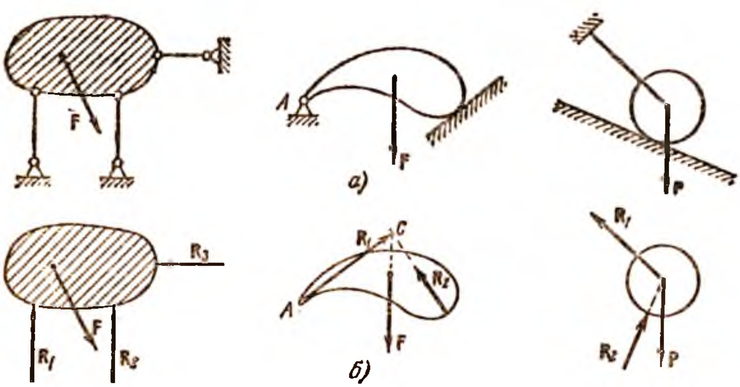


Рис. 1.20

цилиндрического шарнира в точке A (средняя схема) должна на основании теоремы о трех непараллельных силах проходить через точку пересечения линий действия сил **F** и $\mathbf{R}_2$ — точку *C*. Реакция $\mathbf{R}_1$ идеально гибкой нерастяжимой и невесомой нити направлена вдоль нити (правая схема).

В механических системах, образованных путем сочленения нескольких твердых тел, наряду с внешними связями (опорами) имеются *внутренние связи*. В этих случаях иногда мысленно расчленяют систему и заменяют отброшенные не только внешние, но и внутренние связи соответствующими реакциями. Один пример такого рода, в котором два тела соединены шарниром *C*, представлен на рис. 1.21. Отметим, что силы $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$ равны друг другу по модулю, но противоположно направлены (по аксиоме 4).

В заключении этого параграфа заметим, что силы взаимодействия между отдельными точками данного тела называются *вну-*

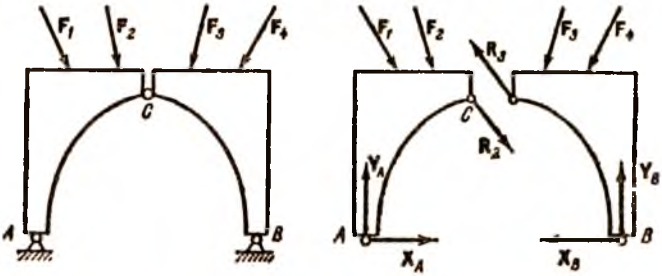


Рис. 1.21

тренними, а силы, действующие на данное тело и вызванные другими телами, называются *внешними*. Из этого следует, что реакции связей являются для данного тела внешними силами.

§ 1.4. Основные задачи статики

Содержание статики абсолютно твердого тела составляют две основные задачи:

1. Задача о приведении системы сил: как данную систему сил заменить другой, в частности наиболее простой, ей эквивалентной?

2. Задача о равновесии: каким условиям должна удовлетворять система сил, приложенная к данному телу (или материальной точке), чтобы она была уравновешенной системой?

Первая основная задача имеет важное значение не только в статике, но и в динамике.

Вторая задача часто ставится в тех случаях, когда равновесие заведомо имеет место, например, когда заранее известно, что тело находится в равновесии, которое обеспечивается связями, наложенными на тело. При этом условия равновесия устанавливают зависимость между всеми силами, приложенными к телу; во многих случаях с помощью этих условий удается определить опорные реакции. Хотя этим не ограничивается сфера интересов статики твердого тела, но нужно иметь в виду, что определение реакций связей (внешних и внутренних) необходимо для последующего расчета прочности конструкции.

В более общем случае, когда рассматривается система тел, имеющих возможность перемещаться друг относительно друга, одной из основных задач статики является задача определения возможных положений равновесия. Эти вопросы рассматриваются в аналитической статике (см. том II, глава XVIII).

Глава II

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 2.1. Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке. Простейший случай трех сил был рассмотрен в главе I. Здесь рассматривается общий случай произвольного числа сил, образующих систему.

Существует немало практических задач, которые требуют исследования систем сходящихся сил; в частности, они возникают при расчетах шарнирно-стержневых систем (ферм), о чем будет сказано в § 5.8. Кроме того, изучение системы сходящихся сил необходимо для дальнейших обобщений, относящихся к произвольной пространственной системе сил.

Прежде всего докажем теорему:

Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Пусть задана система сходящихся сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_n$, приложенных к абсолютно твердому телу (рис. 2.1, *а*). Согласно следствию из аксиомы 1 перенесем точки приложения сил по линиям

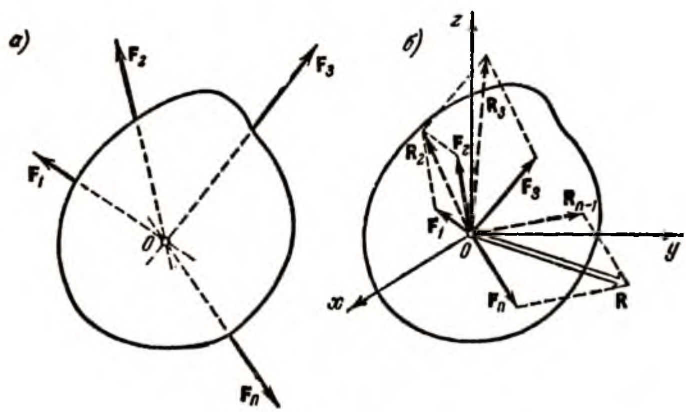


Рис. 2.1

их действия в точку пересечения этих линий (рис. 2.1, *б*). Таким образом, мы получаем систему сил, приложенных в одной точке. Она эквивалентна исходной системе сходящихся сил. Складывая теперь силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, на основании аксиомы 3 получим их равнодействующую:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Индекс в обозначении равнодействующей соответствует номеру добавляемой силы $\mathbf{F}_2$. Затем, сложив силу $\mathbf{R}_2$ с силой $\mathbf{F}_3$, найдем

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3.$$

Сила $\mathbf{R}_3$ является равнодействующей трех сил, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, и равна их сумме. Дойдя, таким образом, до последней силы $\mathbf{F}_n$, получим равнодействующую $\mathbf{R}$ всей системы n данных сил *)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i. \tag{2.1}$$

Этим соотношением и доказывается справедливость сформулированной теоремы.

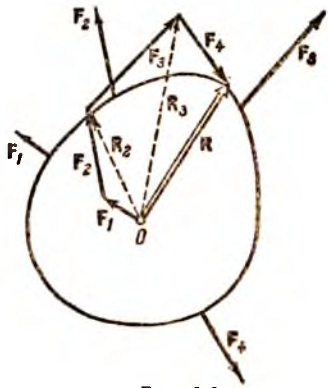


Рис. 2.2

Построение равнодействующей может быть упрощено, если вместо параллелограммов построить силовой многоугольник. Пусть, например, система состоит из четырех сил (рис. 2.2). Если от конца вектора $\mathbf{F}_1$ отложить вектор $\mathbf{F}_2$, то вектор, соединяющий начало O и конец вектора $\mathbf{F}_2$, будет вектором $\mathbf{R}_2$. Далее отложим вектор $\mathbf{F}_3$, помещая его начало в конце вектора $\mathbf{F}_2$. Тогда мы получим вектор $\mathbf{R}_3$, идущий от точки O к концу вектора $\mathbf{F}_3$. Наконец, точно так же добавим вектор $\mathbf{F}_4$; при этом получим, что вектор, идущий от начала первого вектора $\mathbf{F}_1$ к концу вектора $\mathbf{F}_4$, является равнодействующей $\mathbf{R}$ **).

Пространственный многоугольник, который получен указанным образом, называется *силовым многоугольником.*

На рис. 2.2 показан *разомкнутый* силовой многоугольник (конец последней силы не совпадает с началом первой силы); равнодействующая $\mathbf{R}$ направлена по замыкающей силового многоугольника. Конечно, при практическом построении силового многоугольника промежуточные равнодействующие $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ и т. д. строить не нужно.

Если для нахождения равнодействующей при помощи силового многоугольника используются правила геометрии или тригонометрии, то такой способ нахождения равнодействующей называется *геометрическим способом.*

---

*) Построенные таким образом параллелограммы лежат в общем случае в разных плоскостях.

**) Понятно, что при изменении порядка сложения сил равнодействующая не изменится.

В случае плоской системы сил можно воспользоваться плоским чертежом, откладывая силы в некотором масштабе; равнодействующая определяется непосредственным измерением по чертежу. Такой способ ее нахождения называется *графическим.*

Наиболее общим способом определения модуля и направления равнодействующей является *аналитический способ*, который также вытекает из основного соотношения (2.1). Поместим, например, начало прямоугольной системы координат в точку пересечения линий действия сил (см. рис. 2.1); тогда, пользуясь теоремой (она доказывается в курсе векторной алгебры), согласно которой проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций на ту же ось слагаемых векторов, получим

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx},\\
R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny},\\
R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проекции силы $\mathbf{F}_k$ на указанные оси, а R_x, R_y и R_z — проекции равнодействующей на те же оси.

Итак, *проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.*

С помощью выражений (2.2) можно найти модуль равнодействующей и ее направление в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Так как составляющие равнодействующей $\mathbf{R}$ системы сил

$$\mathbf{R}_x = R_x\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_y = R_y\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_z = R_z\mathbf{k} \tag{2.3}$$

взаимно перпендикулярны (рис. 2.1), то модуль равнодействующей равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}. \tag{2.4}$$

Направляющие косинусы равнодействующей соответственно равны

$$\cos(x, \mathbf{R}) = R_x/R, \quad \cos(y, \mathbf{R}) = R_y/R, \quad \cos(z, \mathbf{R}) = R_z/R. \tag{2.5}$$

В частном случае, когда все силы расположены в одной плоскости, удобно выбрать систему координат Oxy в плоскости расположения сил. Тогда проекции всех сил на ось z равны нулю, и вместо формул (2.2), (2.4) и (2.5) будем иметь

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx},$$
$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}; \tag{2.6}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}, \tag{2.7}$$

$$\cos(x, \mathbf{R}) = R_x/R, \quad \cos(y, \mathbf{R}) = R_y/R. \tag{2.8}$$

§ 2.2. Условия равновесия системы сходящихся сил

При приведении системы сходящихся сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$) было показано, что такая система эквивалентна одной равнодействующей силе

$$(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n) \sim \mathbf{R}.$$

Отсюда следует, что для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая их равнялась нулю:

$$\mathbf{R} = 0. \tag{2.9}$$

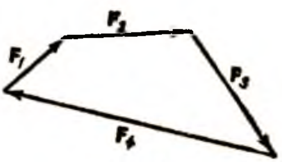


Рис. 2.3

Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что *силовой многоугольник замкнут* (рис. 2.3). Это условие удобно использовать при графическом решении задач для плоских систем сил.

Векторное равенство (2.9) эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$R_x = 0, \ R_y = 0, \ R_z = 0. \tag{2.10}$$

Принимая во внимание равенства (2.2), получаем аналитические условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \tag{2.11}$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0,$$

т. е. *для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.*

Для частного случая плоскостей системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости xy, третье условие (2.10) отпадает (т. е. обращается в тождество).

Очевидно, что условия равновесия (как в аналитической, так и в геометрической форме) позволяют проконтролировать, находится ли в равновесии заданная система сил.

Однако еще большее практическое значение имеет другая возможность использования этих условий. Часто заведомо известно, что вследствие наложенных связей тело находится в равновесии, причем мы знаем только часть действующих сил, а именно, активные силы; при этом опорные реакции известны лишь отчасти (например, известны их направления). Тогда с помощью условий равновесия можно найти остальные неизвестные, определяющие реакции связей. Условия равновесия, в которые входят неизвестные, будут уже служить уравнениями для определения этих неизвестных. Конечно, определение неизвестных возможно лишь в тех случаях, когда число неизвестных составляющих реакций не больше числа уравнений равновесия. Для определенности решения пространственной задачи на равновесие системы сходящихся сил она должна содержать не более трех неизвестных (соответственно трем уравнениям равновесия), а для плоской задачи — не более двух. Если неизвестных реакций больше, чем уравнений равновесия, в которые эти реакции входят, то задача не может быть решена только методами статики твердого тела (*статически неопределенная задача*) *). Соответствующая система называется *статически неопределимой.*

Хотя выбор направления координатных осей, на которые проектируются силы, не имеет принципиального значения, однако при решении задач для получения более простых уравнений равновесия рационально иногда направлять координатные оси перпендикулярно неизвестным силам; при этом некоторые уравнения равновесия содержат меньшее число неизвестных, чем их имеется в задаче.

§ 2.3. Задачи **)

Задача 2.1. Кран состоит из стрелы AC, блоков B, троса ABD и мотора D. К концу A стрелы подвешен груз, вес которого равен P. С помощью мотора D и троса стрелу можно установить под любым углом φ (рис. 2.4, *а*). Пренебрегая весом троса и стрелы, а также размерами блоков B, определить натяжение троса $\mathbf{T}$ и усилие $\mathbf{S}$ в стреле, если известно расстояние $BC = a$ и длина стрелы l. Вычислить найденные величины при $a = 1,5$ м, $l = 4$ м, $\varphi = 60°$, $P = 60$ кН.

---

*) Методы решения статически неопределенных задач выходят за рамки теоретической механики и относятся к курсу сопротивления материалов и строительной механики.

**) В книге принята двойная нумерация задач: первое число означает номер главы, второе — номер задачи в этой главе.

Рассмотрим равновесие стрелы AC. В точке A к ней приложена активная сила **P** (сила тяжести груза). В той же точке к ней приложена реакция **T** троса BA, направленная от A к B, а в точке C к стреле приложена реакция **S** опоры C, направленная вдоль стрелы. Мысленно освободимся от связей и заменим их реакциями (рис. 2.4, *б*). Так как все три силы, **P**, **T** и **S**, приложенные к стреле, уравновешены и пересекаются в одной точке A, то силовой треугольник должен быть замкнут.

Построение замкнутого треугольника сил следует начинать с известной силы **P**. Из ее конца проводится направление силы **S** (или **T**), а из начала силы **P** проводится прямая, параллельная силе **T** (или **S**). Точка пересечения этих прямых определяет силы **S** и **T** (рис. 2.4, *в*).

При отбрасывании связей было заранее предположено, что стрела (стержень) AB сжата и поэтому реакция опоры C была направлена от C к A. В данном примере это очевидно; в других, более сложных, случаях состояние стержня (растягивается он или сжимается) определяется решением задачи.

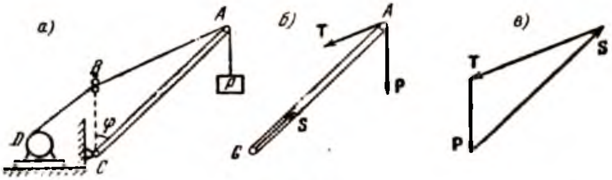


Рис. 2.4

Треугольник сил **PST** подобен треугольнику ABC, образованному элементами крана (так как соответствующие стороны параллельны). Поэтому

$$\frac{S}{AC}=\frac{T}{AB}=\frac{P}{BC}.$$

Отсюда

$$S=\frac{AC}{BC}P, \qquad T=\frac{AB}{BC}P.$$

По условию задачи $AC=l$, $BC=a$. Пользуясь теоремой косинусов, из треугольника ABC найдем

$$AB=\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\varphi}.$$

Внося значения для AC, BC и AB в S и T, получим

$$S=\frac{l}{a}P, \quad T=\frac{\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\varphi}}{a}P.$$

При заданных значениях будем иметь

$$S=160 \text{ кН}, \quad T=140 \text{ кН}.$$

В заключение этого примера отметим, что при хорошем выполнении чертежа (строгое соблюдение масштабов и параллельности линий) приближенные значения усилия **S** и натяжения **T** можно определить без всяких вычислений простым измерением длин сторон силового треугольника. Недостаток графического метода состоит в том, что он не позволяет провести анализ полученного решения, так как численные значения искомых величин отвечают одному фиксированному положению механизма.

Задача 2.2. Шар веса P и радиуса r удерживается нитью AB длины l на неподвижной гладкой цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 2.5, a). Определить натяжение нити **T** и давление шара на опорную поверхность, если точка A крепления нити лежит на одной вертикали с центром O цилиндрической поверхности.

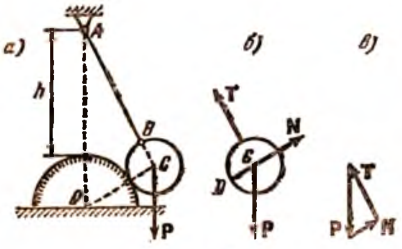


Рис. 2.5

Рассмотрим равновесие шара. Мысленно освободим шар от связей и заменим их реакциями (рис. 2.5, $б$). Реакция нити **T**, равная ее натяжению, направлена вдоль нити от B к A; реакция **N** гладкой цилиндрической поверхности направлена по нормали к поверхности (она приложена к шару в точке D касания шара с опорной поверхностью и направлена по нормали к поверхности шара, т. е. по радиусу DC). Шар находится в равновесии под действием трех сил: **P**, **N** и **T**. Построив замкнутый силовой треугольник (из конца известной силы **P** проводим прямую, параллельную DC, а из начала силы **P** — прямую, параллельную BA; точка пересечения этих прямых определяет конец силы **N** и начало силы **T**; рис. 2.5, $в$), мы можем определить модули сил **N** и **T** с помощью масштаба простым измерением их длины. В данном примере легко использовать аналитические методы. Действительно, из подобия треугольника OCA (рис. 2.5, a) и силового треугольника **PNT** следует

$$\frac{N}{R+r}=\frac{T}{l+r}=\frac{P}{R+h}.$$

Отсюда найдем

$$N=\frac{R+r}{R+h}P, \qquad T=\frac{l+r}{R+h}P.$$

Давление шара **N′** на опорную поверхность (аксиома 4) равно по модулю реакции **N**, но направлено в противоположную сторону: **N′** = —**N**.

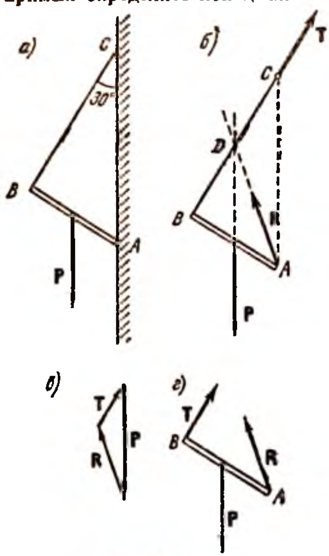


Рис. 2.6

Задача 2.3. Однородная балка длины l и веса P удерживается в равновесии нитью BC и шарниром A (рис. 2.6, a).

Найти натяжение нити и реакцию шарнира A, если $\angle BCA = 30°$, $\angle ABC = 90°$.

Рассмотрим равновесие системы, состоящей из балки и нити. Мысленно освободим систему от связей в точках A и C и приложим в этих точках реакции (рис. 2.6, $б$). К балке приложены сила тяжести **P**, сила натяжения нити **T** и реакция шарнира **R**. Эта система сил должна быть эквивалентна нулю. По теореме о трех непараллельных силах реакция **R** должна проходить через точку D (середину стороны BC). Построим силовой треугольник (рис. 2.6, $в$). Из подобия силового треугольника и треугольника ADC (рис. 2.6, $б$) следует, что

$$\frac{P}{AC}=\frac{T}{CD}=\frac{R}{AD}.$$

Подставляя сюда $AC=2l$, $CD=l\sqrt{3}/2$, $AD=l\sqrt{7}/2$, получим

$$T=P\sqrt{3}/4, \qquad R=P\sqrt{7}/4.$$

Начало этих рассуждений может быть несколько видоизменено, если рассматривать равновесие балки, отделенной как от стены (в точке A), так и нити (в точке B); см. рис. 2.6, *г*. Однако последующие выкладки останутся прежними, в частности, тем же останется силовой треугольник на рис. 2.6, *в*.

Задача 2.4. Определить реакции опорных шарниров невесомой трехшарнирной арки ABC, левая половина которой нагружена силой $\mathbf{P}$ (рис. 2.7, *а*).

Рассмотрим равновесие каждой полуарки отдельно. К правой полуарке приложены две силы: реакция в шарнире B и реакция $\mathbf{R}'_C$ левой полуарки на правую. Значит, линии действия этих сил проходят через B и C. Левая полуарка (рис. 2.7, *б*) находится в равновесии, следовательно, силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C$ образуют уравновешенную систему, и линия действия реакции $\mathbf{R}_A$ проходит через точку пересечения линий

Рис. 2.7

действия силы $\mathbf{P}$ и реакции $\mathbf{R}_C$ (реакции правой полуарки на левую). Так как направления всех сил известны, то можно построить силовой треугольник (рис. 2.7, *в*) и определить модули искомых реакций. После этого можно построить систему сил для правой полуарки; это сделано на рис. 2.7, *г*, причем

$$R'_C = R_B = R_C.$$

Задача 2.5. Однородный цилиндр веса P расположен между двумя гладкими наклонными плоскостями, образующими с горизонтом углы α и β (рис. 2.8, *а*). Определить силы давления цилиндра на обе опорные плоскости.

Рис. 2.8

Так как плоскости гладкие, то их реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ (рис. 2.8, *б*) направлены перпендикулярно плоскостям, т. е. направлены к оси цилиндра и вместе с силой $\mathbf{P}$ образуют сходящуюся систему сил. Запишем уравнения равновесия этой системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\beta = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_1 \cos\alpha + R_2 \cos\beta - P = 0,$$

откуда находим

$$R_1 = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad R_2 = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Искомые силы давления $\mathbf{R}'_1$ и $\mathbf{R}'_2$ будут равны (согласно аксиоме 4) по модулю и противоположны по направлению реакциям $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.

Задача 2.6. Горизонтальная балка AB удерживается в равновесии стержнями AC и AD. Найти усилия в стержнях и балке, если к концу A балки приложена сила $\mathbf{P}$, перпендикулярная балке и образующая с вертикалью угол α.

Дано: $\angle OAB = \beta$, $\angle DAO = \angle CAO = \gamma$. Весами балки и стержней пренебречь; крепления шарнирные (рис. 2.9, *а*).

Заменяя действие стержней и балки на узел A реакциями $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, получим систему четырех сил, приложенных к одной точке A (рис. 2.9, *б*).

Проекции этих сил на координатные оси (систему координат см. на рис. 2.9, *б*) равны:

Проекции	Силы			
	$\mathbf{P}$	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{S}_3$
F_{kx}	0	$-S_1\cos\gamma\cos\beta$	$-S_2\cos\gamma\cos\beta$	S_3
F_{ky}	$P\sin\alpha$	$-S_1\sin\gamma$	$S_2\sin\gamma$	0
F_{kz}	$-P\cos\alpha$	$S_1\cos\gamma\sin\beta$	$S_2\cos\gamma\sin\beta$	0

Поэтому в соответствии с условиями (2.11) уравнения равновесия данной системы сил имеют вид

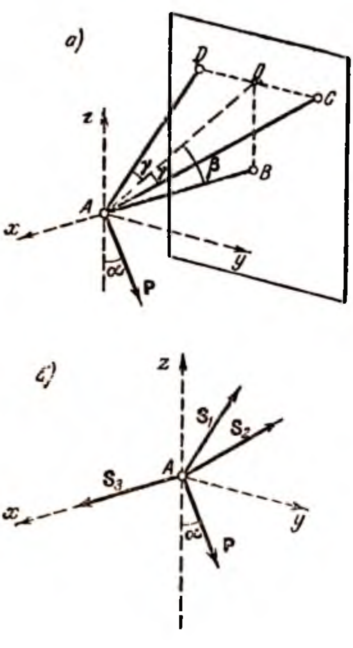


Рис. 2.9

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -S_1\cos\gamma\cos\beta - S_2\cos\gamma\cos\beta + S_3 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = P\sin\alpha - S_1\sin\gamma + S_2\cos\gamma = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = -P\cos\alpha + S_1\cos\gamma\sin\beta + S_2\cos\gamma\sin\beta = 0.$$

Отсюда

$$S_1 = \frac{P}{2}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma}{\sin\gamma\cos\gamma\sin\beta},$$

$$S_2 = \frac{P}{2}\,\frac{\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\gamma\sin\beta},$$

$$S_3 = P\cos\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Усилия в стержнях и балке соответственно равны найденным реакциям S_1, S_2 и S_3.

Если бы балка поддерживалась большим числом стержней, то задача стала бы статически неопределенной, поскольку число неизвестных превзошло бы число уравнений.

Задача 2.7. Невесомые стержни AB и AC, соединенные в точке A шарниром, поддерживаются в равновесии нитью AD. Определить натяжение нити и усилия в стержнях, если $\angle ABC = \angle ACB = \beta = 45°$, $\angle AEO = \alpha = 30°$, а к точке A приложена горизонтальная сила $F = 20$ Н, линия действия которой образует с осью y угол γ (рис. 2.10, *а*). Концы стержней B и C закреплены шарнирно. Прямая BC горизонтальна.

Заменим действие стержней и нити на узел A реакциями $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{T}$. Проекции сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{T}$ на оси координат будут (рис. 2.10, *б*):

Проекции	Силы			
	$\mathbf{F}$	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{T}$
F_{kx}	$F\sin\gamma$	$-S_1\cos\beta$	$S_2\cos\beta$	0
F_{ky}	$F\cos\gamma$	$-S_1\sin\beta\cos\alpha$	$-S_2\sin\beta\cos\alpha$	0
F_{kz}	0	$-S_1\sin\beta\sin\alpha$	$-S_2\sin\beta\sin\alpha$	T

Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F\sin\gamma - S_1\cos\beta + S_2\cos\beta = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F\cos\gamma - S_1\sin\beta\cos\alpha - S_2\sin\beta\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = -S_1\sin\beta\sin\alpha - S_2\sin\beta\sin\alpha + T = 0;$$

отсюда

$$T = F\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha = 20\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\gamma,$$

$$S_1 = \frac{F}{2}\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\beta\cos\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\right) = 10\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\gamma + \sin\gamma\right),$$

$$S_2 = \frac{F}{2}\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\beta\cos\alpha} - \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\right) = 10\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\gamma - \sin\gamma\right).$$

Натяжение нити и усилия в стержнях соответственно равны полученным значениям T, S_1 и S_2.

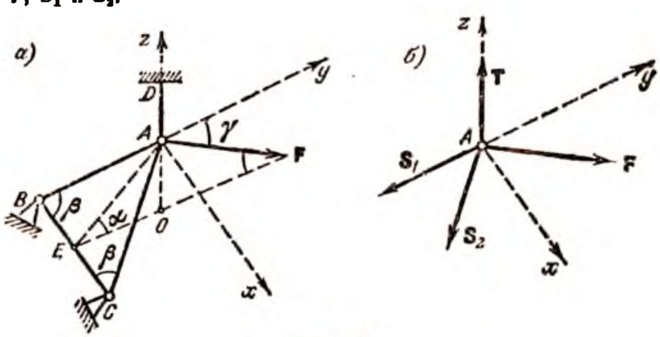


Рис. 2.10

Если $\gamma = 0$, то

$$T = 20\sqrt{3}/3 \approx 11{,}5\ \text{Н},\quad S_1 = S_2 = 20\sqrt{6}/3 \approx 16{,}3\ \text{Н}.$$

При $\gamma = 90°$

$$T = 0, \quad S_1 = -S_2 = 10\sqrt{2}\,\text{Н} \approx 14{,}1\ \text{Н}$$

(знак минус в выражении для S_2 означает, что стержень AC сжат, а не растянут, как предполагалось при построении реакций).

При $\operatorname{tg}\gamma = 2\sqrt{3}/3$ ($\gamma \approx 49°\,5'$) усилие в стержне AC равно нулю.

Глава III

ТЕОРИЯ ПАР

§ 3.1. Сложение двух параллельных сил

Настоящий параграф носит вспомогательный характер и необходим для дальнейшего построения теории.

Пусть параллельные и одинаково направленные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к точкам A и B тела и нужно найти их равнодействующую (рис. 3.1). Приложим к точкам A и B равные по модулю и противоположно направленные силы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ (их модуль может быть любым); такое добавление можно делать на основании аксиомы 2. Тогда в точках A и B мы получим две силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$:

$$\mathbf{R}_1 \sim (\mathbf{F}_1,\ \mathbf{Q}_1) \text{ и } \mathbf{R}_2 \sim (\mathbf{F}_2,\ \mathbf{Q}_2).$$

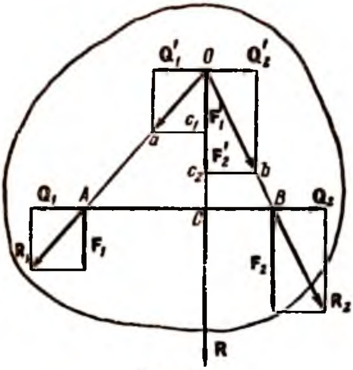


Рис. 3.1

Линии действия этих сил пересекаются в некоторой точке O. Перенесем силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ в точку O и разложим каждую на составляющие:

$$\mathbf{R}_1 \sim (\mathbf{F}_1',\ \mathbf{Q}_1') \text{ и } \mathbf{R}_2 \sim (\mathbf{F}_2',\ \mathbf{Q}_2').$$

Из построения видно, что $\mathbf{Q}_1' = \mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2' = \mathbf{Q}_2$, следовательно, $\mathbf{Q}_1' = -\mathbf{Q}_2'$ и две эти силы согласно аксиоме 2 можно отбросить. Кроме того, $\mathbf{F}_1' = \mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_2$. Силы $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$ действуют по одной прямой, и их можно заменить одной силой

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \tag{3.1}$$

которая и будет искомой равнодействующей. Модуль равнодействующей равен

$$R = F_1 + F_2.$$

Очевидно, что линия действия равнодействующей параллельна линиям действия слагаемых. Из подобия треугольников Oac_1 и OAC, а также Obc_2 и OBC получим соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \tag{3.2}$$

которым определяется точка приложения равнодействующей R. Таким образом, *система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам и направленную в ту же сторону, причем ее модуль делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.*

Рассмотрим теперь задачу о сложении двух параллельных сил, направленных в разные стороны и не равных друг другу по модулю. Пусть даны две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 3.2), причем для определенности будем считать, что $F_1 > F_2$.

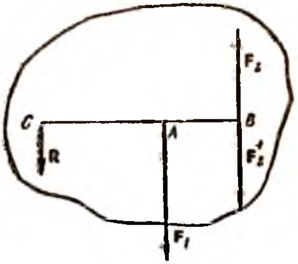


Рис. 3.2

Пользуясь формулами (3.1) и (3.2), можно силу $\mathbf{F}_1$ разложить на две составляющие, $\mathbf{F}_2'$ и $\mathbf{R}$, направленные в сторону силы $\mathbf{F}_1$. Сделаем это так, чтобы сила $\mathbf{F}_2'$ оказалась приложенной к точке B, и положим $\mathbf{F}_2' = -\mathbf{F}_2$.

Таким образом, $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{R}, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_2)$. Теперь заметим, что силы $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$ можно отбросить как эквивалентные нулю (аксиома 2), следовательно, $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim \mathbf{R}$, т. е. сила $\mathbf{R}$ и является равнодействующей. Определим силу $\mathbf{R}$, удовлетворяющую такому разложению силы $\mathbf{F}_1$. Формулы (3.1) и (3.2) дают

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1, \quad \frac{R}{F_2} = \frac{AB}{AC}. \tag{3.3}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

и так как силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены в разные стороны, то

$$R = F_1 - F_2. \tag{3.4}$$

Подставив это выражение во вторую формулу (3.3), получим после простых преобразований

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Из двух последних формул следует, что *две не равные по модулю противоположно направленные параллельные силы имеют равнодействующую, параллельную этим силам, направленную в сторону большей по модулю силы, причем ее модуль равен разности модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.* Заметим, что равнодействующая в этом случае всегда расположена за большей из двух сил.

Прежде чем рассмотреть случай двух равных по модулю, параллельных, но противоположно направленных сил, заметим, что из равенств (3.3) и (3.4) следует

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь случай двух параллельных, равных по модулю, но противоположно направленных сил (рис. 3.3). Эта система сил называется *парой сил* или просто *парой* и обозначается символом ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$). Рассуждения, которыми мы пользовались при выводе соотношений (3.4) и (3.5), здесь непригодны. Формальное применение этих соотношений приводит к заключению, что в данном случае модуль равнодействующей равен нулю, а линия ее действия находится на бесконечном удалении от линий действия слагаемых сил. Чтобы понять природу этого результата, вновь вернемся к случаю, когда слагаемые силы имеют различные модули, и предположим, что модуль F_2 постепенно возрастает, приближаясь к значению модуля F_1. Тогда разность модулей будет стремиться к нулю, а система сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$) — к паре. При этом модуль равнодействующей будет неограниченно приближаться к нулю (см. (3.4)), а линия ее действия — неограниченно удаляться от линий действия слагаемых (см. (3.5)).

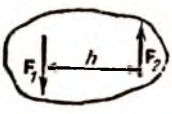


Рис. 3.3

Как следует из сказанного, для пары сил понятие равнодействующей лишено смысла, так как *она представляет собой неуравновешенную систему, которая не может быть заменена одной силой.* Говорят, что пара сил не имеет равнодействующей *).

Таким образом, пара сил является неприводимым (неупрощаемым) элементом статики; наряду с силой она является вторым самостоятельным элементом статики.

В следующих параграфах рассматриваются свойства пар сил, а также правила действия над системами пар.

§ 3.2. Момент силы относительно точки и относительно оси. Момент пары сил

Прежде чем перейти к исследованию свойств пары сил, введем понятие момента силы, которое необходимо для дальнейшего.

Моментом силы относительно какой-либо точки (центра) называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, представляется происходящим против хода часовой стрелки. Момент силы характеризует ее вращательное действие.

*) По этому поводу см. главу IV.

Если O — точка, относительно которой находится момент силы $\mathbf{F}$, то момент силы обозначается символом $M_O(\mathbf{F})$. Покажем, что если точка приложения силы $\mathbf{F}$ определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ относительно O, то справедливо соотношение

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{3.6}$$

Согласно этому соотношению *момент силы равен векторному произведению вектора* $\mathbf{r}$ *на вектор* $\mathbf{F}$.

В самом деле, модуль векторного произведения равен

$$M_O(\mathbf{F}) = rF \sin\alpha = Fh, \tag{3.7}$$

где h — плечо силы (рис. 3.4). Заметим также, что вектор $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\mathbf{r}$ к направлению вектора $\mathbf{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, формула (3.6) полностью определяет модуль и направление момента силы $\mathbf{F}$.

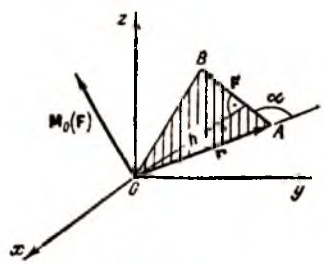


Рис. 3.4

Иногда формулу (3.7) полезно записывать в виде

$$M_O(\mathbf{F}) = 2S, \tag{3.8}$$

где S — площадь треугольника OAB.

Пусть x, y, z — координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси. Тогда, если точка O находится в начале координат, момент силы выражается следующим образом:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\,\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\,\mathbf{j} + \\ + (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что проекции момента силы на координатные оси определяются формулами:

$$M_{Ox}(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_{Oy}(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_{Oz}(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \tag{3.10}$$

Введем теперь понятие проекции силы на плоскость.

Пусть даны сила $\mathbf{F}$ и некоторая плоскость. Опустим из начала и конца вектора силы перпендикуляры на эту плоскость (рис. 3.5).

Проекцией силы на плоскость называется *вектор*, начало и конец которого совпадают с проекцией начала и проекцией конца силы на эту плоскость.

Если в качестве рассматриваемой плоскости принять плоскость xOy, то проекцией силы $\mathbf{F}$ на эту плоскость будет вектор $\mathbf{F}_{xy}$ (рис. 3.5).

Момент силы $\mathbf{F}_{xy}$ относительно точки O (точки пересечения оси z с плоскостью xOy) может быть вычислен по формуле (3.9), если в ней положить $z = 0$, $F_z = 0$. Получим

$$M_O(\mathbf{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}.$$

Таким образом, этот момент направлен вдоль оси z, а его проекция на ось z в точности совпадает с проекцией на ту же ось момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки O. Другими словами,

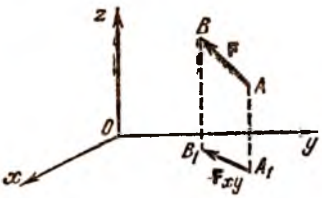


Рис. 3.5

$$M_{Oz}(\mathbf{F}) = M_{Oz}(\mathbf{F}_{xy}) = xF_y - yF_x. \quad (3.11)$$

Очевидно, что тот же результат можно получить, если спроектировать силу $\mathbf{F}$ на любую другую плоскость, параллельную плоскости xOy. При этом точка пересечения оси z с плоскостью будет уже иной (обозначим новую точку пересечения через O_1). Однако все входящие в правую часть равенства (3.11) величины x, y, F_x, F_y останутся неизменными, и, следовательно, можно записать

$$M_{Oz}(\mathbf{F}) = M_{O_1z}(\mathbf{F}_{xy}).$$

Другими словами, *проекция момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, не зависит от выбора точки на оси.* Поэтому в дальнейшем вместо символа $M_{Oz}(\mathbf{F})$ будем применять символ $M_z(\mathbf{F})$. Эта проекция момента называется *моментом силы относительно оси z*. Вычисление момента силы относительно оси часто бывает удобнее производить посредством проектирования силы $\mathbf{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси, и вычисления величины $M_z(\mathbf{F}_{xy})$.

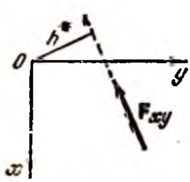


Рис. 3.6

В соответствии с формулой (3.7) и учитывая знак проекции, будем иметь

$$M_z(\mathbf{F}) = M_z(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h^*. \quad (3.12)$$

Здесь h^* — плечо силы $\mathbf{F}_{xy}$ относительно точки O (рис. 3.6); если наблюдатель видит со стороны положительного направления оси z, что сила $\mathbf{F}_{xy}$ стремится повернуть тело вокруг оси z против хода часовой стрелки, то берется знак «плюс», а в противном случае — знак «минус».

Формула (3.12) дает возможность сформулировать следующее правило для вычисления момента силы относительно оси. Для этого нужно:

1) *выбрать на оси произвольную точку и построить плоскость, перпендикулярную оси;*

2) *спроектировать на эту плоскость силу;*

3) *определить плечо проекции силы h^*.*

Момент силы относительно оси равен произведению модуля проекции силы на ее плечо, взятому с соответствующим знаком (см. изложенное выше правило).

Из формулы (3.12) следует, что *момент силы относительно оси равен нулю* в двух случаях: 1) когда проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю, т. е. *когда сила и ось параллельны;* 2) когда плечо проекции h^* равно нулю, т. е. *когда линия действия силы пересекает ось.* Оба эти случая можно объединить в один: *момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось находятся в одной плоскости.*

Задача 3.1. Вычислить относительно точки O момент силы **F**, приложенной к точке A и направленной по диагонали грани куба со стороной a (рис. 3.7).

При решении подобных задач рационально сначала вычислить моменты силы **F** относительно координатных осей x, y, z. Координаты точки A приложения силы **F** будут

$$x = a,\ y = a,\ z = 0.$$

Проекции силы **F** на координатные оси:

$$F_x = -(\sqrt{2}/2)\,F,\quad F_y = 0,\quad F_z = (\sqrt{2}/2)\,F.$$

Подставляя эти значения в равенства (3.10), найдем

$$M_{O_x} = (\sqrt{2}/2)\,Fa,\quad M_{O_y} = -(\sqrt{2}/2)\,Fa,$$

$$M_{O_z} = (\sqrt{2}/2)\,Fa.$$

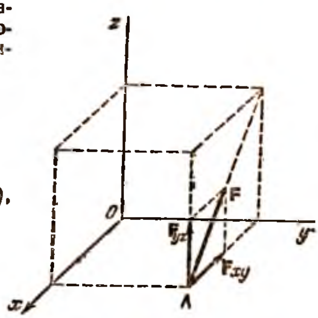


Рис. 3.7

Эти же выражения для моментов силы **F** относительно координатных осей можно получить, пользуясь формулой (3.12). Для этого спроектируем силу **F** на плоскости, перпендикулярные осям x и y (рис. 3.7). Очевидно, что $F_{xy} = F_{yz} = (\sqrt{2}/2)\,F$. Применяя изложенное выше правило, получим, как и следовало ожидать, те же выражения:

$$M_x = (\sqrt{2}/2)\,Fa,\quad M_y = -(\sqrt{2}/2)\,Fa,\quad M_z = (\sqrt{2}/2)\,Fa.$$

Модуль момента определится равенством

$$M_O(\mathbf{F}) = \sqrt{M_{O_x}^2 + M_{O_y}^2 + M_{O_z}^2} = \sqrt{3/2}\,Fa.$$

Введем теперь понятие момента пары. Найдем сначала, чему равна сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки. Пусть O — произвольная точка пространства (рис. 3.8), а **F** и **F′** — силы, составляющие пару.

Тогда

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \overline{OA} \times \mathbf{F},\quad \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \overline{OB} \times \mathbf{F}',$$

откуда

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \overline{OA} \times \mathbf{F} + \overline{OB} \times \mathbf{F}',$$

но так как $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$, то

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \overline{OA} \times \mathbf{F} - \overline{OB} \times \mathbf{F} = (\overline{OA} - \overline{OB}) \times \mathbf{F}.$$

Принимая во внимание равенство $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$, окончательно находим:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \overline{BA} \times \mathbf{F}.$$

Следовательно, *сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от положения точки, относительно которой берутся моменты.*

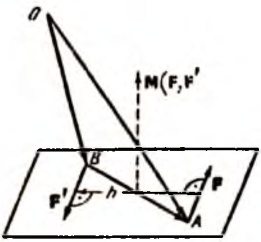


Рис. 3.8

Векторное произведение $\overline{BA} \times \mathbf{F}$ и называется *моментом пары*. Обозначается момент пары символом $M(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, причем

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \overline{BA} \times \mathbf{F} = \overline{AB} \times \mathbf{F}',$$

или, короче,

$$\mathbf{M} = \overline{BA} \times \mathbf{F} = \overline{AB} \times \mathbf{F}'. \tag{3.13}$$

Рассматривая правую часть этого равенства, замечаем, что *момент пары представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару) и направленный в ту сторону, откуда «вращение» пары видно происходящим против хода часовой стрелки.* Если h — плечо пары, то $M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = hF$.

Из самого определения видно, что момент пары сил представляет собой свободный вектор, линия действия которого не определена (дополнительное обоснование этого замечания следует из теорем 2 и 3 этой главы).

Для того чтобы пара сил составляла уравновешенную систему (систему сил, эквивалентную нулю), необходимо и достаточно, чтобы момент пары равнялся нулю. Действительно, если момент пары равен нулю, $M = Fh = 0$, то либо $F = 0$, т. е. нет сил, либо плечо пары h равно нулю. Но в этом случае силы пары будут действовать по одной прямой; так как они равны по модулю и направлены в противоположные стороны, то на основании аксиомы 1 они составят уравновешенную систему. Обратно, если две силы, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, составляющие пару, уравновешены, то на основании той же аксиомы 1 они действуют по одной прямой. Но в этом случае плечо пары h равно нулю и, следовательно, $M = Fh = 0$.

§ 3.3. Теоремы о парах

Докажем три теоремы, с помощью которых становятся возможными эквивалентные преобразования пар. При всех рассуждениях следует помнить, что они относятся к парам, действующим на какое-либо одно твердое тело.

Теорема 1. *Две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар.*

Для доказательства этой теоремы рассмотрим две пары $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ и $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ (рис. 3.9) и перенесем точки приложения всех сил вдоль линий их действия в точки A и B соответственно. Складывая силы по аксиоме 3, получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{R}' = \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_2', \text{ но } \mathbf{F}_1' = -\mathbf{F}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_2' = -\mathbf{F}_2.$$

Следовательно, $\mathbf{R} = -\mathbf{R}'$, т. е. силы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ образуют пару. Найдем момент этой пары, воспользовавшись формулой (3.13):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \overline{BA} \times \mathbf{R} = \overline{BA} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \overline{BA} \times \mathbf{F}_1 + \overline{BA} \times \mathbf{F}_2. \tag{3.14}$$

При переносе сил, составляющих пару, вдоль линий их действия ни плечо, ни направление вращения пары не меняются, следовательно, не меняется и момент пары. Значит,

$$\overline{BA} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') = \mathbf{M}_1,$$

$$\overline{BA} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2') = \mathbf{M}_2,$$

и формула (3.14) примет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \tag{3.15}$$

что и доказывает справедливость сформулированной выше теоремы.

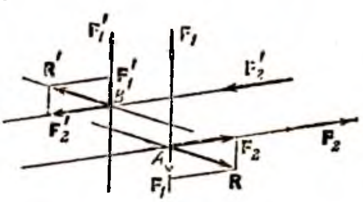


Рис. 3.9

Сделаем к ней два замечания.

1. Линии действия сил, составляющих пары, могут оказаться параллельными. Теорема остается справедливой и в этом случае, но для ее доказательства следует воспользоваться правилом сложения параллельных сил.

2. После сложения может получиться, что $\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = 0$; на основании сделанного ранее замечания из этого следует, что совокупность двух пар $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2') \sim 0$.

Теорема 2. *Две пары, имеющие равные моменты, эквивалентны.*

Пусть на тело в плоскости *I* действует пара $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ с моментом $\mathbf{M}_1$. Покажем, что эту пару можно заменить другой парой $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$, расположенной в плоскости *II*, если только ее момент $\mathbf{M}_2$ равен $\mathbf{M}_1$ (согласно определению (см. § 1.1) это и будет означать, что пары $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ и $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ эквивалентны). Прежде всего заметим, что плоскости *I* и *II* должны быть параллельны, в частности, они могут совпадать. Действительно, из параллельности моментов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ (в нашем случае $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$) следует, что плоскости действия пар, перпендикулярные моментам, также параллельны.

Введем в рассмотрение новую пару $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3')$ и приложим ее вместе с парой $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ к телу, расположив обе пары в плоскости *II*.

Для этого согласно аксиоме 2 нужно подобрать пару $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3')$ с моментом $\mathbf{M}_3$ так, чтобы приложенная система сил $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3')$ была уравновешена. Это можно сделать, например, следующим образом: положим $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_3' = -\mathbf{F}_1$ и совместим точки приложения этих сил с проекциями A_1 и B_1 точек A и B на плоскость II (см. рис. 3.10). В соответствии с построением будем иметь: $\mathbf{M}_3 = -\mathbf{M}_1$ или, учитывая, что $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$,

$$\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = 0,$$

Принимая во внимание второе замечание к предыдущей теореме, получим $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3') \sim 0$. Таким образом, пары $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ и $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3')$ взаимно уравновешены и присоединение их к телу не нарушает его состояния (аксиома 2), так что

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3'). \qquad (3.16)$$

С другой стороны, силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$, а также $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_3'$ можно сложить по правилу сложения параллельных сил, направленных в одну сторону. По модулю все эти силы равны друг другу, поэтому их равнодействующие $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ должны быть приложены в точке пересечения диагоналей прямоугольника ABB_1A_1; кроме того, они равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Это означает, что они составляют систему, эквивалентную нулю. Итак,

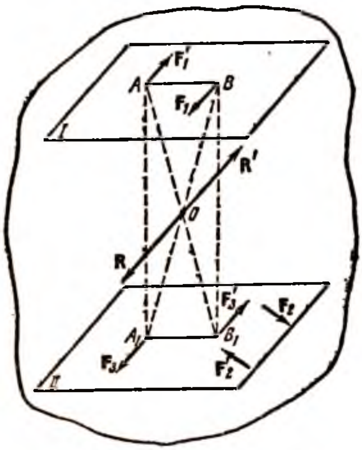


Рис. 3.10

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3') \sim (\mathbf{R}, \mathbf{R}') \sim 0.$$

Теперь мы можем записать

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3') \sim (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2'). \qquad (3.17)$$

Сравнивая соотношения (3.16) и (3.17), получим $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') \sim (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что пару сил можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в параллельную плоскость; наконец, в паре можно менять одновременно силы и плечо, сохраняя лишь направление вращения пары и модуль ее момента ($F_1h_1 = F_2h_2$).

В дальнейшем мы будем широко пользоваться такими эквивалентными преобразованиями пары.

Теорема 3. *Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме моментов двух данных пар.*

Пусть пары $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ и $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ расположены в пересекающихся плоскостях I и II соответственно. Пользуясь следствием теоремы 2, приведем обе пары к плечу AB (рис. 3.11), расположенному на линии пересечения плоскостей I и II. Обозначим трансформированные пары через $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1')$ и $(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_2')$. При этом должны выполняться равенства:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1') = \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') \text{ и } \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_2') = \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2').$$

Сложим по аксиоме 3 силы, приложенные в точках A и B соответственно. Тогда получим $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{R}' = \mathbf{Q}_1' + \mathbf{Q}_2'$. Учитывая, что $\mathbf{Q}_1' = -\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2' = -\mathbf{Q}_2$, получим: $\mathbf{R} = -\mathbf{R}'$. Таким образом, мы доказали, что система двух пар эквивалентна одной паре $(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$.

Найдем момент $\mathbf{M}$ этой пары. На основании формулы (3.13) имеем $\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \overline{BA} \times \mathbf{R}$, но $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \overline{BA} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \\ &= \overline{BA} \times \mathbf{Q}_1 + \overline{BA} \times \mathbf{Q}_2 = \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1') + \mathbf{M}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_2') = \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') + \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2'), \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2,$$

т. е. теорема доказана.

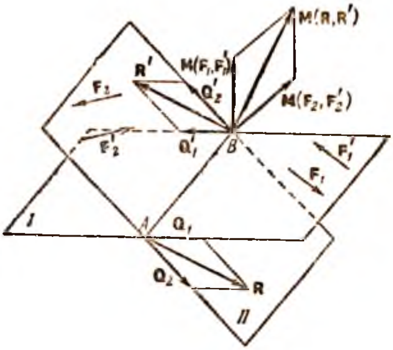


Рис. 3.11

Заметим, что полученный результат справедлив и для пар, лежащих в параллельных плоскостях. По теореме 2 такие пары можно привести к одной плоскости, а по теореме 1 их можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов составляющих пар.

Доказанные выше теоремы о парах позволяют сделать важный вывод: *момент пары является свободным вектором и полностью определяет действие пары на абсолютно твердое тело.* В самом деле, мы уже доказали, что если две пары имеют одинаковые моменты (следовательно, лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях), то они друг другу эквивалентны (теорема 2). С другой стороны, две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, не могут быть эквивалентны, ибо это означало бы, что одна из них и пара, противоположная другой, эквивалентны нулю, что невозможно, так как сумма моментов таких пар отлична от нуля.

Таким образом, введенное понятие момента пары чрезвычайно полезно, поскольку оно полностью отражает механическое действие пары на тело. В этом смысле можно сказать, что момент исчерпывающим образом представляет действие пары на твердое тело.

Для деформируемых тел изложенная выше теория пар неприменима. Две противоположные пары, действующие, например, по торцам стержня, с точки зрения статики твердого тела эквивалентны нулю. Между тем их действие на деформируемый стержень вызывает его кручение, и тем большее, чем больше модули моментов.

Перейдем к решению первой и второй задач статики в случаях, когда на тело действуют только пары сил.

§ 3.4. Приведение системы пар к простейшему виду. Равновесие системы пар

Пусть дана система n пар $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$, $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$, ..., $(\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n')$, как угодно расположенных в пространстве, моменты которых равны $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ..., $\mathbf{M}_n$. На основании теоремы 3 первые две пары можно заменить одной парой $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1')$ с моментом $\mathbf{M}_2^*$:

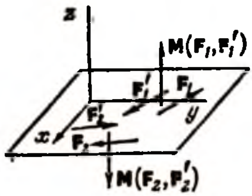


Рис. 3.12

$$\mathbf{M}_2^* = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

Полученную пару $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1')$ сложим с парой $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3')$, тогда получим новую пару $(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2')$ с моментом $\mathbf{M}_3^*$:

$$\mathbf{M}_3^* = \mathbf{M}_2^* + \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3.$$

Продолжая и дальше последовательное сложение моментов пар, мы получим последнюю *результирующую* пару $(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ с моментом

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k. \tag{3.18}$$

Итак, *система пар приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар.*

Теперь легко решить вторую задачу статики, т. е. найти условия равновесия тела, на которое действует система пар. Для того чтобы система пар была эквивалентна нулю, т. е. приводилась к двум уравновешенным силам, необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары был равен нулю. Тогда из формулы (3.18) получим следующее условие равновесия в векторном виде:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \ldots + \mathbf{M}_n = 0. \tag{3.19}$$

В проекциях на координатные оси уравнение (3.19) дает три скалярных уравнения.

Условие равновесия (3.19) упрощается, когда все пары лежат в одной плоскости. В этом случае все моменты перпендикулярны этой плоскости, и поэтому уравнение (3.19) достаточно спроектировать только на одну ось, например ось, перпендикулярную плоскости пар. Пусть это будет ось z (рис. 3.12).

Тогда из уравнения (3.19) получим:

$$M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz} = 0. \tag{3.20}$$

При этом ясно, что $M_z = M$, если вращение пары видно с положительного направления оси z против хода часовой стрелки, и $M_z = -M$ при противоположном направлении вращения. Оба эти случая представлены на рис. 3.12.

Задача 3.2. Один конец балки длиной l укреплен в неподвижной шарнирной опоре A, а второй ее конец B опирается на гладкую наклонную плоскость, составляющую с балкой угол α. На балку действует пара сил с моментом, равным M. Пренебрегая весом балки, определить реакции опор (рис. 3.13).

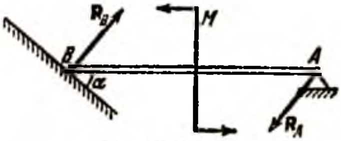


Рис. 3.13

Действие опор заменим реакциями. Реакция гладкой поверхности $\mathbf{R}_B$ направлена по нормали к поверхности. Так как балка находится в равновесии, то система сил, действующих на балку, эквивалентна нулю. Но активная пара сил с моментом $\mathbf{M}$ может быть уравновешена только парой сил. Следовательно, реакция $\mathbf{R}_A$ неподвижной опоры A вместе с реакцией плоскости $\mathbf{R}_B$ должны составлять пару сил. Модули реакций найдутся из условия равенства модулей моментов пар:

$$M = M(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B), \quad \text{или} \quad M = R_A \cdot h,$$

где $h = l\cos\alpha$ — плечо пары. Отсюда

$$R_A = R_B = M/(l\cos\alpha).$$

Глава IV

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ И УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

§ 4.1. Лемма о параллельном переносе силы

В этом параграфе рассматривается вспомогательная задача о параллельном переносе силы.

Докажем лемму:

Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

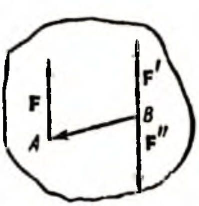


Рис. 4.1

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\mathbf{F}$ (рис. 4.1). Приложим теперь в точке B тела систему двух сил $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$, эквивалентную нулю, причем выбираем $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ (следовательно, $\mathbf{F}'' = -\mathbf{F}$). Тогда сила $\mathbf{F} \sim (\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'')$, так как $(\mathbf{F}', \mathbf{F}'') \sim 0$. Но, с другой стороны, система сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'')$ эквивалентна силе $\mathbf{F}'$ и паре сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$; следовательно, сила $\mathbf{F}$ эквивалентна силе $\mathbf{F}'$ и паре сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$. Момент пары $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$ равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'') = \overline{BA} \times \mathbf{F},$$

т. е. равен моменту силы **F** относительно точки B

$$M = M_B(\mathbf{F}).$$

Таким образом, лемма о параллельном переносе силы доказана.

§ 4.2. Основная теорема статики

Введем определения. Пусть дана произвольная система сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$). Сумму этих сил

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$$

называют *главным вектором* системы сил.

Сумму моментов сил относительно какого-либо полюса (центра приведения) называют *главным моментом* рассматриваемой системы сил относительно этого полюса.

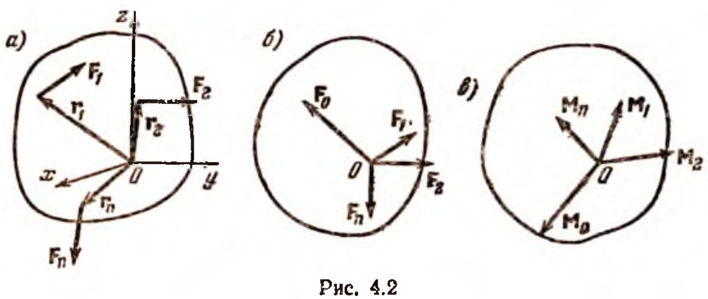


Рис. 4.2

Пользуясь теперь леммой о параллельном переносе силы, докажем следующую основную теорему статики (теорема Пуансо):

Всякую пространственную систему сил в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела (центре приведения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту всех сил относительно выбранного центра приведения.

Следовательно, основная теорема статики устанавливает закон эквивалентной замены произвольной системы сил более простой системой, состоящей из одной силы и одной пары.

Пусть O — центр приведения, принимаемый за начало координат, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, ..., $\mathbf{r}_n$ — соответствующие радиусы-векторы точек приложения сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_n$, составляющих данную систему сил (рис. 4.2, *а*). Прежде всего перенесем силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_n$

в точку O, а затем сложим эти силы как сходящиеся; в результате получим одну силу:

$$\mathbf{F}_0=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k,$$

которая равна главному вектору (рис. 4.2, *б*). Но при последовательном переносе сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ в точку O мы получаем каждый раз соответствующую пару сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1'')$, $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2'')$,..., $(\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n'')$.

Моменты этих пар соответственно равны моментам данных сил относительно точки O:

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}_1=\mathbf{M}(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_1'')=\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1=\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1),\\
\mathbf{M}_2=\mathbf{M}(\mathbf{F}_2,\ \mathbf{F}_2'')=\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2=\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{M}_n=\mathbf{M}(\mathbf{F}_n,\ \mathbf{F}_n'')=\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n=\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n).
\end{gathered}\tag{4.1}$$

На основании правила приведения системы пар к простейшему виду все указанные пары можно заменить одной парой. Ее момент равен сумме моментов всех сил системы относительно точки O, т. е. равен главному моменту, так как согласно формулам (3.18) и (4.1) имеем (рис. 4.2, *в*)

$$\mathbf{M}_O=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2+\cdots+\mathbf{M}_n=$$

$$=\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1)+\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2)+\cdots+\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k.$$

Итак, систему сил, как угодно расположенных в пространстве, можно в произвольно выбранном центре приведения заменить силой

$$\mathbf{F}_O=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k \tag{4.2}$$

и парой сил с моментом

$$\mathbf{M}_O=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k. \tag{4.3}$$

Не следует считать, что главный вектор и главный момент имеют чисто формальное значение и что их можно найти только с помощью вычислений. Очень часто отдельно действующие на тело силы нельзя определить даже опытным путем, в то время как главный вектор или главный момент находятся сравнительно легко. Поясним это примером. Рассмотрим вал, находящийся в подшипниках скольжения. При вращении вала на точки его поверхности действуют со стороны подшипника силы трения. Число точек контакта и модули сил трения, как правило, нам не известны. Не всегда их можно определить и с помощью эксперимента, однако простым измерением находится сумма моментов всех сил трения относительно оси вращения, т. е. главный момент сил трения.

По тем же соображениям момент силы и момент пары сил также не следует рассматривать только как формальные величины, введенные для удобства доказательства. В технике очень часто проще задать не силу или пару, а их моменты. Например, в характеристику электромотора входит не сила, с которой статор действует на ротор, а вращающий момент.

§ 4.3. Аналитическое определение главного вектора и главного момента пространственной системы сил

Определим модули и направления векторов $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{M}_O$. Пусть декартова система координат $Oxyz$ имеет начало в центре приведения O. Тогда проекции силы $\mathbf{F}_O$ на координатные оси найдутся из соотношений:

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \\ F_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Модуль силы $\mathbf{F}_O$ равен

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}, \tag{4.5}$$

а направление определяется направляющими косинусами

$$\cos(x, \mathbf{F}_O) = \frac{F_{Ox}}{F}, \quad \cos(y, \mathbf{F}_O) = \frac{F_{Oy}}{F}, \quad \cos(z, \mathbf{F}_O) = \frac{F_{Oz}}{F}. \tag{4.6}$$

Для проекций вектора $\mathbf{M}_O$ имеем (см. (3.10))

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_z(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Следовательно, модуль и направление вектора $\mathbf{M}_O$ определяются формулами

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \tag{4.8}$$

$$\cos(x, \mathbf{M}_O) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \quad \cos(y, \mathbf{M}_O) = \frac{M_{Oy}}{M_O}, \quad \cos(z, \mathbf{M}_O) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \tag{4.9}$$

При приведении пространственной системы сил к одной силе и одной паре сил угол между направлением главного вектора и направлением главного момента может получиться любым в зависимости от действующих сил. Для определения этого угла воспользуемся формулой, выражающей скалярное произведение векторов $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O = F_O M_O \cos(\mathbf{F}_O, \mathbf{M}_O).$$

Отсюда

$$\cos(\mathbf{F}_O, \mathbf{M}_O) = \frac{\mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O}{F_O M_O} = \frac{F_{Ox} M_{Ox} + F_{Oy} M_{Oy} + F_{Oz} M_{Oz}}{F_O M_O} \tag{4.10}$$

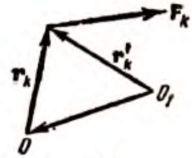


Рис. 4.3

или, по формулам для направляющих косинусов (4.6) и (4.9),

$$\cos(\mathbf{F}_O, \mathbf{M}_O) = \cos(x, \mathbf{F}_O)\cos(x, \mathbf{M}_O) + \cos(y, \mathbf{F}_O)\cos(y, \mathbf{M}_O) + \cos(z, \mathbf{F}_O)\cos(z, \mathbf{M}_O). \tag{4.11}$$

Выясним, как будут меняться сила и пара сил, к которым приводится рассматриваемая система сил, при перемене центра приведения. Так как сила $\mathbf{F}_O$ равна главному вектору, т. е. сумме всех сил системы, то для любого центра приведения она будет одной и той же. Если в качестве нового центра приведения взята точка O_1, то

$$\mathbf{F}_{O_1} = \mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k. \tag{4.12}$$

Для центра приведения O_1 момент пары равен главному моменту относительно этого центра приведения

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k, \tag{4.13}$$

где $\mathbf{r}'_k$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{F}_k$, проведенный из нового центра приведения O_1 (рис. 4.3). Из рассмотрения рис. 4.3 видно, что

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k + \overline{O_1O}.$$

Подставив значение $\mathbf{r}'_k$ в формулу (4.13), получим

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r}_k + \overline{O_1O}) \times \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \overline{O_1O} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k.$$

откуда на основании формул (4.2) и (4.3)

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \overline{O_1O} \times \mathbf{F}_O = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_O), \tag{4.14}$$

т. е. момент пары, а следовательно, и *главный момент при перемене центра приведения изменяются на момент силы, равной главному вектору, приложенному в старом центре приведения, относительно нового центра приведения.*

Из формулы (4.14) следует, что если в каком-либо центре приведения, например точке O, $\mathbf{F}_O = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$, то и для любого центра приведения O_1 будет

$$\mathbf{F}_{O_1} = 0, \quad \mathbf{M}_{O_1} = 0.$$

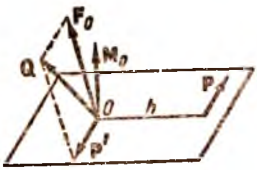


Рис. 4.4

Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил не является единственным способом приведения к простейшему виду (хотя и применяется наиболее часто). Возможен другой вариант приведения; согласно этому варианту *система сил, как угодно расположенных в пространстве, может быть приведена к двум силам, в общем случае не лежащим в одной плоскости.*

В самом деле, пусть произвольная система сил приведена в данном центре O к силе $\mathbf{F}_O$ и паре сил с моментом $\mathbf{M}_O$. Выберем силы, составляющие пару, равными $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ ($\mathbf{P} = -\mathbf{P}'$); приложим одну из них (например, $\mathbf{P}'$) в центре приведения (рис. 4.4) и сложим ее с силой $\mathbf{F}_O$. В результате получим силу $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_O + \mathbf{P}'$, уже не лежащую в плоскости действия пары ($\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$).

Таким образом, пространственная система сил приведена к двум силам $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$, которые в общем случае не лежат в одной плоскости.

§ 4.4. Условия равновесия пространственной системы сил

В этом параграфе мы обратимся ко второй задаче статики и установим условия, при которых пространственная система сил эквивалентна нулю, т. е. условия ее равновесия. Докажем теорему.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы равнялись нулю.

Достаточность сформулированных условий вытекает из того, что при $\mathbf{F}_O = 0$ система сходящихся сил, приложенных в центре приведения O, эквивалентна нулю, а при $\mathbf{M}_O = 0$ система пар сил эквивалентна нулю. Следовательно, исходная система сил эквивалентна нулю.

Докажем необходимость этих условий. Пусть данная система сил эквивалентна нулю. Приведя систему к двум силам, заметим, что в нашем случае система сил $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$ (рис. 4.4) должна быть эквивалентна нулю, следовательно, эти две силы должны иметь общую линию действия и, кроме того, должно выполняться равенство $\mathbf{Q} = -\mathbf{P}$. Но в рассматриваемом нами случае это может быть, если линия действия силы $\mathbf{P}$ проходит через точку O, т. е. если $h = 0$. А это значит, что главный момент равен нулю ($\mathbf{M}_O = 0$). Далее, так как $\mathbf{Q} + \mathbf{P} = 0$, а $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_O + \mathbf{P}'$, то $\mathbf{F}_O + \mathbf{P}' + \mathbf{P} = 0$, и, следовательно, $\mathbf{F}_O = 0$.

Итак, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сил будут иметь вид

$$\mathbf{F}_O = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0 \tag{4.15}$$

или, в проекциях на координатные оси,

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \\ F_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0; \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = M_{Ox}(\mathbf{F}_1) + M_{Ox}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Ox}(\mathbf{F}_n) = 0, \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = M_{Oy}(\mathbf{F}_1) + M_{Oy}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oy}(\mathbf{F}_n) = 0, \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Таким образом, при решении задач о равновесии пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, мы имеем возможность из уравнений (4.16) и (4.17) определить шесть неизвестных величин.

Рис. 4.5

Замечание. О невозможности приведения пары сил к равнодействующей. Проведем доказательство от противного. Пусть пара сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ приводится к равнодействующей $\mathbf{R}$, приложенной к какой-либо точке A тела. Тогда эта пара и сила $\mathbf{R}'$ ($\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$), приложенная в точке A, эквивалентны нулю (рис. 4.5). На основании только что доказанного главный вектор и главный момент этой системы должны быть равны нулю. Примем за центр приведения точку A, тогда главный момент $\mathbf{M}_A \neq 0$ и равен моменту пары $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$; главный вектор тоже не равен нулю ($\mathbf{F}_A = \mathbf{R}' \neq 0$). Следовательно, предположение о существовании равнодействующей для пары сил несправедливо.

Уравнения равновесия для более частных систем сил могут быть получены из уравнений (4.16) и (4.17).

1. Равновесие пространственной системы параллельных сил. Направим ось z параллельно линиям действия сил (рис. 4.6). Тогда проекции сил $\mathbf{F}_k$ на оси x и y равны нулю ($F_{kx} \equiv 0$, $F_{ky} \equiv 0$), и остается удовлетворить только одному из уравнений группы (4.16):

$$F_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0. \tag{4.18}$$

Во второй группе уравнений (4.17) последнее выполняется тождественно, так как силы параллельны оси z ($M_{Oz}(\mathbf{F}_k) \equiv 0$), и остаются только два уравнения:

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = M_{Ox}(\mathbf{F}_1) + M_{Ox}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Ox}(\mathbf{F}_n) = 0, \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = M_{Oy}(\mathbf{F}_1) + M_{Oy}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oy}(\mathbf{F}_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

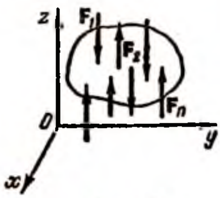


Рис. 4.6

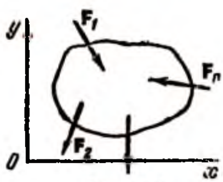


Рис. 4.7

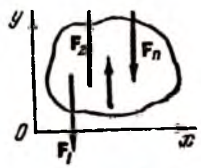


Рис. 4.8.

2. Равновесие плоской системы сил.

Для плоской системы сил из уравнений первой группы останутся два уравнения:

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Из уравнений второй группы два первых удовлетворяются тождественно, так как силы лежат в одной плоскости с осями x и y (рис. 4.7). Остается только третье уравнение:

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0. \tag{4.21}$$

3. Равновесие плоской системы параллельных сил.

Условия равновесия для этого частного случая следуют из уравнений (4.20) и (4.21). Направим ось y параллельно линиям действия сил (рис. 4.8). Тогда первое из уравнений (4.20) удовлетворяется тождественно (для любой системы параллельных сил на плоскости) и остаются только два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Напомним, что при составлении уравнений равновесия (4.17) за центр приведения может быть выбрана любая точка (см. § 4.3).

Глава V

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 5.1. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Рассмотрим систему сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$), расположенных в одной плоскости. К этому случаю приводится весьма большое число практических задач техники. Совместим с плоскостью расположения сил систему координат Oxy и, выбрав ее начало в качестве центра приведения, согласно основной теореме статики (§ 4.2) приведем рассматриваемую систему сил к одной силе

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k, \tag{5.1}$$

равной главному вектору, и к паре сил, момент которой равен главному моменту

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k), \tag{5.2}$$

где $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k)$ — момент силы $\mathbf{F}_k$ относительно центра приведения O *).

Так как силы расположены в одной плоскости, то сила $\mathbf{F}_O$ также лежит в этой плоскости. Момент же пары $\mathbf{M}_O$ направлен перпендикулярно этой плоскости, так как сама пара расположена в плоскости действия рассматриваемых сил. Таким образом, для плоской системы сил главный вектор и главный момент всегда перпендикулярны друг другу (рис. 5.1).

При рассмотрении плоской системы сил мы имеем дело с парами, расположенными в плоскости действия сил. Поэтому здесь нет необходимости придавать векторный смысл моменту пары. *Мо-*

*) Здесь и в дальнейшем на протяжении всей пятой главы предполагается, что все силы расположены в одной плоскости xy и что точки, относительно которых вычисляются моменты, лежат в плоскости действия сил. Ось z, перпендикулярная плоскости действия сил, на рисунках не показывается.

мент полностью характеризуется алгебраической величиной M_z, равной произведению плеча пары на величину одной из сил, составляющих пару, взятой со знаком плюс, если «вращение» пары происходит против хода часовой стрелки, и со знаком минус, если оно происходит по ходу часовой стрелки. Иными словами, за момент пары в плоских системах принимается проекция вектора момента пары на ось z, перпендикулярную плоскости действия сил.

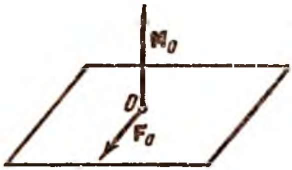


Рис. 5.1

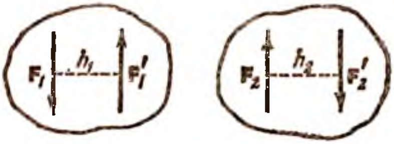


Рис. 5.2

Пусть, например, даны две пары, $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ и $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ (рис. 5.2); тогда согласно данному определению имеем

$$\begin{aligned} M_z(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') &= h_1F_1, \\ M_z(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2') &= -h_2F_2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Аналогично, *моментом силы относительно точки будем называть алгебраическую величину, равную проекции вектора момента силы относительно этой точки на ось, перпендикулярную плоскости, т. е.*

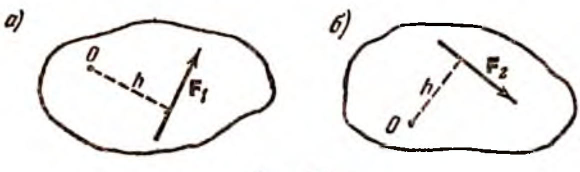


Рис. 5.3

равную произведению модуля силы на плечо, взятому с соответствующим знаком. Для случаев, изображенных на рис. 5.3, *а* и *б*, соответственно будет

$$M_{Oz}(\mathbf{F}_1) = hF_1, \quad M_{Oz}(\mathbf{F}_2) = -hF_2. \tag{5.4}$$

Индекс z в формулах (5.3) и (5.4) сохранен для того, чтобы указать на алгебраический характер моментов.

Модули же момента пары и момента силы обозначаются следующим образом:

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = |M_z(\mathbf{F}, \mathbf{F}')|, \quad M_O(\mathbf{F}) = |M_{Oz}(\mathbf{F})|.$$

Исходя из этих определений, для нахождения главного момента вместо формулы (5.2) будем пользоваться формулой

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k). \tag{5.5}$$

Формула (4.14), определяющая изменение главного момента при перемене центра приведения, примет вид

$$M_{O1z} = M_{Oz} + M_{O1z}(\mathbf{F}_O). \tag{5.6}$$

Для аналитического определения главного вектора применяются формулы:

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}, \tag{5.8}$$

$$\cos(x, \mathbf{F}_O) = F_{Ox}/F_O, \quad \cos(y, \mathbf{F}_O) = F_{Oy}/F_O. \tag{5.9}$$

Согласно формулам (5.5) и (3.11) главный момент равен

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}), \tag{5.10}$$

где x_k, y_k — координаты точки приложения силы $\mathbf{F}_k$.

Докажем теперь, что если *главный вектор плоской системы сил не равен нулю, то данная система сил эквивалентна одной силе, т. е. приводится к равнодействующей.*

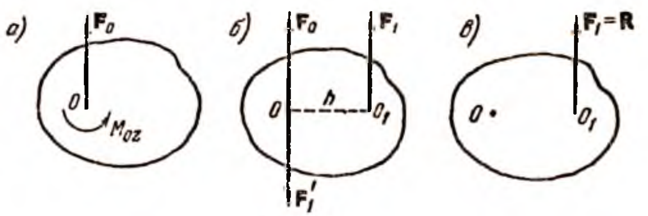


Рис. 5.4

Пусть для выбранного центра приведения главный вектор и главный момент не равны нулю, т. е. $\mathbf{F}_O \neq 0$, $M_{Oz} \neq 0$ (рис. 5.4, *а*). Дуговая стрелка на рис. 5.4, *а* символически изображает пару с моментом M_{Oz}. Пару сил, момент которой равен главному моменту, представим в виде двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_1'$, равных по модулю главному вектору $\mathbf{F}_O$, т. е. $F_1 = F_1' = F_0$. При этом одну из сил ($\mathbf{F}_1'$), составляющих пару, приложим к центру приведения и направим в сторону, противоположную направлению силы $\mathbf{F}_O$ (рис. 5.4, *б*). Тогда система сил $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{F}'_1$ эквивалентна нулю и может быть отброшена. Следовательно, заданная система сил эквивалентна единственной силе $\mathbf{F}_1$, приложенной к точке O_1; эта сила и является равнодействующей. В дальнейшем равнодействующую будем обозначать буквой $\mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{R}$. Очевидно, что расстояние h от прежнего центра приведения O до линии действия равнодействующей можно найти из условия $|M_{Oz}| = hF_1 = hF_0$, т. е.

$$h = |M_{Oz}|/F_O.$$

Расстояние h нужно отложить от точки O так, чтобы момент пары сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1)$ совпадал с главным моментом M_{Oz} (рис. 5.4, *б*). В результате приведения системы сил к данному центру могут встретиться следующие случаи:

1. $\mathbf{F}_O \neq 0$, $M_{Oz} \neq 0$.

В этом случае система сил может быть приведена к одной силе (равнодействующей), как это показано на рис. 5.4, *в*.

2. $\mathbf{F}_O \neq 0$, $M_{Oz} = 0$.

В этом случае система сил приводится к одной силе (равнодействующей), проходящей через данный центр приведения.

3. $\mathbf{F}_O = 0$, $M_{Oz} \neq 0$.

При этом система сил эквивалентна одной паре сил.

4. $\mathbf{F}_O = 0$, $M_{Oz} = 0$.

В этом случае рассматриваемая система сил эквивалентна нулю, т. е. силы, составляющие систему, взаимно уравновешены.

Для системы сил, которая приводится к равнодействующей, справедлива следующая теорема о моменте равнодействующей.

Теорема Вариньона. *Если рассматриваемая плоская система сил приводится к равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно какой-либо точки равен алгебраической сумме моментов всех сил данной системы относительно той же самой точки.*

Предположим, что система сил приводится к равнодействующей $\mathbf{R}$, проходящей через точку O. Возьмем теперь в качестве центра приведения другую точку O_1. Главный момент (5.5) относительно этой точки равен сумме моментов всех сил:

$$M_{O_1z} = \sum_{k=1}^{n} M_{O_1z}(\mathbf{F}_k). \tag{5.11}$$

С другой стороны, на основании формулы (5.6) имеем

$$M_{O_1z} = M_{O_1z}(\mathbf{R}), \tag{5.12}$$

так как главный момент для центра приведения O равен нулю ($M_{Oz} = 0$). Сравнивая соотношения (5.11) и (5.12), получаем

$$M_{O_1z}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_{O_1z}(\mathbf{F}_k); \tag{5.13}$$

это и доказывает сформулированную теорему.

При помощи теоремы Вариньона можно найти уравнение линии действия равнодействующей. Пусть равнодействующая $\mathbf{R}_1$ приложена в какой-либо точке O_1 с координатами x и y (рис. 5.5) и известны главный вектор $\mathbf{F}_O$ и главный момент M_{Oz} при центре приведения в начале координат. Так как $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_O$, то составляющие равнодействующей по осям x и y равны $\mathbf{R}_{1x} = \mathbf{F}_{Ox} = F_{Ox}\mathbf{i}$ и $\mathbf{R}_{1y} = \mathbf{F}_{Oy} = F_{Oy}\mathbf{j}$. Согласно теореме Вариньона момент равнодействующей относительно начала координат равен главному моменту при центре приведения в начале координат, т. е.

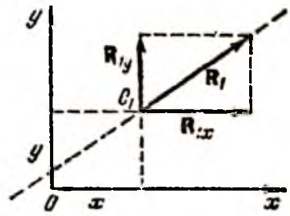


Рис. 5.5

$$M_{Oz} = M_{Oz}(\mathbf{R}_1) = xF_{Oy} - yF_{Ox}. \quad (5.14)$$

Величины M_{Oz}, F_{Ox} и F_{Oy} при переносе точки приложения равнодействующей вдоль ее линии действия не изменяются, следовательно, на координаты x и y в уравнении (5.14) можно смотреть как на текущие координаты линии действия равнодействующей. Таким образом, уравнение (5.14) есть уравнение линии действия равнодействующей. При $F_{Ox} \neq 0$ его можно переписать в виде

$$y = \frac{F_{Oy}}{F_{Ox}}x - \frac{M_{Oz}}{F_{Ox}}.$$

Задача 5.1. Равнодействующие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}$ сил давления воды на гравитационную плотину приложены в вертикальной плоскости симметрии перпендикулярно соответствующим граням на расстояниях $H = 4$ м и $h = 2{,}4$ м от основания (рис. 5.6). Сила тяжести $\mathbf{G}_1$ прямоугольной части плотины приложена в ее центре, а сила тяжести $\mathbf{G}_2$ треугольной части — на расстоянии одной трети от вертикальной грани треугольного сечения.

Определить равнодействующую распределенных сил реакции грунта, на котором установлена плотина, если $P = 20$ МН, $F = 13$ МН, $G_1 = 30$ МН, $G_2 = 15$ МН, $a = 5$ м, $b = 10$ м, $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$.

Рис. 5.6

Прежде всего найдем равнодействующую заданных сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$, приложенных к плотине. Для вычисления главного вектора $\mathbf{F}_O$ и главного момента M_{Oz} относительно начала координат O нам понадобятся значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и координаты точки A. Так как $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$, то $\sin\alpha = 5/13$, $\cos\alpha = 12/13$. По условию задачи $y_A = h = 2{,}4$ м. Из треугольника ABC найдем $CB = h\operatorname{tg}\alpha = 1$ м. Следовательно, $x_A = 9$ м. Согласно формулам (5.7) и (5.10) имеем

$$F_{Ox} = P - F\cos\alpha = 8\ \text{МН}, \quad F_{Oy} = -G_1 - G_2 - F\sin\alpha = -50\ \text{МН},$$

$$M_{Oz} = -PH - G_1\frac{a}{2} - G_2\left[a + \frac{1}{3}(b-a)\right] + x_AF_y - y_AF_x = -272\ \text{МН}.$$

Главный вектор не равен нулю, поэтому система заданных сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, приложенных к плотине, приводится к равнодействующей $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_O$, модуль которой равен

$$R = F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2} \approx 50{,}6 \text{ МН}.$$

Уравнение линии действия равнодействующей найдем по формуле (5.14):

$$25x + 4y - 136 = 0.$$

На рис. 5.6 показана равнодействующая $\mathbf{R}$ заданных сил, приложенных к плотине. Равнодействующая реакция грунта действует по той же прямой, но она направлена в сторону, противоположную $\mathbf{R}$. Модули этих сил, конечно, равны между собой.

§ 5.2. Условия равновесия плоской системы сил

Как было установлено в главе IV, необходимым и достаточным условием равновесия системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента. Для плоской системы сил эти условия получают вид

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0, \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = 0, \tag{5.15}$$

где O — произвольная точка в плоскости действия сил.

На основании (5.15) и (5.7) имеем

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \dots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

т. е. *для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на две координатные оси и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки равнялись нулю.*

Возможны также другие формы уравнений равновесия.

Второй формой является равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = 0, \tag{5.17}$$

где A, B и C — указанные точки.

Необходимость выполнения этих трех равенств в случае равновесия системы сил вытекает из условий (5.15), и нам остается доказать их достаточность. Предположим, что все равенства (5.17) выполняются. Равенство нулю главного момента при центре приведения в точке A возможно, либо если система приводится к равнодействующей ($\mathbf{R} \neq 0$) и линия ее действия проходит через точку A, либо $\mathbf{R} = 0$; аналогично равенство нулю главного момента относительно точек B и C означает, что либо $\mathbf{R} \neq 0$ и равнодействующая проходит через обе точки, либо $\mathbf{R} = 0$. Но равнодействующая не может проходить через все эти три точки A, B и C (по условию они не лежат на одной прямой). Следовательно, равенства (5.17) возможны лишь при $\mathbf{R} = 0$, т. е. система сил находится в равновесии.

Заметим, что если точки A, B и C лежат на одной прямой, то выполнение условий (5.17) не будет достаточным условием равновесия, — в этом случае система может быть приведена к равнодействующей, линия действия которой проходит через эти точки.

Третьей формой уравнений равновесия плоской системы сил является равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил системы относительно двух любых точек и равенство нулю алгебраической суммы проекций всех сил системы на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через две выбранные точки:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \tag{5.18}$$

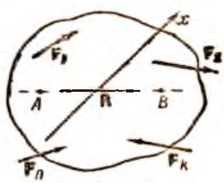


Рис. 5.7

(ось x не перпендикулярна отрезку AB).

Необходимость выполнения этих равенств для равновесия сил вытекает непосредственно из условий (5.15). Убедимся в том, что выполнения этих условий достаточно для равновесия сил.

Из первых двух равенств, как и в предыдущем случае, вытекает, что если система сил имеет равнодействующую, то ее линия действия проходит через точки A и B (рис. 5.7). Тогда проекция равнодействующей на ось x, не перпендикулярную отрезку AB, окажется отличной от нуля. Но эта возможность исключается третьим уравнением (5.18) $\left(\text{так как } R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)$. Следовательно, равнодействующая должна равняться нулю и система находится в равновесии. Понятно, что если ось x будет перпендикулярна отрезку AB, то уравнения (5.18) не будут достаточными условиями равновесия, так как в этом случае система может иметь равнодействующую, линия действия которой проходит через точки A и B.

Таким образом, система уравнений равновесия может содержать одно уравнение моментов и два уравнения проекций, либо два уравнения моментов и одно уравнение проекций, либо, наконец, три уравнения моментов.

Отметим, что при составлении любой из форм уравнений равновесия выбор координатных осей и точек, относительно которых берутся моменты сил, вообще говоря, произволен. Однако для получения наиболее простых уравнений равновесия (каждое из которых содержит минимальное число неизвестных) целесообразно координатные оси проводить перпендикулярно неизвестным силам, а указанные точки выбирать на пересечении линий действия неизвестных сил.

При рассмотрении равновесия несвободного твердого тела на основании принципа освобождаемости заменяем действие связей их реакциями. Значит, если число этих заранее неизвестных реакций будет равно числу уравнений равновесия, в которые реакции входят, то задачу их определения можно выполнить. Если же число неизвестных реакций будет больше уравнений равновесия, содержащих реакции, то задача становится статически неопределимой.

Среди плоских задач статики особого рассмотрения заслуживает случай плоской системы параллельных сил. Хотя для этой системы главный вектор и главный момент по-прежнему определяются формулами (5.1) и (5.5), но фактические вычисления значительно упрощаются.

Пусть линии действия всех сил параллельны оси y (рис. 4.8). Тогда уравнения равновесия для рассматриваемой системы параллельных сил будут

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k)=0. \qquad (5.19)$$

В соответствии с (5.17) уравнения равновесия можно также записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k)=0, \qquad (5.20)$$

причем точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной оси y (если точки A и B будут лежать на прямой, параллельной оси y, то эти уравнения будут удовлетворяться при равнодействующей, отличной от нуля, если ее линия действия проходит через указанные точки).

В заключение этого параграфа отметим, что система сил, действующих на твердое тело, может состоять как из *сосредоточенных* (изолированных) сил, так и *распределенных сил*. Различают силы, распределенные по линии, по поверхности и по объему тела. Так, например, давление тяжелого цилиндрического катка на горизонтальную опорную поверхность (рис. 5.8, *а*) представляет собой силы, распределенные вдоль линии (в данном случае — вдоль прямой). Давление газа на стенки сосуда может служить примером сил, распределенных по поверхности (рис. 5.8, *б*). Действие сил тяжести (рис. 5.8, *в*) иллюстрирует случай сил, распределенных по объему тела.

Распределенные силы задаются их *интенсивностью*. Так, например, для объемных сил сначала вводится понятие средней интенсивности силы в окрестности рассматриваемой точки тела

$$F^{*}_{\text{ср}}=\frac{\Delta F}{\Delta V}.$$

Здесь ΔV — объем элемента, выделенного в окрестности точки, ΔF — сила, действующая на этот элемент. Тогда

$$F^* = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

называется *интенсивностью* силы, распределенной по объему в данной точке тела.

Аналогично вводится понятие интенсивности для силы, распределенной по поверхности и по длине линии:

$$F_п^* = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta\sigma}, \quad F_л^* = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s},$$

где $\Delta\sigma$ и Δs — соответственно элементарная площадь и элемент длины линии.

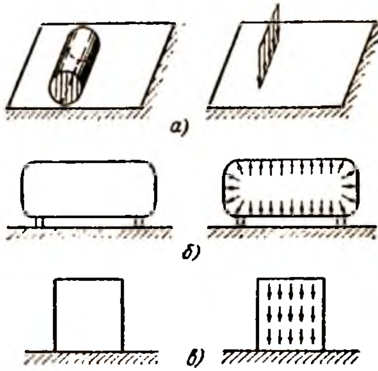


Рис. 5.8

Очень часто интенсивность силы называют силой, отнесенной к соответствующей геометрической единице — длине, площади или объему. Соответственно этому единицами интенсивности служат Н/м³, Н/м² и Н/м.

Понятно, что в простейших случаях (см., например, рис. 5.8, *а*) интенсивность определяется простым делением полной силы давления на длину, площадь или объем участка ее приложения.

В ряде случаев силы оказываются неравномерно распределенными. Так, на рис. 5.9, *а* изображено давление воды на стенку плотины, оно

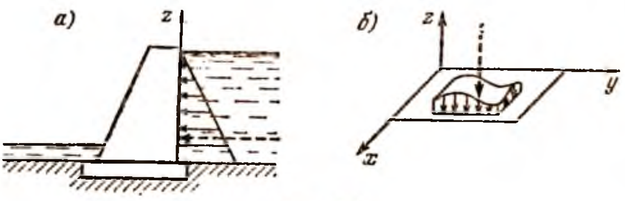


Рис. 5.9

переменно и зависит от глубины, т. е. от координаты z. На рис. 5.9, *б* показан случай, когда давление сыпучего тела на основание является функцией двух координат x и y из-за переменной толщины слоя.

§ 5.3. Задачи на применение уравнений равновесия

Задача 5.2. Однородная гладкая балка AB силой тяжести $P = 2$ кН, закрепленная в точке A при помощи шарнира, опирается в точке C на стену. В точке B подвешен груз $Q = 1$ кН. Определить опорные реакции в точках A и C, если балка составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$, $h = 1$ м и $l = 3$ м (рис. 5.10, *а*).

Образуем силовую схему, заменив действие связей их реакциями. Реакция в точке A не известна ни по величине, ни по направлению, поэтому будем искать

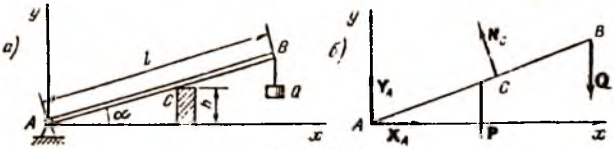


Рис. 5.10

эту реакцию через ее проекции X_A и Y_A; реакция в точке C направлена перпендикулярно балке (рис. 5.10, *б*).

Уравнения равновесия напишем в форме (5.16):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A - N_C \cos 60^\circ = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - P + N_C \cos 30^\circ - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -P\frac{l}{2}\cos 30^\circ + N_C \frac{h}{\sin 30^\circ} - Ql\cos 30^\circ = 0;$$

отсюда находим

$$N_C = \frac{(P+2Q)}{4h} l \sin 60^\circ \approx 2{,}6 \text{ кН}, \quad X_A = \frac{(P+2Q)}{8h} l \cos 30^\circ \approx 1{,}3 \text{ кН},$$

$$Y_A = P + Q - \frac{P+2Q}{4h} l \sin^2 60^\circ \approx 2{,}25 \text{ кН}.$$

Задача 5.3. Ферма опирается на неподвижный шарнир A и каток B, который может без трения перемещаться по наклонной плоскости. Определить реакции опор A и B, если к ферме приложены силы $P = 30$ кН и $P_1 = 60$ кН (рис. 5.11, *а*).

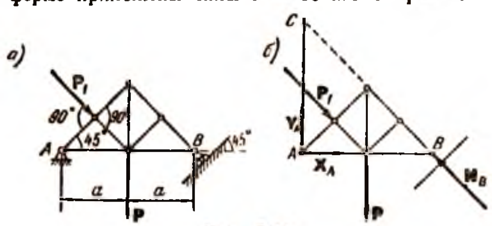


Рис. 5.11

Заменяя действие опор реакциями, составляем силовую схему (рис. 5.11, *б*). Уравнения равновесия возьмем в форме (5.17). В качестве точек, относительно которых составляются уравнения моментов, выберем точки A, B и C. Уравнения равновесия при этом будут

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -Pa + N_B \frac{a}{\cos 45^\circ} - P_1 \frac{a}{2\cos 45^\circ} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = -Y_A 2a + P_1 \frac{a}{2\cos 45^\circ} + Pa = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = X_A 2a - Pa + P_1 \frac{a}{2\cos 45^\circ} = 0;$$

отсюда находим

$$N_B = \frac{2P + P_1\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx 51{,}3 \text{ кН}, \quad X_A = \frac{P\sqrt{2} - P_1}{2\sqrt{2}} \approx 6{,}3 \text{ кН},$$

$$Y_A = \frac{P\sqrt{2} + P_1}{2\sqrt{2}} \approx 36{,}2 \text{ кН}.$$

Задача 5.4. К балке, изображенной на рис. 5.12, *а*, приложены: сосредоточенная сила $F = 16$ кН и равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 1{,}2$ кН/м. Угол $\alpha = 30°$, $a = 3$ м, $b = 7$ м, $l = 12$ м. Сила тяжести балки $P = 5$ кН. Определить реакции опор.

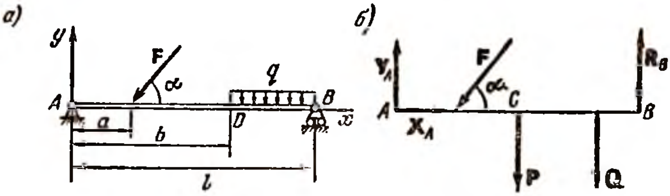


Рис. 5.12

Действие опор на балку заменяем реакциями $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$ и $\mathbf{R}_B$, а распределенную нагрузку — ее равнодействующей $Q = q(l - b)$, приложенной в середине отрезка DB (рис. 5.12, *б*). Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -Fa\sin\alpha - P\frac{l}{2} - Q\left(b + \frac{l-b}{2}\right) + R_B l = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = -Y_A l + F(l-a)\sin\alpha + P\frac{l}{2} + Q\frac{l-b}{2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A - F\cos\alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$X_A = F\cos\alpha = 13{,}8 \text{ кН},$$

$$Y_A = \frac{F(l-a)}{l}\sin\alpha + \frac{P}{2} + Q\frac{l-b}{2l} = 9{,}75 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{Fa}{l}\sin\alpha + \frac{P}{2} + Q\frac{l+b}{2l} = 9{,}25 \text{ кН}.$$

Познакомимся теперь с особым видом связи, которая называется *жесткой* (или *полной*) *заделкой*. Эта связь препятствует не только линейным перемещениям закрепленной точки тела, но и повороту вокруг этой точки.

Такова, например, жесткая заделка левого конца балки на рис. 5.13, *а*; этот конец оказывается полностью закрепленным — невозможны его вертикальное и горизонтальное перемещения, а также и поворот. Такая связь создает систему реакций, состоящую (рис. 5.13, *б*) из двух составляющих X_A и Y_A и пары, момент которой обозначен через M^*. Это следует из того, что на заделанный конец балки действует распределенная нагрузка, которую можно привести к силе, приложенной к точке A, и к паре сил с моментом M^*.

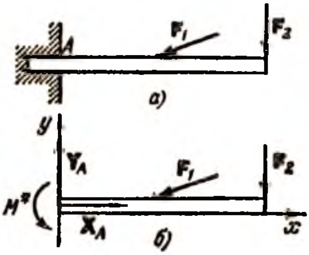


Рис. 5.13

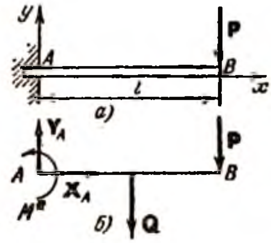


Рис. 5.14

Задача 5.5. К однородной балке, сила тяжести которой равна Q и длина l, в точке B приложена сила $\mathbf{P}$ (рис. 5.14, *а*). Определить реакции в месте заделки.

Силовая схема изображена на рис. 5.14, *б*. Уравнения равновесия будут

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - Q - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = M^* - Q\frac{l}{2} - Pl = 0;$$

отсюда имеем

$$X_A = 0, \quad Y_A = Q + P, \quad M^* = \frac{Q + 2P}{2} l.$$

§ 5.4. Задачи на равновесие системы тел

Рассмотрим задачу о нахождении опорных реакций трехшарнирной арки, которая состоит из двух частей, M и N, имеющих шарнирные опоры A и B и соединенных между собой идеальным шарниром C (рис. 5.15, *а*). Если рассматривать эту систему тел как одно твердое тело (аксиома 5), то будем иметь три уравнения равновесия с четырьмя неизвестными X_A, Y_A, X_B, Y_B (проекции опорных реакций в точках A и B).

Тем не менее эта задача статически определенная. Дело в том, что в равновесии находятся два тела M и N, соединенных между собой шарниром C, и можно рассматривать равновесие каждого тела в отдельности. Таким образом, число уравнений равновесия будет равно шести — по три уравнения для каждого тела. Действие тела N на тело M, передаваемое через идеальный шарнир, может быть заменено одной силой, а действие тела M на тело N может быть заменено такой же по модулю силой, но противоположно направленной (аксиома 4).

Рассмотрим равновесие каждого тела в отдельности. На рис. 5.15, *б* указаны силы, приложенные к телам M и N, причем силы $\mathbf{X}_C$ и $\mathbf{Y}_C$ представляют собой составляющие силы, заменяющие собой действие тела N на тело M, а $\mathbf{X}'_C$, $\mathbf{Y}'_C$ — составляющие силы, заменяющие действие тела M на тело N.

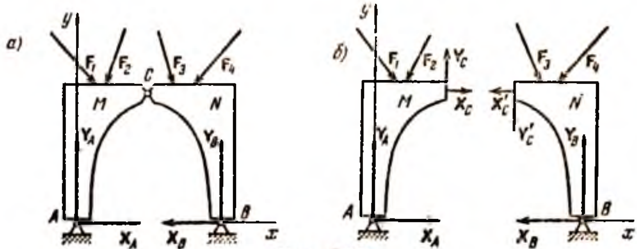


Рис. 5.15

Для каждого тела мы можем составить по три уравнения равновесия, т. е. всего шесть уравнений, неизвестных же тоже будет шесть, так как в силу аксиомы 4

$$\mathbf{X}_C = -\mathbf{X}'_C, \quad \mathbf{Y}_C = -\mathbf{Y}'_C.$$

Указанный путь решения задачи, конечно, не единственный. Можно, например, составить три уравнения равновесия для тела M, а остальные три — для системы тел M и N, принимая их за одно твердое тело, или составить уравнения равновесия для тела N и уравнения равновесия для системы тел M и N, как для одного твердого тела. Целесообразность применения того или иного способа решения задачи зависит от условий конкретной задачи.

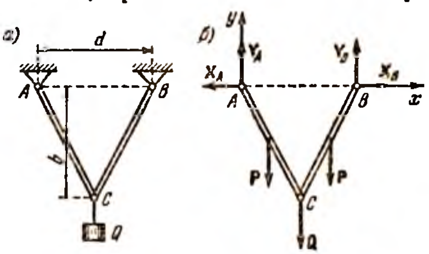


Рис. 5.16

Задача 5.6. Два однородных стержня одинаковой длины соединены шарнирно в точке C и шарнирно закреплены в точках A и B. Вес каждого стержня равен P. В точке C к системе стержней подвешен груз Q. Расстояние $AB = d$. Расстояние точки C до горизонтальной прямой AB равно b. Определить реакции шарниров A и B (рис. 5.16, *а*).

Заменяя действие опор реакциями, рассмотрим сначала равновесие этой системы в целом (рис. 5.16, *б*). Уравнения равновесия (5.16) в этом случае будут

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -X_A + X_B = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A + Y_B - 2P - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -P\frac{d}{4} - Q\frac{d}{2} - P\frac{3d}{4} + Y_B d = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$Y_A = Y_B = P + Q/2, \quad X_A = X_B.$$

Для нахождения X_A рассмотрим теперь равновесие левого стержня. Сумма моментов всех сил, приложенных к левому стержню, относительно C должна быть равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = X_A b - Y_A \frac{d}{2} + P\frac{d}{4} = 0;$$

отсюда

$$X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P+Q).$$

Задача 5.7. Определить опорные реакции системы, состоящей из двух балок, сочлененных идеальным шарниром, если $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 6$ кН, $a = 2$ м. Конец A балки AC защемлен, конец B балки CB укреплен в катковой опоре (рис. 5.17, *а*).

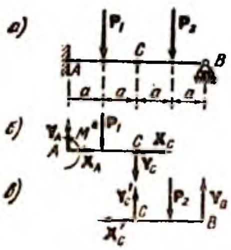


Рис. 5.17

Рассмотрим равновесие каждой балки в отдельности. Мы получаем два твердых тела, на которые действуют реакции внешних связей $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, M^*, $\mathbf{Y}_B$ и попарно равные силы взаимодействия $\mathbf{X}_C = -\mathbf{X}'_C$, $\mathbf{Y}_C = -\mathbf{Y}'_C$. Таким образом, общее число неизвестных равно шести.

Запишем уравнения равновесия в форме (5.16) для левой балки (рис. 5.17, *б*):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + X_C = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - P_1 - Y_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = M^* - P_1 a - Y_C 2a = 0;$$

для правой балки (рис. 5.17, *в*):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -X'_C = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y'_C + Y_B - P_2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = -P_2 a + Y_B 2a = 0.$$

На основании аксиомы 4 (третьего закона Ньютона) модули сил $\mathbf{X}_C$ и $\mathbf{X}'_C$, а также сил $\mathbf{Y}_C$ и $\mathbf{Y}'_C$, равны между собой, т. е. $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$. Учитывая эти равенства и решая затем полученную систему уравнений, находим

$$X_A = 0, \quad X_C = 0,$$

$$Y_A = 13 \text{ кН}, \quad Y_C = 3 \text{ кН}, \quad Y_B = 3 \text{ кН}, \quad M^* = 32 \text{ кН·м}.$$

§ 5.5. Условия равновесия частично закрепленного тела

В некоторых случаях приходится рассматривать равновесие частично закрепленных тел, т. е. тел, на которые наложены связи, допускающие некоторое перемещение тела. Два примера такого рода изображены на рис. 5.18, *а*, *б*. Очевидно, что при произвольной системе активных сил $\mathbf{F}_k$, приложенных к телу, равновесия не будет. Однако возможны и такие случаи, когда равновесие имеет место. Выясним условия, которым должны удовлетворять активные силы, чтобы тело находилось в равновесии. Прежде всего остановимся на случае твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения; к телу приложена система активных сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_n$, расположенная в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (рис. 5.18, *а*). Ось вращения служит связью для рассматриваемого тела; согласно принципу освобождаемости действие связи заменяем реакцией $\mathbf{N}$, приложенной к точке A (предполагаем, что трение отсутствует).

Направление реакции $\mathbf{N}$ зависит от характера приложенных к телу сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$. Напишем уравнения равновесия в форме (5.18):

$$N_x + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,$$

$$N_y + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

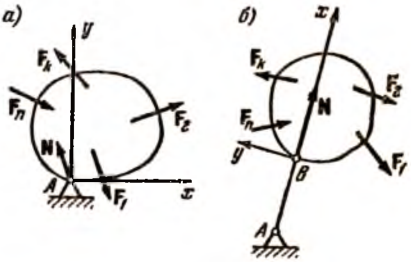


Рис. 5.18

Из первых двух уравнений можно найти обе составляющие реакции $\mathbf{N}$. В последнее уравнение $\mathbf{N}$ не входит. Это уравнение устанавливает зависимость между активными силами, необходимую для равновесия тела.

Таким образом, для рассматриваемого случая активные силы должны удовлетворять одному уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0. \tag{5.21}$$

Обратимся теперь ко второму примеру (рис. 5.18, *б*), где связью служит стержень. Направление реакции N фиксировано и совпадает с осью стержня. Выбирая систему координат Bxy, как указано на рис. 5.18, *б*, имеем следующие уравнения равновесия:

$$N_x + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Первое уравнение служит для определения реакции $\mathbf{N}$. Два остальных уравнения накладывают определенные требования на систему активных сил. Таким образом, для равновесия тела необходимо, чтобы активные силы в данном случае удовлетворяли двум условиям:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0. \tag{5.22}$$

Последнее уравнение записано для точки тела B; понятно, что его можно видоизменить, записав его для любой точки оси x.

§ 5.6. Определение натяжения тяжелой подвешенной нити

Задача об определении натяжения в подвешенной тяжелой нити (рис. 5.19, *а*) связана с проблемой прочности тросов или проводов линий электропередачи. Будем считать, что нить идеально гибкая и нерастяжимая и что провисание нити происходит только из-за различия между ее длиной L и расстоянием между опорами l (рис. 5.19, *а*).

Обозначим через q линейный удельный вес нити. Для пологой кривой можно принять, что вес равномерно распределен не по кривой AOB, а по ее проекции AB. Таким образом, общий вес нити будем считать равным ql.

В соответствии с аксиомой 5 можно рассматривать условия равновесия любой части нити. Рассмотрим, например, правую половину нити; действующие на нее силы изображены на рис. 5.19, *б*. Заметим, что натяжение в любом сечении нити направлено по касательной к кривой в соответствующем месте (это следует из предположения об идеальной гибкости нити). Поэтому в нижней точке нити O, принятой за начало координатной системы, натяжение горизонтально. Обозначив через f стрелу провеса (т. е. расстояние по вертикали между нижней точкой и опорами), запишем уравнение моментов относительно точки B

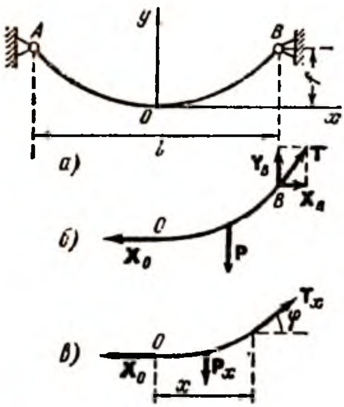


Рис. 5.19

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = -X_0 f + P\frac{l}{4} = 0.$$

Здесь $P = ql/2$ представляет собой вес половины нити. Из этого уравнения находим

$$X_O = \frac{ql^2}{8f}; \tag{5.23}$$

отсюда, между прочим, ясно, что чем меньше стрела провеса нити f, тем больше натяжение X_O.

Из двух уравнений для проекций сил на оси можно найти составляющие натяжения в точке B

$$X_B = X_O = \frac{ql^2}{8f}, \qquad Y_B = \frac{ql}{2},$$

а затем и полное натяжение в точке B

$$T = \frac{ql^2}{8f}\sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}.$$

Второе слагаемое в сумме под знаком корня значительно меньше единицы, и мы можем воспользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2},$$

достаточно точной для малых значений α. Тогда будет

$$T \approx \frac{ql^2}{8f} + qf. \tag{5.24}$$

Этот результат определяет наибольшее натяжение нити, которое, впрочем, мало отличается от наименьшего натяжения X_O.

Для вычисления X_O и T по найденным формулам необходимо знать стрелу провеса f, а для этого требуется располагать уравнением кривой, по которой провиснет нить. С этой целью рассмотрим часть нити, расположенную между началом координат и произвольным сечением с абсциссой x (рис. 5.19, *в*). Для этой части можно написать следующие уравнения равновесия (для проекций сил на оси x и y):

$$-X_O + T_x \cos\varphi = 0, \qquad T_x \sin\varphi - P_x = 0.$$

Здесь $P_x = qx$ — вес рассматриваемой части нити, T_x — натяжение на правом конце этой части.

Из первого уравнения можно заключить, что с удалением от нижней точки, т. е. с увеличением угла φ, натяжение нити возрастает и достигает максимума в точках подвеса.

Исключив из этих уравнений T_x, получим с учетом формулы (5.23)

$$\operatorname{tg}\varphi = 8fx/l^2,$$

но $\operatorname{tg}\varphi = dy/dx$, и мы приходим к дифференциальному уравнению, определяющему форму нити в положении равновесия:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8fx}{l^2}. \tag{5.25}$$

Интегрируя его, получаем

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что $y = 0$ при $x = 0$:

$$y = 4fx^2/l^2.$$

Таким образом, приближенно установлено, что тяжелая нить в положении равновесия принимает форму параболы *). Теперь можно выразить стрелу провеса f через L и l. Для этого запишем известное из курса математического анализа выражение длины дуги

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

и заметим, что для пологой нити $y'^2 \ll 1$. Поэтому $\sqrt{1 + y'^2} \approx 1 + {}^1/_2 y'^2$. Тогда будем иметь

$$L \approx \int_{-l/2}^{l/2} \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx = l + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} y'^2\,dx.$$

Подставляя сюда выражение (5.25), находим

$$L = l + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{8fx}{l^2}\right)^2 dx = l + \frac{16f^2}{3l};$$

отсюда получаем

$$f = {}^1/_4 \sqrt{3l\,(L - l)}. \tag{5.26}$$

---

*) В тех случаях, когда стрела провеса f не мала по сравнению с длиной пролета l, уравнение кривой равновесия тяжелой нити определяет цепную линию (см., например: Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980. — 240 с.).

Задача 5.8. Определить наименьшее и наибольшее натяжение нити, если вес единицы длины составляет 100 Н, длина пролета $l = 20$ м, а полная длина нити $L = 21$ м.

Прежде всего по формуле (5.26) находим

$$f = {}^1/_4 \sqrt{3\cdot 20\cdot 1} = 1{,}94 \text{ м}.$$

Наименьшее натяжение нити (в нижней точке) определяется по формуле (5.23):

$$X_0 = \frac{100\cdot 20^2}{8\cdot 1{,}94} = 2577 \text{ Н}.$$

Наибольшее натяжение (в точках подвеса) находим по формуле (5.24):

$$T = 257 + 100\cdot 1{,}94 \approx 2771 \text{ Н}.$$

§ 5.7. Определение реакций упругих опор твердого тела

Если твердое тело опирается на большое число опор, то задача нахождения реакций может оказаться статически неопределенной. Такова, например, балка, изображенная на рис. 5.20, *а*. Очевидно, что трех уравнений равновесия недостаточно для определения пяти реакций, т. е. система статически неопределимая

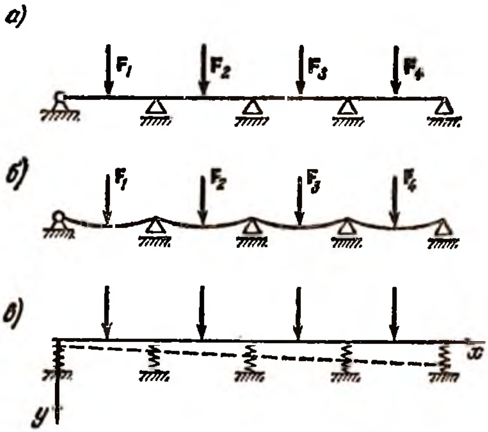


Рис. 5.20

(единственная определимая реакция, горизонтальная реакция левой опоры, равна нулю).

Задача определения реакций в таких системах, вообще говоря, выходит за рамки курса теоретической механики и чаще всего требует использования методов сопротивления материалов. При этом приходится отказываться от предположения об абсолютной жесткости балки и исследовать ее изгиб под действием заданной нагрузки и неизвестных реакций (рис. 5.20, *б*).

Однако среди статически неопределенных задач встречаются такие, которые не требуют привлечения сложных соображений. Здесь мы имеем в виду такие системы, которые можно схематизировать в виде абсолютно твердых тел, покоящихся на упругих опорах. Примером может служить та же балка (в предположении ее абсолютной жесткости), лежащая на упругих опорах, показанных на рис. 5.20, *в*.

В качестве дополнительного условия примем, что реакции опор пропорциональны их осадкам при одинаковом для всех опор коэффициенте жесткости; по-видимому, это условие приемлемо в тех случаях, когда физические свойства всех опор одинаковы. Как мы сейчас убедимся, это условие вместе с уравнениями равновесия позволяет легко найти все опорные реакции независимо от их числа. После приложения нагрузки опоры несколько осядут, а балка займет новое положение. Принимая координатные оси, как показано на рис. 5.20, *в*, мы можем записать уравнение смещенной оси балки в виде

$$y = a + bx.$$

Обоснованный выбор расчетной схемы в виде *б*) или *в*) определяется конкретными соотношениями жесткости балки и опор. Однако случай *б*) мы вынуждены оставить в стороне и будем рассматривать только случай *в*) *). Обозначим соответственно осадки опор через y_j (рис. 5.21), причем

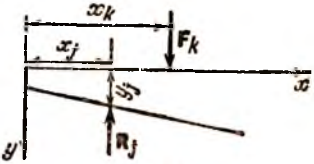


Рис. 5.21

$$y_j = a + bx_j$$

(x_j — абсцисса j-й опоры).

По предположению, реакции опор пропорциональны осадкам

$$R_j = ky_j = k(a + bx_j),$$

где k — коэффициент жесткости; для определения реакций значение коэффициента жесткости несущественно. Введем неизвестные параметры $a_0 = ka$ и $b_0 = kb$; тогда реакции всех опор будут выражены через эти две неизвестные:

$$R_j = a_0 + b_0 x_j. \tag{5.27}$$

Для их определения воспользуемся двумя уравнениями равновесия плоской системы параллельных сил (рис. 5.21):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} - \sum_{j=1}^{m} R_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k F_{ky} - \sum_{j=1}^{m} x_j R_j = 0; \tag{5.28}$$

здесь n — число заданных сил, m — число неизвестных реакций. Подставляя выражение (5.27) в систему уравнений (5.28), получим

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} - a_0 m - b_0 \sum_{j=1}^{m} x_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k F_{ky} - a_0 \sum_{j=1}^{m} x_j - b_0 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$a_0 = \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k F_{ky}\right)}{m\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j\right)^2},$$

$$b_0 = \frac{m\sum\limits_{k=1}^{n} x_k F_{ky} - \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}\right)}{m\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j\right)^2}.$$

Внося эти значения a_0 и b_0 в формулу (5.27), получим решение задачи.

К той же категории относится и следующая задача.

---

*) Может оказаться, что необходим одновременный учет малой жесткости балки и малой жесткости опор.

Задача 5.9. К жесткой плите A, прикрепленной несколькими болтами к основанию B, приложена активная пара сил, действующая в плоскости плиты. Момент пары равен M, координаты центров болтов x_k и y_k известны (рис. 5.22, *а*). Под действием пары произойдут малые деформации болтов, и плита повернется вокруг некоторого центра («центра жесткости») на малый угол.

Найти положение центра жесткости и усилия, действующие на каждый болт, считая, что усилия перпендикулярны радиусам-векторам центров болтов, проведенным из центра жесткости. Усилия можно принять пропорциональными модулям этих радиусов-векторов.

Схема сил, действующих на плиту, представлена на рис. 5.22, *б*, причем через $\mathbf{F}_k$ обозначены реакции болтов. Система сил $\mathbf{F}_k$ вместе с моментом M (рис. 5.22, *б*) находится в равновесии и должна удовлетворять трем уравнениям равновесия.

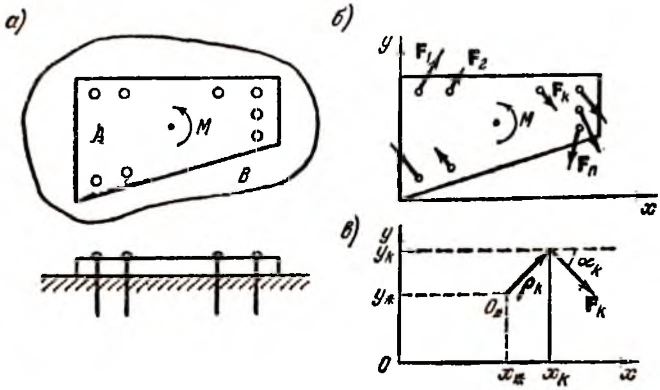


Рис. 5.22

Очевидно, что этих трех уравнений недостаточно для нахождения всех усилий, так как общее число неизвестных равно $2n$ (каждое усилие определяется двумя проекциями на координатные оси x и y). Тем не менее нам удается решить до конца эту задачу, опираясь на указанные выше дополнительные условия.

Обозначим через x_* и y_* искомые координаты центра жесткости и через ρ_k — радиусы-векторы центров болтов, проведенные из центра жесткости (рис. 5.22, *в*).

Усилия F_k, как было сказано, принимаются пропорциональными величинам ρ_k, т. е.

$$F_k = k\rho_k, \tag{5.29}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Проекции усилий $\mathbf{F}_k$ на оси координат, очевидно, будут

$$F_{kx} = F_k \cos\alpha_k = F_k \frac{y_k - y_*}{\rho_k}, \quad F_{ky} = -F_k \sin\alpha_k = -F_k \frac{x_k - x_*}{\rho_k}.$$

Подставляя сюда выражение (5.29), находим

$$F_{kx} = k(y_k - y_*), \quad F_{ky} = -k(x_k - x_*). \tag{5.30}$$

Заметим, что все $2n$ неизвестные составляющие реакций выражены всего через три числа: координаты центра жесткости x_*, y_* и коэффициент пропорциональности k. Для определения этих величин мы располагаем тремя уравнениями равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = k\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_*) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = -k\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_*) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{O_*z} = -k\sum_{k=1}^{n}[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2] + M = 0. \tag{5.31}$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение моментов всей системы сил относительно центра жесткости O_*, причем для момента силы $\mathbf{F}_k$ имеем

$$M_{O_*z}(\mathbf{F}_k) = -F_k\rho_k = -k\rho_k^2 = -k[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2].$$

Из первых двух уравнений системы (5.31) находим координаты центра жесткости

$$x_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad y_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{5.32}$$

после чего из третьего уравнения следует

$$k = \frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{n}[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2]}. \tag{5.33}$$

Теперь можно с помощью формул (5.29) найти все усилия F_k.

§ 5.8. Приложение методов статики к определению усилий в стержнях фермы

При перекрытии больших пролетов (мосты, промышленные здания и т. п.) и в крупных строительных кранах часто применяются сквозные конструкции, называемые *фермами* (рис. 5.23). Ферма состоит из большого числа стержней, соединенных в точках схода их осей; соединения стержней называются *узлами*.

Важной частью инженерного расчета фермы является определение усилий, возникающих в стержнях при действии заданной нагрузки на ферму. При этом обычно исходят из следующих упрощающих предположений:

1) внешние силы приложены только в узлах фермы;

2) веса стержней пренебрежимо малы;

3) узлы представляют собой идеальные шарниры (т. е. силы трения в них не возникают).

При таких допущениях сила, действующая со стороны какого-либо узла на примыкающий к нему стержень (усилие в стержне), всегда направлена вдоль прямой, проходящей через концы этого стержня. Поэтому стержни, если они прямолинейные, либо растягиваются, либо сжимаются под действием этих сил.

Прежде чем обратиться к определению усилий в стержнях, необходимо рассмотреть вопросы структуры ферм.

Простейшей плоской фермой является трехстержневая ферма ABC, изображенная на рис. 5.24, *а*; она содержит три узла. Если к этой конструкции добавить еще один узел D с помощью двух стержней, то вновь получится неизменяемая ферма, содержащая пять стержней и четыре узла (рис. 5.24, *б*). Добавляя этим же способом новые узлы, как показано на рис. 5.24, *б* штриховой линией, можно образовать множество более сложных ферм.

Простой плоской фермой называется такая ферма, которая может быть получена из треугольной путем последовательного присоединения каждого нового узла при помощи двух новых стержней.

Найдем связь между числом s стержней и числом n узлов в простой ферме. Число добавляемых узлов в простой ферме равно $n-3$, а число добавляемых

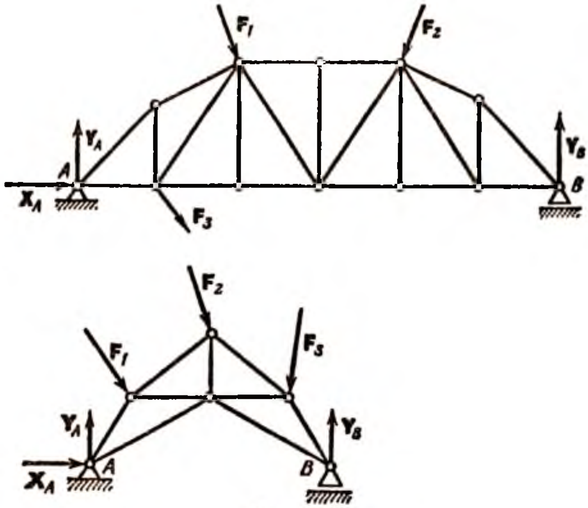


Рис. 5.23

стержней равно $s-3$. Из способа построения простой фермы видно, что число новых стержней в два раза больше числа новых узлов; следовательно,

$$s-3=2(n-3),$$

т. е.

$$s=2n-3. \tag{5.34}$$

Простая ферма всегда статически определима, т. е. число независимых уравнений статики достаточно для определения усилия в каждом стержне.

В самом деле, для каждого узла можно составить два уравнения равновесия, так как на узел действует сходящаяся система сил. Таким образом, всегда можно

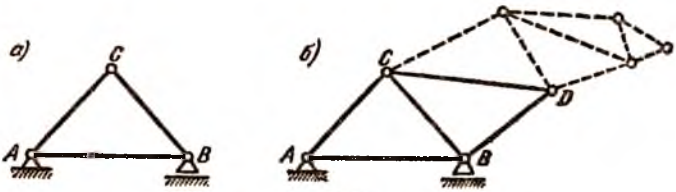


Рис. 5.24

составить $2n$ уравнений равновесия. Подсчитаем теперь число содержащихся в них неизвестных. Прежде всего, неизвестными будут все s реакций стержней, кроме того, неизвестны три опорные реакции (X_A, Y_A, Y_B на рис. 5.23). Таким образом, всего имеем $s+3$ неизвестных. Воспользовавшись соотношением (5.34), получим

$$s+3=2n-3+3=2n,$$

т. е. число неизвестных равно числу уравнений равновесия, поэтому простые фермы всегда статически определимы.

При расчете ферм обычно составляют сначала три уравнения равновесия для всей фермы, определяют из них три опорные реакции, а затем уже приступают к нахождению усилий в стержнях.

Рассмотрим способ расчета фермы, который позволяет найти усилие в любом стержне фермы независимо от усилий в других стержнях. Согласно этому способу предварительно необходимо определить реакции опор. Для этого следует рассматривать ферму как абсолютно твердое тело и написать соответствующие три уравнения равновесия. Затем мысленно произвести полное рассечение фермы на две части; при надлежащем выборе сечения мысленно перерезаются, как правило, три стержня. Поэтому для определения трех неизвестных усилий могут быть записаны три уравнения равновесия сил, приложенных к какой-либо из полученных частей фермы. Чаще всего пользуются уравнениями в форме (5.17), но иногда пользуются и формой (5.18).

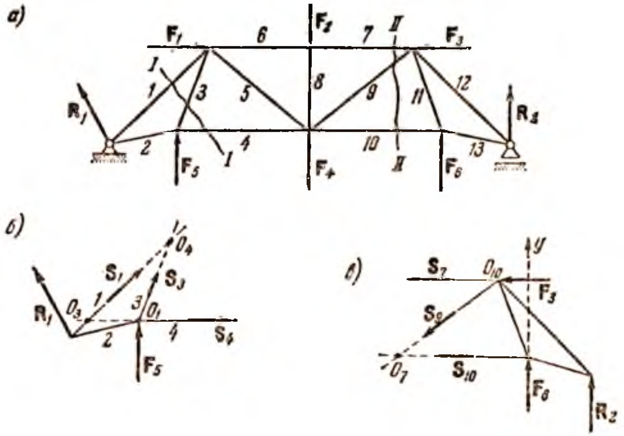


Рис. 5.25

Рассмотрим для примера ферму, изображенную на рис. 5.25, и предположим, что опорные реакции найдены.

Пусть требуется определить усилие в стержне *4*. Для этого мысленно рассечем ферму разрезом *I — I* и рассмотрим равновесие левой части фермы, изображенной на рис. 5.25, *а* (вместо этого можно рассматривать правую часть фермы — результат от этого не изменится, но вычисления окажутся более громоздкими). На эту часть действуют известные силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{F}_5$, а также три неизвестные по модулю силы $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$. Для определения искомого модуля силы S_4 составляем уравнение моментов относительно точки пересечения направлений *1* и *3* (точка O_4); при таком выборе моментной точки усилия $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_3$ в уравнение равновесия не войдут, и оно будет содержать только одну неизвестную величину — искомое усилие S_4 (такой выбор точек, относительно которых берут моменты, типичен для рассматриваемого способа). Обычно при составлении уравнения равновесия размеры плеч сил снимаются с чертежа с учетом его масштаба. Понятно, что решение полученного уравнения не вызовет никаких затруднений. Совершенно таким же образом составляются уравнения моментов относительно точки O_1 (для определения усилия S_1) и точки O_3 (для определения усилия S_3).

Для определения усилий в других стержнях требуются иные рассечения фермы; так, на рис. 5.25, *а* показано также рассечение *II—II*, необходимое для определения усилий в стержнях *7*, *9* и *10*. Для определения указанных усилий проще рассматривать равновесие правой части фермы, как это показано на рис. 5.25, *в*. Через O_7

и O_{10} обозначены точки, относительно которых берутся моменты; мы получим по одному неизвестному усилию в каждом из уравнений моментов. Определение усилия в стержне 9 обладает некоторой особенностью. Дело в том, что точка пересечения усилий S_7 и S_{10} бесконечно удалена, и уравнение моментов составить нельзя. В этом случае вместо него можно составить уравнение проекций на ось y, что позволит достигнуть той же цели: получить уравнение с одним неизвестным усилием S_9.

Способ рассечения весьма удобен для простых схем ферм, образованных путем наращивания последовательных треугольников. В более сложных случаях все же приходится решать системы уравнений, так как не удается проводить сечение только через три стержня.

Графический метод определения усилий в стержнях фермы с помощью диаграммы Максвелла — Кремоны применялся более ста лет. Этим методом пользовались для технических расчетов довольно сложных ферм, число стержней в которых достигало иногда более 150 единиц. С появлением ЭВМ графические методы полностью утратили свое значение и в настоящее время все вычисления производятся на ЭВМ. Последние позволили не только увеличить число определяемых неизвестных на два-три порядка, но дали возможность учитывать такие факторы, как вес стержней, силы трения в узлах, другие силы, которые могут действовать на ферму. В настоящем издании метод построения диаграммы Максвелла — Кремоны опущен, а применение ЭВМ для расчета ферм не излагается — это специальная дисциплина.

Глава VI
РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

§ 6.1. Равновесие тела при наличии трения скольжения

Если два тела *I* и *II* (рис. 6.1) взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь в точке A, то всегда реакцию $\mathbf{R}_A$, действующую, например, со стороны тела *II* и приложенную к телу *I*, можно разложить на две составляющие: $\mathbf{N}_A$, направленную по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке A, и $\mathbf{T}_A$, лежащую в касательной плоскости. Составляющая $\mathbf{N}_A$ называется *нормальной реакцией*, сила $\mathbf{T}_A$ называется *силой трения скольжения* — она препятствует скольжению тела *I* по телу *II*. В соответствии с аксиомой 4 (третьим законом Ньютона) на тело *II* со стороны тела *I* действует равная по модулю и противоположно направленная сила реакции. Ее составляющая, перпендикулярная касательной плоскости, называется *силой нормального давления*. Как было сказано выше, сила трения $T_A = 0$, если соприкасающиеся поверхности идеально гладкие. В реальных условиях поверхности шероховаты и во многих случаях пренебречь силой трения нельзя.

Для выяснения основных свойств сил трения произведем опыт по схеме, представленной на рис. 6.2, *а*. К телу B, находящемуся на неподвижной плите D, присоединена перекинутая через блок C нить, свободный конец которой снабжен опорной площадкой A. Если площадку A постепенно нагружать, то с увеличением ее общего веса будет возрастать натяжение нити S, которое стремится сдвинуть тело вправо. Однако пока общая нагрузка не слишком велика, сила трения $\mathbf{T}$ будет удерживать тело B в покое. На рис. 6.2, *б* изображены действующие на тело B силы, причем через **P** обозначена сила тяжести, а через **N** — нормальная реакция плиты D.

Если нагрузка недостаточна для нарушения покоя, то справедливы следующие уравнения равновесия:

$$N - P = 0, \quad S - T = 0. \tag{6.1}$$

Отсюда следует, что $N = P$ и $T = S$. Таким образом, пока тело находится в покое, сила трения остается равной силе натяжения нити S. Обозначим через T_{max} силу трения в критический момент процесса нагружения, когда тело B теряет равновесие и начинает скользить по плите D. Следовательно, если тело находится в равновесии, то

$$T \leqslant T_{max}. \tag{6.2}$$

Максимальная сила трения T_{max} зависит от свойств материалов, из которых сделаны тела, их состояния (например, от характера обработки поверхности), а также от нормального давления N. Как показывает опыт, максимальная сила трения приближенно пропорциональна нормальному давлению, т. е.

$$T_{max} = fN. \tag{6.3}$$

Это соотношение носит название *закона Амонтона—Кулона.*

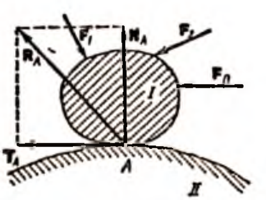


Рис. 6.1

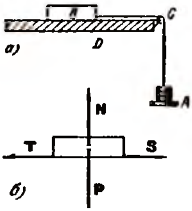


Рис. 6.2

Безразмерный коэффициент f называется *коэффициентом трения скольжения.* Как следует из опыта, его *значение в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей,* но зависит от материала и степени шероховатости соприкасающихся поверхностей. Значения коэффициентов трения устанавливаются опытным путем, и их можно найти в справочных таблицах.

Неравенство (6.2) можно теперь записать в виде

$$T \leqslant fN. \tag{6.4}$$

Случай строгого равенства в (6.4) отвечает максимальному значению силы трения. Это значит, что силу трения можно вычислять по формуле $T = fN$ только в тех случаях, когда заранее известно, что имеет место критический случай. Во всех же других случаях силу трения следует определять из уравнений равновесия.

Задача 6.1. Тяжелая плита AB силы тяжести **P**, длины l опирается на идеально гладкую стенку OB и шероховатый пол OA (рис. 6.3, a). Определить, при каких углах наклона плиты возможно ее равновесие, если коэффициент трения плиты и пола равен f. Составим уравнение равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = N_B - T_A = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N_A - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = P\frac{l}{2}\cos\alpha - N_B l \sin\alpha = 0.$$

Кроме того, в соответствии с условием (6.4) должно быть

$$T_A \leqslant f N_A.$$

Решая уравнения, получим

$$N_B = T_A = (P/2)\operatorname{ctg}\alpha, \quad N_A = P.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1/(2f).$$

Последнее неравенство и содержит решение задачи. Критическое значение угла α^* определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha^* = 1/(2f).$$

Определим теперь критическое значение угла α^* с учетом трения плиты о стенку, если соответствующий коэффициент трения равен также f.

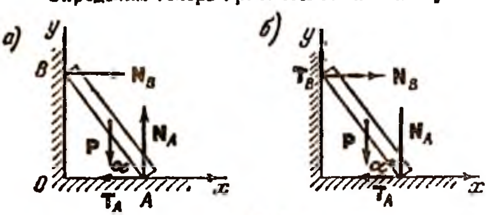


Рис. 6.3

Относящаяся к этому случаю силовая схема изображена на рис. 6.3, *б*. В общем случае система является статически неопределимой, так как содержит четыре неизвестные реакции, а мы располагаем только тремя уравнениями равновесия (при заданном угле α нельзя найти силы трения и нормальные давления). Однако в критическом состоянии силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям, и это позволяет решить задачу. Для этого состояния имеем два уравнения для сил трения

$$T_A = f N_A, \quad T_B = f N_B$$

и три уравнения равновесия

$$N_B - T_A = 0, \quad N_A + T_B - P = 0, \quad \frac{Pl}{2}\cos\alpha^* - N_B l \sin\alpha^* - T_B l \cos\alpha^* = 0.$$

В этих пяти уравнениях содержатся четыре неизвестные реакции и неизвестное критическое значение угла α^*. Решая эту систему уравнений, находим

$$\operatorname{tg}\alpha^* = \frac{1-f^2}{2f}, \quad N_A = \frac{P}{1+f^2}, \quad T_A = \frac{Pf}{1+f^2}, \quad N_B = \frac{Pf}{1+f^2}, \quad T_B = \frac{Pf^2}{1+f^2}.$$

Подчеркнем, что последние четыре выражения относятся только к критическому состоянию, но если

$$T_A < f N_A, \quad T_B < f N_B,$$

то задача становится статически неопределенной (для ее решения необходимо привлечь какие-либо соображения, выходящие за рамки наших представлений о твердых телах).

Задача 6.2. На шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтальной плоскостью, находится тело веса $P = 20$ Н (рис. 6.4, *а*). Тело удерживается на плоскости тросом AB, весом которого можно пренебречь. Определить силу трения T между телом и плоскостью и минимальное натяжение троса S при двух значениях коэффициента трения: $f_1 = 0{,}8$ и $f_2 = 0{,}2$.

На тело действуют четыре силы: активная сила тяжести **P**, сила трения **T**, нормальная составляющая реакции плоскости **N** и реакция троса **S** (рис. 6.4, *б*). Составим условия равновесия тела:

$$\sum_{k=1}^{4} F_{kx} = P\sin\alpha - T - S = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} F_{ky} = N - P\cos\alpha = 0, \quad T \leqslant fN.$$

Отсюда найдем:

$$S = P\sin\alpha - T, \quad N = P\cos\alpha, \quad T \leqslant fP\cos\alpha,$$

или, учитывая условия задачи,

$$S = 10 - T, \quad T \leqslant 17{,}3f.$$

Для первого случая $f_1 = 0{,}8$ будем иметь: $T \leqslant 13{,}8$ Н. При отсутствии троса ($S = 0$) получим $T = 10$ Н. Так как при этом условие $T \leqslant 13{,}8$ Н не нарушается, то это означает, что при $f_1 = 0{,}8$ тело будет находиться в равновесии за счет одной силы трения $T = 10$ Н.

Пусть теперь $f_2 = 0{,}2$. Тогда должно выполняться условие $T \leqslant 17{,}3 \cdot f_2 = 3{,}46$ Н. При отсутствии троса ($S = 0$) это неравенство находится в противоречии

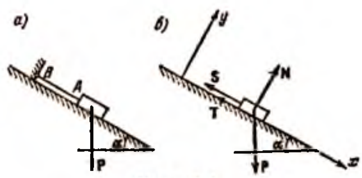


Рис. 6.4

с первым уравнением $10 - T = 0$. Это означает, что при отсутствии троса тело начало бы скользить вниз. Поэтому при $f_2 = 0{,}2$ сила трения достигает своего максимального значения, равного 3,46 Н, а натяжение троса будет: $S = 10 - T = 6{,}54$ Н.

Итак,

$$\text{при } f_1 = 0{,}8: \quad T = 10 \text{ Н}, \quad S = 0;$$

$$\text{при } f_2 = 0{,}2: \quad T = 3{,}46 \text{ Н}, \quad S = 6{,}54 \text{ Н}.$$

Задача 6.3. К однородной прямоугольной призме веса G, находящейся на шероховатой горизонтальной плоскости, прислонена под углом α однородная балка силы тяжести P и длины $2l$ (рис. 6.5, *а*). Коэффициент трения между балкой и плоскостью

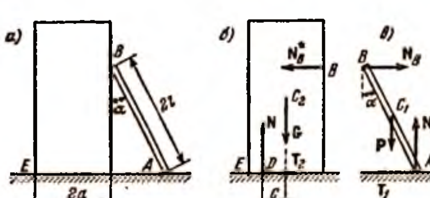


Рис. 6.5

равен f_1, а между призмой и плоскостью f_2. Пренебрегая силами трения между балкой и призмой и поперечными размерами балки, определить: 1) условия равновесия всей системы; 2) условия, при которых призма останется в покое, а балка начнет двигаться; 3) условия, при которых конец A балки останется в покое, а призма начнет скользить по плоскости влево или опрокидываться вокруг ребра E.

Расчленим систему и изобразим все силы (активные и реакции связей), действующие на призму (рис. 6.5, *б*) и балку (рис. 6.5, *в*). На призму действуют сила тяжести **G**, сила давления $\mathbf{N}_B^*$ балки на призму, равнодействующая сил нормального давления плоскости **N**, приложенная в некоторой точке D, и сила трения $\mathbf{T}_2$. На балку действуют сила тяжести **P**, сила давления $\mathbf{N}_B$ призмы на балку, нормальная составляющая $\mathbf{N}_A$ реакции плоскости и сила трения $\mathbf{T}_1$. Конечно, модули сил $\mathbf{N}_B$ и $\mathbf{N}_B^*$ равны между собой (аксиома 4).

Будем считать вначале, что вся система находится в покое, и составим условия равновесия балки:

$$\sum_k F_{kx} = N_B - T_1 = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N_A - P = 0,$$

$$\sum_k M_{Az}(\mathbf{F}_k) = Pl \sin\alpha - N_B \cdot 2l \cos\alpha = 0, \quad T_1 \leqslant f_1 N_A.$$

Из уравнений находим

$$T_1 = N_B, \quad N_A = P, \quad N_B = (P/2)\operatorname{tg}\alpha.$$

Внеся значения T_1 и N_A в неравенство, получим условия равновесия балки:

$$\operatorname{tg}\alpha < 2f_1.$$

Составим теперь условия равновесия призмы:

$$\sum_k F_{kx} = T_2 - N_B^* = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N - G = 0,$$

$$\sum_k M_{Dz}(\mathbf{F}_k) = N_B^* \cdot 2l \cos\alpha - G \cdot c = 0, \quad T_2 \leqslant f_2 N.$$

Из уравнений находим

$$T_2 = N_B^*, \quad N = G, \quad N_B^* = \frac{c}{2l\cos\alpha} G.$$

Число c нам неизвестно, но его можно найти из равенства $N_B^* = N_B$, или

$$\frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{2l\cos\alpha} G;$$

отсюда

$$c = \frac{P}{G} l \sin\alpha.$$

Так как точка приложения силы **N**, точка D, не может находиться левее точки E, то $c \leqslant a$, или

$$\frac{P}{G} l \sin\alpha \leqslant a,$$

что дает нам еще одно условие равновесия:

$$\sin\alpha \leqslant \frac{a}{l}\frac{G}{P}.$$

Это неравенство равносильно требованию, чтобы под действием силы $\mathbf{N}_B^*$ призма не опрокинулась вокруг ребра E (его можно получить из условия, чтобы момент силы $\mathbf{N}_B^*$ относительно точки E не превосходил по модулю момента силы G относительно той же точки).

Потребуем теперь, чтобы призма не скользила по плоскости, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$T_2 \leqslant f_2 N.$$

Имеем: $T_2 = N_B^* = N_B = {}^1/_2 P \operatorname{tg} \alpha$, $N = G$. Подставляя это в написанное выше неравенство, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 G/P.$$

Таким образом, вся система будет находиться в покое, если угол α удовлетворяет трем условиям:

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_1, \quad \sin \alpha \leqslant \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 \frac{G}{P}. \tag{6.5}$$

Если будет нарушено только первое из этих неравенств, т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha > 2f_1, \quad \sin \alpha \leqslant \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 \frac{G}{P},$$

призма останется в покое, а балка начнет двигаться.

Если будет нарушено только второе условие (6.5), т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_1, \quad \sin \alpha > \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 \frac{G}{P},$$

точка A балки останется в покое, а призма начнет опрокидываться вокруг ребра E.

Наконец, если будет нарушено только третье условие (6.5), т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_1, \quad \sin \alpha \leqslant \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha > 2f_2 \frac{G}{P},$$

точка A балки снова останется в покое, но призма начнет скользить по плоскости влево.

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности. Будем считать, что в результате действия активных сил и сил реакции тело находится в предельном равновесии. На рис. 6.6, *а* показана предельная реакция $\mathbf{R}$ и ее составляющие $\mathbf{N}$ и $\mathbf{T}_{max}$ (в положении, изображенном на этом рисунке, активные силы стремятся сдвинуть тело вправо, максимальная сила трения $\mathbf{T}_{max}$ направлена влево).

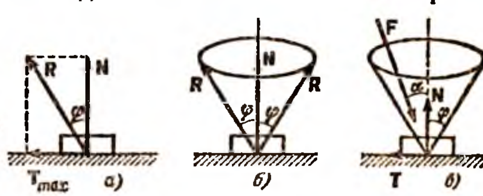


Рис. 6.6

Угол φ *между предельной реакцией* $\mathbf{R}$ *и нормалью к поверхности называется углом трения.* Найдем этот угол. Из рис. 6.6, *а* имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = T_{max}/N, \tag{6.6}$$

или, пользуясь выражением (6.4),

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \tag{6.7}$$

Из этой формулы видно, что вместо коэффициента трения можно задавать угол трения (в справочных таблицах приводятся обе величины).

В зависимости от действия активных сил направление предельной реакции может меняться. Геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции **R** образует коническую поверхность — *конус трения* (рис. 6.6, *б*). Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаков, то согласно формуле (6.7) конус трения будет круговым. В тех случаях, когда коэффициент трения f зависит от направления возможного движения тела, конус трения не будет круговым.

Рассмотрим теперь случай, когда активные силы, действующие на тело, приводятся к одной равнодействующей **F**, составляющей угол α с нормалью к поверхности (рис. 6.6, *в*). Такая сила оказывает двоякое действие: во-первых, ее нормальная составляющая $\mathbf{F}_n$ определяет нормальную составляющую **N** реакции поверхности и, следовательно, предельную силу трения $T_{max} = fN$, а, во-вторых, ее касательная составляющая $\mathbf{F}_\tau$ стремится эту силу преодолеть. Если увеличивать модуль силы **F**, то пропорционально будут возрастать обе составляющие. Отсюда можно заключить, что состояние покоя или движения тела не зависит от модуля силы **F** и определяется только углом α — чем меньше этот угол, тем меньше тенденция к нарушению равновесия.

Для аналитического решения задачи составим условия равновесия тела:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = T - F\sin\alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N - F\cos\alpha = 0, \quad T \leqslant fN.$$

Из уравнений найдем $T = F\sin\alpha$, $N = F\cos\alpha$ и, подставляя их в неравенство, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f,$$

или, учитывая (6.7), $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, при равновесии тела

$$\alpha \leqslant \varphi.$$

Это означает, что если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, то увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела; *для того чтобы тело начало движение, необходимо (и достаточно), чтобы равнодействующая активных сил* **F** *находилась вне конуса трения.*

Задача 6.4. Найти условие, определяющее размер h самотормозящегося механизма, изображенного на рис. 6.7. Необходимо, чтобы приложенная к узлу C сила **F** не могла вызвать скольжения ползунов A и B по вертикальным направляющим. Коэффициент трения $f = 0{,}2$, расстояние между направляющими 2 м.

Сила **F** вызывает сжатие наклонных стержней, и последние передают на ползуны силы давления под некоторым углом к горизонтальной плоскости. Для того чтобы скольжение отсутствовало, ось каждого стержня должна располагаться внутри соответствующего конуса трения. А это имеет место при выполнении условия

$$\operatorname{tg}\varphi < 0{,}2.$$

Но $h = 1\cdot\operatorname{tg}\varphi$, поэтому $h < 0{,}2$ м.

Рассмотрим теперь трение гибких тел. Пусть трос охватывает неподвижный круглый цилиндр. Требуется определить силу натяжения троса **P**, достаточную для уравновешивания силы **Q**, приложенной ко второму концу троса, если между тросом и цилиндром имеется трение (рис. 6.8, *а*).

Опыт показывает, что благодаря трению сила **P** может быть во много раз меньше, чем сила **Q**. Задача будет статически определенной лишь в том случае (представляющем наибольший интерес), когда рассматривается критическое состояние и силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям. Речь идет о критическом состоянии, в котором сила **Q** уже способна вызвать

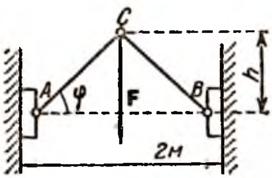


Рис. 6.7

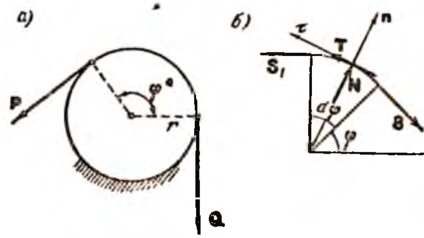


Рис. 6.8

скольжение троса по неподвижному цилиндру (по ходу часовой стрелки).

Нормальное давление и сила трения непрерывно распределены по всей длине охвата φr. Обозначим через **N** и **T** значения этих сил, отнесенных к единице длины троса. Эти силы, конечно, являются функциями полярного угла φ, определяющего положение элемента, т. е. $N = N(\varphi)$, $T = T(\varphi) = fN(\varphi)$. Натяжение троса в любой его точке на цилиндре также является функцией φ, т. е.

$$S = S(\varphi).$$

Выделим элемент троса длины $ds = r\,d\varphi$. На этот элемент действуют две реакции шкива: $\mathbf{T}\,ds$ и $\mathbf{N}\,ds$, а также две силы натяжения, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} + d\mathbf{S}$, приложенные к рассматриваемому элементу в точках рассечения (рис. 6.8, *б*).

Пренебрегая весом троса, запишем условия равновесия выделенного элемента троса, спроектировав силы на направления нормали (n) и касательной (τ), взятые в середине элемента:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kn} = N\,ds - S_1\frac{d\varphi}{2} - S\frac{d\varphi}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} = T\,ds + S_1 - S = 0.$$

При составлении этих уравнений мы воспользовались малостью угла $d\varphi$ и положили

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \quad \cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1.$$

Подставляя в уравнения равновесия вместо S_1 и ds их значения

$$S_1 = S + dS, \quad ds = r\,d\varphi,$$

получаем

$$Nr - S = 0, \quad Tr + \frac{dS}{d\varphi} = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $S = Nr$, а так как $T = fN$, то второе уравнение можно переписать в виде

$$dS = -fS\,d\varphi, \quad \text{или} \quad \frac{dS}{S} = -f\,d\varphi.$$

Выполняя интегрирование в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi^*$, находим

$$\ln\frac{S^*}{S_0} = -f\varphi^*.$$

Здесь S_0 — натяжение в сечении $\varphi = 0$, равное модулю силы Q, S^* — натяжение в сечении $\varphi = \varphi^*$, равное модулю силы P. Следовательно,

$$\ln\frac{P}{Q} = -f\varphi^* \tag{6.8}$$

и, окончательно,

$$P = Qe^{-f\varphi^*}. \tag{6.9}$$

Эта формула (формула Эйлера) позволяет найти наименьшую силу **P**, способную уравновесить силу **Q**.

Можно поставить обратный вопрос: при каком значении **P** наступит скольжение троса против хода часовой стрелки, т. е. какая сила **P** способна преодолеть сопротивление трения вместе с силой **Q**? Для ответа на этот вопрос нет необходимости заново повторять все выкладки; они останутся прежними с тем единственным различием, что сила трения на рис. 6.8, *б* изменит свое направление. Поэтому в окончательном результате, изменяя знак при коэффициенте трения, получаем

$$P = Qe^{f\varphi^*}. \tag{6.10}$$

Таким образом, если сила **P** удовлетворяет неравенствам

$$Qe^{-f\varphi^*} \leqslant P \leqslant Qe^{f\varphi^*},$$

то трос будет находиться в равновесии.

Задача 6.5. Найти угол охвата φ^* цилиндра тросом, необходимый для того, чтобы удержать силой $P = 2$ кН груз весом $Q = 20$ кН, если коэффициент трения $f = 0{,}2$.

По формуле (6.8) имеем

$$\ln\frac{2}{20} = -0{,}2\varphi^*;$$

отсюда

$$\varphi^* = 11{,}5 < 2\cdot 2\pi,$$

т. е. несколько меньше двух полных охватов.

Задача 6.6. К концу троса подвешен груз весом $Q = 20$ кН; угол охвата цилиндра тросом $\varphi^* = 11,5$. Найти силу, необходимую для подъема груза, если коэффициент трения $f = 0,2$.

В данном случае нужно воспользоваться формулой (6.10)

$$P = Qe^{f\varphi^*} = 20e^{0,2\cdot 11,5} \approx 200 \text{ кН}.$$

Сопоставляя этот результат с полученным в задаче 6.5, заключаем, что трос будет находиться в состоянии равновесия, если 2 кН $\leqslant P \leqslant$ 200 кН. При $P <$ 2 кН начинается движение в сторону силы **Q**, а при $P >$ 200 кН — движение в сторону силы **P**.

Задача 6.7. При причаливании (швартовке) судна матрос удерживает его с помощью каната, накинутого в форме восьмерки на причальные тумбы (кнехты), причем один конец каната A укреплен на судне, а второй конец каната B находится в руках матроса (рис. 6.9). Считая, что угол охвата каждой тумбы равен $5\pi/3$ (300°), определить, какое максимальное усилие P судна может выдержать матрос, прикладывая силу $Q =$ = 500 Н при одной, двух и трех уложенных канатных восьмерках, если коэффициент трения между канатом и причальными тумбами равен 0,2.

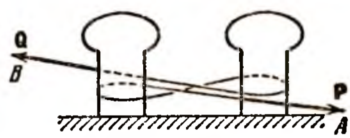


Рис. 6.9

При одной восьмерке общий угол охвата $\varphi_1 = (10/3)\,\pi$, а при двух и трех восьмерках соответственно $\varphi_2 = (20/3)\,\pi$ и $\varphi_3 = 10\pi$. Применяя формулу (6.10), получаем

$$P_1 = 500e^{0,2\,(10/3)\,\pi},$$

или, пользуясь таблицами показательных функций, находим (аналогично получены значения сил P_2 и P_3):

$$P_1 = 4,04 \text{ кН}, \quad P_2 = 32,7 \text{ кН}, \quad P_3 = 264 \text{ кН}.$$

Таким образом, при трех уложенных восьмерках за счет сил трения между канатом и причальными тумбами один матрос может удержать судно, развивающее усилие в 264 кН, т. е. в 528 раз больше силы, прикладываемой матросом.

§ 6.2. Равновесие тела при наличии трения качения

Рассмотрим цилиндр (каток), покоящийся на горизонтальной плоскости, когда на него действует горизонтальная активная сила **S**; кроме нее, действуют сила тяжести **P**, а также нормальная реакция **N**

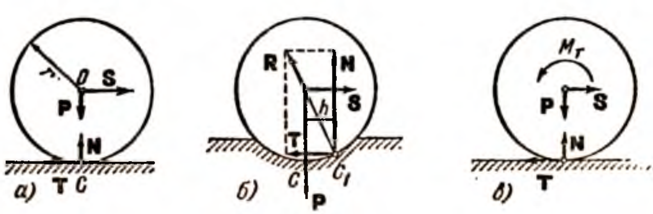


Рис. 6.10

и сила трения **T** (рис. 6.10, *а*). Как показывает опыт, при достаточно малом модуле силы **S** цилиндр остается в покое. Но этот факт нельзя объяснить, если удовлетвориться введением сил, изображенных на рис. 6.10, *а*. Согласно этой схеме равновесие невозможно, так как главный момент всех сил, действующих на цилиндр $M_{Cr} = -Sr$, отличен от нуля, и одно из условий равновесия не выполняется.

Причина выявившегося несоответствия состоит в том, что в наших рассуждениях мы продолжаем пользоваться представлением об абсолютно твердом теле и предполагаем касание цилиндра с поверхностью происходящим по образующей. Для устранения отмеченного несоответствия теории с опытом необходимо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учесть, что в действительности цилиндр и плоскость вблизи точки C деформируются и существует некоторая площадь соприкосновения конечной ширины. Вследствие этого в ее правой части цилиндр прижимается сильнее, чем в левой, и полная реакция **R** приложена правее точки C (см. точку C_1 на рис. 6.10, *б*).

Полученная теперь схема действующих сил статически удовлетворительна, так как момент пары (**S**, **T**) может уравновеситься моментом пары (**N**, **P**). Считая деформацию малой, заменим эту систему сил системой, изображенной на рис. 6.10, *в*. В отличие от первой схемы (рис. 6.10, *а*), к цилиндру приложена пара сил с моментом

$$M_т = Nh. \tag{6.11}$$

Этот момент называется *моментом трения качения.*

Составим уравнения равновесия цилиндра:

$$S - T = 0, \quad N - P = 0, \quad -Sr + M_т = 0. \tag{6.12}$$

Первые два уравнения дают $T = S$, $N = P$, а из третьего уравнения можно найти $M_т$. Затем из (6.11) определяем расстояние между точками C и C_1:

$$h = Sr/P. \tag{6.13}$$

Как видно, с увеличением модуля активной силы S растет расстояние h. Но это расстояние связано с площадью поверхности контакта и, следовательно, не может неограниченно увеличиваться. Это значит, что наступит такое состояние, когда увеличение силы S приведет к нарушению равновесия. Обозначим максимально возможную величину h буквой δ. Экспериментально установлено, что величина δ пропорциональна радиусу цилиндра и различна для разных материалов.

Следовательно, если имеет место равновесие, то выполняется условие

$$h \leqslant \delta. \tag{6.14}$$

Величина δ называется *коэффициентом трения качения*; она имеет размерность длины.

Условие (6.14) можно также записать в виде

$$M_т \leqslant \delta N,$$

или, учитывая (6.12),

$$S \leqslant \frac{\delta}{r} N. \tag{6.15}$$

Очевидно, что максимальный момент трения качения $M_{\text{т}}^{\max} = \delta N$ пропорционален силе нормального давления.

В справочных таблицах приводится отношение коэффициента трения качения к радиусу цилиндра ($\lambda = \delta/r$) для различных материалов.

Задача 6.8. На наклонной плоскости находится цилиндр. Найти, при каких углах наклона плоскости к горизонту α цилиндр будет находиться в равновесии, если r — радиус цилиндра, f — коэффициент трения скольжения, δ — коэффициент трения качения (рис. 6.11).

Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -T + P\sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N - P\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = M_{\text{т}} - rP\sin\alpha = 0.$$

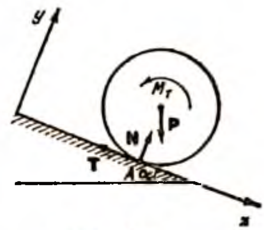


Рис. 6.11

Кроме того, должны выполняться неравенства

$$T \leqslant fN, \quad M_{\text{т}} \leqslant \delta N.$$

Из первых трех уравнений мы можем определить N, T, $M_{\text{т}}$; подставив эти величины в последние два неравенства, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f, \tag{6.16}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \delta/r. \tag{6.17}$$

Эти неравенства должны удовлетворяться одновременно. В тех случаях, когда $\delta/r < f$, потеря равновесия происходит путем перехода к качению, так как сначала нарушится неравенство (6.17); если же $f < \delta/r$, то нарушится неравенство (6.16) и цилиндр начнет скользить.

Глава VII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 7.1. Статические инварианты. Динамический винт

Ранее было установлено, что главный вектор системы сил, как угодно расположенных в пространстве,

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \tag{7.1}$$

не изменяется при перемене центра приведения. Главный же момент при этом изменяется и для нового центра приведения определяется формулой (см. формулу (4.14))

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \overline{O_1O} \times \mathbf{F}_O, \tag{7.2}$$

где M_O и M_{O_1} — главные моменты относительно центров приведения O и O_1. Второе слагаемое в правой части формулы (7.2) представляет собой момент главного вектора, приложенного в центре приведения O, относительно нового центра приведения O_1.

Умножим скалярно обе части равенства (7.2) на вектор $\mathbf{F}_O$:

$$\mathbf{M}_{O_1}\cdot\mathbf{F}_O=\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{F}_O+(\overline{O_1O}\times\mathbf{F}_O)\cdot\mathbf{F}_O.$$

Так как вектор $\overline{O_1O}\times\mathbf{F}_O$ перпендикулярен вектору $\mathbf{F}_O$, то их скалярное произведение равно нулю. Следовательно,

$$\mathbf{M}_{O_1}\cdot\mathbf{F}_O=\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{F}_O, \tag{7.3}$$

т. е. скалярное произведение главного вектора $\mathbf{F}_O$ на главный момент не зависит от центра приведения.

Таким образом, при перемене центра приведения не изменяются главный вектор и скалярное произведение главного вектора на главный момент. Говорят, что эти величины *инвариантны относительно выбора центра приведения.*

Первым статическим инвариантом называется главный вектор $\mathbf{F}_O$. *В более узком смысле этого слова под первым инвариантом понимают квадрат модуля главного вектора*

$$I_1=F_O^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2. \tag{7.4}$$

Вторым статическим инвариантом называется скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I_2=\mathbf{F}_O\cdot\mathbf{M}_O=F_xM_x+F_yM_y+F_zM_z. \tag{7.5}$$

Из второго инварианта вытекает простое геометрическое следствие. Действительно, запишем равенство (7.3) в следующем виде:

$$M_{O_1}\cdot F_O\cos(\mathbf{M}_{O_1},\ \mathbf{F}_O)=M_O\cdot F_O\cos(\mathbf{M}_O,\ \mathbf{F}_O).$$

Если $F_O\neq 0$, то

$$M_{O_1}\cos(\mathbf{M}_{O_1},\ \mathbf{F}_O)=M_O\cos(\mathbf{M}_O,\ \mathbf{F}_O).$$

Каждое из этих произведений представляет проекцию главного момента на направление главного вектора. Следовательно, при перемене центра приведения *проекция главного момента на направление главного вектора не изменяется.* Заметим, что при $F_O\neq 0$ это следствие можно принять за определение второго инварианта.

Так как проекция главного момента на направление главного вектора не изменяется при перемене центра приведения, то можно утверждать, что для центра приведения, в котором главный вектор и главный момент направлены по одной прямой, модуль главного момента будет минимальным. В этом случае модуль главного момента равен величине его проекции на направление главного вектора.

Очевидно, что проекция M^* главного момента на направление главного вектора определяется равенством

$$M^*=(\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{F}_O)/F_O.$$

или, принимая во внимание значения первого и второго инвариантов,

$$M^* = I_2/\sqrt{I_1}. \tag{7.6}$$

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется динамическим винтом или динамой. Так как плоскость действия пары перпендикулярна моменту пары, то *динамический*

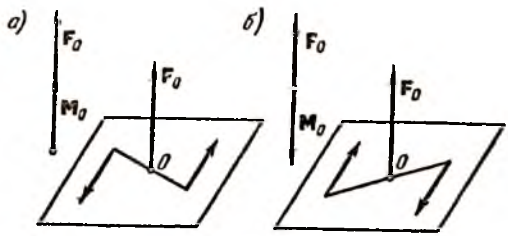


Рис. 7.1

винт представляет собой совокупность силы и пары сил, действующей в плоскости, перпендикулярной силе. Различают правый и левый динамические винты. На рис. 7.1, *а* показан правый динамический винт, составленный из силы $\mathbf{F}_O$, равной главному вектору системы, и пары сил с моментом $\mathbf{M}_O$, равным главному моменту; на рис. 7.1, *б* показан левый винт, составленный из тех же элементов.

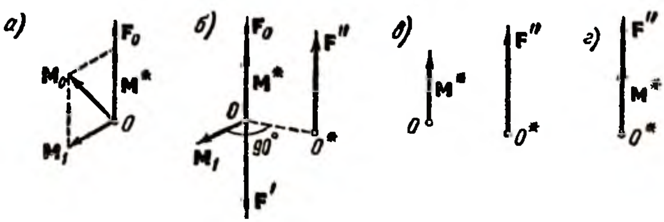


Рис. 7.2

Может возникнуть вопрос, в каких случаях данную систему сил можно привести к динаме? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Если второй статический инвариант не равен нулю, то систему сил можно привести к динаме.

Пусть в произвольной точке O (рис. 7.2, *а*) система приведена к силе, равной главному вектору $\mathbf{F}_O$, и паре сил с моментом, равным главному моменту. Так как по условию теоремы $I_2 = \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$, то оба вектора, $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{M}_O$, не равны нулю и не перпендикулярны между собой. Разложим главный момент на две составляющие: одну $\mathbf{M}^*$ направим по главному вектору и другую $\mathbf{M}_1$ направим перпендикулярно главному вектору (рис. 7.2, *а*). Составляющая $\mathbf{M}_1$ представляет собой момент пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{M}_1$. Выберем силы $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$, составляющие эту пару, равными по модулю главному вектору $\mathbf{F}_O$ и приложим силу $\mathbf{F}'$ к центру приведения (рис. 7.2, *б*). Система сил $\mathbf{F}_O$, $\mathbf{F}'$, как эквивалентная нулю, может быть отброшена (рис. 7.2, *в*). Так как момент $\mathbf{M}^*$ — вектор свободный, то его можно перенести из точки O в точку O^* (рис. 7.2, *г*). Таким образом, заданная система сил приведена в точке O^* к силе $\mathbf{F}'' = \mathbf{F}_O$ и к паре сил с моментом $\mathbf{M}^*$ (рис. 7.2, *г*), расположенной в плоскости, перпендикулярной силе, т. е. мы получили динамический винт.

Из формулы (7.6) видно, что положительному второму инварианту ($I_2 > 0$) отвечает правый динамический винт, а отрицательному второму инварианту ($I_2 < 0$) — левый динамический винт.

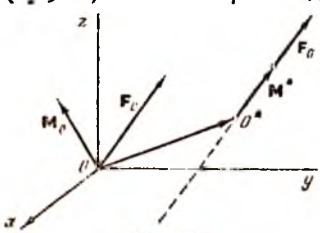


Рис. 7.3

Точка O^* не единственная, где система сил приводится к динаме. В самом деле, силу можно переносить вдоль линии ее действия, момент же пары сил есть вектор свободный, следовательно, система сил может быть приведена к динаме во всех точках прямой, проходящей через точку O^* и являющейся линией действия силы $\mathbf{F}'' = \mathbf{F}_O$. Эта прямая называется *центральной* осью системы сил. Найдем теперь уравнение центральной оси.

Пусть O^* (рис. 7.3) — точка центральной оси. Тогда для этой точки главный вектор и главный момент должны быть коллинеарны друг другу. На основании формулы (7.2) главный момент для точки O^* можно записать в виде

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_O + \overline{O^*O} \times \mathbf{F}_O = \mathbf{M}_O - \overline{OO^*} \times \mathbf{F}_O.$$

Условие коллинеарности главного вектора и главного момента для точки O^* записывается следующим образом:

$$p\mathbf{F}_O = \mathbf{M}^*,$$

где p — параметр винта, имеющий размерность длины.

Таким образом,

$$p\mathbf{F}_O = \mathbf{M}_O - \overline{OO^*} \times \mathbf{F}_O. \qquad (7.7)$$

Пусть F_x, F_y, F_z и M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} — соответственно проекции главного вектора и главного момента на оси x, y и z; тогда

$$\mathbf{F}_O = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{M}_O = M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k}.$$

Пусть координаты какой-либо точки O^* центральной оси будут x, y, z, следовательно,

$$\overline{OO^*} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Подставляя соответствующие выражения в соотношение (7.7), получим

$$p(F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k})=M_{Ox}\mathbf{i}+M_{Oy}\mathbf{j}+M_{Oz}\mathbf{k}-\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=$$

$$=[M_{Ox}-(yF_z-zF_y)]\,\mathbf{i}+[M_{Oy}-(zF_x-xF_z)]\,\mathbf{j}+[M_{Oz}-(xF_y-yF_x)]\,\mathbf{k}.$$

Приравнивая коэффициенты при единичных векторах **i**, **j** и **k**, будем иметь

$$pF_x=M_{Ox}-(yF_z-zF_y),$$

$$pF_y=M_{Oy}-(zF_x-xF_z),$$

$$pF_z=M_{Oz}-(xF_y-yF_x).$$

Следовательно,

$$\frac{M_{Ox}-(yF_z-zF_y)}{F_x}=\frac{M_{Oy}-(zF_x-xF_z)}{F_y}=\frac{M_{Oz}-(xF_y-yF_x)}{F_z}. \qquad (7.8)$$

Это и есть искомые уравнения центральной оси.

§ 7.2. Частные случаи приведения пространственной системы сил

Если при приведении системы сил к динамическому винту главный момент динамы оказался равным нулю, а главный вектор отличен от нуля, то это означает, что система сил приведена к равнодействующей, причем центральная ось является линией действия этой равнодействующей.

Выясним, при каких условиях, относящихся к главному вектору $\mathbf{F}_O$ и главному моменту $\mathbf{M}_O$, это может быть. Поскольку главный момент динамы $\mathbf{M}^*$ равен составляющей главного момента $\mathbf{M}_O$, направленной по главному вектору, то рассматриваемый случай $\mathbf{M}^*=0$ означает, что главный момент $\mathbf{M}_O$ перпендикулярен главному вектору, т. е. $I_2=\mathbf{F}_O\cdot\mathbf{M}_O=0$. Отсюда непосредственно вытекает, что если главный вектор $\mathbf{F}_O$ не равен нулю, а второй инвариант равен нулю,

$$\mathbf{F}_O\neq 0,\quad I_2=\mathbf{F}_O\cdot\mathbf{M}_O=0, \qquad (7.9)$$

то рассматриваемая *система приводится к равнодействующей.*

В частности, если для какого-либо центра приведения $\mathbf{F}_O\neq 0$, а $\mathbf{M}_O=0$, то это означает, что система сил приведена к равнодействующей, проходящей через данный центр приведения; при этом условие (7.9) также будет выполнено.

Обобщим приведенную в главе V теорему о моменте равнодействующей (теорему Вариньона) на случай пространственной системы сил.

Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов всех сил относительно той же точки.

Пусть система сил имеет равнодействующую $\mathbf{R}$ и точка O лежит на линии действия этой равнодействующей. Если приводить заданную систему сил к этой точке, то получим, что главный момент равен нулю.

Возьмем какой-либо другой центр приведения O_1; тогда

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_k). \tag{7.10}$$

С другой стороны, на основании формулы (4.14) имеем

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_O) = \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_O), \tag{7.11}$$

так как $\mathbf{M}_O = 0$. Сравнивая выражения (7.10) и (7.11) и учитывая, что в данном случае $\mathbf{F}_O = \mathbf{R}$, получаем

$$\mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_k). \tag{7.12}$$

Таким образом, теорема доказана.

Пусть при каком-либо выборе центра приведения $\mathbf{F}_O = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$. Так как главный вектор не зависит от центра приведения, то он равен нулю и при любом другом выборе центра приведения. Поэтому главный момент тоже не меняется при перемене центра приведения, и, следовательно, в этом случае система сил приводится к паре сил с моментом, равным $\mathbf{M}_O$.

Составим теперь таблицу всех возможных случаев приведения пространственной системы сил:

	$I_2 = \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O$	$\mathbf{F}_O$	$\mathbf{M}_O$	Случай приведения
1	$I_2 \neq 0$	$\mathbf{F}_O \neq 0$	$\mathbf{M}_O \neq 0$	Динамический винт
2	$I_2 = 0$	$\mathbf{F}_O \neq 0$	$\mathbf{M}_O \neq 0$ $\mathbf{M}_O = 0$	Равнодействующая
3	$I_2 = 0$	$\mathbf{F}_O = 0$	$\mathbf{M}_O \neq 0$	Пара сил
4	$I_2 = 0$	$\mathbf{F}_O = 0$	$\mathbf{M}_O = 0$	Система сил эквивалентна нулю

Если все силы находятся в одной плоскости, например в плоскости Oxy, то их проекции на ось z и моменты относительно осей x и y будут равны нулю. Следовательно,

$$F_z = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0.$$

Внося эти значения в формулу (7.5), найдем, что второй инвариант плоской системы сил равен нулю.

Тот же результат мы получим и для пространственной системы параллельных сил. Действительно, пусть все силы параллельны оси z. Тогда проекции их на оси x и y и моменты относительно оси z будут равны нулю. Отсюда

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad M_{Oz} = 0.$$

Пользуясь снова формулой (7.5), найдем $I_2 = 0$.

На основании доказанного можно утверждать, что *плоская система сил и система параллельных сил в пространстве не приводятся к динамическому винту.*

Задача 7.1. Систему двух сил $P_1 = 8$ Н и $P_2 = 12$ Н, направленных параллельно осям x и y, как указано на рис. 7.4, *а* (расстояние между точками приложения сил равно 1,3 м), требуется привести к динаме, определив главный вектор и

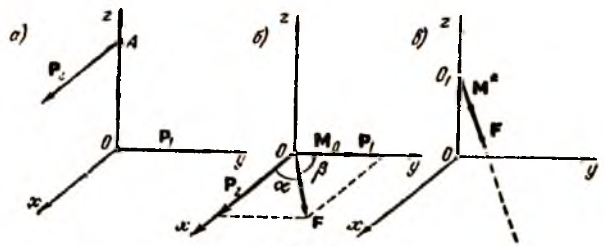


Рис. 7.4

главный момент динамы. Найти углы α, β и γ, составляемые центральной осью системы с координатными осями, а также уравнение центральной оси.

Возьмем за центр приведения начало координат O. Проекции главного вектора $\mathbf{F}$ на оси координат будут

$$F_x = P_2 = 12 \text{ Н}, \quad F_y = P_1 = 8 \text{ Н}, \quad F_z = 0.$$

Модуль главного вектора

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 14{,}4 \text{ Н}.$$

Направляющие косинусы главного вектора равны

$$\cos\alpha = F_x/F = 0{,}834, \quad \cos\beta = F_y/F = 0{,}555, \quad \cos\gamma = F_z/F = 0.$$

Найдем проекции главного момента на оси координат:

$$M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = OA \cdot P_2 = 15{,}6 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_{Oz} = 0.$$

На рис. 7.4, *б* показано расположение главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}_O$ для центра приведения O.

Проекцию главного момента на направление главного вектора определим по формуле

$$M^* = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_O)/F = F_y M_{Oy}/F = (8 \cdot 15{,}6)/14{,}4 = 8{,}66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Уравнение центральной оси (7.8) имеет вид

$$\frac{8z}{12}=\frac{15{,}6-12z}{8}=\frac{-8x+12y}{0}.$$

Отсюда следует, что центральная ось является линией пересечения плоскостей

$$z=0{,}9,\quad y={}^2/_3x.$$

На рис. 7.4, *в* показано расположение этой оси ($OO_1=0{,}9$ м).

Задача 7.2. По ребрам куба со стороной a действуют двенадцать равных по модулю сил, как показано на рис. 7.5, *а*. Привести систему к простейшему виду.

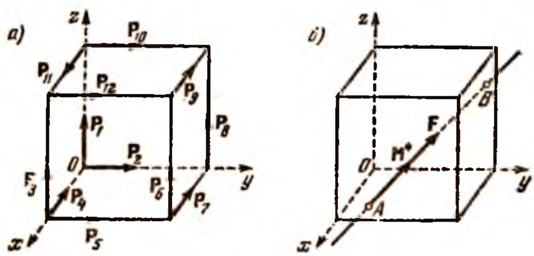


Рис. 7.5

За центр приведения возьмем начало координат O и вычислим проекции главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента на координатные оси. Имеем

$$F_x=-2P,\quad F_y=4P,\quad F_z=4P,\quad M_x=0,\quad M_y=-2Pa,\quad M_z=4Pa,$$

где P — общее значение модуля заданных сил.

По формулам (7.4) и (7.5) найдем значения статических инвариантов

$$I_1=36P^2,\quad I_2=8P^2a.$$

Так как второй инвариант положителен, то система сил приводится к правому динамическому винту (главный вектор $\mathbf{F}$ и момент $\mathbf{M}^*$ направлены в одну сторону). Модуль момента $\mathbf{M}^*$ найдем по формуле (7.6):

$$M^*=I_2/\sqrt{I_1}={}^4/_3Pa.$$

Напишем уравнение центральной оси (7.8):

$$\frac{-(y\cdot4P-z\cdot4P)}{-2P}=\frac{-2Pa-[z(-2P)-x\cdot4P]}{4P}=\frac{4Pa-[x\cdot4P-y(-2P)]}{4P}.$$

Отсюда видно, что центральная ось системы представляет линию пересечения плоскостей

$$2x-4y+5z=a,\quad 2x+5y-4z=2a.$$

Подставляя в эти уравнения сначала $z=0$, а затем $y=a$, найдем точки пересечения центральной оси с нижней и боковой гранями куба (рис. 7.5, *б*)

$$x_A=\frac{13}{18}a,\quad y_A=\frac{a}{9},\quad z_A=0,\quad x_B=\frac{5}{8}a,\quad y_B=a,\quad z_B=\frac{8}{9}a.$$

Таким образом, динамический винт, эквивалентный данной системе сил, состоит из силы $\mathbf{F}$, модуль которой равен $F=\sqrt{I_1}=6P$, и пары сил с моментом $\mathbf{M}^*$, коллинеарным силе $\mathbf{F}$ и численно равным $M^*={}^4/_3Pa$. Центральная ось и составляющие динамического винта показаны на рис. 7.5, *б*.

§ 7.3. Уравнения равновесия пространственной системы сил

Как было выяснено в § 4.4, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, можно записать в виде трех уравнений проекций (4.16) и трех уравнений моментов (4.17):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0, \tag{7.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k)=0. \tag{7.14}$$

Если тело полностью закреплено, то действующие на него силы находятся в равновесии и уравнения (7.13) и (7.14) служат для определения опорных реакций. Конечно, могут встретиться случаи, когда этих уравнений недостаточно для определения опорных реакций; такие статически неопределимые системы мы рассматривать не будем.

Для пространственной системы параллельных сил уравнения равновесия принимают следующий вид (§ 4.4) *):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k)=0. \tag{7.15}$$

Рассмотрим теперь случаи, когда тело закреплено лишь частично, т. е. связи, которые наложены на тело, не гарантируют равновесия тела. Можно указать четыре частных случая.

1. Твердое тело имеет одну неподвижную точку. Иначе говоря, оно прикреплено к неподвижной точке при помощи идеального сферического шарнира.

Поместим в эту точку (см. точку A на рис. 7.6, a) начало неподвижной системы координат. Действие связи в точке A заменим реакцией; так как она неизвестна по модулю и направлению, то мы ее представим в виде трех неизвестных составляющих $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, направленных соответственно вдоль осей x, y, z.

Уравнения равновесия (7.13) и (7.14) в этом случае запишутся в таком виде:

$$1)\ X_A+\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0, \quad 2)\ Y_A+\sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad 3)\ Z_A+\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0,$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k)=0, \quad 5)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k)=0, \quad 6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k)=0. \tag{7.16}$$

Последние три уравнения не содержат составляющих реакции, так как линия действия этой силы проходит через точку A. Следовательно, эти уравнения устанавливают зависимости между актив-

*) Предполагается, что линии действия сил параллельны оси z.

ными силами, необходимые для равновесия тела, причем три первых уравнения могут быть использованы для определения составляющих реакции.

Таким образом, *условием равновесия твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, является равенство нулю каждой из алгебраических сумм моментов всех активных сил системы относительно трех осей, пересекающихся в неподвижной точке тела.*

2. Тело имеет две неподвижные точки. Это, например, будет иметь место, если оно прикреплено к двум неподвижным точкам при помощи шарниров (рис. 7.6, *б*).

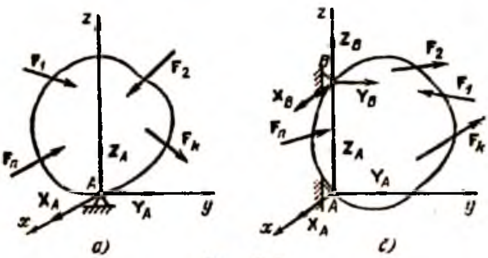


Рис. 7.6

Выберем начало координат в точке A и направим ось z вдоль линии, проходящей через точки A и B. Заменим действие связей реакциями, направив составляющие реакций вдоль координатных осей (рис. 7.6, *б*). Обозначим расстояние между точками A и B через a; тогда уравнения равновесия (7.13) и (7.14) запишутся в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
1)\ X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad 2)\ Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\
3)\ Z_A + Z_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \\
4)\ -aY_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad 5)\ aX_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = 0, \\
6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.
\end{gathered} \tag{7.17}
$$

Последнее уравнение не содержит составляющих сил реакций и устанавливает связь между активными силами, необходимую для равновесия тела. Следовательно, *условием равновесия твердого тела, имеющего две неподвижные точки, является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех активных сил, приложенных к телу, относительно оси, проходящей через неподвижные точки.* Первые пять уравнений служат для определения неизвестных составляющих реакций X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B.

Заметим, что составляющие Z_A и Z_B не могут быть определены в отдельности. Из третьего уравнения определяется только сумма $Z_A + Z_B$, и, следовательно, задача в отношении каждого из этих неизвестных для твердого тела является статически неопределенной. Однако, если в точке B находится не сферический, а цилиндрический шарнир (т. е. подшипник), не препятствующий продольному скольжению тела вдоль оси вращения, то $Z_B = 0$ и задача становится статически определенной.

3. Тело имеет неподвижную ось вращения, вдоль которой оно может скользить без трения. Это значит, что в точках A и B находятся цилиндрические шарниры (подшипники), причем составляющие их реакций вдоль оси вращения равны нулю.

Следовательно, уравнения равновесия примут вид

$$
\begin{aligned}
&1)\ X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\\
&2)\ Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\\
&3)\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad (7.18)\\
&4)\ -aY_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = 0,\\
&5)\ aX_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = 0,\\
&6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.
\end{aligned}
$$

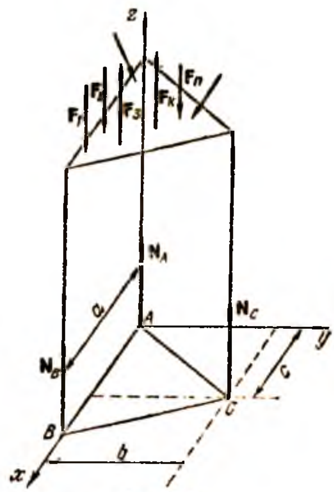


Рис. 7.7

Два из уравнений (7.18), а именно третье и шестое, накладывают ограничения на систему активных сил, а остальные уравнения служат для определения реакций.

4. Тело опирается в трех точках на гладкую плоскость, причем точки опоры не лежат на одной прямой. Обозначим эти точки через A, B и C и совместим с плоскостью ABC координатную плоскость Axy (рис. 7.7). Заменив действие связей вертикальными реакциями $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ и $\mathbf{N}_C$, запишем условия равновесия (7.13) и (7.14) в таком виде:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad 2)\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} + N_A + N_B + N_C = 0, \quad 4)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) - bN_C = 0, \quad (7.19)$$

$$5)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) - aN_B - cN_C = 0, \quad 6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Третье — пятое уравнения могут служить для определения неизвестных реакций, а первое, второе и шестое уравнения представляют собой условия, связывающие активные силы и необходимые для равновесия тела. Конечно, для равновесия тела необходимо выполнение условий $N_A \geqslant 0$, $N_B \geqslant 0$, $N_C \geqslant 0$, так как в точках опоры могут возникнуть только реакции принятого выше направления.

Если тело опирается на горизонтальную плоскость более чем в трех точках, то задача становится статически неопределенной, так как при этом реакций будет столько, сколько точек, а уравнений для определения реакций остается по-прежнему только три.

§ 7.4. Задачи

Задача 7.3. Найти главный вектор и главный момент системы сил, изображенной на рис. 7.8, *а*; силы приложены к вершинам куба и направлены вдоль его ребер, причем $F_1 = F_2 = F_3 = P$, $F_4 = F_5 = F_6 = 3P$. Длина ребра куба равна a.

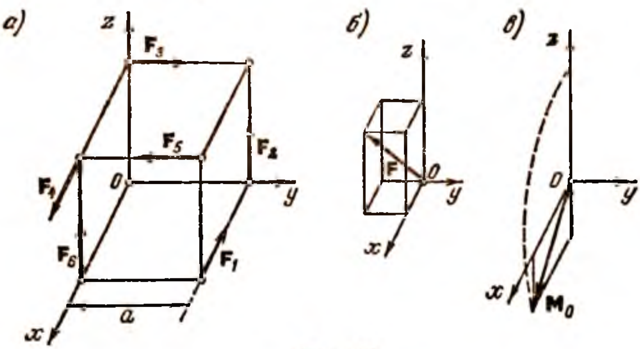


Рис. 7.8

Проекции главного вектора находим по формулам (4.4):

$$F_x = -P + 3P = 2P, \qquad F_y = P - 3P = -2P, \qquad F_z = P + 3P = 4P.$$

Его модуль равен $F = \sqrt{(2P)^2 + (2P)^2 + (4P)^2} = 4{,}9P$. Направляющие косинусы будут

$$\cos(x, \mathbf{F}) = \frac{2P}{4{,}9P} = 0{,}407, \qquad \angle x, \mathbf{F} \approx 66°,$$

$$\cos(y, \mathbf{F}) = -\frac{2P}{4{,}9P} = -0{,}407, \qquad \angle y, \mathbf{F} \approx 114°,$$

$$\cos(z, \mathbf{F}) = \frac{4P}{4{,}9P} = 0{,}814, \qquad \angle z, \mathbf{F} \approx 35°30'.$$

Главный вектор изображен на рис. 7.8, *б*.

Далее находим проекции главного момента по формулам (4.7):

$$M_{Ox} = F_2a - F_3a + F_5a = 3Pa, \qquad M_{Oy} = F_4a - F_6a = 0,$$

$$M_{Oz} = F_1a - F_5a = -2Pa,$$

а модуль главного момента по формуле (4.8)

$$M_O = \sqrt{(3Pa)^2 + (2Pa)^2} \approx 3{,}6Pa.$$

Теперь определим направляющие косинусы главного момента:

$$\cos(x,\ M_O) = \frac{3Pa}{3{,}6Pa} = 0{,}833, \qquad \angle x,\ M_O = 33°40',$$

$$\cos(y,\ M_O) = 0, \qquad \angle y,\ M_O = 90°,$$

$$\cos(z,\ M_O) = -\frac{2Pa}{3{,}6Pa} = -0{,}555, \qquad \angle z,\ M_O = 123°40'.$$

Главный момент изображен на рис. 7.8, *в*. Угол между векторами **F** и $\mathbf{M}_O$ вычисляется по формуле (4.11)

$$\cos(\mathbf{F},\ \mathbf{M}_O) = 0{,}407 \cdot 0{,}833 - 0{,}407 \cdot 0 - 0{,}814 \cdot 0{,}555 = -0{,}112.$$

Следовательно, угол между этими векторами равен 96° 30′.

Задача 7.4. Жесткая конструкция, имеющая форму параллелепипеда *ABCDEFGH*, прикреплена к основанию шаровым шарниром *A* и тремя стержнями *1*,

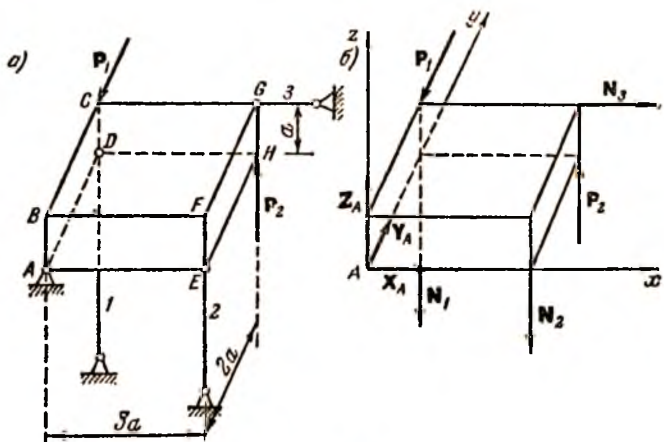


Рис. 7.9

2 и *3*. Определить реакцию шарнирной опоры и усилия в стержнях, если задана нагрузка в виде двух сил $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, причем $P_1 = P$, $P_2 = 2P$. Весом конструкции пренебречь. Размеры указаны на чертеже (рис. 7.9, *а*).

Усилия в стержнях обозначим через $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ и $\mathbf{N}_3$; реакцию шарнира представим в виде трех составляющих $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$ и $\mathbf{Z}_A$. Соответствующая схема сил изображена на рис. 7.9, *б*. Выбрав координатную систему, как указано на чертеже, составим уравнения равновесия в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + N_3 = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_A - N_1 - N_2 + 2P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = -N_1 \cdot 2a + Pa + 2P \cdot 2a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = +N_2 \cdot 3a + N_3 a - 2P \cdot 3a = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -N_3 \cdot 2a = 0.$$

Число уравнений равно числу неизвестных, т. е. рассматриваемая задача статически определенная. Решив полученную систему уравнений, найдем значения усилий

$$N_1 = {}^5/_2 P, \quad N_2 = 2P, \quad N_3 = 0$$

и составляющие реакции шарнира

$$X_A = 0, \quad Y_A = P, \quad Z_A = {}^5/_2 P.$$

Задача 7.5. Прямоугольная пластинка тремя ножками опирается на гладкий пол (рис. 7.10). Сила тяжести **P** пластинки приложена в ее центре. Размеры указаны на рисунке. В точке с координатами x и y к пластинке приложена вертикальная сила **Q**. Определить область, внутри которой можно брать точки приложения силы **Q**, чтобы пластинка не опрокинулась. Определить также, при каком соотношении между модулями сил **P** и **Q** вся поверхность пластинки будет безопасной.

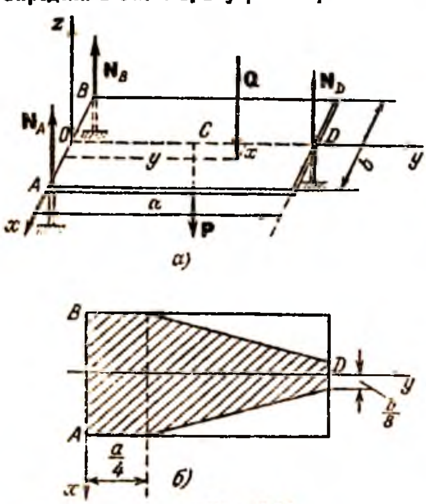


Рис. 7.10

Заменяя действие пола вертикальными реакциями $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$, $\mathbf{N}_D$, составим уравнения равновесия. Так как все силы, действующие на пластинку, параллельны, то можно воспользоваться уравнениями (7.15):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = N_A + N_B + N_D - Q - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = -Qy - P\frac{a}{2} + N_D a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = -N_A\frac{b}{2} + N_B\frac{b}{2} + Qx = 0.$$

Отсюда

$$N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2}, \quad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2},$$

$$N_D = \frac{Q}{a}y + \frac{P}{2}.$$

Для того чтобы пластинка не опрокинулась, необходимо выполнение условий

$$N_A \geqslant 0, \quad N_B \geqslant 0.$$

Границы искомой области найдем из условий

$$N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2} = 0, \quad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2} = 0.$$

Отсюда находим

$$y = \frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a, \quad y = -\frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a.$$

На рис. 7.10, *б* искомая область, построенная при $P = Q/2$, заштрихована. При $Q < P/2$ вся поверхность пластинки будет безопасной.

Задача 7.6. Тонкий стержень OA, весом которого можно пренебречь, шарнирно закреплен в точке O и удерживается в горизонтальной плоскости нитями AB и CD (рис. 7.11). Точка C находится в середине стержня OA. На стержень действует вертикальная сила $\mathbf{Q}$, приложенная в точке E стержня. Дано: $\angle AOD = \angle BAK = \alpha$, $OA = l$, $OE = a$, $OD = AK$. Найти натяжение нитей AB и CD.

Стержень OA шарнирно укреплен в точке O; для определения натяжения нитей воспользуемся уравнениями моментов.

Заменяем действие нитей реакциями $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$. Так как имеется лишь две неизвестные величины, то составим уравнения моментов сил, действующих на стержень, только относительно осей x и z:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = -Qa\sin\alpha + T_2 l \sin\alpha \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = T_2 l \cos\alpha \sin\alpha - T_1 l \sin\alpha \cos\alpha = 0.$$

Отсюда следует:

$$T_1 = T_2 = \frac{aQ}{l\sin\alpha}.$$

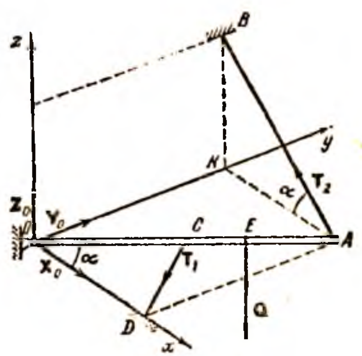


Рис. 7.11

Мы не составляем уравнения моментов относительно оси y, так как оно удовлетворится найденными значениями T_1 и T_2. Это уравнение может служить для проверки решения задачи.

Определив силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, можно найти и реакцию шарнира O. Для этого составим уравнения проекций, заменив действие шарнира реакциями $\mathbf{X}_O$, $\mathbf{Y}_O$, $\mathbf{Z}_O$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_O - T_2\cos\alpha + T_1\cos\alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_O - T_1\sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_O + T_2\sin\alpha - Q = 0.$$

Следовательно,

$$X_O = 0, \quad Y_O = T_1\sin\alpha = \frac{aQ}{l}, \quad Z_O = Q - T_2\sin\alpha = Q\left(1 - \frac{a}{l}\right).$$

Задача 7.7. Прямоугольная пластинка удерживается в горизонтальном положении при помощи петель в точках A и B и однородного стержня DC, имеющего шарниры в точках C и D. Стержень имеет длину l и вес P. Размеры пластинки указаны на рис. 7.12, *а*, $\angle DCE = \alpha$. Определить реакции в точках A, B, C и D, если сила тяжести $\mathbf{Q}$, действующая на пластинку, приложена в точке с координатами x и y.

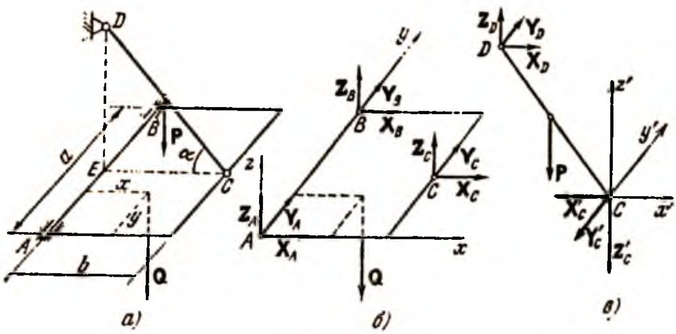


Рис. 7.12

В данном случае мы имеем дело с равновесием двух сочлененных тел: пластинки и стержня.

Рассмотрим каждое тело в отдельности. Заменяя связи в точках A, B и C реакциями $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{Y}_B$, $\mathbf{Z}_B$ и $\mathbf{X}_C$, $\mathbf{Y}_C$, $\mathbf{Z}_C$, составим уравнения равновесия пластинки (рис. 7.12, *б*):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + X_B + X_C = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A + Y_B + Y_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_A + Z_B + Z_C - Q = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = -yQ + Z_C\frac{a}{2} + Z_B a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = xQ - Z_C b = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -X_C\frac{a}{2} + Y_C b - X_B a = 0.$$

Выбрав систему координат $Cx'y'z'$, составим теперь уравнения равновесия для стержня. Освобождаясь от связей в точках D и C и вводя реакции $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$, $\mathbf{Z}_D$, $\mathbf{X}'_C$, $\mathbf{Y}'_C$, $\mathbf{Z}'_C$ (рис. 7.12, *в*), получим следующие уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx'} = X_D - X'_C = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky'} = Y_D - Y'_D = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz'} = Z_D - Z'_C - P = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Cx'}(\mathbf{F}_k) = -Y_D l \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cy'}(\mathbf{F}_k) = -P^{l}/_{2}\cos\alpha + Z_D l\cos\alpha + X_D l\sin\alpha = 0.$$

Мы не составляли уравнения моментов относительно оси z', так как оно будет содержать только неизвестную Y_D, определяемую из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cx'}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Так как $X'_O = X_C$, $Y'_C = Y_C$, $Z'_C = Z_C$, то

$$X_D = X_C, \quad Y_D = Y_C \quad \text{и} \quad Z_D = Z_C + P.$$

Решая полученные уравнения, найдем:

$$X_A = -\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_A = Q\left(1 - \frac{y}{a} - \frac{x}{2b}\right),$$

$$X_B = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_B = \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{2b}\right),$$

$$X_C = -\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_C = \frac{Q}{b}x,$$

$$X_D = -\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_D = P + \frac{Q}{b}x,$$

$$Y_A + Y_B = 0, \quad Y_D = 0, \quad Y_C = 0.$$

Как и следовало ожидать, мы не смогли определить реакции Y_A и Y_B, а нашли только их сумму (§ 7.3).

Отметим, что если $P = 0$, то, как легко проверить, реакции шарниров C и D будут направлены вдоль стержня CD.

Задача 7.8. Однородная балка AB длины $2l$ и веса P опирается верхним концом B на угол, образованный двумя вертикальными гладкими взаимно перпендикулярными плоскостями. Нижний конец балки A, находясь на горизонтальной шероховатой плоскости, упирается в прямолинейный выступ DE, отстоящий от оси y на расстоянии $2a$ (рис. 7.13). Пренебрегая поперечными размерами балки, определить, при каком угле α между балкой и горизонтальной плоскостью возможно равновесие, если коэффициент трения между концом A балки и углом, образованным горизонтальной плоскостью и выступом DE, равен f.

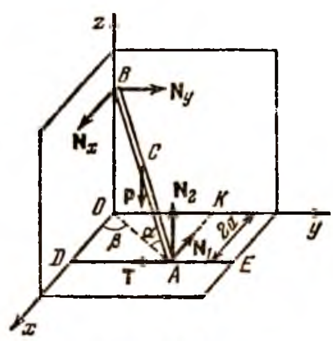


Рис. 7.13

Прежде чем перейти к составлению уравнений равновесия, введем вспомогательный угол β (см. рис. 7.13). Легко видеть, что между углами α и β имеется простая связь. Действительно, отрезок AK по условию равен $2a$; с другой стороны, из прямоугольного треугольника OKA имеем $AK = OA\cos\beta$, а из треугольника OAB найдем $OA = 2l\cos\alpha$. Таким образом, $AK = 2a = 2l\cos\alpha\cos\beta$ или

$$\cos\alpha\cos\beta = a/l. \tag{7.20}$$

Перейдем к рассмотрению сил, действующих на балку. Прежде всего, к ней приложена одна активная сила — сила тяжести $\mathbf{P}$; кроме того, на балку действуют реакции гладких вертикальных стенок $\mathbf{N}_x$ и $\mathbf{N}_y$, нормальные составляющие $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ реакции угла, образованного выступом и горизонтальной плоскостью, и сила трения $\mathbf{T}$ (она направлена влево, так как под действием силы тяжести $\mathbf{P}$ конец балки A стремится переместиться вправо).

При равновесии балки перечисленные силы должны удовлетворять уравнениям равновесия (7.13) и (7.14). Имеем:

$$\sum_k F_{kx} = N_x - N_1 = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N_y - T = 0, \quad \sum_k F_{kz} = N_z - P = 0,$$

$$\sum_k M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = -N_y \cdot 2l \sin\alpha - Pl\cos\alpha\sin\beta + N_z \cdot 2l\cos\alpha\sin\beta = 0,$$

$$\sum_k M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = N_x \cdot 2l\sin\alpha + Pa - N_z \cdot 2a = 0,$$

$$\sum_k M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = N_1 \cdot 2l\cos\alpha\sin\beta - T \cdot 2a = 0.$$

Пользуясь этими уравнениями, легко найдем

$$T = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta, \quad N_1 = \frac{Pa}{2l\sin\alpha}, \quad N_z = P$$

(другие величины нас не интересуют).

Для того, чтобы балка находилась в равновесии, сила трения должна удовлетворять условию $T \leqslant fN$, где $N = \sqrt{N_1^2 + N_z^2}$ — полная нормальная составляющая реакции угла, в который упирается конец балки A. Внося в это неравенство найденные значения для T, N_1 и N_z, получим

$$\frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta \leqslant f\sqrt{\frac{P^2a^2}{4l^2\sin^2\alpha} + P^2},$$

или, возводя в квадрат и сокращая на P^2,

$$\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\beta \leqslant f^2\operatorname{cosec}^2\alpha\,\frac{a^2}{l^2} + 4f^2.$$

Из равенства (7.20) найдем

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{a^2}{l^2}\sec^2\alpha.$$

Внесем это значение для $\sin^2\beta$ в предыдущее неравенство. Тогда после несложных преобразований получим

$$\operatorname{ctg}^2\alpha \leqslant \frac{4l^2f^2 + (1+f^2)\,a^2}{l^2 - (1+f^2)\,a^2}.$$

Таково условие, которому должен удовлетворять угол α, чтобы при заданных условиях балка находилась в равновесии. Как и следовало ожидать, при $a = 0$ это условие совпадает с соответствующим неравенством, полученным при решении задачи 6.1 (стр. 84).

Глава VIII

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 8.1. Центр параллельных сил

В этой главе рассматриваются такие системы параллельных сил, которые приводятся к равнодействующей. Прежде всего нужно отметить, что условия приведения системы параллельных сил к равнодействующей сводятся к одному неравенству $\mathbf{F} \neq 0$. Действительно, уже было показано, что второй инвариант системы параллельных сил тождественно равен нулю (стр. 99). Поэтому единственным условием приведения пространственной системы параллельных сил к равнодействующей является неравенство нулю главного вектора этой системы

$$\mathbf{F} \neq 0. \tag{8.1}$$

Считая это условие выполненным, выясним, что происходит с равнодействующей $\mathbf{R}$ при одновременном повороте линий действия данных параллельных сил на один и тот же угол, если точки приложения этих сил сохраняются неизменными и повороты линий действия сил происходят вокруг параллельных осей.

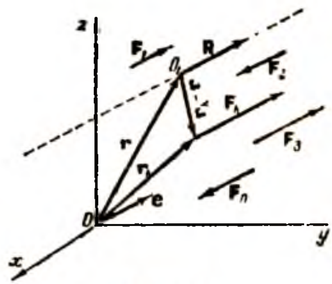


Рис. 8.1

При этих условиях равнодействующая заданной системы сил также одновременно поворачивается на тот же угол, причем поворот происходит вокруг некоторой фиксированной точки, которая называется *центром параллельных сил*. Перейдем к доказательству этого утверждения.

Предположим, что для рассматриваемой системы параллельных сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ главный вектор не равен нулю, следовательно, данная система сил приводится к равнодействующей. Пусть точка O_1 есть какая-либо точка линии действия этой равнодействующей. Пусть теперь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки O_1 относительно выбранного полюса O, а $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{F}_k$ (рис. 8.1).

Согласно теореме Вариньона (§ 7.2) сумма моментов всех сил системы относительно точки O_1 равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_k = 0, \tag{8.2}$$

так как точка O_1 лежит на линии действия равнодействующей.

Полученное равенство можно переписать в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r} \times \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k - \mathbf{r} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0. \tag{8.3}$$

Введем теперь в рассмотрение единичный вектор $\mathbf{e}$, параллельный линиям действия сил. Тогда любая сила $\mathbf{F}_k$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_k = F_k^* \mathbf{e}, \tag{8.4}$$

где $F_k^* = F_k$, если направление силы $\mathbf{F}_k$ и вектора $\mathbf{e}$ совпадают, и $F_k^* = -F_k$, если $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{e}$ направлены противоположно друг другу. Очевидно, что при этом

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \mathbf{e} \sum_{k=1}^{n} F_k^*. \tag{8.5}$$

Подставляя выражения (8.4) и (8.5) в соотношение (8.3), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times F_k^* \mathbf{e} - \mathbf{r} \times \mathbf{e} \sum_{k=1}^{n} F_k^* = 0,$$

откуда

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k F_k^* - \mathbf{r} \sum_{k=1}^{n} F_k^*\right] \times \mathbf{e} = 0. \tag{8.6}$$

Последнее равенство удовлетворяется при любом направлении сил (т. е. направлении единичного вектора $\mathbf{e}$) только при условии, что первый множитель равен нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k F_k^* - \mathbf{r} \sum_{k=1}^{n} F_k^* = 0. \tag{8.7}$$

В свою очередь это равенство имеет единственное решение относительно радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего такую точку приложения равнодействующей, которая не меняет своего положения при повороте линий действия сил. Такой точкой и является центр параллельных сил, чем и доказывается его существование. Обозначив радиус-вектор центра параллельных сил через $\mathbf{r}_c$, из равенства (8.7) получим

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{\mathbf{r}_1 F_1^* + \mathbf{r}_2 F_2^* + \ldots + \mathbf{r}_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}. \tag{8.8}$$

Пусть x_c, y_c, z_c — координаты центра параллельных сил, а x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения произвольной силы $\mathbf{F}_k$; тогда координаты центра параллельных сил найдутся из формул:

$$\begin{gathered}
x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{x_1 F_1^* + x_2 F_2^* + \ldots + x_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}, \\
y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{y_1 F_1^* + y_2 F_2^* + \ldots + y_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}, \\
z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{z_1 F_1^* + z_2 F_2^* + \ldots + z_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}.
\end{gathered} \tag{8.9}$$

Выражения

$$\sum_{k=1}^{n} x_k F_k^z, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k F_k^z, \quad \sum_{k=1}^{n} z_k F_k^z$$

называются *статическими моментами* заданной системы сил соответственно относительно координатных плоскостей yOz, xOz, xOy.

Отметим, что если начало координат выбрано в центре параллельных сил, то

$$x_c = y_c = z_c = 0,$$

и статические моменты заданной системы сил равны нулю.

§ 8.2. Центр тяжести

Тело произвольной формы, находящееся в поле сил тяжести, можно разбить сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объемы (рис. 8.2). Если пренебречь размерами тела по сравнению с радиусом Земли, то силы тяжести, действующие на каждый элементарный объем, можно считать параллельными друг другу. Обозначим через ΔV_k объем элементарного параллелепипеда с центром в точке M_k (см. рис. 8.2), а силу тяжести, действующую на этот элемент, — через $\Delta \mathbf{P}_k$. Тогда средним удельным весом элемента объема называется отношение $\Delta P_k / \Delta V_k$. Стягивая параллелепипед в точку M_k, получим удельный вес в данной точке тела, как предел среднего удельного веса

$$\gamma(x_k, y_k, z_k) = \lim_{\Delta V_k \to 0} \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}. \qquad (8.10)$$

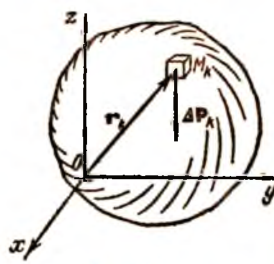


Рис. 8.2

Таким образом, удельный вес является функцией координат, т. е. $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Будем считать, что вместе с геометрическими характеристиками тела задан также и удельный вес в каждой точке тела.

Вернемся к разбиению тела на элементарные объемы. Если исключить объемы тех элементов, которые граничат с поверхностью тела, то можно получить ступенчатое тело, состоящее из совокупности параллелепипедов. Приложим к центру каждого параллелепипеда силу тяжести $\Delta P_k = \gamma_k \Delta V_k$, где γ_k — удельный вес в точке тела, совпадающей с центром параллелепипеда. Для системы n параллельных сил тяжести, образованной таким образом, можно найти центр параллельных сил

$$\mathbf{r}^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \Delta P_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta P_k} = \frac{\mathbf{r}_1 \Delta P_1 + \mathbf{r}_2 \Delta P_2 + \ldots + \mathbf{r}_n \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \ldots + \Delta P_n}. \qquad (8.11)$$

Формула (8.11) определяет положение некоторой точки C_n. *Центром тяжести* называется точка, являющаяся предельной для точек C_n при $n \to \infty$. Другими словами, центром тяжести тела называется такая точка, радиус-вектор которой определяется следующим пределом:

$$\mathbf{r}_c = \lim_{n\to\infty} \mathbf{r}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \, \Delta P_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta P_k} \tag{8.12}$$

или, переходя к удельному весу,

$$\mathbf{r}_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathbf{r}_k \, \Delta V_k}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathbf{r}_k \, \Delta V_k}{\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, \Delta V_k}. \tag{8.13}$$

При таком предельном переходе предполагается, что размеры всех параллелепипедов стремятся к нулю. Пределы знаменателей в формулах (8.12) и (8.13) равны весу тела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta P_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, \Delta V_k = P.$$

Поскольку пределы интегральных сумм в числителе и знаменателе формулы (8.13) представляют собой определенные интегралы, распространенные по объему тела, то $\mathbf{r}_c$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) \, \mathbf{r} \, dx \, dy \, dz.$$

Координаты центра тяжести определяются формулами

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} x\gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ y_c &= \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} y\gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ z_c &= \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} z\gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Тело называется *однородным*, если $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$. В этом случае величина γ выносится в формулах (8.14) за знаки интегралов в числителе и знаменателе и сокращается. Знаменатели в формулах (8.14) после сокращения их на γ равны объему тела V. Таким образом, получим

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz,$$
$$z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz. \tag{8.15}$$

Центр тяжести однородного тела часто называют *центром тяжести объема.*

В ряде случаев тело можно считать тонкой пластиной или оболочкой (рис. 8.3, *а*).

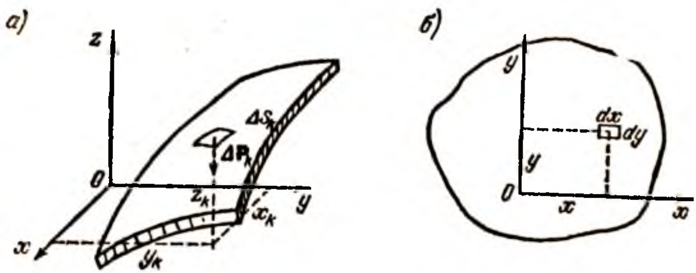


Рис. 8.3

Найдем центр тяжести однородной оболочки, предполагая, что вес элемента ее поверхности пропорционален площади этого элемента

$$\Delta P_k = \gamma' \Delta S_k$$

и, следовательно, вес тела $P = \gamma' S$ (S — площадь рассматриваемой части поверхности).

Из определения центра тяжести в соответствии с формулами (8.15) получим при $\gamma' = \text{const}$

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} x\,dS, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} y\,dS, \quad z_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} z\,dS. \tag{8.16}$$

Центр тяжести однородной оболочки называют *центром тяжести поверхности.*

Как следует из формул (8.16), определение координат центра тяжести поверхности связано с вычислением интегралов по поверхности.

Для плоской однородной пластины (рис. 8.3, *б*) получим

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy. \tag{8.17}$$

Наконец, рассмотрим криволинейный стержень — тело удлиненной формы, один из характерных размеров которого значительно больше двух других (рис. 8.4). Полагая, что вес элемента такого стержня, заключенного между двумя сечениями, нормальными к его оси, пропорционален длине Δl дуги этой оси, получим

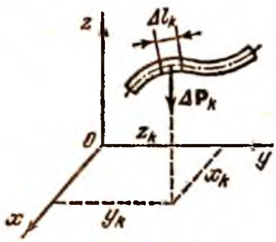


Рис. 8.4

$$\Delta P_k = \gamma'' \Delta l_k, \quad P = \gamma'' L,$$

где L — длина стержня.

Величину γ'' называют «погонным» весом. При сделанном предположении γ'' — величина постоянная. Тогда в соответствии с формулами (8.15) координаты центра тяжести однородного стержня имеют вид

$$x_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x\,dl, \quad y_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y\,dl, \quad z_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z\,dl. \tag{8.18}$$

Центр тяжести однородного криволинейного стержня называют *центром тяжести линии*.

§ 8.3. Методы нахождения центра тяжести

Во многих случаях центр тяжести тела можно определить с помощью весьма простых методов. Мы рассмотрим некоторые из них.

Симметрия. Если тело однородно и имеет плоскость симметрии (рис. 8.5, *а*), то задача определения центра тяжести несколько упрощается. Совместим с этой плоскостью симметрии координатную плоскость xOy. Тогда каждому элементу объема тела ΔV_k, положение которого определяется координатами x_k, y_k, z_k, будет соответствовать элемент объема тела ΔV_j с координатами x_j, y_j, z_j, причем

$$\Delta V_j = \Delta V_k, \quad x_j = x_k, \quad y_j = y_k, \quad z_j = -z_k.$$

Следовательно,

$$z_c = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\,\Delta V_k}{V} = 0,$$

так как в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k \Delta V_k$ все члены попарно уничтожаются.

Поэтому, *если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.*

Пусть, далее, однородное тело имеет ось симметрии. Выберем эту ось за ось z (рис. 8.5, *б*); тогда каждому элементу объема тела ΔV_k с координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать элемент объема тела ΔV_j с координатами x_j, y_j, z_j, причем

$$\Delta V_j = \Delta V_k, \quad x_j = -x_k, \quad y_j = -y_k, \quad z_j = z_k.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{1}{V} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta V_k = 0, \quad y_c = \frac{1}{V} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta V_k = 0,$$

так как в суммах $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Delta V_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta V_k$ все члены попарно уничтожаются.

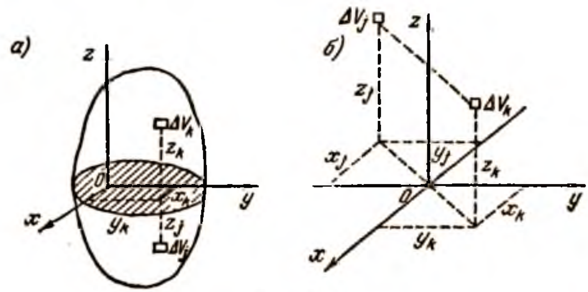


Рис. 8.5

Таким образом, *если однородное тело имеет ось симметрии, то его центр тяжести лежит на этой оси.*

Аналогично можно показать, что если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела будет совпадать с этой точкой. Так, например, для пластинки, имеющей прямоугольную форму, центр тяжести лежит в центре прямоугольника.

Разбиение. Иногда представляется возможным разбить тело на такие части, для которых вес и положение центра тяжести заранее известны. Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ — радиусы-векторы центра тяжести каждой части, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — веса соответствующих частей. Из формулы (8.8) следует, что

$$\mathbf{r}_c = \frac{P_1\mathbf{r}_1 + P_2\mathbf{r}_2 + \ldots + P_n\mathbf{r}_n}{P}, \tag{8.19}$$

где

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n.$$

Для однородной пластинки, например, из формулы (8.19) следует

$$x_c = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x_k S_k, \quad y_c = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} y_k S_k, \tag{8.20}$$

где S_k — площади частей плоской фигуры; x_k, y_k — координаты центров тяжести этих частей.

Задача 8.1. Способом разбиения найти координаты центра тяжести площади поперечного сечения неравнобокого угольника, размеры которого указаны на рис. 8.6.

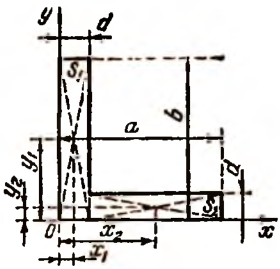


Рис. 8.6

Разобьем угольник на два прямоугольника, площади которых равны

$$S_1 = bd, \quad S_2 = (a-d)\,d.$$

На основании (8.20) формулы для координат центра тяжести угольника имеют вид

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2}{S_1+S_2}, \qquad y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2}{S_1+S_2},$$

где x_1, y_1 — координаты центра тяжести первого прямоугольника, а x_2, y_2 — координаты центра тяжести второго прямоугольника. Очевидно, что

$$x_1 = \frac{d}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2}, \quad x_2 = d + \frac{a-d}{2}, \quad y_2 = \frac{d}{2}.$$

Таким образом, получим координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\frac{d}{2}bd + \left(d + \frac{a-d}{2}\right)d(a-d)}{bd + d(a-d)} = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)},$$

$$y_c = \frac{\frac{b}{2}bd + \frac{d}{2}(a-d)\,d}{bd + d(a-d)} = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

Отрицательные веса. Этот способ применяют при нахождении центра тяжести тела, имеющего свободные (т. е. пустые) полости. Пусть дано тело, у которого имеется k свободных полостей (рис. 8.7), причем P_c — вес тела, $\mathbf{r}_c$ — искомый радиус-вектор, определяющий положение центра тяжести этого тела.

Рис. 8.7

Если бы тело не имело полостей, то его вес P, очевидно, равнялся бы сумме

$$P = P_c + P_1 + P_2 + \ldots + P_k,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — веса частей тела, которыми мы мысленно заполняем полости.

Обозначим через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение центра тяжести тела, не имеющего полостей, а через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k$ — радиусы-векторы, определяющие соответственно центры тяжести частей тела, заполняющих полости. На основании формулы (8.19) для тела, не имеющего полостей, можно записать

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_c P_c + \mathbf{r}_1 P_1 + \mathbf{r}_2 P_2 + \ldots + \mathbf{r}_k P_k}{P_c + P_1 + P_2 + \ldots + P_k}.$$

Находя из этой формулы радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра тяжести тела, имеющего полости, получим

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{r}P - \mathbf{r}_1 P_1 - \mathbf{r}_2 P_2 - \ldots - \mathbf{r}_k P_k}{P - P_1 - P_2 - \ldots - P_k}. \quad (8.21)$$

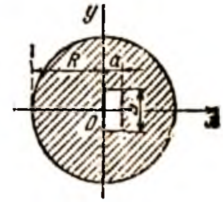


Рис. 8.8

Таким образом, при нахождении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять способ разбиения, но считать, что полости имеют отрицательные веса.

Задача 8.2. Найти центр тяжести однородной круглой пластинки радиуса R, у которой вырезано отверстие в виде прямоугольника со сторонами a и b (рис. 8.8), использовав способ отрицательных весов.

Пластинка симметрична относительно оси x; следовательно, $y_c = 0$. Остается найти лишь одну координату x_c.

Согласно (8.21) будем иметь

$$x_c = \frac{Sx - S_1 x_1}{S - S_1},$$

где $S = \pi R^2$, $S_1 = ab$, $x = 0$, $x_1 = a/2$. Таким образом,

$$x_c = \frac{-ab a/2}{\pi R^2 - ab} = -\frac{a^2 b}{2(\pi R^2 - ab)}.$$

§ 8.4. Центры тяжести простейших фигур

Центр тяжести треугольника. Воспользуемся способом разбиения и разделим треугольник ABC (рис. 8.9) на элементарные полоски, проведя линии, параллельные стороне AC треугольника. Каждую такую полоску можно принять за прямоугольник; центры тяжести этих прямоугольников находятся в их серединах, т. е. на медиане BD треугольника. Следовательно, центр тяжести треугольника должен лежать на этой же медиане BD.

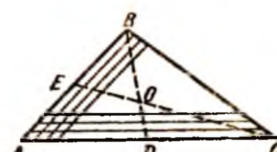


Рис. 8.9

Разбивая теперь треугольник на элементарные полоски линиями, параллельными стороне AB, заключаем, что центр тяжести треугольника должен быть расположен на медиане EC.

Следовательно, центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Эта точка, как известно, делит каждую из медиан на отрезки в отношении $1:2$, т. е. $OD : OB = 1:2$.

Центр тяжести трапеции. Аналогично предыдущему, разобьем трапецию $ABCD$ (рис. 8.10) на элементарные полоски, параллельные основаниям BC и AD. Центры тяжести полосок расположатся на прямой KL, соединяющей середины оснований трапеции. Следовательно, и центр тяжести трапеции лежит на этой прямой. Для того чтобы найти его расстояние y_G от нижнего основания, разобьем трапецию на треугольники ABC и ACD. Для этих треугольников соответственно имеем

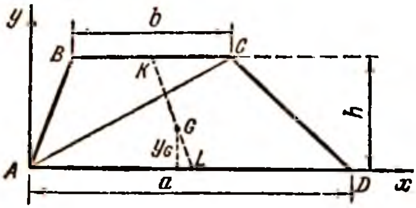


Рис. 8.10

$$y_1 = \frac{2}{3}h, \quad S_1 = \frac{bh}{2},$$
$$y_2 = \frac{1}{3}h, \quad S_2 = \frac{ah}{2}.$$

Используя формулу (8.20), получаем

$$y_G = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h\,(a + 2b)}{3\,(a + b)}.$$

Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу ADB окружности радиуса R с центральным углом 2α. Поместим начало координат в центре окружности и направим ось x перпендикулярно хорде AB (рис. 8.11, *а*).

Так как вследствие симметрии фигуры относительно оси x центр тяжести будет лежать на этой оси x, т. е. $y_c = 0$, то остается найти

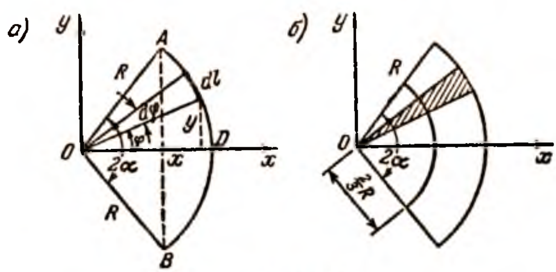


Рис. 8.11

только абсциссу центра тяжести x_c; для этого воспользуемся формулой (8.18). Согласно рис. 8.11, *а* имеем $x = R\cos\varphi$, $dl = R\,d\varphi$, $l = 2R\alpha$ и, следовательно,

$$x_c = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\varphi\, d\varphi}{2\alpha R} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}, \tag{8.22}$$

где α — половина центрального угла в радианах.

В частности, для дуги полуокружности ($\alpha = \pi/2$) будем иметь

$$x_c = 2R/\pi.$$

Центр тяжести кругового сектора. Для определения положения центра тяжести кругового сектора разобьем его на элементарные секторы, как показано на рис. 8.11, *б*. Каждый элементарный сектор можно принять за равнобедренный треугольник с высотой, равной R. Но высота в равнобедренном треугольнике является также и медианой; следовательно, центр тяжести каждого элементарного треугольника лежит на расстоянии $^2/_3 R$ от начала координат O. Соответственно геометрическим местом центров тяжести всех элементарных треугольников является дуга окружности радиуса $^2/_3 R$.

Это означает, что центр тяжести площади кругового сектора можно искать как центр тяжести материальной линии, по которой непрерывно и равномерно распределен вес этого сектора. Применив формулу (8.22), получим координату центра тяжести площади сектора

$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \tag{8.23}$$

где α — половина центрального угла в радианах. В частности, для сектора в виде полукруга ($\alpha = \pi/2$) получим

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}. \tag{8.24}$$

Задача 8.3. Пластинка, изображенная на рис. 8.12, получена из квадрата, сторона которого равна a, после того как из него была вырезана часть, составляющая четверть круга радиуса a с центром в вершине A квадрата. Определить центр тяжести пластинки.

Ось x проведем по диагонали квадрата, взяв начало оси в вершине A. Так как ось x является осью симметрии пластинки, то центр тяжести ее находится на этой оси. Площадь квадрата без выреза $S = a^2$, абсцисса его центра тяжести $x = a\sqrt{2}/2$; площадь вырезанной части $S_1 = \pi a^2/4$, абсцисса центра тяжести ее определяется формулой (8.23), в которой $R = a$, $\alpha = \pi/4$:

$$x_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a.$$

Центр тяжести пластинки определим по формуле

$$x_c = \frac{Sx - S_1 x_1}{S - S_1}$$

или, подставляя соответствующие величины,

$$x_c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{a}{4 - \pi} \approx 1{,}09a.$$

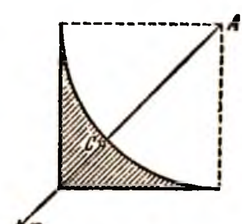


Рис. 8.12

На рис. 8.12 показан центр тяжести пластинки заданной конфигурации.

Приведем без вывода формулы, определяющие положения центров тяжести некоторых простейших однородных тел.

Поверхность шарового сегмента (рис. 8.13)

$$x_c = R - \frac{h}{2}. \qquad (8.25)$$

Пирамида и конус (рис. 8.14).

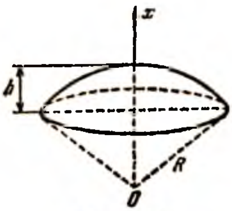


Рис. 8.13

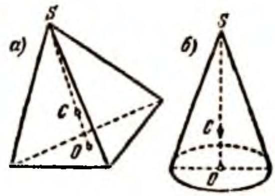


Рис. 8.14

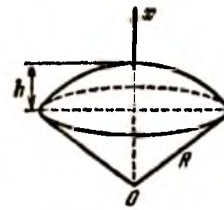


Рис. 8.15

Центр тяжести находится на прямой, соединяющей вершину с центром тяжести P площади основания, на расстоянии $^1/_4$ ее длины, считая от основания

$$OC = {}^1/_4 OS. \qquad (8.26)$$

Рис. 8.16

Шаровой сектор (рис. 8.15).

$$x_c = \frac{3}{4}\left(R - \frac{h}{2}\right), \qquad (8.27)$$

где R — радиус шара и h — высота сферической части сектора.

Задача 8.4. Определить центр тяжести колонны, состоящей из однородного цилиндра веса P, высоты H и радиуса R, на который установлена половина однородного шара веса G и того же радиуса R (рис. 8.16).

Разделим колонну на цилиндрическую и шаровую части. Центр тяжести всей системы лежит на оси симметрии. Абсцисса центра тяжести цилиндра $x_1 = H/2$. Расстояние от центра полушара до его центра тяжести найдем по формуле (8.27) при $h = R$, что дает $^3/_8 R$. Следовательно, $x_2 = H + {}^3/_8 R$. Пользуясь равенством (8.19), найдем центр тяжести колонны

$$x_c = \frac{P\frac{H}{2} + G\left(H + \frac{3}{8}R\right)}{P + G}.$$

Глава IX
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 9.1. Введение

В этом разделе курса мы приступим к изучению движения материальных тел. Когда говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение его положения с течением времени по отношению к какому-либо другому телу. Это значит, что при изучении движения тела мы всегда должны указать, относительно какого другого тела рассматривается его движение. С телом, по отношению к которому изучается движение (тело отсчета), связывают систему координатных осей и часы. Эту совокупность тела отсчета и связанной с ним системой координатных осей (системы координат) и часов, как было уже сказано во введении, называют *системой отсчета*.

Так как в теоретической механике считается, что время, являясь непрерывно изменяющейся величиной, не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и всех системах отсчета, то, говоря о системе отсчета, можно ограничиться указанием только тела отсчета или системы координатных осей (системы координат), связанных с этим телом. В кинематике движение тел изучается с чисто геометрической точки зрения и связь между движением и движущими силами не рассматривается. В кинематике движение считается заданным, т. е. считаются заданными как функции времени параметры, определяющие положение тела по отношению к выбранной системе координат.

В кинематике безразлично, какое движение совершает выбранная система координат по отношению к каким-то иным телам, не входящим в рамки нашего рассмотрения. Однако всегда следует иметь в виду, что характер наблюдаемого движения существенно зависит от выбора тела (системы координат), относительно которого изучается движение. Так, поршень автомобильного двигателя совершает относительно корпуса автомобиля прямолинейное колебательное движение, а относительно дороги, по которой движется автомобиль с постоянной скоростью, поршень перемещается по синусоиде.

Если тело не перемещается по отношению к выбранной системе координат, то говорят, что оно находится в покое. Так как покой и движение тела мы рассматриваем лишь относительно выбранной системы координат, которая в свою очередь может перемещаться произвольным образом, то понятия «покой» и «движение» являются относительными понятиями. Однако в кинематике часто пользуются терминами «абсолютное движение», «абсолютная скорость» и т. п., имеющими, конечно, условный характер. В частности, если нет специальной оговорки, под выражением «неподвижная система координат» следует понимать систему осей, относительно которых рассматривается движение.

Рассматривая движение, мы связываем изменение положения тела (или точки) с течением времени (будем обозначать его через t).

При изучении движения всегда устанавливается начало отсчета времени $t = t_0$ (во многих задачах будем полагать $t_0 = 0$). Под промежутком времени понимают разность между значениями времени в какой-либо момент времени t_2 и момент времени t_1.

При движении тела все его точки в общем случае совершают различные движения, например, при качении колеса по прямому рельсу центр колеса движется по прямой линии, а точки обода движутся по циклоидам. Поэтому изучению движения тела, естественно, должно предшествовать изучение движения точки. Кроме того, некоторые практические задачи о движении тел могут быть решены непосредственно на основании изучения движения точки.

Непрерывную кривую, которую описывает точка при своем движении, называют *траекторией точки*. В задачах небесной механики траекторию именуют также *орбитой*. Если траектория точки является прямой линией, то движение точки называют *прямолинейным*. Если же траектория — кривая линия (не обязательно плоская), то движение точки называется *криволинейным*.

Мы сразу начнем с изучения криволинейного движения точки, так как прямолинейное движение представляет собой частный случай криволинейного. Приступая к изучению движения точки, мы должны сформулировать те задачи, которые решаются в кинематике. Исходя из того, что основными пространственно-временными (кинематическими) характеристиками движения точки являются ее положение, скорость и ускорение, мы можем сформулировать эти задачи следующим образом: *найти способы задания движения и, исходя из них, найти методы определения скорости и ускорения.*

§ 9.2. Способы задания движения

Прежде всего определим, что значит задать движение.

Движение точки по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени. Следовательно, задать движение точки это значит указать способ, позволяющий в любой момент времени определить ее положение по отношению к выбранной системе отсчета.

Векторный способ. Положение точки в пространстве будет вполне определено, если ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, проводимый из какого-либо заданного центра, известен как функция времени, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Следует, однако, иметь в виду, что задать вектор как функцию времени значит уметь находить его модуль и направление в любой момент времени. Это можно сделать, если избрана какая-либо определенная система координат, т. е. задание радиуса-вектора как функции времени обязательно предполагает наличие системы координат, но в то же время не конкретизирует ее. Считая, что радиус-вектор задан, мы тем самым должны предполагать, что умеем определять его модуль и направление в избранной нами системе координат.

То обстоятельство, что введением радиуса-вектора, определяющего положение точки, мы не связываем себя с конкретной системой координат, позволяет широко использовать задание радиуса-вектора как функции времени для получения основных кинематических характеристик движения. Для решения же конкретных задач обычно переходят от векторного способа к координатному и естественному способам задания движения.

Введем еще одно полезное для дальнейшего понятие о годографе вектора, рассматриваемого как функция скалярного аргумента (например, времени).

Годографом какого-либо вектора называют кривую, которую вычерчивает конец этого вектора (предполагается, что начало вектора находится все время в одной и той же точке) при изменении его аргумента.

Следовательно, голографом радиуса-вектора, определяющего положение точки, будет траектория точки.

Перейдем теперь к рассмотрению координатного и естественного способов задания движения.

Координатный способ. Положение точки по отношению к какой-либо системе координат полностью определяется координатами точки. Поэтому задание координат точки в виде известных функций времени дает возможность определить ее положение в любой момент времени. Способ задания движения, заключающийся в задании координат точки как известных функций времени, называется *координатным способом* задания движения и требует выбора конкретной системы координат. Этот выбор определяется содержанием решаемой задачи; конечно, предпочтительнее та система координат, использование которой наиболее целесообразно для данной задачи.

При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат указанный способ заключается в задании координат x, y, z точки M (рис. 9.1) как известных функций времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{9.1}$$

Во многих случаях бывает предпочтительнее использовать *цилиндрические* или *сферические* координаты.

В цилиндрических координатах (рис. 9.1, *а*) положение точки определяется радиусом ρ, углом φ (азимут) и аппликатой z.

Следовательно, движение будет задано, если ρ, φ и z будут известными функциями времени

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \tag{9.2}$$

В сферических координатах (рис. 9.1, *б*) положение точки определяется полярным радиусом r, углом φ и углом θ (полюсный угол). Движение будет задано, если

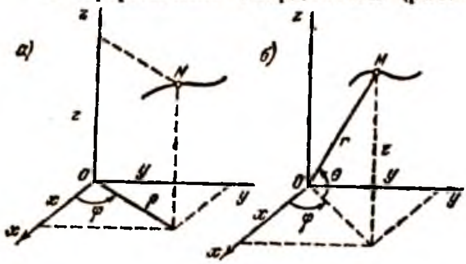


Рис. 9.1

$$r = r(t),$$
$$\varphi = \varphi(t), \tag{9.3}$$
$$\theta = \theta(t)$$

— известные функции времени.

Формулы, связывающие цилиндрические и сферические координаты с декартовыми, соответственно будут

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z;$$

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

При движении точки в плоскости иногда целесообразно использовать *полярные* координаты. В этом случае нужно задать в виде функций времени координаты r и φ (рис. 9.2):

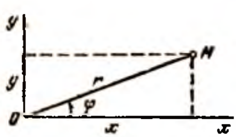


Рис. 9.2

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Связь этих координат с декартовыми дается формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Уравнения (9.1) движения точки представляют одновременно и уравнения траектории в параметрической форме, где роль параметра играет время t. Если требуется определить уравнение траектории в координатной форме, то нужно исключить каким-либо образом из этих уравнений время t.

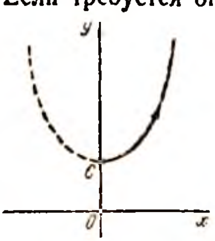


Рис. 9.3

Задача 9.1. Движение точки в плоскости xOy (рис. 9.3) задано при помощи уравнений

$$x = at, \quad y = bt^2 + c \; (a > 0,\ b > 0,\ c > 0), \tag{9.4}$$

и движение начинается в момент $t = 0$. Найти уравнение траектории в координатной форме.

Из первого уравнения следует, что $t = x/a$, поэтому уравнение траектории будет $y = \frac{b}{a^2}x^2 + c$. Это — уравнение параболы. Однако траекторией будет не вся парабола, а только часть, показанная на рис. 9.3 сплошной линией. Это следует из того обстоятельства, что от начального момента движения $t = 0$ (когда $x = 0$, $y = c$) координата x будет увеличиваться (время t положительно и непрерывно возрастает). Направление движения точки по траектории определяется из уравнений (9.4) и показано на рис. 9.3 стрелкой.

В рассмотренном примере исключение времени из уравнений движения было произведено путем нахождения времени t из уравнения для x и подстановки в уравнение для y. Такой прием не всегда удобен, поэтому исключение времени можно производить и другими способами.

Задача 9.2. Движение точки в плоскости xOy задано уравнениями

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t. \tag{9.5}$$

Найти уравнение траектории в координатной форме. Уравнения

$$\frac{x}{a} = \cos\omega t \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} = \sin\omega t$$

следует возвести в квадрат и сложить. Тогда получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Она представляет собой эллипс (рис. 9.4). Из уравнений (9.5) следует, что движение начнется в точке A с координатами $x = a$, $y = 0$ и будет происходить в направлении, указанном стрелкой (предполагается, что движение начинается в момент времени $t = 0$).

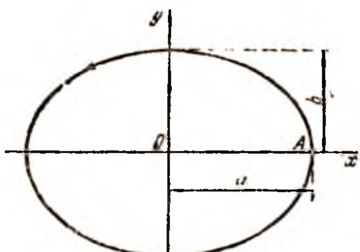


Рис. 9.4

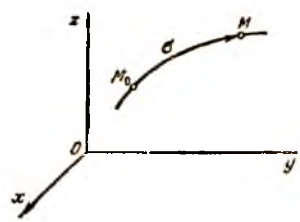


Рис. 9.5

Естественный способ. При естественном способе задания движения указываются *траектория точки и закон ее движения по этой траектории.*

Пусть точка движется по отношению к выбранной системе отсчета по заданной траектории (рис. 9.5), определяемой уравнениями

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0. \tag{9.6}$$

Пусть M_0 — какая-либо фиксированная точка на траектории. Выбрав направление положительного отсчета дуги по траектории, мы определим положение точки M в любой момент времени, если будем знать, как изменяется дуга $\sigma = \overset{\frown}{M_0M}$ (см. рис. 9.5) со временем

$$\sigma = \sigma(t). \tag{9.7}$$

Эта зависимость называется *законом движения.*

Кривая, построенная на плоскости (t, σ), выражающая зависимость $\sigma = \sigma(t)$, называется *графиком движения*.

Если движение происходит в сторону возрастания дуги σ, то дифференциал дуги *)

$$d\sigma = \dot{\sigma}(t)\,dt$$

будет положительным, если же движение происходит в сторону убывания дуги, то дифференциал дуги будет отрицательным. Отметим, что путь s, проходимый точкой, всегда будет возрастать и, следовательно, положителен, т. е.

$$ds = |d\sigma|.$$

Задача 9.3. Закон движения точки по траектории имеет вид

$$\sigma = -t^2 + 4t + 3$$

(t — в секундах, σ — в метрах). Построить и исследовать график движения.

Графиком движения будет кривая, изображенная на рис. 9.6. Из рассмотрения этого графика следует, что дуга σ увеличивается до значения $\sigma = 7$ м при $t = 2$ с, а затем начинает уменьшаться. Ход графика движения в области отрицательных σ характеризует увеличение абсолютного значения дуги при движении точки от начала отсчета M_0 в сторону, противоположную положительному отсчету дуги.

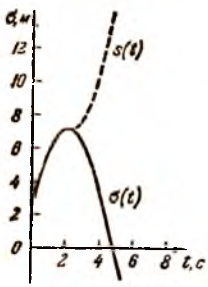


Рис. 9.6

На рис. 9.6 показана и кривая $s(t)$, представляющая график функции $s_1(t) + 3$, где $s_1(t)$ — путь, пройденный точкой. До значения $t = 2$ с кривая s совпадает с кривой σ, для $t \geqslant 2$ с кривая $s(t)$ показана пунктиром.

Все рассмотренные способы задания движения взаимосвязаны.

Пусть, например, движение задано координатным способом в виде (9.1). Очевидно, что при этом проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (рис. 9.7) на оси координат равны координатам точки M и, следовательно, можно записать

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{9.8}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей x, y, z.

Модуль $\mathbf{r}$ найдется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{9.9}$$

а направление определится направляющими косинусами

$$\cos(x,\ \mathbf{r}) = x/r, \quad \cos(y,\ \mathbf{r}) = y/r, \quad \cos(z,\ \mathbf{r}) = z/r. \tag{9.10}$$

Рассмотрим еще переход от координатного способа к естественному.

---

*) В механике производная по времени обозначается точкой над функцией, так что $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$.

Пусть движение задано уравнениями (9.1). Исключая из этих уравнений время t, получим уравнения траектории (9.6). Найдем теперь закон движения $\sigma = \sigma(t)$.

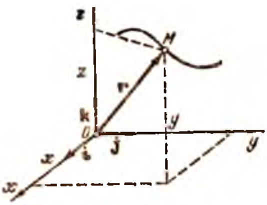


Рис. 9.7

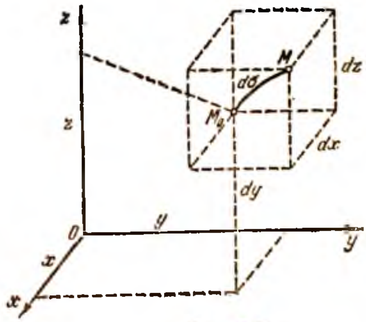


Рис. 9.8

Дифференциал дуги может быть найден по формуле (рис. 9.8) $d\sigma = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, где dx, dy, dz — дифференциалы координат точки $dx = \dot{x}(t)\,dt$, $dy = \dot{y}(t)\,dt$, $dz = \dot{z}(t)\,dt$.

Формулу для $d\sigma$ можно переписать в виде

$$d\sigma = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Интегрируя это выражение в промежутке от $t = 0$ (начало движения) до какого-либо момента времени t, получим закон движения

$$\sigma = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Знак «плюс» или «минус» перед интегралом ставится в зависимости от выбора направления положительного отсчета дуги; если движение точки начинается в сторону выбранного положительного отсчета дуги, то следует брать знак «плюс», в противном случае — знак «минус».

§ 9.3. Понятие о производной вектора по скалярному аргументу

При рассмотрении задач кинематики и динамики мы встретимся с необходимостью вычисления производных векторов, имеющих различный физический смысл и являющихся функциями различных скалярных аргументов (времени, дуги и пр.). Поэтому в начале этого параграфа мы определим понятие производной вектора по скалярному аргументу в общем виде, не придавая конкретного физического значения вектору и аргументу.

Пусть вектор а задан в какой-либо системе координат как непрерывная функция скалярного аргумента u

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(u).$$

При изменении аргумента u будут меняться как модуль вектора а, так и его направление. Конец вектора а при изменении аргумента u описывает кривую — годограф вектора $\mathbf{a}(u)$ (рис. 9.9). Пусть u — некоторое фиксированное значение аргумента, а Δu — его приращение. Тогда при значении аргумента $u + \Delta u$ вектор а будет иметь другой модуль и другое направление, чем при значении аргумента, равном u.

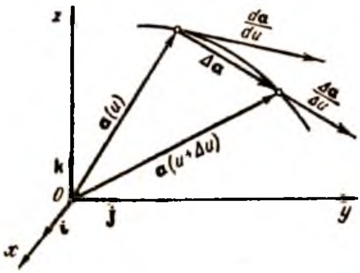


Рис. 9.9

Разность

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(u + \Delta u) - \mathbf{a}(u)$$

называется приращением вектора а.

Предел отношения

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{a}(u + \Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}$$

при $\Delta u \to 0$, если он существует, называется *производной вектора по скалярному аргументу и обозначается через* $\frac{d\mathbf{a}}{du}$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{a}(u + \Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}.$$

Заметим, что вектор $\Delta\mathbf{a}$ всегда направлен по секущей годографа вектора а (рис. 9.9), а значит, и вектор $\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta u}$ направлен также по секущей. При $\Delta u \to 0$ секущая займет предельное положение, совпадающее с касательной к годографу вектора а. Следовательно, *производная вектора по скалярному аргументу всегда направлена по касательной к годографу этого вектора.*

Приведем без доказательства свойства производной вектора по скалярному аргументу:

1. Производная постоянного по величине и направлению вектора равна нулю.

2. Производная суммы векторов равна сумме производных, т. е.

$$\frac{d(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{du} = \frac{d\mathbf{a}}{du} + \frac{d\mathbf{b}}{du}.$$

3. Производные скалярного и векторного произведений векторов соответственно определяются выражениями:

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{du}, \quad \frac{d}{du}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{du}.$$

Пусть вектор **a** задан в неподвижной прямоугольной системе координат; тогда

$$\mathbf{a}(u) = a_x(u)\,\mathbf{i} + a_y(u)\,\mathbf{j} + a_z(u)\,\mathbf{k},$$

где $a_x(u)$, $a_y(u)$, $a_z(u)$ — проекции вектора **a** на оси x, y, z (рис. 9.9). Так как векторы **i**, **j** и **k** постоянные, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\mathbf{i} + \frac{db_y}{du}\mathbf{j} + \frac{da_z}{du}\mathbf{k}.$$

С другой стороны, вектор $\frac{d\mathbf{a}}{du}$ можно записать через его проекции следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_x \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_y \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_z \mathbf{k}.$$

Сравнивая оба выражения, найдем проекции производной вектора на координатные оси

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_x = \frac{da_x}{du}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_y = \frac{da_y}{du}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_z = \frac{da_z}{du}.$$

Эти равенства можно прочитать следующим образом: *проекции производной вектора на неподвижные оси равны производным от соответствующих проекций вектора.*

Модуль производной определяется из равенства

$$\left|\frac{d\mathbf{a}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{du}\right)^2}.$$

Если модуль вектора **a** (u) остается постоянным при изменении аргумента u, то годографом вектора **a** будет кривая, расположенная на сфере радиуса a. Следовательно, производная da/du, направленная по касательной к годографу вектора **a**, будет в этом случае перпендикулярна вектору **a**.

§ 9.4. Скорость точки

Перейдем теперь к определению понятия скорости точки и методам ее нахождения.

Пусть в момент времени t положение точки определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ — радиусом-вектором $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Вектор

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

будем называть вектором перемещения точки за время Δt (рис. 9.10).

Отношение вектора $\Delta\mathbf{r}$ к промежутку времени Δt называется *средней скоростью точки за промежуток времени* Δt

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Скоростью в данный момент времени называется предел отношения вектора перемещения точки к промежутку времени, за который произошло это перемещение, когда этот промежуток времени стремится к нулю, т. е.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{9.11}$$

Размерность скорости будет

$$[v] = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]} = \frac{L}{T}.$$

Единицами измерения могут быть м/с, см/с, км/ч.

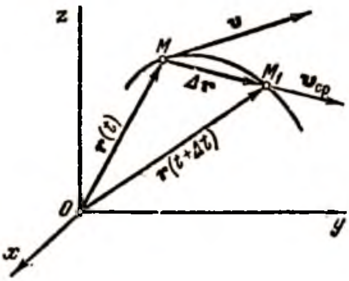


Рис. 9.10

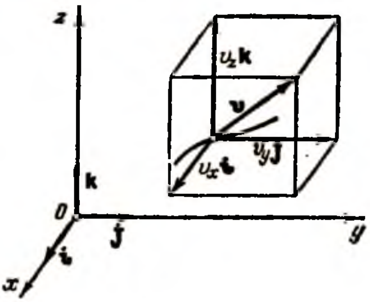


Рис. 9.11

Из этого определения видно, что *скорость точки равна производной радиуса-вектора точки по времени*. На рис. 9.10 показаны средняя скорость $\mathbf{v}_{ср}$ и скорость $\mathbf{v}$ точки M. Как следует из общей теории, *скорость точки* $\mathbf{v}$ *— это вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки*.

Скорость точки при координатном способе задания движения. Пусть движение точки задано в декартовой системе координат, принятой за неподвижную, т. е. пусть заданы координаты точки как функции времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Согласно выражению (9.8) имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Так как единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ выбранной системы координат постоянны, то на основании формулы (9.11) получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

На рис. 9.11 показано разложение скорости на составляющие по осям координатной системы $Oxyz$.

Таким образом, проекции скорости v_x, v_y, v_z на координатные оси будут

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

т. е. *проекция скорости точки на координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей этой оси координаты.*

Так как производную по времени мы условились обозначать точкой сверху, то полученные формулы можно переписать в виде

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{9.12}$$

Модуль скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \tag{9.13}$$

а направление скорости — направляющими косинусами

$$\begin{gathered}\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(z, \mathbf{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.\end{gathered} \tag{9.14}$$

Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется *равномерным.*

Задача 9.4. Движение точки задано уравнениями

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = bt.$$

Найти скорость точки.

В соответствии с выражениями (9.12) получим проекции скорости

$$v_x = \dot{x} = -a\omega\sin\omega t, \quad v_y = \dot{y} = a\omega\cos\omega t, \quad v_z = \dot{z} = b.$$

Модуль скорости определится формулой (9.13):

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}.$$

Направление скорости найдем, используя формулы (9.14):

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{-a\omega\sin\omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}, \quad \cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{a\omega\cos\omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}},$$

$$\cos(z, \mathbf{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{b}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}.$$

Из этих соотношений видно, что точка движется равномерно ($v = \mathrm{const}$), но направление скорости изменяется с течением времени.

Исследуем траекторию точки. Из первых двух уравнений движения найдем

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это — уравнение цилиндра радиуса a, ось которого совпадает с осью z (рис. 9.12).

Опустим теперь из точки M на плоскость xOy перпендикуляр MN и обозначим угол между осью x и прямой ON через φ. Координаты точки N будут

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Сравнивая эти соотношения с уравнениями движения, найдем

$$\varphi = \omega t.$$

Таким образом, угол φ изменяется пропорционально времени. Из этого следует, что прямая ON равномерно вращается, а точка M в это время равномерно перемещается по образующей NM ($z = bt$). Следовательно, точка движется по винтовой линии. Уравнения винтовой линии в параметрической форме совпадают с уравнениями движения, а в координатной форме имеют вид

$$x = a\cos\frac{\omega z}{b}, \quad y = a\sin\frac{\omega z}{b}.$$

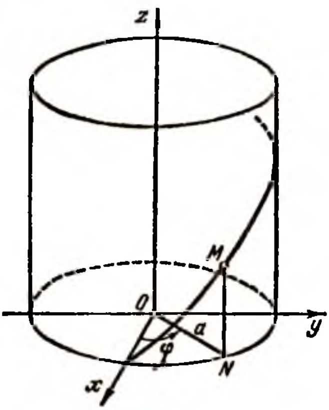


Рис. 9.12

Рассмотрим теперь движение, заданное в полярных координатах, т. е. пусть даны как функции времени полярный радиус $r = r(t)$ и угол $\varphi = \varphi(t)$, определяющие положение точки.

Введем в рассмотрение единичные векторы: $\mathbf{r}^0$, направленный по радиусу-вектору в сторону возрастания r, и $\mathbf{p}^0$, повернутый относительно $\mathbf{r}^0$ на угол $\pi/2$ в сторону возрастания угла φ (рис. 9.13). Единичные векторы $\mathbf{r}^0$ и $\mathbf{p}^0$ могут быть представлены через единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ координатных осей:

$$\mathbf{r}^0 = \cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j},$$

$$\mathbf{p}^0 = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{j} = -\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j}.$$

В дальнейшем нам будут нужны выражения для производных по времени от единичных векторов $\mathbf{r}^0$, $\mathbf{p}^0$.

Дифференцируя $\mathbf{r}^0$ по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{dt} = (-\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j})\,\dot\varphi = \dot\varphi\mathbf{p}^0. \tag{9.15}$$

Аналогично

$$\frac{d\mathbf{p}^0}{dt} = -(\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j})\,\dot\varphi = -\dot\varphi\mathbf{r}^0. \tag{9.16}$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}$, определяющий положение точки, может быть представлен в виде $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$ (рис. 9.13). При движении точки меняются как модуль, так и направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$, следовательно, и r, и $\mathbf{r}^0$ являются функциями времени. На основании равенства (9.11) имеем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{r}^0) = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}^0 + r\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}.$$

Используя соотношение (9.15), будем иметь

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{p}^0.$$

Полученная формула дает разложение вектора скорости на две взаимно перпендикулярные составляющие: радиальную $\mathbf{v}_r = \dot{r}\mathbf{r}^0$ и поперечную $\mathbf{v}_p = r\dot{\varphi}\mathbf{p}^0$ (рис. 9.14).

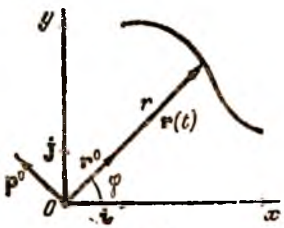


Рис. 9.13

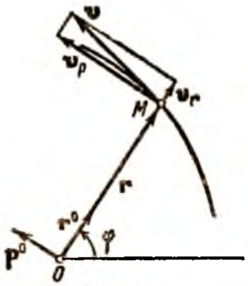


Рис. 9.14

Проекции скорости на радиальное и поперечное направления

$$v_r = \dot{r} \text{ и } v_p = r\dot{\varphi} \tag{9.17}$$

называются соответственно *радиальной* и *поперечной* скоростями.

Модуль скорости находится по формуле

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \tag{9.18}$$

Формулу (9.18) можно также получить, используя связь между декартовыми и полярными координатами,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Продифференцировав эти соотношения по времени $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$ и используя равенство (9.13), получим

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Нахождение скорости при естественном способе задания движения. Пусть точка M движется по какой-либо кривой (рис. 9.15). За промежуток времени Δt точка переместится по кривой из положения M в положение M_1. Дуга $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta\sigma > 0$, если движение точки происходит в сторону положительного отсчета дуги (рис. 9.15, *а*), и $\Delta\sigma < 0$, если движение происходит в противоположную сторону (рис. 9.15, *б*). На основании (9.11) имеем

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}.$$

Так как предел отношения дуги к стягивающей ее хорде равен по модулю единице, а предельное положение секущей MM_1 совпадает с направлением касательной к кривой в точке M, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \sigma} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой, направленный в сторону положительного отсчета дуги.

Действительно, если $\Delta\sigma > 0$, то вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \sigma}$ направлен в сторону $\Delta \mathbf{r}$ (см. рис. 9.15, *а*), а при $\Delta\sigma < 0$ вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \sigma}$ направлен в сторону, противоположную $\Delta \mathbf{r}$ (см. рис. 9.15, *б*). В обоих случаях этот

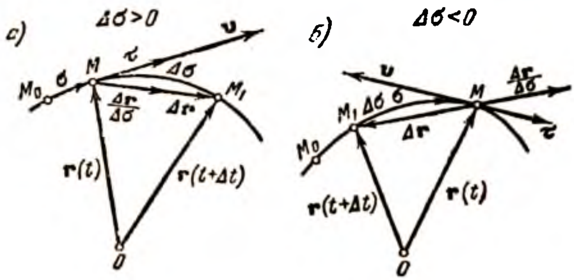


Рис. 9.15

вектор, а следовательно, и его предел $\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \boldsymbol{\tau}$, направлены в сторону возрастания дуги σ (на рис. 9.15 положительное направление отсчета дуги σ выбрано вправо от начала отсчета M_0).

Принимая во внимание, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma},$$

имеем

$$\mathbf{v} = \frac{d\sigma}{dt}\boldsymbol{\tau}. \tag{9.19}$$

Обозначая $v_\tau = \frac{d\sigma}{dt}$, получим

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau}. \tag{9.20}$$

Из формулы (9.20) следует, что $v = |v_\tau|$. Очевидно, что $v_\tau = v$, если движение происходит в сторону положительного отсчета дуги, и $v_\tau = -v$, если движение происходит в противоположную сторону.

Так как проходимый точкой путь всегда положителен, то элемент пути

$$ds = |d\sigma|$$

и, следовательно, модуль скорости можно определить по формуле

$$v = \left|\frac{d\sigma}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}.$$

§ 9.5. Задачи

Задача 9.5. Если ось x направить горизонтально, а ось y вертикально вверх, то движение тяжелой точки (например, артиллерийского снаряда) у поверхности Земли в предположении, что сопротивление воздуха пропорционально скорости точки, будет описываться уравнениями

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\left(1 - e^{-kgt}\right), \quad y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{t}{k},$$

где v_0, α, k, g — постоянные величины.

Найти модуль и направление скорости в начальный момент времени. Найти также наибольшую высоту h подъема точки над уровнем ее начального положения, дальность L по горизонтали от начального положения точки до ее наивысшего положения.

На основании (9.12) имеем

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos\alpha e^{-kgt}, \quad v_y = \dot{y} = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) e^{-kgt} - \frac{1}{k}.$$

При $t = 0$ $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha$, а модуль v скорости будет

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0.$$

Направление начальной скорости определим, найдя направляющие косинусы при $t = 0$:

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_0} = \cos\alpha,$$

$$\cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0} = \sin\alpha.$$

Следовательно, начальная скорость, равная по модулю v_0, направлена под углом α к горизонту.

Так как точка траектории, где $v_y = 0$, соответствует наибольшей высоте подъема движущейся точки, то из уравнения

$$v_y = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0$$

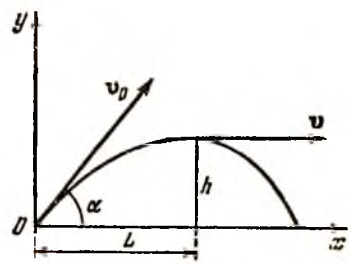


Рис. 9.16

мы определим момент времени t_1 достижения точкой наибольшей высоты. Имеем

$$e^{kgt_1} = 1 + kv_0 \sin\alpha;$$

отсюда

$$t_1 = \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0 \sin\alpha).$$

Подставляя найденное значение t_1 в выражение для y, получим искомую высоту (рис. 9.16)

$$h = \frac{v_0 \sin\alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + kv_0 \sin\alpha).$$

Найдем теперь расстояние по горизонтали от начального положения точки до ее положения в наивысшей точке. Для этого подставим время t_1 в выражение для x:

$$L = x_{t=t_1} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin\alpha)}.$$

Задача 9.6. Точка движется так, что ее радиус-вектор образует со скоростью постоянный угол. Определить уравнение траектории в полярных координатах, если угол, образуемый скоростью с радиусом-вектором, постоянен и равен α (рис. 9.17).

Согласно формуле (9.17) проекции скорости на радиальное и поперечное направления будут

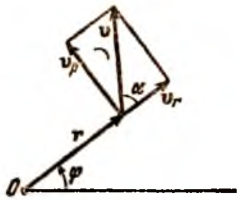


Рис. 9.17

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_p = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

По условию задачи

$$\frac{v_p}{v_r} = \operatorname{tg}\alpha = \text{const}.$$

Следовательно,

$$r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{dr}{r} = d\varphi \operatorname{ctg}\alpha.$$

Интегрируя это уравнение и приняв при $t = 0$ угол $\varphi = 0$, получим

$$\ln r \Big|_{r_0}^{r} = \varphi \operatorname{ctg}\alpha \Big|_0^{\varphi}.$$

Тогда $r = r_0 e^{\varphi \operatorname{ctg}\alpha}$, где r_0 — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ в момент времени $t = 0$. Таким образом, траектория представляет собой логарифмическую спираль.

Если угол $\alpha = 0$, то траектория будет прямолинейной — движение будет происходить вдоль радиуса-вектора. Если угол $\alpha = \pi/2$, то движение будет происходить по окружности, так как $r = r_0$.

§ 9.6. Ускорение точки

Предположим, что в момент времени t скорость точки равна $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ будет $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t + \Delta t)$ (рис. 9.18). Изменение вектора скорости за промежуток времени Δt найдем как разность векторов $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$, если параллельно перенесем вектор $\mathbf{v}_2$ в точку M_1 (рис. 9.18). Вектор

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$$

представляет собой приращение вектора скорости за промежуток времени Δt.

Отношение вектора $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt называется *средним ускорением* точки за промежуток времени Δt:

$$\mathbf{w}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Ускорением $\mathbf{w}$ точки в данный момент времени называется *предел отношения приращения скорости $\Delta\mathbf{v}$ к приращению времени Δt при условии, что последнее стремится к нулю, т. е.*

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{9.21}$$

Модуль и направление вектора ускорения определяются по формулам

$$w=\sqrt{w_r^2+w_p^2},\quad \cos(\mathbf{r}^0,\,\mathbf{w})=\frac{w_r}{w},\quad \cos(\mathbf{p}^0,\,\mathbf{w})=\frac{w_p}{w}.$$

Нахождение ускорения при естественном способе задания движения. Предварительно познакомимся с необходимыми сведениями из дифференциальной геометрии. Рассмотрим пространственную кривую. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, проведенной в какой-либо точке M этой кривой (рис. 9.20). Возьмем теперь на кривой точку M_1, близкую к точке M, и обозначим единичный

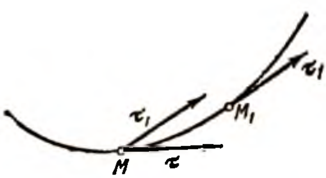


Рис. 9.20

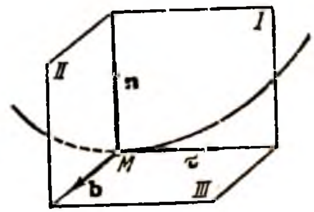


Рис. 9.21

вектор касательной в этой точке через $\boldsymbol{\tau}_1$. Параллельно перенеся вектор $\boldsymbol{\tau}_1$ в точку M, проведем плоскость через векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}_1$, приложенные в точке M.

При стремлении точки M_1 к точке M эта плоскость в пределе займет определенное положение. Полученную таким образом плоскость называют *соприкасающейся* плоскостью в точке M. Отметим, что если рассматриваемая кривая плоская, то она целиком будет расположена в соприкасающейся плоскости.

Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно касательной, называют *нормальной* плоскостью. Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей определяет *главную нормаль* к кривой в точке M. Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно главной нормали, называют *спрямляющей плоскостью*. На рис. 9.21 соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости обозначены соответственно цифрами *I*, *II* и *III*. Линия пересечения спрямляющей и нормальной плоскостей определяет *бинормаль* к кривой.

Таким образом, в каждой точке кривой можно указать три взаимно перпендикулярных направления: касательной, главной нормали и бинормали. Принимая эти направления за координатные оси, введем единичные векторы этих осей.

Единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}$ нами уже был введен. Единичный вектор $\mathbf{n}$, *направленный в сторону вогнутости* кривой, будет единичным вектором главной нормали. Направление единичного вектора бинормали $\mathbf{b}$ определим из требования, чтобы касательная, главная нормаль и бинормаль, направления которых определяются векторами $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, образовывали правую систему осей. Полученный трехгранник, составленный из соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей, называется *естественным трехгранником*. Векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ являются единичными векторами осей естественного трехгранника (рис. 9.21).

Обозначим через ε величину угла между вектором $\boldsymbol{\tau}$, проведенным в точке M, и вектором $\boldsymbol{\tau}_1$, проведенным в точке M_1, близкой к точке M. Этот угол называется *углом смежности* (рис. 9.22, *а*).

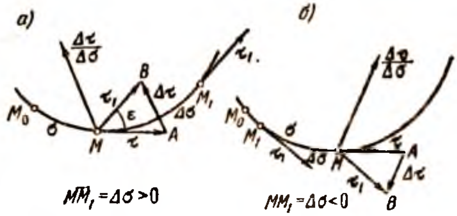


Рис. 9.22

Кривизной кривой в точке M называют предел отношения угла смежности ε к абсолютному значению длины дуги $MM_1 = \Delta\sigma$, т. е.

$$k = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta\sigma|}. \tag{9.27}$$

Радиусом кривизны кривой в точке M называется величина, обратная кривизне

$$\rho = 1/k. \tag{9.28}$$

Заметим, что кривизна прямой равна нулю, а ее радиус кривизны равен бесконечности. Кривизна окружности во всех ее точках одинакова и равна обратной величине радиуса ($k = 1/R$); радиус кривизны равен радиусу окружности ($\rho = R$).

Если через точку кривой M и две близкие к ней точки провести окружность, то при стремлении этих точек к M в пределе получится окружность, которая называется *кругом кривизны*. Круг кривизны лежит в соприкасающейся плоскости. Радиус этого круга равен радиусу кривизны кривой в точке M. Центр круга кривизны лежит на главной нормали и называется центром кривизны *).

Вектор скорости согласно выражению (9.20) можно представить в виде

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau},$$

где v_τ — проекция скорости на направление $\boldsymbol{\tau}$. На основании формулы (9.21) имеем

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \boldsymbol{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \tag{9.29}$$

---

*) Доказательства этих утверждений можно найти в любом курсе дифференциальной геометрии.

Определим величину и направление вектора $d\tau/dt$.

Пусть в момент времени t точка находится в положении M на траектории, а в момент времени $t+\Delta t$ — в положении M_1. Перенося вектор τ_1 в точку M, найдем приращение вектора τ за промежуток времени Δt (рис. 9.22, *а*)

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau.$$

Вектор $\Delta\tau$ при движении точки в сторону положительного отсчета дуги направлен в сторону вогнутости траектории (рис. 9.22, *а*), а при движении точки в сторону отрицательного отсчета дуги направлен в сторону выпуклости траектории (рис. 9.22, *б*).

Найдем производную вектора τ:

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = v_\tau\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Вектор $\Delta\tau/\Delta\sigma$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории (см. рис. 9.22, *а* и *б*) и лежит в плоскости, проходящей через точку M и векторы τ и τ_1 (плоскость MAB). Следовательно, вектор $d\tau/d\sigma$ лежит в соприкасающейся плоскости, так как при $\Delta\sigma \to 0$ ($\Delta t \to 0$) плоскость MAB совпадает с соприкасающейся плоскостью к траектории в точке M.

Дифференцируя тождество $\tau^2 = 1$ по σ, получим

$$\frac{d\tau}{d\sigma}\cdot\tau = 0,$$

т. е. скалярное произведение τ на $d\tau/d\sigma$ равно нулю, а это значит, что вектор $d\tau/d\sigma$ перпендикулярен τ. Таким образом, вектор $d\tau/d\sigma$ лежит в соприкасающейся плоскости, направлен в сторону вогнутости траектории и перпендикулярен τ; следовательно, он направлен по главной нормали к центру кривизны.

Определим теперь модуль вектора $d\tau/d\sigma$. Из равнобедренного треугольника AMB (см. рис. 9.22, *а*) найдем

$$AB = |\Delta\tau| = 2\sin(\varepsilon/2)$$

или, используя равенства (9.27) и (9.28), получим

$$\left|\frac{d\tau}{d\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{|\Delta\tau|}{|\Delta\sigma|} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin(\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)}\frac{\varepsilon}{|\Delta\sigma|} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Учитывая, что $\mathbf{n}$ есть единичный вектор главной нормали, будем иметь

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}.$$

Значит,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v_\tau}{\rho}\mathbf{n},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{w} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}, \tag{9.30}$$

так как $v_\tau^2 = v^2$.

Из этой формулы следует, что *вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.*

Составляющие ускорения по направлениям $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ соответственно равны

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}.$$

Проекция ускорения на направление $\boldsymbol{\tau}$

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \tag{9.31}$$

называется *касательным* (тангенциальным) ускорением. Проекция ускорения на главную нормаль

$$w_n = v^2/\rho \tag{9.32}$$

называется *нормальным* ускорением. *Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Модуль вектора ускорения равен

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{9.33}$$

Касательное ускорение $w_\tau = dv_\tau/dt$ равно нулю при движении точки с постоянной по модулю скоростью и в моменты времени, в которые скорость v_τ достигает экстремальных значений.

Если v_τ и w_τ одного знака, то модуль скорости $v = |v_\tau|$ точки возрастает и движение в этом случае называется *ускоренным*. Если же v_τ и w_τ разных знаков, то модуль скорости $v = |v_\tau|$ точки убывает и движение будет *замедленным*. При $w_\tau = 0$ модуль скорости остается постоянным — движение *равномерное*.

Нормальное ускорение равно нулю при прямолинейном движении ($\rho = \infty$), в точках перегиба криволинейной траектории и в моменты времени, в которые скорость точки обращается в нуль.

Отметим, что для вычисления касательного ускорения w_τ можно использовать равенство

$$w_\tau = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{v_\tau},$$

так как $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v_\tau$.

Если движение точки задано координатным способом, то в случае задания движения в декартовых координатах ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$) будем иметь

$$w_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}};$$

для полярных координат получим

$$w_\tau = \frac{v_r w_r + v_p w_p}{\pm\sqrt{v_r^2 + v_p^2}}.$$

§ 9.7. Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение. Если траектория точки является прямой линией, то, направляя одну из координатных осей, например ось x, вдоль этой прямой, мы полностью определим положение точки заданием ее абсциссы как функции времени, т. е. $x = x(t)$.

Проекции скорости и ускорения на ось x согласно формулам (9.12) и (9.23) будут

$$v_x = \dot{x}, \quad w_x = \ddot{x}.$$

Модули скорости и ускорения соответственно равны

$$v = |\dot{x}|, \quad w = |\ddot{x}|.$$

Если $v_x > 0$, то движение точки происходит в сторону положительного направления оси x. Если при этом $w_x > 0$, то движение ускоренное, если же $w_x < 0$, то движение замедленное.

При $v_x < 0$ точка движется в направлении, противоположном положительному направлению оси x. Если при этом $w_x > 0$, то движение замедленное, если же $w_x < 0$, то движение ускоренное.

В качестве примера рассмотрим прямолинейное движение, происходящее по закону

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

где a, ω, ε — постоянные величины.

Движение точки по такому закону называют *гармоническим*.

Величина a, равная максимальному отклонению точки от положения $x = 0$, называется *амплитудой* колебаний; $\omega t + \varepsilon$ называется *фазой* и ε — *начальной фазой* колебаний.

Скорость и ускорение точки, совершающей гармоническое колебание, соответственно будут

$$v_x = \dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \varepsilon), \quad w_x = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon) = -\omega^2 x.$$

Из формулы для w_x следует, что ускорение точки всегда направлено к началу координат и по модулю пропорционально отклонению точки от начала координат.

С помощью закона движения и формулы для скорости нетрудно установить, что если для какого-либо момента времени $t = t_1$ координата $x = x_1$, а скорость $v_x = v_{x_1}$, то в момент времени $t = t_2$, при котором имеет место равенство

$$\omega t_2 + \varepsilon = \omega t_1 + \varepsilon + 2\pi n,$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — скорость точки и ее положение будут такими же, как и в момент $t = t_1$.

Значит, гармоническое движение будет *периодическим* *), т. е. через промежутки времени, равные

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega} n,$$

движение будет полностью повторяться.

Наименьший промежуток времени, по истечении которого движение повторяется, называется периодом колебаний. Очевидно, что период гармонических колебаний будет равен

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число колебаний в единицу времени называется *частотой* колебаний и равно $\nu = 1/T$. Если время измеряется в секундах, то частота

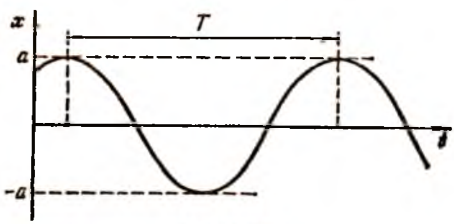


Рис. 9.23

измеряется в герцах. Величина $\omega = 2\pi\nu$ называется *круговой частотой*. Круговая частота равна числу колебаний за 2π единиц времени. График движения приведен на рис. 9.23.

Движение точки по окружности. При движении точки по окружности удобно задать ее движение в полярных координатах, так как при этом координата r является постоянной величиной, равной радиусу R окружности (рис. 9.24). Положение точки вполне определяется углом φ.

Так как $r = R$ — постоянная величина, то проекция скорости на радиальное направление $v_r = \dot{r} = 0$. Поперечная проекция скорости равна

$$v_p = r\dot{\varphi} = R\dot{\varphi}.$$

---

*) В общем случае движение $x(t)$ называется периодическим, если существует такой промежуток времени T, что для всех t будет справедливо равенство $x(t + T) \equiv x(t)$.

Модуль скорости будет

$$v = |v_p| = R\omega,$$

где $\omega = |\dot\varphi|$.

В соответствии с формулами (9.26) проекции ускорения на радиальное и поперечное направления определяются равенствами

$$w_r = -R\omega^2, \quad w_p = R\ddot\varphi.$$

Модуль ускорения равен

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

где $\varepsilon = |\ddot\varphi|$.

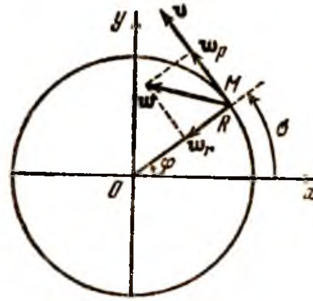


Рис. 9.24

Если выбрать направление положительного отсчета дуги, проходимой точкой, как указано на рис. 9.24, то очевидно, что касательное ускорение точки будет равно $w_\tau = R\ddot\varphi$, а нормальное $w_n = \omega^2 R$ (это ускорение называют *центростремительным ускорением*).

Заметим, что ω определяет угловую скорость вращения радиуса r, а ε — соответствующее угловое ускорение (подробнее об этом см. § 10.2).

§ 9.8. Задачи

Задача 9.7. Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям $x = v_0 t\cos\alpha$, $y = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2$. Определить скорость и ускорение снаряда в начальный момент времени, высоту траектории, дальность полета, а также радиус кривизны в начальной и наивысшей точках траектории. Ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально (рис. 9.25).

Траекторией снаряда будет парабола

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

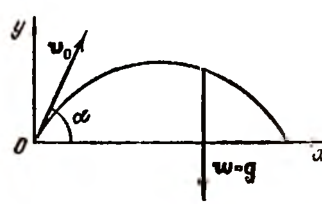


Рис. 9.25

Определим сначала скорость движения снаряда. Имеем

$$v_x = \dot x = v_0\cos\alpha, \quad v_y = \dot y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}.$$

В момент времени $t = 0$ величина скорости $v = v_0$. Направление скорости определяется по формулам

$$\cos(x,\ \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0\cos\alpha}{v},$$

$$\cos(y,\ \mathbf{v}) = \frac{v_0\sin\alpha - tg}{v}.$$

При $t = 0$ получим

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \cos\alpha, \qquad \cos(y, \mathbf{v}) = \sin\alpha,$$

т. е. скорость в начальный момент образует с осью x угол α.

Проекции ускорения на координатные оси будут

$$w_x = \ddot{x} = 0, \qquad w_y = \ddot{y} = -g,$$

следовательно, модуль ускорения равен

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = g,$$

и оно направлено по вертикали вниз (ускорение силы тяжести). Под высотой траектории понимается максимальное значение ординаты y. Очевидно, что y принимает максимальное значение при $v_y = 0$, т. е. когда

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0.$$

Находя отсюда $t = (v_0 \sin\alpha)/g$ и подставляя его в уравнение для y, получим

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Дальность полета определяется из условия $y = 0$. Из уравнения

$$v_0 t \sin\alpha - gt^2/2 = 0$$

найдем

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Момент $t_1 = 0$ соответствует начальному положению снаряда. Подставляя $t = t_2$ в уравнение для x, найдем дальность полета

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальная дальность полета будет при $\alpha = 45°$ и равна v_0^2/g.

Найдем теперь радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей ее точках. Из формулы $w_n = v^2/\rho$ имеем

$$\rho = v^2/w_n.$$

Таким образом, задача нахождения радиуса кривизны траектории сводится к нахождению скорости и проекции ускорения точки на нормаль.

Согласно (9.33) имеем

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2.$$

Так как движение точки происходит все время в сторону возрастания дуги, то $v_\tau = v$, и, следовательно,

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{-g\,(v_0 \sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}}.$$

При $t = 0$ $w_\tau = -g \sin\alpha$, а так как $w = g$, то $w_n = g\cos\alpha$ и, следовательно, радиус кривизны траектории в начальной точке равен

$$\rho = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}.$$

Для момента времени $t = (v_0 \sin\alpha)/g$, соответствующего наивысшей точке траектории, $w_\tau = 0$. Поэтому $w_n = g$.

Скорость точки в этот момент равна $v = v_0 \cos\alpha$ и радиус кривизны в наивысшей точке траектории будет

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}.$$

Отметим, что в данной задаче проекцию ускорения на нормаль в начальной и наивысшей точках траектории можно легко найти и простым проектированием (рис. 9.26).

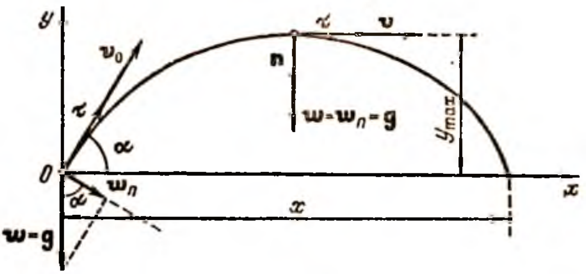


Рис. 9.26

Задача 9.8. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Скорость центра колеса постоянна и равна v_0. Найти уравнения движения точки M, лежащей на ободе колеса, ее траекторию, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории как функцию времени.

По условию, колесо катится без скольжения, следовательно, дуга AM равна отрезку OA при предположении, что в начальный момент времени точка M находилась в точке O (рис. 9.27).

Так как дуга $AM = R\varphi$, а $OA = v_0t$, то $v_0t = R\varphi$ и $\varphi = \omega t$, где $\omega = v_0/R$.

Координаты точки M будут:

$$x = v_0t - R\sin\varphi = v_0t - R\sin\omega t, \quad y = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\omega t).$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, которая представляет собой циклоиду.

Проекции скорости точки на оси Ox и Oy равны

$$v_x = \dot{x} = v_0 - R\omega\cos\omega t = v_0(1 - \cos\omega t),$$

$$v_y = \dot{y} = R\omega\sin\omega t = v_0\sin\omega t.$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t} =$$

$$= v_0\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = v_0\sqrt{4\sin^2(\omega t/2)} =$$

$$= 2v_0\sin(\omega t/2).$$

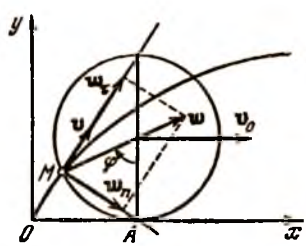


Рис. 9.27

Заметим, что угол φ изменяется от нуля до 2π и поэтому $\sin(\omega t/2) \geqslant 0$.

Направляющие косинусы вектора скорости будут

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{1-\cos\omega t}{2\sin(\omega t/2)} = \sin\frac{\omega t}{2},$$

$$\cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\sin\omega t}{2\sin(\omega t/2)} = \cos\frac{\omega t}{2}.$$

Отсюда следует, что вектор скорости все время проходит через верхнюю точку колеса.

Проекции ускорения на оси Ox и Oy равны

$$w_x = \ddot{x} = v_0\omega \sin \omega t, \qquad w_y = \ddot{y} = v_0\omega \cos \omega t$$

и, следовательно,

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = v_0\omega = \omega^2 R,$$

а так как

$$\cos(x, \mathbf{w}) = \frac{w_x}{w} = \sin \omega t, \qquad \cos(y, \mathbf{w}) = \frac{w_y}{w} = \cos \omega t,$$

то вектор ускорения точки M всегда проходит через центр колеса.

Радиус кривизны траектории найдем из выражения

$$\rho = v^2/w_n.$$

Так как $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$ и при $v_\tau = v$ $w_\tau = \frac{dv}{dt} = v_0\omega \cos \frac{\omega t}{2}$, то

$$w_n = v_0\omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t/2)} = v_0\omega \sin(\omega t/2).$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{4v_0^2 \sin^2(\omega t/2)}{v_0\omega \sin(\omega t/2)} = 4R \sin \frac{\omega t}{2} = 2AM,$$

где $AM = 2R \sin(\omega t/2)$ — длина отрезка от рассматриваемой точки колеса до его нижней точки.

Задача 9.9. Движение точки M задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$ (рис. 9.28), где a и k — постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции ее радиуса r.

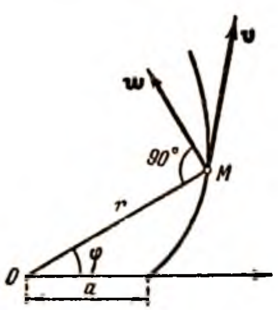


Рис. 9.28

Исключая из уравнений $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$ время t, получим уравнение траектории

$$r = ae^{\varphi}.$$

Это — уравнение логарифмической спирали.

Согласно формуле (9.17) радиальная и поперечная составляющие скорости соответственно будут

$$v_r = \dot{r} = ake^{kt} = kr, \quad v_p = r\dot{\varphi} = rk.$$

Следовательно, скорость точки M равна

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = kr\sqrt{2}.$$

Согласно формулам (9.26) будем иметь $w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = ak^2e^{kt} - ak^2e^{kt} = 0$, $w_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2k^2ae^{kt} = 2k^2r$, т. е. ускорение точки M

$$w = w_p = 2k^2r.$$

Определим теперь радиус кривизны траектории. На основании (9.32) получим

$$\rho = v^2/w_n.$$

Скорость v нами уже определена. Найдем w_n. Согласно (9.33)

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2};$$

имеем

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = k^2 \sqrt{2} a e^{kt} = k^2 r \sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$w_n = k^2 r \sqrt{2}.$$

Итак, радиус кривизны траектории будет

$$\rho = \frac{2k^2 r^2}{k^2 r \sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$$

Задача 9.10. Радар O, установленный на берегу, непрерывно следит за движением судна M, определяя в каждый данный момент времени расстояние r и угол φ между меридианом и направлением от радара на судно, а также скорости изменения этих величин. Пренебрегая кривизной земной поверхности, определить модуль скорости судна $\mathbf{v}$ относительно Земли, его курс (угол α между меридианом и скоростью $\mathbf{v}$) и расстояние p от радара до направления скорости $\mathbf{v}$ (рис. 9.29).

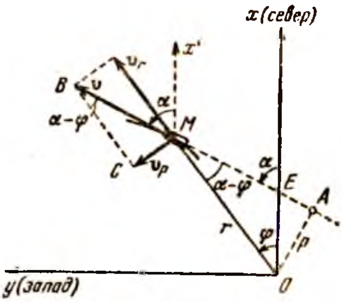


Рис. 9.29

Для решения задачи построим прямоугольную систему координат Oxy, направив ось x по касательной к меридиану на север, а ось y — по касательной к параллели на запад. Величины r, φ, $\dot r$ и $\dot\varphi$, которые непрерывно измеряет радар, суть полярные координаты судна и их скорости. Поэтому модуль скорости судна будет (см. формулу (9.18))

$$v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}.$$

Для определения курса (угла α) разложим вектор скорости судна $\mathbf{v}$ на радиальную $\mathbf{v}_r$ и поперечную $\mathbf{v}_p$ составляющие. Имеем (см. рис. 9.29):

$$\angle CBM = \angle OME = \alpha - \varphi$$

(углы CBM и OME — соответственные при параллельных прямых CB и OM а $\angle MEx$ — внешний для треугольника OME).

Из треугольника BCM найдем

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = v_p/v_r,$$

или, учитывая значения проекций поперечной $\mathbf{v}_p$ и радиальной $\mathbf{v}_r$ составляющих скорости $\mathbf{v}$,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = r\dot\varphi/\dot r. \tag{9.34}$$

Отсюда

$$\alpha = \varphi + \operatorname{arctg}(r\dot\varphi/\dot r). \tag{9.35}$$

Из треугольника OAM найдем параметр p:

$$p = r\sin(\alpha - \varphi) = r^2\dot\varphi/v. \tag{9.36}$$

С помощью счетно-решающих устройств скорость судна v, его курс α и параметр p определяются по формулам (9.18), (9.35) и (9.36) или им эквивалентным непрерывно.

Если судно идет постоянным курсом α, т. е. движется по прямой линии AMB, то равенство (9.36) определяет уравнение траектории судна в полярных координатах. Покажем, что при $\alpha = \text{const}$ это уравнение может быть получено из равенства (9.34).

Действительно, умножая числитель и знаменатель правой части равенства (9.34) на dt, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)=\frac{r\,d\varphi}{dr}, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{r}=\operatorname{ctg}(\alpha-\varphi)\,d\varphi.$$

Интегрируя обе части этого равенства и учитывая, что по предположению $\alpha = \text{const}$, получим

$$\ln r = -\ln\sin(\alpha-\varphi)+C, \tag{9.37}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. При $\varphi=\alpha-\pi/2$ расстояние от радара до судна будет равно p, т. е. $r=p$. Подставляя эти значения в (9.37), найдем

$$\ln p = -\ln\sin(\pi/2)+C, \quad C=\ln p.$$

Внося это значение для C в равенство (9.37), получаем

$$\ln r = -\ln\sin(\alpha-\varphi)+\ln p,$$

откуда следует равенство (9.36):

$$r=\frac{p}{\sin(\alpha-\varphi)}.$$

Задача 9.11. Угол ψ между неподвижной осью Ox и кривошипом O_1A изменяется по закону $\psi=\omega t$, где ω — постоянное положительное число. С кривошипом в точке A шарнирно соединен стержень AB, проходящий все время через качающуюся муфту O. Найти уравнение движения точки M стержня AB, отстоящей от точки A на расстоянии b, ее траекторию, скорость и ускорение, если $O_1A = OO_1 = a/2$ (рис. 9.30, a).

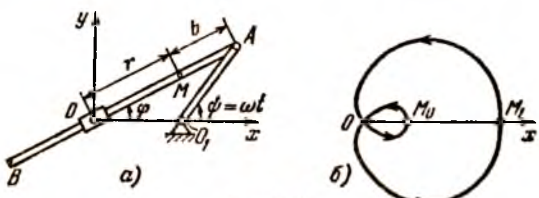


Рис. 9.30

Положение точки M проще всего определяется полярными координатами: радиусом $r=OM$ и полярным углом $\varphi=\angle O_1OA$. Так как треугольник OO_1A равнобедренный, то $\varphi=(\omega/2)\,t$, а сторона $OA=a\cos\varphi=a\cos(\omega t/2)$. Из рис. 9.30, a имеем $r=OA-b$; следовательно, уравнения движения точки M будут

$$r=a\cos(\omega t/2)-b, \quad \varphi=\omega t/2.$$

Исключая отсюда время t, найдем уравнение траектории точки M в полярных координатах:

$$r=a\cos\varphi-b.$$

(Для сравнения рекомендуем читателям самостоятельно найти уравнения движения и траекторию точки M в декартовых координатах.)

На рис. 9.30, $б$ показана траектория точки M, построенная по точкам *) для случая $b=a/2$ (при $b=a$ получается обычная кардиоида). Точка M_0 — начальная точка траектории, соответствующая моменту времени $t=0$ или $\varphi=0$ ($OM_0=a-b$). Направление движения точки M показано стрелками. Отметим, что точка M

---

*) Если при заданном значении полярного угла φ получается отрицательный радиус r, то его нужно отложить в обратном направлении.

попадает в свое начальное положение M_0 не через один оборот кривошипа O_1A, а через два оборота, когда угол φ изменится на 2π, а угол ψ — на 4π радиана (это произойдет в момент времени $t = 4\pi/\omega$).

Найдем проекции скорости точки на радиальное и поперечное направления. Имеем

$$v_r = \dot r = -\frac{a\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2} = -\frac{a\omega}{2}\sin\varphi,$$

$$v_p = r\dot\varphi = \left(a\cos\frac{\omega t}{2} - b\right)\frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2}(a\cos\varphi - b).$$

Теперь найдем модуль скорости точки M:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2},$$

или, подставляя найденные значения для v_r и v_p и произведя очевидные преобразования,

$$v = \frac{\omega}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\omega t}{2}} = \frac{\omega}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}.$$

Для ускорения будем иметь

$$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = -\frac{a\omega^2}{2}\cos\frac{\omega t}{2} + \frac{b\omega^2}{4} = \frac{\omega^2}{4}(-2a\cos\varphi + b),$$

$$w_p = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = -\frac{a\omega^2}{2}\sin\frac{\omega t}{2} = -\frac{a\omega^2}{2}\sin\varphi.$$

Модуль ускорения равен

$$w = \frac{\omega^2}{4}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cos\frac{\omega t}{2}} = \frac{\omega^2}{4}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cos\varphi}.$$

В начальной точке M_0 при $t = 0$ ($\varphi = 0$):

$$v_0 = (a - b)\,\omega/2, \quad w_0 = (2a - b)\,\omega^2/2.$$

Через один оборот кривошипа $\psi = 2\pi$, $\varphi = \pi$ точка M попадет в положение M_1 (рис. 9.30, *б*), и ее скорость и ускорение будут соответственно равны

$$v_1 = (a + b)\,\omega/2, \quad w_1 = (2a + b)\,\omega^2/4.$$

§ 9.9. Криволинейные координаты

Положение точки в трехмерном пространстве, как известно, можно однозначно определить тремя числами. Так, например, в декартовой системе координат такими числами будут координаты x, y и z точки, в цилиндрической и сферической системах координат такими числами соответственно будут ρ, φ, z и r, θ, φ (§ 9.2). Очевидно, что можно ввести в рассмотрение и другие системы координат, в которых определен закон выбора трех чисел, однозначно определяющих положение любой точки. В этом параграфе мы рассмотрим так называемые *криволинейные координаты*.

Предположим, что для однозначного определения положения любой точки нами установлен закон выбора трех чисел q_1, q_2, q_3, тем самым введена в рассмотрение определенная система координат. Эти числа q_1, q_2, q_3 называются *криволинейными координатами*, а введенная система координат — криволинейной. Пусть радиус-вектор, определяющий положение точки M, заданной координатами q_1, q_2, q_3, проведен из произвольно выбранного полюса O. Этот радиус-вектор будет функцией координат q_1, q_2, q_3:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{9.38}$$

Проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на оси декартовой системы координат также будут функциями q_1, q_2, q_3, т. е.

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{9.39}$$

Возьмем какую-либо точку M_0 с координатами q_1, q_{20}, q_{30}; тогда уравнения

$$x = x(q_1, q_{20}, q_{30}), \quad y = y(q_1, q_{20}, q_{30}), \quad z = z(q_1, q_{20}, q_{30}),$$

в которых переменной является только одна координата q_1, определяют кривую, проходящую через точку M_0. Эту кривую называют

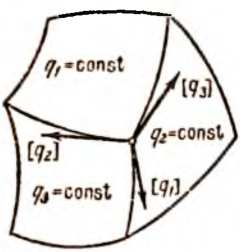


Рис. 9.31

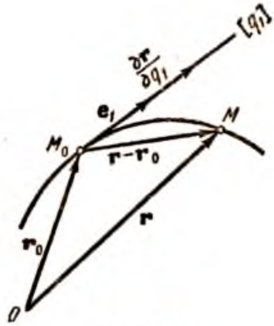


Рис. 9.32

координатной линией, соответствующей изменению координаты q_1. Аналогично определяются координатные линии, соответствующие изменению q_2 и q_3.

Касательные к координатным линиям, проведенные в точке M_0 в сторону возрастания соответствующих координат, называются *координатными осями* $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$ (рис. 9.31).

Координатными поверхностями называются поверхности, определяемые уравнениями (9.39) при изменении двух координат и при одной фиксированной координате. Так, например, поверхность (q_1, q_2) определяется следующими уравнениями:

$$x = x(q_1, q_2, q_{30}), \quad y = y(q_1, q_2, q_{30}), \quad z = z(q_1, q_2, q_{30}).$$

Касательные плоскости, проведенные в точке M_0 к координатным поверхностям, называются *координатными плоскостями*.

Определим теперь единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координатных осей. Рассмотрим движение точки по координатной линии, соответствующей изменению координаты q_1. Пусть в момент времени t точка находится в положении M_0 (рис. 9.32). Вектор $\partial\mathbf{r}/\partial q_1$, вычисленный в точке M_0, направлен по касательной к координатной линии $q_2 = \mathrm{const}$, $q_3 = \mathrm{const}$, т. е. он направлен по координатной оси $[q_1]$ в сторону возрастания q_1.

Так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\mathbf{k},$$

то

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1. \tag{9.40}$$

Таким образом, единичный вектор $\mathbf{e}_1$ равен

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}. \tag{9.41}$$

Аналогично можно получить

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \tag{9.42}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}, \tag{9.43}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Коэффициенты H_1, H_2, H_3 называются *коэффициентами Ламе*.

Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты, т. е. такие, у которых координатные оси взаимно перпендикулярны. Условием ортогональности является

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3;\quad i \neq j). \tag{9.45}$$

Скорость точки может быть найдена посредством дифференцирования соотношения (9.38)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{9.46}$$

но так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_2\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = H_3\mathbf{e}_3,$$

то

$$\mathbf{v} = \dot{q}_1 H_1\mathbf{e}_1 + \dot{q}_2 H_2\mathbf{e}_2 + \dot{q}_3 H_3\mathbf{e}_3. \tag{9.47}$$

Учитывая, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ по предположению взаимно перпендикулярны, для модуля скорости имеем

$$v = \sqrt{\dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2}. \tag{9.48}$$

Проекции скорости на координатные оси определяются выражениями

$$v_{q_1} = \dot{q}_1 H_1, \quad v_{q_2} = \dot{q}_2 H_2, \quad v_{q_3} = \dot{q}_3 H_3. \tag{9.49}$$

Проекция ускорения точки на координатную ось $[q_1]$, очевидно, будет равна

$$w_{q_1} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1};$$

отсюда

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\right). \tag{9.50}$$

Взяв частную производную от выражения (9.46) по $\dot{q}_1$, получим

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_1} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}. \tag{9.51}$$

Так как производная $\partial\mathbf{r}/\partial q_1$ зависит от координат q_1, q_2 и q_3, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_2\partial q_1}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_3\partial q_1}\dot{q}_3.$$

Дифференцируя теперь обе части равенства (9.46) по q_1, получим

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_1\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_1\partial q_3}\dot{q}_3.$$

Сравнивая оба выражения, найдем

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\right). \tag{9.52}$$

Подставляя полученные равенства (9.51) и (9.52) в формулу (9.50), имеем

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_1}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_1}.$$

Так как $\mathbf{v}^2 = v^2$, то

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_1} = v\frac{\partial v}{\partial\dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Аналогично

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Теперь выражение для w_{q_1} можно записать в следующей форме

$$w_{q_1} = \frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \tag{9.53}$$

где v находится по формуле (9.48). Аналогично получаем

$$w_{q_2} = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \tag{9.54}$$

$$w_{q_3} = \frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}. \tag{9.55}$$

§ 9.10. Задачи

Задача 9.12. Найти скорость и ускорение точки в цилиндрической системе координат ρ, φ, z (§ 9.2). Координатные линии и координатные оси показаны на рис. 9.33.

Так как

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

то согласно формулам (9.40) и (9.44)

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (9.48) и (9.49), получим

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi, \quad v_z = \dot z \qquad (9.56)$$

и

$$v = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}.$$

Для полярной системы координат ($\rho = r$, $z = 0$)

$$v_r = \dot r, \quad v_\varphi = r\dot\varphi, \quad v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}.$$

Имея в виду, что $v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial\dot\rho}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot\rho, \qquad \frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho^2\dot\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot z}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot z, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho\dot\varphi^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

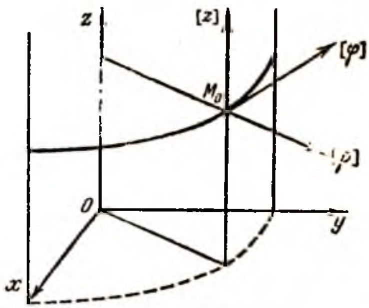


Рис. 9.33

Таким образом, по формулам (9.53), (9.54) и (9.55) получим

$$w_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2, \quad w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) = \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi, \quad w_z = \ddot z. \qquad (9.57)$$

Для полярной системы координат

$$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2, \quad w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi.$$

Задача 9.13. Найти скорость и ускорение точки в сферической системе координат r, φ, θ (рис. 9.34).

Декартовы координаты связаны со сферическими зависимостями

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

Так как

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta,$$

то согласно формуле (9.40) имеем

$$H_1 = 1.$$

Вычисляя далее

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -r\cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = -r\sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

и используя формулы (9.44), получим

$$H_2 = r\sin\theta, \quad H_3 = r.$$

Следовательно, на основании формул (9.48), (9.49) проекции скорости на координатные оси сферической системы координат равны

$$v_r = \dot r, \quad v_\varphi = r\dot\varphi\cos\theta, \quad v_\theta = r\dot\theta, \tag{9.58}$$
$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\cos^2\theta + r^2\dot\theta^2.$$

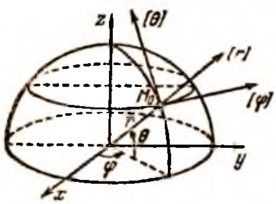


Рис. 9.34

Вычислив производные

$$\frac{\partial}{\partial \dot r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot r, \quad \frac{\partial}{\partial \dot\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = r^2\dot\varphi\cos^2\theta,$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot\theta}\left(\frac{v^2}{2}\right) = r^2\dot\theta, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = r\dot\varphi^2\cos^2\theta + r\dot\theta^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -r^2\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta,$$

найдем проекции ускорения на оси сферических координат:

$$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2\cos^2\theta - r\dot\theta^2,$$
$$w_\varphi = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi\cos^2\theta) = r\ddot\varphi\cos\theta + 2\dot r\dot\varphi\cos\theta - 2r\dot\varphi\dot\theta\sin\theta, \tag{9.59}$$
$$w_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) + r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta + r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta.$$

Задача 9.14. Найти скорость и ускорение точки, движущейся равномерно по винтовой линии.

Так как в этом случае в цилиндрической системе координат

$$\rho = R = \text{const}, \quad \varphi = kt, \quad z = ut$$

(k и u постоянны), то в силу формул (9.56) имеем

$$v_\rho = 0, \quad v_\varphi = Rk, \quad v_z = u,$$

и, следовательно,

$$v = \sqrt{R^2k^2 + u^2}.$$

Используя формулы (9.57), получим

$$w_\rho = -Rk^2, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0.$$

Так как $v = \text{const}$, то $w_\tau = 0$ и $w_n = w = Rk^2$. Радиус кривизны

$$\rho = \frac{R^2k^2 + u^2}{Rk^2}.$$

Задача 9.15. Точка движется по земной поверхности (принимаемой за сферу радиуса R), имея северную и восточную составляющие скорости соответственно равными v_N и v_O. Найти ускорение точки относительно Земли, не учитывая ее вращения. Составляющие v_N и v_O считать известными функциями времени.

Из условия задачи находим

$$r = R = \text{const}, \quad \dot\varphi = \frac{v_O}{R\cos\theta}, \quad \dot\theta = \frac{v_N}{R}.$$

В соответствии с формулами (9.55) получим

$$w_r = -\frac{v_O^2 + v_N^2}{2}, \quad w_\varphi = \dot v_O - \frac{v_O v_N}{R}\operatorname{tg}\theta, \quad w_\theta = \dot v_N + \frac{v_O^2}{R}\operatorname{tg}\theta.$$

Глава X

ОСНОВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 10.1. Задание движения твердого тела

При движении твердого тела отдельные его точки движутся в общем случае по различным траекториям и имеют в каждый момент времени различные скорости и ускорения. Вместе с тем имеются кинематические характеристики, одинаковые для всех точек твердого тела. Основными задачами кинематики и твердого тела являются установление способа задания его движения и изучение кинематических характеристик, присущих телу, а также определение траекторий, скоростей и ускорений всех точек тела.

Необходимо сначала уточнить понятие «задание движения твердого тела». Мы будем говорить, что движение твердого тела задано, если имеется способ определения положения любой его точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе координат.

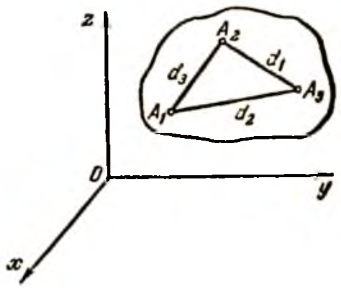


Рис. 10.1

Может сначала показаться, что для задания движения твердого тела требуется задать движение каждой его точки, т. е. необходимо иметь бесконечное множество уравнений движения. На самом деле это не так, ибо перемещения отдельных точек связаны условием неизменяемости расстояний между ними.

Покажем, что положение твердого тела в общем случае вполне определяется заданием шести независимых параметров. Для этого возьмем в теле три не лежащие на одной прямой точки (рис. 10.1) A_1, A_2, A_3 с координатами

$$x_k = x_k(t), \quad y_k = y_k(t), \quad z_k = z_k(t) \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.1}$$

Так как расстояния d_1, d_2, d_3 между точками твердого тела не изменяются, то координаты точек должны удовлетворять трем уравнениям:

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= d_3^2,\\
(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= d_1^2,\\
(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_2^2.
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Следовательно, из девяти координат (10.1) независимых только шесть, остальные три определяются из уравнений (10.2). Если взять еще одну точку A_4 с координатами x_4, y_4, z_4, то эти координаты должны будут удовлетворять трем уравнениям вида (10.2), выражающим неизменность расстояния до ранее выбранных точек A_1, A_2, A_3. Таким образом, положение твердого тела относительно произвольно выбранной системы координат вполне определяется шестью независимыми параметрами.

Если твердое тело будет закреплено в какой-либо точке, то его положение будет определяться уже только тремя независимыми параметрами.

Число независимых параметров, задание которых однозначно определяет положение твердого тела в пространстве, называется *числом степеней свободы* твердого тела.

Заметим, что задание шести декартовых координат, например, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3, не является наилучшим способом задания движения твердого тела. Как будет позднее выяснено, существуют более удобные параметры, определяющие положение тела в пространстве. В каждом отдельном случае мы будем стараться выбирать независимые параметры, определяющие движение твердого тела, исходя из соображений простоты и удобства решения основных задач кинематики.

§ 10.2. Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела. *Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению.*

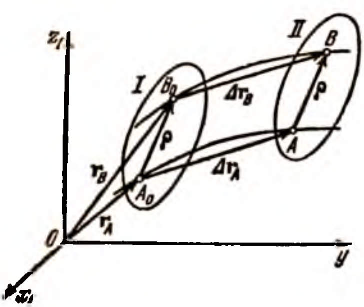


Рис. 10.2

Пусть твердое тело движется поступательно относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 10.2), $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор точки A, $\mathbf{r}_B$ — радиус-вектор точки B, а $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, определяющий положение точки B в подвижной системе координат $Axyz$, жестко связанной с телом (на рис. 10.2 эта система не показана).

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и его движение поступательное, то вектор $\boldsymbol{\rho}$ при движении тела не меняет модуля и направления.

Из рассмотрения рис. 10.2 следует

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}. \tag{10.3}$$

Пусть в момент времени t тело занимало положение I, а в момент времени $t + \Delta t$ — положение II (рис. 10.2). Тогда $\Delta\mathbf{r}_A$ будет вектором перемещения точки A, а $\Delta\mathbf{r}_B$ — вектором перемещения точки B за промежуток времени Δt.

Во время движения вектор $\boldsymbol{\rho}$ не изменяется, значит, отрезки A_0B_0 и AB равны и параллельны и, следовательно, фигура A_0B_0BA — параллелограмм.

Таким образом,

$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B,$$

т. е. при поступательном движении абсолютно твердого тела перемещения всех его точек геометрически равны между собой.

Из равенства (10.3) и условия постоянства вектора $\boldsymbol{\rho}$ также следует, что *траектории точек тела, движущегося поступательно, одинаковы и получаются друг из друга параллельным смещением.*

Продифференцировав выражение (10.3) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt},$$

но так как $\boldsymbol{\rho} = \mathrm{const}$, то $\boldsymbol{\rho} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A,$$

т. е. *при поступательном движении твердого тела скорости всех его точек в каждый момент времени равны между собой.*

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A,$$

т. е. *ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны между собой.*

Таким образом, *при поступательном движении твердого тела все его точки движутся одинаково, так как их перемещения, скорости и ускорения геометрически равны.*

Следовательно, для определения движения твердого тела, движущегося поступательно, нет необходимости рассматривать движение всех точек тела, а достаточно рассмотреть движение одной точки тела, иначе говоря, поступательное движение твердого тела определяется движением одной точки этого тела, координаты которой должны быть заданы как функции времени.

Пользуясь понятием поступательного движения, докажем теорему о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение *).

Предположим, что точка M движется по отношению к системе координат $Axyz$, которая жестко связана с телом перемещающимся поступательно по отношению к неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$. Положение точки относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором (рис. 10.3)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho},$$

*) Более общий случай сложного движения точки будет рассмотрен в главе XIII.

где $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор начала подвижной системы координат, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, определяющий положение точки M в подвижной системе координат.

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

В этом равенстве $d\mathbf{r}/dt$ есть скорость точки относительно неподвижной системы координат, которая называется *скоростью точки в сложном движении* или *абсолютной скоростью* и обозначается через $\mathbf{v}_a$.

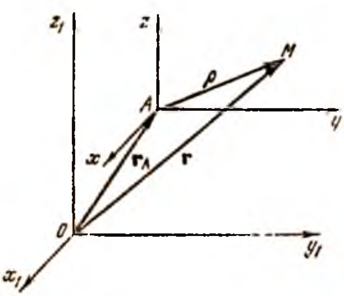


Рис. 10.3

Первое слагаемое в правой части равенства $d\mathbf{r}_A/dt$ — скорость точки A. Так как система координат $Axyz$ движется поступательно, то это одновременно будет скоростью той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M. Эта скорость называется *переносной скоростью* точки M и обозначается $\mathbf{v}_e$.

Выясним смысл производной $d\boldsymbol{\rho}/dt$. Вектор $\boldsymbol{\rho}$ определен в подвижной системе координат, следовательно,

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где x, y, z — координаты точки M в системе координат $Axyz$, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы этих осей.

Так как подвижная система координат перемещается поступательно, то $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — постоянные векторы и их производные по времени равны нулю, поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}.$$

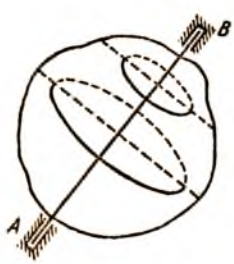


Рис. 10.4

Это равенство определяет скорость точки по отношению к подвижной системе координат и называется *относительной скоростью* точки M. Обозначим эту скорость через $\mathbf{v}_r$.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \qquad (10.4)$$

Полученное равенство выражает теорему о сложении скоростей: *скорость точки в сложном движении равна сумме переносной и относительной скоростей.*

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. При движении твердого тела с двумя неподвижными точками A и B (рис. 10.4) все точки на прямой AB остаются неподвижными. Это следует из условия неизменяемости расстояний между точками твердого тела. *Прямая*

AB называется осью вращения, а движение тела называется вращательным. Нетрудно видеть, что все точки тела описывают дуги окружностей с центрами в основаниях перпендикуляров, опущенных из этих точек на ось вращения.

Возьмем на оси вращения две точки A и B и введем систему координат $Ax_1y_1z_1$ с началом в точке A (рис. 10.5). Так как положение точек A и B нам известно, то положение тела будет полностью определено, если мы будем знать в любой момент времени положение какой-либо точки C тела (не лежащей на оси вращения). Из трех координат этой точки независимой будет только одна, так как расстояния AC и BC постоянны и координаты точки связаны двумя уравнениями:

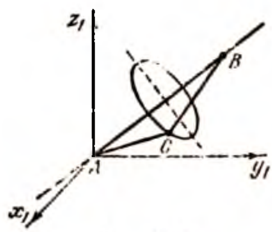


Рис. 10.5

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = AC^2,$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2.$$

Отсюда следует, что положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется одним параметром.

Направим ось Az_1 неподвижной системы координат $Ax_1y_1z_1$ по оси вращения тела. Введем подвижную систему координат $Axyz$, жестко связанную с телом, ось Az которой так же направим по оси вращения (рис. 10.6). Положение тела будет полностью определено, если задан угол $\varphi = \varphi(t)$ между неподвижной плоскостью x_1Az_1 и подвижной плоскостью (жестко связанной с телом) xAz (рис. 10.6). Этот угол называется *углом поворота тела.*

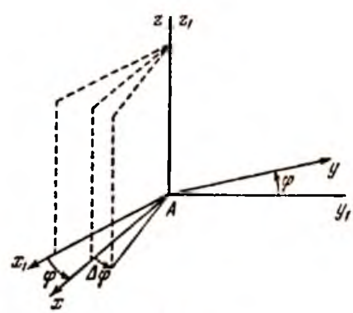


Рис. 10.6

Для однозначного определения положения тела необходимо знать не только величину, но и направление отсчета угла φ. Условимся считать положительным направлением отсчета направление против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси Oz_1.

Характер вращательного движения твердого тела целиком определяется заданием угла его поворота как функции времени. Главными кинематическими характеристиками вращательного движения тела в целом будут *угловая скорость* и *угловое ускорение*, к определению которых мы и перейдем.

Пусть в момент времени t угол между неподвижной полуплоскостью x_1Az_1 и подвижной полуплоскостью xAz равен $\varphi(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ равен $\varphi(t + \Delta t)$. Это значит, что за промежуток времени Δt подвижная плоскость, а следовательно, и тело повернулись на угол

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t).$$

Отношение угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за который тело повернулось на этот угол, называется *средней угловой скоростью тела* за промежуток времени Δt

$$(\omega_z)_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *угловой скоростью тела* в данный момент времени

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (10.5)$$

Введенная таким образом угловая скорость ω_z может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от закона изменения угла φ. Абсолютное значение угловой скорости будем обозначать через ω, т. е. $\omega = |d\varphi/dt|$.

Если угол поворота измеряется в радианах, а время — в секундах, то единицей измерения угловой скорости будет рад/с. В технике часто при равномерном вращении тела пользуются *числом оборотов в минуту*. Зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту определяется по следующей формуле:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с},$$

где n — число оборотов в минуту.

Пусть теперь в момент времени t угловая скорость вращения равна $\omega_z(t)$, а в момент $t + \Delta t$ равна $\omega_z(t + \Delta t)$; тогда за промежуток времени Δt приращение угловой скорости будет равно

$$\Delta\omega_z = \omega_z(t + \Delta t) - \omega_z(t).$$

Средним угловым ускорением тела за промежуток времени Δt будем называть отношение приращения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, т. е.

$$(\varepsilon_z)_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *угловым ускорением тела* в данный момент времени

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \qquad (10.6)$$

так как

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение, характеризующее изменение угловой скорости с течением времени, равно производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота. Модуль углового ускорения обозначается буквой ε.

Единица измерения углового ускорения — рад/с^2.

Весьма полезным для дальнейшего изучения кинематики твердого тела является введение в рассмотрение *вектора угловой скорости* и *вектора углового ускорения.*

Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, мы будем называть вектор, модуль которого равен абсолютному значению производной угла поворота тела по времени, направленный вдоль оси вращения в ту сторону откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

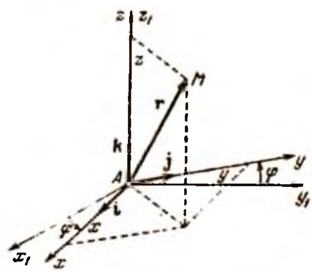


Рис. 10.7

Учитывая ранее введенное определение направления положительного отсчета угла φ, вектор угловой скорости можно определить по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{k} = \omega_z\mathbf{k}, \qquad (10.7)$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси Oz.

Из этой формулы следует, что при $\omega_z = \dot\varphi > 0$ направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{k}$, а при $\omega_z = \dot\varphi < 0$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен в сторону, противоположную направлению вектора $\mathbf{k}$.

Вектором углового ускорения будем называть вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости, т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\mathbf{k} = \varepsilon_z\mathbf{k}, \qquad (10.8)$$

где $\varepsilon_z = d^2\varphi/dt^2$. Из формулы (10 8) следует, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен, как и вектор $\boldsymbol{\omega}$, вдоль оси вращения.

Величины ω_z и ε_z представляют *проекции* векторов угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ на ось вращения.

Перейдем к нахождению скорости и ускорения любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Пусть единичные векторы координатных осей x, y, z, соответственно будут $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ (рис. 10.7). Радиус-вектор произвольной точки M можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad (10.9)$$

где x, y, z — координаты точки (постоянные величины).

Скорость точки M будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \qquad (10.10)$$

Так как вектор $\mathbf{k}$ неподвижен, то $\dot{\mathbf{k}} = 0$; что же касается производных векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, то мы уже вычисляли их, рассматривая движение точки в полярной системе координат. Если обозначить $\mathbf{r}^0 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{p}^0 = \mathbf{j}$, то формулы (9.15) и (9.16) примут вид

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\varphi}\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\dot{\varphi}\mathbf{i}.$$

Подставляя в формулу (10.10) эти производные и учитывая, что $\dot{\varphi} = \omega_z$, получим

$$\mathbf{v} = x\omega_z\mathbf{j} - y\omega_z\mathbf{i}. \tag{10.11}$$

Отсюда следует, что проекции вектора скорости точки M на оси x, y и z соответственно равны

$$v_x = -y\omega_z, \quad v_y = x\omega_z, \quad v_z = 0. \tag{10.12}$$

Так как векторное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z\mathbf{i} + x\omega_z\mathbf{j}$$

имеет те же проекции на оси x, y и z, что и вектор скорости $\mathbf{v}$, то имеем

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{10.13}$$

иначе говоря, *скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.*

Из формулы (10.13) следует, что

$$v = \omega r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \omega\rho,$$

т. е. *модуль скорости любой точки твердого тела равен произведению модуля угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения. Направлен же вектор скорости по касательной к окружности, по которой перемещается точка M, в сторону ее движения.*

Взяв производную по времени от обеих частей равенства (10.13), получим

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Но $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение, а $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ — скорость точки M. Тогда

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ направлен по касательной к траектории точки (к окружности радиуса ρ), т. е. параллельно скорости (так как вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен по оси вращения (рис. 10.8)). Эта составляющая ускорения является касательной составляющей ускорения точки M тела. В дальнейшем будем называть эту составляющую *вращательным ускорением*, т. е.

$$\mathbf{w}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}.$$

Это название связано с тем, что с такой составляющей ускорения мы встретимся при изучении более сложного движения тела, когда вектор $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ уже не будет являться касательным ускорением точки M.

Численное значение вращательного ускорения равно

$$w^{вр} = \varepsilon r \sin(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon\rho.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ направлен в плоскости окружности радиуса ρ от точки M к точке C, т. е. направлен к оси вращения по нормали к траектории и является нормальным ускорением точки M. Этот вектор

$$\mathbf{w}^{oc} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

направленный к оси вращения, будем называть *осестремительным* ускорением.

Так как вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\omega}$, то численное значение осестремительного ускорения равно

$$w^{oc} = \omega v = \omega^2\rho.$$

Модуль полного ускорения точки M будет

$$w = \sqrt{(w^{oc})^2 + (w^{вр})^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

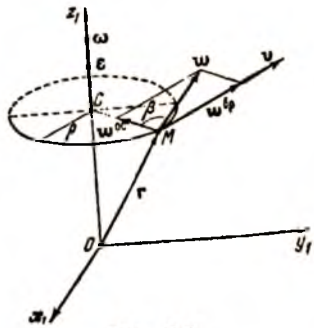


Рис. 10.8

Угол β, образованный векторами полного и осестремительного ускорений, определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w^{вр}}{w^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Задача 10.1. Стрелка гальванометра длиной l движется по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$, где φ_0 — угол максимального отклонения стрелки от положения $\varphi = 0$, а T — период колебаний. Найти модуль и направление ускорения конца стрелки гальванометра в момент времени $t = T/4$.

Угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны

$$\omega_z = \dot\varphi = \frac{2\pi}{T}\varphi_0 \cos\frac{2\pi}{T}t, \quad \varepsilon_z = \ddot\varphi = -\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Модуль вращательного ускорения будет

$$w^{вр} = l\varepsilon = l\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi_0\left|\sin\frac{2\pi}{T}t\right|,$$

а модуль осестремительного ускорения

$$w^{oc} = l\omega^2 = l\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi_0^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t.$$

При $t = T/4$

$$w^{вр} = l\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,\varphi_0, \quad w^{ос} = 0.$$

В момент $t = T/4$, угол $\varphi = \varphi_0$, т. е. стрелка доходит до своего крайнего положения. В этот момент времени скорость конца стрелки $v = l\omega = 0$, а ускорение будет равно модулю вращательного ускорения.

Глава XI

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 11.1. Задание движения

Движение твердого тела называется плоским, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Примером плоского движения тела может служить качение цилиндра по горизонтальной плоскости, при котором его основание остается все время параллельным плоскости yz (рис. 11.1).

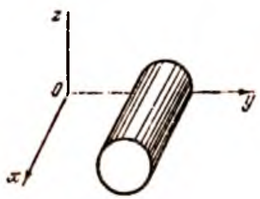


Рис 11.1

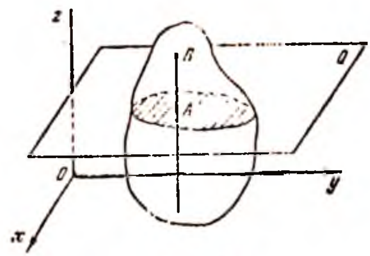


Рис. 11.2

Рассмотрим произвольное плоское движение твердого тела. Пусть все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости xy (рис. 11.2). Из определения плоского движения и из свойств твердого тела (углы между любыми прямыми, фиксированными в твердом теле, сохраняются неизменными) следует, что любая прямая AB, проведенная в теле перпендикулярно плоскости xy, будет перемещаться поступательно, т. е. траектории, скорости и ускорения всех точек этой прямой будут одинаковы.

Таким образом, для определения движения тела необходимо знать движение лишь одной точки на каждой прямой, проведенной перпендикулярно плоскости xy Взяв точки в одной плоскости, параллельной плоскости xy, *мы можем утверждать, что плоское движение твердого тела вполне определяется движением плоской фигуры, полученной от пересечения тела любой плоскостью Q, параллельной плоскости xy* (см. рис. 11.2).

Итак, задание движения твердого тела сводится к заданию движения одного его сечения. Поэтому в дальнейшем будем изображать только плоскую фигуру — сечение тела и изучать движение точек этого сечения в его плоскости.

Пусть $A(x_{1A}, y_{1A})$ и $B(x_{1B}, y_{1B})$ — две точки плоской фигуры, находящейся в плоскости Ox_1y_1 (рис. 11.3, *а*). Так как расстояние d между этими точками остается неизменным

$$(x_{1A}-x_{1B})^2+(y_{1A}-y_{1B})^2=d^2,$$

то из четырех координат независимых только три. Присоединение третьей точки $C(x_{1C}, y_{1C})$ не увеличивает числа независимых координат, ибо две новые координаты x_{1C} и y_{1C} должны удовлетворять

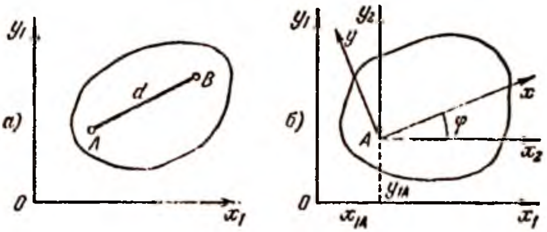


Рис. 11.3

двум равенствам, выражающим неизменность расстояний до ранее выбранных точек A и B. Таким образом, для описания плоского движения тела требуется знать три независимые координаты как функции времени.

Свяжем жестко с плоской фигурой систему координат Axy. Тогда положение системы Axy, а вместе с ней и положение плоской фигуры относительно системы координат Ox_1y_1 будет вполне определено заданием координат x_{1A} и y_{1A} точки A и углом φ между осями Ax_2 и Ax — см. рис. 11.3, *б* (оси Ax_2 и Ay_2 соответственно параллельны осям Ox_1 и Oy_1 и перемещаются при движении фигуры поступательно). Следовательно, три функции времени

$$x_{1A}=x_{1A}(t), \quad y_{1A}=y_{1A}(t), \quad \varphi=\varphi(t) \tag{11.1}$$

определяют положение плоской фигуры в любой момент времени. Равенства (11.1) называются *уравнениями движения плоской фигуры* или *уравнениями плоского движения твердого тела.*

§ 11.2. Скорости точек тела при плоском движении

Найдем формулы, позволяющие при заданных функциях (11.1) определить координаты любой точки плоской фигуры.

Пусть система координат Ox_1y_1 является неподвижной системой, а система координат Ax_2y_2, имеющая начало в произвольно выбранной точке A плоской фигуры, движется поступательно. Систему координат Axy жестко свяжем с плоской фигурой.

Радиус-вектор $\mathbf{r}_B$, определяющий положение точки B относительно неподвижной системы координат Ox_1y_1 (рис. 11.4), можно задать при помощи двух векторов: $\mathbf{r}_A$, определяющего положение точки A в системе отсчета Ox_1y_1, и $\boldsymbol{\rho}$, определяющего положение точки B в системе отсчета Ax_2y_2,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}. \qquad (11.2)$$

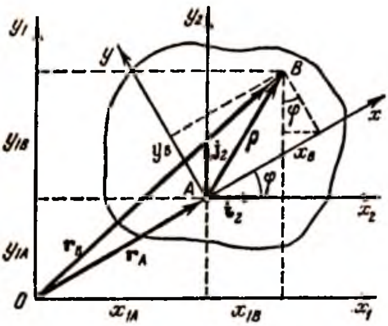


Рис. 11.4

Зная координаты x_{1A} и y_{1A} точки A и координаты x_B и y_B точки B в системе координат Axy, а также угол φ между осями Ax_2 и Ax, можно определить координаты x_{1B} и y_{1B} точки B по формулам:

$$\begin{aligned} x_{1B}(t) &= x_{1A}(t) + x_B\cos\varphi(t) - \\ &\quad - y_B\sin\varphi(t), \\ y_{1B}(t) &= y_{1A}(t) + x_B\sin\varphi(t) + \\ &\quad + y_B\cos\varphi(t). \end{aligned} \qquad (11.3)$$

Напомним, что координаты x_B и y_B — постоянные величины.

Продифференцировав по времени x_{1B} и y_{1B}, найдем проекции скорости точки B на координатные оси:

$$\dot{x}_{1B} = \dot{x}_{1A} - x_B\dot{\varphi}\sin\varphi - y_B\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y}_{1B} = \dot{y}_{1A} + x_B\dot{\varphi}\cos\varphi - y_B\dot{\varphi}\sin\varphi. \qquad (11.4)$$

К этому же результату можно прийти, дифференцируя непосредственно тождество (11.2),

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \qquad (11.5)$$

Заметим, что $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$, $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$. Что же касается $d\boldsymbol{\rho}/dt$, то это есть скорость точки B относительно подвижной системы координат Ax_2y_2, т. е. относительная скорость (см. § 10.2). Введем для нее обозначение $\mathbf{v}_{BA}$:

$$\mathbf{v}_{BA} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

Движение тела относительно системы координат Ax_2y_2 представляет собой вращение тела вокруг оси Az_2, направленной перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 11.4) на читателя. Таким образом, скорость $\mathbf{v}_{BA}$ есть скорость точки B при вращении тела вокруг оси Az_2. Для определения этой скорости мы уже получили формулу (§ 10.2)

$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{\rho},$$

где ω_A — угловая скорость вращения фигуры вокруг точки A (вокруг оси Az_2), которую в дальнейшем будем называть *полюсом.*

Формула (11.5) принимает теперь вид

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \qquad (11.6)$$

т. е. *скорость какой-либо точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса A и скорости точки B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A.*

Покажем, что угловая скорость вращения фигуры не зависит от выбора полюса. Пусть A и B — две какие-нибудь точки плоской фигуры. Пусть полюсу A соответствует угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_A$, а полюсу B — угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_B$. Найдем скорость точки B, приняв за полюс точку A

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{\rho}.$$

Приняв теперь за полюс точку B, найдем скорость точки A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (-\boldsymbol{\rho}).$$

Сложив оба равенства, получим

$$(\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B) \times \boldsymbol{\rho} = 0.$$

Но вектор $\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B$ перпендикулярен плоскости фигуры, и, значит, полученное равенство может выполняться только при $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B$. Таким образом, нет надобности в дальнейшем сохранять индекс полюса в обозначении вектора угловой скорости, т. е. $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}$.

Формула (11.6) может быть записана теперь в виде

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \qquad (11.7)$$

Если заметить, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_{2B} & y_{2B} & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$x_{2B} = x_B \cos\varphi - y_B \sin\varphi, \quad y_{2B} = x_B \sin\varphi + y_B \cos\varphi, \quad \omega_z = \dot{\varphi},$$

то из (11.7) после проектирования на оси координат можно получить уже ранее полученные формулы (11.4).

Так как $\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$, то модуль скорости

$$v_{BA} = \omega \cdot AB,$$

ибо вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости чертежа. Отметим, что вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен также $\overline{AB}$. Направление вращения плоской фигуры вокруг полюса определяется по знаку проекции угловой скорости на ось Az_2. Так как $\omega_z = \dot{\varphi}$, то при $\omega_z > 0$ вращение происходит против хода часовой стрелки и при $\omega_z < 0$ — по ходу часовой стрелки.

На рис. 11.5, *а* и *б* показано, как, зная скорость точки A, можно найти скорость точки B при $\omega_z > 0$ и $\omega_z < 0$.

Из формулы (11.7) следует одна полезная теорема:

При плоском движении проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой.

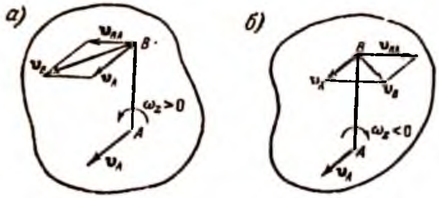


Рис. 11.5

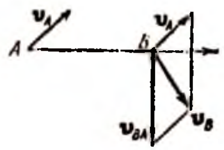


Рис. 11.6

Выберем положительное направление для оси AB, как указано на рис. 11.6. Воспользуемся далее формулой (11.7)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}.$$

Проектируя это равенство на направление AB, получим

$$(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB} + (\mathbf{v}_{BA})_{AB}.$$

Последнее слагаемое в этом соотношении равно нулю, так как вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен AB, и, следовательно,

$$(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB}.$$

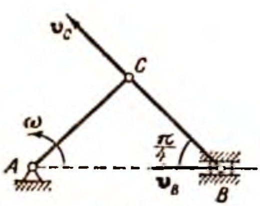


Рис 11.7

Задача 11.1. Определить скорость ползуна B кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 11.7, если $AC = CB = l$ и известна угловая скорость ω кривошипа AC в момент времени, когда AC и BC взаимно перпендикулярны.

На основании доказанной теоремы

$$(\mathbf{v}_C)_{BC} = (\mathbf{v}_B)_{BC}, \qquad v_C = v_B \cos(\pi/4),$$

откуда $v_B = v_C\sqrt{2} = \omega l\sqrt{2}$, так как $v_C = \omega l$.

Определения и теоремы этого параграфа можно использовать для графического нахождения скоростей точек плоской фигуры.

§ 11.3. План скоростей

В недалеком прошлом планы скоростей и ускорений использовались в технических расчетах при определении усилий в различных звеньях механизмов, причем ведущему звену задавались от 12 до 36 положений. С появлением ЭВМ техническое значение этих планов утратило свой смысл. Здесь эти планы приводятся из методических соображений — будущему инженеру-механику полезно знать характер распределения скоростей и ускорений в твердом теле и в механизмах. Это нужно знать и для построения программ для ЭВМ.

Приступая к графическому нахождению скоростей точек плоской фигуры, будм считать заданный модуль и направление скорости одной точки и направление и скорость другой точки.

Пусть например, известны вектор скорости точки A и направление скорости точки B (рис. 11.8, *а*). Определим сначала модуль скорости точки B, а затем векторы скорости точек C и D.

Скорость точки B определяется формулой (11.7)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

Т. к. нам известны вектор $\mathbf{v}_A$ и направления векторов $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{BA}$ (напомним, что вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен отрезку AB), то можно получить графическое решение уравнения (11.7). Для этого из произвольно выбранного полюса p (рис. 11.8, *б*) в произвольно выбранном масштабе отложим вектор $\overline{pa} = \mathbf{v}_A$.

Если бы нам была известна скорость $\mathbf{v}_{BA}$, то, отложив от точки a вектор $\overline{ab} = \mathbf{v}_{BA}$, мы получили бы точку b и, очевидно, вектор $\overline{pb}$ был бы равен вектору скорости $\mathbf{v}_B$. Но нам известно лишь направление вектора $\mathbf{v}_{BA}$ ($\mathbf{v}_{BA} \perp AB$). Поэтому поступим следующим образом: через точку a проведем прямую, перпендикулярную отрезку AB. Конец вектора $\mathbf{v}_{BA}$ должен лежать на этой прямой. Проведем теперь из полюса p прямую, параллельную вектору скорости точки B. Пересечение этих прямых и определит точку b, причем вектор $ab = \mathbf{v}_{BA}$, а вектор $pb = \mathbf{v}_B$.

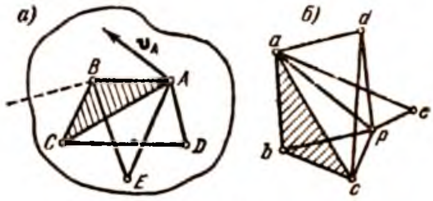


Рис. 11.8

Зная теперь векторы скоростей точек A и B, найдем скорость точки C. На основании формул

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA},$$
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$$

можно записать:

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}. \quad (11.8)$$

Проведем из точки a прямую перпендикулярно отрезку AC (так как $\mathbf{v}_{CA} \perp AC$). Конец вектора $\mathbf{v}_{CA}$ должен лежать на этой прямой. Из точки b проведем прямую перпендикулярно отрезку BC ($\mathbf{v}_{CB} \perp BC$). Конец вектора $\mathbf{v}_{CB}$ лежит на этой прямой. Следовательно, точка пересечения прямых, проведенных нами из точек a и b, определит точку c; в соответствии с равенством (11.8) будем иметь

$$\overline{ac} = \mathbf{v}_{CA}, \quad \overline{bc} = \mathbf{v}_{CB}.$$

Соединим точки p и c прямой, получим

$$\overline{pc} = \mathbf{v}_C.$$

Для нахождения скорости точки D следует использовать формулы

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA}, \quad \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{DC}$$

и провести аналогичные построения.

Фигура *abced* (рис. 11.8, *б*) представляет собой графическую картину распределения скоростей точек плоской фигуры и называется *планом скоростей*. Точки a, b, c, e, и d называются вершинами, а точка p — полюсом плана скоростей; векторы $\overline{pa}$, $\overline{pb}$, $\overline{pc}$, $\overline{pe}$, и $\overline{pd}$ называются *лучами* и представляют собой скорости соответствующих точек. Векторы, соединяющие вершины плана скоростей, т. е. векторы $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{ae}$, $\overline{ad}$, $\overline{be}$, и $\overline{cd}$, равны скоростям точек B, C, E, D при вращении фигуры вокруг соответствующих полюсов.

Легко показать, что треугольник относительных скоростей на плане скоростей подобен соответствующему треугольнику плоской фигуры и повернут по отношению к нему на угол 90°. Так как $ab \perp AB$, $ac \perp AC$, $bc \perp BC$ то

$$\angle abc = \angle ABC, \quad \angle acb = \angle ACB, \quad \angle cab = \angle CAB,$$

а следовательно, треугольник abc подобен треугольнику ABC и повернут по отношению к нему на угол 90°.

Построив план скоростей, можно определить угловую скорость плоской фигуры. Так как $\overline{ab} = \mathbf{v}_{BA}$, $\overline{bc} = \mathbf{v}_{CB}$ и т. д., то, приняв во внимание принятый масштаб построения плана скоростей, угловую скорость найдем по формуле

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \dots \tag{11.9}$$

Задача 11.2. Определить скорость точки D механизма, изображенного на рис. 11.9, *а*, путем построения плана скоростей, если известно, что угловая скорость стержня O_1A равна ω_0.

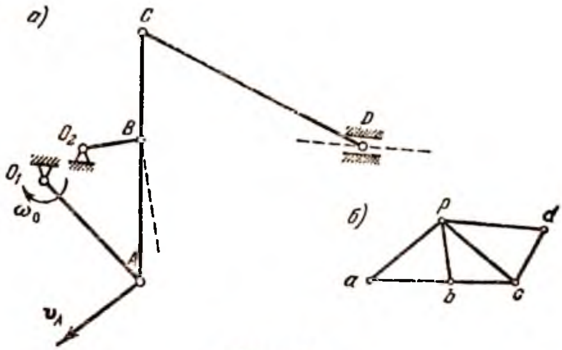


Рис. 11.9

Скорость точки A будет равна по модулю $v_A = O_1A \cdot \omega_0$ и направлена, как показано на рисунке. Направление скорости точки B перпендикулярно стержню O_2B. Для определения скорости точки D мы сначала должны найти скорость точки C, принадлежащей как стержню AC, так и стержню CD.

Отложим от полюса p вектор $\overline{pa} = \mathbf{v}_A$, из точки a проведем прямую, перпендикулярную стержню AB (рис. 11.9, *б*). Прямая, проведенная из точки p параллельно направлению скорости точки B, пересечет прямую, проведенную из точки a, в точке b и, следовательно, вектор $\overline{pb}$ будет равен $\mathbf{v}_B$. Точку c на плане скоростей получить путем нахождения точки пересечения прямых линий, проведенных из точки a перпендикулярно стержню AC и из точки b перпендикулярно BC, нельзя, так как эти линии сливаются. Поэтому для нахождения точки c воспользуемся соотношениями (11.9):

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC}.$$

Это значит, что точка b делит отрезок ac в том же отношении, что и точка B — отрезок AC. Таким образом находим точку c. Вектор $\overline{pc} = \mathbf{v}_C$.

Теперь проведем из точки p прямую, параллельную направлению скорости точки D, а из точки c — прямую, перпендикулярную стержню CD. Пересечение этих прямых определит точку d, причем $\overline{pd} = \mathbf{v}_D$.

§ 11.4. Мгновенный центр скоростей. Центроиды

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем теорему о существовании мгновенного центра скоростей: *если угловая скорость плоской фигуры отлична от нуля, то мгновенный центр скоростей существует.*

Пусть скорость $\mathbf{v}_A$ произвольной точки плоской фигуры отлична от нуля (в противном случае точка A была бы мгновенным центром скоростей).

По знаку угловой скорости $\omega_z = \dot{\varphi}$ определяем направление вращения плоской фигуры вокруг точки A и в этом направлении откладываем от точки A отрезок $AP = v_A/\omega$ перпендикулярно скорости $\mathbf{v}_A$.

На рис. 11.10 предполагается, что $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$, и поэтому отрезок AP повернут относительно $\mathbf{v}_A$ против хода часовой стрелки.

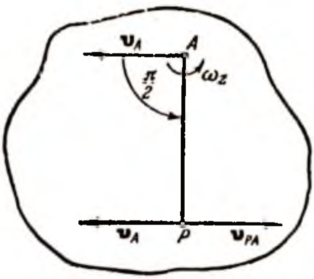


Рис. 11.10

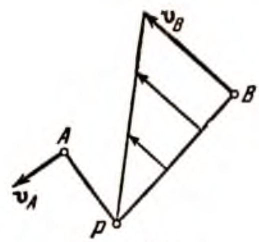


Рис. 11.11

Докажем, что скорость полученной точки P равна нулю, т. е. эта точка и есть мгновенный центр скоростей.

В соответствии с формулой (11.7) имеем

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA}.$$

Так как скорость $\mathbf{v}_{PA}$ перпендикулярна AP, то вектор $\mathbf{v}_{PA}$ параллелен $\mathbf{v}_A$. Кроме того, в соответствии с правилом построения отрезка AP векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_{PA}$ имеют противоположные направления. Модуль скорости $\mathbf{v}_{PA}$ равен

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \frac{v_A}{\omega}\,\omega = v_A.$$

Два вектора, равных по величине и противоположно направленных, в сумме равны нулю. Следовательно,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA} = 0,$$

т. е. скорость точки P равна нулю.

Выберем теперь за полюс точку P. Тогда скорость произвольной точки A плоской фигуры найдется по формуле (рис. 11.11)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \overline{PA} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{PA}, \tag{11.10}$$

так как $\mathbf{v}_P = 0$.

Отсюда следует, что скорости точек тела при его плоском движении распределяются точно так же, как и при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет мгновенная ось, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Таким образом, скорости всех точек фигуры перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей ($\mathbf{v}_A \perp AP$), а модули скоростей пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей ($v_A = \omega \cdot PA$).

Зная положение мгновенного центра скоростей, можно найти скорости всех точек плоской фигуры, если известна скорость какой-либо ее точки.

В самом деле, пусть известна, например, скорость $\mathbf{v}_A$ точки A; тогда из равенства $v_A = \omega \cdot AP$ найдем $\omega = v_A/AP$ и скорость

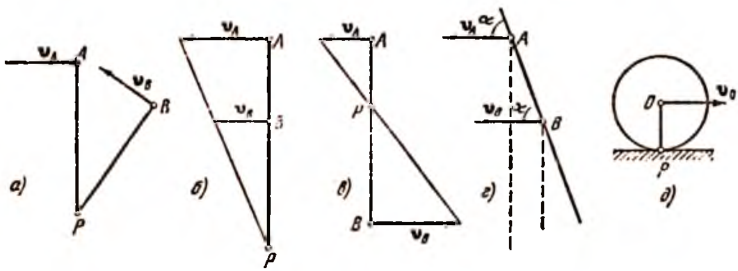


Рис. 11.12

любой точки B будет $v_B = v_A \cdot PB/PA$. Соединив конец вектора $\mathbf{v}_B$ с точкой P, получим эпюру распределения скоростей вдоль отрезка PB (см. рис. 11.11).

Используя основные свойства мгновенного центра скоростей, можно определить его положение и в других случаях. На рис. 11.12, *а* показано, как находится эта точка, когда известны направления скоростей двух точек. Из точек A и B восставлены перпендикуляры к $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$. Точка P находится на их пересечении. Если скорости точек A и B параллельны и $AB \perp \mathbf{v}_A$, то для определения мгновенного центра скоростей следует воспользоваться свойством пропорциональности модулей скоростей расстояниям точек до мгновенного центра скоростей. На рис. 11.12, *б* и *в* показано, как находится мгновенный центр в этих случаях. На рис. 11.12, *г* показан случай, когда $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_A$ параллельны, но $\mathbf{v}_A$ не перпендикулярна отрезку AB. Очевидно, что в этом случае прямые, перпендикулярные $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$, пересекаются в бесконечности и мгновенного центра скоростей не существует. В самом деле, на основании теоремы о проекциях скоростей имеем $v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha$. Отсюда $v_A = v_B$ и $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$. Из формулы (11.7) следует, что при этом $\boldsymbol{\omega} \times \overline{AB} = 0$, т. е. угловая скорость фигуры равна нулю ($\omega = 0$). Значит, в данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры равны по модулю и направлению и, следовательно, точки, линейная скорость которой равна нулю, не существует.

При качении без скольжения одного тела по поверхности другого (рис. 11.12, *д*) мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тел (так как при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения равна нулю).

Использование мгновенного центра скоростей очень часто упрощает решение задачи.

Задача 11.3. В двухползунковом кривошипном механизме кривошип $OA = r = 15$ см, вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с (рис. 11.13). Длины шатунов равны между собой ($AB = CD = l = 60$ см), $AC = l/3$. При горизонтальном (правом) положении кривошипа OA определить: 1) угловые скорости шатунов AB и CD; 2) скорость ползуна D.

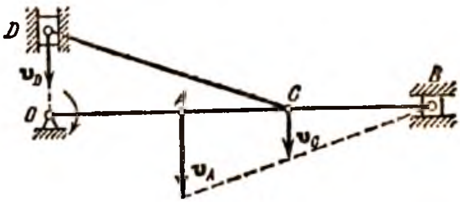


Рис. 11.13

В рассматриваемом механизме звенья AB и CD совершают плоское движение. Определим положение мгновенных центров скоростей шатунов AB и CD. Восставляя перпендикуляры к направлениям скорости точки A и скорости точки B (точка B движется по горизонтальной прямой), убеждаемся, что мгновенный центр скоростей шатуна AB в данный момент времени совпадает с точкой B (рис. 11.13).

Модуль скорости точки A как точки кривошипа OA равен $v_A = \omega_0 r$, с другой стороны, модуль скорости этой же точки как точки шатуна AB будет

$$v_A = \omega \cdot AB,$$

где ω — угловая скорость шатуна AB.

Следовательно, $\omega_0 r = \omega \cdot AB$ и

$$\omega = \frac{\omega_0 r}{AB} = 0,5 \text{ рад/с}.$$

Модуль скорости точки C шатуна AB равен

$$v_C = \omega \cdot BC = 20 \text{ см/с}.$$

Направление вектора $\mathbf{v}_C$ перпендикулярно AB.

Так как скорости точек C и D параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна DC лежит в бесконечности и угловая скорость ω_1 шатуна DC равна нулю. Значит, $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C$ и $v_D = 20$ см/с.

В отличие от чисто вращательного движения, при плоском движении мгновенный центр скоростей меняет, вообще говоря, свое положение на плоскости. Если наклеить на фигуру, совершающую плоское движение, лист бумаги и в каждый момент времени прокалывать иглой мгновенный центр скоростей, то получатся две серии отметок: одна на неподвижной плоскости, другая на листе, связанном с фигурой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на неподвижной плоскости, называется неподвижной центроидой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на плоскости, жестко связанной с фигурой, называется подвижной центроидой.

При качении цилиндра по горизонтальной плоскости (рис. 11.12, *д*) неподвижная центроида — горизонтальная прямая, а подвижная — окружность.

В каждый момент времени подвижная и неподвижная центроиды имеют общую точку касания — мгновенный центр скоростей P, т. е. точку, скорость которой равна нулю. Поэтому плоское движение можно представить как качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

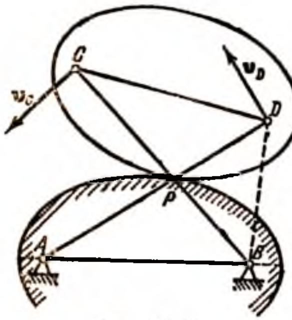


Рис. 11.14

Задача 11.4. Определить центроиды подвижного звена CD антипараллелограмма $ABCD$, у которого звено AB закреплено неподвижно, $CD = AB$, $CB = AD$.

Изобразим в точках C и D скорости $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{v}_D$. Перпендикуляры к ним пересекаются в точке P (рис. 11.14) — мгновенном центре скоростей звена CD. Треугольники ABD и CBD равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ADB = \angle CBD$ и треугольник PBD равнобедренный. Поэтому

$$AP + PB = AP + PD = AD = \text{const},$$

$$CP + PD = CP + PB = CB = \text{const}.$$

Отсюда вытекает, что точка P неподвижной плоскости, жестко связанной со звеном AB, описывает эллипс с фокусами в A и B, а в подвижной плоскости, связанной со звеном CD — эллипс с фокусами в C и D. Первая кривая является неподвижной центроидой (она заштрихована), вторая — подвижной.

§ 11.5. Ускорения точек при плоском движении. Мгновенный центр ускорений

Для определения ускорения точки плоской фигуры продифференцируем равенство (11.7) по времени:

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

В этом соотношении $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{w}_B$, $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{w}_A$ — соответственно ускорения точек B и A, $d\boldsymbol{\rho}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_{BA}$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, как и вектор $\boldsymbol{\omega}$, направлен перпендикулярно плоскости фигуры и определяется формулой

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\mathbf{k}) = \ddot{\varphi}\mathbf{k}.$$

Таким образом, ускорения точек A и B связаны между собой соотношением

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}. \tag{11.11}$$

Два последних слагаемых в равенстве (11.11) определяют ускорение точки B при закрепленной точке A ($\mathbf{w}_A = 0$). Поэтому их сумма

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{w}_{BA}$$

дает ускорение точки B во вращательном движении относительно системы координат Ax_2y_2.

При изучении вращательного движения мы уже выяснили, как направлены составляющие вектора ускорения $\mathbf{w}_{BA}$. Легко еще раз убедиться, пользуясь правилом составления векторного произведения, что $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}$ имеет направление, совпадающее с $\overline{BA}$ (от точки к полюсу), а $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}$ перпендикулярно $\overline{BA}$. Сохраним за этими составляющими старые названия — осестремительного (или центростремительного) и вращательного ускорений, т. е.

$$\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}, \quad \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Модули этих составляющих будут

$$w_{BA}^{\text{ос}} = \omega^2\rho = \omega^2 \cdot AB, \quad w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon\rho = \varepsilon \cdot AB. \tag{11.12}$$

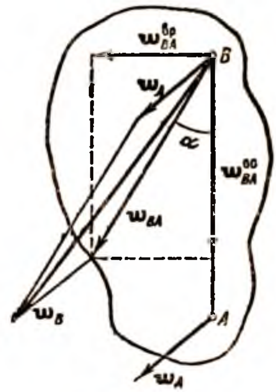


Рис. 11.15

На рис. 11.15 геометрически сложены три вектора и определено ускорение точки B при помощи формулы

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}. \tag{11.13}$$

Таким образом, ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения полюса, осестремительного и вращательного ускорений во вращательном движении фигуры относительно полюса.

Заметим, что при решении задач, прежде чем устроить ускорение точки по формуле (11.13), необходимо вычислить угловую скорость тела, его угловое ускорение и выбрать полюс. За полюс выбирается обычно такая точка, ускорение которой легко находится из условия задачи. Иногда, зная, например, направление искомого ускорения точки, угловое ускорение можно определить по формуле (11.13).

Из (11.12) найдем угол, составленный вектором $\mathbf{w}_{BA}$ с направлением на полюс (рис. 11.15),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{w_{BA}^{\text{ос}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Отсюда видно, что этот угол, во-первых, не зависит от выбора полюса и, во-вторых, для всех точек при фиксированном времени одинаков.

Модуль ускорения точки при вращении фигуры вокруг полюса также находится из равенства (11.12)

$$w_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{11.14}$$

Он зависит от расстояния точки до полюса.

Введем понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Для построения мгновенного центра ускорений будем предполагать, что нам известны ускорение одной из точек $\mathbf{w}_A$, угловая скорость ω и угловое ускорение ε, причем предполагается, что ω и ε не равны нулю одновременно. Из точки A отложим под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(\varepsilon/\omega^2)$ к ускорению $\mathbf{w}_A$ отрезок AQ

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (11.15)$$

При этом, если $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$, то угол α откладывается против хода часовой стрелки (рис. 11.16), при противоположном знаке $\ddot{\varphi}$ — по ходу часовой стрелки.

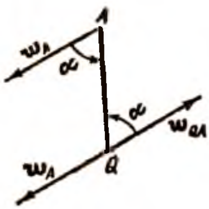


Рис. 11.16

Убедимся в том, что ускорение точки Q равно нулю. Выбрав за полюс точку A, получим

$$\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{QA}.$$

Как мы уже отметили ранее, угол между ускорением точки относительно полюса и направлением на полюс не зависит от выбора полюса. Следовательно, $\mathbf{w}_{QA}$ составляет с направлением QA угол α. Такой же угол составляет и $\mathbf{w}_A$ с AQ. Поэтому векторы $\mathbf{w}_{QA}$ и $\mathbf{w}_A$ параллельны (рис. 11.16). В силу принятого правила отсчета угла α ускорения $\mathbf{w}_{QA}$ и $\mathbf{w}_A$ будут всегда противоположно направлены. Остается теперь установить, что они равны по модулю. Вспоминая (11.14) и подставляя (11.15), получим

$$w_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

Отсюда следует:

$$\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{QA} = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что точка Q — мгновенный центр ускорений.

Ускорение любой точки в данный момент времени теперь может быть определено так же, как и при вращении вокруг неподвижной оси:

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_Q + \mathbf{w}_{AQ} = \mathbf{w}_{AQ} = \mathbf{w}_{AQ}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{AQ}^{\text{вр}}$$

(поскольку $\mathbf{w}_Q = 0$).

Следует иметь в виду, что мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей, — вообще говоря, разные точки. В этом легко убедиться, рассмотрев простой пример. Допустим, диск катится по горизонтальной плоскости без скольжения (рис. 11.12, *д*) и скорость его центра O постоянна. Как мы уже знаем, мгновенный центр скоростей находится в точке касания P. Так как вектор скорости точки O постоянен, то ускорение центра диска равно нулю. Таким образом, мгновенный центр ускорений совпадает с центром диска, а мгновенный центр скоростей — с точкой касания.

§ 11.6. План ускорений

В этом параграфе мы рассмотрим методы графического определения ускорений точек плоской фигуры.

Пусть заданы скорости точек плоской фигуры (рис. 11.17) (построен план скоростей), ускорение $\mathbf{w}_A$ точки A и направление BB' ускорения точки B. Определим

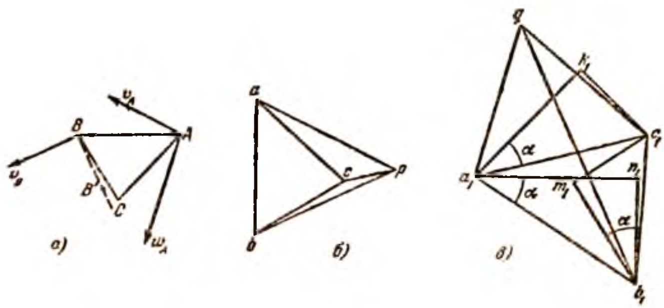


Рис. 11.17

ускорения точек B и C плоской фигуры. На основании формулы (11.13) для данных точек A и B фигуры можно записать

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}.$$

В этом уравнении вектор $\mathbf{w}_A$ известен по модулю и направлению, вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$ известен по направлению (он направлен от точки B к точке A), а его модуль определяется по формуле

$$w_{BA}^{\text{ос}} = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \frac{(ab)^2}{AB} = \omega^2 \cdot AB.$$

Вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно AB, а вектор $\mathbf{w}_B$ — вдоль линии BB'. Поэтому уравнение (11.13) можно графически решить следующим образом.

Выбирая соответствующий масштаб, из произвольной точки q (полюса построения) проводим вектор $\overline{qa_1}$, геометрически равный вектору $\mathbf{w}_A$. К вектору $\overline{qa_1}$ прикладываем вектор $\overline{a_1n_1}$, геометрически равный вектору $\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$. Через точку n_1 проводим прямую, перпендикулярную AB (параллельно вектору $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$), на этой прямой будет лежать конец вектора $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ — последнего слагаемого векторной суммы, а следовательно, и конец вектора $\mathbf{w}_B$. Для определения модуля вектора $\mathbf{w}_B$ проведем из точки q прямую, параллельную BB'. На этой прямой лежит конец вектора $\mathbf{w}_B$, следовательно, конец вектора $\mathbf{w}_B$ будет лежать в точке b_1 пересечения прямых, проведенных параллельно векторам $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ и $\mathbf{w}_B$ из точек n_1 и q.

Таким образом, мы построили векторы $\overline{qb_1} = \mathbf{w}_B$, $\overline{n_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$, $\overline{a_1n_1} = \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$ и $\overline{a_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}$.

Для определения ускорения точки C можем написать следующие два уравнения:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}, \quad \mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}. \tag{11.16}$$

В первом уравнении нам известен вектор $\mathbf{w}_A$ по модулю и направлению, вектор $\mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}}$ мы знаем по направлению (он направлен от точки C к точке A), а модуль его определяется по формуле

$$w_{CA}^{\text{ос}} = \frac{v_{CA}^2}{AC}.$$

Вектор $\mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}$ известен только по направлению (он перпендикулярен AC).

Вектор $\mathbf{w}_C$ не известен ни по модулю, ни по направлению. Поэтому первое уравнение графически решить нельзя. Точно так же нельзя решить и второе уравнение, так как в него входит искомый вектор $\mathbf{w}_C$ и вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$, неизвестный по модулю.

Из уравнений (11.16) следует

$$\mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}} = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}. \tag{11.17}$$

В этом уравнении вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}}$ направлен от точки C к точке B, модуль же вектора определится из равенства

$$w_{CB}^{\text{ос}} = \frac{v_{CB}^2}{BC}.$$

Вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$ перпендикулярен отрезку CB. Таким образом, в уравнение (11.17) входят известные векторы $\mathbf{w}_A$, $\mathbf{w}_B$, $\mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}}$ и $\mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}}$ и векторы $\mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}$ и $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$, известные по направлению. Следовательно, уравнение (11.17) можно решить графически.

К построенному вектору $\overline{qa_1} = \mathbf{w}_A$ прикладываем вектор $\overline{a_1k_1} = \mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}}$ и через точку k_1 проводим прямую, перпендикулярную вектору $\overline{a_1k_1}$. Вдоль этой прямой будет направлен вектор $\mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}$ и, следовательно, на этой прямой будет лежать конец вектора $\mathbf{w}_C$. К построенному вектору $\overline{qb_1} = \mathbf{w}_B$ прикладываем вектор $\overline{b_1m_1} = \mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}}$ и через точку m_1 перпендикулярно $\overline{b_1m_1}$ проводим прямую. Вдоль этой прямой будет направлен вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$ и, следовательно, и на этой прямой будет лежать конец вектора $\mathbf{w}_C$.

Так как конец вектора $\mathbf{w}_C$ должен лежать на прямых, перпендикулярных векторам $\overline{a_1k_1}$ и $\overline{b_1m_1}$, то он лежит в точке их пересечения c_1. Таким образом, полученный вектор $\overline{qc_1}$ будет вектором ускорения точки C. Итак, мы определили графически ускорения точек B и C. Векторы $\overline{qa_1}$, $\overline{qb_1}$ и $\overline{qc_1}$, выходящие из полюса q, будут векторами ускорений точек A, B и C.

Фигура $qa_1b_1c_1q$ (рис. 11.17, *в*), представляющая собой графическую картину распределения ускорений точек в плоской фигуре, называется ***планом ускорений***.

На плане ускорений векторы $\overline{a_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}$, $\overline{a_1c_1} = \mathbf{w}_{CA}$ и $\overline{b_1c_1} = \mathbf{w}_{CB}$ суть ускорения точек B и C, обусловленные вращением фигуры вокруг соответствующих полюсов, причем

$$w_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad w_{CA} = AC\cdot\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad w_{CB} = BC\cdot\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{11.18}$$

Построив план ускорений, легко показать, что фигура $a_1b_1c_1$ подобна фигуре ABC и повернута по отношению к ней на угол $\pi - \alpha$, где α определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2.$$

Действительно, согласно формулам (11.18) отрезки a_1b_1, b_1c_1 и c_1a_1 пропорциональны отрезкам AB, BC и CA, поэтому $\triangle a_1b_1c_1 \sim \triangle ABC$. Далее, так как $\angle n_1a_1b_1 = \angle m_1b_1c_1 = \angle k_1a_1c_1 = \alpha$, то векторы $\overline{a_1b_1}$, $\overline{b_1c_1}$ и $\overline{c_1a_1}$ составляют с отрезками AB, BC и CA угол $\pi-\alpha$.

Если из плана скоростей мы можем определить угловую скорость плоской фигуры, то из плана ускорений можно определить угловое ускорение плоской фигуры. Действительно, так как

$$n_1b_1 = w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AB,$$

то

$$\varepsilon = \frac{n_1b_1}{AB}.$$

Следует заметить, что при всех вычислениях нужно принимать во внимание принятый масштаб построения планов скоростей и ускорений.

Задача 11.5. Определить ускорение точки D механизма, изображенного на рис. 11.18, *а*.

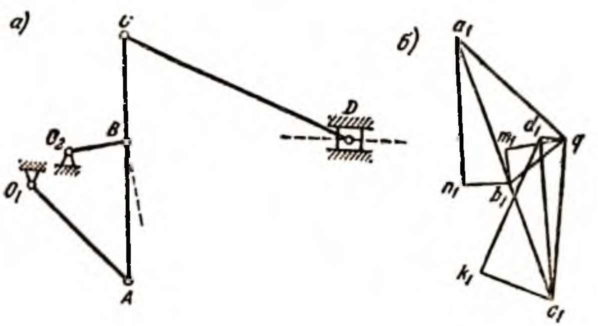


Рис. 11.18

План скоростей для этого механизма нами уже построен (рис. 11.9, *б*). Полное ускорение точки A направлено к точке O_1, так как угловая скорость ω_0 постоянна, а модуль ускорения точки A равен $w_A = O_1A \cdot \omega_0^2$. Модуль и направление ускорения точки B нам неизвестны. Определить ускорение точки B можно, например, следующим образом.

Согласно формуле (11.13) имеем

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{oc}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}.$$

Вектор $\mathbf{w}_A$ нам известен, вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{oc}}$ направлен от точки B к точке A, а его модуль равен $w_{BA}^{\text{oc}} = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \frac{(ab)^2}{AB}$ (величину ab берем из плана скоростей), вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ перпендикулярен отрезку AB.

Из какой-либо произвольной точки q (рис. 11.18, *б*) отложим вектор $\overline{qa_1} = \mathbf{w}_A$ (в произвольно выбранном масштабе), к точке a_1 приложим вектор $\overline{a_1n_1} = \mathbf{w}_{BA}^{\text{oc}}$, а через точку n_1 проведем прямую, перпендикулярную отрезку AB (или вектору $\overline{a_1n_1}$). Очевидно, что конец вектора $\mathbf{w}_B$ должен лежать на этой прямой.

Так как стержень O_2B вращается вокруг точки O_2, то можно представить вектор ускорения $\mathbf{w}_B$ в следующем виде:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_{BO_2}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{BO_2}^{\text{вр}},$$

где $\mathbf{w}_{BO_2}^{\text{ос}}$ — осестремительное ускорение точки B относительно O_2, направленное к точке O_2 и равное по модулю $w_{BO_2}^{\text{ос}} = (pb)^2/O_2B$ (величина pb берется из плана скоростей), а $\mathbf{w}_{BO_2}^{\text{вр}}$ — вращательное ускорение точки B относительно O_2, направленное перпендикулярно O_2B. Отложим теперь от точки q вектор $\overline{qm_1} = \mathbf{w}_{BO_2}^{\text{ос}}$, а через точку m_1 проведем прямую, перпендикулярную стержню O_2B. Конец вектора $\mathbf{w}_B$ должен лежать на этой прямой. Следовательно, конец вектора $\mathbf{w}_B$ находится в точке пересечения прямых, проведенных из точек n_1 и m_1, т. е. $\mathbf{w}_B = \overline{qb_1}$.

Построив вектор $\mathbf{w}_B$, мы можем перейти к определению ускорения точки C. Заметим, что вектор $\overline{a_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}$. Так как векторы $\mathbf{w}_{BA}$ и $\mathbf{w}_{CA}$ образуют с направлением стержня AC один и тот же угол α ($\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2$), то векторы $\overline{a_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}$ и $\overline{a_1c_1} = \mathbf{w}_{CA}$ будут лежать на одной прямой. Для нахождения точки c_1 воспользуемся зависимостями (11.18). Из них следует, что

$$\frac{w_{BA}}{AB} = \frac{w_{CA}}{AC}, \quad \text{или} \quad \frac{a_1b_1}{AB} = \frac{a_1c_1}{AC},$$

т. е. точка c_1 делит отрезок a_1b_1 внешним образом на части, пропорциональные отрезкам, на которые точка C делит отрезок AB. Таким образом, построив точку c_1, находим что $\overline{a_1c_1} = \mathbf{w}_{CA}$ и $\overline{qc_1} = \mathbf{w}_C$.

Ускорение точки D определяется формулой

$$\mathbf{w}_D = \mathbf{w}_C + \mathbf{w}_{DC}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{DC}^{\text{вр}}.$$

Вектор $\mathbf{w}_C = \overline{qc_1}$ мы только что нашли, вектор $\mathbf{w}_{DC}^{\text{ос}}$ направлен от точки D к точке C и по модулю равен $w_{DC}^{\text{ос}} = (cd)^2/DC$, а вектор $\mathbf{w}_{DC}^{\text{вр}}$ перпендикулярен стержню CD. Направление ускорения точки D известно (точка D совершает прямолинейное движение). Из точки c_1 отложим вектор $\mathbf{w}_{DC}^{\text{ос}} = \overline{c_1k_1}$ (параллельно стержню CD). Проведя теперь из точки k_1 прямую, перпендикулярную стержню CD, найдем ее точку пересечения с прямой, проходящей через точку q и параллельной направлению ускорения точки D. Эта точка пересечения и будет точкой d_1 и, следовательно,

$$\overline{c_1d_1} = \mathbf{w}_{DC}, \quad \overline{qd_1} = \mathbf{w}_D.$$

§ 11.7. Задачи

Задача 11.6. В двойном кривошипно-ползунном механизме, изображенном на рис. 11.19, размеры звеньев следующие: $OA = 10$ см, $AB = CD = DE = 20$ см. Расстояние между ползунами $BC = 10\sqrt{3}$ см. Оси кривошипов O и E расположены на одной прямой с направляющей ползунов B и C. Расстояние $OE = 40\sqrt{3}$ см. Определить угловую скорость ведомого кривошипа ED в момент, когда кривошип OA перпендикулярен направляющей OE, если угловая скорость кривошипа OA в этот момент равна $\omega_0 = 6$ рад/с.

Найдем расстояние CE. Из рис. 11.19 следует

$$CE = OE - OB - BC = 40\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ см.}$$

Скорости точек A и B оказались параллельными. Следовательно, на основании равенства проекций скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, имеем

$$v_B = v_A = \omega_0 \cdot OA = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см/с}.$$

Заметим, что ползуны B и C составляют одно тело и движутся поступательно, поэтому $v_C = v_B = 60$ см/с.

Найдем мгновенный центр скоростей для шатуна CD. Восставим перпендикуляры к скоростям $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{v}_D$; точка их пересечения P — мгновенный центр скоростей шатуна CD.

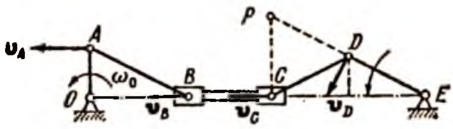


Рис. 11.19

Скорости точек относятся как их расстояния до мгновенного центра скоростей

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{PD}{PC}.$$

Из $\triangle PCE$ следует (по условию $CD = DE$)

$$PD = DE = 20 \text{ см}, \quad PC = \sqrt{PE^2 - CE^2} = 20 \text{ см}.$$

Отсюда получим

$$v_D = \frac{PD}{PC} v_C = 60 \text{ см/с}.$$

Искомая угловая скорость кривошипа ED равна

$$\omega_{ED} = \frac{v_D}{DE} = \frac{60}{20} = 3 \text{ рад/с}.$$

Задача 11.7. Стержень AB движется в вертикальной плоскости так, что его нижний конец A скользит по горизонтальной прямой OC, а сам стержень все время опирается в точке M на выступ, высота которого равна h (рис. 11.20). Найти неподвижную и подвижную центроиды.

Начало неподвижной системы координат Ox_1y_1 возьмем в точке O (у основания выступа), а ось x_1 направим по прямой OC. Начало подвижной системы координат Axy возьмем в нижнем конце A стержня и ось y направим вдоль стержня.

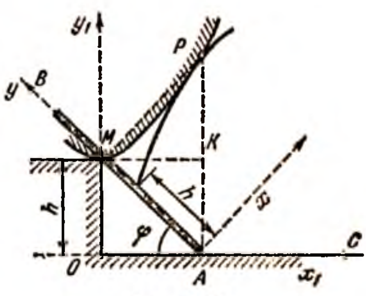


Рис. 11.20

Так как скорость точки A направлена горизонтально, а точки стержня, совпадающей с точкой M, — вдоль стержня, то мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и M к направлениям скоростей этих точек.

Вводя в рассмотрение угол φ между стержнем и горизонтальной прямой, получим для координат мгновенного центра скоростей в неподвижной системе координат следующие выражения:

$$x_{1P} = h \operatorname{ctg} \varphi, \quad y_{1P} = AK + KP = h + x_{1P} \operatorname{ctg} \varphi = h \operatorname{cosec}^2 \varphi.$$

Исключая из этих уравнений угол φ, получим уравнение неподвижной центроиды:

$$y_{1P} = h + \frac{x_{1P}^2}{h}.$$

Это — уравнение параболы. На рис. 11.20 неподвижная центроида заштрихована. Координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе координат Axy будут

$$x_P = AP \cdot \cos\varphi = h \operatorname{cosec}^2 \varphi \cos\varphi = \frac{h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \qquad y_P = \frac{h}{\sin\varphi}.$$

Исключая φ из этих уравнений, получим уравнение подвижной центроиды

$$h^2 x_P^2 = y_P^2 \left(y_P^2 - h^2\right).$$

Подвижная центроида является кривой четвертого порядка.

Задача 11.8. Коромысло OA длиной 40 см, качаясь вокруг оси O, приводит в движение шатун AB длиной 80 см. Ползун B скользит по направляющей ED, составляющей с горизонтальной линией угол $\alpha = 45°$. Найти ускорение ползуна B и угловое ускорение шатуна AB в момент, когда угол $\beta = 90°$ (рис. 11.21), если в этот момент угловая скорость кривошипа OA равна $\omega_0 = 2$ рад/с, а его угловое ускорение $\varepsilon_0 = 0$.

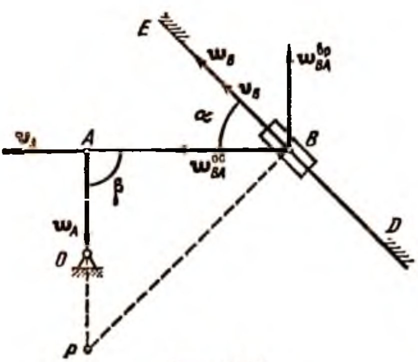


Рис. 11.21

Согласно формуле (11.13) имеем

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{вр} + \mathbf{w}_{BA}^{ос}.$$

Ускорение точки A направлено к точке O и равно

$$w_A = \omega_0^2 \cdot OA = 160 \text{ см/с}^2.$$

Осестремительное ускорение $\mathbf{w}_{BA}^{ос}$ направлено от точки B к точке A и равно

$$w_{BA}^{ос} = \omega^2 \cdot AB,$$

где ω — угловая скорость шатуна AB.

Для определения угловой скорости ω найдем скорость точки A и мгновенный центр скоростей шатуна AB, который лежит в точке пересечения перпендикуляров к скоростям точек A и B этого тела; следовательно, мгновенный центр скоростей звена AB находится в данный момент в точке P (см. рис. 11.21). Треугольник ABP — прямоугольный и равнобедренный:

$$AB = AP = 80 \text{ см}.$$

Угловая скорость ω определится по формуле

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_0 \cdot OA}{AP} = 1 \text{ рад/с}.$$

Подставляя значение ω в формулу для $w_{BA}^{ос}$, получим

$$w_{BA}^{ос} = 80 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{w}_B$ направлен вдоль прямой DE. Вращательное ускорение $\mathbf{w}_{BA}^{вр}$ направлено перпендикулярно AB.

Выберем в указанном положении ползуна B две взаимно перпендикулярные оси, одну ось направим вдоль BA, а другую — перпендикулярно к ней; тогда, проектируя обе части исходного векторного равенства на выбранные оси, получим

$$w_B \cos 45^\circ = w_{BA}^{\text{ос}}, \quad w_B \cos 45^\circ = -w_A + w_{BA}^{\text{вр}}.$$

Отсюда находим

$$w_B = 80\sqrt{2}\ \text{см/с}^2, \quad w_{BA}^{\text{вр}} = 240\ \text{см/с}^2.$$

Угловое ускорение шатуна AB определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{240}{80} = 3\ \text{рад/с}^2.$$

Задача 11.9. Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма (рис. 11.22) делает 3000 оборотов в минуту. Определить угловую скорость и угловое ускорение

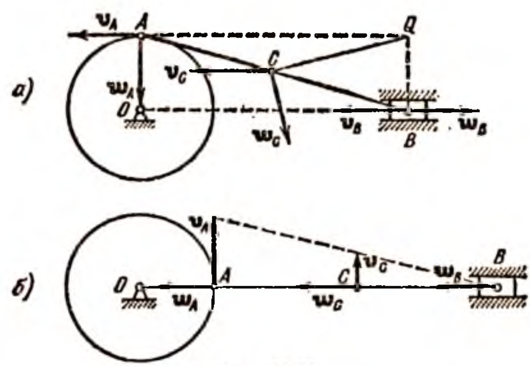


Рис. 11.22

шатуна, скорость и ускорение поршня и средней точки C шатуна, а также положения мгновенных центров скоростей и ускорений в моменты времени, когда $\angle AOB = 90^\circ$ и $\angle AOB = 0^\circ$, если $OA = 100$ мм, $AB = 300$ мм.

Определим искомые величины в момент, когда $\angle AOB = 90^\circ$ (см. рис. 11.22, *а*). Скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ параллельны, следовательно, угловая скорость шатуна $\omega_{BA} = 0$ и

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C.$$

Из условий задачи следует, что

$$v_A = \frac{\pi n}{30} \cdot OA = 100\pi \cdot 0{,}1 = 10\pi\ \text{м/с},$$

а ускорение точки A равно

$$w_A = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \cdot OA = (100\pi)^2 \cdot 0{,}1 = 1000\pi^2\ \text{м/с}^2$$

и направлено к точке O.

Обозначая через ε_{AB} угловое ускорение шатуна AB, положение мгновенного центра ускорений шатуна определим с помощью формул

$$AQ = w_A/\sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \varepsilon_{AB}/\omega_{AB}^2;$$

но $\omega_{AB} = 0$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \infty \text{ и } \alpha = 90^\circ.$$

Следовательно, мгновенный центр ускорений лежит на прямой, перпендикулярной ускорению точки A и проходящей через эту точку.

Одновременно мгновенный центр ускорений лежит на прямой, проведенной через точку B перпендикулярно ускорению точки B. Так как ускорение точки B направлено параллельно оси цилиндра (вдоль OB), то мгновенный центр лежит в точке Q.

Ускорение точки A как точки, принадлежащей шатуну, равно

$$w_A = w_{AQ} = AQ\cdot\sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2},$$

но так как $\omega_{AB} = 0$, то

$$w_A = \varepsilon_{AB}\cdot AQ.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_A}{AQ} = \frac{w_A}{\sqrt{AB^2 - OA^2}} = \frac{1000\pi^3}{\sqrt{0{,}3^2 - 0{,}1^2}} = 3525\pi^3 \text{ рад/с}^2;$$

тогда ускорение точки B будет

$$w_B = \varepsilon_{AB}\cdot BQ = 3525\pi^2\cdot 0{,}1 = 352{,}5\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

а ускорение точки C

$$w_C = \varepsilon_{AB}\cdot CQ = 673\pi^3 \text{ м/с}^2.$$

Определим искомые величины во втором положении, когда $\angle AOB = 0$ (рис. 11.22, *б*). Мгновенный центр скоростей шатуна будет находиться в точке B. Угловая скорость шатуна найдется из формулы

$$v_A = \omega_{AB}\cdot AB;$$

отсюда

$$\omega_{AB} = \frac{10\pi}{0{,}3} = \frac{100}{3}\pi \text{ рад/с}.$$

Скорость точки B равна нулю, а скорость точки C будет равна

$$v_C = \omega_{AB}\cdot BC = \frac{100}{3}\pi\cdot 0{,}15 = 5\pi \text{ м/с}.$$

Для определения положения мгновенного центра ускорений необходимо найти угловое ускорение шатуна. Для этого воспользуемся формулой

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}.$$

В этом уравнении вектор $\mathbf{w}_A$ направлен к точке O, вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$ направлен от точки B к точке A и вектор $\mathbf{w}_B$ направлен вдоль линии OB. Так как вектор $\mathbf{w}_B$ параллелен двум слагаемым векторам $\mathbf{w}_A$ и $\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$, то вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{w}_A$, равен нулю. Но $w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{AB}\cdot BA$, следовательно, $\varepsilon_{AB} = 0$.

Зная ускорение точки A, угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB, можем найти положение мгновенного центра ускорений Q шатуна:

$$AQ = w_A/\omega_{AB}^2 \approx 0{,}9 \text{ м}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \varepsilon_{AB}/\omega_{AB}^2 = 0, \quad \alpha = 0.$$

Точка Q лежит на продолжении прямой BA слева от точки A. Ускорение точки B определится по формуле

$$w_B = w_{BQ} = \omega_{AB}^2\cdot QB = 1333{,}3\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

где $QB = 1{,}2$ м.

Ускорение точки C находится по формуле

$$w_C = \omega_{AB}^2 \cdot QC = 1166{,}7\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

где QC — расстояние от точки C до мгновенного центра ускорений, равное 1,05 м.

Задача 11.10. Шестерня I радиуса R приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестерни II радиуса r по закону $\varphi = \varphi(t)$. Определить ускорения точек M, N, B и положение мгновенного центра ускорений Q (рис. 11.23).

Найдем сначала угловую скорость и угловое ускорение шестерни I. Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\dot\varphi$. Поэтому скорость $\mathbf{v}_A$ точки A перпендикулярна кривошипу OA и равна по модулю $v_A = OA \cdot |\dot\varphi| = (r+R)|\dot\varphi|$. Так как точка A принадлежит одновременно шестерне I, то ее скорость определяется равенством (точка M является мгновенным центром скоростей)

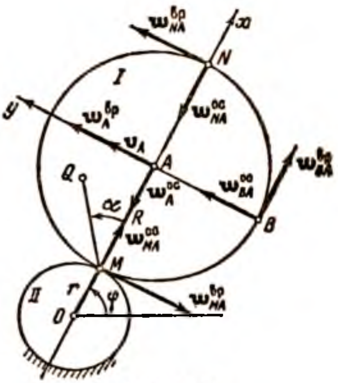


Рис. 11.23

$$v_A = |\omega_z| R,$$

где ω_z — угловая скорость шестерни I. Сравнивая оба выражения для v_A, найдем

$$\omega_z R = (r+R)\dot\varphi, \quad \text{т. е.} \quad \omega_z = \frac{r+R}{R}\dot\varphi.$$

Дифференцируя последнее соотношение по времени, найдем угловое ускорение ε_z шестерни I:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{R+r}{R}\ddot\varphi.$$

Осестремительное ускорение точки A, как точки кривошипа OA, направлено к O и по модулю равно $(R+r)\dot\varphi^2$. Вращательное ускорение точки A перпендикулярно прямой OA и равно по модулю $(R+r)|\ddot\varphi|$. Таким образом,

$$w_A^{oc} = (R+r)\dot\varphi^2, \quad w_A^{вр} = (R+r)\ddot\varphi. \tag{11.19}$$

На рис. 11.23 направление $\mathbf{w}_A^{вр}$ показано в предположении, что $\dot\varphi > 0$ и $\ddot\varphi > 0$.

Ускорения точек M, N и B будем искать по формуле (11.13), приняв точку A за полюс. Для точки M имеем

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{MA}^{вр} + \mathbf{w}_{MA}^{oc}. \tag{11.20}$$

Ускорение точки A уже найдено через составляющие $\mathbf{w}_A^{oc}$ и $\mathbf{w}_A^{вр}$. Осестремительное ускорение точки M относительно точки A направлено к A (см. рис. 11.23), модуль этого ускорения равен $R\omega^2$. Подставляя значение ω, будем иметь

$$w_{MA}^{oc} = \frac{(r+R)^2}{R}\dot\varphi^2.$$

Вращательное ускорение точки M относительно точки A перпендикулярно прямой AM и модуль этого ускорения равен $R|\varepsilon_z|$, или

$$w_{MA}^{вр} = (R+r)\ddot\varphi.$$

Так как, по предположению, $\ddot\varphi > 0$, то $\varepsilon_z = \dfrac{R+r}{R}\ddot\varphi > 0$. Поэтому вращательное ускорение $\mathbf{w}_{MA}^{вр}$ будет иметь направление, указанное на рис. 11.23.

Проектируя обе части равенства (11.20) на оси x и y (см. рис. 11.23) и принимая во внимание формулы (11.19), получим

$$w_{Mx} = -(R+r)\dot{\varphi}^2 + \frac{(R+r)^2}{R}\dot{\varphi}^2 = \frac{r}{R}(R+r)\dot{\varphi}^2,$$
$$w_{My} = (R+r)\ddot{\varphi} - (R+r)\ddot{\varphi} = 0.$$

Из этих выражений видно, что ускорение точки M направлено к точке A и равно по модулю w_{Mx}:

$$w_M = \frac{r}{R}(R+r)\dot{\varphi}^2.$$

Для точки N формула (11.13) примет вид

$$\mathbf{w}_N = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{NA}^{\text{вр}} + \mathbf{w}_{NA}^{\text{ос}}.$$

Вращательное ускорение $\mathbf{w}_{NA}^{\text{вр}}$ точки N относительно точки A по модулю равно, конечно, $\mathbf{w}_{MA}^{\text{вр}}$; его направление указано на рис. 11.23. Осестремительное ускорение $\mathbf{w}_{NA}^{\text{ос}}$ точки N направлено к A и по модулю равно $\mathbf{w}_{MA}^{\text{ос}}$. Проектируя последнее равенство на оси x и y, получим

$$w_{Nx} = -(R+r)\dot{\varphi}^2 - \frac{(R+r)^2}{R}\dot{\varphi}^2 = -\frac{(R+r)(2R+r)}{R}\dot{\varphi}^2,$$
$$w_{Ny} = (R+r)\ddot{\varphi} + (R+r)\ddot{\varphi} = 2(R+r)\ddot{\varphi}.$$

Модуль ускорения точки N равен

$$w_N = (R+r)\sqrt{\frac{(2R+r)^2}{R^2}\dot{\varphi}^4 + 4\ddot{\varphi}^2}.$$

Аналогично находится ускорение точки B. Имеем

$$w_{BA}^{\text{вр}} = w_{MA}^{\text{вр}} = (R+r)\ddot{\varphi}, \quad w_{BA}^{\text{ос}} = w_{MA}^{\text{ос}} = \frac{R+r}{R}\dot{\varphi}^2;$$

направление ускорений $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ и $\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$ показано на рис. 11.23. Проектируя равенство

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$$

на оси x и y, получим

$$w_{Bx} = -(R+r)\dot{\varphi}^2 + (R+r)\ddot{\varphi} = (R+r)(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2),$$
$$w_{By} = (R+r)\ddot{\varphi} + \frac{(R+r)^2}{R}\dot{\varphi}^2 = (R+r)\left(\ddot{\varphi} + \frac{R+r}{R}\dot{\varphi}^2\right).$$

Отсюда

$$w_B = (R+r)\sqrt{(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)^2 + \left(\ddot{\varphi} + \frac{R+r}{R}\dot{\varphi}^2\right)^2}.$$

Расстояние от точки M до мгновенного центра ускорений Q в соответствии с формулой (11.15) равно

$$MQ = \frac{w_M}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{rR\dot{\varphi}^2}{\sqrt{R^2\ddot{\varphi}^2 + (R+r)^2\dot{\varphi}^4}}.$$

Для определения угла w_A между ускорением MQ и отрезком MQ воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{R|\ddot{\varphi}|}{(r+R)\dot{\varphi}^2}.$$

Глава XII

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. СВОБОДНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО

§ 12.1. Задание движения. Углы Эйлера

Движение тела, имеющего одну неподвижную точку, называют иногда сферическим движением или *вращением тела вокруг неподвижной точки*. Первый термин объясняется тем, что все точки тела движутся по поверхностям сфер, общий центр которых совпадает с неподвижной точкой.

В главе X мы установили, что твердое тело с одной закрепленной точкой имеет три степени свободы. Три параметра, определяющих положение такого тела относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 12.1), могут быть выбраны различными способами. В теоретической механике положение тела с одной неподвижной точкой, как правило, определяют при помощи *углов Эйлера*, которые вводятся следующим образом.

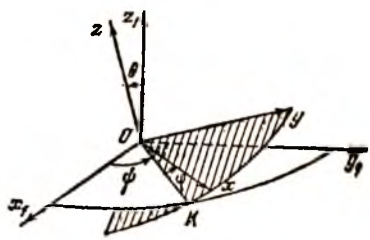


Рис. 12.1

Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $Oxyz$, выбрав начало координат в неподвижной точке O (рис. 12.1).

Координатная плоскость xOy пересекается с неподвижной плоскостью x_1Oy_1 вдоль прямой OK, которая называется *линией узлов*. Угол, составляемый неподвижной осью Ox_1 с линией узлов, называется углом *прецессии* и обозначается буквой ψ. Угол, составляемый линией узлов с подвижной осью Ox, носит название угла *собственного вращения* и обозначается буквой φ. Угол между осями Oz_1 и Oz называется углом *нутации* и обозначается буквой θ. Все углы отсчитываются соответственно от осей Ox_1, OK и Oz_1 против хода часовой стрелки, как показано на рис. 12.1.

Покажем, что, зная три функции $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, можно всегда найти положение системы координат $Oxyz$, а следовательно, и положение тела, скрепленного с ней. Действительно, откладывая от оси Ox_1 угол прецессии ψ, мы найдем линию узлов OK. Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную линии узлов, и от оси Oz_1 (эта ось должна лежать в построенной плоскости) отложим угол нутации θ. Таким образом будет определено положительное направление оси Oz. Через точку O проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz; эта плоскость пройдет через линию узлов OK. Отложим теперь в построенной плоскости от линии узлов угол собственного вращения φ и определим положительное направление оси Ox. Ось Oy должна лежать в той же плоскости и составлять вместе с осями Ox и Oz правую систему координат. Таким образом, углы ψ, θ и φ полностью определяют положение осей подвижной системы.

Углы, определяющие положение тела, можно ввести и другим способом. Например, положение корабля относительно его центра тяжести C определяется *корабельными углами*, введенными А. Н. Крыловым. Ось Cx жестко связанной с кораблем системы координат $Cxyz$ направляется от кормы к носу, ось Cy — к левому борту, ось Cz расположена в диаметральной плоскости корабля. В положении равновесия корабля оси системы координат $Cxyz$ совпадают с осями неизменного направления системы координат $Cx_1y_1z_1$. Угол ψ между осью Cx_1 и линией CK, образованной пересечением плоскостей xCy и x_1Cz_1 (рис. 12.2), называется *углом дифферента*, угол φ между линией CK и осью Cx называется *углом рыскания*. Угол ϑ между осью Cz и линией CM пересечения плоскостей x_1Cz_1 и y_1Cz называется *углом крена*.

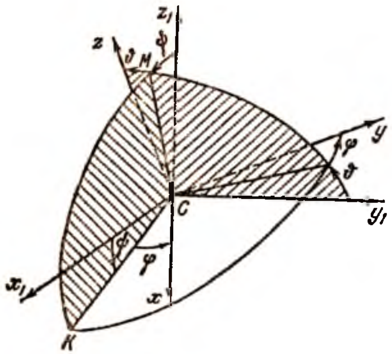


Рис. 12.2

§ 12.2. Распределение скоростей точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Мгновенная ось вращения. Мгновенная угловая скорость

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O. Свяжем жестко с телом систему координат $Oxyz$ (рис. 12.3). Система координат $Oxyz$ однозначно определяет положение рассматриваемого тела по отношению к неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ (§ 12.1). Положение произвольной точки M твердого тела определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Если x, y и z — координаты точки M в подвижной системе координат, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей этой системы координат, то радиус-вектор можно представить в виде

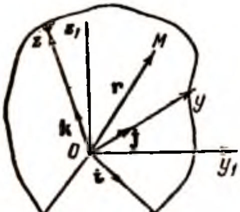


Рис. 12.3

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \qquad (12.1)$$

Координаты x, y, z точки M в подвижной системе отсчета являются постоянными величинами, а единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут функциями времени, так как система координат $Oxyz$ движется вместе с твердым телом.

Скорость точки M определяется по формуле

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

поэтому, дифференцируя (12.1) по t, получим

$$\mathbf{v} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \qquad (12.2)$$

Умножая обе части равенства (12.2) скалярно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, получим

$$\begin{aligned} v_x &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \\ v_y &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{j} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{j} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{j}, \\ v_z &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{k}. \end{aligned} \qquad (12.3)$$

Так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны, то

$$\mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0. \qquad (12.4)$$

Дифференцируя эти равенства по времени, найдем две группы формул:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{j} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0, \qquad (12.5)$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = -\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = -\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = -\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k}. \qquad (12.6)$$

Выражения (12.3) при этом примут вид

$$v_x = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}z - \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}y, \quad v_y = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}x - \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}z, \quad v_z = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}y - \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}x. \qquad (12.7)$$

Формулы (12.7) содержат три скалярные функции времени,

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j},$$

для которых введем обозначения:

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}, \qquad \omega_y = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \qquad \omega_z = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}. \qquad (12.8)$$

Перепишем теперь формулы (12.7) в виде

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \qquad (12.9)$$

Так как

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

то, в соответствии с выражением (12.9), имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

Если теперь ввести вектор $\boldsymbol{\omega}$ с проекциями ω_x, ω_y, ω_z,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k},$$

то скорость точки можно представить векторным произведением

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Итак, скорость точки тела, совершающего сферическое движение, определяется формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{12.10}$$

Геометрическое место точек, скорость которых равна нулю, определяется из уравнения

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \tag{12.11}$$

представляющего собой условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$. Это векторное уравнение в системе координат $Oxyz$ можно записать в виде

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{12.12}$$

Уравнения (12.12) определяют прямую линию, направляющие косинусы которой пропорциональны проекциям ω_x, ω_y, ω_z вектора $\boldsymbol{\omega}$. В общем случае вектор $\boldsymbol{\omega}$ и его проекции ω_x, ω_y, ω_z являются функциями времени, поэтому положение прямой (12.12) изменяется как относительно тела, так и относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$.

Прямая (12.12), в каждой точке которой скорости точек тела в данный момент равны нулю, называется *мгновенной осью вращения*. (Она также называется *мгновенной осью скоростей*.)

Введенный нами вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения.

Как уже было установлено, скорость любой точки M тела определяется формулой (12.10), совпадающей по своей форме с выражением для скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (см. формулу (10.13)). Следовательно, *скорости точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, распределяются так, как если бы тело вращалось вокруг оси, совпадающей в данный момент с мгновенной осью вращения.* В частности, модуль скорости точки M в данный момент определяется равенством

$$v = \omega\rho,$$

где ρ — расстояние от точки M до мгновенной оси вращения. Скорость точки M направлена перпендикулярно плоскости, проходящей через ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ и мгновенную ось вращений (рис. 12.4).

По аналогии с вращением тела вокруг неподвижной оси назовем в рассматриваемом нами случае сферического движения тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ *вектором угловой скорости*. При этом следует иметь в виду, что при вращении тела вокруг неподвижной оси вектор угловой скорости ω представляет собой вектор, всегда направленный по неподвижной оси вращения и характеризующий изменение во времени реального угла φ поворота тела. Для тела, имеющего одну неподвижную точку, выражение «угловая скорость» имеет условный характер, так как положение тела определяется не одним, а тремя углами (§ 12.1) и, следовательно, нет такого одного угла, скорость изменения которого представила бы введенный вектор ω. Кроме того, этот вектор может меняться и по модулю и по направлению. Проекции этого вектора на координатные оси являются функциями углов Эйлера и их первых производных. Эти формулы будут приведены в дальнейшем (§ 14.3).

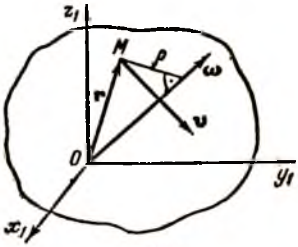


Рис. 12.4

Отметим, что из формул (12.8) для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, например, вокруг оси Oz, можно получить

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = -\dot\varphi\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

$$\omega_z = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = \dot\varphi\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \dot\varphi,$$

так как (§ 10.2) $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot\varphi\mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\dot\varphi\mathbf{i}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$.

Если известны направления скоростей двух точек тела, то мгновенную ось вращения можно найти графически. Как следует из картины распределения скоростей точек тела в данный момент времени, мгновенная ось вращения лежит в плоскости, перпендикулярной направлению скорости точки тела, и проходит через неподвижную точку тела. Следовательно, если через точки тела, направления скоростей которых известны, провести плоскости, перпендикулярные этим скоростям, то линия пересечения этих плоскостей и будет мгновенной осью вращения.

Мгновенную ось вращения можно определить и в том случае, когда известна одна точка тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Соединяя эту точку с неподвижной точкой тела, найдем мгновенную ось вращения.

К понятию о мгновенной оси вращения можно прийти и другим путем. Для этого сначала докажем *теорему Эйлера—Даламбера:*

Всякое перемещение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно заменить одним поворотом вокруг оси, проходящей через неподвижную точку.

Возьмем в теле две точки A и B, отстоящие от неподвижной точки на одинаковом расстоянии, но не лежащие с ней на одной прямой. Проведем через эти две точки сферу с центром в неподвижной точке O (рис. 12.5). Пусть в момент времени t положение тела определяется точками A и B. К моменту времени $t + \Delta t$ эти точки переместятся и займут положение A_1 и B_1.

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что поворотом тела вокруг некоторой оси, проходящей через точку O, можно добиться совмещения точек A и B с точками A_1 и B_1. Соединим точки A и B, A_1 и B_1 дугами больших кругов. Тогда $\smile{AB} = \smile{A_1B_1}$, так как в твердом теле расстояния между точками сохраняются. Соединим теперь также дугами больших кругов точки A и A_1, B и B_1

(рис. 12.5). Из середины дуг AA_1 и BB_1 — точек M и N — проведем сферические перпендикуляры — дуги больших кругов, плоскости которых перпендикулярны плоскостям кругов AOA_1 и BOB_1. Эти сферические перпендикуляры пересекаются в точке P на сфере (рис. 12.5).

Рассмотрим сферические треугольники (треугольники, составленные дугами больших кругов) APA_1 и BPB_1. В этих треугольниках дуга AP равна дуге A_1P и дуга BP равна дуге B_1P как наклонные дуги, имеющие равные проекции. Отсюда следует, что сферические треугольники APB и A_1PB_1 равны (по трем сторонам) и, следовательно, при повороте вокруг их общей вершины P треугольник APB совместится с треугольником A_1PB_1. При таком повороте остаются неподвижными две точки тела: точка O и точка P. Таким образом, перемещение тела может быть осуществлено при помощи одного поворота вокруг оси OP.

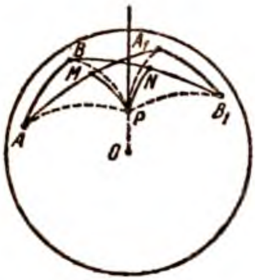


Рис. 12.5

Ось OP называют *осью конечного вращения*, а угол $APA_1 = \theta$ называется *углом конечного вращения*. Положение оси OP зависит от начального и конечного положений тела.

Зафиксируем начальный момент времени t и рассмотрим близкий к нему момент времени $t + \Delta t$. Сравнивая положение тела в момент t с его положением в момент $t + \Delta t$, мы всегда можем найти ось конечного вращения. Если теперь промежуток времени Δt устремить к нулю, то ось конечного вращения будет менять положение, стремясь к своему предельному положению. Предельное положение оси конечного вращения при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной осью вращения* для момента времени t.

Для каждого промежутка времени $(t,\ t + \Delta t)$ с фиксированным начальным моментом времени t можно определить угол конечного поворота θ. Введем в рассмотрение вектор θ угла конечного поворота, равный по модулю θ и направленный по оси OP в сторону, откуда конечный поворот виден происходящим против хода часовой стрелки. *Средней угловой скоростью* будем называть вектор, равный

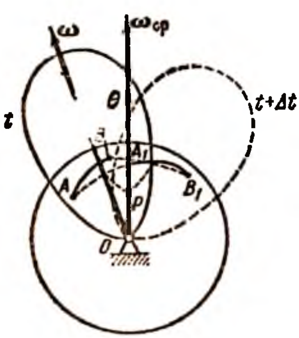


Рис. 12.6

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\theta}{\Delta t}.$$

Предел средней угловой скорости, когда промежуток времени $\Delta t \to 0$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta}{\Delta t},$$

называется *мгновенной угловой скоростью тела* (рис. 12.6) *). Из этого определения следует, что вектор угловой скорости направлен по мгновенной оси вращения.

Положение точки M тела в неподвижной системе координат определяется координатами x_1, y_1 и z_1, а вектор ω имеет проекции ω_{x_1}, ω_{y_1}, ω_{z_1}. Тогда, в соответствии с формулой (12.10), проекции скорости точки M на неподвижные оси координат будут

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \qquad (12.13)$$

---

*) Мы не останавливаемся на доказательстве идентичности определения угловой скорости по этой формуле и ранее данного определения (стр. 193).

Уравнение мгновенной оси вращения в неподвижной системе координат имеет вид

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \tag{12.14}$$

Геометрическое место мгновенных осей вращений, построенных в неподвижной системе координат, называется *неподвижным аксоидом*, а в подвижной системе координат — *подвижным аксоидом*.

Из уравнений (12.14) следует

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{\omega_{y_1}(t)}{\omega_{z_1}(t)}, \qquad \frac{z_1}{x_1} = \frac{\omega_{z_1}(t)}{\omega_{x_1}(t)}.$$

Полученные уравнения дают уравнения неподвижного аксоида в параметрическом виде; параметром служит время t. Исключая из этих уравнений t, можно получить уравнение конической поверхности (неподвижного аксоида) в координатной форме

$$\frac{z_1}{x_1} = F_1\left(\frac{y_1}{z_1}\right).$$

Аналогично, исключая время t из уравнений

$$\frac{y}{z} = \frac{\omega_y(t)}{\omega_z(t)}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{\omega_z(t)}{\omega_x(t)},$$

полученных из формул (12.12), найдем уравнение подвижного аксоида

$$\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{z}\right).$$

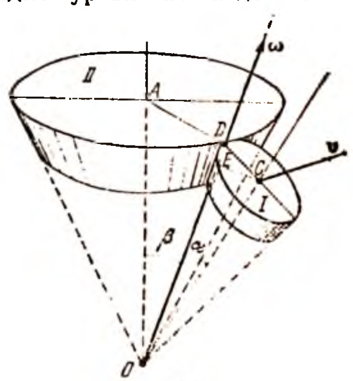


Рис. 12.7

Задача 12.1. Коническая шестерня I (рис. 12.7) обкатывает неподвижную коническую шестерню II. Определить угловую скорость шестерни I и неподвижный и подвижный аксоиды, если $\angle AOD = \beta$, $\angle COD = \alpha$, $OC = h$, а скорость центра C шестерни I равна v.

Так как движение шестерни I происходит без скольжения, то скорость ее точки D равна нулю. Неподвижной точкой является точка O пересечения осей OA и OC шестерен. Следовательно, прямая OD является мгновенной осью вращения шестерни I. Геометрическое место мгновенных осей вращений, которое образуется при качении шестерни I, — конус с вершиной в точке O, основанием которого является неподвижная шестерня II. В системе же координат, связанной с подвижной шестерней I, наблюдатель, следящий за мгновенной осью вращения, заметит, что эта ось описывает боковую поверхность конуса, имеющего вершину в точке O и основанием подвижную шестерню I.

Теперь перейдем к определению направления и модуля угловой скорости. В соответствии с формулой (12.10), скорость точки C равна

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC}.$$

Отсюда следует, что вектор ω направлен по мгновенной оси вращения OD от точки O к точке D. Далее имеем

$$v = \omega \cdot CE, \qquad CE = h \sin\alpha, \qquad \omega = \frac{v}{h \sin\alpha}.$$

§ 12.3. Ускорения точек тела, имеющего одну неподвижную точку

Введем прежде всего понятие углового ускорения. *Угловым ускорением называется производная угловой скорости по времени,* т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{12.15}$$

Из определения видно, что вектор углового ускорения можно рассматривать как скорость конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 12.8). Угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлено по касательной к годографу вектора угловой скорости (рис. 12.8), поэтому его направление может быть каким угодно в зависимости от закона изменения вектора угловой скорости. Заметим попутно, что годограф вектора угловой скорости — кривая, лежащая на неподвижном аксоиде (рис. 12.8).

Перейдем теперь к определению ускорения произвольной точки тела. Исходя из определения ускорения и используя равенство (12.10), получим

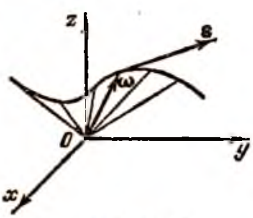


Рис. 12.8

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \text{а} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

следовательно,

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{12.16}$$

Таким образом, ускорение $\mathbf{w}$ может быть представлено как сумма двух ускорений: $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.

Ускорение $\mathbf{w}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ называется *вращательной* составляющей ускорения. Модуль этого ускорения равен

$$w^{\text{вр}} = \varepsilon r \sin(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}) = \varepsilon h,$$

где h — расстояние от точки M до вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Направлено это ускорение перпендикулярно плоскости векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{r}$ в ту сторону, откуда кратчайший переход от вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ к вектору $\mathbf{r}$ виден против хода часовой стрелки. Заметим, что вследствие несовпадения направлений угловой скорости и углового ускорения вращательная составляющая ускорения может быть направлена по отношению к направлению скорости под любым углом, оставаясь перпендикулярной вектору $\mathbf{r}$. В этом существенное различие между вращением твердого тела вокруг неподвижной оси и движением тела, имеющего одну неподвижную точку.

Ускорение $\omega \times \mathbf{v}$ направлено по перпендикуляру к плоскости векторов ω и $\mathbf{v}$, т. е. по направлению вектора $\mathbf{d}$ (рис. 12.9), имеющего начало в точке M и конец в основании перпендикуляра, опущенного из точки M на мгновенную ось вращения. Модуль векторного произведения $\omega \times \mathbf{v}$ равен

$$|\omega \times \mathbf{v}| = \omega v = \omega^2 d,$$

так как

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega d.$$

Следовательно, можно записать

$$\mathbf{w}^{\text{ос}} = \omega \times \mathbf{v} = \omega^2 \mathbf{d}. \qquad (12.17)$$

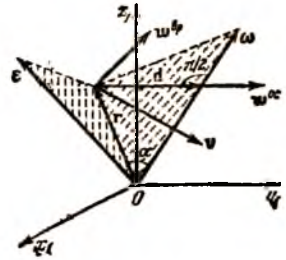


Рис. 12.9

Это ускорение называется *осестремительной* составляющей ускорения.

Итак, ускорение любой точки тела равно сумме вращательной и осестремительной составляющих ускорения

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{\text{вр}} + \mathbf{w}^{\text{ос}}. \qquad (12.18)$$

Задача 12.2. Найти скорость и ускорение точки B конического катка, равномерно катящегося без скольжения по горизонтальной конической кольцевой опоре (рис. 12.10, *а*). Диаметр катка $BC = 30$ см, $OA = 20$ см, скорость центра катка $v_A = 40$ см/с направлена перпендикулярно плоскости чертежа на читателя.

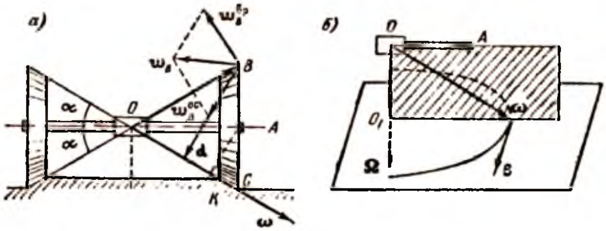


Рис. 12.10

Прежде всего необходимо определить величину и направление угловой скорости и углового ускорения катка BC.

При движении катка точка O остается неподвижной. Скорость точки C равна нулю (качение без скольжения), поэтому мгновенная ось вращения проходит по прямой OC. Угловая скорость также направлена по OC от точки O к точке C. Модуль угловой скорости можно определить из равенства

$$\omega = \frac{v_A}{AK} = \frac{v_A}{OA \cdot \sin \alpha}.$$

Из $\triangle OAC$ имеем $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = 25$ см; тогда

$$\sin \alpha = \frac{15}{25} = 0{,}6, \quad \cos \alpha = \frac{20}{25} = 0{,}8, \quad \omega = \frac{40}{20 \cdot 0{,}6} = \frac{10}{3} = 3{,}3 \text{ рад/с}.$$

Найдем скорость $\mathbf{v}_B$:

$$\mathbf{v}_B = \omega \times \overline{OB}, \qquad v_B = OB\cdot\omega\sin 2\alpha = 80 \text{ см/с}.$$

Скорость $\mathbf{v}_B$ перпендикулярна плоскости чертежа и направлена на читателя.

Конец вектора ω описывает окружность с центром в точке O_1 на вертикальной оси OO_1 (рис. 12.10, *б*). Найдем теперь угловое ускорение ε. Вектор ε определяется как скорость конца вектора ω, следовательно, вектор ε направлен по касательной к окружности, описываемой вектором ω, т. е. перпендикулярно плоскости чертежа на читателя. Найдем модуль ε. Так как конец вектора ω движется по окружности, то имеем

$$\varepsilon = \Omega \times \omega.$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения плоскости OAC, в которой расположен вектор ω, вокруг вертикальной оси OO_1

$$\Omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{40}{20} = 2 \text{ рад/с}.$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon = \omega\Omega\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{16}{3} \approx 5{,}3 \text{ рад/с}^2.$$

Перейдем к определению ускорения точки B:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_B^{\text{ос}} + \mathbf{w}_B^{\text{вр}}, \qquad w_B^{\text{ос}} = \omega^2 d, \qquad \mathbf{w}_B^{\text{вр}} = \varepsilon \times \mathbf{r}_B.$$

Заметим, что $d = OB\cdot\sin 2\alpha = 0{,}24$ м, $r_B = OB = 0{,}25$ м. Отсюда

$$w_B^{\text{ос}} = \frac{10^2}{9}\cdot 0{,}24 \approx 2{,}7 \text{ м/с}^2, \qquad w_B^{\text{вр}} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Вектор ускорения $\mathbf{w}_B^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно OB, лежит в плоскости BOC и составляет с ускорением $\mathbf{w}_B^{\text{ос}}$ угол $\beta = 180° - 2\alpha$. Тогда

$$w_B = \sqrt{(w_B^{\text{ос}})^2 + (w_B^{\text{вр}})^2 - 2w_B^{\text{ос}}w_B^{\text{вр}}\cos 2\alpha} \approx 2{,}56 \text{ м/с}^2.$$

§ 12.4. Движение свободного твердого тела

Рассмотрим движение свободного твердого тела. Введем, кроме неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$, еще подвижную систему координат $Ax_2y_2z_2$, перемещающуюся поступательно относительно осей $Ox_1y_1z_1$ и связанную с телом только в одной точке — точке A, и подвижную систему координат $Axyz$, жестко связанную с телом (рис. 12.11). В подвижной системе координат $Ax_2y_2z_2$ тело имеет одну закрепленную в ней точку — точку A, следовательно, тело в этой системе координат участвует в движении, рассмотренном нами в предыдущем параграфе. Для того чтобы задать положение тела в подвижной системе координат $Ax_2y_2z_2$, можно ввести три угла Эйлера θ, ψ, φ, а для определения положения относительно неподвижной системы координат нужно, кроме того, задать положение точки A, для чего потребуется знать еще три величины: x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}. Таким образом, положение свободного твердого тела определяется шестью независимыми параметрами: x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, θ, ψ, φ.

Перейдем к определению скоростей точек свободного тела. Скорость произвольной точки B равна производной от ее радиуса-вектора $\mathbf{r}_B$ по времени. Пользуясь рис. 12.11, найдем

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{12.19}$$

Заметим, что $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ — скорость точки A; кроме того, вектор $d\boldsymbol{\rho}/dt$ представляет собой скорость точки B относительно подвижной системы координат $Ax_2y_2z_2$, в которой тело имеет одну закрепленную точку. Следовательно, согласно формуле (12.10)

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

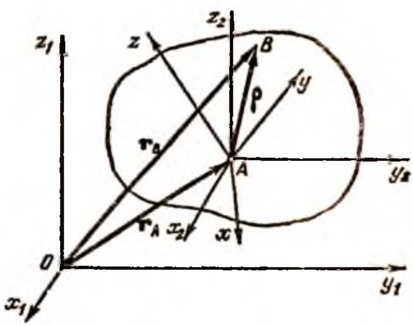


Рис. 12.11

Таким образом, формулу (12.19) можно переписать в виде

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{12.20}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения тела относительно системы координат $Ax_2y_2z_2$. (Так же как и для плоского движения, можно показать, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора полюса.)

Формулу (12.20) можно прочитать следующим образом: *скорость любой точки свободного твердого тела геометрически складывается из скорости произвольно выбранного полюса и скорости этой точки во вращательном движении тела относительно полюса.*

Пользуясь формулой (12.20), можно доказать следующую теорему: *Проекции скоростей двух точек свободного твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.*

Согласно равенству (12.20) имеем

$$(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_{AB},$$

но вектор $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\rho} = \overline{AB}$; следовательно, $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_{AB} = 0$ и $(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB}$. Определим ускорения точек свободного твердого тела. Для этого продифференцируем по времени равенство (12.20):

$$\mathbf{w}_B = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{12.21}$$

Замечая, что $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{w}_A$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела в подвижной системе координат $Ax_2y_2z_2$, а $d\boldsymbol{\rho}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, получим

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}).$$

Используя (12.17), можно записать

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = \omega^2 \mathbf{d}_B,$$

где $\mathbf{d}_B$ — вектор, имеющий начало в точке B, а конец в основании перпендикуляра, опущенного из B на $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 12.12).

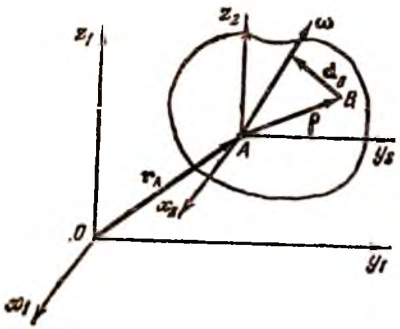


Рис. 12.12

В окончательном виде ускорение точки свободного тела выражается следующим образом:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \omega^2 \mathbf{d}_B. \qquad (12.22)$$

Два последних члена дают ускорение точки B в ее движении вокруг полюса.

Таким образом, *ускорение точки свободного тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее движении вокруг полюса.*

Задача 12.3 *). Точка M твердого тела движется со скоростью $\mathbf{v}$ по пространственной кривой. Определить угловую скорость естественного трехгранника $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ траектории точки M **).

Пусть $\boldsymbol{\rho}_N$ — радиус-вектор любой точки N, неизменно связанной с естественным трехгранником $M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\mathbf{b}$ (рис. 12.13). Так как производная $d\boldsymbol{\rho}_N/dt$ определяет скорость точки N во вращательном движении координатной системы $M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\mathbf{b}$ относительно точки M, мы будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_N}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_N,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость естественного трехгранника.

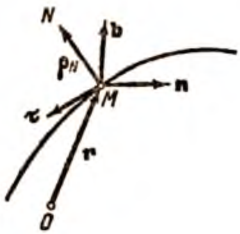


Рис. 12.13

Положив $\boldsymbol{\rho}_N = \boldsymbol{\tau}$, затем $\boldsymbol{\rho}_N = \mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\rho}_N = \mathbf{b}$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b},$$

или, вводя в рассмотрение длину дуги σ (см. § 9.2) и применяя очевидное тождество $\frac{d}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{d}{d\sigma} = \dot{\sigma}\frac{d}{d\sigma}$,

$$\dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \dot{\sigma}\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\sigma}\frac{d\mathbf{b}}{d\sigma} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}. \qquad (12.23)$$

Воспользуемся теперь формулами Френе, вывод которых можно найти в любом курсе дифференциальной геометрии:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{T}\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma} = -\frac{1}{T}\mathbf{n}. \qquad (12.24)$$

---

*) Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.

**) Рассмотрение этого примера вызвано тем, что в некоторых задачах механики бывает полезно изучить движение твердого тела по отношению к естественному трехграннику одной из точек тела.

В этих равенствах ρ — радиус кривизны, а T — кручение кривой в данной точке, определяемые формулами

$$\rho = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}\right|, \quad \frac{1}{T} = \rho^2 \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{d\sigma^3}\right).$$

Заметим, что первая формула Френе была получена нами ранее при выводе формулы (9.30). Теперь последние две формулы (12.23) можно записать в следующем виде:

$$\dot\sigma\left(-\frac{1}{\rho}\boldsymbol\tau + \frac{1}{T}\mathbf{b}\right) = \boldsymbol\omega \times \mathbf{n}, \qquad -\frac{\dot\sigma}{T}\mathbf{n} = \boldsymbol\omega \times \mathbf{b}.$$

Умножая первое из этих равенств слева векторно на $\mathbf{n}$, а второе — $\mathbf{b}$ и учитывая при этом, что $\mathbf{n} \times \boldsymbol\tau = -\mathbf{b}$, а $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \boldsymbol\tau$, имеем

$$\dot\sigma\left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} + \frac{\boldsymbol\tau}{T}\right) = \mathbf{n} \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{n}), \qquad \frac{\dot\sigma}{T}\boldsymbol\tau = \mathbf{b} \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{b})$$

или *)

$$\frac{\dot\sigma}{T}\boldsymbol\tau + \frac{\dot\sigma}{\rho}\mathbf{b} = \boldsymbol\omega - \omega_n\mathbf{n}, \qquad \frac{\dot\sigma}{T}\boldsymbol\tau = \boldsymbol\omega - \omega_b\mathbf{b}, \tag{12.25}$$

где $\omega_n = \boldsymbol\omega \cdot \mathbf{n}$ и $\omega_b = \boldsymbol\omega \cdot \mathbf{b}$ — проекции угловой скорости $\boldsymbol\omega$ на оси $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Вычитая из первого равенства второе, найдем

$$\frac{\dot\sigma}{\rho}\mathbf{b} = -\omega_n\mathbf{n} + \omega_b\mathbf{b}.$$

Отсюда $\omega_n = 0$; пользуясь первым равенством (12.25), найдем искомую угловую скорость $\boldsymbol\omega$ естественного трехгранника:

$$\boldsymbol\omega = \dot\sigma\left(\frac{\boldsymbol\tau}{T} + \frac{\mathbf{b}}{\rho}\right) = v_\tau\left(\frac{\boldsymbol\tau}{T} + \frac{\mathbf{b}}{\rho}\right). \tag{12.26}$$

Таким образом, зная скорость $v_\tau = \dot\sigma$ движущейся точки M, радиус кривизны ρ и кручение T траектории, можно по формуле (12.26) определить угловую скорость естественного трехгранника. Заметим, что вектор $\boldsymbol\omega$ лежит в спрямляющей плоскости $\boldsymbol\tau$, $\mathbf{b}$.

Глава XIII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 13.1. Основные определения. Абсолютная и относительная производные вектора

В главе IX мы изучали основные характеристики движения точки по отношению к заданной системе отсчета (системе координат). Однако в некоторых случаях бывает целесообразно изучать движение точки одновременно по отношению к двум системам координат, одна из которых совершает заданное движение по отношению к другой (основной), принимаемой за неподвижную. Случай, когда подвижная система координат совершала поступательное движение, был нами

*) В курсе векторной алгебры доказывается следующая формула для двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

частично рассмотрен в § 10.2 (приведено доказательство теоремы о сложении скоростей).

В этой главе рассматривается общий случай, когда движение подвижной системы координат может происходить по любому заданному закону.

Изучение движения точки по отношению к каждой из этих координатных систем производится методами, изложенными в главе IX. Нашей задачей является установление связи между основными характеристиками этих движений.

Будем называть сложным или «абсолютным» движением точки ее движение по отношению к системе координат, выбранной за основную. Движение точки по отношению к подвижной системе координат будем называть относительным.

Под переносным движением будем понимать движение подвижной системы координат относительно неподвижной.

Установление связи между сложным, относительным и переносным движениями позволит решать разнообразные задачи по определению кинематических характеристик сложного и составляющих движений.

В этой главе мы встретимся с необходимостью дифференцирования вектора, определенного в системе координат, которая может двигаться произвольным образом. В связи с этим мы введем понятия *абсолютной* и *относительной* производных вектора.

Пусть даны основная система координат и подвижная система координат, которая совершает произвольное движение. Пусть какой-либо вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ определен в подвижной системе координат, т. е. проекции этого вектора a_x, a_y, a_z на оси подвижной системы — заданные функции времени. Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы подвижной системы координат, то вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{13.1}$$

Установим теперь правило нахождения производной в неподвижной системе координат (абсолютной производной) от этого вектора. Дифференцируя обе части равенства (13.1) по времени, будем иметь в виду, что векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ вследствие движения подвижной системы координат меняют свое направление, т. е. являются функциями времени.

Таким образом, абсолютная производная вектора $\mathbf{a}$ по времени будет равна

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} + a_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \tag{13.2}$$

Сумма первых трех слагаемых представляет собой производную от вектора $\mathbf{a}$ в подвижной системе координат. В самом деле, если бы мы поставили задачей изучить изменение вектора $\mathbf{a}$ только по отношению к подвижной системе координат, то мы учитывали бы при этом лишь изменение проекций вектора на оси этой системы координат. Движение же самой системы нас бы не интересовало.

Назовем сумму первых трех слагаемых в (13.2) *относительной* или *локальной* производной и обозначим ее через $\tilde{d}\mathbf{a}/dt$, т. е.

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{da_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{da_z}{dt}\mathbf{k}. \tag{13.3}$$

Заменяя в формулах (9.11) и (12.10) радиус-вектор $\mathbf{r}$ последовательно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, получим

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i},\qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j},\qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}.$$

Поэтому сумма последних трех слагаемых в (13.2)

$$a_x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+a_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+a_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

может быть представлена в виде

$$a_x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+a_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+a_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}=a_x(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i})+a_y(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j})+a_z(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k})=$$
$$=\boldsymbol{\omega}\times(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}, \tag{13.4}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы координат.

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}. \tag{13.5}$$

Таким образом, *абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор.*

§ 13.2. Теорема о сложении скоростей

Выбирая систему координат $Ox_1y_1z_1$ за основную, предположим, что система координат $Axyz$ движется по отношению к основной системе произвольным образом (рис. 13.1). Движение какой-либо точки M может быть изучено как по отношению к основной, так и по отношению к подвижной системам координат методами, изложенными ранее. В данном параграфе мы поставим задачу о нахождении связи между скоростями точки по отношению к выбранным нами системам координат. Напомним данные ранее определения (§ 10.2).

Скорость $\mathbf{v}$ точки M по отношению к основной системе координат называется *абсолютной скоростью.*

Скорость $\mathbf{v}_r$ точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительной скоростью.*

Важным понятием является понятие о переносной скорости. *Переносной скоростью* $\mathbf{v}_e$ точки называется скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Остановимся на этом определении несколько подробнее. Рассматриваемая точка при своем движении относительно подвижного тела, с которым жестко связана подвижная система координат, проходит через разные точки этого тела, имеющие в общем случае отличные друг от друга скорости. Поэтому переносной скоростью точки в данный момент будет скорость именно той точки подвижного тела (подвижной системы координат), через которую в данный момент проходит движущаяся точка.

Если радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ определяет положение точки M по отношению к системе координат $Ox_1y_1z_1$, радиус-вектор $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A(t)$ определяет положение начала системы координат $Axyz$ в системе $Ox_1y_1z_1$, а радиус-вектор $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ определяет положение точки M в системе координат $Axyz$, то в соответствии с рис. 13.1 имеем

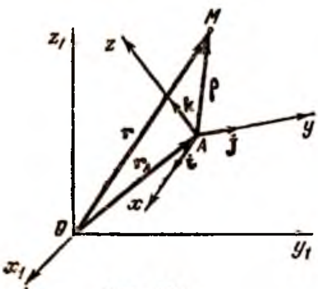


Рис. 13.1

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}. \tag{13.6}$$

Пусть координаты точки в подвижной системе координат будут x, y и z; тогда

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей подвижной системы координат.

По определению абсолютная производная радиуса-вектора по времени будет абсолютной скоростью точки. Следовательно, дифференцируя равенство (13.6) по времени, найдем абсолютную скорость точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{13.7}$$

Так как вектор $\boldsymbol{\rho}$ определен в подвижной системе координат, то для нахождения абсолютной производной от него воспользуемся формулой (13.5):

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \tag{13.8}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы координат, а

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

представляет собой относительную производную от $\boldsymbol{\rho}$ по времени. Согласно определению это будет относительная скорость точки, т. е.

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \tag{13.9}$$

Подставляя выражения (13.8) и (13.9) в соотношение (13.7), получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_r, \tag{13.10}$$

где $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ — скорость начала подвижной системы координат по отношению к основной.

Для определения переносной скорости точки закрепим ее в подвижной системе координат, т. е. положим в формуле (13.10) $\mathbf{v}_r = 0$, тогда получим

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \text{ *)}. \tag{13.11}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \tag{13.12}$$

т. е. *абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.*

§ 13.3. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Для того чтобы найти абсолютное ускорение точки, т. е. ее ускорение по отношению к основной системе координат, продифференцируем формулу (13.10) по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}. \tag{13.13}$$

Абсолютную производную вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ найдем по формуле (13.5):

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13.14}$$

В этом соотношении $\tilde{d}\mathbf{v}_r/dt$ есть относительная производная вектора $\mathbf{v}_r$ по времени и, следовательно, представляет собой относительное ускорение $\mathbf{w}_r$, т. е. ускорение точки по отношению к подвижной системе координат

$$\mathbf{w}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \tag{13.15}$$

Используя равенства (13.8), (13.9), (13.14) и (13.15), преобразуем формулу (13.13) к виду

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}_r + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] + \mathbf{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r =$$
$$= \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{w}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \tag{13.16}$$

где $\mathbf{w}_A = \dot{\mathbf{v}}_A$ — ускорение начала подвижной системы координат, а $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ — ее угловое ускорение.

Для того чтобы найти переносное ускорение $\mathbf{w}_e$ (ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка!), закрепим точку в подвижной системе координат, т. е. положим $\mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{w}_r = 0$.

---

*) Эта формула нам уже знакома (§ 12.4). Скорость, определяемая по этой формуле, есть скорость той точки свободного твердого тела (подвижной системы координат), с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

В этом случае согласно формуле (13.16) будем иметь

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \tag{13.17}$$

т. е. переносное ускорение представляет собой ускорение точки свободного твердого тела, с которым жестко связана подвижная система координат. Таким образом, имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13.18}$$

Ускорение, определяемое членом $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, называется *поворотным* или *кориолисовым* ускорением и обозначается через $\mathbf{w}_c$, т. е.

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13.19}$$

Итак, имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c. \tag{13.20}$$

Эта формула выражает содержание теоремы Кориолиса: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.*

При использовании формулы (13.20) полезно иметь в виду, что переносное ускорение следует определять по правилам нахождения ускорения точек твердого тела. При нахождении относительного ускорения подвижную систему координат следует считать неподвижной и использовать правила, изложенные в главе IX.

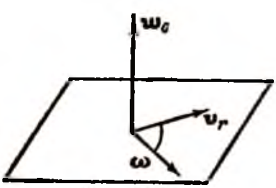


Рис. 13.2

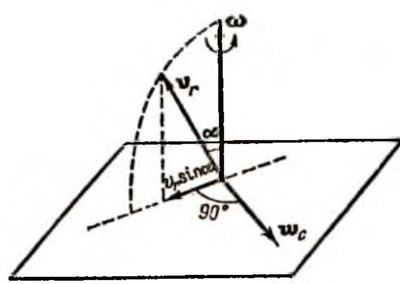


Рис. 13.3

Остановимся несколько подробнее на кориолисовом ускорении $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$. Модуль этого ускорения, очевидно, равен

$$w_c = 2\omega v_r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r). \tag{13.21}$$

Направление кориолисова ускорения определяется направлением векторного произведения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, т. е. кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший переход от $\boldsymbol{\omega}$ к $\mathbf{v}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 13.2). Если векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ не лежат в одной плоскости, удобно бывает мысленно перенести вектор $\boldsymbol{\omega}$ параллельно самому себе в начало вектора скорости $\mathbf{v}_r$ и применить указанное выше правило.

Иногда нахождение кориолисова ускорения облегчается применением следующего правила Н. Е. Жуковского (рис. 13.3): *проекцию* *относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную угловой скорости ω подвижной системы координат, равную $v_r \sin\alpha$, следует умножить на 2ω и повернуть на угол 90° вокруг ω в направлении вращения. Вектор, равный по модулю $2\omega v_r \sin\alpha$ и имеющий найденное направление, и будет кориолисовым ускорением.*

На основании формулы (13.21) можно указать, что кориолисово ускорение равно нулю в следующих случаях:

1) $\omega = 0$, это будет при поступательном перемещении подвижной системы координат;

2) угловая скорость ω подвижной системы параллельна относительной скорости $\mathbf{v}_r$;

3) в момент времени, когда относительная скорость $\mathbf{v}_r$ точки равна нулю.

§ 13.4. Задачи

Задача 13.1. Круговой спутник пролетает над экватором. Его скорость $v_0 = 7{,}9$ км/с. Плоскость орбиты наклонена к плоскости экватора под углом θ. Определить скорость движения спутника, видимую с Земли на экваторе, и видимое направление движения полярного спутника ($\theta = \pi/2$). Радиус Земли $R = 6400$ км (рис. 13.4).

Скорость движения по орбите является абсолютной скоростью в системе координат, движущейся поступательно с началом в центре Земли. Земля в этой системе координат вращается с угловой скоростью $\omega = 2\pi/(24\cdot 3600)$ рад/с.

Отложим от оси x, касательной к экватору, вектор $\mathbf{v}_0$. Он составляет с направлением на восток угол θ.

Переносная скорость точки на экваторе равна скорости точки, участвующей во вращательном движении Земли. Следовательно, переносная скорость направлена по касательной к экватору на восток и равна по модулю

$$v_e = \omega R = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}\,6400 = 0{,}465 \text{ км/с}.$$

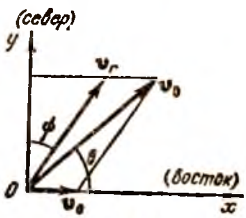


Рис. 13.4

Зная абсолютную и переносную скорости точки, можно определить и относительную скорость. Для этого разложим вектор $\mathbf{v}_0$ на две составляющие, из которых одна равна $\mathbf{v}_e$. Определим проекции относительной скорости на оси x и y (рис. 13.4):

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \qquad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e,$$

$$v_{rx} = v_0\cos\theta - v_e = 7{,}9\cos\theta - 0{,}465,$$

$$v_{ry} = v_0\sin\theta = 7{,}9\sin\theta.$$

Таким образом, угол ψ, составленный относительной скоростью с меридианом, определится из соотношения

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{v_{rx}}{v_{ry}} = \frac{7{,}9\cos\theta - 0{,}465}{7{,}9\sin\theta},$$

а модуль относительной скорости — из равенства

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} = \sqrt{v_0^2 + v_e^2 - 2v_0 v_e\cos\theta} = \sqrt{7{,}9^2 + 0{,}465^2 - 2\cdot 7{,}9\cdot 0{,}465\cos\theta}.$$

Для полярного спутника $\theta = \pi/2$ и поэтому

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{0,465}{7,9} = -0,059.$$

Соответствующий угол $\psi \approx -3°,4$. Знак минус указывает на то, что при направлении абсолютного движения на север видимое с Земли направление скорости отклонено на северо-запад.

Модуль относительной скорости для полярного спутника мало отличается от модуля абсолютной скорости:

$$v_r = \sqrt{7,9^2 + 0,465^2} = 7,914 \text{ км/с}.$$

Задача 13.2. Стержень OA вращается вокруг оси, проходящей через его конец O, с постоянной угловой скоростью ω. Ползун M движется вдоль стержня от точки O

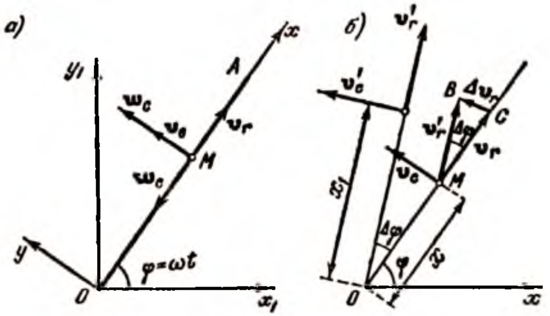


Рис. 13.5

с постоянной относительной скоростью $\mathbf{v}_r$. Определить модуль и направление переносного, относительного и кориолисова ускорений ползуна в тот момент, когда $OM = x$ (рис. 13.5, *а*).

Для того чтобы определить переносное ускорение, мысленно закрепим ползун на стержне. Переносным ускорением ползуна будет ускорение той точки стержня, в которой ползун закреплен. Так как стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω, то ускорение этой точки (переносное ускорение ползуна) будет направлено к точке O и по модулю равно

$$w_e = \omega^2 x.$$

Относительное движение ползуна равномерное и прямолинейное, поэтому его относительное ускорение равно нулю, т. е. $\mathbf{w}_r = 0$. Согласно формуле (13.19) кориолисово ускорение численно будет равно

$$w_c = 2\omega v_r,$$

так как векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ перпендикулярны. Направлено же кориолисово ускорение перпендикулярно стержню в сторону вращения стержня.

В рассматриваемом примере достаточно просто можно показать причину возникновения кориолисова ускорения. В самом деле, при нахождении переносного и относительного ускорений мы не учитывали следующих обстоятельств: во-первых, относительная скорость при вращении стержня меняет свое направление по отношению к неподвижной системе координат; во-вторых, модуль переносной скорости ползуна меняется вследствие перемещения ползуна из точек стержня с меньшей скоростью в точки стержня с большей скоростью.

Учтем теперь эти обстоятельства,

Пусть в момент времени t расстояние точки M от точки O равно x, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ оно составляет x_1. За промежуток времени Δt стержень повернется на угол $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$ (рис. 13.5, *б*). Вектор относительной скорости $\mathbf{v}_r$ повернется также на угол $\Delta\varphi$. Приращение вектора $\mathbf{v}_r$ за промежуток Δt, очевидно, равно

$$\Delta\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r' - \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}_r'$ — относительная скорость в момент $t + \Delta t$.

Из рассмотрения рис. 13.5, *б* следует, что для достаточно малых Δt модуль вектора $\Delta\mathbf{v}_r$ будет равен

$$|\Delta\mathbf{v}_r| = v_r\,\Delta\varphi = v_r\omega\,\Delta t.$$

Разделив обе части равенства на Δt, получим

$$w_1 = |\Delta\mathbf{v}_r|/\Delta t = v_r\omega.$$

Так как $\triangle\, CMB$ равнобедренный, то при $\Delta t \to 0$ вектор $\mathbf{w}_1$ будет направлен перпендикулярно стержню в сторону его вращения.

В момент времени t переносная скорость ползуна равна $v_e = \omega x$, а в момент $t + \Delta t$ $v_e' = \omega x_1$. Приращение модуля переносной скорости равно

$$\Delta v_e = v_e' - v_e = \omega\,(x_1 - x) = \omega v_r\,\Delta t,$$

откуда, поделив на Δt, получим

$$w_2 = \Delta v_e/\Delta t = \omega v_r.$$

Вектор $\mathbf{w}_2$, учитывающий изменение модуля переносной скорости, будет, очевидно, направлен по переносной скорости, т. е. перпендикулярно стержню в сторону его вращения.

Складывая теперь w_1 и w_2, получим

$$w_c = 2\omega v_r.$$

Это и есть кориолисово ускорение, найденное нами ранее при помощи формулы (13.19).

Итак, в рассматриваемом случае кориолисово ускорение появляется, во-первых, вследствие изменения направления относительной скорости по отношению к неподвижной системе координат за счет вращения подвижной системы координат, во-вторых, вследствие перемещения точки из-за относительного движения в сторону бо́льших переносных скоростей.

Задача 13.3. По ободу диска радиуса R, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, движется точка M с постоянной по модулю относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ (рис. 13.6, *а*). Найти абсолютное ускорение точки M.

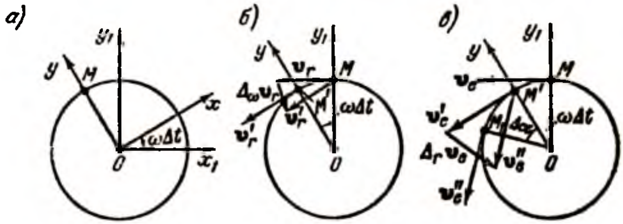


Рис. 13.6

Так как диск вращается с постоянной угловой скоростью, то переносное ускорение будет равно

$$w_e = \omega^2 R$$

и направлено к центру диска. Относительное ускорение равно

$$w_r = v_r^2/R$$

и также направлено к центру диска.

Согласно формуле (13.21) модуль кориолисова ускорения равен

$$w_c = 2\omega v_r.$$

Направлено же кориолисово ускорение также к центру диска (при относительном движении точки, направленном в сторону, обратную вращению диска, ускорение Кориолиса направлено в противоположную сторону).

Таким образом, абсолютное ускорение точки равно

$$w = \omega^2 R + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r.$$

Эту формулу можно получить и иначе. Абсолютная скорость точки равна по модулю

$$v = \omega R + v_r = \text{const},$$

а так как траекторией является окружность, то

$$w = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R + v_r)^2}{R} = \omega^2 R + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r.$$

Появление кориолисова ускорения в этом примере связано с двумя причинами: изменением направления относительной скорости вследствие вращения диска (подвижной системы координат) и изменением направления переносной скорости из-за относительного (по отношению к диску) перемещения точки.

Пусть система координат Ox_1y_1 неподвижная, а система координат Oxy жестко связана с диском. За промежуток времени Δt точка M диска вследствие его вращения переместится в положение M'. Точка же, движущаяся по диску за этот же промежуток времени, переместится в положение M_1 (рис. 13.6, *б*, *в*).

Приращение относительной скорости, обусловленное вращением диска, обозначим через $\Delta_\omega \mathbf{v}_r$. Из рис. 13.6, *б* следует, что при достаточно малых Δt

$$|\Delta_\omega \mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}_r' - \mathbf{v}_r| \approx v_r \omega \, \Delta t.$$

Направление вектора $\Delta_\omega \mathbf{v}_r / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ стремится к направлению соответствующего радиуса диска. Модуль же этого вектора стремится к

$$w_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta_\omega \mathbf{v}_r|}{\Delta t} = \omega v_r.$$

Приращение вектора переносной скорости, обусловленное относительным перемещением точки, будет равно (рис. 13.6, *в*)

$$\Delta_r \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_e'' - \mathbf{v}_e'.$$

Так как дуга $M'M_1$ равна $v_r \, \Delta t$, то угол $\Delta\alpha$, на который повернется переносная скорость из-за относительного перемещения, определится из выражения

$$\Delta\alpha = v_r \, \Delta t / R.$$

Поэтому имеем

$$|\Delta_r \mathbf{v}_e| \approx v_e \, \Delta\alpha = \omega R v_r \, \Delta t / R = \omega v_r \, \Delta t.$$

Вектор $\Delta_r \mathbf{v}_e / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ по направлению также будет стремиться совпасть с радиусом, а по модулю приближается к

$$w_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta_r \mathbf{v}_e|}{\Delta t} = \omega v_r.$$

Итак, полное приращение вектора скорости, связанное с двумя указанными причинами, приводит к появлению ускорения, перпендикулярного относительной скорости, направленного к центру диска и равного по модулю

$$w_c = w_1 + w_2 = 2\omega v_r,$$

т. е. к ускорению Кориолиса.

Задача 13.4. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 13.7). По прямолинейному пазу CD движется ползун N по закону $\sigma = CN = 3t^2$ см, расстояние от центра диска до паза $h = 5$ см; $CD = 24$ см. Определить скорость и ускорение ползуна N в момент, когда он достигнет середины паза E

Абсолютная скорость ползуна N определяется по формуле $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$.

В рассматриваемой задаче подвижная система координат, относительно которой происходит движение ползуна N, жестко связывается с диском. Следовательно, переносной скоростью ползуна, когда он совпадает с точкой E диска, будет скорость точки E диска, т. е.

$$v_e = \omega \cdot OE = 10 \text{ см/с}.$$

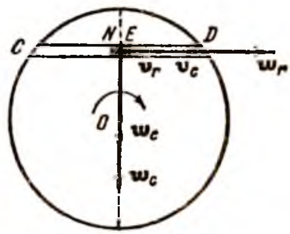


Рис. 13.7

Вектор $\mathbf{v}_e$ направлен перпендикулярно OE.

Относительное движение точки является прямолинейным. Относительная скорость равна

$$v_r = \frac{d\sigma}{dt} = 6t \text{ см/с}.$$

Векторы $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_r$ направлены в одну сторону, следовательно, абсолютная скорость ползуна N равна

$$v = (10 + 6t) \text{ см/с}.$$

Так как $CE = 12$ см, то момент $t = t_1$ прохождения ползуна через точку E определится из соотношения $3t_1^2 = 12$, откуда $t_1 = 2$ с и, следовательно, при $t_1 = 2$ с имеем

$$v = 22 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение ползуна определяется формулой

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c.$$

Диск вращается с постоянной угловой скоростью, поэтому ускорение точки E диска (в которой в момент t_1 находится ползун) равно

$$w_e = w_e^{\text{oc}} = \omega^2 OE = 20 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{w}_e$ направлен к центру O диска. Относительное ускорение, как ускорение точки в прямолинейном движении, будет

$$w_r = \frac{dv_r}{dt} = 6 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{w}_r$ направлен вдоль прямой CD. Так как вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и вектор $\mathbf{v}_r$ взаимно перпендикулярны, то кориолисово ускорение равно

$$w_c = 2\omega v_r = 24t \text{ см/с}^2$$

и при $t_1 = 2$ с

$$w_c = 48 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\mathbf{w}_c$ указано на рис. 13.7.

Абсолютное ускорение ползуна N в момент $t = t_1 = 2$с равно

$$w = \sqrt{(w_e + w_c)^2 + w_r^2} \approx 68{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Задача 13.5. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вращается вокруг катета BA (рис. 13.8) с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2; начальная угловая скорость треугольника равна нулю. По гипотенузе треугольника от вершины B к основанию движется точка M по закону $\sigma = BM = 20t$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент $t = 2$ с.

Подвижная система координат в рассматриваемой задаче жестко связывается с треугольником ABC. Пусть в рассматриваемый момент времени точка M находится в положении, указанном на рис. 13.8. Так как угловое ускорение треугольника постоянно, то угловая скорость треугольника равна $\omega = \varepsilon t$ (начальная угловая скорость по условию задачи равна нулю).

Переносное ускорение, т. е. ускорение той точки гипотенузы, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M, может быть разложено на вращательное и осестремительное. Модули этих ускорений равны

$$w_e^{oc} = \omega^2 \cdot MN, \qquad w_e^{вр} = \varepsilon \cdot MN,$$

где $MN = BM \sin 45° = 20t \sin 45°$. Для $t = 2$ с имеем

$$w_e^{oc} = 20\sqrt{2} = 28{,}2 \text{ см/с}^2, \qquad w_e^{вр} = 10\sqrt{2} = 14{,}1 \text{ см/с}^2.$$

Направление ускорений $\mathbf{w}_e^{oc}$ и $\mathbf{w}_e^{вр}$ указано на рис. 13.8.

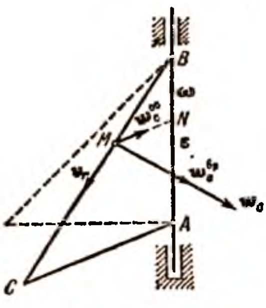


Рис. 13.8

Относительное движение точки прямолинейное. Так как

$$v_r = \frac{d\sigma}{dt} = 20 \text{ см/с} = \text{const},$$

то $w_r = 0$.

Ускорение Кориолиса определится по формуле

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

где ω — угловая скорость треугольника (переносная угловая скорость). Направление $\mathbf{w}_c$ указано на рис. 13.8 ($\mathbf{w}_c$ перпендикулярно плоскости $\triangle ABC$).

Модуль кориолисова ускорения равен

$$w_c = 2\omega v_r \sin(180° - 45°) = 2\omega v_r \sin 45°$$

и при $t = 2$ с

$$w_c \approx 28{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки в момент $t = 2$ с равен

$$w = \sqrt{(w_e^{вр} + w_c)^2 + (w_e^{oc})^2} \approx 509 \text{ см/с}^2.$$

Задача 13.6. Определить проекции абсолютного ускорения точки M, движущейся по меридиану Земли на юг с постоянной по модулю относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ (рис. 13.9), на оси системы координат $Mxyz$ (ось x направлена по касательной к меридиану на север, ось y — по касательной к параллели на запад, ось z — по радиусу Земли).

Так как абсолютное ускорение точки определяется формулой

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c,$$

то его проекции на оси координат будут

$$w_x = w_{ex} + w_{rx} + w_{cx}, \qquad w_y = w_{ey} + w_{ry} + w_{cy},$$

$$w_z = w_{ez} + w_{rz} + w_{cz}.$$

Угловая скорость Ω Земли постоянна, и, следовательно, переносное ускорение равно

$$w_e = \Omega^2 R \cos\varphi,$$

где R — радиус Земли, а φ — геоцентрическая широта той точки Земли, с которой в данный момент совпадает точка M. Направлено $\mathbf{w}_e$ от точки M к оси вращения Земли.

Так как точка M движется по меридиану с постоянной скоростью, то относительное ускорение точки будет по модулю равно

$$w_r = v_r^2/R$$

и направлено к центру Земли.

Кориолисово ускорение согласно (13.19) по модулю равно

$$w_c = 2\Omega v_r \sin(\pi - \varphi) = 2\Omega v_r \sin\varphi,$$

и направлено в сторону, противоположную направлению оси y.

Проектируя векторы ускорений $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{w}_c$ на оси координат, получим

$$w_{ex} = \Omega^2 R \sin\varphi\cos\varphi, \qquad w_{ey} = 0,$$
$$w_{rx} = 0, \qquad w_{ry} = 0,$$
$$w_{cx} = 0, \qquad w_{cy} = -2\Omega v_r \sin\varphi,$$

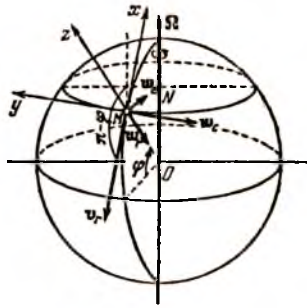


Рис. 13.9

$$w_{ez} = -\Omega^2 R\cos^2\varphi,$$
$$w_{rz} = -v_r^2/R,$$
$$w_{cz} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$w_x = \Omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi, \qquad w_y = -2\Omega v_r \sin\varphi,$$

$$w_z = -\Omega^2 R\cos^2\varphi - v_r^2/R.$$

Задача 13.7. Точка M движется по поверхности Земли по произвольной траектории. Определить горизонтальную составляющую кориолисова ускорения точки, если ее скорость относительно Земли равна $\mathbf{v}_r$.

Построим географически ориентированную систему координат xyz, направив ось x по касательной к меридиану на север, ось y по касательной к параллели на запад

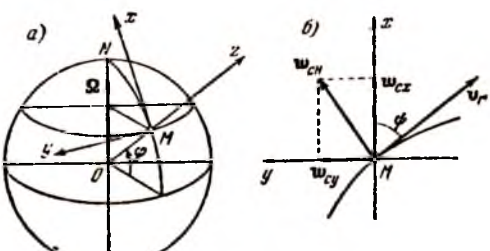


Рис. 13.10

и ось z по радиусу Земли вверх (рис. 13.10, *а*). Обозначим курс точки через ψ (угол между относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ и направлением на север, т. е. осью x (рис. 13.10, *б*)). Тогда проекции относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на оси x, y, z будут

$$v_{rx} = v_r\cos\psi, \qquad v_{ry} = -v_r\sin\psi, \qquad v_{rz} = 0.$$

Проекции угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ вращения Земли на те же оси определяются равенствами

$$\Omega_x = \Omega\cos\varphi, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega\sin\varphi,$$

где φ — широта места точки M в данный момент (см. рис. 13.10, *а*).

$$\mathbf{w}_c = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_r = 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x & 0 & \Omega_z \\ v_{rx} & v_{ry} & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее находим проекции кориолисова ускорения на горизонтальные оси x и y

$$w_{cx} = -2\Omega_z v_{ry} = 2\Omega v_r \sin\varphi \sin\psi, \qquad w_{cy} = 2\Omega_z v_{rx} = 2\Omega v_r \sin\varphi \cos\psi.$$

Определим модуль горизонтальной составляющей кориолисова ускорения

$$w_{cH} = \sqrt{w_{cx}^2 + w_{cy}^2} = 2\Omega v_r \sin\varphi.$$

Из этого выражения видно, что модуль горизонтальной составляющей кориолисова ускорения зависит только от относительной скорости $\mathbf{v}_r$ и широты места движения точки и не зависит от направления движения.

Покажем, что в северном полушарии горизонтальная составляющая кориолисова ускорения направлена всегда перпендикулярно $\mathbf{v}_r$ влево от движения, т. е. влево от направления относительной скорости (в южном полушарии вправо). Действительно, составим проекцию горизонтальной составляющей кориолисова ускорения на направление относительной скорости $\mathbf{v}_r$. Имеем (см. рис. 13.10, *б*)

$$\text{пр}_{\mathbf{v}_r}\mathbf{w}_{cH} = w_{cx}\cos\psi - w_{cy}\sin\psi$$

или, подставляя найденные значения для w_{cx} и w_{cy},

$$\text{пр}_{\mathbf{v}_r}\mathbf{w}_{cH} = 0,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Задача 13.8. Принимая поверхность Земли за сферу радиуса R и считая, что движение точки M относительно вращающейся Земли задано, определить скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ точки M относительно системы координат, движущейся поступательно и имеющей начало в центре Земли.

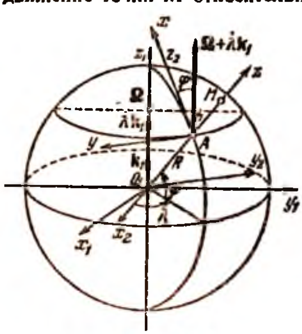


Рис. 13.11

Пусть положение точки M относительно Земли определяется долготой λ, широтой φ и высотой h над уровнем поверхности Земли. Введем в рассмотрение подвижную систему координат $Axyz$. Ось z направим по радиусу Земли так, чтобы она проходила через точку M, ось x направим по касательной к меридиану на север, ось y — по касательной к параллели на запад. Начало координат A этой системы располагаем на земной поверхности (рис. 13.11). Единичными векторами осей x, y и z соответственно будут $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Эту задачу можно решить различными методами, в частности, с помощью теоремы о сложении ускорений. Однако мы воспользуемся не методом разложения движения на простейшие, а используем формулу, связывающую абсолютную производную вектора с относительной производной, так как в данном примере это приводит быстрее всего к цели.

Пусть система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется поступательно, а система координат $O_1x_2y_2z_2$ жестко связана с Землей. Будем считать заданными проекции скорости точки M относительно вращающейся Земли на оси системы координат $Axyz$. Очевидно, что v_N, v_0, v_h — проекции скорости на меридиан, параллель и вертикаль — соответственно равны

$$v_N = (R+h)\dot\varphi, \qquad v_0 = (R+h)\dot\lambda\cos\varphi, \qquad v_h = \dot h. \tag{13.22}$$

При движении точки M и вращении Земли система координат $Axyz$ совершает вращение вокруг оси y с угловой скоростью $\dot\varphi$ и вокруг оси вращения Земли с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость Земли (рис. 13.11). Следовательно, проекции угловой скорости системы координат $Axyz$ на ее оси будут

$$\omega_x=(\dot\lambda+\Omega)\cos\varphi,\qquad \omega_y=\dot\varphi,\qquad \omega_z=(\dot\lambda+\Omega)\sin\varphi,$$

или, учитывая (13.22), получим

$$\omega_x=\frac{v_0}{R+h}+\Omega\cos\varphi,\qquad \omega_y=\frac{v_N}{R+h},\qquad \omega_z=\left(\frac{v_0}{R+h}+\Omega\cos\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi. \tag{13.23}$$

Эти формулы имеют самостоятельное значение в различных прикладных вопросах.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M относительно центра Земли в системе координат $Axyz$ представляется в следующем виде:

$$\mathbf{r}=(R+h)\,\mathbf{k}. \tag{13.24}$$

Абсолютная скорость точки M (скорость по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$) равна

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{\tilde d\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

где

$$\frac{\tilde d\mathbf{r}}{dt}=\dot h\mathbf{k}=v_h\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$v_x=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_x=\omega_y(R+h),\qquad v_y=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_y=-\omega_x(R+h),\qquad v_z=v_h.$$

Принимая во внимание формулы (13.23), получаем

$$v_x=v_N,\qquad v_y=-v_0-\Omega(R+h)\cos\varphi,\qquad v_z=v_h. \tag{13.25}$$

Определив вектор $\mathbf{v}$ в системе координат $Axyz$, абсолютное ускорение точки M найдем по формуле

$$w=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\tilde d\mathbf{v}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}, \tag{13.26}$$

где

$$\frac{\tilde d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{i}+\frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{j}+\frac{dv_z}{dt}\,\mathbf{k}.$$

В соответствии с формулой (13.26) имеем

$$w_x=\frac{dv_x}{dt}+\omega_yv_z-\omega_zv_y,\qquad w_y=\frac{dv_y}{dt}+\omega_zv_x-\omega_xv_z,$$

$$w_z=\frac{dv_z}{dt}+\omega_xv_y-\omega_yv_x.$$

Так как

$$\frac{dv_x}{dt}=\dot v_N,$$

$$\frac{dv_y}{dt}=-\dot v_0-\Omega v_h\cos\varphi+\Omega(R+h)\dot\varphi\sin\varphi=-\dot v_0-\Omega v_h\cos\varphi+v_N\Omega\sin\varphi,$$

$$\frac{dv_z}{dt}=\dot v_h,$$

то, учитывая соотношения (13.23) и (13.25), найдем

$$w_x = \dot{v}_N + \frac{v_N v_h}{R+h} + \frac{v_0^2 \operatorname{tg}\varphi}{R+h} + 2v_0\Omega \sin\varphi + \Omega^2 (R+h) \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$w_y = -\dot{v}_0 - \frac{v_0 v_h}{R+h} + \frac{v_N v_0}{R+h} \operatorname{tg}\varphi + 2\Omega (v_N \sin\varphi - v_h \cos\varphi),$$

$$w_z = \dot{v}_h - \frac{v_0^2 + v_N^2}{R+h} - 2v_0\Omega \cos\varphi - (R+h)\,\Omega^2 \cos^2\varphi \ ^{*)}.$$

Это и есть проекции абсолютного ускорения точки M на оси системы координат $Axyz$.

Глава XIV

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 14.1. Постановка задачи

Пусть твердое тело движется относительно подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а последняя в свою очередь перемещается относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, принимаемой за неподвижную. В этом случае говорят, что тело совершает сложное движение, которое состоит из двух составляющих движений.

Сложное движение может состоять из n составляющих движений. В этом случае имеется n систем координат и задается n движений: движение тела относительно системы координат $O_nx_ny_nz_n$, движение системы $O_nx_ny_nz_n$ относительно системы $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$ и т. д., наконец, задается движение системы $O_2x_2y_2z_2$ относительно основной системы $O_1x_1y_1z_1$. Движение тела или движение какой-либо одной системы координат относительно другой в общем случае ничем не ограничено. Задача заключается в нахождении зависимости между основными характеристиками составляющих движений и сложного движения.

В главе XII было установлено, что движение свободного твердого тела можно представить как сложное движение, состоящее из совокупности сферического движения тела вокруг некоторого полюса и поступательного движения тела вместе с системой координат, связанной с полюсом. Таким образом, основными кинематическими характеристиками движения тела являются скорость и ускорение поступательного движения и угловые скорости и ускорения. Следовательно, задача изучения сложного движения тела, заключающаяся в нахождении зависимости между основными характеристиками составляющих движений и сложного движения, сводится к установлению связи между поступательными и угловыми скоростями и уско-

---

*) Эти соотношения к книге: Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, получены с использованием формул (13.11) и (13.20). См. также: Николаи Е. Л. Труды ЛПИ, 1941, № 3.

рениями составляющих движений. В настоящем курсе мы ограничимся лишь установлением связи между поступательными и угловыми скоростями.

Рассмотрение начнем с простейших случаев.

§ 14.2. Сложение поступательных движений

Пусть $\mathbf{v}_1$ — скорость поступательного движения тела P относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 14.1), а $\mathbf{v}_2$ — скорость поступательного движения системы $O_2x_2y_2z_2$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Тогда, чтобы найти абсолютную скорость какой-либо точки M тела P, нужно применить теорему о сложении скоростей (глава XIII):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e. \qquad (14.1)$$

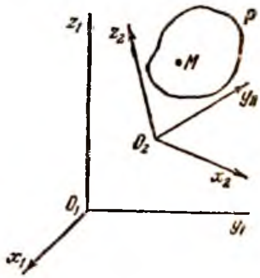


Рис. 14.1

В нашем случае $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_2$, следовательно,

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \qquad (14.2)$$

Таким образом, у всех точек тела абсолютные скорости оказались одинаковыми, следовательно, при сложении поступательных движений твердого тела результирующее движение будет также поступательным и скорость результирующего движения равна сумме скоростей составляющих движений.

В случае n поступательных движений, применяя последовательно формулу (14.1), можно показать, что результирующее движение также будет поступательным, и его скорость будет равна сумме скоростей составляющих движений, т. е.

$$\mathbf{v}_M = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

Возможен случай, когда скорости всех точек тела только в данный момент времени оказываются равными между собой. Этот случай называют *мгновенно-поступательным движением*. Однако следует иметь в виду, что ускорения точек при этом различны (см. случай *а*) в задаче 11.9).

§ 14.3. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера

Пусть тело P вращается в системе координат $Ox_2y_2z_2$ вокруг оси z_2 с угловой скоростью ω_2, а система координат $Ox_2y_2z_2$ вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы с угловой скоростью ω_1 (рис. 14.2). Точка O остается неподвижной, поэтому результирующее движение тела будет сферическим. Обозначим через Ω угловую скорость этого движения. Наша задача состоит в том, чтобы найти угловую скорость абсолютного движения тела, зная угловые скорости ω_1 и ω_2 составляющих вращений.

Найдем абсолютную скорость произвольной точки M тела. Для этого в формулу (14.1) следует подставить

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M; тогда

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

С другой стороны, скорость той же точки M в абсолютном движении будет равна

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

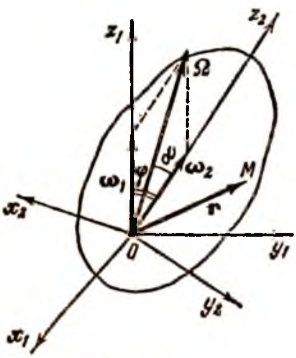


Рис. 14.2

Сравнивая оба выражения, получим

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

Так как точка M, а следовательно, и ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольны, то

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \tag{14.3}$$

Из формулы (14.3) следует, что *совокупность двух вращений, происходящих вокруг пересекающихся осей, эквивалентна одному вращению, происходящему с мгновенной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.*

Замечание. В случае $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$ из (14.3) следует, что $\mathbf{v}_M = 0$. Следовательно, совокупность двух вращений вокруг одной и той же оси, происходящих с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями, эквивалентна покою. Такую совокупность движений всегда можно присоединять к любому сложному движению тела.

Совокупность n вращений вокруг пересекающихся в одной точке осей эквивалентна одному вращению с мгновенной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i.$$

Полученное правило сложения вращений вокруг пересекающихся осей позволит нам теперь выразить проекции мгновенной угловой скорости тела, имеющего одну неподвижную точку O, через углы Эйлера и их производные.

Напомним (§ 12.1), что положение подвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, полностью определяется относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ углами Эйлера (рис. 14.3). Тело участвует в трех вращениях: первое вращение, соответствующее изменению угла прецессии ψ, происходит вокруг неподвижной оси Oz_1 с угловой скоростью $\dot{\psi}\mathbf{k}_1$; второе вращение, соответствующее изменению угла нутации θ, происходит вокруг линии узлов OK с угловой скоростью $\dot{\theta}\mathbf{i}'$, где $\mathbf{i}'$ — единичный вектор линии узлов; наконец, третье вращение, соответствующее изменению угла собственного вращения φ, происходит вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\varphi}\mathbf{k}$. Следовательно, абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела будет

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k}_1 + \dot{\theta}\mathbf{i}' + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \tag{14.4}$$

Составим таблицу направляющих косинусов единичных векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{k}$ в системе подвижных осей $Oxyz$:

	x	y	z
$\mathbf{k}_1$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta$
$\mathbf{i}'$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Поясним составление первой строки этой таблицы (вторая и третья строки непосредственно следуют из рис. 14.3, *а*). Разложим

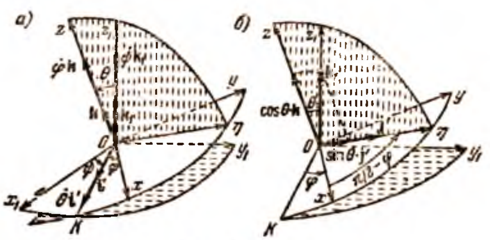


Рис. 14.3

единичный вектор $\mathbf{k}_1$ на две взаимно перпендикулярные составляющие, направив одну из них по оси z (она равна $\cos\theta\cdot\mathbf{k}$, см. рис. 14.3, *б*); тогда вторая составляющая, равная $\sin\theta\cdot\mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}'$ — единичный вектор вспомогательной оси η, будет находиться в плоскости xy. Следовательно,

$$\mathbf{k}_1 = \cos\theta\cdot\mathbf{k} + \sin\theta\cdot\mathbf{j}'. \tag{14.5}$$

Вспомогательная ось η составляет с осями x и y углы $\pi/2 - \varphi$ и φ. Проектируя единичный вектор $\mathbf{k}_1$ на оси x, y и z, получим (напомним, что проекции единичных векторов равны соответствующим направляющим косинусам)

$$\cos(\mathbf{k}_1, x) = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos(\mathbf{k}_1, y) = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \cos(\mathbf{k}_1, z) = \cos\theta.$$

Эти выражения и составляют первую строку таблицы направляющих косинусов.

Проектируя теперь обе части равенства (14.4) на оси x, y, z и учитывая таблицу косинусов, найдем проекции вектора угловой скорости тела на оси, жестко связанные с телом:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot\psi \sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi. \end{aligned} \qquad (14.6)$$

Полученные соотношения носят название *кинематических уравнений Эйлера.*

Модуль угловой скорости определяется равенством

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta}. \qquad (14.7)$$

Таблица направляющих косинусов между единичными векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{k}$ в системе неподвижных осей $Ox_1y_1z_1$ имеет вид

	x_1	y_1	z_1
$\mathbf{k}_1$	0	0	1
$\mathbf{i}'$	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
$\mathbf{k}$	$\sin\theta\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$	$\cos\theta$

Для того чтобы получить последнюю строку, мы разложили вектор $\mathbf{k}$ на две составляющие, направив одну из них по оси z_1 (она равна $\cos\theta\cdot\mathbf{k}_1$; см. рис. 14.4); тогда вторая, равная $\sin\theta\cdot\mathbf{j}''$, где $\mathbf{j}''$ — единичный вектор новой вспомогательной оси η, будет находиться в плоскости Ox_1y_1:

$$\mathbf{k} = \cos\theta\cdot\mathbf{k}_1 + \sin\theta\cdot\mathbf{j}''.$$

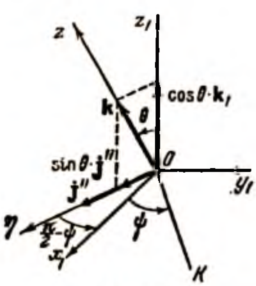


Рис. 14.4

Третья строка второй таблицы получена проектированием этого равенства на оси x_1, y_1, z_1. Проектируя теперь обе части равенства (14.4) на оси x_1, y_1, z_1 и пользуясь второй таблицей направляющих косинусов, найдем проекции вектора угловой скорости на неподвижные оси координат:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi, \\ \omega_{y_1} &= \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi, \\ \omega_{z_1} &= \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta. \end{aligned} \qquad (14.8)$$

Кинематические уравнения Эйлера (14.6) и (14.8) устанавливают связь между проекциями вектора угловой скорости ω на соответствующие оси, углами Эйлера ψ, θ и φ и их первыми производными по времени.

Задача 14.1. Планетарный редуктор с коническими шестернями передает вращение вала *I* на вал *II* (рис. 14.5). Определить число оборотов в минуту вала *II* и число оборотов в минуту в абсолютном и относительном вращении сателлитов, если дано: $r_1 = 80$ мм; $r_2 = 80$ мм, $r_3 = 60$ мм и $n = 600$ об/мин.

Подвижная шестерня *3* вращается вокруг своей оси *OB* и вместе с этой осью вращается вокруг оси *OA*; мгновенная ось абсолютного движения шестерни *3* проходит через точку пересечения осей слагаемых вращений, т. е. через точку *O* и точку *C* (так как шестерня *I* неподвижна). Для определения числа оборотов абсолютного движения шестерни *3* и числа оборотов при относительном вращении ее вокруг своей оси воспользуемся формулой (14.3), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\omega_a = \omega + \omega_3,$$

где ω_a — абсолютная угловая скорость шестерни 3, ω — угловая скорость вала *I*, ω_3 — относительная угловая скорость шестерни *3*. Из рассмотрения подобных треугольников *Oab* и *CBO* (см. рис. 14.5) следует

$$\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{r_1}{r_3}, \quad \text{или} \quad \frac{n_3}{n} = \frac{r_1}{r_3},$$

где n_3 — число оборотов в минуту шестерни *3* в относительном движении, а n — число оборотов в минуту вала *I*. Отсюда имеем

$$n_3 = \frac{r_1}{r_3} n = \frac{80}{60} \cdot 600 = 800 \text{ об/мин.}$$

Абсолютная угловая скорость шестерни *3* равна

$$\omega_a = \frac{2\pi n_a}{60} = \frac{\pi\sqrt{n^2 + n_3^2}}{30} \approx$$

$$\approx 100 \text{ рад/с},$$

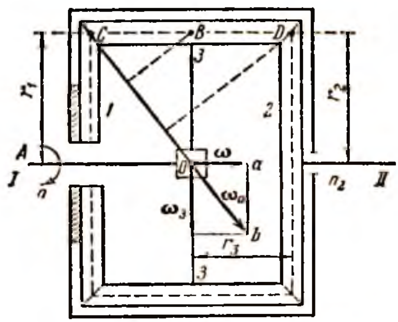


Рис. 14.5

причем через n_a обозначено число оборотов в минуту шестерни *3* в абсолютном движении.

В точке *D* происходит зацепление шестерен *2* и *3*, поэтому скорости точек шестерен *2* и *3*, совпадающих с точкой *D* равны между собой.

Скорость точки *B* шестерни *3* равна

$$v_B = \frac{\pi n}{30} r_1$$

и, следовательно,

$$v_D = 2v_B = \frac{2\pi n}{30} r_1.$$

Но скорость точки *D* шестерни *2* равна

$$v_D = \frac{\pi n_2}{30} r_2.$$

Таким образом, учитывая, что $r_1 = r_2$, получим

$$n_2 = 2n = 1200 \text{ об/мин.}$$

§ 14.4. Пара вращений

Рассмотрим сложное движение, состоящее из двух вращений относительно параллельных осей O_1z_1 и O_2z_2 (рис. 14.6).

Пусть угловые скорости относительного (ω_2) и переносного (ω_1) движений равны по модулю, но противоположно направлены ($\omega_2 =$

$= -\omega_1$). Такая совокупность движений называется *парой вращений*.

Найдем абсолютную скорость какой-либо точки M твердого тела:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

В нашем случае

$$\mathbf{v}_r = \omega_2 \times \mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{v}_e = \omega_1 \times \mathbf{r}_1,$$

следовательно,

$$\mathbf{v}_M = \omega_1 \times \mathbf{r}_1 + \omega_2 \times \mathbf{r}_2 = \omega_1 \times \mathbf{r}_1 - \omega_1 \times \mathbf{r}_2 = \\ = \omega_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \omega_1 \times \overline{O_1O_2}. \qquad (14.9)$$

Векторы ω_1 и $\overline{O_1O_2}$ не зависят от положения точки M, поэтому из (14.9) вытекает, что скорости всех точек тела одинаковы. Этим свойством обладает только *поступательное* движение.

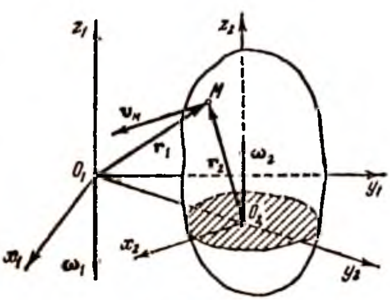


Рис. 14.6

Из (14.9) следует, что

$$\mathbf{v}_M = \overline{O_1O_2} \times \omega_2. \qquad (14.10)$$

Векторное произведение $\overline{O_1O_2} \times \omega_2$ называется *моментом пары вращений*. Таким образом, *тело, участвующее в паре вращений, движется поступательно со скоростью, равной моменту пары вращений*.

Легко видеть, что совокупность n пар вращений эквивалентна одной паре, т. е. поступательному движению. Заметим, что любое мгновенно-поступательное движение можно представить как мгновенную пару вращений.

Задача 14.2. Велосипедист едет со скоростью 21 км/ч, диаметр колес 700 мм, передаточное число равно трем. Определить, сколько оборотов в минуту делает педаль вокруг своей оси, если велосипедист движется без свободного хода.

Педаль велосипеда в результирующем движении перемещается поступательно. Это поступательное движение образуется из поступательного движения вместе с велосипедом и поступательного движения педали относительно велосипеда (последнее движение будет поступательным потому, что велосипедист ступней своей ноги держит педаль все время параллельно поверхности дороги). Поступательное движение педали относительно велосипеда осуществляется ее вращением относительно своей оси и вращением вместе с осью вокруг оси кривошипа. При таком движении педали ее угловая скорость при вращении вокруг своей оси будет равна и противоположно направлена ее угловой скорости при движении вокруг оси кривошипа (пара вращений).

Так как велосипед движется без свободного хода, то движение колеса велосипеда зависит от движения кривошипа. Определим число оборотов кривошипа вокруг своей оси из условия, что передаточное число равно трем. Обозначая через n число оборотов колеса, а через n_1 — число оборотов кривошипа, будем иметь

$$n/n_1 = 3.$$

Предполагая, что колесо катится по поверхности дороги без скольжения, найдем зависимость между скоростью велосипеда и числом оборотов колеса. Очевидно, это будет

$$v = \frac{\pi n}{30} r,$$

где r — радиус колеса. Таким образом,

$$n = \frac{30v}{\pi r} = \frac{30 \cdot 21\,000}{0{,}35\pi \cdot 3600} = \frac{500}{\pi} \text{ об/мин.}$$

Следовательно, число оборотов кривошипа равно

$$n_1 = \frac{n}{3} = \frac{500}{3\pi} \approx 53 \text{ об/мин}$$

и число оборотов педали

$$n_2 = n_1 \approx 53 \text{ об/мин.}$$

§ 14.5. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Из содержания предыдущих параграфов видно, что введенные выше простейшие кинематические элементы — угловые скорости вращения тела (или системы координат) и скорости поступательных

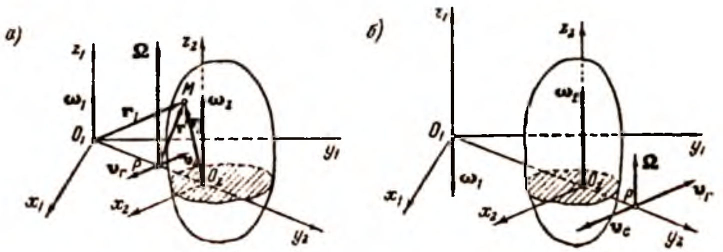


Рис. 14.7

движений подчиняются тем же законам, что и силы и пары в статике. В самом деле, пары вращений или поступательные движения аналогичны парам сил. Как и в статике, совокупность кинематических пар эквивалентна паре, момент которой (или *скорость результирующего поступательного движения*) равен сумме моментов слагаемых пар.

Угловые скорости вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке, заменяются одной угловой скоростью так же, как и сходящаяся система сил в статике приводится к одной силе (равнодействующей). Аналогия между угловыми скоростями составляющих вращений и силами этим не ограничивается. Мы сейчас установим, что сложение вращений вокруг параллельных осей совершенно аналогично сложению параллельных сил.

Предположим, что тело вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси O_2z_2 относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а последняя вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1z_1 относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, причем оси O_1z_1 и O_2z_2 параллельны (рис. 14.7).

Тогда абсолютная скорость любой точки M тела

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2.$$

Скорости $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ точки M расположены в плоскости, перпендикулярной осям O_1z_1 и O_2z_2, следовательно, и абсолютная скорость $\mathbf{v}$ точки M лежит в плоскости, перпендикулярной этим осям. Так как точка M произвольна, то это означает, что тело участвует в плоском движении. Найдем в плоскости $x_1O_1y_1$ мгновенный центр скоростей в случае, когда $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ направлены в одну сторону (рис. 14.7, *а*).

Для точки P, лежащей на прямой O_1O_2, $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ коллинеарны, но направлены в разные стороны. Для того чтобы их геометрическая сумма была равна нулю, должно выполняться равенство

$$\omega_2 \cdot O_2P = \omega_1 \cdot O_1P$$

или

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{14.11}$$

Точка P делит отрезок O_1O_2 внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей составляющих вращений.

Перейдем теперь к сложению вращений, имеющих противоположные направления. Пусть $\omega_2 > \omega_1$. Скорости $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ в этом случае имеют противоположные направления в точках на прямой O_1O_2, расположенных вне отрезка O_1O_2 (рис. 14.7, *б*). Найдем точку P, в которой эти скорости равны:

$$\omega_2 \cdot O_2P = \omega_1 \cdot O_1P$$

или

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{14.12}$$

Точка P делит отрезок O_1O_2 внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Такую точку всегда можно найти, если только $\omega_1 \neq \omega_2$.

В каждом из рассмотренных случаев точка P имеет скорость, равную нулю, т. е.

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{O_2P} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{O_1P} = 0. \tag{14.13}$$

Найдем теперь скорость произвольной точки M:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\overline{O_1P} + \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\overline{O_2P} + \mathbf{r}').$$

Здесь $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки M относительно мгновенного центра скоростей P. Раскрывая скобки в правой части и используя равенство (14.13), получим

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{O_1P} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{O_2P} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}' = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}', \tag{14.14}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Отсюда следует, что *совокупность двух вращений, происходящих вокруг параллельных осей, но не представляющих собой пары вращений, приводится к одному вращению, мгновенная ось которого делит внутренним или внешним образом расстояние между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Угловая скорость результирующего вращения равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих движений.*

Если угловые скорости направлены в одну сторону, то мгновенная ось вращения расположена между осями O_1z_1 и O_2z_2 и модуль результирующей угловой скорости $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. В случае противоположно направленных вращений мгновенная ось расположена за осью, вокруг которой вращение происходит с большей угловой скоростью и $\Omega = |\,\omega_1 - \omega_2\,|$. Результирующая угловая скорость направлена в сторону большей из угловых скоростей.

§ 14.6. Задачи

Задача 14.3. В редукторе (рис. 14.8) водило OC делает $n = 720$ об/мин, а подвижные шестерни *2* и *3* вращаются вокруг своей оси относительно поводка в том же направлении с угловой скоростью, соответствующей $n_{23} = 240$ об/мин. Определить радиус r_1 неподвижного колеса *I* и число оборотов вала *II*, если $OC = 240$ мм, $r_4 = 40$ мм (r_4 — радиус шестерни *4*).

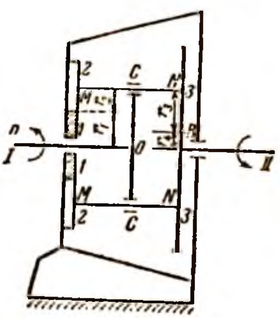


Рис. 14.8

Подвижные шестерни *2* и *3* совершают сложное движение. Они вращаются вокруг оси MN относительно поводка и вместе с этой осью вокруг оси вала *I*.

Радиус r_1 неподвижного колеса *1* найдем из условия, что мгновенная ось абсолютного вращения шестерен *2* и *3*, параллельная оси MN, проходит через точку касания неподвижного колеса *1* и подвижной шестерни *2*. На основании соотношения (14.11) можем записать:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega}{\omega_{23}}, \qquad \frac{r_2 + r_1}{r_1} = \frac{\omega + \omega_{23}}{\omega_{23}},$$

$$r_1 = \frac{OC \cdot \omega_{23}}{\omega + \omega_{23}},$$

где ω_{23} — угловая скорость шестерен *2* и *3* при их вращении вокруг оси MN, а ω — угловая скорость вала *I*.

Между угловой скоростью и числом оборотов в минуту существует зависимость вида

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

следовательно,

$$r_1 = \frac{OC \cdot n_{23}}{n + n_{23}} = \frac{240 \cdot 240}{720 + 240} = 60 \text{ мм}.$$

Абсолютная угловая скорость ω_a шестерен *2* и *3* при вращении вокруг мгновенной оси на основании (14.14) равна

$$\omega_a = \omega + \omega_{23}.$$

Характеризуя угловую скорость числом оборотов, получим

$$n_a = n + n_{23} = 720 + 240 = 960 \text{ об/мин}.$$

Для определения числа оборотов шестерни *4*, а следовательно, и вала *II*, воспользуемся тем обстоятельством, что абсолютные скорости точек шестерен *3* и *4* в точке *B* их зацепления равны между собой (нет относительного проскальзывания):

$$n_a d = n_4 r_4,$$

где $d = r_1 - r_4$.

Таким образом,

$$n_4 = \frac{n_a (r_1 - r_4)}{r_4} = \frac{960\,(60 - 40)}{40} = 480 \text{ об/мин}.$$

Задача 14.4. Сколько оборотов в минуту должен делать ведущий вал *I* редуктора (рис. 14.9), чтобы ведомый вал *II* совершал $n_4 = 1800$ об/мин? Первое колесо с внутренними зубьями неподвижно. Дано: $r_1 = 150$ мм, $r_2 = 30$ мм, $r_4 = 50$ мм.

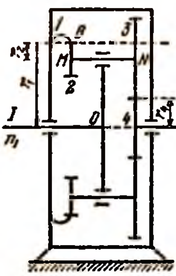


Рис. 14.9

Подвижные шестерни *2* и *3* как одно целое совершают сложное движение. Они вращаются вокруг оси MN относительно поводка и вместе с ней вращаются вокруг оси *I*. Мгновенная ось абсолютного вращения этих шестерен проходит через точку *B* — точку зацепления подвижной шестерни *2* и неподвижной шестерни *1*. Эта ось параллельна оси MN. Так как мгновенная ось абсолютного вращения шестерен *2* и *3* лежит вне осей слагаемых движений, то вращение этих шестерен вокруг оси MN происходит в сторону, противоположную направлению вращения вала *I*.

На основании формул (14.12) и (14.14) имеем

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad \omega_a = \omega_{23} - \omega_1,$$

где ω_{23} — угловая скорость вращения шестерен *2* и *3* вокруг оси MN, ω_a — абсолютная угловая скорость этих шестерен.

Из полученных соотношений следует

$$\omega_a = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} - \omega_1 = \omega_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2}.$$

Скорости точек зацепления шестерен *3* и *4* равны, т. е. $\omega_a (r_1 - r_4) = \omega_4 r_4$. Отсюда следует:

$$\omega_1 = \omega_4 \frac{r_4 r_2}{(r_1 - r_4)(r_1 - r_2)},$$

или

$$n_1 = n_4 \frac{r_2 r_4}{(r_1 - r_4)(r_1 - r_2)} = 1800 \frac{30 \cdot 50}{100 \cdot 120} = 225 \text{ об/мин}.$$

Вал *II* вращается в ту же сторону, что и вал *I*.

Задача 14.5. Стержень AB длиной $2l$ приводится в движение относительно направляющих OA и OB кривошипом OC, вращающимся вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_0. Кроме того, весь механизм вместе с направляющими вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости механизма и проходящей через точку O, с постоянной угловой скоростью, модуль которой также равен ω_0. Найти абсолютную угловую скорость стержня AB и абсолютную скорость любой точки M этого стержня, находящейся на расстоянии l_1 от точки C, если вращение кривошипа OC и вращение всего механизма происходит в противоположных направлениях ($AC = CB = l$).

Будем считать, что вращение кривошипа OC относительно направляющих происходит против хода часовой стрелки (рис. 14.10). Тогда ползун A будет двигаться по вертикальной направляющей вверх, а ползун B — по горизонтальной направляющей влево. Мгновенный центр скоростей P_r стержня AB в его относительном движении определится пересечением перпендикуляров, восставленных к скоростям $\mathbf{v}_{rA}$ и $\mathbf{v}_{rB}$. Учитывая направления последних, видим, что относительная угловая скорость ω_r стержня AB направлена по ходу часовой стрелки. Относительная скорость v_{rC} точки C как точки, принадлежащей кривошипу OC, равна $\omega_0 \cdot OC$, а как точки, принадлежащей стержню AB, равна $\omega_r \cdot P_rC$. Таким образом, $\omega_0 \cdot OC = \omega_r \cdot P_rC$. Отсюда следует, что угловые скорости ω_0 и ω_r равны по модулю ($\omega_0 = \omega_r$), но противоположны по направлению.

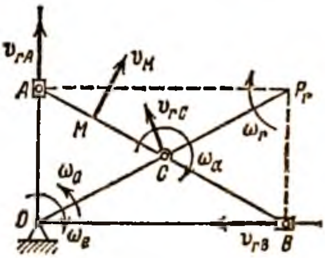


Рис 14.10

Переносная угловая скорость ω_e по условию задачи направлена по ходу часовой стрелки (в сторону, противоположную угловой скорости кривошипа) и численно равна ω_0. Векторы составляющих угловых скоростей стержня AB направлены перпендикулярно плоскости рисунка от читателя вниз. В соответствии с правилом сложения угловых скоростей, направленных в одну сторону, найдем модуль абсолютной угловой скорости ω_a стержня AB: $\omega_a = \omega_e + \omega_r = 2\omega_0$. Мгновенный центр скоростей стержня в его абсолютном движении находится посредине отрезка OP_r в точке C. Модуль абсолютной скорости точки M определится равенством $v_M = \omega_a l_1 = 2\omega_0 l_1$; скорость v_M направлена перпендикулярно мгновенному радиусу CM.

Задача 14.6. Найти передаточное отношение шарнира Гука *). Шарнир Гука применяется для передачи вращения от одного вала к другому. На концах валов I и II (рис. 14.11) имеются жестко скрепленные с ними вилки. Соединение валов производится с помощью крестовины, представляющей собой два жестко соединенных

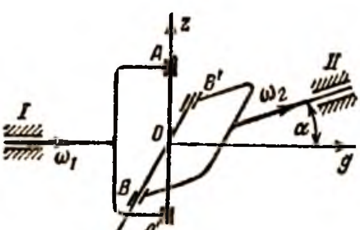


Рис. 14.11

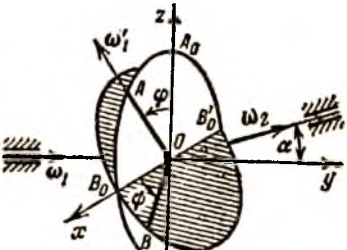


Рис. 14.12

и взаимно перпендикулярных валика. Каждый из этих валиков может вращаться в подшипниках, закрепленных на концах вилок.

На рис. 14.11 изображен шарнир Гука в положении, когда плоскость вилки вала I вертикальна, а валы I и II расположены в плоскости yz и угол между ними равен α.

Пусть вал I ведущий, а вал II ведомый. Векторы угловых скоростей валов соответственно обозначим через ω_1 и ω_2. При вращении валов крестовина совершает вращение вокруг неподвижной точки O. Валик AA' при этом будет вращаться в вер-

*) Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. I. — М.: Наука, 1982. — С. 321.

тикальной плоскости, перпендикулярной валу *I*, а валик BB' — в плоскости, перпендикулярной валу *II*. На рис. 14.12 показаны эти плоскости и положения валиков при повороте ведущего вала *I* на угол φ (ведомый вал *II* повернется на угол ψ); буквами A_0A_0' и B_0B_0' обозначено первоначальное положение валиков AA' и BB'.

Абсолютную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_a$ крестовины можно, с одной стороны, представить как сумму переносной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ (угловой скорости вала *I*) и относительной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1'$ вокруг валика AA', вращающегося в вилке вала *I*, т. е. $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_1'$. С другой стороны, эта абсолютная угловая скорость крестовины может быть найдена как сумма переносной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_2$ (угловой скорости вала *II*) и относительной скорости $\boldsymbol{\omega}_2'$ вращения крестовины вокруг валика BB', вращающегося в вилке вала *II*, т. е. $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_2'$. Сразу же отметим, что в силу конструкции шарнира $\boldsymbol{\omega}_1 \perp \boldsymbol{\omega}_1'$, $\boldsymbol{\omega}_1' \perp \boldsymbol{\omega}_2'$, $\boldsymbol{\omega}_2 \perp \boldsymbol{\omega}_2'$.

Итак, можно записать

$$\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_1' = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_2'. \tag{14.15}$$

Введем в рассмотрение угол φ поворота вала *I*. С этой целью рассмотрим два вектора: вектор $\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2$, перпендикулярный плоскости, в которой расположены валы *I* и *II* (на рис. 14.12 это плоскость yz); вектор $\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1'$, перпендикулярный плоскости вилки вала *I*. Принимая во внимание, что

$$|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2| = \omega_1\omega_2 \sin\alpha, \quad |\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1'| = \omega_1\omega_1',$$

найдем

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)\cdot(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1') = |\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2|\,|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1'| \cos\varphi = \omega_1^2\omega_2\omega_1' \sin\alpha\cos\varphi. \tag{14.16}$$

Это же скалярное произведение можно переписать и в другом виде *):

$$(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)\cdot(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_1') = [(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{\omega}_1]\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = [\omega_1^2\boldsymbol{\omega}_2 - (\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_2)\boldsymbol{\omega}_1]\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = \omega_1^2(\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1'), \tag{14.17}$$

так как $\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = 0$.

Сравнивая отношения (14.16) и (14.17), получим

$$\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = \omega_2\omega_1' \sin\alpha\cos\varphi. \tag{14.18}$$

Скалярное произведение $\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1'$ можно найти, умножив равенство (14.15) на вектор $\boldsymbol{\omega}_1'$:

$$\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1' + \boldsymbol{\omega}_1'\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1' + \boldsymbol{\omega}_2'\cdot\boldsymbol{\omega}_1'.$$

Так как $\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = 0$ и $\boldsymbol{\omega}_2'\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = 0$, то имеем

$$\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1' = (\omega_1')^2. \tag{14.19}$$

Сравнивая этот результат с равенством (14.18), получим

$$\omega_1' = \omega_2 \sin\alpha\cos\varphi. \tag{14.20}$$

Умножим теперь соотношение (14.15) скалярно на $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1'\cdot\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_2'\cdot\boldsymbol{\omega}_2.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{\omega}_1'\cdot\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2^2 - \boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_2. \tag{14.21}$$

Используя соотношения (14.19), (14.20) и (14.21), будем иметь

$$\omega_2^2 - \omega_1\omega_2\cos\alpha = \omega_2^2 \sin^2\alpha\cos^2\varphi,$$

и, следовательно, искомое передаточное отношение равно

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

---

*) Используем формулы $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

Если $\cos^2\varphi = 1$, то передаточное отношение будет максимальным и равным

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{max} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Минимальное значение передаточного отношения равно

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{min} = \cos\alpha.$$

§ 14.7. Сложение поступательных и вращательных движений

Первый случай. Рассмотрим сначала следующий случай сложного движения: тело P движется поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а она в свою очередь вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной угловой скоростью ω, параллельной скорости $\mathbf{v}_0$

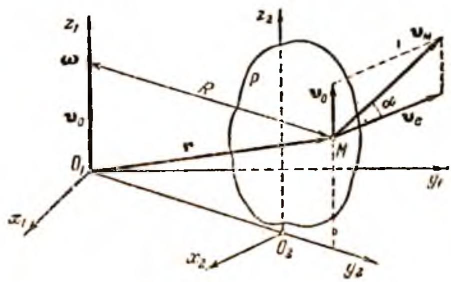


Рис. 14.13

поступательного движения. Найдем абсолютную скорость некоторой точки M тела (рис. 14.13):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}.$$

Таким образом, абсолютная скорость точки может быть разложена на две составляющие: одну $\mathbf{v}_0$, параллельную оси z_2, и другую $\mathbf{v}_e = \omega\times\mathbf{r}$, перпендикулярную плоскости, проходящей через ось z_1 и точку M.

Отсюда следует, что точка M движется по боковой поверхности кругового цилиндра с осью z_1. Касательная к винтовой траектории образует с плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, угол α, причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_r}{v_e} = \frac{v_0}{\omega R},$$

где R — радиус цилиндра (см. рис. 14.13).

Время T одного оборота тела в винтовом движении

$$T = 2\pi/\omega.$$

Любая точка тела переместится за это время параллельно оси на расстояние, равное

$$h = v_0 T = 2\pi v_0/\omega,$$

называемое *шагом винта*. Величина $p = v_0/\omega$ называется *параметром винта*.

Рассмотренное сложное движение тела называется *кинематическим винтом*.

Если скорость $\mathbf{v}_0$ и угловая скорость ω переменны, то движение тела будет *мгновенно-винтовым движением*. Естественно, что параметр винта в общем случае также будет переменным.

Второй случай. Скорость поступательного движения перпендикулярна угловой скорости вращательного движения. Согласно § 14.3 мгновенное поступательное движение можно рассматривать как сложное движение — пару вращений. При этом момент пары вращений должен быть равен скорости данного поступательного движения. Плоскость пары вращений должна быть перпендикулярна $\mathbf{v}_0$ — проведем ее через ось z_1 (рис. 14.14). Поступательное движение

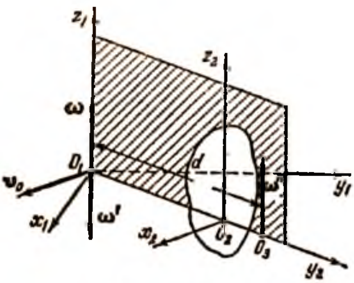


Рис. 14.14

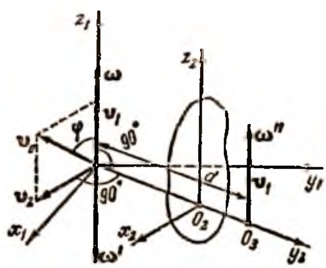


Рис. 14.15

со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ можно заменить вращением тела с угловой скоростью ω'' относительно некоторой новой системы и вращением этой новой системы относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ с угловой скоростью $\omega' = -\omega''$. Для упрощения чертежа плоскость $y_2O_2z_2$ проведена перпендикулярно $\mathbf{v}_0$ через ось z_1. Пусть одно из вращений, составляющих пару, имеет угловую скорость $\omega' = -\omega$ и происходит вокруг оси, совпадающей с z_1; тогда другое вращение имеет угловую скорость $\omega'' = \omega$ и происходит вокруг параллельной оси, проходящей через точку O_3. Для эквивалентности этой пары вращений данному поступательному движению тела достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\mathbf{v}_0 = \overline{O_1O_3} \times \omega''.$$

Если $O_1O_3 \perp O_1z_1$ (см. рис. 14.14), то отсюда следует, что

$$d = O_1O_3 = v_0/\omega.$$

Таким образом, совокупность поступательного и вращательного движений нами приведена к трем вращениям (ω'', ω', ω), при этом два последних вращения (ω', ω') эквивалентны покою, так как угловые скорости ω' и ω равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, результирующее движение эквивалентно только одному вращению вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O_3, с угловой скоростью, равной угловой скорости заданного вращения.

Третий случай. Скорость поступательного движения $\mathbf{v}_0$ направлена под углом φ к угловой скорости ω вращательного движения (рис. 14.15). Этот случай легко приводится к первому. В самом деле, поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}_0$ можно сначала представить как совокупность двух поступательных движений со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, причем $\mathbf{v}_1 \parallel \omega$, $\mathbf{v}_2 \perp \omega$ (рис. 14.15) и $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0$.

Поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}_2$ (в соответствии со вторым случаем) можно заменить парой вращений (ω', ω''). Получилась система четырех движений ($\mathbf{v}_1$, ω'', ω', ω); при этом два последних движения (ω', ω) эквивалентны покою, следовательно, остается мгновенно-винтовое движение ($\mathbf{v}_1$, ω'').

Если скорости $\mathbf{v}_0$, ω постоянны, то движение будет винтовым. При этом ось винта отстоит от оси z_1 на расстоянии

$$d = \frac{v_2}{\omega} = \frac{v_0 \sin\varphi}{\omega}.$$

Шаг винта равен

$$h = \frac{2\pi v_0 \sin\varphi}{\omega}.$$

§ 14.8. Общий случай сложения движений твердого тела

Продолжим установленную в §§ 14.4 и 14.5 аналогию между угловыми скоростями и силами, приложенными к твердому телу, а также между скоростью поступательного движения и моментом пары сил. Эта аналогия объясняется тем, что угловая скорость ω тела и сила, приложенная к твердому телу, являются скользящими векторами. Можно показать (мы не будем останавливаться на доказательстве *)), что любая система скользящих векторов, независимо от их физической природы, эквивалентна одному скользящему вектору (главному вектору) и одной паре скользящих векторов, момент которой равен главному моменту.

Применительно к сложению движений твердого тела это означает следующее: *если тело участвует одновременно в n вращениях с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и в m поступательных движениях, скорости которых равны $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ (моменты пар вращений), то вся система этих движений эквивалентна совокупности одного вращательного и одного поступательного движений. Угловая скорость*

---

*) См., например, Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946, §§ 6—25; Меркин Д. Р. Алгебра свободных и скользящих векторов. — М.: Физматгиз, 1962.

ω результирующего вращения равна сумме (главному вектору) составляющих угловых скоростей

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n, \tag{14.22}$$

а скорость v_A результирующего поступательного движения равна сумме (главному моменту) моментов угловых скоростей ω_i относительно центра приведения A и скоростей v_i поступательных движений (моментов пар вращения):

$$v_A = M_A(\omega_1) + \cdots + M_A(\omega_n) + v_1 + \cdots + v_m, \tag{14.23}$$

причем ось вращения проходит через выбранный центр приведения A.

На рис. 14.16 показаны результирующая угловая скорость ω вращательного движения (главный вектор) и результирующая скорость v_A (главный момент) поступательного движения. Векторы v_A и ω можно рассматривать так же, как скорость полюса A и угловую скорость вращения тела относительно полюса (§ 12.4).

Покажем, что имеются два *кинематических инварианта*, аналогичных статическим инвариантам. Действительно, из равенства (14.22) следует, что главный вектор ω не зависит от выбора центра приведения A и, следовательно, представляет собой первый кинематический инвариант. По существу, инвариантность главного вектора тождественна с ранее доказанным утверждением о независимости

Рис. 14.16

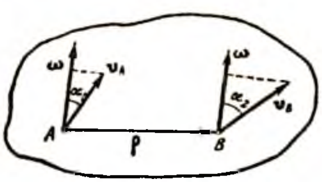


Рис. 14.17

угловой скорости тела от выбора полюса. В более узком смысле под первым инвариантом I_1 будем понимать квадрат модуля главного вектора

$$I_1 = \omega^2. \tag{14.24}$$

Прежде чем перейти ко второму инварианту, заметим, что при переходе к новому центру приведения, например точке B, главный момент v_B будет связан с главным моментом v_A относительно старого полюса формулой (рис. 14.17)

$$v_B = v_A + \omega \times \rho. \tag{14.25}$$

Эту формулу можно получить непосредственно из равенства (14.23). Она также следует из того, что главный момент v_B есть скорость точки B твердого тела и определяется формулой (12.20). Умножим скалярно обе части равенства (14.25) на вектор ω:

$$v_B \cdot \omega = v_A \cdot \omega + (\omega \times \rho) \cdot \omega.$$

ТОМ ВТОРОЙ

ДИНАМИКА

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1.1. Предмет и задачи динамики

Два предыдущих раздела курса механики — статика и кинематика — в сущности, мало связаны между собой. Каждому из них соответствует свой особый круг понятий, задач и методов их решения. В статике рассматриваются задачи о равновесии, а также задачи об эквивалентных преобразованиях систем сил; при таких преобразованиях даже не ставится вопрос о том, какое движение тела вызывают приложенные силы. В кинематике изучается движение «само по себе», вне связи с теми силами, под действием которых оно происходит.

Изолированное рассмотрение двух указанных проблем вызывается чисто методическими соображениями построения курса механики и, строго говоря, не вытекает из существа задач механики. Дело в том, что между действующими силами и движением существует глубокая внутренняя связь, которая отмечается уже в самом определении понятия силы. Эта связь принимается во внимание в динамике, предметом которой является изучение движения с учетом действующих сил.

Среди практических задач механики лишь небольшое число допускает чисто статическое или чисто кинематическое исследование: в большинстве случаев необходимо полное, т. е. динамическое изучение тех или иных механических явлений. При этом используются установленные в статике способы приведения сил, а также разработанные в кинематике методы описания и изучения движения; поэтому статику и кинематику можно рассматривать как введение в динамику, хотя они имеют и самостоятельное значение.

При всем разнообразии динамических задач выделяют две их категории. К первой категории относятся задачи, в которых движение тела (или механической системы) является заданным, и требуется найти силы, под действием которых это движение происходит (*первая задача*). В другую категорию входят задачи противоположного характера: в них силы являются заданными, а движение — искомым (*вторая задача*). Эти задачи называются *основными задачами динамики*.

При формулировании основных законов динамики пользуются моделью материальной точки, под которой понимают геометрическую точку, наделенную конечной массой, т. е. в сущности под *материальной точкой* понимают тело конечной массы, размерами и различием в движении отдельных точек которого по условиям задачи можно пренебречь. В дальнейшем будет показано, что поступательно движущееся тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

§ 1.2. Инерциальные системы отсчета. Основное уравнение динамики точки

В основании динамики лежат законы, впервые в наиболее полном и законченном виде сформулированные Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

В качестве первого закона Ньютон принял принцип инерции, открытый Галилеем, который можно сформулировать следующим образом: *изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.*

Под изолированной материальной точкой понимается материальная точка, которая не взаимодействует с другими телами или когда силы, действующие на точку, взаимно уравновешиваются.

Важнейшим обстоятельством при изучении движения тел относительно друг друга является выбор системы отсчета, что в свою очередь связано с принятым представлением о пространстве и времени. Естественно поставить вопрос: по отношению к какой же системе отсчета справедлив принцип инерции?

Ньютон, формулируя законы динамики, ввел в рассмотрение модели пространства и времени, которые предполагают наличие абсолютного неподвижного евклидова трехмерного пространства и абсолютного времени, т. е. времени, одинаково текущего для всех наблюдателей, где бы они ни находились и каково бы ни было их движение.

Исходя из этого представления о пространстве и времени, Ньютон и предполагал возможность существования абсолютной, неподвижной системы отсчета (системы координат), не связанной с материальными телами; для такой системы отсчета он и считал справедливым принцип инерции.

Последующее развитие представлений о пространстве привело к полному отрицанию понятия абсолютного пространства. Поэтому понятия «покой», «постоянная скорость» и т. п. лишены объективного смысла: пользуясь этим термином, необходимо указать, в какой системе отсчета рассматривается движение. Но движение, происходящее с постоянной скоростью в одной системе отсчета, может представляться ускоренным в другой системе отсчета; поэтому принцип инерции не обладает универсальностью, хотя, как показывают наблюдения, в некоторых системах отсчета принцип инерции оказывается справедливым.

Введем определение: системы отсчета, в которых справедлив принцип инерции, называются *инерциальными системами отсчета* (инерциальными системами координат). Подчеркнем, что об инерциальности или неинерциальности той или иной системы отсчета можно судить только на основе опыта. В частности, установлено, что *гелиоцентрическая система координат* (т. е. система координат с началом в центре Солнца и осями, направленными на «неподвижные» звезды) весьма близка к инерциальной системе.

Следует, однако, иметь в виду, что гелиоцентрическая система отсчета может считаться инерциальной только для движений внутри Солнечной системы, ибо центр масс Солнечной системы движется по криволинейной траектории относительно центра нашей Галактики с относительной скоростью, примерно равной $3 \cdot 10^5$ м/с, и ускорением порядка $3 \cdot 10^{-10}$ м/с^2.

Легко видеть, что система отсчета A_1, которая движется относительно инерциальной системы отсчета A_0 поступательно и начало которой имеет постоянную по модулю и направлению скорость, также является инерциальной. Это вытекает из того, что ускорение точки в системе A_1 не отличается от ускорения точки в системе A_0. В этом утверждении состоит *принцип относительности Галилея.*

Наоборот, в системах отсчета, движущихся относительно инерциальной системы отсчета не поступательно или не равномерно, принцип инерции не имеет места; такие системы называются *неинерциальными.* Если движение некоторой системы отсчета происходит с относительно малыми ускорениями относительно инерциальной системы отсчета, то при решении практических задач иногда можно пренебречь малой неинерциальностью (например, неинерциальностью геоцентрической системы, связанной с Землей); при этом приближенно принимают, что принцип инерции выполняется и в такой системе отсчета.

Развитие физики привело к концу XIX и началу XX века к необходимости создания других моделей пространства и времени. Так, например, в специальной теории относительности, в которой рассматриваются только инерциальные системы отсчета, моделью пространства и времени является четырехмерное пространство-время, т. е. пространство и время уже не считаются независимыми друг от друга.

Еще более сложная модель пространства и времени используется в общей теории относительности (теории тяготения), в которой рассматриваются неинерциальные системы отсчета. Эта модель уже предполагает зависимость пространства и времени от тяготеющих масс и полей.

Выводы как специальной, так и общей теории относительности при скоростях тел, значительно меньших скорости света, совпадают с выводами классической механики, а это значит, что классическая механика (механика Ньютона) является предельным случаем механики, основанной на принципах теории относительности.

Фундаментальное значение для всей динамики имеет следующий *основной закон динамики (второй закон Ньютона): сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление силы.* В аналитической форме этот закон представляется в виде основного уравнения динамики

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на материальную точку, $\mathbf{w}$ — ее ускорение, m — масса материальной точки, являющаяся мерой ее инертных свойств.

Из формулировки основного закона динамики вовсе не вытекает, что в динамике исследуются движения, происходящие только в инерциальных системах. В главе VI мы будем рассматривать движение в неинерциальных системах, однако таких, движение которых относительно инерциальной системы задано; на языке кинематики задача сведется к выражению относительных ускорений через абсолютные ускорения.

Отметим, что *равенство действия и противодействия* двух материальных точек (*третий закон Ньютона*), о котором уже говорилось в начале курса статики, является общим законом всей механики и справедливо не только в задачах статики, но и в задачах динамики.

Строго говоря, в соответствии с третьим законом Ньютона движение любого тела нужно рассматривать во взаимодействии с другими телами. Однако достаточно часто встречаются случаи, когда взаимодействующие тела имеют несоизмеримые массы и, следовательно, от одинаковых действий приобретают несоизмеримые по модулю ускорения. Так, ИСЗ движется под действием силы тяготения Земли, но влияние ИСЗ на движение последней ничтожно. Точно так же сильное электромагнитное поле практически не зависит от нахождения и движения в нем заряженной частицы; в таких случаях можно рассматривать движение одного тела без учета обратного влияния.

Приведем еще одно фундаментальное положение механики — *закон независимости действия сил: если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение точки складывается из тех ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности.*

Это значит, что при действии на материальную точку сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, каждая из которых сообщает точке соответственно ускорения $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ..., $\mathbf{w}_n$, ускорение материальной точки будет

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}_n.$$

На основании (1.1) можно записать

$$m\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m\mathbf{w}_2 = \mathbf{F}_2, \ldots, \quad m\mathbf{w}_n = \mathbf{F}_n.$$

Складывая между собой эти равенства, получим

$$m(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}_n) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n,$$

или, на основании закона независимости сил,

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k,$$

где $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Таким образом, движение материальной точки под действием сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ будет таким же, как и при действии одной силы, равной их геометрической сумме (равнодействующей).

В принципе основные законы динамики играют роль постулатов, проверенных не только прямыми экспериментами, но многовековой практикой человека.

В сжатом виде законы динамики можно сформулировать следующим образом:

1. Существует такая система отсчета, в которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы. Такая система отсчета называется *инерциальной* (иногда ее условно называют неподвижной).

2. В инерциальной системе отсчета *вектор ускорения материальной точки пропорционален вектору силы, действующей на эту точку.*

3. Две материальные точки взаимодействуют друг с другом так, что *силы их взаимодействия равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия.*

4. При действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно сумме ускорений, которые имела бы точка при действии каждой силы в отдельности.

Отсюда следует, что систему сил, действующих на точку, можно заменить их равнодействующей.

Из основного уравнения динамики следует линейная зависимость между модулем силы и модулем ускорения

$$F = mw. \tag{1.2}$$

Эта зависимость дает возможность опытного определения массы материальной точки. Здесь имеются два подхода.

Массу некоторой материальной точки можно принять за единичную массу m_0. Тогда, измеряя ускорения, приобретаемые под действием одной и той же силы двумя различными материальными точками (одна из них единичной массы), получим из (1.2)

$$F = mw, \qquad F = m_0 w_0. \tag{1.3}$$

Следовательно, $m = m_0 w_0 / w$. Масса m установлена. Отношение ускорений w_0/w определяет количество эталонных единиц массы, содержащихся в m.

При таком способе измерения массы единицы силы выражаются через единицы массы и единицы ускорения по формуле (1.2)

В международной системе единиц СИ единицей массы служит *килограмм* (кг). Единицы длины и времени — *метр* (м) и *секунда* (с).

Единица силы называется *ньютоном* (Н). Из (1.2) следует

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2.$$

Заметим, что часто применяется и более мелкая единица силы — *дина*:

$$1\ \text{дин} = 10^{-5}\ \text{Н} = 0{,}001\ \text{кг}\cdot 0{,}01\ \text{м/с}^2 = 1\ \text{г}\cdot\text{см/с}^2.$$

Аналогично вводится один килоньютон (кН), который равен 1000 ньютонов.

Рассмотрим теперь другую возможность использования основного закона динамики. Можно, как и в статике, назначить единицу силы. Для измерения сил могут, например, служить пружинные весы. За единицу силы часто принимают силу тяжести на поверхности Земли одного килограмма массы. Такую единицу называют *килограмм-силой*, но, в отличие от килограмма-массы, записывают при помощи символа кгс. Здесь масса измеряется в производных единицах, имеющих размерность

$$[m] = [F]\,[w]^{-1}.$$

Если оставить без изменения масштабы длин и времени, то получим техническую систему единиц. Единица массы называется в ней *технической единицей массы* (т. е. м.),

$$1\ \text{т. е. м.} = 1\ \text{кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}.$$

Ниже при решении задач мы будем пользоваться международной системой единиц. Разумеется, масштабы всех единиц в пределах той или другой системы будут выбираться, исходя из соображений удобства решения той или иной задачи.

Масса, определяемая из основного уравнения динамики (1.2), называется *инертной массой*.

Однако существует и другой путь измерения массы.

Из закона всемирного тяготения следует, что между двумя материальными точками массы m_1 и m_2, отстоящими друг от друга на расстоянии r, возникают силы взаимодействия, определяемые формулой

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.4}$$

где f — гравитационная постоянная.

Закон всемирного тяготения открывает новую возможность измерения массы. Пусть, например, $m_2 = M$ — масса Земли,

$m_1 = m_0$ — эталонная единичная масса, m — измеряемая масса. Тогда из (1.4) можно получить два соотношения:

$$F_0 = f\frac{m_0 M}{r^2}, \quad F_1 = f\frac{mM}{r^2}. \tag{1.5}$$

Предполагается, что обе массы m_0 и m помещены в одной и той же точке пространства.

Поделив одно из уравнений (1.5) на другое, получим

$$\frac{m}{m_0} = \frac{F_1}{F_0}, \quad m = \frac{F_1}{F_0} m_0. \tag{1.6}$$

Если r — радиус Земли, то очевидно, что F_1 и F_0 — силы притяжения на поверхности Земли. Как будет выяснено в главе VI, эти силы мало отличаются от сил тяжести. Масса, вычисляемая по формуле (1.6), называется «тяжелой» (или гравитационной) массой.

Таким образом, отношение масс равно отношению сил притяжения.

Итак, масса одной и той же материальной точки может быть вычислена из двух совершенно различных опытов по формулам

$$\frac{m}{m_0} = \frac{w_0}{w}, \quad \frac{m}{m_0} = \frac{F_1}{F_0}.$$

Точные эксперименты, проведенные для проверки равенства инертной и тяжелой масс, показали совпадение этих значений. Они послужили отправной точкой для создания Эйнштейном теории тяготения.

В специальной теории относительности показывается, что масса m тела зависит от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — так называемая *масса покоя*, v — скорость тела, c — скорость света. В классической механике рассматриваются движения тел, скорости которых значительно меньше скорости света. Поэтому, пренебрегая отношением v^2/c^2 по сравнению с единицей *), считают массу тела постоянной.

Заметим, что если записать в обозначениях дифференциального исчисления второй закон Ньютона в том виде, как он его сформулировал, то основное уравнение динамики (1.1) примет вид

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}.$$

Эта форма основного уравнения динамики точки, в отличие от уравнения (1.1), применима не только для тела постоянной массы, но и тел, масса которых зависит от скорости.

---

*) Так, например, для второй космической скорости (см. § 4.2) $v = 11{,}2$ км/с и $v^2/c^2 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-10}$.

§ 1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Положение материальной точки M в инерциальной системе отсчета будем определять ее радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Сила $\mathbf{F}$, действующая на точку, может зависеть от положения точки, т. е. от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (например, сила тяготения), скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ точки (например, сила сопротивления) и времени t *). Следовательно, в общем случае $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t)$ и основное уравнение динамики точки (1.1) можно записать в следующей форме:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t\right).$$

Это равенство, представляющее физический закон, устанавливающий связь между массой точки, ее ускорением и действующей на точку силой, можно рассматривать одновременно как дифференциальное уравнение, в котором радиус-вектор $\mathbf{r}$ является функцией, а время t — аргументом. Это уравнение *называется дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме.*

Дифференциальное уравнение в векторной форме, естественно, эквивалентно трем скалярным уравнениям. В зависимости от выбора осей координат, на которые проектируется основное уравнение динамики (1.1), можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Так, например, если спроектировать обе части уравнения (1.1) на неподвижные оси декартовых координат, то будем иметь

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \tag{1.7}$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ — проекции ускорения точки на координатные оси, F_x, F_y, F_z — проекции силы, действующей на точку, на те же оси.

Если пользоваться описанием движения в естественной форме, то нужно спроектировать основное уравнение динамики (1.1) на оси естественного трехгранника; в результате получим соотношения

$$mw_\tau = F_\tau, \quad mw_n = F_n, \quad mw_b = F_b, \tag{1.8}$$

где F_τ, F_n и F_b — проекции силы на касательную, главную нормаль и бинормаль. Вспоминая известные из кинематики выражения для проекций ускорения w_τ, w_n и w_b на те же направления, получим

$$m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = F_\tau, \quad \frac{m}{\rho}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = F_n, \quad 0 = F_b, \tag{1.9}$$

где ρ — радиус кривизны в текущей точке траектории. Из последнего уравнения следует, что сила $\mathbf{F}$, под действием которой дви-

*) Подробнее см. в § 1.5.

жется материальная точка, лежит в соприкасающейся к траектории точки плоскости.

В случае плоского движения точки, рассматриваемого в полярных координатах r, φ, имеем

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi, \tag{1.10}$$

где F_r и F_φ — проекции силы на направление радиуса-вектора и перпендикулярное к нему направление (в сторону увеличения полярного угла φ).

Мы ограничились наиболее употребительными случаями; аналогично можно получить записи дифференциальных уравнений движения материальной точки в других системах криволинейных координат (цилиндрической, сферической и т. д.).

§ 1.4. Первая задача динамики

Как было сказано в § 1.1, в практике возникают различные постановки динамических задач. Прежде всего остановимся на первой задаче, когда движение задано и необходимо найти силу, под действием которой происходит это движение.

Эта задача решается следующим образом: закон движения подставляется в дифференциальные уравнения (1.7), (1.9) или (1.10) (в зависимости от способа задания движения) и с помощью дифференцирования соответствующих функций определяются проекции силы. Проследим за ходом решения на примерах.

Задача 1.1. Материальная точка массы m движется в плоскости xy, причем закон движения задан в виде

$$x = a\sin(kt + \varepsilon), \quad y = b\sin(kt + \delta) + c,$$

где a, b, ε, δ, c — любые постоянные параметры. Найти силу, под действием которой происходит это движение.

В данном случае движение задано в декартовых координатах. Поэтому выражение координат из закона движения нужно подставить в дифференциальное уравнение (1.7). При этом находим

$$F_x = -mk^2 a\sin(kt + \varepsilon), \quad F_y = -mk^2 b\sin(kt + \delta)$$

или, приняв во внимание закон движения, получим

$$F_x = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y + mk^2 c.$$

Таким образом, сила, действующая на материальную точку, будет

$$\mathbf{F} = -mk^2\mathbf{r} + mk^2 c\mathbf{j},$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы осей x и y. Следовательно, материальная точка движется под действием силы притяжения, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию от начала координат до материальной точки, и постоянной силы, параллельной оси y.

Задача 1.2. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью v. Найти силу, под действием которой происходит такое движение.

Здесь движение задано естественным способом; поэтому согласно (1.9) находим $F_\tau = 0$, $F_n = mv^2/r$, т. е. заданное движение материальной точки происходит под действием силы, постоянной по модулю и направленной по радиусу к центру окружности.

Задача 1.3. Материальная точка массы m движется по гладкой плоскости. Ее полярные координаты r и φ изменяются по закону (рис. 1.1) $r = at + b$, $\varphi = ct + d$, где a, b, c и d — положительные постоянные. Определить силу, под действием которой происходит это движение.

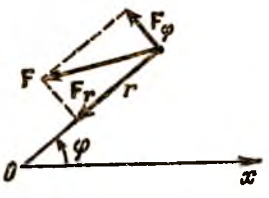


Рис. 1.1

Так как $\dot r = a$, $\ddot r = 0$, $\dot\varphi = c$, $\ddot\varphi = 0$, то согласно первому уравнению (1.10) получаем

$$F_r = -m(at+b)c^2 = -mc^2r,$$

т. е. составляющая силы, действующая на материальную точку вдоль радиуса, направлена к полюсу и ее модуль растет пропорционально r.

Согласно второму уравнению (1.10) имеем

$$F_\varphi = 2mac,$$

т. е. составляющая силы, действующая на материальную точку по перпендикуляру к радиусу, постоянна. Модуль силы, действующей на точку, определяется равенством

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2} = mc\sqrt{c^2r^2 + 4a^2}.$$

§ 1.5. Вторая задача динамики

Для определенности изложения будем рассматривать движение в декартовой системе координат, опираясь на уравнения (1.7). Как уже отмечалось ранее, сила (и ее проекции), действующая на материальную точку, в общем случае может зависеть от положения точки, ее скорости и времени.

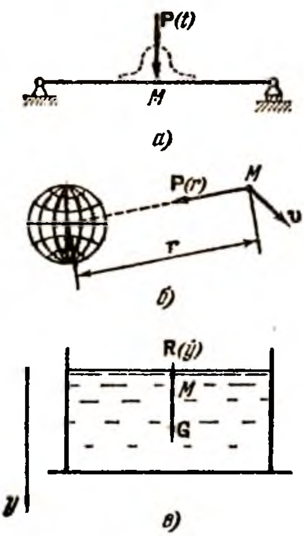


Рис. 1.2

Приведем несколько примеров переменных сил. На упругой балке установлен (рис. 1.2, *а*) не вполне уравновешенный двигатель. При заданном режиме работы двигателя сила давления на конструкцию, обусловленная неуравновешенностью, является функцией времени; заметим, что эта сила принимается нами не зависящей от того, как под ее воздействием колеблется конструкция. В этих условиях на конструкцию действует *сила* **P** (t), *заданная как явная функция времени* t (здесь мы не касаемся вопроса о том, каким образом указанная конструкция схематизируется в виде материальной точки). Обратимся к другому примеру.

С Земли произведен пуск космического корабля. После некоторого, сравнительно короткого промежутка времени двигатели выключаются, и корабль продолжает движение под действием практически единственной силы — силы притяжения

Земли (рис. 1.2, *б*); притяжение других небесных тел вначале движения пренебрежимо мало. Согласно закону всемирного тяготения эта сила не постоянна и постепенно убывает с увеличением расстояния r корабля от Земли. Здесь *сила* $\mathbf{P}(r)$ *притяжения зависит от положения корабля*, т. е. определяется его координатами.

В качестве третьего примера рассмотрим силы, под действием которых происходит падение материальной точки в вязкой жидкости (рис. 1.2, *в*). На материальную точку действуют сила тяжести $\mathbf{G}$ и сила сопротивления жидкости $\mathbf{R}$. Как показывает опыт, сила $\mathbf{R}$ *зависит только от скорости падения*, т. е. $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\dot{y})$.

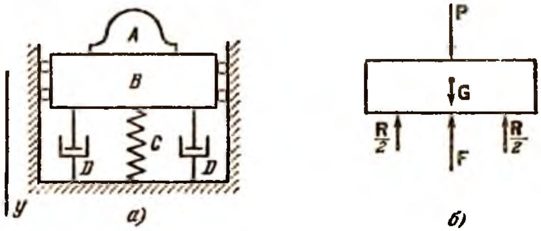


Рис. 1.3

В начале процесса, когда скорость мала, эта сила также невелика, но с возрастанием скорости растет и сила сопротивления.

Таким образом, зависимости, определяющие изменение переменных сил, весьма разнообразны по своей природе; можно указать три простейших типа переменных сил:

а) силы, заданные как явные функции времени и не зависящие от движения материальной точки;

б) силы, зависящие от координат материальной точки;

в) силы, зависящие от скорости материальной точки.

Но возможны случаи, когда сила, действующая на точку, может быть одновременно функцией от нескольких аргументов. Например, действующая на космический корабль сила аэродинамического сопротивления при его движении в атмосфере (при взлете или снижении) зависит и от положения корабля, и от его скорости, так как плотность атмосферы убывает с высотой над поверхностью Земли.

Чаще всего на материальную точку одновременно действует несколько сил различных типов.

На рис. 1.3, *а* представлен пример, иллюстрирующий одновременное действие сил различной природы. Неуравновешенный двигатель *A* установлен на массивном фундаменте *B*, который в свою очередь установлен на амортизаторах (на рисунке они схематично изображены одной пружиной *C* и гидравлическими амортизаторами *D*).

В такой конструкции фундамент может иметь малые вертикальные поступательные перемещения (за счет деформации пружин), а при работе двигателя возникают колебания системы.

На фундамент действуют силы четырех типов. Во-первых, сила тяжести самого фундамента, обозначенная на рис. 1.3, *б* через **G**:

$$\mathbf{G} = \text{const}. \tag{1.11}$$

Во-вторых, сила действия двигателя на фундамент, обозначенная на рисунке через **P**. Эта сила, меняющаяся во времени заданным образом, представляет переменное динамическое давление на фундамент, зависящее от величины неуравновешенных масс двигателя и угловой скорости вращения его ротора:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t). \tag{1.12}$$

В-третьих, на фундамент действует реакция пружины, которая в любой момент времени определяется деформацией пружины (т. е. перемещением фундамента):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(y) \tag{1.13}$$

(y — вертикальное перемещение фундамента в данный момент).

Наконец, в-четвертых, на фундамент действуют реакции гидравлических амортизаторов D. Опыт показывает, что их реакции полностью определяются скоростью движения поршня в цилиндре амортизатора, т. е. скоростью самого фундамента:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\dot{y}). \tag{1.14}$$

При поступательном движении фундамента его можно рассматривать как материальную точку; дифференциальное уравнение движения этой точки (в проекции на ось y, которую будем считать направленной вниз) имеет вид

$$m\ddot{y} = G_y + P_y(t) + F_y(y) + R_y(\dot{y}). \tag{1.15}$$

Для того чтобы найти движение фундамента, необходимо решить это дифференциальное уравнение.

Подобным же образом дело обстоит и в других задачах. Следовательно, в общем случае вторая задача динамики приводит к необходимости решения системы трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t), \\ m\ddot{y} &= F_y(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t), \\ m\ddot{z} &= F_z(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t), \end{aligned} \tag{1.16}$$

в которые искомые функции x, y, z входят вместе со своими первыми и вторыми производными по времени. Уравнения (1.16) представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций x, y и z и, как уже отмечалось, называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки.*

Предположим, что нам удалось проинтегрировать систему уравнений (1.16) и получить общее решение

$$\begin{aligned} x &= x\,(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_6),\\ y &= y\,(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_6),\\ z &= z\,(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_6), \end{aligned} \tag{1.17}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные интегрирования. В каждую из функций (1.17) могут входить все шесть постоянных, так как в общем случае уравнения (1.16) не являются независимыми друг от друга.

Если теперь в соотношениях (1.17) постоянным интегрирования давать различные числовые значения, то можно получить совокупность различных решений. Это значит, что под действием одних и тех же сил, действующих на материальную точку, она может совершать различные движения.

Например, тело, отпущенное без начальной скорости, будет падать под действием силы тяжести вертикально вниз по прямой линии. Это же тело, брошенное под углом к горизонту, будет двигаться под действием той же силы тяжести (сопротивлением воздуха пренебрегаем) по некоторой кривой.

Таким образом, задания одних сил, действующих на материальную точку, еще недостаточно для определения конкретного закона ее движения. Для того чтобы выбрать из многообразия решений (1.17) то, которое соответствует решаемой нами конкретной задаче, нужно задать еще начальные условия движения. Начальное состояние движения точки определяется ее положением и ее скоростью в начальный момент времени, т. е. радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}\,(0)$ и скоростью $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}\,(0)$ при $t = 0$.

В декартовой системе координат нужно задать соответствующие проекции:

при $t = 0$

$$\begin{aligned} &x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,\\ &\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Совокупность этих данных называется *начальными условиями движения*.

Для выбора значений шести постоянных интегрирования, входящих в общее решение (1.17) и соответствующих решаемой конкретной задаче, используются начальные условия движения (1.18). Это делается следующим образом: во-первых, требуем, чтобы при $t = 0$ значения x, y и z, определяемые выражениями (1.17), равнялись соответственно x_0, y_0 и z_0; во-вторых, продифференцировав по времени выражения (1.17):

$$\dot{x} = \dot{x}\,(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_6), \quad \dot{y} = \dot{y}\,(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_6),$$
$$\dot{z} = \dot{z}\,(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_6),$$

требуем, чтобы при $t = 0$ эти $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ равнялись соответственно $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$.

Таким образом, мы получим шесть уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0, C_1, \ldots, C_6), & \dot{x}_0 &= \dot{x}(0, C_1, \ldots, C_6), \\ y_0 &= y(0, C_1, \ldots, C_6), & \dot{y}_0 &= \dot{y}(0, C_1, \ldots, C_6), \\ z_0 &= z(0, C_1, \ldots, C_6), & \dot{z}_0 &= \dot{z}(0, C_1, \ldots, C_6). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Решая эти уравнения относительно постоянных C_i, найдем

$$C_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{1.20}$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение (1.17), получим решение задачи, соответствующее данным начальным условиям:

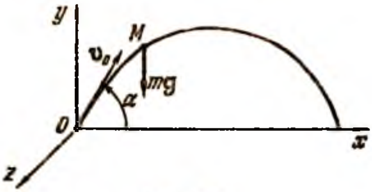


Рис. 1.4

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \tag{1.21}$$

В курсах математики доказывается, что при определенных условиях, накладываемых на правые части уравнений (1.16) (если задача механики поставлена правильно, то эти условия обычно выполняются), решение (1.21) единственное. Это значит, что при данных начальных условиях и данных силах движение точки полностью и единственным образом определено.

Следует заметить, что наибольшие затруднения обычно представляет первый этап — получение общего решения (1.17); после этого постоянные интегрирования определяются без особых трудностей.

Покажем на примере решение второй задачи динамики, причем ограничимся тем случаем, когда на материальную точку действует постоянная сила.

Задача 1.4. Исследовать движение материальной точки M массы m под действием силы тяжести; сопротивлением атмосферы пренебречь (рис. 1.4).

Выберем систему координатных осей так, чтобы ее начало O совпадало с начальным положением точки M, ось y направим вертикально вверх, а оси x и z — горизонтально. Ось x направим так, чтобы начальная скорость $\mathbf{v}_0$ была расположена в плоскости xy. Из рассмотрения рис. 1.4 следует, что проекции действующей на точку силы тяжести на оси координат равны $F_x = 0$, $F_y = -mg$, $F_z = 0$. Следовательно, дифференциальные уравнения движения (1.16) в данном случае будут иметь вид

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg, \quad m\ddot{z} = 0, \tag{1.22}$$

или, после сокращения на m,

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим общее решение

$$x = C_1 t + C_4, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_5, \quad z = C_3 t + C_6. \tag{1.23}$$

Для определения постоянных интегрирования C_i необходимо указать начальное состояние движения точки, т. е. ввести соответствующие начальные условия. Пусть начальная скорость $\mathbf{v}_0$ составляет с осью x угол α. Тогда в силу выбора координатной системы будем иметь следующие начальные условия:
при $t = 0$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \dot{x} = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha, \quad \dot{z}_0 = 0.$$

В соответствии с (1.23) имеем

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2, \quad \dot{z} = C_3. \tag{1.24}$$

Используя теперь начальные условия, найдем постоянные интегрирования

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0, \quad C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя эти значения C_i в общее решение (1.23), получим уравнения движения материальной точки, брошенной под углом к горизонту:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \tag{1.25}$$

Из этих уравнений следует, что движение точки под действием силы тяжести происходит в вертикальной плоскости xOy ($z = 0$). Траекторией точки будет парабола:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1.26}$$

Таким образом, задача решена. Дальнейшее исследование траектории (1.26) позволит определить дальность бросания и наибольшую высоту подъема. После этого можно поставить задачу об оптимальных условиях бросания, например, выяснить, при каком угле α достигается максимальная дальность (если считать значение v_0 заданным).

1.6. Прямолинейное движение материальной точки

Выясним, при каких условиях материальная точка совершает прямолинейное движение.

Пусть материальная точка движется по прямой линии, которую мы примем за ось x; тогда во все время движения будет $y = z = 0$. Следовательно, на основании уравнений (1.16) должны тождественно выполняться равенства

$$F_y = 0, \quad F_z = 0, \tag{1.27}$$

т. е. если точка совершает прямолинейное движение, то сила, под действием которой происходит это движение, должна иметь линию действия, совпадающую с прямой, вдоль которой движется точка.

Однако необходимое условие (1.27) прямолинейного движения не является достаточным. Например, при движении точки под действием силы тяжести проекции силы на координатные оси, лежащие в горизонтальной плоскости, равны нулю, а точка движется не по прямой, а по параболе.

Для того чтобы материальная точка двигалась по прямой линии, необходимо и достаточно, чтобы действующая на нее сила была все время параллельна начальной скорости точки. Если же начальная скорость равна нулю, то движение будет происходить по прямой, параллельной направлению силы.

В самом деле, если направить координатные оси так, чтобы ось x была направлена по начальной скорости точки, а начало координат было совмещено с начальным положением точки, то условия (I.27) будут соблюдены и, следовательно,

$$m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0,$$

откуда

$$\dot{y} = C_1, \quad \dot{z} = C_2 \quad \text{и} \quad y = C_1 t + C_3, \quad z = C_2 t + C_4.$$

Имеем начальные условия: при $t = 0$ $y = 0$, $z = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$; тогда

$$y \equiv 0, \quad z \equiv 0, \tag{I.28}$$

т. е. траектория движения точки — прямая линия — ось x. Таким образом, показана и достаточность условий прямолинейности движения.

Ниже рассматриваются некоторые задачи о прямолинейном движении материальной точки, причем во всех случаях координатную ось x мы будем совмещать с прямой, вдоль которой происходит движение. В таких задачах действующая на точку сила полностью определяется ее единственной проекцией F_x.

Рассмотрим несколько случаев прямолинейного движения материальной точки, в которых можно заранее указать методы интегрирования дифференциальных уравнений движения; каждый из случаев относится к определенному характеру действующей силы.

1. Прямолинейное движение материальной точки под действием силы, зависящей только от времени. Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x(t), \tag{I.29}$$

откуда

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Интегрируя, получим

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int F_x(t)\,dt + C_1,$$

где под $\int F_x(t)\,dt$ понимается первообразная функция. Интегрируя далее, будем иметь

$$x = \frac{1}{m} \int \left[\int F_x(t)\,dt \right] dt + C_1 t + C_2. \tag{I.30}$$

2. Прямолинейное движение материальной точки под действием силы, зависящей только от положения точки. В этом случае дифференциальное уравнение движения будет

$$m\ddot{x} = F_x(x). \tag{1.31}$$

Вводя $v = \dot{x}$, получим

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение примет вид

$$v\,dv = \frac{1}{m}F_x(x)\,dx.$$

После интегрирования найдем

$$v^2 = \frac{2}{m}\int F_x(x)\,dx + C_1,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\int F_x\,dx + C_1},$$

или, переходя к проекции скорости,

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x\,dx + C_1}\ ^{*)}, \quad dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x\,dx + C_1}}.$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь

$$t = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)\,dx + C_1}} + C_2.$$

Вводя обозначение

$$\Phi(x,\ C_1,\ C_2) = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)\,dx + C_1}} + C_2,$$

получим

$$t = \Phi(x,\ C_1,\ C_2).$$

Решая это уравнение относительно x, найдем зависимость x от времени и постоянных интегрирования:

$$x = \varphi(t,\ C_1,\ C_2). \tag{1.32}$$

Таким образом, задача решается при помощи двух квадратур.

---

*) Здесь и в дальнейшем знак перед корнем выбирается в зависимости от направления движения точки в рассматриваемом промежутке времени. Если $\dot{x}_0 > 0$, то берется знак «плюс», при противоположном случае — «минус». Знак может изменяться на противоположный в моменты, когда $\dot{x} = 0$.

3. Прямолинейное движение точки под действием силы, зависящей только от скорости точки. Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}) \tag{1.33}$$

с помощью замены $v = \dot{x}$ преобразуется к виду

$$\frac{dv}{F_x(v)} = \frac{1}{m}\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int \frac{dv}{F_x(v)} + C_1 = \frac{1}{m}\,t.$$

Если ввести обозначение

$$\Phi(v,\ C_1) = m\left[\int \frac{dv}{F_x(v)} + C_1\right],$$

то последнее равенство примет вид

$$t = \Phi(v,\ C_1),$$

или

$$t = \Phi(\dot{x},\ C_1).$$

Решая это уравнение относительно $\dot{x}$, будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ C_1),$$

откуда

$$x = \int f(t,\ C_1)\,dt + C_2. \tag{1.34}$$

Если уравнение $t = \Phi(\dot{x},\ C_1)$ нельзя решить относительно $\dot{x}$, то поступим следующим образом: вводя преобразование

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,v,$$

перепишем дифференциальное уравнение (1.33) в виде

$$\frac{mv\,dv}{F_x(v)} = dx,$$

откуда

$$x = m\int \frac{v\,dv}{F_x(v)} + C_1'.$$

Из этого уравнения находим $v = \dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x,\ C_1')$$

и после интегрирования будем иметь

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1')} + C_2',$$

откуда и определим x как функцию времени t.

§ 1.7. Задачи

Задача 1.5. На покоящуюся материальную точку массы m в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, проекция которой на ось x выражается зависимостью $P_x = P \sin \omega t$. Найти закон движения и сравнить решение со случаем, когда указанная проекция изменяется по закону $P_x = P \cos \omega t$.

Совмещая начало оси x с начальным положением точки, получим дифференциальное уравнение движения в виде (1.29):

$$m\ddot{x} = P \sin \omega t.$$

Согласно (1.30) записываем

$$x = \frac{1}{m} \int \left[\int P \sin \omega t \, dt \right] dt + C_1 t + C_2,$$

т. е.

$$x = -\frac{P}{m\omega^2} \sin \omega t + C_1 t + C_2.$$

Подчиняя решение начальным условиям: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ при $t = 0$, находим

$$C_1 = P/(m\omega), \quad C_2 = 0.$$

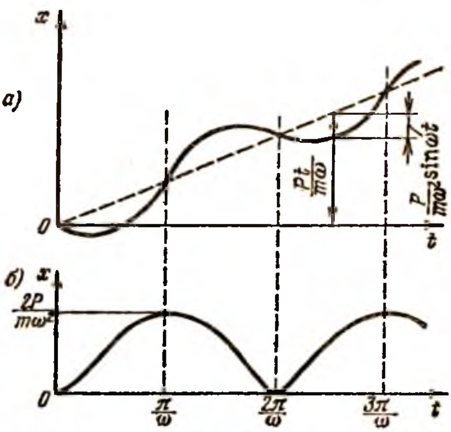


Рис. 1.5

Следовательно, материальная точка движется вдоль оси x по закону

$$x = \frac{P}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t).$$

Из графика функции $x(t)$, изображенного на рис. 1.5, *а*, видно, что точка постепенно удаляется от начального положения, совершая колебания около режима постоянной скорости.

Если на материальную точку действует косинусоидальная сила, то дифференциальное уравнение движения (1.29) будет

$$m\ddot{x} = P \cos \omega t$$

и в соответствии с (1.30) общее решение имеет вид

$$x = -\frac{P}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1' t + C_2'.$$

Из предыдущих начальных условий находим $C_1' = 0$, $C_2' = P/(m\omega^2)$; поэтому закон движения выражается при помощи соотношения

$$x = \frac{P}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

На рис. 1.5, *б* изображен график этой функции; движение носит колебательный характер, причем точка не удаляется от начального положения дальше чем на

$$x_{max} = \frac{2P}{m\omega^2}.$$

Мы получили на первый взгляд неожиданный результат. В обоих случаях на точку действовала периодическая сила, изменяющаяся по гармоническому закону; начальные условия также совпадали, однако отклонения точки от начального положения имеют различный характер. В первом случае наблюдается систематическое удаление точки от ее начального положения, во втором — удаления нет, движение имеет периодический характер.

С формально математической точки зрения ничего удивительного здесь нет. Периодичность изменения ускорения (второй производной от координаты) вовсе не влечет за собой периодичности изменения скорости (первой производной) и тем более самой координаты. Применительно к разобранному примеру можно привести следующие физические соображения. В первом случае сила, а значит, и ускорение меняются по синусоидальному закону $F = P \sin \omega t$. Это значит, что в течение полупериода $(0 \leqslant t \leqslant \pi/\omega)$ ускорение было положительно и точка набирала скорость. Затем направление силы и, следовательно, ускорение изменялись и скорость начинала убывать, так что к концу периода $t = 2\pi/\omega$ она достигала нуля. Таким образом, проекция скорости $\dot{x}$ была все время одного знака ($\dot{x} \geqslant 0$). Отсюда ясно, что координата x за это время могла только возрастать и к началу следующего цикла изменения силы она получила конечное приращение. Такое же приращение отклонения произойдет за второй и последующие периоды.

Во втором же случае к концу первого полупериода проекция скорости окажется равной нулю, в течение последующего полупериода она окажется отрицательной, и изменяясь по синусоидальному закону, в конце периода станет равной нулю. Такая закономерность скорости приводит к периодичности отклонения x.

Задача 1.6. На материальную точку массы m действует сила отталкивания F_x, пропорциональная координате x и равная $F_x = cx$, где c — коэффициент пропорциональности. Найти движение точки, если в начальный момент $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$m\ddot{x} = cx.$$

Уравнение движения имеет ту же форму, что и (1.31), однако здесь целесообразнее воспользоваться не общим приемом, а учесть то обстоятельство, что дифференциальное уравнение является линейным. Перенесем все члены этого уравнения в левую часть и разделим его на массу m:

$$\ddot{x} - \frac{c}{m}x = 0.$$

Согласно общей теории линейных однородных дифференциальных уравнений будем искать решение в форме $x = Ce^{\alpha t}$. Отсюда

$$\ddot{x} = C\alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Внесем эти значения для x и $\ddot{x}$ в дифференциальное уравнение и сократим его на $Ce^{\alpha t}$, в результате чего получим характеристическое уравнение

$$\alpha^2 - k^2 = 0,$$

где $k = \sqrt{c/m}$. Решая характеристическое уравнение, найдем $\alpha_1 = -k$, $\alpha_2 = k$. Так как оба корня оказались вещественными, то общее решение дифференциального уравнения будет

$$x = C_1e^{-kt} + C_2e^{kt},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий движения.

Имеем

$$\dot{x} = -C_1ke^{-kt} + C_2ke^{kt}.$$

Подставив в эти выражения для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ значения $t = 0$, $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$, получим

$$0 = C_1 + C_2, \quad v_0 = -C_1k + C_2k.$$

Отсюда $C_1 = -v_0/(2k)$, $C_2 = v_0/(2k)$. Подставим эти значения для C_1 и C_2 в выражение для x:

$$x = \frac{v_0}{k}\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} kt,$$

где гиперболический синус $\operatorname{sh} kt$ определен равенством $\operatorname{sh} kt = (e^{kt} - e^{-kt})/2$.

Полученное решение удовлетворяет выбранным начальным условиям (при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = v_0$). Если начальные условия будут при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, то точка будет двигаться по закону

$$x = x_0\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = x_0 \operatorname{ch} kt$$

($\operatorname{ch} kt = (e^{kt} + e^{-kt})/2$ — гиперболический косинус). График этой функции изображен на рис. 1.6 сплошной линией.

При относительно больших значениях времени второй член $(x_0/2)e^{-kt}$ становится пренебрежимо малым и можно принять $x \approx (x_0/2)e^{kt}$ (см. штриховую линию на рис. 1.6).

Заметим, что это приближенное решение не удовлетворяет начальным условиям.

Рис. 1.6

Задача 1.7. Считая, что при прямолинейном движении корабля возникает сила сопротивления, пропорциональная квадрату его скорости, определить путь, который пройдет корабль после остановки двигателей за время, в течение которого скорость корабля уменьшится в два раза.

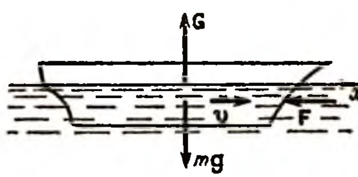


Рис. 1.7

Обозначим через m массу корабля и через v_0 его скорость в момент остановки двигателей. На корабль действуют три силы: сила тяжести mg, архимедова сила $\mathbf{G}$ и сила сопротивления $\mathbf{F}$, причем $F = \alpha v^2$, где α — постоянный коэффициент жидкостного сопротивления. Первые две силы вертикальны, а сила сопротивления горизонтальна и направлена в сторону, противоположную скорости корабля (рис. 1.7).

Напишем основное уравнение динамики (1.1) для рассматриваемого примера:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{q} + \mathbf{G} + \mathbf{F}.$$

В проекции на горизонтальную ось x получим

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x^2.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{m\,dv_x}{v_x^2} = -\alpha\,dt.$$

После интегрирования получим

$$-\frac{m}{v_x} = -\alpha t + C_1. \tag{1.35}$$

Условимся отсчитывать время с момента остановки двигателей корабля. Тогда при $t = 0$ $v_x = v_0$ и, следовательно, $C_1 = -m/v_0$.

Выражение (1.35) теперь может быть записано в виде

$$v_x = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}. \tag{1.36}$$

Так как $v_x = dx/dt$, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{m}{\alpha}\ln(m + \alpha v_0 t) + C_2. \tag{1.37}$$

Постоянную C_2 найдем из условия: $x = 0$ при $t = 0$, т. е. $0 = (m/\alpha)\ln m + C_2$. Отсюда $C_2 = -(m/\alpha)\ln m$, и равенство (1.37) принимает вид

$$x = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{m + \alpha v_0 t}{m}.$$

Подставив сюда соотношение

$$\frac{m + \alpha v_0 t}{m} = \frac{v_0}{v_x},$$

получаемое из формулы (1.36), окончательно имеем

$$x = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{v_0}{v_x}.$$

Полагая $v_x = v_0/2$, найдем путь, который пройдет корабль за время, в течение которого его скорость уменьшится вдвое:

$$S = \frac{m}{\alpha}\ln 2.$$

Задача 1.8. Точка массы m падает на Землю из состояния покоя под действием постоянной силы тяжести. Найти скорость и закон движения точки, если сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ($R = k^2mv^2$, где k — постоянная).

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - mk^2\dot{x}^2,$$

т. е. соответствует форме (1.33).

Последуем указанному выше пути решения и обозначим $\dot{x} = v$. Это позволит привести уравнение движения к уравнению первого порядка

$$\frac{dv}{dt} = g - k^2v^2,$$

или

$$\frac{dv}{g-k^2v^2}=dt.$$

После интегрирования получим

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}}\ln\frac{\sqrt{g}+kv}{\sqrt{g}-kv}=t+C_1.$$

Так как движение начинается из состояния покоя, то $v=0$ при $t=0$ и $C_1=0$.
Следовательно, имеем

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}}\ln\frac{\sqrt{g}+kv}{\sqrt{g}-kv}=t,$$

откуда

$$v=\frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{e^{2kt\sqrt{g}}-1}{e^{2kt\sqrt{g}}+1}.$$

Из этой формулы следует, что $v\to\sqrt{g}/k$ при $t\to\infty$, т. е. скорость падения стремится к определенному пределу.

Перейдем теперь к нахождению закона движения. Так как $v=dx/dt$, то

$$dx=\frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{e^{2kt\sqrt{g}}-1}{e^{2kt\sqrt{g}}+1}\,dt,$$

или

$$dx=\frac{1}{k^2}\,\frac{d\left(e^{kt\sqrt{g}}+e^{-kt\sqrt{g}}\right)}{e^{kt\sqrt{g}}+e^{-kt\sqrt{g}}};$$

отсюда

$$x=\frac{1}{k^2}\ln\left(e^{kt\sqrt{g}}+e^{-kt\sqrt{g}}\right)+C_2.$$

При $t=0$ $x=0$, следовательно, $C_2=-\frac{1}{k^2}\ln 2$. Таким образом, имеем

$$x=\frac{1}{k^2}\ln\frac{e^{kt\sqrt{g}}+e^{-kt\sqrt{g}}}{2}.$$

Даже при сравнительно небольших значениях времени $e^{kt\sqrt{g}}\gg e^{-kt\sqrt{g}}$; поэтому, пренебрегая слагаемым $e^{-kt\sqrt{g}}$, получим приближенно

$$x=\frac{1}{k^2}\ln\frac{e^{kt\sqrt{g}}}{2}=\frac{\sqrt{g}}{k}t-\frac{\ln 2}{k^2},$$

т. е. движение по истечении некоторого промежутка времени становится практически равномерным.

Как и в предыдущем примере, это решение вследствие своей приближенности не удовлетворяет начальным условиям; это можно понять, рассматривая рис. 1.8, где графически представлены точное и приближенное решения.

Задача 1.9. Материальная точка начинает движение в вязкой жидкости с горизонтальной скоростью, равной по модулю v_0. Движение начинается из точки с координатами $x = 0$, $y = h$, $z = 0$ (рис. 1.9). На точку действуют сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости ($R = kmv$, где k — коэффициент пропорциональности). Найти закон движения точки.

В качестве координатной плоскости xy примем вертикальную плоскость, проходящую через направление начальной скорости точки; ось y направим вертикально вверх.

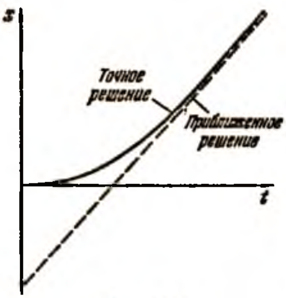


Рис. 1.8

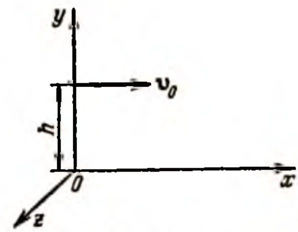


Рис. 1.9

Силы, действующие на точку, равны

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \qquad \mathbf{R} = -km\mathbf{v}$$

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}, \qquad m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg, \qquad m\ddot{z} = -km\dot{z},$$

или

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0, \qquad \ddot{y} + k\dot{y} = -g, \qquad \ddot{z} + k\dot{z} = 0$$

Система уравнений движения распадается на три линейных уравнения, общие решения которых будут

$$x = C_1 + C_2e^{-kt}, \qquad y = C_3 + C_4e^{-kt} - \frac{g}{k}t, \qquad z = C_5 + C_6e^{-kt}.$$

Так как

$$\dot{x} = -C_2ke^{-kt}, \quad \dot{y} = -C_4ke^{-kt} - \frac{g}{k}, \qquad \dot{z} = -C_6ke^{-kt},$$

то при начальных условиях:

при $t = 0$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = h, \quad z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0$$

получим

$$C_1 = \frac{v_0}{k}, \qquad C_2 = -\frac{v_0}{k}, \qquad C_3 = h + \frac{g}{k^2}, \qquad C_4 = -\frac{g}{k^2},$$

$$C_5 = 0, \qquad C_6 = 0$$

и тогда

$$x = v_0\frac{1 - e^{-kt}}{k}, \qquad y = h + g\frac{1 - e^{-kt} - kt}{k^2}, \qquad z = 0.$$

Отсюда следует, что движение точки будет происходить в вертикальной плоскости.

Для получения закона движения при отсутствии сопротивления среды следует k устремить к нулю; тогда получим

$$x = v_0t, \quad y = h - gt^2/2, \quad z = 0.$$

Глава II

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 2.1. Вводные замечания

Среди различных сил, которые могут действовать на материальную точку, особое место занимают *восстанавливающие силы*, т. е. силы, стремящиеся вернуть точку в положение равновесия. Такие силы зависят от отклонения точки от положения равновесия и направлены к положению равновесия.

Как мы увидим ниже, восстанавливающие силы придают движению материальной точки *колебательный характер*. Природа этих сил весьма разнообразна. Три случая показаны на рис. 2.1.

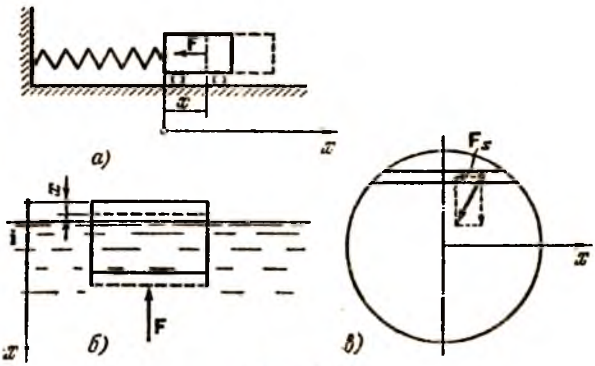


Рис. 2.1

В первом случае (рис. 2.1, *а*) восстанавливающая сила обусловлена упругими свойствами пружины и возникает вследствие деформации пружины. Во втором случае (рис. 2.1, *б*) при вертикальных отклонениях плавающего понтона от положения равновесия возникает дополнительная (архимедова) сила, также направленная против отклонения и играющая роль восстанавливающей силы. В третьем случае (рис. 2.1, *в*) имеется в виду материальная точка, находящаяся в прямолинейном сквозном канале, который проходит внутри Земли. Если тело отклонено от положения равновесия, возникает составляющая силы притяжения, направленная к положению равновесия.

Однако, кроме восстанавливающих сил, в подобных случаях одновременно действуют, как правило, также *силы сопротивления* $R(\dot{x})$, зависящие от скорости движения; таково в схеме рис. 2.1, *а* трение между телом и горизонтальной поверхностью, в схеме рис. 2.1, *б* — зависящее от скорости сопротивление воды, в схеме рис. 2.1, *в* — сопротивление воздуха и трение скольжения. Наконец, возможно, что к материальной точке приложена *возмущающая сила*, т. е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Настоящая глава посвящена систематическому исследованию всех вариантов сочетания указанных сил в случае прямолинейного движения материальной точки. Хотя эта задача представляет практический интерес и сама по себе, но еще более важно, что ее решение можно почти без всяких изменений использовать для многих других случаев колебаний.

Дело в том, что различные по своему физическому содержанию колебательные явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, поэтому выводы, полученные при изучении колебательного движения в какой-либо одной области, могут быть использованы и в других областях.

Таблица 1

Действующие силы	Дифференциальное уравнение	Наименование вида колебаний
Восстанавливающая сила $\mathbf{F}(x)$: $F_x = -cx$	$m\ddot{x} + cx = 0$	Свободные колебания
Восстанавливающая сила $\mathbf{F}(x)$ + сила сопротивления $\mathbf{R}(\dot{x})$: $F_x = -cx, \quad R_x = -b\dot{x}$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	Свободные колебания при наличии вязкого трения
Восстанавливающая сила $\mathbf{F}(x)$ + возмущающая сила $\mathbf{Q}(t)$: $F_x = -cx, \; Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + cx = Q_x(t)$	Вынужденные колебания
Восстанавливающая сила $\mathbf{F}(x)$ + сила сопротивления $\mathbf{R}(\dot{x})$ + возмущающая сила $\mathbf{Q}(t)$: $F_x = -cx, \; R_x(\dot{x}) = -b\dot{x}, \; Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q_x(t)$	Вынужденные колебания при наличии вязкого трения

Наиболее просты для исследования те случаи колебательных движений, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения равновесия, а сила сопротивления пропорциональна скорости точки. Соответственно проекции восстанавливающей силы и силы сопротивления на ось x имеют вид

$$F_x = -cx, \qquad R_x = -b\dot{x}.$$

В этих случаях дифференциальные уравнения движения *линейны*; соответственно такие колебания также называются *линейными* *).

В зависимости от того, какая комбинация сил действует на материальную точку, колебательное движение приобретает те или иные типичные особенности. В таблице 1 дана сводка различных изучаемых в дальнейшем типов линейных колебаний.

Возможны и более сложные случаи, когда сила зависит одновременно от координаты x и времени t и не может быть представлена в виде суммы $F_x(x)$ и $Q_x(t)$, а также когда сила зависит от координаты x и скорости $\dot{x}$, причем силу нельзя представить как сумму $F(x)$ и $R(\dot{x})$. Эти случаи здесь не рассматриваются.

§ 2.2. Свободные колебания

Рассматриваемая задача характеризуется тем, что на материальную точку действует только *восстанавливающая сила*; в линейных задачах ее модуль пропорционален отклонению точки от положения равновесия. Проекция восстанавливающей силы на ось x равна

$$F_x = -cx, \tag{2.1}$$

где c — коэффициент пропорциональности, а дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Положив $c/m = k^2$, получим

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, движение материальной точки под действием восстанавливающей силы описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\alpha^2 + k^2 = 0.$$

Так как его корни — чисто мнимые числа: $\alpha_1 = ki$, $\alpha_2 = -ki$, то общим решением дифференциального уравнения (2.2) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{2.3}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Для большего удобства анализа этого решения введем новые постоянные интегрирования a и ε, положив

$$C_1 = a \sin \varepsilon, \qquad C_2 = a \cos \varepsilon.$$

Это можно сделать, так как из этих соотношений постоянные a и ε определяются через C_1 и C_2 с помощью формул

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = C_1/C_2.$$

*) Термин «линейные колебания» никак не связан с прямолинейностью траектории точки и определяется исключительно линейностью дифференциальных уравнений.

Тогда

$$x = a\cos\varepsilon\sin kt + a\sin\varepsilon\cos kt,$$

или

$$x = a\sin(kt+\varepsilon). \tag{2.4}$$

Постоянные a и ε (или постоянные C_1 и C_2) определяются заданными начальными условиями — начальным положением и начальной скоростью движущейся точки.

Таким образом, под действием восстанавливающей силы материальная точка совершает движение по синусоидальному закону, т. е. гармоническое колебательное движение. Такие колебания называются *свободными колебаниями.*

Из уравнения (2.4) видно, что наибольшее отклонение материальной точки от положения равновесия (*амплитуда колебаний*) равно a.

Аргумент $(kt+\varepsilon)$ называется *фазой колебаний*, а величина ε — *начальной фазой*.

Величина k называется *угловой частотой* колебаний и определяет число колебаний, совершаемых точкой за 2π секунд. В дальнейшем величину k для краткости будем называть просто *частотой.* Частота колебаний k не зависит от начальных условий и определяется только параметрами системы (величинами c и m). По этому признаку частоту свободных колебаний называют также *собственной частотой.*

Для определения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся *начальными условиями*, которые должны быть заданы (в противном случае колебательный процесс не полностью определен). Пусть в начальный момент $t=0$ известны начальное положение материальной точки $x=x_0$ и начальная скорость $\dot{x}=\dot{x}_0$. Тогда, подставив в уравнение движения (2.4) и в выражение для скорости

$$\dot{x} = ak\cos(kt+\varepsilon) \tag{2.5}$$

$t=0$, $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$, получим для определения a и ε два уравнения:

$$x_0 = a\sin\varepsilon, \qquad \dot{x}_0 = ak\cos\varepsilon.$$

Отсюда находим

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{kx_0}{\dot{x}_0}\,^{*)} \tag{2.6}$$

---

*) Если $x_0>0$, то при $\frac{x_0}{\dot{x}_0}>0$ $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{2}$, а при $\frac{x_0}{\dot{x}_0}<0$ $\frac{\pi}{2}\leqslant\varepsilon\leqslant\pi$. Если $x_0<0$, то при $\frac{x_0}{\dot{x}_0}>0$ $\pi\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{3\pi}{2}$, а при $\frac{x_0}{\dot{x}_0}<0$ $\frac{3\pi}{2}\leqslant\varepsilon\leqslant 2\pi$.

и поэтому закон движения точки определяется следующим уравнением:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \sin\left(kt + \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{\dot{x}_0}\right). \tag{2.7}$$

График свободных колебаний материальной точки представлен на рис. 2.2; здесь отмечены начальное отклонение x_0, амплитуда колебаний a, а также промежуток времени T, в течение которого происходит одно полное колебание. Этот наименьший промежуток времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется, называется *периодом колебаний*. Зависимость между периодом колебаний и частотой определится из условия периодичности движения:

$$k(t + T) + \varepsilon = kt + \varepsilon + 2\pi,$$

откуда $T = 2\pi/k$, или

$$T = 2\pi\sqrt{m/c}. \tag{2.8}$$

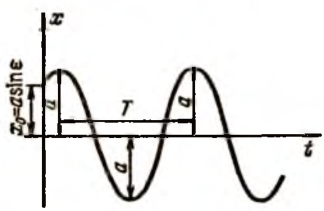


Рис. 2.2

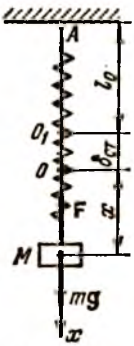


Рис. 2.3

Таким образом, период колебаний, так же как и частота, не зависит от начальных условий. Это свойство колебаний называется *изохронностью*. Как видно из (2.8), период и частота колебаний определяются величиной колеблющейся массы m и коэффициентом пропорциональности c, причем с увеличением массы и уменьшением коэффициента c период колебаний увеличивается.

Задача 2.1. Груз массы m подвешен на пружине, массой которой можно пренебречь (рис. 2.3). На колеблющийся груз действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила упругости $\mathbf{F}$, создаваемая пружиной. Составить дифференциальное уравнение движения.

Отметим на рис. 2.3 три положения: O_1 — положение нижнего конца пружины в ее недеформированном состоянии (l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии), O — положение равновесия груза, висящего на пружине, M — текущее положение груза при его движении. Обозначим расстояние O_1O через $\delta_{ст}$ (статическая деформация пружины) и направим ось x вертикально вниз, выбрав начало отсчета в положении равновесия груза (точка O).

По закону Гука при относительно небольших перемещениях модуль силы упругости пропорционален деформации пружины В нашем случае деформация пружины равна $|\delta_{ст} + x|$ поэтому $F = c\,|\delta_{ст} + x|$, где c — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом жесткости* пружины. Очевидно, что коэффициент жесткости численно равен силе, которую нужно приложить к концу пружины, чтобы деформировать ее на единицу длины. Проекция силы $\mathbf{F}$ на ось x равна $-c\,(\delta_{ст}+x)$. Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x}=mg-c\,(\delta_{ст}+x).$$

Если груз находится в равновесии, то сила тяжести mg уравновешивается силой упругости, которая в положении равновесия равна $c\delta_{ст}$ (так как в этом случае $x=0$). Следовательно,

$$mg=c\delta_{ст}. \qquad (2.9)$$

Принимая это во внимание, приведем дифференциальное уравнение движения груза к виду

$$m\ddot{x}=-cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x}+k^2x=0,$$

где $k^2=c/m$.

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (2.2). Поэтому груз, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания с частотой k.

Если начало координат взять в точке O_1 или в верхнем неподвижном конце A пружины, то дифференциальное уравнение движения усложнится. Так, если начало координат выбрано в точке O_1, то $F_x=-cx$, и уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{x}=mg-cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x}+k^2x=g.$$

Если начало координат выбрать в неподвижном конце A пружины, то $F_x=$ $=c\,(x-l_0)$, где l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии. Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x}=mg-c\,(x-l_0)$$

после упрощения приводится к форме

$$\ddot{x}+k^2x=g+k^2l_0.$$

Таким образом, рациональным выбором начала отсчета можно упростить форму дифференциального уравнения движения и, следовательно, его решение.

Задача 2.2. На понтон (рис. 2.1, *б*) действует его сила тяжести $\mathbf{G}$ и архимедова выталкивающая сила $\mathbf{F}$. Исследовать вертикальную качку понтона.

В состоянии равновесия сила тяжести понтона $\mathbf{G}$ уравновешивается архимедовой силой $\mathbf{F}$. Если это состояние по какой-либо причине нарушается и понтон дополнительно погрузится в воду, то согласно закону Архимеда выталкивающая сила возрастет, т. е. получит приращение, направленное вверх. Понятно, что при любых отклонениях понтона от положения равновесия приращение силы $\mathbf{F}$ будет направлено против отклонения. Если понтон прямостенный (в первом приближении это можно принять), то приращение архимедовой силы пропорционально отклонению x и определяется соотношением

$$\Delta\mathbf{F}=-\gamma Sx\mathbf{i},$$

где γ — удельный вес воды, S — площадь, ограниченная ватерлинией (площадь сечения понтона горизонтальной плоскостью на уровне поверхности воды). Действительно, произведение Sx определяет дополнительно вытесненный объем воды, так что произведение γSx равно «потере веса» по закону Архимеда, т. е. приращению модуля силы $\mathbf{F}$.

Допустим, что после нарушения состояния равновесия понтон будет предоставлен самому себе. В любой момент последующего движения на понтон действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{G}=m\mathbf{g}$ (направленная вниз) и архимедова сила $\mathbf{F}+\Delta\mathbf{F}$ (направленная вверх). Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x}=mg-F-\gamma Sx.$$

Учитывая, что $mg=F$, найдем

$$m\ddot{x}+\gamma Sx=0, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{x}+\frac{\gamma S}{m}x=0.$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с подробно исследованным уравнением (2.2). Поэтому, независимо от начальных условий, можно сразу найти период (2.8) вертикальной качки понтона:

$$T = 2\pi\sqrt{m/(\gamma S)}.$$

Пусть, например, площадь, ограниченная ватерлинией понтона, равна 20 м² и его сила тяжести составляет 30 тс. Тогда находим $\left(\gamma = 1 \text{ тс/м}^3,\ m = \dfrac{30}{9{,}8} \text{ тс}\cdot\text{с}^2/\text{м}\right)$

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{30\,000}{9{,}8\cdot 1000\cdot 20}} = 2{,}5 \text{ с}.$$

Приведенное решение грубо приближенное, так как выталкивающая сила определялась по закону Архимеда, справедливому лишь для условий покоя. В данном случае следовало бы рассмотреть более сложные явления гидродинамического характера, связанные с движением воды при качке. Как показывают более подробные исследования, эти дополнительные обстоятельства можно учесть, условно добавляя некоторую массу воды («присоединенную массу») к массе понтона.

В заключение рассмотрим еще одну задачу.

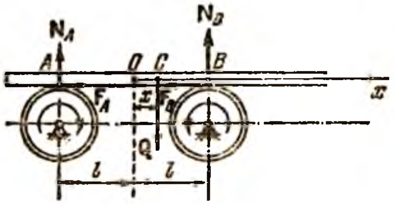


Рис. 2.4

Задача 2.3. Для определения коэффициента сухого трения может быть использована установка, изображенная на рис. 2.4. Она состоит из двух валов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями в разные стороны, на которые кладется пластина. При совпадении центра тяжести пластины C с серединой расстояния между осями (точкой O) пластина находится в равновесии под действием равных и противоположно направленных сил трения F_A и F_B. Исследовать движение пластины, если в начальный момент ее равновесие было нарушено.

Если каким-либо способом нарушить состояние равновесия пластины, то она придет в движение в горизонтальной плоскости. Вследствие смещения центра тяжести C давления на диски окажутся неодинаковыми. Соответственно нарушится равенство сил трения, причем равнодействующая сил трения окажется направленной к точке O, т. е. в сторону положения равновесия, и будет восстанавливающей силой. Благодаря действию этой силы возникает процесс свободных колебаний, период которых зависит от свойств трения между пластиной и валами. Это позволяет по опытным значениям периода колебаний определить коэффициент трения f.

Для вывода соответствующей формулы составим дифференциальное уравнение горизонтальных колебаний пластины. Вдоль оси x действуют сила трения, приложенная в точке A, равная fN_A и направленная вправо, и сила трения, приложенная в точке B, равная fN_B и направленная влево. Если центр тяжести пластины смещен от положения равновесия на величину x, то

$$N_A = \frac{l-x}{2l}Q, \quad N_B = \frac{l+x}{2l}Q,$$

где Q — сила тяжести пластины, $2l$ — расстояние между осями валов *).

Дифференциальное уравнение движения пластины имеет вид

$$m\ddot{x} = f\frac{l-x}{2l}Q - f\frac{l+x}{2l}Q.$$

*) Здесь мы, в сущности, использовали уравнение статики. Уравновешенность сил, направленных перпендикулярно к оси Ox, следует из того, что ускорение пластины в этом направлении равно нулю.

Положив $fg/l = k^2$, получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0;$$

отсюда сразу следует, что период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{l/(fg)}.$$

Разрешая последнее уравнение относительно f, получим окончательную формулу

$$f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2}.$$

Определив из опыта период колебаний T и зная расстояние между осями колес $2l$, найдем отсюда коэффициент трения скольжения.

§ 2.3. Свободные колебания при линейно-вязком сопротивлении

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы и линейной силы сопротивления. Совместим начало координат с положением равновесия точки. Проекция восстанавливающей силы **F** на ось x равна $-cx$. Так как сила сопротивления **R** всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости точки, то проекция силы сопротивления на ось x равна $-b\dot{x}$, где b — коэффициент пропорциональности, характеризующий сопротивление среды (рис. 2.5).

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки запишется следующим образом:

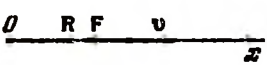


Рис. 2.5

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}. \qquad (2.10)$$

Вводя обозначения $c/m = k^2$, $b/m = 2h$, получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0. \qquad (2.11)$$

Это — линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0$, и его корни равны

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Характер движения точки существенно зависит от соотношения величин h и k.

Если $h < k$ (случай малого сопротивления), то корни характеристического уравнения комплексно сопряженные. Если $h \geqslant k$ (случай большого сопротивления), то корни вещественные. Рассмотрим подробно каждый из этих случаев.

1. Случай малого сопротивления ($h < k$). Корни характеристического уравнения будут

$$\alpha_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2}, \quad \alpha_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = e^{-ht}\,(C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t), \tag{2.12}$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$, C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Для большей наглядности введем новые постоянные a, ε при помощи формул $C_1 = a\cos\varepsilon$, $C_2 = a\sin\varepsilon$. Тогда получим

$$x = ae^{-ht}\sin(k^*t + \varepsilon). \tag{2.13}$$

Из этого уравнения видно, что $x \to 0$ при $t \to \infty$ (так как $e^{-ht} \to 0$), т. е. движение является *затухающим*. Это затухающее движение

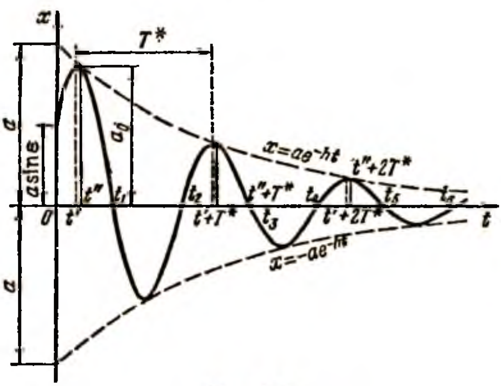


Рис. 2.6

носит колебательный характер, так как, приближаясь (при $t \to \infty$) к состоянию равновесия, система будет проходить через это состояние бесконечное число раз в моменты времени, равные

$$t_n = \frac{n\pi - \varepsilon}{k^*},$$

где $n = 1, 2, \ldots$ (рис. 2.6).

Движение, описываемое формулой (2.13), не является периодическим, так как с течением времени последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются. Важно, что максимальные отклонения точки от положения равновесия хотя и уменьшаются с течением времени, но промежуток времени между двумя любыми последующими отклонениями (например, в сторону положительного направления оси x) есть постоянная величина, равная $2\pi/k^*$. Эту величину условно называют *периодом затухающих колебаний*.

Рассмотрим подробнее график движения (см. рис. 2.6). На этом рисунке кривые $x = ae^{-ht}$ и $x = -ae^{-ht}$ являются границами области, внутри которой располагается график движения.

Вычислим моменты времени, соответствующие максимальным отклонениям точки от положения равновесия. С этой целью найдем скорость точки

$$\dot{x} = -hae^{-ht}\sin(k^*t + \varepsilon) + ak^*e^{-ht}\cos(k^*t + \varepsilon) \qquad (2.14)$$

и приравняем ее нулю. Будем иметь

$$\operatorname{tg}(k^*t + \varepsilon) = k^*/h.$$

Отсюда следует, что если t' (наименьший корень полученного уравнения) соответствует первому максимальному отклонению в положительном направлении оси x, то последующие максимальные отклонения в положительном направлении оси x будут достигаться в следующие моменты времени: $t'_n = t' + (n-1)\,T^*$, где $n = 1, 2, \ldots$, а

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \qquad (2.15)$$

Из этой формулы видно, что при вязком трении период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний, равного $2\pi/k$. Максимальные отклонения $a_0, a_1, \ldots$, соответствующие моментам времени $t', t' + T^*, t' + 2T^*, \ldots, t' + nT^*$, равны

$$a_0 = ae^{-ht'}\sin(k^*t' + \varepsilon), \quad a_1 = ae^{-h(t'+T^*)}\sin(k^*t' + \varepsilon), \ldots,$$

$$a_n = ae^{-h(t'+nT^*)}\sin(k^*t' + \varepsilon), \ldots;$$

при этом учтено, что

$$\sin[k^*(t' + mT^*) + \varepsilon] =$$

$$= \sin\left[k^*\left(t' + m\frac{2\pi}{k^*}\right) + \varepsilon\right] = \sin(k^*t' + \varepsilon + 2\pi m) = \sin(k^*t' + \varepsilon),$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$

Из формул для $a_0, a_1, \ldots$ видно, что отношение последующего максимального отклонения вдоль положительного направления оси x к предыдущему постоянно и равно

$$\eta = \frac{a_m}{a_{m-1}} = e^{-hT^*}. \qquad (2.16)$$

Таким образом, амплитуды затухающих колебаний при вязком сопротивлении убывают в *геометрической* прогрессии. Величина η (знаменатель геометрической прогрессии) называется *декрементом колебаний* (или *фактором затуханий*), а модуль натурального логарифма этой величины

$$\Lambda = hT^* \qquad (2.17)$$

называется *логарифмическим декрементом колебаний* *).

---

*) Иногда вводят $\eta = e^{-hT^*/2}$ и $\Lambda = hT^*/2$, т. е. сопоставляют два последовательных наибольших по модулю отклонения в разные стороны.

Заметим, что если $t = t''$ является положительным корнем уравнения $\sin(k^* t + \varepsilon) = 1$, то моменты времени, в которые график движения касается кривой ae^{-ht}, будут: t'', $t'' + T^*$, $t'' + 2T^*$, ...

Декремент колебаний можно определить как отношение отклонения при $t = t'' + nT^*$ к отклонению при $t = t'' + (n-1)T^*$.

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Подставляя эти условия в равенства (2.13) и (2.14), получим уравнения для определения постоянных a и ε:

$$x_0 = a \sin \varepsilon, \qquad \dot{x}_0 = -ha \sin \varepsilon + ak^* \cos \varepsilon,$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{k^{*2}}}, \qquad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{k^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

2. Граничный случай ($h = k$). Корни характеристического уравнения в этом случае будут вещественными и кратными: $\alpha_1 = \alpha_2 = -h$, и, следовательно, общее решение уравнения движения (2.11) имеет вид

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t), \tag{2.18}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Принимая во внимание, что $\dot{x} = -he^{-ht}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-ht}$, получим при начальных условиях: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ следующие уравнения для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2: $x_0 = C_1$, $\dot{x}_0 = -hC_1 + C_2$. Отсюда $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$.

Таким образом, для заданных начальных условий уравнение движения точки запишется в виде

$$x = e^{-ht}[x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t]. \tag{2.19}$$

Из этой зависимости следует, что в рассматриваемом случае движение точки уже не носит колебательного характера, но остается затухающим движением, так как $x \to 0$ при $t \to \infty$ *).

Такое движение называется *апериодическим*.

Для построения графиков этого движения найдем момент времени, соответствующий максимальному отклонению точки от положения равновесия, и момент времени прохождения точки через положение равновесия.

Приравнивая производную по времени от x нулю:

$$-h[x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t] + \dot{x}_0 + hx_0 = 0,$$

имеем

$$t_0 = \frac{\dot{x}_0}{h(\dot{x}_0 + hx_0)}.$$

---

*) При $t \to \infty$ множитель e^{-ht} стремится к нулю, а множитель, стоящий в квадратных скобках, стремится к бесконечности. Раскрывая неопределенность (например, по правилу Лопиталя), найдем, что $x \to 0$ при $t \to \infty$.

Из условия $x = 0$ получим

$$t_1 = -\frac{x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

Для $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$ имеем $t_э > 0$, $t_1 \leqslant 0$ и график движения имеет вид, показанный на рис. 2.7, *а*.

Если $x_0 > 0$, то при $\dot{x}_0 < 0$ и $|\dot{x}_0| \leqslant hx_0$ будет $t_э \leqslant 0$, $t_1 \leqslant 0$, т. е. экстремальных точек нет и график движения имеет вид, показанный на рис. 2.7, *б*; при $\dot{x}_0 \leqslant 0$ и $|\dot{x}_0| > hx_0$ получаем, что $t_э > 0$, $t_1 > 0$. Это значит, что точка, получив начальную скорость, пройдет в дальнейшем движении положение равновесия (при $t = t_1$) и при $t = t_э$ достигнет положения, соответствующего максимальному отклонению точки от положения равновесия. Далее точка будет асимптотически приближаться к положению равновесия. График движения для этого случая показан на рис. 2.7, *в*.

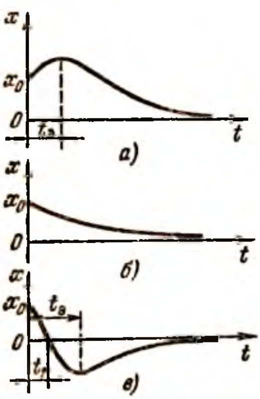


Рис. 2.7

Отметим, что при $x_0 \leqslant 0$ характер графиков не изменится.

3. Случай большого сопротивления ($h > k$). В этом случае корни характеристического уравнения

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}$$

являются действительными и отрицательными. Общее решение уравнения движения (2.1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}. \tag{2.20}$$

Так как $\dot{x} = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$, то при начальных условиях: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ уравнения для определения постоянных интегрирования будут $x_0 = C_1 + C_2$, $\dot{x}_0 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$. Найдя отсюда

$$C_1 = \frac{\alpha_2 x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

и подставив эти C_1 и C_2 в выражение (2.20), получим

$$x = \frac{\alpha_2 x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}. \tag{2.21}$$

Это уравнение описывает апериодическое затухающее движение ($x \to 0$ при $t \to \infty$, так как α_1 и α_2 отрицательны).

Продифференцировав выражение (2.21) по времени и приравняв полученный результат нулю, получим значение $t = t_э$, соответствующее максимальному отклонению точки от положения равновесия:

$$t_э = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\alpha_2 (\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0)}{\alpha_1 (\dot{x}_0 - \alpha_2 x_0)}.$$

Принимая во внимание, что $\alpha_1 \alpha_2 = k^2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = -2\sqrt{h^2 - k^2}$, это выражение можно переписать в виде

$$t_э = \frac{1}{2\sqrt{h^2 - k^2}} \ln \left[1 + \frac{2\sqrt{h^2 - k^2}\, |\alpha_2|\, \dot{x}_0}{k^2 (\dot{x}_0 + |\alpha_2|\, x_0)} \right].$$

Очевидно, что t_0 будет больше нуля для тех значений x_0 и $\dot{x}_0$, для которых

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0+|\alpha_2|x_0}>0.$$

Момент времени t_1, в который координата x, определяемая формулой (2.21), обращается в нуль, найдем по формуле

$$t_1=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\ln\frac{\dot{x}_0-\alpha_1x_0}{\dot{x}_0-\alpha_2x_0}=\frac{1}{2\sqrt{h^2-k^2}}\ln\left[1-\frac{2\sqrt{h^2-k^2}x_0}{\dot{x}_0+|\alpha_2|x_0}\right].$$

Отсюда следует, что t_1 будет больше нуля при

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0+|\alpha_2|x_0}<0.$$

Виды графиков движения для рассматриваемого случая ($h>k$) представлены соответственно

для $x_0>0$, $\dot{x}_0>0$ на рис. 2.7, *а*;
для $x_0>0$, $\dot{x}_0\leqslant 0$, но $|\dot{x}_0|<|\alpha_2|x_0$ на рис. 2.7, *б*;
для $x_0>0$, $\dot{x}_0<0$, но $|\dot{x}_0|>|\alpha_2|x_0$ на рис. 2.7, *в*.

Задача 2.4. При наблюдении колебаний груза массы 3 кг по виброграмме*) было установлено, что «огибающая» графика затухающих колебаний имеет вид графика показательной функции (экспоненты), причем за один период амплитуда колебаний уменьшается вдвое. По той же виброграмме определено, что период колебаний равен 0,3 с. Определить коэффициент жесткости пружины и коэффициент h силы вязкого сопротивления.

Для решения задачи используем следующие соотношения:

$$T^*=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-h^2}},\qquad \frac{a_{m-1}}{a_m}=e^{hT^*},\qquad k=\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Подставив в эти формулы числовые данные, получим

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-h^2}}=0{,}3,\qquad e^{0{,}3h}=2,\qquad k=\sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Решая эти уравнения относительно c, h и k, находим $h=2{,}31$ с$^{-1}$, $k=21{,}1$ с$^{-1}$, $c=13{,}36$ Н/см.

Задача 2.5. Пользуясь данными предыдущей задачи, определить, во сколько раз следует уменьшить массу груза, чтобы свободное движение системы стало апериодическим.

Пусть m_1 — новая масса, тогда, вводя обозначение $\lambda=m/m_1$, будем иметь

$$h_1=\frac{b}{2m_1}=\frac{b\lambda}{2m}\quad\text{и}\quad k_1=\sqrt{\frac{c}{m_1}}=\sqrt{\frac{c\lambda}{m}}.$$

Условия задачи будут удовлетворены, если $h_1=k_1$, т. е.

$$\frac{b\lambda}{2m}=\sqrt{\frac{c\lambda}{m}},\quad\text{или}\quad h\lambda=k\sqrt{\lambda}.$$

Используя данные предыдущей задачи, получим, что массу следует уменьшить в

$$\lambda=\left(\frac{k}{h}\right)^2=\left(\frac{21{,}1}{2{,}31}\right)^2\approx 83\ \text{раза}.$$

*) Виброграммой (или осциллограммой) называется полученный в эксперименте график колебаний.

Задача 2.6. Материальная точка совершает затухающие колебания под действием линейной восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, причем постоянная $h = b/(2m)$ составляет одну десятую от частоты k незатухающих колебаний ($h/k = 0{,}1$). Определить разность между периодами затухающих T^* и незатухающих T колебаний, а также во сколько раз уменьшится амплитуда затухающих колебаний через восемь полных колебаний.

Составим отношение периодов колебаний

$$\frac{T^*}{T} = \frac{2\pi/\sqrt{k^2 - h^2}}{2\pi/k} = \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)^{-1/2}.$$

Так как по условию задачи число h/k мало, то, пользуясь хорошо известной приближенной формулой $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, справедливой при малых значениях $|x|$ и любых α, получим с достаточно хорошей точностью

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{k^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T^* - T}{T} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{k^2}.$$

Следовательно, период затухающих колебаний T^* превышает период незатухающих колебаний T всего на $0{,}005 = 0{,}5\ \%$ (по условию задачи $h/k = 0{,}1$).

Рассмотрим теперь ряд последовательных амплитуд затухающих колебаний: $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Так как эти амплитуды убывают по закону геометрической прогрессии, то

$$a_n = a_0\eta^n,$$

где η — декремент колебаний, определяемый формулой (2.16). Отсюда

$$a_0/a_n = e^{hT^*n}.$$

Заменив период затухающих колебаний T^* на его приближенное значение $T = 2\pi/k$, получим

$$a_0/a_n = e^{2\pi hn/k}.$$

Внеся сюда $n = 8$ и $h/k = 0{,}1$, найдем

$$a_0/a_n \approx 152.$$

Таким образом, при относительно небольшом значении сил сопротивления ($h/k = 0{,}1$) период затухающих колебаний мало отличается от периода незатухающих колебаний, но колебания гасятся весьма интенсивно — через восемь колебаний амплитуда уменьшается в 152 раза, т. е. колебания практически прекращаются.

§ 2.4. Свободные колебания при трении скольжения

Для простоты рассуждений рассмотрим движение прикрепленного к пружине тела массы m по шероховатой горизонтальной плоскости. Совместим начало координат с точкой, соответствующей положению тела при недеформированном состоянии пружины (рис. 2.8).

Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + T_x,$$

где $F_x = -cx$ — проекция на ось x силы, действующей на точку со стороны пружины (c — коэффициент жесткости пружины), T_x — проекция на ось x силы сухого трения. Сила сухого трения направлена в сторону, противоположную направлению скорости тела, и по модулю равна $fN = fmg$, где f — коэффициент трения.

Таким образом, окончательно дифференциальное уравнение движения тела распадается на два знакомых нам линейных уравнения:

$$m\ddot{x} = -cx + fmg \qquad (\dot{x} < 0),$$
$$m\ddot{x} = -cx - fmg \qquad (\dot{x} > 0),$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = fg \qquad (\dot{x} < 0), \tag{2.22}$$

$$\ddot{x} + k^2x = -fg \qquad (\dot{x} > 0), \tag{2.23}$$

где по-прежнему $k^2 = c/m$.

Допустим, что груз смещен от исходного положения вправо на расстояние $x_0 = a_0$ и затем свободно, без начальной скорости, отпущен. Тогда движение начнется при следующих условиях: $x = a_0 > 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$. Предполагается, что в указанном смещенном положении восстанавливающая сила больше силы трения, т. е. $ca_0 > fmg$, или $a_0 > fg/k^2$. При нарушении этого условия движение не начнется. Для интегрирования уравнения (2.22) введем новую переменную $\zeta = x - fg/k^2$. Тогда

$$\ddot{\zeta} + k^2\zeta = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta = a \sin (kt + \varepsilon),$$

т. е.

$$x = a \sin (kt + \varepsilon) + fg/k^2, \tag{2.24}$$

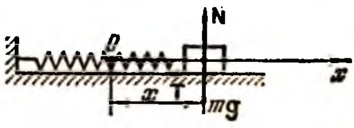


Рис. 2.8

где a и ε — постоянные интегрирования. Для их определения воспользуемся начальными условиями; получим $a = a_0 - fg/k^2$, $\varepsilon = \pi/2$. Следовательно, груз будет двигаться по закону

$$x = \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\cos kt + \frac{fg}{k^2}. \tag{2.25}$$

Однако это справедливо лишь до тех пор, пока скорость

$$\dot{x} = -\left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) k \sin kt \tag{2.26}$$

остается отрицательной, т. е. до момента $t_1 = \pi/k$.

При этом значение x, соответствующее крайнему левому положению, равно

$$x = x_1 = \frac{fg}{k^2} - \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) = -\left(a_0 - \frac{2fg}{k^2}\right).$$

Амплитуда $a_1 = -x_1$ первого отклонения влево определяется равенством $a_1 = a_0 - 2fg/k^2$. В рассмотренном интервале времени тело совершит половину колебательного цикла относительно среднего положения fg/k^2.

Дальнейшее (обратное) движение возможно, если $a_1 > fg/k^2$. Допустим, что это условие соблюдается; тогда начнется движение вправо при новых начальных условиях $x = x_1 = -a_1$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$. Дифференциальное уравнение движения на этом участке имеет вид

$$\ddot{x} + k^2x = -fg. \tag{2.27}$$

Решение дифференциального уравнения (2.27) при указанных начальных условиях запишется следующим образом:

$$x = -\left(a_1 - \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt - \frac{fg}{k^2}, \quad \dot{x} = \left(a_1 - \frac{fg}{k^2}\right) k \sin kt \qquad (\dot{x} > 0). \tag{2.28}$$

В конце второго участка движения $\dot{x} = 0$, откуда следует, что промежуток времени, в течение которого происходит движение во втором этапе, равен $t_2 = \pi/k$, т. е. $t_2 = t_1$.

Подставляя значение $t = t_2$ в уравнение (2.28), получим наибольшее отклонение в конце второго этапа: $a_2 = a_1 - 2fg/k^2$. Если при этом $a_2 > fg/k^2$, то вновь начнется движение влево. Здесь нужно снова обратиться к дифференциальному уравнению (2.22) и решать его при следующих начальных условиях: $x = a_2$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$.

Понятно, что при этом вновь приходим к уравнениям (2.24)—(2.26), в которых a_0 следует заменить на a_1. Легко заметить, что на каждый полупериод максимальное отклонение тела от начала координат уменьшается на величину, равную $2fg/k^2$, причем длительность каждого полупериода равна π/k.

Имея в виду сказанное, можно записать следующую последовательность максимальных отклонений через каждый полупериод:

$$a_1 = a_0 - \frac{2fg}{k^2}, \quad a_2 = a_1 - \frac{2fg}{k^2}, \quad a_3 = a_2 - \frac{2fg}{k^2}, \ldots, \quad a_n = a_{n-1} - \frac{2fg}{k^2}.$$

Складывая почленно все равенства, найдем

$$a_n = a_0 - 2fgn/k^2.$$

Таким образом, при сухом трении последовательные амплитуды колебаний убывают по закону *арифметической* прогрессии, разность которой равна $2fg/k^2$; период затухающих колебаний при сухом трении равен периоду незатухающих колебаний $2\pi/k$. Напомним, что при вязком трении амплитуды колебаний убывают по геометрической прогрессии, а период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний.

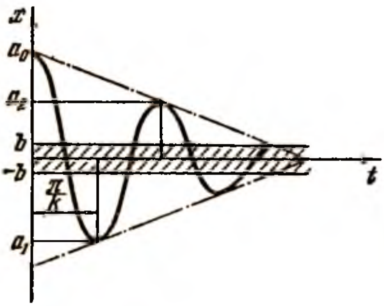


Рис. 2.9

Колебания будут происходить до тех пор, пока сила упругости ca_n в одном из крайних положений не сделается меньше силы трения fmg: $ca_n < fmg$, или $a_n < fg/k^2$. Пользуясь выражением для a_n, получим

$$a_0 = x_0 < (2n+1)\, fg/k^2.$$

Это неравенство может служить для определения числа полуколебаний до остановки груза, или начального отклонения x_0 по известному числу полуколебаний n.

На рис. 2.9 построен график колебаний. Параллельно оси времени проведены две прямые: $x = fg/k^2 = b$ и $x = -fg/k^2 = -b$. Около верхней прямой располагаются косинусоиды, соответствующие движению влево (нечетные полупериоды), а около нижней прямой — косинусоиды, соответствующие движению вправо (четные полупериоды). Если какой-либо полупериод заканчивается в полосе, расположенной между двумя прямыми, то движение прекращается: эта полоса называется *зоной застоя*. «Огибающие» графика движения имеют вид наклонных прямых.

Задача 2.7. В системе, изображенной на рис. 2.8, коэффициент жесткости пружины $c = 1962$ Н/м, масса груза 3 кг и коэффициент сухого трения $f = 0{,}1$. Какому условию должно удовлетворять начальное отклонение x_0 груза, чтобы до полной остановки он совершил не более 10 полных колебаний?

По условию задачи должно выполняться неравенство

$$x_0 < (2n+1)\, fg/k^2,$$

где n — число полупериодов. Подставляя сюда $n = 20$, $k^2 = c/m = 1962/3 = 654$ с$^{-2}$, получаем

$$x_0 < \frac{41fg}{k^2} = \frac{41 \cdot 0{,}1 \cdot 981}{654} = 6{,}15 \text{ см}.$$

§ 2.5. Вынужденные колебания

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием восстанавливающей силы и внешней возмущающей силы. Возмущающая сила может быть произвольной функцией времени, однако мы ограничимся простейшим, но практически весьма важным случаем, когда сила изменяется по гармоническому закону. Пусть проекция возмущающей силы на ось x равна $H \sin(pt + \delta)$, где H — амплитуда и p — частота возмущающей силы, δ — начальная фаза. Тогда дифференциальное уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta),$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta), \tag{2.29}$$

где

$$k^2 = c/m, \quad H_0 = H/m.$$

Решив дифференциальное уравнение (2.29), мы определим закон движения материальной точки. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.29) равно сумме решений: частного решения уравнения (2.29) и общего решения однородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Общее решение последнего уравнения мы уже знаем:

$$x_1 = a \sin(kt + \varepsilon),$$

где a и ε — постоянные интегрирования. Если $p \neq k$, то частное решение уравнения (2.29) будем искать в виде

$$x_2 = A^* \sin(pt + \delta),$$

где A^* — неизвестная постоянная. Для ее определения подставим выражения x_2 и $\ddot{x}_2 = -A^*p^2 \sin(pt + \delta)$ в уравнение (2.29):

$$-A^*p^2 \sin(pt + \delta) + A^*k^2 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta),$$

или

$$A^*(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Для тождественного выполнения этого равенства должно быть

$$A^* = \frac{H_0}{k^2 - p^2}.$$

Частное решение имеет вид

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{2.30}$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.29) запишется в форме

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{2.31}$$

Постоянные a и ε зависят от начальных уловий. Таким образом, искомое движение материальной точки является суммой гармонических колебаний, происходящих с собственной частотой k, и гармонических колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы p. Подробно исследуем второе слагаемое в (2.31), описывающее чисто вынужденные колебания и не зависящее от начальных условий.

Амплитуда чисто вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|}. \tag{2.32}$$

Перепишем решение (2.30), используя формулу (2.32):

$$x_2 = A\sin(pt + \delta) \qquad (k > p),$$
$$x_2 = -A\sin(pt + \delta) = A\sin(pt + \delta - \pi) \quad (k < p).$$

Из полученных соотношений следует, что при $p < k$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы; при $p > k$ вынужденные колебания сдвинуты по фазе от возмущающей силы на π.

Проследим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от отношения частот p/k. Для этого преобразуем выражение амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H}{c\,|1 - p^2/k^2|} = \frac{x_{ст}}{|1 - p^2/k^2|}, \tag{2.33}$$

где $x_{ст} = H/c$ — величина статического отклонения точки от положения равновесия при действии силы, равной максимальному значению возмущающей силы. Обозначим

$$\mu = \frac{A}{x_{ст}} = \frac{1}{|1 - p^2/k^2|}.$$

Величина μ представляет собой *коэффициент динамичности*; он показывает, во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение. Из графика (рис. 2.10) видно, что при $p/k \to 1$ коэффициент динамичности резко возрастет.

Вернемся теперь к общему решению (2.31). Записав его в виде

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{H_0}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta), \tag{2.34}$$

определим постоянные интегрирования, если $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Подставив начальные условия в уравнение (2.34) и в выражение для скорости движения

$$\dot{x} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt + \frac{pH_0}{k^2 - p^2}\cos(pt + \delta),$$

получим

$$C_1 = x_0 - \frac{H_0}{k^2 - p^2}\sin\delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k}\,\frac{H_0}{k^2 - p^2}\cos\delta.$$

Подставляя C_1 и C_2 в соотношение (2.34), будем иметь

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt -$$
$$- \frac{H_0}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta). \quad (2.35)$$

Такая запись решения позволяет установить, что даже при нулевых начальных условиях ($x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$) точка будет совершать колебания, происходящие с собственной частотой; они определяются членом $-H_0 (k^2 - p^2)^{-1} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right)$, причем амплитуда этих колебаний не зависит от начальных условий.

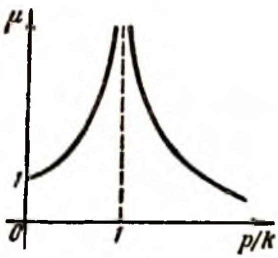


Рис. 2.10

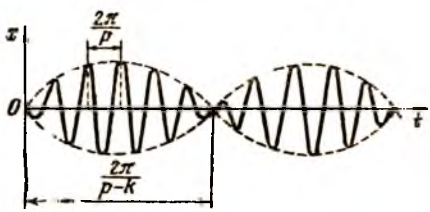


Рис. 2.11

Рассмотрим случай, когда частота p вынужденных колебаний близка к собственной частоте k ($p \approx k$). Тогда выражение (2.35) при $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ примет вид (приближенно полагаем $p/k = 1$, но $k^2 - p^2 \neq 0$)

$$k \approx \frac{H_0}{k^2 - p^2} [\sin (pt + \delta) - \sin (kt + \delta)],$$

или

$$x \approx 2 \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \frac{p - k}{2} t \cos (pt + \delta). \quad (2.36)$$

Такое движение называется *биением* (рис. 2.11).

Показанные здесь биения представляют собой колебания, происходящие с частотой p возмущающей силы, причем амплитуда этих колебаний медленно меняется, следуя также периодическому закону.

Рассмотрим теперь случай, когда собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы, т. е. $p = k$. Частное решение уравнения (2.29) в этом случае нужно искать в виде

$$x_2 = At \sin (pt + \gamma). \quad (2.37)$$

Подставив выражение (2.37) в дифференциальное уравнение (2.29), получим

$$2Ap\cos(pt+\gamma)=H_0\sin(pt+\delta).$$

Введя обозначение $\varphi=pt+\gamma$, перепишем это соотношение в виде

$$2Ap\cos\varphi=H_0\sin\varphi\cos(\delta-\gamma)+H_0\cos\varphi\sin(\delta-\gamma).$$

Это равенство будет тождественно удовлетворено, если

$$H_0\cos(\delta-\gamma)=0,\quad H_0\sin(\delta-\gamma)=2Ap.$$

Отсюда $A=H_0/(2p)$, $\gamma=\delta-\pi/2$ и, следовательно,

$$x_2=\frac{H_0t}{2p}\sin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{H_0t}{2p}\cos(pt+\delta).$$

Общее решение имеет вид

$$x=a\sin(pt+\varepsilon)-\frac{H_0t}{2p}\cos(pt+\delta).$$

При начальных условиях $x=x_0$, $\dot x=\dot x_0$ имеем *)

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot x_0}{p}\sin pt+\frac{H}{2p^2}[\cos\delta\sin pt-pt\cos(pt+\delta)].\qquad(2.38)$$

На рис. 2.12 показан график функции x_2. Как видно, при $k=p$ происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний, причем рост амплитуды линеен во времени. Это явление носит название *резонанса*.

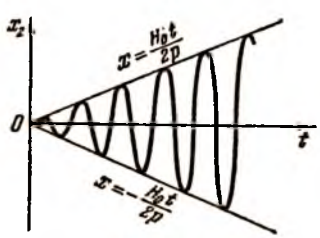


Рис. 2.12

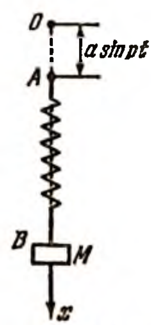


Рис. 2.13

Задача 2.8. Груз M массы m прикреплен к нижнему концу B вертикально расположенной пружины, жесткость которой равна c, а длина в ненапряженном состоянии l_0. Верхний конец пружины A перемещают по закону $a\sin pt$ в вертикальном направлении (рис. 2.13).

Определить вынужденные колебания груза M, приняв $m=0{,}4$ кг, $c=39{,}2$ Н/м, $l_0=30$ см, $p=7\ \text{с}^{-1}$, $a=2$ см.

Выберем начало координат в точке O и проведем ось x вертикально вниз. Если l_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии, то удлинение пружины равно

*) Это решение можно получить из (2.35), раскрывая неопределенность, которая возникает при $p\to k$.

$x - a\sin pt - l_0$ и, следовательно, сила, действующая на груз со стороны пружины, равна

$$F_x = -c\,(x - a\sin pt - l_0).$$

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -c\,(x - a\sin pt - l_0) + mg,$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = g + H_0\sin pt + cl_0/m,$$

где $k^2 = c/m$, $H_0 = ca/m$.

Введем новую переменную z согласно равенству

$$z = x - (mg/c + l_0);$$

тогда дифференциальное уравнение движения преобразуется к следующей форме:

$$\ddot{z} + k^2z = H_0\sin pt.$$

Введение новой переменной z равносильно переносу начала координат в положение равновесия груза. Вынужденные колебания груза определяются формулой (2.30):

$$z = \frac{H_0}{k^2 - p^2}\sin pt.$$

Подставляя сюда числовые значения параметров, получим

$$z = 4\sin 7t \text{ см}.$$

Так как $x = z + mg/c + l_0$, то

$$x = (4\sin 7t + 40) \text{ см}.$$

В этом случае амплитуда колебаний груза (4 см) вдвое больше амплитуды колебаний точки подвеса пружины. Заметим, что груз колеблется около среднего положения, удаленного от верхнего конца пружины на 40 см; этому положению соответствует состояние равновесия груза при отсутствии колебаний точки подвеса.

§ 2.6. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления

Рассмотрим движение материальной точки вдоль оси x под действием линейной восстанавливающей силы, вязкой силы сопротивления и возмущающей силы, проекция которой на ось x равна $H\sin(pt + \delta)$.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + H\sin(pt + \delta).$$

Положив $c/m = k^2$, $b/m = 2h$, $H/m = H_0$, получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H_0\sin(pt + \delta). \qquad (2.39)$$

Решение дифференциального уравнения (2.39) складывается из двух решений: общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 уравнения (2.39).

Как показано в § 2.3, при $k > h$ решение однородного уравнения записывается в виде

$$x_1 = e^{-ht}(C_1\sin k^*t + C_2\cos k^*t),$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, а $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Частное решение уравнения (2.39) будем искать в виде

$$x_2 = A\sin(pt+\gamma), \tag{2.40}$$

где A и γ — неопределенные постоянные величины. Таким образом, мы предполагаем, что частное решение описывает колебания постоянной амплитуды, происходящие с частотой возмущающей силы.

Находя $\dot{x}_2 = pA\cos(pt+\gamma)$, $\ddot{x}_2 = -p^2A\sin(pt+\gamma)$ и подставляя значения x_2, $\dot{x}_2$, $\ddot{x}_2$ в уравнение (2.39), получим

$$-p^2A\sin(pt+\gamma) + 2hpA\cos(pt+\gamma) + k^2A\sin(pt+\gamma) = H_0\sin(pt+\delta).$$

Положив $pt+\gamma=\varphi$ и воспользовавшись соотношением

$$\sin(pt+\delta) = \sin(\varphi+\delta-\gamma) = \sin\varphi\cos(\delta-\gamma) + \cos\varphi\sin(\delta-\gamma),$$

для определения A и γ будем иметь следующие уравнения:

$$A(k^2-p^2) = H_0\cos(\delta-\gamma), \quad 2phA = H_0\sin(\delta-\gamma),$$

откуда

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}}, \tag{2.41}$$

$$\operatorname{tg}(\delta-\gamma) = \frac{2hp}{k^2-p^2}. \tag{2.42}$$

Подставив найденные значения A и γ в частное решение, получим

$$x_2 = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}}\sin(pt+\delta+\gamma'),$$

где $\gamma' = \gamma-\delta$.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (2.39) имеет следующий вид:

$$x = e^{-ht}(C_1\sin k^*t + C_2\cos k^*t) + \frac{H_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}}\sin(pt+\delta+\gamma'). \tag{2.43}$$

Для определения закона движения материальной точки нужно найти постоянные C_1, C_2. Пользуясь начальными условиями: $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ при $t=0$, получим значения постоянных

$$C_1 = \frac{1}{k^*}[\dot{x}_0 + hx_0 - hA\sin(\delta+\gamma') - Ap\cos(\delta+\gamma')],$$

$$C_2 = x_0 - A\sin(\delta+\gamma'),$$

где A — *амплитуда вынужденных колебаний.*

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (2.43), найдем закон движения материальной точки в рассматриваемом случае:

$$x = e^{-ht}\left[\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{k^*}\sin k^*t + x_0\cos k^*t\right] -$$
$$- e^{-ht}\left\{\frac{A}{k^*}[h\sin(\delta+\gamma') + p\cos(\delta+\gamma')]\sin k^*t + \right.$$
$$\left. + A\sin(\delta+\gamma')\cos k^*t\right\} + A\sin(pt+\delta+\gamma').$$

Следовательно, движение материальной точки складывается: из свободных затухающих колебаний (первое слагаемое), обусловленных начальными условиями; из затухающих колебаний (второе слагаемое), имеющих собственную частоту, но вызванных действием вынуждающей силы, и чисто вынужденных колебаний (третье слагаемое). Так как первые два движения с течением времени затухают, то основным колебанием, определяющим характер движения материальной точки, является чисто вынужденное колебание с амплитудой A и частотой p. Следует заметить, что при наличии сопротивления вынужденные колебания сдвинуты по фазе относительно возмущающей силы на γ'.

Вводя обозначения $z = p/k$, $\beta = h/k$, перепишем формулу (2.41) в виде

$$A = \frac{x_{ст}}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{h^2}{k^2}\frac{p^2}{k^2}}} = \frac{x_{ст}}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\beta^2z^2}}, \tag{2.44}$$

где $x_{ст} = H_0/k^2 = H/c$ представляет собой статическое перемещение, вызываемое постоянной силой H.

Введем в рассмотрение *коэффициент динамичности*

$$\mu = \frac{A}{x_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\beta^2z^2}}, \tag{2.45}$$

который характеризует динамический эффект, вызываемый вынуждающей силой.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности от z — отношения частот вынуждающей силы и собственных колебаний в среде без сопротивления, а также от коэффициента β, характеризующего сопротивление среды. Очевидно, что, найдя зависимость коэффициента динамичности от z и β, мы тем самым определим и зависимость от них амплитуды вынужденных колебаний.

Найдем экстремум функции

$$y = (1-z^2)^2 + 4\beta^2z^2. \tag{2.46}$$

Для этого приравняем нулю производную

$$\frac{dy}{dz} = 2(1-z^2)(-2z) + 8\beta^2z = 0. \tag{2.47}$$

Корнями этого уравнения будут

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}, \quad z_3 = -\sqrt{1 - 2\beta^2}. \tag{2.48}$$

Так как $z \geqslant 0$, то корень z_3 должен быть отброшен. Найдем вторую производную от y

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 12z^2 - 4(1 - 2\beta^2).$$

Для $z_1 = 0$ при $1 - 2\beta^2 \leqslant 0$, т. е. при $\beta \geqslant \sqrt{2}/2$,

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 4(2\beta^2 - 1) > 0$$

и, следовательно, функция y имеет минимум, а коэффициент динамичности μ — максимум. Других действительных корней при этих значениях β уравнение (2.47) не имеет.

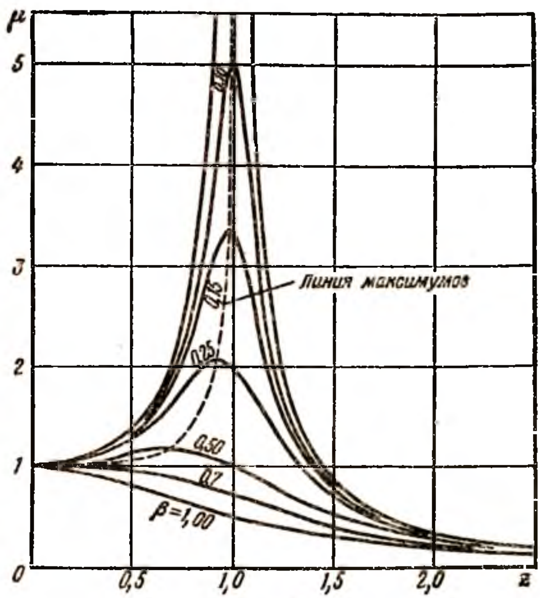


Рис. 2.14

Если $\beta < \sqrt{2}/2$, то для $z_1 = 0$ $d^2y/dz^2 \leqslant 0$. Это значит, что μ при этом имеет минимум. Для корня же $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 8(1 - 2\beta^2) > 0,$$

т. е. при $z = z_2$ коэффициент динамичности имеет максимум.

Заметим, что всегда $z_2 \leqslant 1$ и, только когда $\beta = 0$ (среда без сопротивления), $z_2 = 1$. Ранее было показано, что при $\beta = 0$ и $z_2 = 1$ решение (2.40) не имеет смысла и его нужно искать в виде (2.37).

Максимальное значение коэффициента динамичности найдем, подставив $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ в формулу (2.45):

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.49}$$

На рис. 2.14 показаны кривые, определяющие зависимость коэффициента динамичности от $z = p/k$. Каждой из кривых соответствует определенное значение $\beta = h/k$. Пунктирная линия проходит через точки максимума.

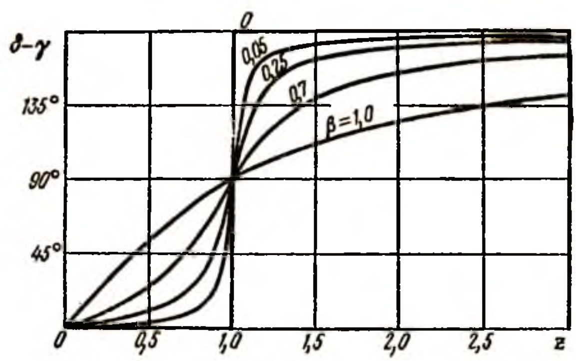


Рис. 2.15

Из рассмотрения этого рисунка следует, что амплитуда вынужденных колебаний при z, достаточно большом и достаточно малом по сравнению с $z = 1$, очень мало зависит от сопротивления среды. При z, близких к $z = 1$, влияние сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний весьма существенно.

При $z \to \infty$ амплитуда вынужденных колебаний асимптотически стремится к нулю. Это значит, что при большой частоте возмущающей силы по сравнению с собственной частотой амплитуда вынужденных колебаний весьма мала.

На рис. 2.15 представлена зависимость сдвига фазы вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в зависимости от z и β. Отметим, что при $z = 1$ сдвиг фазы равен $\pi/2$ при любом значении β. Резонансом при колебаниях в среде с сопротивлением называют вынужденные колебания при $z = 1$, т. е. при $p = k$, что отвечает примерно максимальному значению амплитуды вынужденных колебаний.

Задача 2.9. Под двигатель B (рис. 2.16) требуется подвести фундамент. Необходимо определить такую толщину кладки a, чтобы коэффициент динамичности не превышал единицы для всех частот вынужденных колебаний, передаваемых от двигателя фундаменту. Сопротивление грунта можно схематизировать как реакцию упругих сил $\mathbf{F}$ и вязких сил $\mathbf{R}$, вызванных внутренними силами сопротивления. Отнесенные к единице площади фундамента, коэффициенты жесткости и вязкости соответственно равны $c = 19{,}6\cdot 10^5$ Н/м^3 и $b = 588$ кН·с/м^3. Плотность материала фундамента $\rho = 24{,}5$ кН·с^2/м^4.

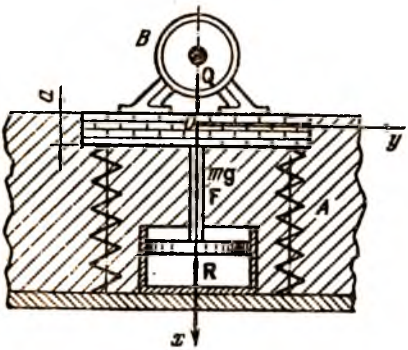


Рис. 2.16

Введем систему координат xOy, выбрав ее начало O в положении равновесия центра тяжести фундамента.

Обозначим через S площадь основания и представим проекцию вынуждающей силы $\mathbf{Q}$ на ось x в виде $Q_x = H\sin pt$. Тогда уравнение движения

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{Q} + m\mathbf{g}$$

в проекции на ось x дает

$$aS\rho\ddot{x} = -cS(x + \lambda_0) - bS\dot{x} + aS\rho g + H\sin pt.$$

Здесь мы воспользовались очевидными равенствами $m = aS\rho$, $F_x = -cS(x + \lambda_0)$, $R_x = -bS\dot{x}$, где λ_0 — статическая осадка фундамента.

Приведем уравнение движения к нормальному виду. Для этого разделим его на $aS\rho$ и воспользуемся равенством $aS\rho g = c\lambda_0$:

$$\ddot{x} + \frac{b}{a\rho}\dot{x} + \frac{c}{a\rho}x = \frac{H}{aS\rho}\sin pt.$$

Сравнивая с уравнением (2.39), найдем $h = b/(2a\rho)$, $k^2 = c/(a\rho)$. Следовательно, безразмерный коэффициент вязкости равен $\beta = h/k = b/(2\sqrt{a\rho c})$.

Коэффициент динамичности μ при всех частотах p не будет превосходить единицы, если потребовать, чтобы кривая $\mu(z)$ не имела максимума при $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$. Следовательно, должно выполняться неравенство $\beta \geqslant \sqrt{2}/2$, или $b/(2\sqrt{a\rho c}) \geqslant \sqrt{2}/2$. Отсюда получим толщину кладки a: $a \leqslant b^2/(2\rho c)$. Подставляя в это неравенство данные числовые значения параметров, получим

$$a \leqslant 3{,}6 \text{ м}.$$

§ 2.7. Электродинамические аналогии. Понятие об исследовании колебаний материальных систем с помощью электронных аналоговых машин

Колебательные процессы, происходящие в различных физических системах, описываются часто одинаковыми математическими уравнениями. Это обстоятельство дает возможность установить аналогию между системами различной физической природы. Наиболее полно эта аналогия установлена между механическими и электрическими системами.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, движение которой описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q(t). \qquad (2.50)$$

Здесь x — координата, m — масса точки, b — коэффициент сопротивления среды, c — коэффициент жесткости пружины, $Q(t)$ — возмущающая сила. Символически систему, отвечающую уравнению (2.50), изображают обычно схемой, показанной на рис. 2.17.

Рассмотрим теперь электрический контур, в котором индуктивность L, омическое сопротивление R, конденсатор емкостью C и внешний источник энергии э. д. с. $E(t)$ соединены последовательно

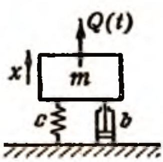


Рис. 2.17

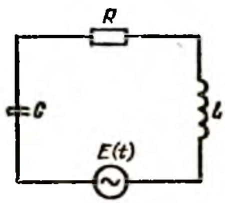


Рис. 2.18

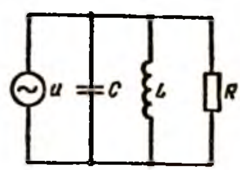


Рис. 2.19

(рис. 2.18). Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений на отдельных участках цепи равна разности потенциалов на концах зажимов, т. е. э. д. с. источника энергии. Падение напряжения от индуктивности равно $L\frac{di}{dt}$, где i — сила тока, падение напряжения от омического сопротивления равно Ri, а падение напряжения в конденсаторе определяется равенством $\frac{1}{C}q$, где q — заряд конденсатора. Следовательно, по второму закону Кирхгофа будем иметь

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t),$$

или, учитывая, что $i = dq/dt$,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \qquad (2.51)$$

Сравнивая с уравнением (2.50), видим, что колебания механической системы с одной степенью свободы и изменение заряда в электрической цепи описываются с точностью до обозначений совершенно одинаковыми дифференциальными уравнениями. Следовательно, между этими системами можно провести аналогию, сопоставив заряд q с координатой x, индуктивность L с массой m, омическое сопротивление R с коэффициентом сопротивления среды, величину, обратную емкости $1/C$, с коэффициентом жесткости c и электродвижущую силу $E(t)$ с возмущающей силой $Q(t)$.

Для электрического контура с параллельно соединенными элементами (рис. 2.19) на основании первого закона Кирхгофа будем иметь (складываются токи)

$$\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int u\,dt+C\frac{du}{dt}=i(t),$$

где u — напряжение.

Дифференцируя по времени, получим

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=\frac{di}{dt}.$$

Здесь мы имеем другую систему аналогий, в которой координате x соответствует напряжение u, массе m соответствует емкость C конденсатора, коэффициенту сопротивления среды b отвечает проводимость $1/R$, коэффициенту жесткости пружины c — величина, обратная индуктивности $1/L$, и возмущающей силе $Q(t)$ — скорость изменения тока di/dt.

Сведем результаты в таблицу 2 электродинамических аналогий.

Таблица 2

Механические величины	Электрические величины	
	1-я аналогия: сила—напряжение	2-я аналогия: сила—ток
1. Координата x	Заряд q	Напряжение u
2. Масса m	Индуктивность L	Емкость C
3. Коэффициент жесткости c	Обратная величина емкости $1/C$	Обратная величина индуктивности $1/L$
4. Коэффициент сопротивления среды b	Омическое сопротивление R	Проводимость $1/R$
5. Сила $Q(t)$	Э. д. с. $E(t)$	Скорость тока di/dt

Для того чтобы электродинамическими аналогиями можно было пользоваться без употребления переходных коэффициентов, достаточно выразить все величины в международной системе единиц СИ.

Пользуясь электродинамической аналогией можно для каждой механической системы построить соответствующую электрическую цепь, уравнения которой будут с точностью до обозначений совпадать с уравнениями движения механической системы. Электрическая цепь, в отличие от механической системы, комплектна; кроме того, процессы, происходящие в ней, хорошо наблюдаются на осциллографе. Эти соображения лежат в основе конструкции электронных аналоговых (моделирующих) машин.

Аналоговые машины имеют набор смонтированных быстро настраиваемых элементов индуктивностей, емкостей, сопротивлений или других элементов, создающих аналогичный эффект. Соединяя эти элементы в соответствующие цепи, можно определить все параметры, характеризующие движение механической системы, для которой собранная цепь является аналогом. В частности, весьма просто определяются частоты собственных колебаний системы. Для этого достаточно включить в цепь э. д. с. $E_0 \sin \omega t$ и увеличивать частоту ω до тех пор, пока не наступит резонанс. Соответствующая частота — собственная частота системы. Эта работа не требует высокой квалификации (сложность работы на собранной схеме примерно та же, что и сложность настройки радиоприемника) и может быть выполнена за сравнительно короткий промежуток времени с относительно большой точностью.

С помощью электронных аналоговых машин можно решать нелинейные задачи, когда линеаризация дифференциальных уравнений движения по каким-либо причинам недопустима, а также задачи, приводящие к линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. В заключение отметим, что в современных аналоговых машинах устанавливается, как правило, не электродинамическая, а электроматематическая аналогия, когда математическим операциям сложения, умножения, дифференцирования, интегрирования и т. п. отвечает соответствующий электрический элемент. Такие машины более универсальны.

Глава III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 3.1. Теорема об изменении количества движения материальной точки

При интегрировании дифференциальных уравнений движения в конкретных задачах эти уравнения подвергаются различным однотипным преобразованиям, зависящим от характера действующих сил. Поэтому целесообразно проделать такие преобразования в общем виде. Общие теоремы динамики точки и представляют собой преобразования дифференциальных уравнений движения, причем в различных теоремах выделены и связаны между собой те или иные характеристики движений. В результате получаются удобные зависимости, широко используемые для решения конкретных задач динамики.

Заметим, что в основном уравнении динамики

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} \tag{3.1}$$

масса материальной точки — величина постоянная и что $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$. Это позволяет переписать уравнение (3.1) в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

откуда следует, что

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\,dt. \tag{3.2}$$

Вектор $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$, равный произведению массы точки на ее скорость, называется *количеством движения материальной точки*.

Произведение силы на элементарный промежуток времени ее действия, т. е. $\mathbf{F}\,dt$, называется *элементарным импульсом силы*.

Уравнение (3.2) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме:

элементарное изменение количества движения материальной точки равно элементарному импульсу силы, приложенной к этой точке.

Рассмотрим теперь движение материальной точки на конечном промежутке времени. Пусть в момент $t = 0$ скорость точки равна $\mathbf{v}_0$, а в момент t равна $\mathbf{v}$. Тогда, интегрируя уравнение (3.2), можно записать

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{F}\,dt. \tag{3.3}$$

Интеграл, входящий в правую часть этого соотношения, называется *импульсом силы за промежуток времени* $[0, t]$. Таким образом, *изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно импульсу силы, приложенной в точке, за тот же промежуток времени.*

Если воспользоваться декартовой системой координат, то будем иметь

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k},$$

где x, y, z — координаты точки, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — компоненты ее скорости, F_x, F_y, F_z — проекции силы, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей координат. Тогда, проектируя векторное равенство (3.3) на оси декартовой системы координат, получим три скалярных соотношения:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_0^t F_x\,dt, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \int_0^t F_y\,dt, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \int_0^t F_z\,dt. \tag{3.4}$$

Здесь, как и ранее, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — проекции скорости материальной точки на оси координат в момент времени t; $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ — те же проекции в момент $t = 0$; F_x, F_y, F_z — проекции силы $\mathbf{F}$.

Как отмечалось в § 1.2, в общем случае $\mathbf{F}$ может быть функцией координат точки, ее скорости и времени, т. е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t)$$

и, следовательно, проекции силы также являются функциями этих величин:

$$F_x = F_x(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t),$$
$$F_y = F_y(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t),$$
$$F_z = F_z(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ t).$$

Поэтому для фактического вычисления интегралов, стоящих в правых частях уравнений (3.4), нужно знать координаты материальной точки как функции времени. Но определение x, y и z как функций времени и есть то, к чему мы стремимся, решая вторую задачу динамики. Если эти функции откуда-либо известны, то отпадает необходимость пользоваться уравнениями (3.4). Таким образом, в общем случае теорема об изменении количества движения новых возможностей для решения задачи не открывает.

Однако, если сила является функцией только времени, интегралы в правых частях уравнений (3.4) могут быть вычислены и можно получить первые интегралы уравнений движения

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \Phi_1(t), \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \Phi_2(t), \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \Phi_3(t), \tag{3.5}$$

где $\Phi_1(t) = \int\limits_0^t F_x\,dt$, $\Phi_2(t) = \int\limits_0^t F_y\,dt$, $\Phi_3(t) = \int\limits_0^t F_z\,dt$ — проекции импульса силы на оси координат.

Дальнейшее интегрирование также не представляет принципиальных трудностей:

$$x - x_0 = \dot{x}_0 t + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \Phi_1(t)\,dt, \quad y - y_0 = \dot{y}_0 t + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \Phi_2(t)\,dt,$$

$$z - z_0 = \dot{z}_0 t + \frac{1}{m}\int\limits_0^t \Phi_3(t)\,dt.$$

Здесь x_0, y_0, z_0 — начальные значения координат в момент времени $t = 0$.

Если сила постоянна, т. е. $F_x = A_1$, $F_y = A_2$, $F_z = A_3$ (A_1, A_2, A_3 — постоянные величины), то

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = A_1 t, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = A_2 t, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = A_3 t$$

и

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{A_1 t^2}{2m}, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{A_2 t^2}{2m}, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{A_3 t^2}{2m}.$$

В частном случае при $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, $A_2 = A_3 = 0$ будем иметь

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = A_1 t \tag{3.6}$$

и

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{A_1 t^2}{2m}, \tag{3.7}$$

т. е. материальная точка совершает равнопеременное прямолинейное движение вдоль оси x.

Задача 3.1. Определить промежуток времени T, необходимый для того, чтобы материальная точка массы m, движущаяся по горизонтальной прямой под действием постоянной силы F, увеличила свою начальную скорость v_0 в n раз.

Примем прямую, вдоль которой движется точка, за ось x; тогда на основании (3.6) имеем $m(nv_0 - v_0) = FT$, откуда $T = \frac{mv_0}{F}(n-1)$.

§ 3.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Вновь вернемся к основному уравнению динамики (3.1) и умножим его векторно слева на радиус-вектор точки $\mathbf{r}$, определяющий положение материальной точки относительно какой-либо точки O, которую будем называть центром:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{3.8}$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$, преобразуем левую часть этого уравнения следующим образом:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}.$$

Но $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, и векторное произведение параллельных векторов $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ равно нулю. Поэтому $\mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})$, и уравнение (3.8) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{3.9}$$

Вектор $\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ называется *моментом количества движения материальной точки* относительно центра (точки O).

Вектор $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ нам известен из курса статики и представляет собой момент силы, приложенной к точке, относительно центра.

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O. \tag{3.10}$$

Это уравнение выражает собой теорему об изменении момента количества движения материальной точки: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.*

Векторное уравнение (3.10) эквивалентно трем скалярным равенствам.

Принимая точку O за начало системы координат xyz и записывая векторные произведения в виде определителей третьего порядка, вместо (3.10) получаем

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= yF_z - zF_y, \\ m\frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= zF_x - xF_z, \qquad (3.11) \\ m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту силы, приложенной к точке, относительно той же самой оси.*

Как видно из уравнений (3.11), при их интегрировании необходимо вычисление интегралов от правых частей. Однако вычисление этих интегралов возможно только тогда, когда x, y и z известны как функции времени, но тогда отпадает вообще надобность в применении равенств (3.11).

Тем не менее существуют случаи, когда теорема об изменении момента количества движения дает возможность эффективно решать задачи динамики. К ним относится прежде всего случай действия *центральной силы*. Этим термином мы будем пользоваться применительно к любой силе, линия действия которой проходит через некоторую фиксированную точку пространства *) (полюс). Так, например, при изучении движения Земли в Солнечной системе на Землю действует сила притяжения Солнца, все время направленная к центру Солнца

Изучим действие центральной силы. Момент силы относительно точки, через которую проходит линия действия, тождественно равен нулю. Следовательно, согласно равенству (3.10) момент количества движения материальной точки относительно полюса является постоянной величиной:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}. \qquad (3.12)$$

Таким образом, мы получим сразу три первых интеграла движения:

$$m(y\dot{z} - z\dot{y}) = c_1, \quad m(z\dot{x} - x\dot{z}) = c_2, \quad m(x\dot{y} - y\dot{x}) = c_3. \qquad (3.13)$$

*) В § 3.5 будет дано несколько более узкое определение центральной силы.

На основании этих результатов можно сделать некоторые общие выводы о характере движения материальной точки.

Для этой цели введем понятие *секторной скорости*. Секторная скорость вводится как вектор, характеризующий быстроту изменения площади поверхности, описываемой радиусом-вектором.

Пусть в момент времени t материальная точка находится в точке A траектории, а в момент времени $t+\Delta t$ — в точке A_1 (рис. 3.1). Площадь $\Delta\sigma$ треугольника OAA_1 равна половине модуля векторного произведения радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на вектор перемещения $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$, т. е.

$$\Delta\sigma = {}^1/_2\,|\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}|.$$

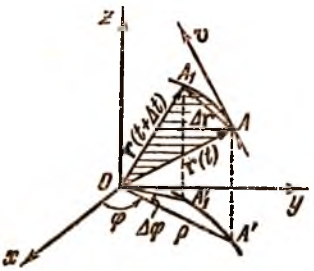


Рис. 3.1

Разделив обе части этого соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$q = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|, \tag{3.14}$$

так как $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}$ — скорость точки в момент времени t.

Формула (3.14) определяет модуль секторной скорости. Заметим, что модуль секторной скорости может быть вычислен как площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. За направление вектора секторной скорости примем направление векторного произведения радиуса-вектора на скорость точки. Тогда вектор секторной скорости равен

$$\mathbf{q} = {}^1/_2\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v}), \tag{3.15}$$

т. е. *секторная скорость равна половине векторного произведения радиуса-вектора точки на ее скорость.*

Сравнивая (3.15) с основным выражением для $\mathbf{K}_O = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$, можем написать интеграл (3.12) в следующей форме:

$$\mathbf{K}_O = 2m\mathbf{q} = \text{const}. \tag{3.16}$$

Следовательно, в случае действия центральной силы секторная скорость точки есть постоянная величина, т. е. *радиус-вектор точки описывает равные площади в любые одинаковые промежутки времени.* Этот результат называется *законом площадей.* Но, кроме того, из (3.16) следует, что траектория точки является плоской кривой. В самом деле, вектор $\mathbf{q}$ сохраняет постоянное направление в пространстве, поэтому на основании формулы (3.15) можно утверждать, что вектор $\mathbf{r}$ будет все время расположен в плоскости, перпендикулярной к вектору **q**, т. е. траектория точки лежит в этой плоскости *).

Предположим, что движение происходит в плоскости и положение точки определяется полярными координатами r и φ. Тогда $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$, $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}^0 + r\dot{\varphi}\mathbf{p}^0$ (том I, § 9.4), и формула (3.15) может быть записана в виде

$$\mathbf{q} = {}^1/_2\, r^2\dot{\varphi}\,(\mathbf{r}^0 \times \mathbf{p}^0) = {}^1/_2\, r^2\dot{\varphi}\mathbf{k}, \tag{3.17}$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{r}^0 \times \mathbf{p}^0$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой происходит движение.

Если вектор **q** является постоянной величиной, то его проекция на направление, определяемое направлением вектора **k**, также постоянная величина, т. е.

$$q_k = {}^1/_2\, r^2\dot{\varphi} = c, \tag{3.18}$$

где c — постоянная величина.

Соотношение (3.18) называется *законом площадей*. Это соотношение может быть получено и другим путем. Если плоскость, в которой расположена траектория, будет плоскостью xy, то вместо векторного равенства (3.16) можно записать

$$2mq_z = m\,(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mathrm{const},$$

или $q_z = {}^1/_2\,(x\dot{y} - y\dot{x}) = c$,

где c — постоянная величина.

Так как в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то, принимая во внимание, что

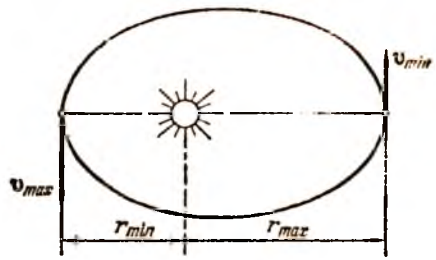


Рис. 3.2

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

получим

$$q_z = {}^1/_2\, r^2\dot{\varphi} = c.$$

Задача 3.2. Траектория наиболее удаленной от Солнца планеты Плутон имеет вид эллипса, причем расстояние от Солнца до Плутона меняется от $4{,}46\cdot 10^9$ км до $7{,}4\cdot 10^9$ км (рис. 3.2). Определить отношение между максимальной и минимальной скоростью Плутона.

Секторные скорости точки, движущейся по эллипсу, в моменты прохождения через положения максимального и минимального удаления одинаковы: ${}^1/_2 v_{max} r_{min} = {}^1/_2 v_{min} r_{max}$. Следовательно, искомое отношение составляет $v_{max}/v_{min} = r_{max}/r_{min}$, т. е. $v_{max}/v_{min} = 7{,}4/4{,}46 = 1{,}66$.

---

*) Возможно и другое доказательство. Умножим обе части каждого из уравнений (3.13) на x, y, z и сложим. В результате получим $c_1x + c_2y + c_3z = 0$. Это означает, что координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости. Следовательно, траектория есть плоская кривая.

Задача 3.3. Шарик, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью u в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0 (рис. 3.3).

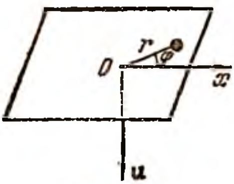


Рис. 3.3

На шарик действует сила, направленная вдоль нити. Так как эта сила центральная, то момент количества движения шарика относительно точки O является постоянной величиной и справедливо соотношение (3.18).

Постоянную c найдем из начальных условий: при $t = 0$ $r = R$, $\dot\varphi = v_0/R$. Подставляя эти выражения в (3.18), находим $r_0^2\dot\varphi_0 = Rv_0$. Таким образом, для всего последующего процесса движения имеем

$$r^2\dot\varphi = Rv_0.$$

По условию задачи скорость, с которой втягивается нить, равна u, откуда следует, что $\dot r = -u$. Приняв во внимание начальные условия, после интегрирования получим $r = R - ut$. Тогда уравнение для определения φ примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Rv_0}{(R-ut)^2}.$$

Интегрируя и имея в виду, что $\varphi = 0$ при $t = 0$, находим

$$\varphi = \frac{v_0 t}{R - ut}.$$

Чтобы построить траекторию шарика, исключим из уравнений для r и φ время t; тогда получим величину радиуса-вектора r в функции полярного угла φ:

$$r = \frac{v_0 R}{u\varphi + v_0}.$$

Траектория шарика представляет собой свертывающуюся спираль. С приближением шарика к началу координат угол φ растет все быстрее и быстрее, т. е. скорость вращения радиуса-вектора возрастает. При $t \to R/u$ эта скорость стремится к бесконечности.

§ 3.3. Работа силы. Мощность

Перейдем к понятию работы, с помощью который мы получим еще одну общую теорему динамики материальной точки.

В элементарном курсе физики понятие работы вводится следующим образом. Пусть материальная точка M движется по прямой линии BC и $\mathbf{F}$ — некоторая постоянная по модулю и направлению сила, приложенная к точке M. Будем считать, что точка M движется в одном направлении от положения M_1 до положения M_2. Обозначим наименьший угол между силой $\mathbf{F}$ и скоростью $\mathbf{v}$ точки M через α (рис. 3.4). *Тогда работой постоянной силы F на прямолинейном*

отрезке M_1M_2 называют произведение модуля силы на величину перемещения $s = M_1M_2$ и на косинус угла между ними

$$A_{1,2} = Fs\cos\alpha. \tag{3.19}$$

Конечно, это равенство можно записать в форме скалярного произведения

$$A_{1,2} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}, \tag{3.20}$$

где $\mathbf{s} = \overline{M_1M_2}$ — вектор перемещения точки.

Напомним, что единицей измерения работы в системе СИ является джоуль (1 Дж = 1 Н·м), а в технической системе — 1 кгс·м (1 кгс·м ≈ 9,81 Дж).

Приведенное определение работы силы применимо только в том случае, если сила постоянна по модулю и направлению, а точка приложения силы перемещается прямолинейно.

Перейдем к общему определению работы силы, считая, что

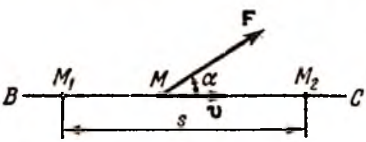


Рис. 3.4

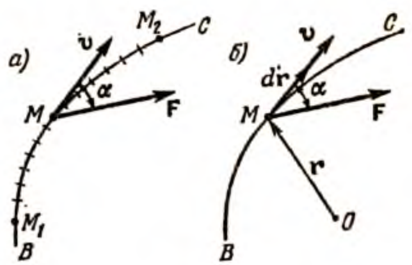


Рис. 3.5

сила может изменяться по модулю и направлению, а точка M приложения силы $\mathbf{F}$ перемещается по любой криволинейной траектории BC от M_1 до M_2 (рис. 3.5, *а*). Разобьем отрезок кривой M_1M_2 на n произвольных, но малых участков, обозначив длину участка с номером k через Δs_k. Не внося больших погрешностей в вычисление, можно считать каждый участок прямолинейным отрезком и что при перемещении точки M вдоль этого участка сила $\mathbf{F}$ остается постоянной по модулю и направлению. Тогда согласно формуле (3.19), работа силы на k-м участке будет приближенно равна $F_k\cos\alpha_k\,\Delta s_k$, а на всем пути от M_1 до M_2 — сумме работ на отдельных участках

$$A_{1,2} \approx \sum_{k=1}^{n} F_k\cos\alpha_k\,\Delta s_k.$$

Точное значение работы получим, переходя к пределу, при условии, что число участков n неограниченно возрастает, а длина каждого участка Δs_k неограниченно убывает:

$$A_{1,2} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{k=1}^{n} F_k\cos\alpha_k\,\Delta s_k.$$

Такой предел называется криволинейным интегралом первого рода по дуге M_1M_2 и обозначается следующим образом *):

$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} F \cos\alpha \, ds. \tag{3.21}$$

Для того чтобы, пользуясь формулой (3.21), вычислить работу силы, нужно выразить произведение $F\cos\alpha$ как функцию длины дуги s. В подавляющем большинстве случаев это очень трудно выполнить, поэтому обычно пользуются криволинейным интегралом второго рода. Для того чтобы сделать этот переход, введем в рассмотрение элементарную работу силы (это понятие имеет самостоятельное значение, и мы будем неоднократно пользоваться им).

Под элементарной работой $d'A$ силы $\mathbf{F}$ понимается выражение, стоящее под знаком интеграла (3.21):

$$d'A = F\cos\alpha\, ds. \tag{3.22}$$

В кинематике было показано, что дифференциал пути ds равен модулю дифференциала радиуса-вектора $\mathbf{r}$, т. е. $ds = |d\mathbf{r}|$. Следовательно, элементарную работу силы можно представить следующим образом:

$$d'A = F\,|d\mathbf{r}|\cos\alpha,$$

или, через скалярное произведение векторов $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}$,

$$d'A = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{3.23}$$

Теперь, сравнивая выражения (3.23) и (3.20), можно определить элементарную работу силы как работу ее на прямолинейном перемещении $d\mathbf{r}$ при условии, что величина и направление силы на этом перемещении не меняются. Напомним, что $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$. Это означает, что вектор $d\mathbf{r}$ совпадает по направлению с вектором скорости $\mathbf{v}$ точки (рис. 3.5, *б*).

Запишем выражение (3.23) через проекции векторов, входящих в скалярное произведение:

$$d'A = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \tag{3.24}$$

Даже в тех случаях, когда сила $\mathbf{F}$ зависит только от положения точки M, т. е. от координат x, y, z точки M, правая часть этого равенства не представляет, как правило, полный дифференциал некоторой функции координат $A\,(x, y, z)$. Поэтому в обозначение элементарной работы $d'A$ после буквы d ставится наверху знак «штрих» **) (в § 3.5 будет рассмотрен особый класс сил, для которых правая часть равенства равна полному дифференциалу функции координат).

---

*) Происхождение этого термина очевидно: подынтегральная функция $F\cos\alpha$ вычисляется на кривой, а в качестве переменной интегрирования берется длина дуги s.

**) В некоторых книгах элементарная работа обозначается символом δA. В настоящем руководстве символ δA применяется для обозначения работы силы на виртуальном перемещении $\delta\mathbf{r}$ (см. § 18.3).

Все три выражения (3.22), (3.23) и (3.24) для элементарной работы силы эквивалентны. Поэтому, пользуясь равенствами (3.21), (3.22) и (3.24), получим другую формулу для вычисления работы силы **F** на отрезке M_1M_2 дуги BC

$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} F_x\,dx + F\ \ dy + F_z\,dz. \tag{3.25}$$

Правая часть этого равенства называется криволинейным интегралом второго рода (все функции F_x, F_y и F_z вычисляются на кривой M_1M_2, а дифференциалы координат dx, dy, dz связаны между собой через ее уравнение).

Если сила **F** зависит только от положения точки, т. е. от координат x, y, z точки M приложения силы, то работа вычисляется непосредственно по формуле (3.25) и при этом совершенно не нужно знать закон движения точки M по кривой. Если же сила **F** зависит не только от координат точки приложения, но и от ее скорости и от времени t, то для вычисления работы силы нужно знать уравнения движения точки

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t). \tag{3.26}$$

Отсюда

$$dx = \dot{x}\,dt,\ \ dy = \dot{y}\,dt,\ \ dz = \dot{z}\,dt. \tag{3.27}$$

Подставив в формулу (3.25) вместо координат точки их значения из (3.26), вместо проекций скорости производные по времени от этих величин и вместо дифференциалов координат их значения из (3.27), мы сведем криволинейный интеграл (3.25) к обычному определенному интегралу

$$A_{1,2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt, \tag{3.28}$$

где t_1 и t_2 — моменты времени, в которые точка M проходит положения M_1 и M_2 соответственно (см. рис. 3.5, *а*).

Пусть теперь на материальную точку M действует несколько сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Легко доказать (читатель без труда сделает это самостоятельно), что *работа равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на некотором перемещении равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении*

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим один частный случай, когда действующая на точку M сила сохраняет постоянное направление и модуль ($\mathbf{F} = \mathrm{const}$). Вычислим работу такой силы при перемещении точки M по некоторой траектории BC от положения M_1

до положения M_2 (рис. 3.6, *а*). Для этого воспользуемся формулой (3.21), учтя, что $F\cos\alpha\, ds = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Имеем

$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Вынесем постоянный множитель $\mathbf{F}$ за знак интеграла и примем во внимание, что при движении точки M от M_1 до M_2 радиус-вектор $\mathbf{r}$ меняется от $\mathbf{r}_1$ до $\mathbf{r}_2$ (см. рис. 3.6, *а*). Тогда последовательно получим

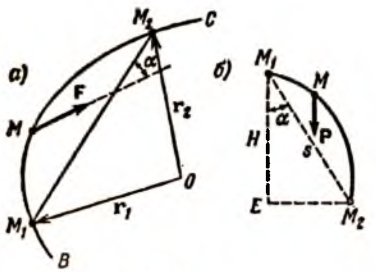


Рис. 3.6

$$A_{1,2} = \mathbf{F}\cdot\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1),$$

или, учитывая, что $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 = \overline{M_1M_2}$,

$$A_{1,2} = \mathbf{F}\cdot\overline{M_1M_2} = Fs\cos\alpha,$$

где $s = M_1M_2$ и α — угол между неизменным направлением силы $\mathbf{F}$ и вектором перемещения $\overline{M_1M_2}$.

Так как последнее равенство совпадает с (3.19), то это означает, что при постоянной силе формулу (3.19) можно применять при перемещении точки M по любому криволинейному пути, если только под s понимать кратчайшее расстояние между начальным и конечным положениями точки приложения силы.

Применим полученный вывод к вычислению работы силы тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. Сила тяжести направлена вертикально вниз; произведение $s\cos\alpha$ равно по модулю вертикальному перемещению H точки M (рис. 3.6, *б*). Поэтому

$$A_{1,2} = \pm PH, \tag{3.29}$$

т. е. работа силы тяжести равна произведению модуля этой силы на вертикальное перемещение точки, взятому со знаком «плюс», если точка M опускается, и со знаком «минус», если точка M поднимается. Формулой (3.29) для вычисления работы силы тяжести мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Рассмотрим две задачи на непосредственное применение полученных ранее формул.

Задача 3.4. Проекции силы определены равенствами

$$F_x = -py,\quad F_y = px,\quad F_z = 0,$$

где p — некоторое положительное число, а x и y — координаты точки приложения силы $\mathbf{F}$. Определить работу силы $\mathbf{F}$ при движении точки приложения ее от начала координат O до точки M с координатами x, y в трех случаях: 1) точка приложения силы перемещается от O к M по кратчайшему пути; 2) точка приложения силы перемещается сначала по оси x, а затем по прямой, параллельной оси y; 3) точка приложения силы перемещается сначала по оси y, а затем по прямой, параллельной оси x (рис. 3.7).

Прежде всего заметим, что сила $\mathbf{F}$ перпендикулярна к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ точки приложения силы. Для того чтобы доказать это, достаточно составить скалярное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Имеем

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = xF_x + yF_y + zF_z = x(-py) + y(px) = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ перпендикулярны *). Отсюда следует, что при движении точки по первому пути от O до M по прямой OM работа A_1 силы $\mathbf{F}$ будет равна нулю. Покажем это аналитически, пользуясь формулой (3.25). Для этого напишем прежде всего уравнение прямой OM: $y = kx$, где k — угловой коэффициент. Отсюда $dy = k\,dx$.

Применим теперь формулу (3.25), учтя при этом заданные проекции сил, уравнение прямой OM и значение dy. Последовательно получим

$$A_1 = \int\limits_{OM} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \int\limits_{OM} (-py)\,dx + (px)\,dy = \int\limits_0^x [(-pkx) + (px)\,k]\,dx \equiv 0.$$

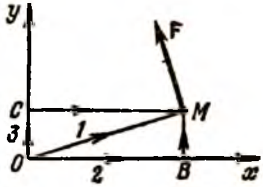


Рис. 3.7

Во втором случае разобьем весь путь интегрирования на два участка: от O до B и от B до M (рис. 3.7). На первом участке от O до B $y = 0$ и $dy = 0$, на втором участке от B до M $x = \text{const}$ и $dx = 0$. Имеем

$$A_2 = \int\limits_{OM} = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BM} = \int\limits_0^x F_x\,dx + \int\limits_0^y F_y\,dy = \int\limits_0^y px\,dy = pxy.$$

В третьем случае разобьем весь путь интегрирования тоже на два участка: от O до C и от C до M (см. рис. 3.7). На участке от O до C $x = 0$ и $dx = 0$, на втором участке от C до M $y = \text{const}$ и $dy = 0$. Имеем

$$A_3 = \int\limits_{OM} = \int\limits_{OC} + \int\limits_{CM} = \int\limits_0^y F_y\,dy + \int\limits_0^x F_x\,dx = \int\limits_0^x (-py)\,dx = -pxy.$$

Итак, работа рассматриваемой силы $\mathbf{F}$ на первом пути равна нулю, на втором пути pxy и на третьем пути $-pxy$. Этот пример наглядно показывает, что в общем случае работа силы зависит не только от начального и конечного положения точки приложения силы, но также и от пути, по которому эта точка перемещается. Отметим еще, что во всех трех случаях данного примера для вычисления работы силы не нужно знать закона движения точки, ее массу и скорость.

Задача 3.5. Вычислить работу силы сопротивления, действующей на корабль, за время, в течение которого скорость корабля после остановки двигателей уменьшится вдвое (см. задачу 1.7).

Так как сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению корабля, то угол $\alpha = 180°$. Пользуясь формулой (3.21) и значением модуля силы $\mathbf{F}$, получим ($v_x = dx/dt$)

$$A = -\alpha \int\limits_{M_1M_2} v_x^2\,dx = -\alpha \int\limits_0^t v_x^3\,dt,$$

где t — значение времени, при котором скорость корабля уменьшилась вдвое.

---

*) Силы такой структуры встречаются весьма часто (следящие силы, действующие на упругие стержни, силы радиальной коррекции в гироскопических устройствах и т. п.). См., например, Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — 3-е изд. — М.: Наука, 1987.

Для дальнейших вычислений нужно знать закон движения корабля. Воспользуемся результатами задачи 1.7 (стр. 30). При решении этой задачи была установлена следующая зависимость скорости корабля от времени t (см. равенство (1.36)):

$$v_x = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}.$$

Подставив это выражение для скорости в последнее равенство, будем иметь

$$A = -\alpha \int_0^t \frac{m^3 v_0^3}{(m + \alpha v_0 t)^3}\, dt.$$

После интегрирования получим выражение для работы как функции времени

$$A = \frac{m^3 v_0^2}{2} \left[\frac{1}{(m + \alpha v_0 t)^2} - \frac{1}{m^2} \right]. \qquad (3.30)$$

Пользуясь выражением для скорости, найдем

$$m + \alpha v_0 t = \frac{mv_0}{v}.$$

Теперь равенство (3.30) приводится к виду

$$A = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2). \qquad (3.31)$$

Для того чтобы найти работу силы за время, в течение которого скорость уменьшится вдвое, нужно в последнем равенстве положить $v = v_0/2$. Получим

$$A = -{}^3/_8 m v_0^2.$$

В отличие от предыдущей задачи, здесь работа силы зависит от массы и скорости тела.

В § 3.4 будет показано, что формула (3.31), полученная здесь путем анализа конкретной задачи, является общей для любых сил, действующих на материальную точку.

Остановимся теперь кратко на понятии мощности силы. В элементарном курсе физики мощность определяется как количество работы, производимой в единицу времени. Это определение применимо, конечно, только в том случае, если в равные промежутки времени сила производит равные работы. Нам остается распространить это определение на общий случай, когда работа производится не равномерно.

Вычислим работу силы $\mathbf{F}$ от некоторой фиксированной точки M_1 до точки M (см. рис. 3.5а)

$$A = \int_{M_1 M} F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz.$$

При движении точки M работа A силы $\mathbf{F}$ будет с течением времени t меняться. Для того чтобы получить работу A как явную функцию времени t, достаточно воспользоваться формулой (3.28), заменив в ней фиксированный верхний предел интегрирования t_2 на переменный предел t:

$$A(t) = \int_{t_1}^{t} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z})\, dt. \qquad (3.32)$$

Теперь мощность N силы $\mathbf{F}$ легко определяется как скорость изменения работы:

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}, \tag{3.33}$$

где A рассматривается как функция времени t.

Легко видеть, что полный дифференциал работы, выраженной как функция времени t по формуле (3.32), равен элементарной работе силы $d'A$. Действительно, если рассматривать работу как функцию времени t, то, пользуясь формулой (3.32), найдем

$$dA(t) = (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz,$$

что совпадает с выражением (3.24) для элементарной работы. Таким образом, имеем

$$dA(t) = d'A, \tag{3.34}$$

или, пользуясь равенством (3.23),

$$dA(t) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{3.35}$$

В этих равенствах предполагается, что правые части выражены с помощью соотношений (3.26) и (3.27) через время t. Теперь мощность N силы $\mathbf{F}$ можно записать следующим образом:

$$N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

или

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}, \tag{3.36}$$

т. е. мощность N равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}$ на скорость $\mathbf{v}$ точки приложения силы.

Теперь под знак интеграла в формулу (3.28) можно внести мощность:

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt. \tag{3.37}$$

Если изменение работы происходит равномерно, т. е. мощность постоянна, то $A = Nt$ и тогда

$$N = A/t. \tag{3.38}$$

В этом случае, как уже отмечалось, мощность равна количеству работы, производимой в единицу времени.

Единицей измерения мощности в системе СИ является *ватт* (1 Вт = 1 Дж/с), а в технической системе — 1 кгс·м/с. В технике применяются также более крупные единицы мощности: 1 кВт = = 1000 Вт и так называемая лошадиная сила (1 л. с. = 75 кгс·м/с).

§ 3.4. Теорема об изменении кинетической энергии

Найдем связь между работой сил, приложенных к материальной точке, и изменением скорости точки. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Умножим обе части этого равенства скалярно на дифференциал радиуса-вектора $d\mathbf{r}$:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{3.39}$$

В правой части стоит элементарная работа $d'A$ равнодействующей всех сил, приложенных к материальной точке; левую часть можно представить в следующей форме:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r}=m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot d\mathbf{v}=m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=d\left(\frac{mv^2}{2}\right);$$

при этом учтено, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля ($\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=v^2$). Теперь равенство (3.39) примет вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=d'A. \tag{3.40}$$

Половина произведения массы точки на квадрат ее скорости называется *кинетической энергией* материальной точки

$$T=\frac{mv^2}{2}. \tag{3.41}$$

Уравнение (3.40) дает дифференциальную связь между кинетической энергией и элементарной работой: *полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе всех действующих на эту точку сил.*

Будем рассматривать все члены, входящие в равенство (3.40), как функции времени t. Тогда, учитывая соотношения (3.33), (3.34) и деля обе части равенства (3.40) на dt, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=N, \tag{3.42}$$

т. е. *полная производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна суммарной мощности всех действующих на эту точку сил.*

Пусть теперь материальная точка M перемещается по кривой BC от положения M_1 до положения M_2 (см. рис. 3.5, *а*). Обозначим через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ скорость точки M в положениях M_1 и M_2 соответственно и проинтегрируем обе части равенства (3.40) по кривой M_1M_2:

$$\int\limits_{M_1M_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int\limits_{M_1M_2} d'A.$$

Правая часть этого равенства равна работе $A_{1,2}$ силы $\mathbf{F}$ на пути M_1M_2; при вычислении левой части следует иметь в виду, что криволинейный интеграл от полного дифференциала некоторой функции равен самой функции. Таким образом, будем иметь

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}, \tag{3.43}$$

т. е. *изменение кинетической энергии материальной точки, при переходе ее из начального в конечное (текущее) положение равно сумме работ на этом перемещении всех сил, приложенных к точке.*

С помощью только что доказанной теоремы об изменении кинетической энергии можно решать следующие две основные задачи. В первой определяется скорость материальной точки в конце или начале движения. Решение этой задачи с помощью равенства (3.43) имеет смысл, конечно, только в том случае, если работу всех сил, приложенных к материальной точке, можно вычислить, не зная закона движения, т. е. не интегрируя уравнения движения. К задачам второго типа относится вычисление работы силы по заданной скорости. Использование формулы (3.43) для решения задач такого рода особенно полезно в тех случаях, когда трудности, связанные с определением закона движения и вычислением интеграла (3.28), сравнительно велики (см. задачи 3.12 и 3.13) или когда неизвестна аналитическая зависимость силы (см. задачу 10.4).

§ 3.5. Силовое поле. Потенциальная энергия

В этом параграфе рассматриваются позиционные силы, которые зависят только от положения материальной точки в пространстве.

Будем называть *силовым полем* область (часть пространства), в каждой точке которой на помещенную в ней материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени. Таким образом, в силовом поле должна быть известна одна векторная функция $\mathbf{F}$, зависящая от радиуса-вектора точки $\mathbf{r}$ и времени t:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

или три скалярные функции — проекции силы $\mathbf{F}$

$$F_x = F_x(x, y, z, t), \quad F_y = F_y(x, y, z, t), \quad F_z = F_z(x, y, z, t),$$

где x, y, z — координаты точки.

Силовое поле называется *нестационарным*, если сила $\mathbf{F}$ зависит явно от времени t, и *стационарным*, если сила не зависит от времени t явно. В дальнейшем будем рассматривать только стационарные силовые поля, когда сила зависит только от положения точки, т. е. от ее радиуса-вектора

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

а ее проекции являются функциями координат точки

$$F_x = F_x(x, y, z), \quad F_y = F_y(x, y, z), \quad F_z = F_z(x, y, z). \tag{3.44}$$

Отметим два общих свойства таких полей:

1. Работа сил стационарного поля зависит в общем случае от начального M_1 и конечного M_2 положений и траектории, но не зависит от закона движения материальной точки по траектории.

2. Имеет место равенство

$$A_{2,1} = -A_{1,2}, \tag{3.45}$$

где $A_{1,2}$ — работа сил стационарного поля при движении материальной точки от M_1 к M_2, а $A_{2,1}$ — работа сил поля при движении точки по той же траектории в обратном направлении от M_2 к M_1.

Первое свойство следует непосредственно из формулы (3.25), а второе — из формулы (3.21) (модуль и направление силы $\mathbf{F}$ в каждой точке траектории не зависят от направления движения и времени t, а угол α между скоростью $\mathbf{v}$ и силой $\mathbf{F}$ при изменении направления движения перейдет в $\pi - \alpha$). Заметим, что для нестационарных силовых полей эти свойства не имеют места.

Рис. 3.8

Рассмотрим какое-нибудь стационарное поле и вычислим работу сил поля при перемещении материальной точки из положения M_1 в положение M_2 по двум различным траекториям (рис. 3.8). Работу сил поля при движении по первой траектории обозначим через $A^{\mathrm{I}}_{1,2}$, а работу сил поля при движении по второй траектории обозначим через $A^{\mathrm{II}}_{1,2}$. В общем случае эти работы не равны между собой: $A^{\mathrm{I}}_{1,2} \neq A^{\mathrm{II}}_{1,2}$ (см. задачу 3.4).

Среди стационарных силовых полей важное место занимают поля, работа сил которых не зависит от траектории (пути) движения материальной точки и определяется только положением начальной и конечной точек пути. Такие силовые поля называются *потенциальными* (консервативными). Согласно определению для потенциальных сил работа не зависит от пути и, следовательно, для них имеет место равенство

$$A^{\mathrm{I}}_{1,2} = A^{\mathrm{II}}_{1,2} = A_{1,2}, \tag{3.46}$$

где I и II — любые пути, по которым материальная точка может перейти от M_1 к M_2, а $A_{1,2}$ — общее значение работы.

Пусть точка M с координатами x, y, z является точкой в области заданного потенциального силового поля. Выберем в этом же силовом поле произвольную точку M_0, зафиксируем ее положение и назовем нулевой точкой. При движении материальной точки от положения M до нулевой точки M_0 работа сил потенциального поля будет зависеть только от положения точки M, т. е. от ее координат x, y, z, так как положение точки M_0 неизменно, а работа сил потенциального поля не зависит от пути. Следовательно, работа сил потенциального поля A_{MM_0} при движении материальной точки от точки поля M до точки M_0 является некоторой функцией координат x, y, z точки M. Эта функция называется *потенциальной энергией* и обозначается греческой буквой П. По определению

$$П(x, y, z) = A_{MM_0}; \qquad (3.47)$$

при этом предполагается, что функция $П(x, y, z)$ однозначна и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Рис. 3.9

Из приведенного определения потенциальной энергии вытекает, что нулевая точка — это точка, в которой потенциальная энергия условно принимается равной нулю.

Покажем, что потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной. Действительно, выберем вместо точки M_0 другую нулевую точку — точку M_0^* и обозначим соответствующую потенциальную энергию через П*. По определению будем иметь

$$П^* = A_{MM_0^*}.$$

Так как работа сил потенциального поля не зависит от пути, то выберем путь от M до M_0^* так, чтобы он проходил через точку M_0 (рис. 3.9). Разбивая весь путь от M до M_0^* на два участка: от M до M_0 и от M_0 до M_0^*, получим

$$П^* = A_{MM_0} + A_{M_0M_0^*}.$$

Первое слагаемое равно потенциальной энергии П при старой нулевой точке M_0, а второе слагаемое постоянно (не зависит от координат x, y, z точки M). Обозначая это слагаемое через C, получим

$$П^* = П + C,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Предположим, что потенциальная энергия силового поля известна, т. е. известно значение функции П в каждой точке области существования силового поля. Найдем, чему равна работа сил потенциального поля при переходе материальной точки из положения M_1 в положение M_2. Для вычисления работы выберем путь от точки M_1 до точки M_0 проходящим через точку M_2 (рис. 3.10). Разбивая путь $M_1M_2M_0$ на два участка M_1M_2 и M_2M_0, получим

$$A_{M_1M_0} = A_{M_1M_2} + A_{M_2M_0}.$$

По определению $A_{M_1M_0} = \Pi_1$, а $A_{M_2M_0} = \Pi_2$, где Π_1 — потенциальная энергия в точке M_1, Π_2 — потенциальная энергия в точке M_2, следовательно,

$$A_{M_1M_2} = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{3.48}$$

т. е. *работа сил потенциального поля при перемещении материальной точки равна разности потенциальных энергий в начальной и конечной точках пути.*

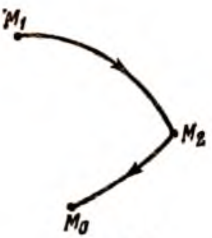


Рис. 3.10

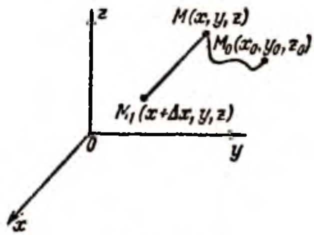


Рис. 3.11

Силовое поле задается обычно проекциями силы на оси координат, т. е. функциями (3.44).

Для того чтобы решить вопрос о том, является ли это данное силовое поле потенциальным, докажем предварительную теорему:

Для того чтобы силовое поле (3.44) *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная однозначная функция координат* $\Pi(x, y, z)$, *называемая потенциальной энергией поля, частные производные от которой удовлетворяют равенствам*

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{3.49}$$

Докажем сначала необходимость этих условий. Предположим, что силовое поле является потенциальным, т. е. работа от пути не зависит.

Вычислим работу сил поля на перемещении точки из положения M с координатами x, y, z в положение M_1 с координатами $x + \Delta x$, y, z (рис. 3.11), выбрав за путь прямолинейный отрезок, соединяющий точки M и M_1 (он параллелен оси x). Пользуясь формулами (3.48) и (3.25), получим

$$\Pi(x, y, z) - \Pi(x + \Delta x, y, z) = \int\limits_{\overset{\frown}{MM_1}} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Так как при выбранном пути координаты y и z не меняются, то $dy = dz = 0$ и полученное выражение примет вид

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} F_x\,dx = \Pi(x,\ y,\ z) - \Pi(x+\Delta x,\ y,\ z).$$

По теореме о среднем

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} F_x(x,\ y,\ z)\,dx = F_x(x+\theta\Delta x,\ y,\ z)\,\Delta x,$$

где число θ удовлетворяет условию $0 < \theta < 1$. Следовательно, после деления на Δx будем иметь

$$F_x(x+\theta\Delta x,\ y,\ z) = -\frac{\Pi(x+\Delta x,\ y,\ z)-\Pi(x,\ y\ z)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, найдем

$$F_x(x,\ y,\ z) = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}.$$

Аналогично получаются и два других равенства (3.49).

Перейдем к доказательству достаточности условий (3.49). Предположим, что условия (3.49) выполнены.

Используя условия (3.24) и (3.49), получим

$$d'A = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz\right).$$

Так как потенциальная энергия Π зависит только от координат точки, то выражение, стоящее в скобках, равно полному дифференциалу $d\Pi$; следовательно,

$$d'A = -d\Pi. \tag{3.50}$$

Пусть точка переместилась из положения M_1 в положение M_2, тогда

$$A_{1,2} = \int\limits_{\overset{\frown}{M_1M_2}} d'A = -\int\limits_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{3.51}$$

что совпадает с формулой (3.48). Это доказывает достаточность условий (3.49) (работа зависит только от значений потенциальной энергии в точках M_1 и M_2 и не зависит от пути).

Условие (3.49) часто берут в качестве определения потенциального поля. Тогда из соотношения (3.51) вытекает независимость работы от пути.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи: как, зная только проекции силы (3.49), определить, является ли силовое поле потенциальным. Продифференцируем первое равенство (3.49) частным образом по y, а второе по x. Имеем

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial x}.$$

Так как смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования, то из равенства правых частей следует равенство и левых частей; иначе говоря, если поле потенциально, то проекции сил должны удовлетворять условию (два других равенства получены аналогичным методом)

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{3.52}$$

Справедливо обратное утверждение (мы не будем останавливаться на доказательстве его): если условие (3.52) выполнено, то силовое поле потенциально.

При решении задач на исследование силовых полей вначале по условию (3.52) проверяют, является ли заданное поле потенциальным, а затем, если окажется, что условие (3.52) выполнено, то определяют потенциальную энергию поля, пользуясь определением (3.47): потенциальная энергия П в данной точке M (x, y, z) равна работе сил поля на перемещении от точки M до нулевой точки, в которой потенциальная энергия условно принимается равной нулю. Так как путь интегрирования не имеет значения, то его выбирают обычно так, чтобы все вычисления свести к минимуму.

Проиллюстрируем сказанное двумя простыми задачами чисто методического характера.

Задача 3.6. Проверить, является ли силовое поле

$$F_x=-py,\ F_y=px,\ F_z=0$$

потенциальным.

Воспользуемся первым равенством (3.52). Имеем

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=-p,\qquad \frac{\partial F_y}{\partial x}=p.$$

Так как первое равенство условия (3.52) не выполнено, то заданное поле не потенциально (в задаче 3.4 непосредственными вычислениями было показано, что работа такой силы зависит от пути движения и, следовательно, сила не потенциальна).

Задача 3.7. Проверить, потенциально ли силовое поле

$$F_x=xy^2,\ F_y=x^2y,\ F_z=z^3,$$

и если оно потенциально, то найти потенциальную энергию поля.

Так как

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}=2xy,\qquad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}=0,$$

то условие (3.52) выполнено и заданное поле потенциально.

Для определения потенциальной энергии поля нулевую точку выберем в начале координат, а путь интегрирования построим следующим образом: из точки M с координатами x, y, z будем двигаться сначала параллельно оси z до точки B, расположенной в плоскости xy, затем из точки B — параллельно оси y до точки C, находящейся на оси x, а затем по оси x от точки C до начала координат (рис. 3.12). Пользуясь определением (3.47), последовательно получим

$$\Pi=A_{MO}=A_{MB}+A_{BC}+A_{CO}=\int\limits_{MB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CO}.$$

На первом пути $x = \text{const}$, $dx = 0$, $y = \text{const}$, $dy = 0$, а z меняется от z до 0; на втором пути $z = 0$, $dz = 0$, $x = \text{const}$, $dx = 0$, а y меняется от y до 0; на третьем участке $y = 0$, $dy = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, а x меняется от x до 0. Имеем

$$\Pi = \int_z^0 F_z\,dz + \int_y^0 F_y\,dy + \int_x^0 F_x\,dx = \int_z^0 z^2\,dz + \int_y^0 x^2y\,dy$$

(в третьем интеграле $F_x = xy^2 = 0$, так как $y = 0$). Интегрируя и учитывая, что во втором интеграле $x = \text{const}$, получим

$$\Pi = -{}^1/_2 x^2y^2 - {}^1/_3 z^3.$$

Легко проверить, что если вычислить от этой потенциальной энергии частные производные по x, затем по y и z, то получим заданные проекции сил с обратным знаком, что соответствует равенствам (3.49).

Наряду с потенциальной энергией многие авторы вводят в рассмотрение силовую функцию $U(x, y, z)$, которая отличается от потенциальной энергии только знаком, т. е.

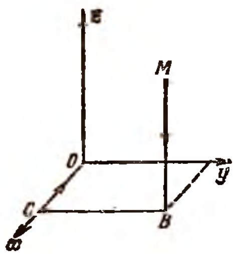


Рис. 3.12

Рис. 3.13

$$U = -\Pi.$$

Условия потенциальности силового поля (3.49) в этом случае имеют вид

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Потенциальное силовое поле допускает удобную и наглядную геометрическую интерпретацию.

Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия сохраняет постоянное значение, т. е. $\Pi(x, y, z) = C$, образует поверхность, которая называется *эквипотенциальной поверхностью*. Через каждую точку потенциального поля можно провести только одну такую поверхность (рис. 3.13).

Ясно, что работа сил поля при перемещении материальной точки из начального положения в конечное, когда оба эти положения находятся на одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю, так как

$$A_{M_1M_2} = \Pi_1 - \Pi_2 = C - C = 0.$$

Эквипотенциальные поверхности обладают еще одним интересным свойством. Допустим, что материальная точка перемещается вдоль произвольной кривой на эквипотенциальной поверхности, и пусть закон движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тогда для любого момента времени t должно выполняться равенство $\Pi[x(t), y(t), z(t)] \equiv C$.

Продифференцируем обе части этого тождества по t:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \equiv 0.$$

Согласно (3.49) будем иметь

$$F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Следовательно, в любой момент времени действующая на точку сила перпендикулярна к скорости точки. Но вектор $\mathbf{v}$ лежит в касательной плоскости к эквипотенциальной поверхности, поэтому сила $\mathbf{F}$ нормальна к эквипотенциальной поверхности (см. рис. 3.13).

Введем понятие *силовой линии* как кривой, в каждой точке которой касательная коллинеарна с силой данного силового поля. Очевидно, что уравнение такой линии может быть записано так:

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \tag{3.53}$$

Уравнения (3.53) выражают условия пропорциональности проекций двух векторов: силы $\mathbf{F}$ и дифференциала радиуса-вектора силовой линии $d\mathbf{r}$ (этот вектор всегда направлен по касательной линии).

Из уравнений (3.53) следует система двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями y и z:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}. \tag{3.54}$$

Через каждую точку силового поля проходит одна и только одна силовая линия, являющаяся решением системы (3.54), кроме особых точек — состояний равновесия, где $F_x = F_y = F_z = 0$.

Из определения силовых линий следует, что они пересекают все эквипотенциальные поверхности ортогонально (см. рис. 3.13).

В заключение остановимся на понятии градиента силового поля. Если задана какая-либо скалярная функция $\Phi(x, y, z)$, то вектор $\mathbf{E}$, образуемый по формуле

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{k},$$

называется *градиентом функции* Φ. Обычно пользуются таким обозначением:

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Выражение для силы

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

в случае потенциального поля с помощью (3.49) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\operatorname{grad}\Pi.$$

Таким образом, в потенциальном поле силу можно рассматривать как взятый с обратным знаком градиент функции $\Pi(x, y, z)$.

Покажем, как вычисляется потенциальная энергия для некоторых часто встречающихся силовых полей.

1. Потенциальная энергия поля силы тяжести. Совмещая плоскость xOy с какой-либо горизонтальной плоскостью (рис. 3.14), для проекций силы тяжести будем иметь

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -mg.$$

Можно проверить, что условия (3.51) выполняются.

Элементарная работа равна

$$d'A = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -mg\,dz.$$

Следовательно, работа силы тяжести при перемещении материальной точки из точки O в какую-либо точку M равна согласно (3.25)

$$A_{OM} = -\int_0^z mg\,dz = -mgz. \qquad (3.55)$$

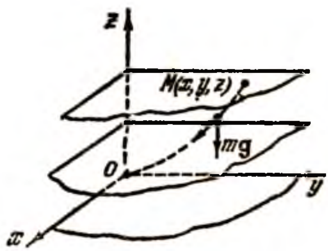


Рис. 3.14

Но так как потенциальная энергия в точке M поля равна работе, которую совершает сила при перемещении точки из положения M в положение O, то

$$\Pi = A_{MO} = mgz. \qquad (3.56)$$

Эквипотенциальные поверхности $mgz = C$ образуют семейство горизонтальных плоскостей, а силовыми линиями являются прямые, параллельные оси z.

2. Потенциальная энергия поля центральных сил. *Центральной силой будем называть силу, которая в любой точке пространства направлена по прямой, проходящей через некоторую точку поля (центр), причем модуль силы F зависит только от расстояния r точки до центра.*

Если этот центр выбрать за начало координат, то для центральной силы можно написать

$$\mathbf{F}(r) = F_r(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (3.57)$$

где $F_r(r) = \pm F(r)$ (знак «+» для силы отталкивания, а знак «—» для силы притяжения).

Проверим, выполняется ли условие (3.52). Так как

$$F_x = F_r(r)\frac{x}{r},\quad F_y = F_r(r)\frac{y}{r},\quad F_z = F_r(r)\frac{z}{r}$$

и, кроме того,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr}\left[\frac{F_r(r)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{F_r(r)}{r}\right],$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr}\left[\frac{F_r(r)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{F_r(r)}{r}\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

Остальные равенства (3.52) также выполняются.

Для вычисления потенциальной энергии найдем работу центральной силы при перемещении точки из некоторого произвольного положения M в фиксированное положение M_0.

Элементарная работа имеет вид

$$d'A = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F_r(r)\frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}{r} = F_r(r)\,dr.$$

Тогда потенциальная энергия будет равна

$$\Pi(r) = A_{MM_0} = \int_r^{r_0} F_r(r)\,dr. \tag{3.58}$$

Здесь эквипотенциальные поверхности $\Pi(r) = C$ — сферы с центром в начале координат, а силовые линии образуют пучок прямых, выходящих из начала координат.

В частности, центральной силой является гравитационная сила. Согласно закону всемирного тяготения

$$\mathbf{F} = -f\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad F_r(r) = -f\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f — постоянная тяготения, m_1 и m_2 — массы притягивающихся материальных точек, а r — расстояние между ними.

Примем за точку M_0 бесконечно удаленную точку; тогда, применяя (3.58), получим

$$\Pi(r) = -\int_r^{\infty} f\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = -\frac{f m_1 m_2}{r}. \tag{3.59}$$

3. **Потенциальная энергия восстанавливающей силы пружины.** Примем за фиксированную точку M_0, в которой потенциальная энергия равна нулю, положение конца недеформированной пружины (положение самой пружины не играет роли). Пусть длина пружины в недеформированном состоянии равна r_0, а в положении M равна r (рис. 3.15). Тогда величина $F_r(r)$, входящая в равенства

(3.57) и (3.58), имеет вид $F_r(r) = -c(r - r_0)$. При $r < r_0$ упругая сила пружины является по отношению к центру (точке крепления) отталкивающей, при $r > r_0$ — притягивающей. Подставляя $F_r(r)$ в (3.58), получим

$$\Pi(r) = -c\int\limits_r^{r_0}(r - r_0)\,dr = \frac{c(r - r_0)^2}{2},$$

или

$$\Pi(r) = \frac{c\lambda^2}{2}. \qquad (3.60)$$

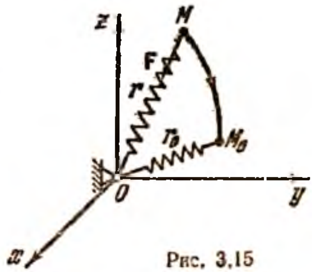


Рис. 3.15

Здесь $\lambda = |r - r_0|$ — модуль приращения длины пружины.

Из формул (3.51) и (3.60) следует, что работа восстанавливающей силы пружины при перемещении конца пружины из положения M_1 в M_2 равна

$$A_{1,2} = \frac{c\lambda_1^2}{2} - \frac{c\lambda_2^2}{2}. \qquad (3.61)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — деформации, соответствующие начальной и конечной точкам пути.

§ 3.6. Интеграл энергии. Понятие о рассеивании полной механической энергии

Предположим, что все силы, действующие на материальную точку, потенциальны. Тогда элементарная работа сил, приложенных к точке, будет $d'A = -d\Pi$ и равенство (3.40) принимает вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d\Pi.$$

Интегрируя обе части этого равенства, найдем

$$T + \Pi = h, \qquad (3.62)$$

где h — постоянная интегрирования (она называется постоянной энергии).

Равенство (3.62) называется *интегралом энергии. Интеграл энергии показывает, что при движении точки в потенциальном поле сил сумма кинетической и потенциальной энергий (полная механическая энергия) есть величина постоянная (закон сохранения механической энергии).*

Равенству (3.62) можно придать и такой вид:

$$T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1, \qquad (3.63)$$

где T_1 и T_2, Π_1 и Π_2 — значения кинетической и потенциальной энергий в положениях M_1 и M_2 соответственно.

Интеграл энергии (3.62) справедлив при условии, что все силы, действующие на материальную точку, потенциальны. Если хотя бы одна из сил не потенциальна, то равенство (3.62) будет нарушено. Рассмотрим, какое влияние оказывают силы сопротивления (они, как правило, имеются всегда) на полную механическую энергию. Итак, будем считать, что на материальную точку действуют потенциальные силы (их потенциальная энергия равна П) и силы сопротивления $\mathbf{F}_c$. Относительно последних мы не будем делать никаких ограничений: они могут быть постоянны по модулю (сухое трение), пропорциональны любой степени скорости (вязкое трение) или любым иным образом зависеть от скорости точки, ее положения и времени t. Единственное предположение (оно для сил сопротивления естественно) состоит в том, что сила сопротивления всегда направлена противоположно скорости $\mathbf{v}$ точки (рис. 3.16).

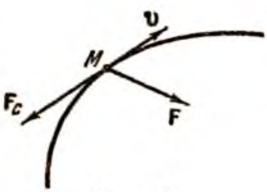


Рис. 3.16

Элементарная работа потенциальной силы $\mathbf{F}$ равна $-d\Pi$, а элементарная работа силы сопротивления будет $\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}$. Равенство (3.40) принимает вид

$$dT = -d\Pi + \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}.$$

Перегруппируем члены, разделим обе части равенства на dt и учтем, что $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}.$$

Угол между силой сопротивления $\mathbf{F}_c$ и скоростью $\mathbf{v}$ равен 180°; скалярное произведение $\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} = F_c v \cos 180° = -F_c v$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -F_c v < 0. \tag{3.64}$$

Так как производная по времени отрицательна, то полная механическая энергия под действием сил сопротивления убывает или рассеивается, переходя, конечно, в другие формы энергии, например в тепловую.

Модуль мощности $|\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}| = F_c v$ силы сопротивления может служить мерой убывания полной механической энергии. Если модуль силы сопротивления равен $|b\dot{x}|$ (линейно-вязкое сопротивление), то

$$\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} = -b\dot{x}^2 = -2\frac{b\dot{x}^2}{2}.$$

Величина $bv^2/2$ называется *диссипативной функцией Релея*, удвоенная величина которой в данном случае служит мерой рассеивания (диссипации) энергии.

§ 3.7. Задачи

Задача 3.8. Какова длина разбега самолета, масса которого $m = 18\,000$ кг, тяга, развиваемая двигателем, $\Phi = 40$ кН, общая сила сопротивления $R = 10$ кН, взлетная скорость $v = 216$ км/час.

Применим теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (\Phi - R)\,s.$$

Полагая начальную скорость $v_0 = 0$, получим

$$s = \frac{mv^2}{2(\Phi - R)} = \frac{18000 \cdot 60^2}{2 \cdot 30000} = 1080 \text{ м}.$$

Задача 3.9. Самолет, масса которого $m = 10^4$ кг, совершает посадку. В момент касания колес земли самолет имеет вертикальную скорость снижения $u_0 = 2$ м/с. Вертикальная составляющая полной аэродинамической силы равна $N = 80$ кН, жесткость амортизационной системы $c = 10$ кН/см. Сопротивление в амортизационных стойках шасси при прямом ходе равно $R = 30$ кН. Определить наибольшую осадку самолета, считая, что за время срабатывания стойки горизонтальная скорость остается неизменной.

Применим теорему об изменении кинетической энергии. В начальный момент вертикальная составляющая скорости $u_0 = 2$ м/с, в конечный момент $-u_1 = 0$. Работу восстанавливающей силы пружины определим по формуле (3,61). Полагая $OM = \lambda$, получим для работы всех сил (силы тяжести mg, силы сопротивления R, подъемной силы N и силы упругости амортизаторов)

$$A_{OM} = mg\lambda - R\lambda - N\lambda - \frac{c\lambda^2}{2}.$$

Величина полной начальной скорости равна $\sqrt{v^2 + u_0^2}$; величина скорости в конце процесса сжатия амортизационной системы равна v. Поэтому приращение кинетической энергии составляет

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m(v^2 + u_0^2)}{2} = -\frac{mu_0^2}{2}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$-\frac{mu_0^2}{2} = mg\lambda - R\lambda - N\lambda - \frac{c\lambda^2}{2},$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{c}\left(mg - R - N \pm \sqrt{(mg - R - N)^2 + mu_0^2 c}\right).$$

Для крайнего нижнего положения следует перед корнем взять знак «плюс». Тогда, после подстановки численных значений, найдем

$$\lambda \approx 18{,}8 \text{ см}.$$

Задача 3.10. На какую высоту H над поверхностью Земли поднимается ракета, запущенная в вертикальном направлении с поверхности Земли, если ее начальная скорость равна v_0? Какую начальную скорость надо сообщить ракете, чтобы она неограниченно удалялась от Земли? Сопротивлением атмосферы пренебречь. Радиус Земли $R = 6370$ км (рис. 3.17).

Применим закон сохранения механической энергии, имея в виду, что конечная скорость ракеты $v = 0$, а потенциальная энергия силы тяготения определяется по формуле (3.59):

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{fmM}{R} = -\frac{fmM}{R+H}.$$

Здесь m — масса ракеты, M — масса Земли, f — гравитационная постоянная. От двух последних постоянных можно избавиться, заметив, что при $r = R$ (т. е. на поверхности Земли) сила притяжения приближенно равна силе тяжести

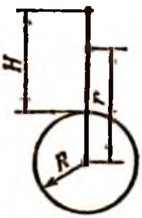


Рис. 3.17

$$f\frac{mM}{R^2} = mg,$$

откуда $fM = gR^2$. Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = -\frac{mgR^2}{R+H}.$$

Разрешая уравнение относительно H, получим

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Теперь нетрудно ответить на второй вопрос. Согласно условию задачи должно быть $H = \infty$ и, следовательно,

$$2gR - v_0^2 = 0, \quad v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Задача 3.11. С какой скоростью должна быть запущена с поверхности Земли ракета, чтобы она могла достигнуть той точки C между Землей и Луной (рис. 3.18) где силы притяжения Земли и Луны равны. Расстояние между центрами Луны и Земли $d = 370\,000$ км, а отношение их масс $M_Л$ и $M_З$ равно 1/80. Радиус Земли $R = 6370$ км.

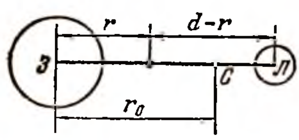


Рис. 3.18

В точке C должно выполняться равенство

$$\frac{mfM_З}{r_0^2} = \frac{fmM_Л}{(d-r_0)^2},$$

т. е.

$$r_0 = \frac{d}{1+\sqrt{M_Л/M_З}}.$$

Потенциальная энергия силы притяжения Луны $П_Л = -\dfrac{fmM_Л}{d-r}$. Применим закон сохранения механической энергии (полагая, что в точке C скорость ракеты равна нулю)

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{fmM_З}{R} - \frac{fmM_Л}{d-R} = -\frac{fmR_З}{r_0} - \frac{fmM_Л}{d-r_0}.$$

Используя равенство $fM_З = gR^2$, получим

$$v_0^2 = 2\left[gR + \frac{gR^2}{80(d-R)} - g\frac{R^2}{r_0} - \frac{gR^2}{80(d-r_0)}\right], \quad v_0 = 11{,}1 \text{ км/с}.$$

Задача 3.12. Сани спускаются с горы. Начиная с точки A (рис. 3.19), их притормаживают силой $\mathbf{F}$ таким образом, что до конца спуска (точки B) скорость саней остается постоянной. Определить работу, совершаемую силой $\mathbf{F}$, если сила тяжести саней $\mathbf{P}$, а высота горы h.

В отличие от предыдущих задач, здесь наряду с потенциальной силой — силой тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ — действует непотенциальная сила $\mathbf{F}$. На основании теоремы об изменении кинетической энергии имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{AB}^P + A_{AB}^F.$$

Так как начальная и конечная скорости саней одинаковы, то $A_{AB}^P + A_{AB}^F = 0$. Для работы силы тяжести имеем $A_{AB}^P = Ph$, откуда $A_{AB}^F = -Ph$. Найдем эту работу путем непосредственного вычисления. Так как скорость саней постоянна, то сумма проекций сил на направление скорости равна нулю, т. е. $P\sin\alpha - F = 0$, и, следовательно, $F = P\sin\alpha$, где $\sin\alpha$ можно определить из равенства $\sin\alpha = dy/ds$.

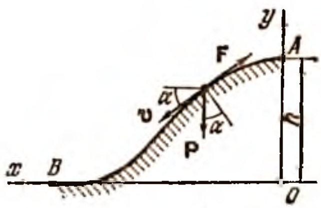


Рис. 3.19

Вычислим мощность силы торможения:

$$N^F = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = -Fv = -P\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Здесь мы приняли во внимание, что сила торможения $\mathbf{F}$ и скорость $\mathbf{v}$ имеют противоположные направления. Работа силы торможения за время спуска саней выражается следующим образом:

$$A_{AB}^F = \int_0^T N^F(t)\,dt = -P\int_0^T \frac{dy}{dt}\,dt = -P\int_0^h dy = -Ph.$$

Задача 3.13. Материальная точка совершает прямолинейные затухающие колебания под действием линейной восстанавливающей силы, создаваемой пружиной жесткости c, и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости ($\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$). Определить работу силы сопротивления за одно полное колебание материальной точки, а также максимальную работу этой силы при неограниченной продолжительности колебаний.

В момент времени, когда материальная точка достигает максимального отклонения, скорость ее равна нулю. Поэтому, применяя теорему об изменении кинетической энергии для перемещения от начального до последующего максимального отклонения, получим

$$0 = A_{\text{уп}} + A_c,$$

где $A_{\text{уп}}$ — работа упругой силы пружины, а A_c — работа силы сопротивления. Так как деформация пружины λ при максимальных отклонениях материальной точки равна соответствующей амплитуде, то согласно формуле (3.60) будем иметь

$$A_{\text{уп}} = \frac{c}{2}(a_0^2 - a_1^2),$$

где a_0 — начальная, а a_1 — последующая амплитуды.

Следовательно, работа силы сопротивления за один период будет равна

$$A_c = -\frac{c}{2}(a_0^2 - a_1^2).$$

Если выразить последующую амплитуду a_1 через предыдущую a_0 с помощью фактора затухания η по формуле (2.16), то последнее равенство примет вид

$$A_c = -\frac{ca_0^2}{2}(1-\eta),$$

где $\eta = e^{-hT^*}$, причем $h = b/(2m)$ (m — масса точки), T^* — период затухающих колебаний.

За n полных колебаний работа силы сопротивления будет равна

$$A_c = -\frac{c}{2}(a_0^2 - a_n^2),$$

или, учитывая, что $a_n = a_0\eta^n$,

$$A_c = -\frac{ca_0^2}{2}(1 - \eta^{2n}).$$

Так как $\eta < 1$, то при $n \to \infty$ будем иметь

$$A_c^{\max} = -\frac{ca_0^2}{2}.$$

Такова максимальная работа, которую совершат силы сопротивления при неограниченной продолжительности колебаний.

Работу силы сопротивления можно, конечно, вычислить и путем непосредственного применения формулы (3.25). Для этого нужно воспользоваться решением (2.13) дифференциального уравнения затухающих колебаний материальной точки:

$$x = ae^{-ht}\sin(k^*t + \varepsilon) \qquad \left(k^{*^2} = k^2 - h^2 = c/m - h^2\right).$$

Отсюда нужно найти $\dot{x}$, а затем $R_x = -b\dot{x}$ ($R_y = R_z = 0$). После чего работа силы сопротивления определится путем вычисления интеграла

$$A_c = -ba^2\int_0^{T^*} e^{-2ht}\left[-h\sin(k^*t + \varepsilon) + k^*\cos(k^*t + \varepsilon)\right]^2 dt.$$

Этот путь непосредственного вычисления работы по общим формулам требует, очевидно, значительно большей затраты труда, чем применение теоремы об изменении кинетической энергии.

Глава IV

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

§ 4.1. Дифференциальное уравнение траектории точки, движущейся в центральном поле сил

В § 3.2 были установлены свойства движения точки в поле центральной силы. Напомним эти свойства.

Во-первых, траектория движения точки — плоская кривая. Центр, через который всегда проходит линия действия силы, лежит в плоскости траектории. Удобно описывать движение такой материальной точки в полярной системе координат с полюсом в центре силового поля. Полярную ось направим пока произвольно. Тогда положение точки в плоскости ее движения будет определяться полярными координатами r и φ. Для центральной силы имеем выражение

$$\mathbf{F} = F_r(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{4.1}$$

где $F_r(r)$ — проекция силы на радиус-вектор точки.

Во-вторых, имеет место закон площадей (секторная скорость остается постоянной). В полярных координатах соблюдается равенство (3.18):

$${}^1/_2 r^2\dot{\varphi} = c. \tag{4.2}$$

Перейдем к составлению дифференциального уравнения движения материальной точки в центральном поле.

Воспользовавшись найденным в кинематике (том I, глава IX) выражением для радиального ускорения точки $w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, запишем общее уравнение динамики

$$m\mathbf{w} = F_r(r)\frac{\mathbf{r}}{r},$$

в проекции на радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r). \tag{4.3}$$

В соответствии с интегралом площадей (4.2) уравнение (4.3) может быть переписано в виде

$$\ddot{r} - \frac{4c^2}{r^3} = \frac{1}{m}F_r(r). \tag{4.4}$$

Для определения траектории движения в полярных координатах перейдем в этом уравнении от независимой переменной t к полярному углу φ.

В силу интеграла площадей (4.2) имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4.5}$$

Продифференцируем это выражение по времени и вновь воспользуемся интегралом площадей (4.2):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right).$$

Приняв во внимание соотношение (4.5), перепишем полученный результат в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4.6}$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.4), получим

$$-\frac{4c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{4c^2}{r^3} = \frac{1}{m}F_r(r). \tag{4.7}$$

Вводя теперь новую искомую функцию $u = 1/r$, будем иметь

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r(1/u)}{4mc^2u^2}. \tag{4.8}$$

Полученное соотношение (4.8) и есть *дифференциальное уравнение траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы* (уравнение Бинэ).

Наиболее важным случаем центральной силы является гравитационная сила планеты или любого другого небесного тела.

Ньютоновская сила притяжения планеты, принимаемой за шар с радиальным распределением плотности, действующая на материальную точку, находящуюся вне пределов шара, равна

$$\mathbf{F} = -f\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{4.9}$$

где f — гравитационная постоянная, m — масса материальной точки, M — масса планеты, r — расстояние точки от центра планеты.

Можно избавиться от произведения fM, если известна сила притяжения на поверхности планеты, т. е. при $r = R$. Для Земли эта сила притяжения равна mg, где g — ускорение свободного падения тела относительно невращающейся Земли. Аналогично определяется g и для других планет.

Таким образом, при $r = R$ из равенства (4.9) получим

$$mg = \frac{fmM}{R^2}, \quad fM = gR^2,$$

после чего (4.9) принимает вид

$$\mathbf{F} = -\frac{mgR^2}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{4.10}$$

Следовательно, в данном случае $F_r(r) = F_r(1/u) = -mgR^2u^2$.

При движении точки вне пределов земной атмосферы, но в достаточной близости к ее поверхности, можно пренебречь действием гравитационных сил со стороны других небесных тел и считать, что на точку действует только сила (4.10). В этом случае дифференциальное уравнение траектории (4.8) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \tag{4.11}$$

где $p = 4c^2/(gR^2) = \text{const}$.

§ 4.2. Виды траекторий. Круговая и параболическая скорости

Исследуем решение основного дифференциального уравнения (4.11) Общее решение этого уравнения можно представить в следующей форме:

$$u = \frac{1}{p} + a\cos(\varphi - \varepsilon), \tag{4.12}$$

где a и ε — постоянные интегрирования. Вспоминая, что $u = 1/r$, перепишем уравнение (4.12) в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varepsilon)}, \tag{4.13}$$

где $e = ap$ — постоянная величина.

Уравнение (4.13) определяет траекторию материальной точки, движущейся под действием ньютоновской силы притяжения.

Для упрощения анализа введем новую переменную $\psi = \varphi - \varepsilon$. Очевидно, что теперь угол ψ будет отсчитываться не от первоначально взятого фиксированного направления, а от некоторого нового направления Ox_1, повернутого относительно первого на угол ε (рис. 4.1). Конечно, вид траектории от такой формальной замены переменных не может измениться.

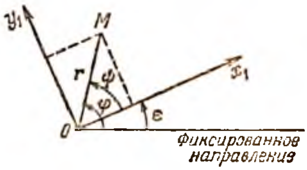


Рис. 4.1

Теперь уравнение (4.13) примет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}. \tag{4.14}$$

Таким образом, вид траектории определяется единственным образом через постоянные p и e. Несколько дальше будет показано, как определить эти постоянные по начальным условиям.

Из курса аналитической геометрии известно, что кривые (4.14) представляют собой конические сечения *).

Тип траектории определяется значением величины e, называемой *эксцентриситетом конического сечения*.

В дальнейшем примем, что $e > 0$; это соответствует выбору положительного направления полярной оси Ox_1 ($\psi = 0$) от центра O на ближайшую к O точку траектории, называемую *перицентром* (для земных спутников — *перигеем*).

Если $e < 1$, то знаменатель в правой части (4.14) никогда не обращается в нуль, следовательно, кривая второго порядка не имеет бесконечно удаленных точек. Это может быть только эллипс. В частном случае, когда $e = 0$, получаем $r = p = \text{const}$, т. е. эллипс превращается в окружность.

Если $e > 1$, то появляются бесконечно удаленные точки при двух значениях угла ψ, полученных из уравнения

$$1 + e\cos\psi = 0,$$

т. е. при

$$\psi = \pm\arccos\left(-\frac{1}{e}\right).$$

Таким свойством обладает только гипербола.

*) В декартовой системе координат, для которой $x_1 = r\cos\psi$, $y_1 = r\sin\psi$, уравнение (4.14) приводится к виду $x_1^2 + y_1^2 = (p - ex_1)^2$, т. е. все траектории могут быть только кривыми второго порядка.

Наконец, при $e = 1$ знаменатель обращается в нуль при $\psi = \pi$. Кривой второго порядка, имеющей бесконечно удаленную точку только при одном значении полярного угла ψ, является парабола.

На рис. 4.2 изображены возможные траектории при $e \geqslant 0$ и одинаковом для всех траекторий расстоянии от центра O до перицентра. Это расстояние в соответствии с уравнением (4.14) равно $r_{\min} = r_0 = \frac{p}{1+e}$.

Установив, что тип траектории определяется значением эксцентриситета e, найдем зависимость эксцентриситета от начальных условий.

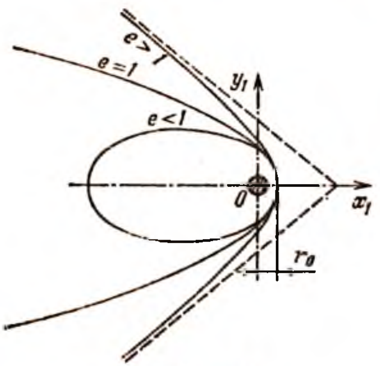


Рис. 4.2

Сначала сделаем это, отнеся начальные условия к тому моменту времени, когда точка пересекает ось x_1 (см. рис. 4.1), т. е. при $\psi = 0$.

В соответствии с формулой (4.14) имеем

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{pe\sin\psi}{(1+e\cos\psi)^2}.$$

Следовательно, при $\psi = 0$ полярный радиус r достигает экстремума ($dr/d\psi = 0$). Это значит, что при $\psi = 0$ и любом e скорость точки перпендикулярна к радиусу-вектору $\mathbf{r}_0$, определяющему положение точки.

Имея в виду, что $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$ и поперечная скорость $v_p = r\dot{\psi}$, перепишем интеграл площадей в виде

$$^1/_2 r v_p = c.$$

Пусть теперь $r = r_0$, $v = v_0$ при $\psi = 0$. Для этих начальных условий в соответствии с уравнением (4.14) будет

$$r_0 = \frac{p}{1+e}.$$

Отсюда находим

$$e = \frac{p}{r_0} - 1. \tag{4.15}$$

Так как для рассматриваемых начальных условий $v_p = v_0$, то $c = {}^1/_2 r_0 v_0$ и, учитывая, что $p = 4c^2/(gR^2)$, получим

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{gR^2} - 1. \tag{4.16}$$

Это соотношение является основным и позволяет найти интервалы скоростей, которым соответствуют те или иные виды траекторий.

Эллиптические траектории ($e < 1$) определяются неравенством

$$v_0 < \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

В частности, если $e = 0$, то траекторией будет окружность; при этом начальная скорость v_0 имеет значение

$$v_1 = v_0 = \sqrt{gR^2/r_0}$$

и называется *круговой скоростью*. Круговая скорость, вычисленная из условий движения вблизи Земли ($r_0 = R$), называется *первой космической скоростью*:

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9 \text{ км/с}.$$

Параболической траектории соответствует значение $e = 1$, т. е. по формуле (4.16) скорость

$$v_2 = v_0 = \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

Найденное значение скорости называется *параболической скоростью*. Если начальная скорость задана вблизи Земли, то параболическая скорость

$$v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

называется *второй космической скоростью*.

При сообщении такой начальной скорости точка неограниченно удалялась бы от Земли.

Гиперболические траектории характеризуются неравенством $e > 1$, которому соответствуют начальные скорости

$$v_0 > \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

§ 4.3. Определение параметров околоземной траектории по начальным условиям

Найдем теперь зависимость эксцентриситета от начальных условий в случае, когда материальная точка в некоторый момент времени начинает движение из точки A_0 вне пределов атмосферы (рис. 4.3).

Пусть материальная точка в некоторый момент времени начинает движение из точки A_0 вне пределов атмосферы только под действием силы притяжения Земли (рис. 4.3).

Определим параметры траектории p и e, если известны: r_0 — расстояние от центра Земли до точки A_0, v_0 — модуль скорости материальной точки в положении A_0, θ_0 — угол наклона вектора скорости к местному горизонту, т. е. к плоскости, перпендикулярной к радиусу-вектору точки A_0.

Найдя параметры траектории, мы затем легко определим начальный полярный угол ψ_0 (см. рис. 4.3) и тем самым узнаем пока не известное направление оси Ox_1.

Так как в точке A_0 скорость $v_p = v_0 \cos \theta_0$, то согласно формуле (4.2) секторная скорость равна

$$c = {}^1/_2\, r_0 v_0 \cos\theta_0. \qquad (4.17)$$

Подставляя это выражение в формулу для p, получим

$$p = \frac{4c^2}{gR^2} = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos^2\theta_0}{gR^2} = r_0\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 \cos^2\theta_0 = r_0 \nu \cos^2\theta_0, \qquad (4.18)$$

где $v_1 = \sqrt{gR^2/r_0}$ — круговая скорость в точке A_0, а $\nu = (v_0/v_1)^2$.

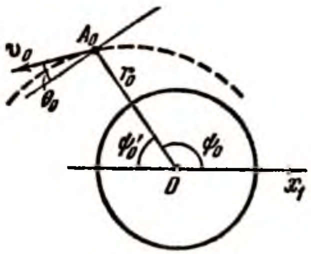


Рис. 4.3

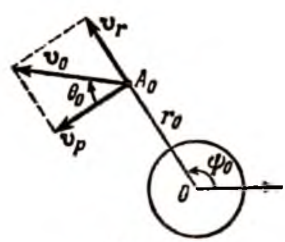


Рис. 4.4

Из формулы (4.14) следует, что

$$e\cos\psi = \frac{p}{r} - 1. \qquad (4.19)$$

После дифференцирования этого выражения по времени получим

$$-e\sin\psi\frac{d\psi}{dt} = -\frac{p}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Принимая во внимание равенства $dr/dt = v_r$ (радиальная скорость), $\dot\psi = \dot\varphi$ и $r^2\dot\psi = 2c$, перепишем полученное выражение в виде

$$e\sin\psi = \frac{p}{2c}v_r. \qquad (4.20)$$

Для рассматриваемых начальных условий $\psi = \psi_0$, $r = r_0$, $v_r = v_0 \sin\theta_0$ (рис. 4.4) выражения (4.19) и (4.20) с учетом формул (4.17) и (4.18) примут вид

$$e\cos\psi_0 = \frac{r_0\nu\cos^2\theta_0}{r_0} - 1 = \nu\cos^2\theta_0 - 1, \qquad (4.21)$$

$$e\sin\psi_0 = \frac{r_0\nu\cos^2\theta_0}{r_0 v_0\cos\theta_0}v_0\sin\theta_0 = \nu\sin\theta_0\cos\theta_0. \qquad (4.22)$$

Отсюда находим

$$e = \sqrt{(\nu\cos^2\theta_0 - 1)^2 + \nu^2\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0} = \sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0}. \qquad (4.23)$$

Зная параметры траектории p и e, можно найти из формулы (4.19) начальный полярный угол ψ_0, т. е. положение полярной оси Ox_1:

$$\cos\psi_0 = \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\frac{1}{e} = \frac{\nu\cos^2\theta_0 - 1}{\sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0}}. \qquad (4.24)$$

Иногда удобно ввести дополнительный угол $\psi_0' = \pi - \psi_0$ (см. рис. 4.3), для которого

$$\cos\psi_0' = \frac{1 - \nu\cos^2\theta_0}{\sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0}}. \tag{4.25}$$

Таким образом, траектория точки полностью определяется тремя параметрами r_0, ν и θ_0 и формула (4.14) может быть записана в виде

$$r = \frac{\nu r_0\cos^2\theta_0}{1 + \cos\psi\sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0}}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть

$$e = \sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\nu^2 - 2\nu + \sec^2\theta_0 = 0$$

и, следовательно,

$$\nu = 1 \pm \sqrt{1 - \sec^2\theta_0}.$$

Это значит, что $e = 0$ может быть только при $\theta_0 = 0$ и $\nu = 1$. При этом $r = r_0$, т. е. орбита будет окружностью, а необходимая начальная скорость равна

$$v_0 = v_1 = \sqrt{gR^2/r_0}.$$

Для параболической траектории

$$e = \sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0} = 1,$$

что выполняется при $\nu = 2$ и любом угле θ_0. Начальная скорость v_0, необходимая для движения по параболической траектории, равна

$$v_0 = v_1\sqrt{2} = \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

§ 4.4. Траектории искусственных спутников Земли

Пусть рассматривается движение материальной точки из положения A_0. В этом положении точка расположена на высоте h над земной поверхностью и обладает начальной скоростью v_0, направленной под углом θ_0 к местному горизонту.

Как установлено, при $v_0 < v_2$ траектория материальной точки есть эллипс, один из фокусов которого находится в центре Земли.

Из уравнения траектории (4.14) видно, что максимальное расстояние материальной точки от центра Земли достигается при

$$\cos\psi_m = -1 \tag{4.26}$$

и равно

$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}. \tag{4.27}$$

Соответствующая точка траектории называется *апогеем*. Минимальное расстояние точки от центра Земли достигается в *перигее* и равно

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}. \tag{4.28}$$

Таким образом, максимальное расстояние точки от поверхности Земли составляет

$$h_{max} = \frac{p}{1-e} - R,$$

а минимальное расстояние равняется

$$h_{min} = \frac{p}{1+e} - R.$$

В зависимости от конкретных значений v_0 и θ_0 траектории могут оказаться пересекающимися либо не пересекающимися с поверхностью Земли. Найдем, при каком значении v_0 и фиксированном значении угла θ_0 траектории не будут пересекать поверхность Земли, т. е. могут быть траекториями искусственных спутников Земли.

Для траектории, не пересекающей поверхности Земли, должно выполняться неравенство $r_{min} > R$, т. е. согласно (4.28)

$$\frac{p}{1+e} > R. \tag{4.29}$$

Принимая во внимание (4.23), получаем

$$r_0 \nu \cos^2\theta_0 > R\left(1 + \sqrt{1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0}\right),$$

или, так как $r_0 = R + h$,

$$[(R+h)\nu\cos^2\theta_0 - R]^2 > R^2\,[1 - \nu(2-\nu)\cos^2\theta_0].$$

После небольших преобразований и подстановки $\nu = v_0^2/v_1^2$ найдем

$$\frac{v_0^2}{v_1^2}\,[(R+h)^2\cos^2\theta_0 - R^2] > 2Rh. \tag{4.30}$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$\cos\theta_0 > \cos\theta_0^*,$$

где $\cos\theta_0^* = R/(R+h)$.

Из соотношения (4.30) получаем значение v_0, при котором траектории точки не будут пересекать поверхности Земли:

$$v_0 > v_h,$$

где

$$v_h = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{2Rh}{(R+h)^2\cos^2\theta_0 - R^2}}. \tag{4.31}$$

Отметим, что при $h = 0$ это условие имеет смысл только при $\theta_0 = 0$ и принимает вид

$$v_0 > \sqrt{gR}.$$

Определим длину большой и малой полуосей эллипса (4.14). Формула для большой полуоси имеет вид

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right) = \frac{p}{1-e^2},$$

или, с учетом соотношения (4.23),

$$a = \frac{p}{\nu(2-\nu)\cos^2\theta_0} = \frac{r_0}{2-\nu}. \tag{4.32}$$

Из формулы (4.32) с учетом равенства $\nu=(v_0/v_1)^2$ следует, что длина большой полуоси не зависит от угла θ_0 и определяется только начальной скоростью v_0.

Найдем теперь расстояние между фокусами эллипса $2c$.

$$2c=2(a-r_{\min})=\frac{2p}{1-e^2}-\frac{2p}{1+e}=2ae. \tag{4.33}$$

Отсюда, кстати, видно, что эксцентриситет $e=c/a$. Малая полуось эллипса b связана простым соотношением с величинами a и c:

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=a\sqrt{1-e^2}=\sqrt{ap}. \tag{4.34}$$

Изучим характер изменения траекторий спутника в зависимости от $\nu=v_0^2/v_1^2$ при $v_0>v_k$. Для простоты положим, что $\theta_0=0$. Из (4.20) тогда следует

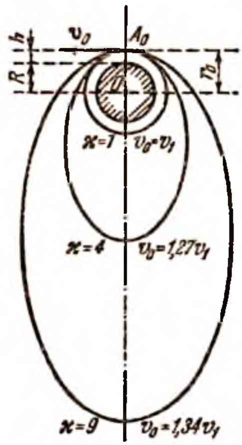


Рис. 4.5

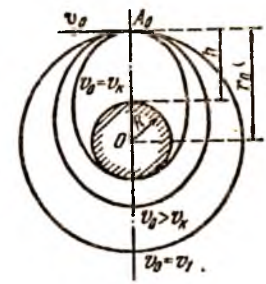


Рис. 4.6

$$\sin\psi_0=0,\quad \cos\varphi_0=\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0}-1\right). \tag{4.35}$$

Имея в виду, что при $\theta_0=0$ согласно (4.23) $e=\sqrt{1-\nu(2-\nu)}=|\nu-1|$ и, кроме того, $p=r_0\nu$, получим

$$\cos\psi_0=\frac{\nu-1}{|\nu-1|}. \tag{4.36}$$

Прежде всего остановимся на случае, когда $\nu>1$; из (4.36) имеем

$$\cos\psi_0=\frac{\nu-1}{\nu-1}=1.$$

Следовательно, $\psi_0=0$, и положительное направление полярной оси совпадает с направлением OA_0 (рис. 4.5). Напомним, что мы условились считать $e>0$. Это эквивалентно выбору положительного направления полярной оси от притягивающего центра через перигей.

На рис. 4.5 показаны три траектории спутников при различных значениях начальной скорости ($v_1<v_0<v_2$) и $\theta_0=\theta$. Это семейство эллипсов с общим фокусом в точке O и перигеем в A_0.

Обратимся теперь к случаю $\nu<1$. При этом $e=1-\nu$ и в соответствии с (4.36) $\cos\psi_0=(\nu-1)/(1-\nu)=-1$, т. е. $\psi_0=\pi$. Следовательно, направление на перигей противоположно OA_0. Точка A_0 становится апогеем, и семейство эллипсов ($v_k<v_0<v_1$) имеет вид, изображенный на рис. 4.6.

Уравнения эллипсов (4.14) при $\theta_0 = 0$ принимают вид

$$r = \frac{r_0 \nu}{1 + |\nu - 1| \cos \psi}. \tag{4.37}$$

Перигейное расстояние находится из (4.37) при $\psi = 0$. Заметив, что при $\nu > 1$ $|\nu - 1| = \nu - 1$, а при $\nu < 1$ $|\nu - 1| = 1 - \nu$, получим

$$r_{\min} = r_0 \quad (\nu > 1), \qquad r_{\min} = \frac{r_0 \nu}{2 - \nu} \qquad (\nu < 1).$$

Полагая в последней формуле $r_{\min} = R$, найдем

$$v_h = v_1 \sqrt{\frac{2R}{2R + h}}.$$

Аналогично, при $\psi = \pi$ определим апогейное расстояние

$$r_{\max} = \frac{r_0 \nu}{2 - \nu} \quad (\nu > 1), \qquad r_{\max} = r_0 \qquad (\nu < 1).$$

Большая полуось эллипса определяется по формуле (4.32), а малая — из (4.34); при этом $e^2 = (1 - \nu)^2$,

$$a = \frac{r_0}{2 - \nu}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = a\sqrt{\nu(2 - \nu)}. \tag{4.38}$$

Найдем теперь период обращения спутника по эллиптической орбите. Исходя из интеграла площадей, имеем $S = ct$, где S — площадь, описываемая радиусом-вектором точки за время t, c — секторная скорость.

За время T полного оборота спутника радиус-вектор опишет полную площадь эллипса $S = \pi ab$. Следовательно, должно выполняться равенство $\pi ab = cT$. Вспомним, что согласно (4.18) и (4.34) $b = \sqrt{ap}$, $c = {}^1/_2\sqrt{pgR^2}$. Теперь получим

$$T = \pi \frac{ab}{c} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}}. \tag{4.39}$$

Таким образом, для двух спутников, движущихся по различным эллиптическим орбитам с большими полуосями a_1 и a_2 и периодами обращения T_1 и T_2, имеем

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{gR^2}}, \qquad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{gR^2}}.$$

Отсюда выводится известное соотношение

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Эта формула справедлива не только для задач о движении спутников Земли, но и вообще для случаев движения материальной точки по эллиптической орбите вокруг любого притягивающего центра. Применительно к Солнечной системе эту формулу установил путем обработки наблюдений И. Кеплер (*третий закон Кеплера*).

§ 4.5. Определение времени полета по эллиптической орбите (уравнение Кеплера)

Пусть движение спутника происходит по эллипсу с полуосями a и b (рис. 4.7). Опишем из центра эллипса окружность радиусом, равным большой полуоси. Через точку A на эллипсе проведем линию, перпендикулярную к линии апсид (оси x). Пусть точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью будет A_1. Угол E между отрезком O_1A_1 и линией апсид называется *эксцентрической ано-*

малией. Найдем связь между углами E и ψ (*истинной аномалией*). Из рассмотрения рис. 4.7 следует, что

$$a\cos E - r\cos\psi = c,$$

где c — половина фокусного расстояния. Подставляя в это выражение (см. формулу (4.14))

$$r = \frac{p}{1+e\cos\psi},$$

будем иметь

$$a\cos E - \frac{p\cos\psi}{1+e\cos\psi} = c.$$

Так как $e = c/a$ и $p/a = 1 - e^2$, то

$$\cos E = \frac{c}{a} + \frac{p}{a}\,\frac{\cos\psi}{1+e\cos\psi} = \frac{e+\cos\psi}{1+e\cos\psi}; \tag{4.40}$$

отсюда следует, что

$$\cos\psi = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E}. \tag{4.41}$$

Если теперь в уравнении траектории (4.14) заменить угол ψ с помощью выражения (4.41) на угол E, то получим

$$r = a\,(1 - e\cos E). \tag{4.42}$$

Для дальнейшего нам необходимо определить еще и $\sin\psi$. По свойству эллипса имеем (см. рис. 4.7)

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}.$$

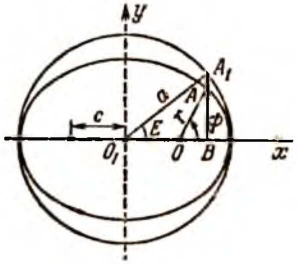


Рис. 4.7

В соответствии с рис. 4.7 получим $A_1B = a\sin E$, $AB = r\sin\psi$ и, следовательно,

$$\frac{r\sin\psi}{a\sin E} = \sqrt{1-e^2}.$$

Используя выражение (4.42), будем иметь

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin E}{1-e\cos E}. \tag{4.43}$$

Перейдем теперь к определению времени полета спутника. Для этого воспользуемся интегралом площадей (4.2):

$$dt = \frac{r^2}{2c}\,d\varphi = \frac{r^2}{2c}\,d\psi,$$

так как $\psi = \varphi - \varepsilon$. В соответствии с формулой (4.42) получим

$$dt = \frac{a^2(1-e\cos E)^2}{2c}\,d\psi. \tag{4.44}$$

На основании зависимости (4.41) имеем

$$\sin\psi\,d\psi = \frac{\sin E\,(1-e^2)\,dE}{(1-e\cos E)^2}.$$

Отсюда, учтя соотношение (4.43), получим

$$d\psi = \frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E}.$$

Следовательно, выражение (4.44) может быть переписано в виде

$$dt = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2c}(1-e\cos E)\,dE,$$

или

$$n(t-t_0) = \int_0^E (1-e\cos E)\,dE,$$

где t_0 — момент времени прохождения через перигей,

$$n = \frac{2c}{a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{2c(1-e^2)^{3/2}}{p^2}.$$

После интегрирования найдем

$$E - e\sin E = n(t-t_0). \tag{4.45}$$

Полученное уравнение носит название *уравнения Кеплера*.

Уравнение Кеплера устанавливает связь между эксцентрической аномалией E и временем движения точки.

Для того чтобы определить положение точки в данный момент времени, следует по уравнению Кеплера определить угол E, соответствующий данному моменту времени, затем по найденному E, используя формулы (4.41) и (4.42), определить ψ и r.

Решению уравнения Кеплера посвящено много работ.

Сейчас численное решение уравнения Кеплера производится на ЭВМ

В качестве примера применения уравнения Кеплера определим период обращения точки по эллиптической орбите.

Так как t_0 — момент времени прохождения через перигей, то при $t = t_0 + T$, где T — период обращения, $E = 2\pi$. Из уравнения Кеплера получаем $nT = 2\pi$. Отсюда

$$T = 2\pi/n.$$

Так как

$$n = \frac{2c(1-e^2)^{3/2}}{p^2},$$

а $p = a(1-e^2) = \frac{4c^2}{gR^2}$ (см. § 4.3), то $n = \sqrt{gR^2/a^3}$ и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{gR^2}}.$$

Эта формула была уже нами получена в § 4.4.

В заключение этого параграфа найдем выражение для проекций скорости и ускорения точки на радиальное и поперечное направления при ее движении по эллиптической траектории через эксцентрическую аномалию.

Так как $v_r = \dot r$ и $v_p = r\dot\psi = r\dot\psi$, то в соответствии с формулой (4.42) имеем

$$v_r = ae\sin E\frac{dE}{dt}, \quad v_p = a(1-e\cos E)\frac{d\psi}{dE}\frac{dE}{dt}.$$

Ранее было найдено

$$\frac{d\psi}{dE}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E},$$

а из уравнения (4.45) следует, что

$$\frac{dE}{dt}-e\cos E\frac{dE}{dt}=n.$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dt}=\frac{n}{1-e\cos E}=\frac{an}{r}.$$

Таким образом,

$$v_r=\frac{a^2en\sin E}{r},\qquad v_p=\frac{a^2n\sqrt{1-e^2}}{r}.$$

Модуль скорости будет

$$v=\sqrt{v_r^2+v_p^2}=\frac{a^2n}{r}\sqrt{1-e^2\cos^2 E}=an\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}.$$

Косинус угла между вектором скорости и радиусом-вектором материальной точки равен

$$\cos(\mathbf{v},\ \mathbf{r})=\frac{v_r}{v}=\frac{e\sin E}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}.$$

Для получения проекций ускорения на радиальную и поперечную оси используем равенства $mw_r=F_r$, $mw_p=F_p$, где $F_r=-mgR^2/r^2$, $F_p=0$. Отсюда

$$w_r=-\frac{gR^2}{r^2},\qquad w_p=0.$$

Модуль ускорения равен

$$w=\frac{gR^2}{r^2}=\frac{n^2a^3}{r^2},$$

так как

$$n=\sqrt{gR^2/a^3}.$$

§ 4.6. Траектории, пересекающие земную поверхность

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением только тех эллиптических траекторий ($e<1$), которые пересекают земную поверхность.

Условием пересечения траектории с земной поверхностью является неравенство (см. § 4.4)

$$\frac{v_0^2}{v_1^2}[(R+h)^2\cos^2\theta_0-R^2]<2Rh.$$

Это условие будет выполнено, если $\cos\theta_0<\cos\theta_0^*$, где $\cos\theta_0^*=R/(R+h)$.

Следовательно, если $\theta_0>\theta_0^*$, то все траектории (эллипсы) пересекут земную поверхность.

Если же $\theta_0<\theta_0^*$, то земную поверхность пересекут только те траектории, для которых начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$v_0<v_1\sqrt{\frac{2Rh}{(R+h)^2\cos^2\theta_0-R^2}}. \tag{4.46}$$

Рассмотрим траекторию, которая изображена на рис. 4.8.

Найдем угол ψ_1 (см. рис. 4.8) между прямой OA_0 и большой осью эллипса. Для апогея $\cos\psi_m = -1$, следовательно, $\psi_m = \pi$; но $\psi_m = \psi_0 + \psi_1$, значит,

$$\psi_1 = \pi - \psi_0. \tag{4.47}$$

Так как в точке A_0 выполняется равенство

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos\psi_0},$$

то

$$\cos\psi_0 = \frac{p - r_0}{er_0} \quad \text{и} \quad \psi_0 = \arccos\frac{p - r_0}{er_0}.$$

Таким образом, учитывая, что $p = r_0 \nu \cos^2\theta_0$, имеем

$$\psi_1 = \pi - \arccos\frac{\nu\cos^2\theta_0 - 1}{e},$$

или

$$\psi_1 = \arccos\frac{1 - \nu\cos^2\theta_0}{e}. \tag{4.48}$$

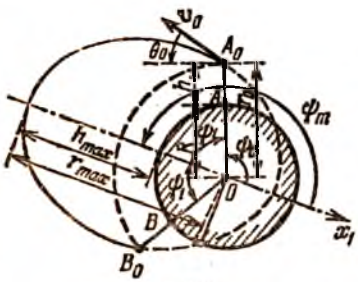


Рис. 4.8

Выразим длину дуги окружности радиуса r_0, проходящей через точки A_0 и B_0, через скорость v_0 и угол θ_0. В силу симметрии эллипса относительно его большой оси имеем

$$S_{A_0B_0} = 2r_0\psi_1.$$

Принимая во внимание формулу (4.48), получим

$$S_{A_0B_0} = 2r_0 \arccos\frac{1 - \nu\cos^2\theta_0}{e}. \tag{4.49}$$

Длина дуги AB определяется формулой

$$S_{AB} = 2R\psi_1. \tag{4.50}$$

При $h \ll R$ эту величину будем считать дальностью полета на пассивном участке траектории (см. рис. 4.8).

Исследуем характер зависимости угла ψ_1 от угла θ_0 при различных фиксированных ν, т. е. v_0.

Запишем формулу (4.48) в виде

$$\cos\psi_1 = \frac{1 - \nu\cos^2\theta_0}{\sqrt{1 - \nu(2 - \nu)\cos^2\theta_0}}. \tag{4.51}$$

При $\nu = 2$ формула (4.51) принимает вид

$$\cos\psi_1 = 1 - 2\cos^2\theta_0 = -\cos 2\theta_0$$

и, следовательно,

$$\psi_1 = \pi - 2\theta_0.$$

При $\nu = 1$ имеем

$$\cos\psi_1 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_0} = \sin\theta_0,$$

т. е.

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_0.$$

Найдем теперь значение угла θ_0, при котором ψ_1 имеет максимальное значение при данном фиксированном ν. Введя в формуле (4.51) замену $z = \cos^2\theta_0$, получим

$$\cos\psi_1 = \frac{1 - z\nu}{\sqrt{1 - \nu(2-\nu)z}}. \tag{4.52}$$

Продифференцировав это выражение по z, найдем

$$-\sin\psi_1 \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{-2\nu[1 - \nu(2-\nu)z] + (1 - \nu z)(2-\nu)\nu}{2[1 - \nu(2-\nu)z]^{3/2}}.$$

Приравняв нулю числитель правой части этого равенства, получим уравнение для определения того значения z, при котором ψ_1 имеет максимальное значение:

$$2[1 - \nu(2-\nu)z] - (1 - \nu z)(2-\nu) = 0.$$

Отсюда

$$z = \cos^2\theta_0 = \frac{1}{2-\nu}. \tag{4.53}$$

Следовательно, ψ_1 имеем экстремум только при $v < 1$. Формулу для определения максимального значения ψ_1 найдем, подставив результат (4.53) в выражение (4.52):

$$\cos\psi_1^{max} = \frac{2\sqrt{1-\nu}}{2-\nu}. \tag{4.54}$$

Определив из выражения (4.53) ν и подставив это в формулу (4.54), получим $\cos\psi_1^{max} = \sin 2\theta_0$. Отсюда

$$\psi_1^{max} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_0. \tag{4.55}$$

Из этой зависимости вытекает, что угол ψ_1 будет максимальным при заданном ν, если

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi_1}{2}. \tag{4.56}$$

На рис. 4.9 построены зависимости ψ_1 от θ_0 при различных значениях ν. Пунктиром показана линия максимумов (4.55).

Предполагая, что ν (т. е. v_0) задано, определим угол θ_0 для получения необходимого угла ψ_{11} при условии пересечения траекторий земной поверхности.

Рассмотрим случай $\nu = \nu_1 < 1$. По формуле $\cos\theta_0^* = R/(R+h)$ находим угол θ_0^* (заметим, что при $h \ll R$ угол θ_0^* близок к нулю). Из рассмотрения рис. 4.10 видно, что при $\nu_1 < 1$ заданный угол $\psi_{11} < \pi/2$ может быть достигнут при двух значениях угла θ_0:

$$\theta_0 = \theta_{01}, \quad \theta_0 = \theta_{02} \qquad (\theta_{01} < \theta_{02}).$$

Если $\theta_{02} < \theta_0^*$, то обе траектории пересекут земную поверхность только при (см. условие (4.46))

$$\nu_1 < \frac{2Rh}{(R+h)^2\cos^2\theta_{01} - R^2}.$$

Если $\theta_{01} < \theta_0^* < \theta_{02}$, то траектория, полученная при $\theta_0 = \theta_{01}$, пересечет земную поверхность только при

$$\nu_1 < \frac{2Rh}{(R+h)^2\cos^2\theta_{01} - R^2}.$$

При $\theta_{01} > \theta_0^*$ обе траектории пересекут земную поверхность.

Этот же заданный угол ψ_{11} может быть достигнут при

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi_{11}}{2}, \tag{4.57}$$

но уже при $\nu_2 < \nu_1$, т. е. при меньшей начальной скорости (см. рис. 4.10).

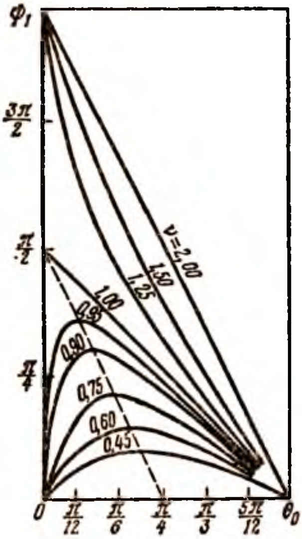


Рис. 4.9

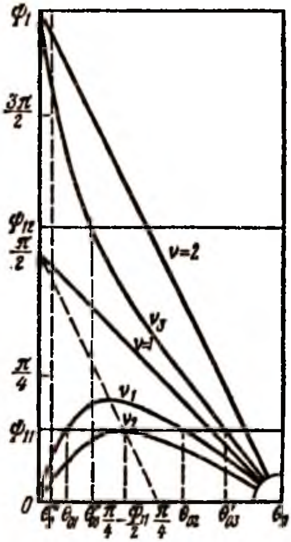


Рис. 4.10

Значение $\nu = \nu_2$, при котором заданное значение ψ_{11} достигается при $\theta_0 = \pi/4 - \psi_{11}/2$, найдем, используя формулу (4.53):

$$\nu_2 = 2 - \frac{1}{\cos^2\theta_0} = \frac{2\cos 2\theta_0}{1+\cos 2\theta_0} = \frac{2\sin\psi_{11}}{1+\sin\psi_{11}}.$$

Отсюда следует, что начальная скорость должна быть равна

$$v_0 = v_1\sqrt{\frac{2\sin\psi_{11}}{1+\sin\psi_{11}}}. \tag{4.58}$$

Формулы (4.57) и (4.58) дают возможность по заданному углу ψ_{11} найти угол θ_0 и минимальную начальную скорость v_0, обеспечивающие получение этого угла ψ_{11}.

Пусть $\nu = \nu_3 > 1$. В этом случае заданное $\psi_1 = \psi_{11}$ или $\psi_1 = \psi_{12}$ может быть достигнуто только при одном значении угла $\theta_0 = \theta'_{03}$ или $\theta_0 = \theta''_{03}$ (см. рис. 4.10). При этом, если $\theta_0^* < \theta'_{03}$ $(\theta_0^* < \theta''_{03})$, то траектория пересечет земную поверхность при любом $\nu < 2$. Если же $\theta_0^* > \theta'_{03}$ $(\theta_0^* > \theta''_{03})$, то пересечение произойдет только при выполнении условия (4.46).

§ 4.7. Задачи

Задача 4.1. Спутник движется по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли. Какую дополнительную скорость нужно сообщить спутнику, чтобы он перешел на параболическую орбиту?

Спутник, двигаясь по окружности вокруг Земли на высоте h, имеет круговую скорость, равную

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}.$$

Для того чтобы спутник перешел на параболическую орбиту, он должен приобрести параболическую скорость, соответствующую высоте h, т. е.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}.$$

Следовательно, спутнику нужно сообщить дополнительную скорость, равную

$$v_д = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}(\sqrt{2}-1).$$

Пусть $h = 200$ км $= 2\cdot10^5$ м, радиус Земли $R = 6{,}37\cdot10^6$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2, тогда $v_д = 3220$ м/с.

Задача 4.2. На какой высоте h следует запустить спутник по круговой орбите, чтобы период обращения его равнялся периоду обращения Земли вокруг своей оси (24 ч) *).

Из формулы для периода обращения (4.39) следует, что

$$a^3 = \frac{T^2gR^2}{4\pi^2}.$$

Так как орбита круговая, то $a = R + h$,

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2gR^2}{4\pi^2}} - R.$$

Подставляя $g = 9{,}81$ м/с^2, $R = 6{,}37\cdot10^6$ м, $T = 8{,}64\cdot10^4$ с, находим $h \approx$ ≈ 35600 км.

Задача 4.3. Найти начальную скорость, необходимую для того, чтобы траектория спутника представляла собой эллипс с заданным отношением между максимальным и минимальным расстоянием от центра Земли. Принять, что $\theta_0 = 0$, т. е. в начальный момент спутник находится на главной фокальной оси (линии апсид).

При решении будем различать два случая: 1) начальная скорость больше круговой скорости, т. е. начальная точка является перигеем орбиты; 2) начальная скорость меньше круговой скорости, т. е. начальная точка является апогеем орбиты.

В первом случае, когда $\nu > 1$, обозначим $r_{max} = \varkappa r_0$, $r_{min} = r_0$, где $\varkappa > 1$ — заданное число. Пользуясь формулой (4.37), имеем

$$r_{max} = \frac{\nu}{2-\nu} r_0, \quad r_{min} = r_0;$$

отсюда

$$\varkappa = \frac{\nu}{2-\nu} \quad и \quad \nu = \frac{2\varkappa}{1+\varkappa}.$$

---

*) Если орбита спутника лежит в плоскости экватора и направление движения совпадает с направлением вращения Земли, то спутник будет все время располагаться над одной и той же точкой земной поверхности; такой спутник называется *стационарным*.

Так как $\nu = v_0^2/v_1^2$, где $v_1 = \sqrt{gR^2/r_0}$, то искомая начальная скорость равна

$$v_0 = v_1 \sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}} > v_1.$$

Большая и малая полуоси соответственно равняются $a = \frac{1+\varkappa}{2} r_0$, $b = r_0\sqrt{\varkappa}$. На рис. 4.5 возле каждого эллипса указаны соответствующие значения $\varkappa = 1,\ 4,\ 9$.

Во втором случае, когда $\nu < 1$, удобно обозначить $r_{max} = r_0$, $r_{min} = \varkappa_1 r_0$, причем $\varkappa_1$ является заданным числом, меньшим единицы. Пользуясь формулой (4.37), найдем, что

$$r_{max} = r_0, \quad r_{min} = \frac{\nu}{2-\nu} r_0$$

и $\varkappa_1$ выражается формулой

$$\varkappa_1 = \frac{\nu}{2-\nu}.$$

Отсюда находим

$$\nu = \frac{2\varkappa_1}{1+\varkappa_1} \quad \text{и} \quad v_0 = v_1 \sqrt{\frac{2\varkappa_1}{1+\varkappa_1}} < v_1.$$

При этом, если $\varkappa_1 > R/r_0$, то эллипсы не пересекают поверхность Земли (см. рис. 4.6); если же $\varkappa_1 < R/r_0$, то эллипсы пересекаются с поверхностью Земли (такие траектории могут быть использованы для так называемых суборбитальных полетов). Соответствующие эллипсы изображены на рис. 4.11 при $\varkappa_1 = 0{,}2;\ 0{,}4$.

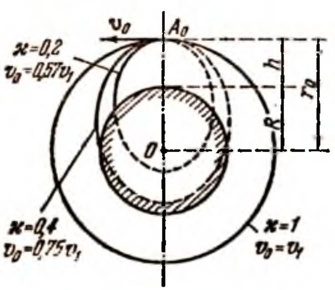


Рис. 4.11

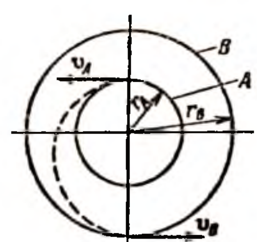


Рис. 4.12

Задача 4.4. Спутник, движущийся по круговой орбите A радиуса r_A, переводят на круговую орбиту B радиуса r_B ($r_B > r_A$).

Для этого сначала переводят спутник с круговой орбиты A на эллиптическую орбиту, апогей которой расположен на расстоянии r_B от центра Земли (рис. 4.12); а затем, сообщив дополнительную скорость, переводят на круговую орбиту B. Определить дополнительные скорости, которые следует сообщить спутнику на орбите A и в апогее переходного эллипса, чтобы выполнить предполагаемый переход с орбиты A на орбиту B.

При движении по орбите A спутник имеет скорость

$$v_{1A} = \sqrt{gR^2/r_A}.$$

Для перевода спутника на эллиптическую орбиту, расстояние апогея которой от центра Земли равно r_B, его скорость должна быть увеличена. Необходимая скорость была найдена в задаче 4.3 и равна

$$v_A = v_{1A}\sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}}, \quad \text{где} \quad \varkappa = \frac{r_B}{r_A}.$$

Следовательно, добавочная скорость, которую нужно сообщить спутнику будет

$$\Delta_1 v = v_A - v_{1A} = v_{1A}\left(\sqrt{\frac{2\varkappa}{1+\varkappa}} - 1\right).$$

Скорость спутника v_B в апогее эллипса найдем из интеграла площадей $v_A r_A = v_B r_B$. Отсюда

$$v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = \frac{v_A}{\varkappa} = v_{1A}\sqrt{\frac{2}{\varkappa(1+\varkappa)}}.$$

Так как на орбите B круговая скорость спутника должна быть равна $v_{1B} = \sqrt{gR^2/r_B} = v_{1A}\sqrt{1/\varkappa}$, то дополнительная скорость, которую следует сообщить спутнику для перехода на орбиту B, будет равна

$$\Delta_2 v = v_{1B} - v_B = v_{1A}\sqrt{\frac{1}{\varkappa}} - v_{1A}\sqrt{\frac{2}{\varkappa(1+\varkappa)}} = v_{1A}\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} - \sqrt{\frac{2}{\varkappa(1+\varkappa)}}\right).$$

Суммарное увеличение скорости спутника при переходе с орбиты A на орбиту B определяется соотношением

$$\Delta_1 v + \Delta_2 v = v_{1A}\left(\frac{\varkappa - 1}{\sqrt{\varkappa}}\sqrt{\frac{2}{1+\varkappa}} + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} - 1\right).$$

Глава V

НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 5.1. Определение несвободного движения. Связи. Принцип освобождаемости

В первой главе при формулировке основных задач динамики точки мы исходили из предположения, что на движение точки не наложено никаких ограничений, т. е. все ее три координаты могут меняться любым образом. Надлежащим выбором закона изменения силы **F** и начальных условий можно заставить материальную точку двигаться по любой траектории. Примером может служить движение управляемого космического корабля. В подобных случаях материальная точка называется *свободной*, а ее движение — *свободным движением*.

В других случаях на движение могут быть наложены те или иные ограничения. Рассмотрим, например, материальную точку, находящуюся на конце нерастяжимого стержня длины l, другой конец которого с помощью шарнира закреплен в неподвижной точке O (рис. 5.1). При любых силах, приложенных к материальной точке, она совершает движение по поверхности сферы, радиус которой равен длине стержня. Координаты точки не будут независимыми, так как они должны удовлетворять уравнению сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \tag{5.1}$$

Из этого уравнения одна из координат, например координата x, может быть выражена через остальные две:

$$x = \pm \sqrt{l^2 - y^2 - z^2}. \tag{5.2}$$

Скорость точки всегда располагается в касательной плоскости, проведенной к сфере в точке, где находится в данный момент материальная точка.

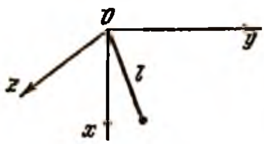


Рис. 5.1

Таким образом, в рассматриваемом примере начальные условия не могут быть выбраны произвольно, так как координаты начального положения должны удовлетворять уравнению (5.1), а начальная скорость должна быть расположена в касательной плоскости, проведенной к сфере в точке начального положения материальной точки.

Итак, существуют случаи движения материальной точки, когда некоторые ограничения вынуждают точку совершать движение по строго фиксированной поверхности (в рассматриваемом примере таким ограничением является стержень). Можно привести примеры, когда ограничения принуждают материальную точку двигаться по строго определенной линии (например, кольцо, насаженное на изогнутую проволоку, будет двигаться только вдоль проволоки). Ограничения также вынуждают материальную точку двигаться лишь в некоторой части пространства. Во всех этих случаях независимо от действующих сил координаты точки определенным образом связаны между собой и выбор начальных условий не может быть произвольным.

Будем называть материальную точку *несвободной*, если вследствие тех или иных ограничений она при действии на нее любых сил совершает движение по строго фиксированной линии, поверхности или находится все время в строго фиксированной части пространства. Движение такой точки называется *несвободным движением*.

Ограничения, благодаря которым материальная точка вынуждена совершать несвободное движение, называются *связями*; это понятие уже встречалось в курсе статики.

При изучении несвободного движения пользуются также знакомым из курса статики *принципом освобождаемости*, который заключается в следующем: *при рассмотрении несвободного движения следует действие связей на материальную точку заменить реакциями этих связей и рассматривать материальную точку как свободную, но находящуюся под действием как сил активных, так и реакций связей*. Если обозначить через **F** равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке, а через $\mathbf{R}$ — равнодействующую всех реакций связей, то основное уравнение динамики примет вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \tag{5.3}$$

Следует иметь в виду, что реакция связи неизвестна и может возникнуть задача об определении этой силы.

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ в соответствии с уравнением (5.3) получим

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z.$$

Эти уравнения позволяют решать задачи, когда заданы движение и активные силы и требуется определить реакции, а также когда заданы активные силы и требуется определить закон движения и реакции.

§ 5.2. Уравнения связей; классификация связей

Независимо от фактической реализации тех или иных связей, наложенных на материальную точку, они могут быть заданы аналитически. Уравнения линии или поверхности, по которым совершает движение точка, называются *уравнениями связи*. Если точка принуждена оставаться в некоторой области пространства, то связь аналитически задается в виде неравенств.

Если материальная точка движется по линии, то уравнения связи имеют вид

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \tag{5.4}$$

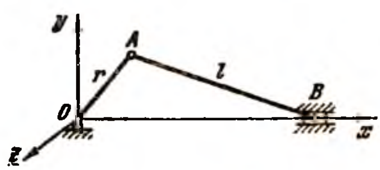


Рис. 5.2

где $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$ — уравнения тех поверхностей, линией пересечения которых является траектория точки. В случае плоского движения по заданной кривой уравнение связи можно записать в форме $f(x, y) = 0$. Например, в кривошипно-ползунном механизме (рис. 5.2) точка A шатуна движется по окружности радиуса, равного длине кривошипа. Уравнение связи получает вид

$$x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0.$$

Ползун B движется по прямой, и для него уравнение связи имеет вид $y_B = 0$. Неизменность расстояния между A и B выражается уравнением

$$(x_A - x_B)^2 + y_A^2 = l^2.$$

При движении точки по поверхности уравнением связи является уравнение этой поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \tag{5.5}$$

Уравнение сферы (5.1) в рассмотренном выше примере и является уравнением связи. Заметим, что если в этом примере вместо стержня взята гибкая нерастяжимая нить, то точка получит возможность совершать движение не только по поверхности, но и внутри сферы радиуса, равного длине l нити. Вместо уравнения связь в этом случае аналитически задается неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leqslant 0. \tag{5.6}$$

Следовательно, если какая-либо поверхность, определяемая уравнением $f(x, y, z) = 0$, ограничивает область движения точки, то вместо уравнения связи следует взять одно из неравенств:

$$f(x, y, z) \leqslant 0 \tag{5.7}$$

или

$$f(x, y, z) \geqslant 0.$$

Перейдем теперь к классификации связей.

Если связь со временем не меняется, т. е. время t явно в уравнение связи не входит, то связь называется *стационарной* (*склерономной*). Таковы, например, связи, удовлетворяющие условиям (5.4), (5.5) и (5.7).

Если же связь изменяется во времени заданным образом, то уравнение связи содержит явно время t. Такие связи называются *нестационарными* (*реономными*).

Например, если длина стержня l на рис. 5.1 будет изменяться по какому-либо заданному закону, в частности, пусть $l = l_0 + a \sin \omega t$ $(l_0 > a)$, то уравнение связи будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - (l_0 + a \sin \omega t)^2 = 0.$$

Следовательно, в общем случае при изменении связей во времени они могут быть заданы следующим образом:

при движении точки по поверхности

$$f(x, y, z, t) = 0; \tag{5.8}$$

при движении точки по кривой

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0; \tag{5.9}$$

при движении точки в ограниченной области

$$f(x, y, z, t) \leqslant 0 \text{ или } f(x, y, z, t) \geqslant 0. \tag{5.10}$$

Связь называется *удерживающей*, если уравнение связи имеет вид равенства, как, например, уравнения (5.4). Это означает, что при любых условиях точка движется по заданной поверхности или кривой. Связи, которые задаются с помощью неравенств, например, в виде (5.7) или (5.10), называются *неудерживающими*.

Примером неудерживающей связи служит связь, определяемая неравенством (5.6). Следовательно, связь является неудерживающей, если точка может покидать ее в какую-либо одну сторону.

Наконец, введем еще понятие об *идеальной* связи. При движении точки по поверхности или по кривой реакция связи может быть разложена на нормальную и касательную составляющие. Касательная составляющая реакции представляет собой силу трения. Очевидно, что чем более гладкой будет поверхность или кривая, тем меньше будет касательная составляющая реакции. Если поверхность или кривая абсолютно гладкие, то реакция будет направлена по нормали.

Для точки *идеальными* связями будем называть связи без трения, реакции которых не имеют касательных составляющих *).

§ 5.3. Движение точки по гладкой неподвижной поверхности

Для изучения движения материальной точки по поверхности используем уравнение (5.3).

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ имеем

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \tag{5.11}$$

Эти три уравнения содержат шесть неизвестных: три координаты точки (x, y, z) и три неизвестные проекции R_x, R_y, R_z реакции. Но, как мы видели, координаты точки должны также удовлетворять уравнению поверхности, по которой движется точка. Это дает четвертое уравнение

$$f(x, y, z) = 0. \tag{5.12}$$

Конечно, четырех уравнений для определения шести неизвестных недостаточно. Для получения двух недостающих уравнений используем условие идеальности связи.

Так как поверхность, по которой движется точка, идеально гладкая, то реакция направлена по нормали к поверхности. Градиент

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

представляет собой вектор, который также направлен по нормали к поверхности.

Условие коллинеарности реакции $\mathbf{R}$ и $\operatorname{grad} f$ и дает недостающие два уравнения:

$$\frac{R_x}{\partial f/\partial x} = \frac{R_y}{\partial f/\partial y} = \frac{R_z}{\partial f/\partial z}. \tag{5.13}$$

Таким образом, уравнения (5.11)—(5.13) в принципе дают возможность решить задачу о движении точки по гладкой неподвижной поверхности. Из уравнений (5.11) и (5.13) можно исключить реакции связей. Для этого обозначим равные отношения (5.13) через λ, т. е.

$$\frac{R_x}{\partial f/\partial x} = \frac{R_y}{\partial f/\partial y} = \frac{R_z}{\partial f/\partial z} = \lambda.$$

---

*) Более полное определение идеальных связей будет приведено в главе XVIII.

Тогда

$$R_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad R_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad R_z=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\tag{5.14}$$

и уравнения (5.11) теперь примут такой вид:

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad m\ddot{y}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad m\ddot{z}=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.\tag{5.15}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связи (5.12), получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z и λ. После отыскания этих неизвестных по формулам (5.14) можно определить проекции реакции. Модуль реакции равен

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=|\lambda|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.\tag{5.16}$$

Реакция определяется выражением

$$\mathbf{R}=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\lambda\,\mathrm{grad}\,f.$$

Уравнения (5.15) называются *уравнениями Лагранжа первого рода.*

Задача 5.1. Рассмотрим движение тяжелой материальной точки массы m по внутренней поверхности цилиндра радиуса r; ось цилиндра горизонтальна (рис. 5.3). Совместив начало координат с какой-либо точкой оси цилиндра, направим ось x вертикально вниз, ось y — горизонтально по радиусу цилиндра, а ось z — по оси цилиндра.

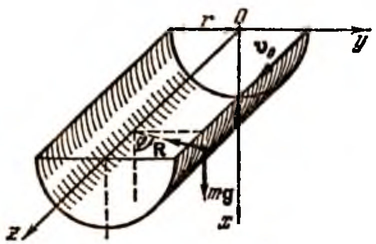


Рис. 5.3

Примем, что в начальный момент положение точки определяется координатами $x=0$, $y=r$, $z=0$. Положим также, что начальная скорость направлена параллельно оси цилиндра и равна v_0. Это значит, что в начальный момент $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$, $\dot{z}=v_0$.

На материальную точку действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и реакция $\mathbf{R}$, направленная по радиусу. Уравнение связи (цилиндрической поверхности) имеет вид

$$f(x,y,z)\equiv x^2+y^2-r^2=0.$$

Подставим $F_x=mg$, $F_y=F_z=0$, $\partial f/\partial x=2x$, $\partial f/\partial y=2y$ и $\partial f/\partial z=0$ в уравнения (5.15). В результате получим

$$m\ddot{x}=mg+2\lambda x,\qquad m\ddot{y}=2\lambda y,\qquad m\ddot{z}=0.\tag{5.17}$$

Из третьего уравнения системы (5.17) после интегрирования и использования начальных условий получим $z=v_0t$, т. е. расстояние от начальной плоскости xy растет пропорционально времени.

Умножая первое уравнение системы (5.17) на y, второе уравнение — на x и вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$m(\ddot{x}y-\ddot{y}x)=mgy.$$

Умножая теперь первое уравнение системы (5.17) на x и складывая его со вторым уравнением, умноженным на y, будем иметь

$$m(\ddot{x}x+\ddot{y}y)=mgx+2\lambda(x^2+y^2).\tag{5.18}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Так как

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \quad \ddot{y} = r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

то уравнения (5.17) и (5.18) примут вид $mr^2\ddot{\varphi} = -mgr\sin\varphi$, или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0 \tag{5.19}$$

и

$$-mr^2\dot{\varphi}^2 = mgr\cos\varphi + 2\lambda r^2. \tag{5.20}$$

Записав уравнение (5.19) в виде

$$\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\varphi\, d\varphi,$$

после интегрирования получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\cos\varphi + c.$$

Так как $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$, то $c = 0$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r}\cos\varphi. \tag{5.21}$$

Из этого уравнения видно, что при выбранных начальных условиях движение будет происходить в области, где $\cos\varphi > 0$, т. е. при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Подставляя выражение (5.21) в уравнение (5.20), будем иметь

$$\lambda = -\frac{3mg}{2r}\cos\varphi.$$

В соответствии с формулами (5.14) получаем

$$R_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = -3mg\cos^2\varphi, \quad R_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = -3mg\sin\varphi\cos\varphi, \quad R_z = 0.$$

Модуль реакции равен $R = 3mg\cos\varphi$. Реакция равна нулю при $\varphi = \pm\pi/2$. Максимальное значение реакции будет при $\varphi = 0$ и равно $R = 3mg$.

Для определения закона изменения угла φ нужно проинтегрировать уравнение (5.19). Это будет сделано в § 5.5.

§ 5.4. Движение точки по гладкой неподвижной кривой

При движении материальной точки по кривой уравнения связей имеют вид

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \tag{5.22}$$

где $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$ — уравнения поверхностей, линия пересечения которых является траекторией точки (рис. 5.4).

В этом случае в уравнении (5.3) реакцию $\mathbf{R}$ следует рассматривать как сумму реакций, т. е.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \tag{5.23}$$

где $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ — реакции, заменяющие действие соответственно первой и второй связи, уравнения которых имеют вид (5.22). Поэтому дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$m\ddot{x} = F_x + R_{1x} + R_{2x}, \quad m\ddot{y} = F_y + R_{1y} + R_{2y}, \quad m\ddot{z} = F_z + R_{1z} + R_{2z}. \tag{5.24}$$

Эти уравнения содержат девять неизвестных: три координаты и шесть проекций реакций.

Присоединяя к уравнениям (5.24) два уравнения связи (5.22) и условия идеальностей связей

$$\frac{R_{1x}}{\partial f_1/\partial x}=\frac{R_{1y}}{\partial f_1/\partial y}=\frac{R_{1z}}{\partial f_1/\partial z} \tag{5.25}$$

и

$$\frac{R_{2x}}{\partial f_2/\partial x}=\frac{R_{2y}}{\partial f_2/\partial y}=\frac{R_{2z}}{\partial f_2/\partial z}, \tag{5.26}$$

получим девять уравнений с девятью неизвестными. Из этих уравнений можно

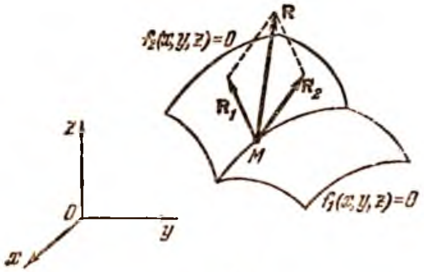


Рис. 5.4

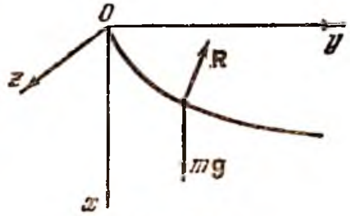


Рис. 5.5

исключить проекции реакций. Для этого отношения в выражениях (5.25) и (5.26) соответственно обозначим через λ_1 и λ_2 и получим

$$R_{1x}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x},\quad R_{1y}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y},\quad R_{1z}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}, \tag{5.27}$$

$$R_{2x}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\quad R_{2y}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad R_{2z}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{5.28}$$

Следовательно, уравнения (5.24) примут следующий вид:

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\quad m\ddot{y}=F_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad m\ddot{z}=F_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{5.29}$$

Система (5.29) совместно с уравнениями связи (5.22) образует систему пяти уравнений с пятью неизвестными x, y, z, λ_1 и λ_2.

Реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ определяются формулами

$$\mathbf{R}_1=\lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\lambda_1\operatorname{grad}f_1,$$

$$\mathbf{R}_2=\lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\lambda_2\operatorname{grad}f_2.$$

Модули этих реакций равны

$$R_1=|\lambda_1|\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}, \tag{5.30}$$

$$R_2=|\lambda_2|\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}. \tag{5.31}$$

Задача 5.2. По проволоке, имеющей форму параболы, движется колечко; уравнения связи (параболы) имеют вид (рис. 5.5)

$$f_1(x,\ y,\ z) = 2y - x^2 = 0, \qquad f_2(x,\ y,\ z) = z = 0. \tag{5.32}$$

Найти реакцию связи при нулевых начальных условиях.

Подставляя $\partial f_1/\partial x = -2x$, $\partial f_1/\partial y = 2$, $\partial f_1/\partial z = 0$, $\partial f_2/\partial x = 0$, $\partial f_2/\partial y = 0$, $\partial f_2/\partial z = 1$ в уравнения (5.29), получим

$$m\ddot{x} = mg - 2\lambda_1 x, \qquad m\ddot{y} = 2\lambda_1, \qquad m\ddot{z} = \lambda_2. \tag{5.33}$$

Из второго уравнения связи имеем $\ddot{z} = 0$ и, следовательно, $\lambda_2 = 0$.

Умножая теперь второе уравнение на x и складывая его с первым уравнением, получим

$$\ddot{x} + x\ddot{y} = g. \tag{5.34}$$

Так как согласно уравнениям (5.32) $y = {}^1/_2 x^2$, то

$$\dot{y} = x\dot{x} \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 + x\ddot{x}.$$

Подставим полученное выражение $\ddot{y}$ в уравнение (5.34):

$$\ddot{x}(1 + x^2) + x\dot{x}^2 = g.$$

Пользуясь равенством $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}$, найдем

$$(x\dot{x}^2 - g)\,dx + \dot{x}(1 + x^2)\,d\dot{x} = 0.$$

Это уравнение в полных дифференциалах, и его решение имеет вид

$$\dot{x}^2(1 + x^2) - 2gx = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

При нулевых начальных условиях ($x = y = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ при $t = 0$) получаем, что $C = 0$ и, следовательно,

$$\dot{x}^2(1 + x^2) - 2gx = 0,$$

или

$$\dot{x}^2 = \frac{2gx}{1 + x^2}. \tag{5.35}$$

Продифференцировав выражение (5.35) по времени, найдем

$$2\dot{x}\ddot{x} = \frac{2g(1 + x^2) - 2gx2x}{(1 + x^2)^2}\dot{x},$$

откуда

$$\ddot{x} = \frac{g(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Учитывая, что $\ddot{y} = \dot{x}^2 + x\ddot{x}$, получим

$$\ddot{y} = \frac{gx(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Тогда на основании второго уравнения системы (5.33) имеем

$$\lambda_1 = \frac{mg}{2}\,\frac{x(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Конечно, это же выражение можно получить и из первого уравнения системы (5.33). На основании формул (5.27) можно выразить проекции реакций через абсциссу колечка:

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -mg \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad R_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = mg \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Найдем скорость колечка в зависимости от его абсциссы. Так как $\dot{y} = x\dot{x}$ и учитывая $\dot{x} > 0$, имеем

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1+x^2},$$

или, принимая во внимание равенство (5.35),

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Этот результат можно было получить и сразу, применяя теорему об изменении кинетической энергии. Действительно, так как работа реакции, направленной по нормали к кривой, равна нулю, то

$$mv^2/2 = mgx \quad \text{и} \quad v = \sqrt{2gx}.$$

Рассмотренный пример показывает, что нахождение реакций с помощью уравнений Лагранжа первого рода (уравнений (5.29)) приводит к громоздким выкладкам. Поэтому этот метод и не нашел широкого практического применения. В следующем параграфе будет показано, как эту задачу можно решить значительно короче.

§ 5.5. Естественные уравнения движения. Математический маятник

При изучении несвободного движения материальной точки по неподвижной кривой иногда удобно использовать уравнение (5.3) в проекциях на оси естественного трехгранника (глава I, § 1.3). Эти уравнения имеют вид

$$mw_\tau = F_\tau + R_\tau, \quad mw_n = F_n + R_n, \quad mw_b = F_b + R_b.$$

Подставляя сюда проекции ускорения

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0,$$

получим

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau + R_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \qquad (5.36)$$

Уравнения (5.36) называются *естественными уравнениями движения*. Из третьего уравнения следует, что бинормальная составляющая реакции определяется статически через бинормальную составляющую активной силы и от закона движения точки не зависит.

При заданных активных силах и известных уравнениях связи уравнения (5.36) позволяют определить закон движения точки и реакции связей. Заметим, что между проекциями реакции R_τ, R_n, R_b обычно существует простая связь.

При движении точки по шероховатой кривой проекция R_τ представляет собой силу трения скольжения. Модуль силы трения скольжения равен

$$|R_\tau| = f\sqrt{R_n^2 + R_b^2},$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Сила трения скольжения всегда направлена противоположно скорости, следовательно,

$$R_\tau = -f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}\,\frac{v_\tau}{v}.$$

Если движение происходит по идеально гладкой кривой, то $R_\tau = 0$ и естественные уравнения движения принимают вид

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \tag{5.37}$$

Отметим, что в этом случае первое уравнение служит для определения закона движения, а второе и третье — для определения реакции связи.

При движении точки по плоской, неподвижной шероховатой кривой уравнения (5.36) запишутся в виде

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau + R_\tau = F_\tau - f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}\,\frac{v_\tau}{v}, \qquad \frac{mv^2}{\rho} = F_n + R_n. \tag{5.38}$$

Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, второе уравнение системы (5.38) можно записать следующим образом (см. рис. 5.5):

$$mv^2/\rho = R - mg\sin\alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной к параболе с осью x.

Исходя из уравнения параболы $y = {}^1/_2 x^2$, имеем

$$y' = x = \operatorname{tg}\alpha. \tag{5.39}$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{5.40}$$

Из курса высшей математики известно, что радиус кривизны кривой находится по формуле

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Учитывая соотношение (5.39), получим

$$\rho = (1+x^2)^{3/2}.$$

Так как $v = \sqrt{2gx}$, то

$$R = \frac{mv^2}{\rho} + mg\sin\alpha = m\frac{2gx}{(1+x^2)^{3/2}} + mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = mg\frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$R_x = -mg\frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}, \qquad R_y = mg\frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Применим теперь уравнения (5.38) для изучения движения математического маятника.

Математическим маятником называется материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Практически это можно, например, осуществить, подвесив материальную точку к невесомой нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. При этом начальная скорость подвешенной точки должна располагаться в вертикальной плоскости перпендикулярно к радиусу.

Положение точки будем определять углом φ, образованным нитью с вертикалью (рис. 5.6). Если m — масса точки, то действующая на точку сила тяжести равна mg. Пусть длина нити равна l.

Так как

$$v_\tau = l\dot{\varphi}, \quad F_\tau = -mg\sin\varphi, \quad F_n = -mg\cos\varphi,$$

то уравнения (5.37) будут иметь вид

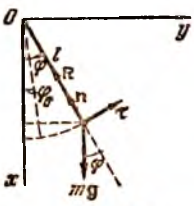


Рис. 5.6

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi, \quad ml\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\varphi + R_n;$$

при этом учтено, что реакция направлена вдоль нити и, следовательно, $R_\tau = 0$.

Перепишем эти уравнения в следующей форме:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{5.41}$$

$$R_n = ml\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi. \tag{5.42}$$

Уравнение (5.41) служит для определения закона движения маятника, а уравнение (5.42) — для определения реакции нити.

Пусть в начальный момент ($t = 0$) нить отклонена от вертикали на угол $\varphi = \varphi_0$ и отпущена с начальной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Определим реакцию в зависимости от угла φ, а также и закон движения точки $\varphi = \varphi(t)$.

Согласно уравнению (5.42) для определения R_n в зависимости от угла φ нужно выразить величину $\dot{\varphi}^2$ через этот угол.

Представив $\ddot{\varphi}$ в уравнении (5.41) в виде

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi},$$

получим

$$\tfrac{1}{2} l\, d\dot{\varphi}^2 = -g\sin\varphi\, d\varphi.$$

Вспоминая, что при $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, можем записать так:

$$\frac{1}{2} l \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi}^2 = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi,$$

откуда

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + l\dot{\varphi}_0^2\,^{*)}. \tag{5.43}$$

*) Этот результат можно получить короче, используя теорему об изменении кинетической энергии (см. § 5.6).

Подставляя этот результат в уравнение (5.42), получим

$$R_n = ml\dot{\varphi}_0^2 + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Пусть $v_0 = l\dot{\varphi}_0$ — начальная скорость точки; тогда

$$R_n = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0). \tag{5.44}$$

В частности, формула (5.44) позволяет найти угол $\varphi = \varphi_1$, при котором для заданных начальных условий связь перестает быть удерживающей (нить сомнется). Это произойдет, если $R_n = 0$:

$$\frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(2\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{gl}\right).$$

Если потребовать, чтобы связь была удерживающей вплоть до значения $\varphi_1 = \pi$, то начальная скорость должна равняться

$$v_0 = \sqrt{(3 + 2\cos\varphi_0)gl};$$

при этом маятник будет совершать круговое движение. В частности, при $\varphi_0 = 0$ получим

$$v_0 = \sqrt{5gl}.$$

Если начальная скорость равна нулю, то $\dot{\varphi}_0 = 0$ и формула (5.43) примет вид

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{5.45}$$

Следовательно, во все время движения должны выполняться неравенства $\cos\varphi \geqslant \cos\varphi_0$ и $\varphi \leqslant \varphi_0$.

Перейдем к определению закона движения маятника. Вводя обозначение $k^2 = g/l$, перепишем уравнение (5.41) в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0.$$

Рассмотрим сначала случай малый отклонений, когда можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$. В этом случае дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

совпадает по форме с дифференциальным уравнением свободных линейных колебаний. Следовательно, угол φ меняется по гармоническому закону

$$\varphi = \varphi_0\cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin kt.$$

Период малых колебаний маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{5.46}$$

т. е. при малых углах отклонения период не зависит от начального отклонения φ_0 (колебания маятника *изохронны*).

Теперь найдем период колебаний маятника при любых углах отклонения φ. Рассмотрим случай, когда колебания начинаются вследствие начального отклонения φ_0, причем начальная угловая скорость $\dot\varphi_0$ равна нулю.

Из уравнения (5.43) следует

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

При возрастании угла φ здесь должен быть взят знак «плюс», а при обратном движении — знак «минус».

При указанных начальных условиях движение начинается от значения $\varphi = \varphi_0$ в сторону уменьшения угла φ. В течение первого полупериода скорость отрицательна и в последнем выражении должен быть взят знак «минус». Если длительность полупериода обозначить через t_1, то из выражения для скорости следует равенство

$$\int_0^{t_1} dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\varphi_0}^{-\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}};$$

отсюда находим

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$

При обратном движении, т. е. при изменении угла φ от значения $-\varphi_0$ до значения φ_0, скорость $\dot\varphi > 0$ и, значит,

$$\int_0^{t_2} dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}},$$

где t_2 — время движения.

Отсюда

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}.$$

Период колебаний T равен

$$T = t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}.$$

Входящий сюда интеграл не относится к числу элементарных. Преобразуем его следующим образом. Так как

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2),$$

то

$$T = \frac{2}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\Big/\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}}.$$

Введем переменную ψ:

$$\sin\psi = \frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)}.$$

Тогда

$$d\varphi = \frac{2\sin(\varphi_0/2)\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi_0/2)\sin^2\psi}}$$

и, следовательно,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi_0/2)\sin^2\psi}}. \tag{5.47}$$

Интеграл

$$K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi_0/2)\sin^2\psi}}$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Значения этого интеграла зависят только от начального угла φ_0 и могут быть найдены в таблицах специальных функций.

Приближенное значение K при достаточно малых значениях φ_0 можно найти путем разложения подынтегрального выражения в ряд

$$\left(1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi+\ldots$$

Ограничиваясь двумя написанными членами, получим

$$K \approx \int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi\right)d\psi = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

и, следовательно,

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Если можно принять $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2$, то

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right). \tag{5.48}$$

Формулы (5.46) и (5.48) для периода колебаний различаются множителем $(1+\varphi_0^2/16)$. Значение этой поправки зависит от начального угла φ_0 и приведено в следующей таблице:

10°	20°	40°	60°	90°
1,0019	1,0076	1,0304	1,0684	1,1539

Рассмотрим задачу о движении точки по шероховатой кривой.

Задача 5.3. Лыжник спускается с горы, причем его траекторию можно принять за окружность радиуса r (рис. 5.7). Коэффициент трения скольжения равен f. Определить скорость лыжника в точке B, если в начальной точке A его скорость равнялась нулю.

Так как в данном примере нормальная реакция $R_n > 0$ и $v_\tau = v$, то уравнения (5.38) будут иметь вид

$$m\frac{dv}{dt} = mg\cos\varphi - fR_n, \quad \frac{mv^2}{r} = -mg\sin\varphi + R_n. \tag{5.49}$$

Для исключения реакции умножим второе уравнение на f и сложим с первым уравнением:

$$m\frac{dv}{dt} + f\frac{mv^2}{r} = mg(\cos\varphi - f\sin\varphi).$$

Учитывая, что $v = r\dot\varphi$, имеем

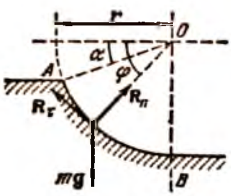


Рис. 5.7

$$r\frac{d\dot\varphi}{dt} + r\dot\varphi^2 = g(\cos\varphi - f\sin\varphi),$$

но так как

$$\frac{d\dot\varphi}{dt} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot\varphi^2)}{d\varphi},$$

то

$$\frac{d(\dot\varphi^2)}{d\varphi} + 2f\dot\varphi^2 = \frac{2g}{r}(\cos\varphi - f\sin\varphi). \tag{5.50}$$

Уравнение (5.50) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\dot\varphi^2$.

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d\dot\varphi^2}{d\varphi} + 2f\dot\varphi^2 = 0$$

имеет вид

$$\dot\varphi_1^2 = Ce^{-2f\varphi}, \tag{5.51}$$

где C — постоянная интегрирования.

Частное решение уравнения (5.50) будем разыскивать в виде

$$\dot\varphi_2^2 = A\cos\varphi + B\sin\varphi, \tag{5.52}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Для их определения, подставим выражение (5.52) в дифференциальное уравнение (5.50); тогда получим

$$(2fA + B)\cos\varphi + (2fB - A)\sin\varphi = \frac{2g}{r}\cos\varphi - \frac{2g}{r}f\sin\varphi.$$

Для тождественного удовлетворения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в обеих частях равенства были соответственно равны друг другу. Это позволяет получить два уравнения относительно неизвестных A и B:

$$2Af + B = \frac{2g}{r}, \quad -A + 2fB = -\frac{2gf}{r}.$$

Отсюда

$$A = \frac{6gf}{r(1+4f^2)}, \quad B = \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$\dot{\varphi}_2^2 = \frac{6gf}{r(1+4f^2)}\cos\varphi + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}\sin\varphi. \tag{5.53}$$

Складывая решения (5.51) и (5.53), получим общее решение дифференциального уравнения (5.50):

$$\dot{\varphi}^2 = Ce^{-2f\varphi} + \frac{6gf}{r(1+4f^2)}\cos\varphi + \frac{2g(1-2f^2)\sin\varphi}{r(1+4f^2)}. \tag{5.54}$$

По условию задачи $\dot{\varphi} = 0$ при $\varphi = \alpha$, следовательно,

$$Ce^{-2f\alpha} + \frac{6gf}{r(1+4f^2)}\cos\alpha + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}\sin\alpha = 0.$$

Отсюда находим постоянную

$$C = -\frac{2g}{r(1+4f^2)}e^{2f\alpha}\left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right].$$

Подставляя полученное выражение в формулу (5.54) и учитывая, что $v^2 = r^2\dot{\varphi}^2$, окончательно получаем следующую зависимость v^2 от угла φ:

$$v^2 = -\frac{2gr}{1+4f^2}e^{2f(\alpha-\varphi)}\left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] + \\ + \frac{2gr}{1+4f^2}\left[3f\cos\varphi + (1-2f^2)\sin\varphi\right]. \tag{5.55}$$

Нормальная составляющая реакции R_n равна

$$R_n = \frac{mv^2}{r} + mg\sin\varphi = -\frac{2mg}{1+4f^2}e^{-2f(\varphi-\alpha)}\left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] + \\ + \frac{2mg}{1+4f^2}\left[3f\cos\varphi + (1-2f^2)\sin\varphi\right] + mg\sin\varphi. \tag{5.56}$$

В последний момент рассматриваемого интервала движения, т. е. при $\varphi = \pi/2$, получим

$$v^2 = -\frac{2gr}{1+4f^2}e^{-2f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] + \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2), \tag{5.57}$$

$$R_n = -\frac{2mg}{1+4f^2}e^{-2f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] + \frac{2mg}{1+4f^2}(1-2f^2) + mg. \tag{5.58}$$

Если трением пренебречь и принять $f = 0$, то по формулам (5.57) и (5.58) найдем

$$v^2 = 2gr(1-\sin\alpha), \qquad R_n = mg(3-2\sin\alpha).$$

§ 5.6. Теорема об изменении кинетической энергии для несвободного движения

Пользуясь принципом освобождаемости, запишем соотношение (3.40) для случая несвободного движения в виде

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{R}\cdot d\mathbf{r}, \tag{5.59}$$

где $\mathbf{R}$ — реакция связи.

Результат (5.59) формулируется следующим образом: *элементарное изменение кинетической энергии при несвободном движении равно элементарной работе как активных сил, так и реакции связи.*

Но при наличии идеальной стационарной связи работа реакции на перемещении точки равна нулю, и теорема об изменении кинетической энергии для несвободного движения имеет тот же вид, что и для свободного движения.

Если же связь идеальная, но нестационарная, то вектор перемещения $d\mathbf{r}$ может быть не перпендикулярен к реакции $\mathbf{R}$. В этом случае реакция направлена перпендикулярно к вектору относительной скорости. Поэтому при нестационарных связях работу реакции следует учитывать.

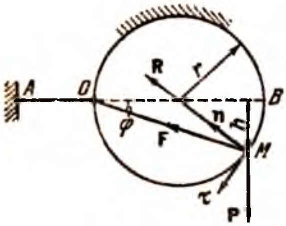


Рис. 5.8

Задача 5.4. Тяжелое кольцо M массы m может скользить без трения по дуге окружности радиуса r, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA, проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закрепленная в точке A.

Дано, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо M находится в точке O, а коэффициент жесткости нити равен c (рис. 5.8).

В начальный момент кольцо находится в точке B и имеет скорость, равную нулю. Определить давление $\mathbf{N}$, производимое кольцом на окружность. На кольцо действуют сила $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, сила натяжения нити $\mathbf{F}$ и реакция $\mathbf{R}$. Выразим модуль силы $\mathbf{F}$ через угол φ (см. рис. 5.8). По условию задачи $F = c \cdot OM$ (OM — удлинение упругой нити). Так как $OM = 2r\cos\varphi$, то

$$F = 2cr\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$F_n = 2cr\cos^2\varphi, \quad P_n = -P\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = -P\sin 2\varphi.$$

Второе уравнение системы (5.36) в данном случае имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = P_n + F_n + R_n,$$

т. е.

$$\frac{mv^2}{r} = -P\sin 2\varphi + 2cr\cos^2\varphi + R_n. \tag{5.60}$$

Используем теорему об изменении кинетической энергии для нахождения скорости v, принимая во внимание, что начальная скорость кольца $v_0 = 0$:

$$\frac{mv^2}{2} = A_P + A_F + A_R, \tag{5.61}$$

где A_P, A_F, A_R — соответственно работа сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$. По условию задачи связь стационарная и идеальная, следовательно, $A_R = 0$. Для определения A_P заметим, что $h = r\sin 2\varphi$. Значит,

$$A_P = Ph = Pr\sin 2\varphi. \tag{5.62}$$

Далее находим

$$A_F = \frac{c\lambda_{н}^2}{2} - \frac{c\lambda_{к}^2}{2},$$

где $\lambda_н$ и $\lambda_к$ — удлинения нити при положении кольца в точках B и M.

По условию задачи длина нити в нерастянутом положении равна OA, следовательно, $\lambda_н = 2r$, $\lambda_к = OM = 2r\cos\varphi$. Поэтому

$$A_F = 2cr^2(1 - \cos^2\varphi) = 2cr^2\sin^2\varphi. \tag{5.63}$$

С помощью выражений (5.62) и (5.63) преобразуем соотношение (5.61) к виду

$$\frac{mv^2}{2} = Pr\sin 2\varphi + 2cr^2\sin^2\varphi.$$

Подставляя найденное значение mv^2 в выражение (5.60), найдем нормальную реакцию R_n:

$$R_n = 3P\sin 2\varphi + cr(1 - 3\cos 2\varphi)$$

и, следовательно, так как $\mathbf{R} = -\mathbf{N}$,

$$N_n = -2mg - cr - 3(mg + cr)\cos 2\varphi.$$

§ 5.7. Метод кинетостатики для точки (принцип Даламбера)

Наряду с рассмотренными методами изучения несвободного движения точки удобным для решения первой задачи динамики несвободной точки является метод кинетостатики. Особенно удобен этот способ, когда требуется определить реакцию связи при заданных законе движения точки и активных силах.

Содержание этого метода заключается в следующем. Перепишем уравнение (5.3) в виде

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + (-m\mathbf{w}) = 0. \tag{5.64}$$

Введя обозначение

$$-m\mathbf{w} = \mathbf{J}, \tag{5.65}$$

получим

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0. \tag{5.66}$$

Вектор $\mathbf{J}$, *равный по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленный противоположно вектору ускорения, называется силой инерции.*

Равенство (5.66) представляет собой уравнение движения материальной точки, записанное в форме условия равновесия сил. В этом и заключается существо метода кинетостатики.

На основании уравнения (5.66) можно утверждать, что *в каждый момент движения сумма активной силы, реакции связей и силы инерции равна нулю*. При этом следует иметь в виду, что к материальной точке приложены только силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$, т. е. активная сила и реакция. Сила же инерции к точке не приложена. Поэтому на уравнение (5.66) нельзя смотреть как на условие равновесия активной силы, реакции и силы инерции.

Метод кинетостатики является лишь формальным приемом сведения уравнения динамики к уравнению статики, однако при решении практических задач такой прием может обладать рядом достоинств.

Реакция связи в соответствии с уравнением (5.66) равна

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{F} + \mathbf{J}).$$

§ 5.8. Задачи на применение метода кинетостатики

Задача 5.5. Самолет, двигаясь в вертикальной плоскости, выходит из пикирующего полета на горизонтальный полет по окружности радиуса r (рис. 5.9). Скорость самолета в момент выхода на горизонтальный полет максимальна и равна v. Определить, каким должен быть радиус r, чтобы реакция связи, действующая на летчика, была в n раз больше нормального веса летчика (число n называется перегрузкой).

На летчика, находящегося в самолете, действует сила притяжения к Земле $\mathbf{Q}$ и реакция $\mathbf{R}$. Нормальное ускорение самолета (и летчика) равно v^2/r и направлено к центру окружности. Сила инерции, равная $Qv^2/(gr)$, направлена по радиусу окружности в сторону, противоположную нормальному ускорению.

Запишем уравнение (5.66) в проекции на вертикаль в точке выхода самолета:

$$R - Q - \frac{Qv^2}{gr} = 0.$$

По условию задачи $R = nQ$, следовательно,

$$nQ - Q - \frac{Qv^2}{gr} = 0.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{v^2}{g(n-1)}.$$

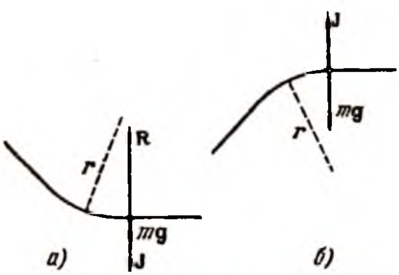


Рис. 5.9

Если, например, $v = 900$ км/ч $= 250$ м/с, $n = 5$, то

$$r = \frac{250^2}{9{,}81\cdot(5-1)} \approx 1600 \text{ м}.$$

В этом случае давление тела летчика на сиденье в пять раз больше его нормального веса, и летчик будет чувствовать себя так, как если бы его вес возрос в пять раз.

Любопытен другой частный случай, относящийся к условиям, имитирующим ощущение невесомости. Для этого нужно, чтобы реакция сиденья равнялась нулю; при этом давление летчика на сиденье также равно нулю. Здесь следует принять $n = 0$ и тогда по полученной выше формуле найдем

$$r = -v^2/g.$$

Знак «минус» означает, что траектория полета должна иметь выпуклость сверху, как это показано на рис. 5.9, *б*.

Задача 5.6. Летчик на самолете выполняет правильный вираж со скоростью v. Угол крена равен γ. Определить радиус виража r.

Правильным виражом называется полет самолета без скольжения по дуге окружности в горизонтальной плоскости с неизменным углом крена.

Будем рассматривать самолет как материальную точку, к которой приложены следующие силы: сила притяжения к Земле **P**, подъемная сила **F**, сила тяги **Ф** и сила лобового сопротивления **Q** (рис. 5.10). Согласно (5.66) будем иметь

$$\mathbf{P}+\mathbf{F}+\mathbf{\Phi}+\mathbf{Q}+\mathbf{J}=0. \qquad (5.67)$$

Ускорение центра тяжести самолета $w_n = v^2/r$, а модуль силы инерции $J = Pv^2/(gr)$.

В проекциях на оси координат уравнение (5.67) дает

$$-\frac{Pv^2}{gr}+F\sin\gamma=0, \quad -P+F\cos\gamma=0, \quad \Phi-Q=0. \qquad (5.68)$$

Из последнего уравнения следует, что при выполнении правильного виража $\Phi = Q$, т. е. сила тяги уравновешивается силой лобового сопротивления. Из

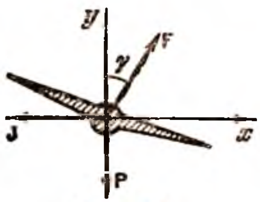


Рис. 5.10

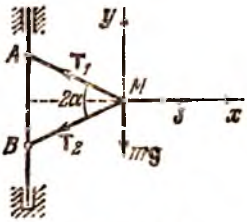


Рис. 5.11

второго уравнения можно найти, что сила притяжения к Земле уравновешивается вертикальной составляющей подъемной силы:

$$P = F\cos\gamma.$$

Из первого уравнения определяется радиус виража

$$r=\frac{Pv^2}{gF\sin\gamma}=\frac{v^2}{g\operatorname{tg}\gamma}.$$

Если будет нарушено какое-нибудь из равенств (5.68), то правильный вираж станет неосуществимым (возникает скольжение, а также снижение или подъем самолета). Следует иметь в виду, что данному углу крена γ соответствует определенная скорость полета (она определяет подъемную силу).

Задача 5.7. Шарнирно-стержневая система (рис. 5.11) вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Стержни MA и MB считать невесомыми и имеющими длину l каждый. Определить усилия в стержнях, если в точке M находится сосредоточенная масса m и угол $\angle AMB = 2\alpha$.

Ускорение массы m равно $\omega^2 l\cos\alpha$ и направлено по горизонтали к оси вращения. Соответственно сила инерции равна $J = m\omega^2 l\cos\alpha$ и направлена по горизонтали от оси вращения. Обозначая через T_1 и T_2 усилия в стержнях, напишем уравнение (5.66):

$$m\mathbf{g}+\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2+\mathbf{J}=0.$$

В проекциях на оси x и y получим

$$-T_1\cos\alpha-T_2\cos\alpha+m\omega^2 l\cos\alpha=0,$$
$$-mg+T_1\sin\alpha-T_2\sin\alpha=0.$$

Решив эту систему, найдем

$$T_1=\frac{m\omega^2 l}{2}+\frac{mg}{2\sin\alpha}, \qquad T_2=\frac{m\omega^2 l}{2}-\frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

Заметим, что при малых значениях угловой скорости ω усилие T_2 отрицательно, т. е. нижний стержень сжат (силой тяжести). При $\omega = \sqrt{g/(l \sin\alpha)}$ усилие T_2 равно нулю, а при больших значениях ω оно положительно.

§ 5.9. Явление невесомости

В этом параграфе рассматривается явление, которое по установившейся традиции, хотя и не вполне точно, называется *невесомостью*.

Предположим, что платформа A движется по вертикали с заданным ускорением $\mathbf{w}$, причем на платформе установлены пружинные весы, на которых лежит груз C. Стрелка весов фиксирует силу, с которой груз давит на весы (рис. 5.12). Когда платформа находится в покое (или движется равномерно), стрелка весов устанавливается против деления шкалы, соответствующего силе тяжести груза C. В дальнейшем это показание пружинных весов будем называть весом груза. Выясним, какое давление оказывает груз на весы, если платформа движется с ускорением $\mathbf{w}$.

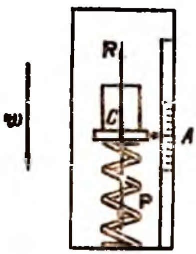


Рис. 5.12

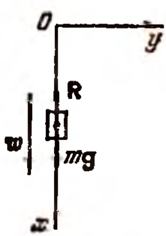


Рис. 5.13

На груз действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и реакция $\mathbf{R}$ (рис. 5.13) со стороны чашки весов. Уравнение движения груза имеет вид

$$\mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{w}, \tag{5.69}$$

или, в проекции на вертикальную ось x (положительное направление — вниз),

$$mw = mg - R.$$

Следовательно, реакция равна

$$R = m(g - w). \tag{5.70}$$

Ей равна по модулю направленная вниз сила давления $\mathbf{R}'$, с которой тело действует на весы.

Понятно, что деформация пружины под действием силы $\mathbf{R}'$ окажется меньше, чем в состоянии покоя. Стрелка весов остановится против деления шкалы, на котором мы прочтем новый «вес» груза; он окажется равным $mg - mw$. Его отношение к весу mg составляет $n = 1 - w/g$ (n — коэффициент перегрузки). Конечно, сила притяжения тела к Земле не изменилась, так как гравитационное поле Земли не зависит от того, движется ли груз или находится в покое. Изменились лишь силы взаимодействия между грузом и чашкой весов.

Продолжим опыт далее и будем увеличивать ускорение w. При этом реакция, как это видно из (5.70), уменьшается. Наконец, при $w = g$ она станет равной нулю и стрелка весов установится на нулевом делении шкалы. Взаимодействие между грузом и чашкой весов исчезает. Говорят, что наступила *«невесомость»*.

Если ускорение w превзойдет значение g, то груз оторвется от весов и будет свободно падать. Платформа, опускающаяся с бо́льшим ускорением, будет удаляться от падающего груза. Если же груз связан с весами, то платформа будет увлекать его вниз, причем перегрузка станет отрицательной и сила действия груза на весы окажется направленной вверх.

Рис. 5.14

Вернемся к состоянию невесомости, когда перегрузка равна нулю. Это состояние приводит к непривычным ощущениям у человека, находящегося в лифте, в космическом корабле или самолете. Он действительно перестает чувствовать вес своего тела.

Для того чтобы объяснить смысл этого явления, разберемся в причине ощущения веса (или весомости), к которому привыкает человек в обычных земных условиях.

В обычных условиях между отдельными частями человеческого тела существуют силы взаимодействия. Рассмотрим, например, силы, действующие на голень стоящего на полу человека (рис. 5.14).

На голень, кроме силы тяжести $\mathbf{P}$, действует реакция $\mathbf{N}$ верхней части тела, приложенная в коленном суставе, и реакция пола $\mathbf{R}$ (речь идет о весьма схематичном представлении действительных сил).

Силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$ уравновешены. Аналогичная картина распределения усилий может быть изображена и для всех других мысленно выделенных частей тела.

Таким образом, массовые силы (силы тяжести) и поверхностные силы (реакция пола), приложенные к сложной системе материальных точек — человеческому телу, вызывают появление многочисленных внутренних сил.

Именно появление этих внутренних сил (натяжение мышц, реакции суставов, давление на нервные окончания вестибулярного аппарата и т. п.) вызывает у человека *ощущение весомости*. Человек привыкает к ощущению всей этой совокупности сил и в земных условиях не чувствует ее.

Предположим теперь, что человек опускается вниз с ускорением $\mathbf{g}$. Как было установлено выше, при этом исчезает реакция со стороны опоры, т. е. $\mathbf{R} = 0$.

Следовательно, уравнение движения голени примет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = \frac{P}{g}\mathbf{g}. \tag{5.71}$$

Отсюда получим $\mathbf{N} = 0$. Рассматривая уравнения движения других мысленно выделенных частей человеческого тела, придем к аналогичному результату: *исчезают внутренние силы взаимодействия между отдельными частями тела, что вызывает необычные ощущения, не имеющие места в земных условиях.* Так, у человека, находящегося в состоянии невесомости, возникает прилив крови к голове, и обычно требуется несколько дней, чтобы летчик-космонавт привык к этому явлению и сравнительно безболезненно переносил его.

Оттолкнувшись от опоры, человек приобретает дополнительную скорость и движется до тех пор, пока не натолкнется на преграду.

Конечно, внутренние силы могут возникнуть и в таких условиях. Однако их происхождение на этот раз не связано с тяготением. Человек может, например, взять в руки эспандер и растягивать его обеими руками. При этом обязательно возникнут внутренние силы — силы натяжения многочисленных мышц, которые будут возрастать по мере растяжения пружины эспандера.

На каплю воды (рис. 5.15) продолжают действовать силы поверхностного молекулярного натяжения, и они не дадут ей разрушиться.

Рис. 5.15

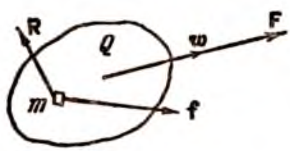


Рис. 5.16

Эти внутренние силы вызовут появление давления в капле, т. е. опять возникнут силы взаимодействия между отдельными материальными точками механической системы.

Перейдем теперь к выяснению более общих условий, при которых возможно появление невесомости. Представим себе, что тело Q (рис. 5.16) движется поступательно с ускорением $\mathbf{w}$ относительно инерциальной системы координат в поле массовых сил, т. е. сил, действующих на все точки тела. Обозначим через $\mathbf{F}$ равнодействующую этих массовых сил, действующих на точки тела.

Выделим в теле Q произвольный объем массы m. На этот объем будет действовать две силы: внешняя сила $\mathbf{f}$ и равнодействующая всех внутренних сил $\mathbf{R}$.

Будем считать, что *тело Q находится в невесомости, если равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к любому элементу, выделенному в теле, равна нулю.*

Найдем, каким условиям должны удовлетворять силы $\mathbf{f}$, чтобы тело находилось в состоянии невесомости.

Напишем уравнения движения для всего тела и для выделенной части тела Q массы m. Обозначим массу всего тела через M:

$$M\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad m\mathbf{w} = \mathbf{f} + \mathbf{R}. \tag{5.72}$$

Используя условие невесомости $\mathbf{R} = 0$, из (5.72) получим

$$\frac{\mathbf{F}}{M} = \frac{\mathbf{f}}{m}. \tag{5.73}$$

Условие (5.73) должно выполняться для любой массы m, выделенной в теле. Это условие является также и достаточным. Используя (5.73), получаем из уравнения (5.72)

$$\mathbf{R} = m\mathbf{w} - \mathbf{f} = m\left(\frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}}{m}\right) = 0.$$

Равенство (5.73) имеет простой смысл.

Для обеспечения невесомости необходимо и достаточно, чтобы внешние массовые силы, приложенные к выделенным элементам тела, были пропорциональны массам этих элементов, а их направление для всех элементов было одинаковым.

Этими замечательными качествами как раз и обладают *силы гравитации*. Они пропорциональны массам тех тел, на которые действуют, и если тела несоизмеримо малы по сравнению с размерами Земли, то направления сил можно считать для всех точек одинаковыми.

Таким образом, *тело будет находиться в состоянии невесомости, если равнодействующая всех внутренних сил, обусловленных наличием сил гравитации, приложенных к любому элементу, выделенному в теле, равна нулю.*

Напомним, что равнодействующая внутренних сил, обусловленных наличием других причин (не силами гравитации), может быть при этом и не равна нулю.

При полете стабилизированного космического аппарата с выключенным двигателем и вне пределов атмосферы его экипаж находится в условиях, близких к невесомости. Условие (5.73), если пренебречь размерами тел, для него практически выполняется, так как единственные активные силы, действующие на аппарат и его экипаж, — гравитационные. Разумеется, это условие соблюдается только при поступательном движении аппарата (иначе ускорения всех точек нельзя считать одинаковыми и условие (5.73) оказывается несправедливым).

Предположим теперь, что включен реактивный двигатель, развивающий силу тяги $\mathbf{\Phi}$ (рис. 5.17). Тогда к космическому кораблю, кроме силы тяготения $\mathbf{F}$, приложена еще сила $\mathbf{\Phi}$. В то же время активные силы, действующие на тело P, не изменились. Нарушено условие невесомости (5.73).

При включении двигателей все тела, не закрепленные в кабине, переместятся в сторону, противоположную вектору тяги. Опять возникнет ощущение «весомости», хотя при этом сила тяготения может и не действовать.

Такое же явление возникает и при торможении аппарата в атмосфере. Сила сопротивления $\mathbf{S}$ (рис. 5.18) действует только на аппарат и приложена к его поверхности. К человеку, находящемуся в кабине, она не приложена, поэтому нарушается условие невесомости — космонавта отбрасывает в сторону, противоположную **S**, т. е. в направлении вектора скорости **v** (рис. 5.18).

Следует отметить, что на участке торможения реакция **R** может достигать значительной величины. Ее можно определить, исходя из обычного уравнения движения (5.72), если только пренебречь силой тяготения **f**, которая мала по сравнению с **R**. Из (5.72) имеем

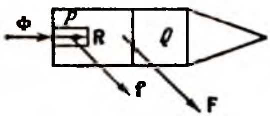


Рис. 5.17

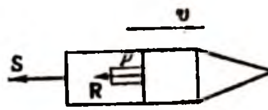


Рис. 5.18

$\mathbf{R} = m\mathbf{w}$. Отношение R к весу mg (перегрузка) здесь окажется равным $n = mw/(mg) = w/g$. Перегрузки нередко достигают значений порядка $8 \div 10$.

В предыдущей главе было показано, что при маневре самолета в вертикальной плоскости может быть достигнута нулевая перегрузка или невесомость. Для этого должен быть осуществлен маневр типа «горки» с радиусом кривизны траектории в верхней точке, определяемым по формуле

$$\rho = v^2/g. \tag{5.74}$$

Например, при $v = 720$ км/ч $= 200$ м/с радиус кривизны должен быть равен 4,08 км.

В окрестности этой точки условие невесомости строго не будет соблюдаться, тем не менее состояние человека окажется близким к невесомости. Такой имитацией явления невесомости пользуются при тренировках летчиков-космонавтов.

Совершенно аналогичное явление может наступить и в земных условиях — при движении автомобиля по мосту. В средней точке моста при соответствующей скорости $v = \sqrt{g\rho}$, определяемой в зависимости от кривизны пролета по формуле (5.74), наступит мгновенное состояние невесомости.

Состояние, довольно близкое к невесомости, испытывает парашютист при свободном падении с большой высоты с нераскрытым парашютом. Пока сопротивление атмосферы мало́ (в начальный период и на большой высоте), ускорение падения близко к g и поэтому состояние парашютиста мало отличается от невесомости.

Более длительное состояние невесомости можно получить при помощи так называемого «баллистического броска» самолета. Для этого самолет должен выдерживать строго скорость и траекторию полета тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте.

Глава VI

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 6.1. Переносная и кориолисова силы инерции

В предыдущих главах мы опирались на основное уравнение динамики точки (второй закон Ньютона), которое справедливо только в инерциальных системах отсчета. Напомним, что инерциальной называется такая система отсчета, в которой справедлив принцип инерции (первый закон Ньютона). Во многих случаях задачи динамики сводятся к исследованию движения в той или иной неинерциальной системе. В сущности, неинерциальной является и привычная для нас система отсчета, связанная с Землей. Впрочем, только весьма тонкие опыты (например, наблюдения за отклонением падающих тел к востоку, за вращением плоскости качания маятника) могут обнаружить неинерциальность геоцентрической системы отсчета. В большинстве приложений систему координат, жестко связанную с Землей, можно считать инерциальной.

Значительно заметнее проявляется неинерциальность систем отсчета, связанных с ускоренно движущимися техническими объектами — от ускоренно поднимающегося лифта до искусственного спутника или космического корабля, совершающего взлет с Земли. Если связать систему отсчета с кораблем, автомобилем или самолетом, движущимися по криволинейным путям или тем более с ротором быстроходной турбины, то неинерциальность окажется столь значительной, что основное уравнение динамики окажется неверным. Значит, окажутся неверными и многочисленные следствия из этого уравнения, доказанные в предыдущих главах.

Настоящая *глава посвящена изучению движения материальной точки в неинерциальных системах отсчета.* Ниже будет дан метод составления уравнений движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета. В этом, собственно, и состоит основная задача, которую предстоит решить.

Главная идея, которая положена в основу вывода соответствующих динамических уравнений, связана с задачей чисто кинематического характера, которую мы рассматривали в кинематике: по заданному относительному движению точки и при известном движении подвижной системы координат определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки. Мы воспользуемся этими результатами для того, чтобы научиться составлять уравнения движения материальной точки в неинерциальных системах отсчета.

Предположим, что известны силы, которые действуют на материальную точку, а также задано движение подвижной системы координат относительно некоторой инерциальной системы (в дальнейшем будем называть ее неподвижной системой).

Поставим своей задачей найти относительное движение точки, т. е. движение в неинерциальной системе отсчета.

Напомним, что задать движение подвижной системы координат можно при помощи трех координат ее начала (рис. 6.1): $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ и трех углов Эйлера: ψ, θ, φ.

В неподвижной системе справедливо основное уравнение динамики

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \tag{6.1}$$

Здесь, как и выше, $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех активных сил, $\mathbf{R}$ — равнодействующая реакций связей, m — масса материальной точки, $\mathbf{w}$ — ее ускорение.

Используем теперь теорему Кориолиса (том I, § 13.3) и выразим абсолютное ускорение через относительное, переносное и кориолисово:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c. \tag{6.2}$$

Подставляя (6.2) в (6.1), получим

$$m\mathbf{w}_r + m\mathbf{w}_e + m\mathbf{w}_c = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Перенося часть членов в правую часть, придем к векторному уравнению

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{R} + (-m\mathbf{w}_e) + (-m\mathbf{w}_c). \tag{6.3}$$

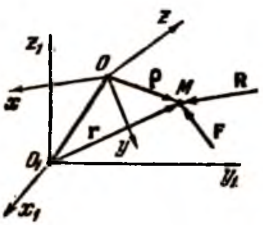


Рис. 6.1

Отсюда ясно, что произведение массы материальной точки на ее относительное ускорение не равно сумме равнодействующей всех активных сил, действующих на нее, и равнодействующей реакций связей.

Последние два вектора в правой части уравнения (6.3) должен ввести наблюдатель, находящийся в неинерциальной системе отсчета, для того, чтобы в этой системе отсчета основное уравнение динамики сохранило форму второго закона Ньютона.

Векторы $-m\mathbf{w}_e$ и $-m\mathbf{w}_c$ называются *«силами инерции»*. Первый называется *переносной силой инерции*, второй — *кориолисовой силой инерции*. Будем в дальнейшем пользоваться обозначениями

$$\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e, \quad \mathbf{J}_c = -m\mathbf{w}_c = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r), \tag{6.4}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость переносного движения.

Таким образом, уравнение (6.3) приобретает привычную форму основного уравнения динамики (второго закона Ньютона):

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \tag{6.5}$$

Мы получили следующее правило:

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе координат в форме второго закона Ньютона, необходимо к действующим на точку актив-

ным силам и реакциям связей присоединить переносную и кориолисову силы инерции.

В отличие от обычных сил, например силы тяготения, модуль и направление которых зависят только от характера взаимодействия тел и не зависят от выбора неинерциальной системы отсчета, переносная и кориолисова силы инерции определяются выбором неинерциальной системы координат.

В общей теории относительности согласно принципу эквивалентности, выдвинутому А. Эйнштейном, природа сил тяготения и массовых сил инерции в относительном движении тождественна.

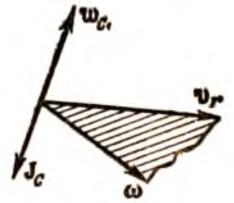


Рис. 6.2

Остановимся на способах определения сил инерции и напомним правила вычисления соответствующих ускорений.

Для того чтобы найти переносное ускорение, необходимо знать движение подвижной системы координат. Формула для определения переносного ускорения имеет вид (том I, § 13.3)

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}. \tag{6.6}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловая скорость и угловое ускорение подвижной системы координат, $\mathbf{w}_0$ — ускорение ее начала и $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки в подвижной системе координат (см. рис. 6.1).

Во всех случаях вычисления переносного ускорения и переносной силы инерции полезно представлять переносное ускорение как абсолютное ускорение точки, закрепленной в подвижной системе координат.

Для определения кориолисова ускорения каждый раз необходимо перемножать два вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ (рис. 6.2), так как

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r.$$

При составлении уравнений движения материальной точки относительно поступательно движущихся систем отсчета следует иметь в виду, что кориолисовы силы инерции отсутствуют ($\omega = 0$), а переносные силы инерции не зависят от положения, занимаемого точкой в подвижной системе отсчета.

Рис. 6.3

Задача 6.1. Точка M неподвижна в неподвижной системе отсчета x_1Oy_1 (рис. 6.3) и находится на расстоянии OM от ее начала. Система координат xOy вращается равномерно против хода часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, с угловой скоростью ω. Составить уравнение движения точки M в подвижной (вращающейся) системе координат xOy.

Так как точка M неподвижна, то ее абсолютная скорость равна нулю. Переносная скорость $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}\times\overline{OM}$. Таким образом,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = 0, \quad \mathbf{v}_r = -\mathbf{v}_e = -\boldsymbol{\omega}\times\overline{OM}.$$

Следовательно, в относительном движении точка движется по окружности с центром в O, но в направлении, противоположном вращению подвижной системы координат. Для наблюдателя она будет двигаться по ходу часовой стрелки. В соответствии с этим изобразим вектор относительно скорости (см. рис. 6.3) $\mathbf{v}_r$.

Переносное ускорение найдем, закрепив мысленно точку в подвижной системе координат. Тогда точка будет вынуждена участвовать во вращательном движении подвижной системы. Поскольку вращение равномерное, то вращательное ускорение равно нулю, и остается только осестремительное ускорение, равное по величине $w_e = \omega^2 R$. Оно направлено к точке O.

Переносная сила инерции $\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e$ направлена в противоположную сторону (от центра); ее часто называют *центробежной силой инерции*. Модуль этой силы $J_e = m\omega^2 R$.

Перейдем теперь к определению кориолисовой силы инерции. Вектор угловой скорости вращения системы xOy направлен перпендикулярно к плоскости рисунка на читателя. Следовательно, векторное произведение $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ направлено в ту же сторону, что и переносная сила инерции. Однако кориолисова сила инерции противоположна по направлению $\mathbf{w}_C$ и поэтому направлена к центру O. Модуль кориолисовой силы инерции определяется из равенства

$$J_C = 2m\,|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r| = 2m\omega v_r \sin(\pi/2) = 2m\omega v_r =$$
$$= 2m\omega^2 R.$$

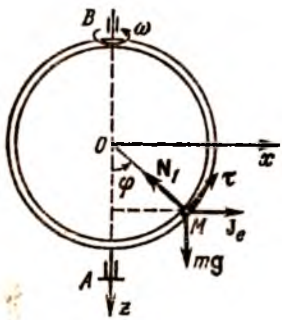


Рис. 6.4

Таким образом, кориолисова сила инерции оказалась противоположной переносной силе инерции. Равнодействующая этих сил направлена к центру и равна по величине $m\omega^2 R$. Уравнение относительного движения принимает вид $m\mathbf{w}_r = -m\omega^2\mathbf{R}$, где $\mathbf{R} = \overline{OM}$.

Задача 6.2. Трубка, изогнутая по окружности радиуса R, равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси AB (рис. 6.4). Внутри трубки находится материальная точка M массы m. Пренебрегая трением, составить дифференциальное уравнение движения материальной точки M в трубке и определить характер этого движения, если в начальный момент точка M, находясь на одной горизонтали с центром трубки, была отпущена без начальной скорости.

Свяжем с трубкой координатные оси $Oxyz$, выбрав начало координат O на оси вращения AB трубки в ее центре. Ось x проведем горизонтально так, чтобы она пересекла трубку, ось y построим перпендикулярно к трубке (на рис. 6.4 ось y не показана — она направлена на читателя), а ось z совместим с осью вращения. Положение точки M будем определять углом φ (см. рис. 6.4).

Выбранная система координат $Oxyz$ является неинерциальной системой отсчета, поэтому движение точки M относительно трубки следует написать в виде уравнения (6.5). Так как на точку действуют сила тяжести mg и нормальная реакция трубки $\mathbf{N}$, то уравнение движения будет

$$m\mathbf{w}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_C.$$

При равномерном вращении трубки переносное ускорение w_e точки M состоит только из одной осестремительной составляющей, модуль которой равен $R\omega^2 \sin\varphi$. Следовательно, переносная сила инерции $\mathbf{J}_e$, численно равная $mR\omega^2 \sin\varphi$, направлена перпендикулярно к оси вращения от нее (см. рис. 6.4). Так как относительная скорость $\mathbf{v}_r = R\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}$, то кориолисово ускорение

$$\mathbf{w}_C = 2R\dot{\varphi}\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau})$$

направлено параллельно оси y. Следовательно, и кориолисова сила инерции

$$\mathbf{J}_C = -2mR\dot{\varphi}\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau})$$

направлена параллельно оси y в сторону, противоположную направлению $\mathbf{w}_c$. Нормальную реакцию $\mathbf{N}$ разложим на две составляющие: одну $\mathbf{N}_1$ направим по главной нормали к относительной траектории от M к O, а вторую $\mathbf{N}_2$ — перпендикулярно плоскости трубки (на рис. 6.4 силы $\mathbf{J}_c$ и $\mathbf{N}_2$ не показаны).

Уравнение движения теперь можно записать в виде

$$m\mathbf{w}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c.$$

Запишем это уравнение движения в проекциях на направление $\boldsymbol{\tau}$, учитывая, что проекция относительного ускорения точки M на касательную $\boldsymbol{\tau}$ равна $R\ddot{\varphi}$, а проекции на $\boldsymbol{\tau}$ векторов $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{J}_c$ равны нулю:

$$mR\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + mR\omega^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

или, после деления на mR,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi + \omega^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{6.7}$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения точки M внутри вращающейся трубки.

Заметив, что

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}(\dot{\varphi}^2),$$

получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}(\dot{\varphi}^2) = -\frac{g}{R}\sin\varphi + \omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

После интегрирования имеем

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}\cos\varphi + \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\varphi + C.$$

По условию задачи $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$. Значит, $C = -\omega^2/2$ и

$$\dot{\varphi}^2 = \left(2\frac{g}{R} - \omega^2\cos\varphi\right)\cos\varphi.$$

Значения угла φ, при которых скорость точки M обращается в нуль, получим из условия

$$\left(2\frac{g}{R} - \omega^2\cos\varphi\right)\cos\varphi = 0. \tag{6.8}$$

Рассмотрим два случая.

1. Угловая скорость вращения трубки ω мала и удовлетворяет условию $\omega^2 < 2g/R$.

В этом случае $2g/(R\omega^2) > 1$ и только второй множитель может обратиться в нуль: $\cos\varphi = 0$. Отсюда

$$\varphi_1 = \pi/2, \quad \varphi_3 = -\pi/2$$

(индекс «два» временно пропускаем). Корень φ_1 соответствует начальному положению точки M.

Из выражения (6.7) найдем

$$\ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_1} = -g/R < 0, \quad \ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_3} = g/R > 0.$$

Это означает, что при $\omega^2 < 2g/R$ точка M будет совершать во вращающейся трубке колебания от одной до другой горизонтали.

2. Угловая скорость трубки удовлетворяет условию $\omega^2 > 2g/R$.

В этом случае уравнение (6.8) имеет три корня:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \arccos\frac{2g}{R\omega^2}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}.$$

Согласно уравнению (6.7) будем иметь

$$\ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_1} = -\frac{g}{R}, \quad \ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_2} = \frac{g}{R}\sin\varphi_2 > 0.$$

Следовательно, при $\omega^2 > 2g/R$ точка M совершает во вращающейся трубке колебания только в первой четверти от $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \arccos\frac{2g}{R\omega^2}$.

Задача 6.3. Балка AC равномерно вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси AB. Одновременно по балке движется с постоянной относительной скоростью u ползун M массы m (рис. 6.5). Определить изгибающий момент относительно оси вращения, действующий на балку.

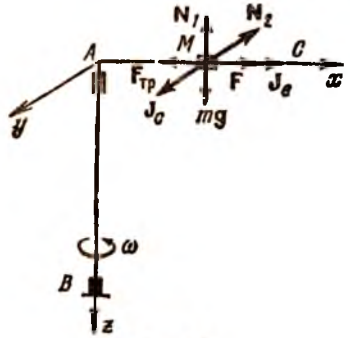


Рис. 6.5

Построим систему координат $Axyz$, жестко связанную с балкой: ось x направим по балке, ось y — горизонтально, перпендикулярно оси x, ось z — по вертикальной оси вращения вниз.

На ползун действуют движущая сила $\mathbf{F}$, сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, нормальная реакция $\mathbf{N}$ балки AC. Эту нормальную реакцию балки разложим на вертикальную $\mathbf{N}_1$ и горизонтальную $\mathbf{N}_2$ составляющие.

Основное уравнение динамики относительного движения (6.5) в нашем случае имеет вид

$$m\mathbf{w}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c.$$

По условию задачи ползун движется равномерно по прямолинейной балке, следовательно, $\mathbf{w}_r = 0$,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c = 0.$$

В горизонтальной плоскости балка действует на ползун с силой $\mathbf{N}_2$. По третьему закону Ньютона ползун действует на балку с силой $-\mathbf{N}_2 = \mathbf{J}_c$. Эта сила, равная кориолисовой силе инерции $\mathbf{J}_c$, передается на балку, в результате чего создается изгибающий момент $M_z^{изг}$ относительно вертикальной оси z, модуль которого равен $J_c x$, где x — расстояние от оси вращения до ползуна (см. рис. 6.5). Модуль кориолисова ускорения равен $2\omega u$, следовательно, модуль изгибающего момента относительно оси вращения будет

$$M_z^{изг} = 2m\omega u x = 2m\omega u\left(x_0 + ut\right),$$

где x_0 — начальное расстояние ползуна от оси вращения.

§ 6.2. Условия относительного покоя

Из основного уравнения (6.5), в частности, вытекают условия относительного покоя. В этом случае относительная скорость и относительное ускорение точки равны нулю ($\mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{w}_r = 0$), следовательно, и кориолисова сила инерции обращается в нуль (так как $\mathbf{v}_r = 0$). Уравнение относительного покоя приобретает вид

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J}_e = 0. \tag{6.9}$$

Если выполняется условие равновесия (6.9), то отсюда вовсе не следует, что после придания материальной точке начальной скорости точка будет двигаться равномерно и прямолинейно, как это имеет место в инерциальных системах. Дело в том, что при сообщении точке относительной скорости, *во-первых*, появляется кориолисова сила инерции $\mathbf{J}_c = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) \neq 0$ и, *во-вторых*, может измениться переносное ускорение (оно зависит от положения точки в подвижной системе отсчета) и, следовательно, изменится переносная сила инерции.

Из уравнения (6.5) можно вывести еще одно следствие. Найдем такие системы координат, в которых выполняется первый закон Ньютона. Для этого достаточно потребовать, чтобы при отсутствии сил точка двигалась равномерно и прямолинейно. Из (6.5) следует, что

$$\mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c = 0. \tag{6.10}$$

Отсюда ясно, что условие (6.10) будет выполняться, если переносная сила инерции в любой точке равна нулю:

$$\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e = 0.$$

Действительно, в этом случае подвижная система отсчета должна двигаться поступательно равномерно и прямолинейно, но тогда ее угловая скорость равна нулю и кориолисова сила инерции также обращается в нуль. Уравнение (6.10) выполняется.

Другими словами, *для того чтобы подвижная система координат была инерциальной, достаточно, чтобы ее начало двигалось с постоянной скоростью, а угловая скорость системы все время равнялась нулю*: $\mathbf{w}_0 = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

В этом случае всегда равны нулю обе силы инерции и основное уравнение (6.5) приобретает вид

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Следовательно, в этом случае соблюдается и второй закон Ньютона.

Таким образом, *если существует хотя бы одна система отсчета, в которой выполняются законы Ньютона, то существует бесчисленное множество таких систем. Все они движутся друг относительно друга поступательно равномерно и прямолинейно.*

§ 6.3. Применение уравнений относительного движения и покоя

1. Вращающийся космический аппарат. Создание искусственного поля тяготения. Космонавты недалекого будущего, находясь в продолжительном межпланетном полете, будут испытывать известные трудности физиологического характера, в частности, из-за явления невесомости. Имеются проекты космических кораблей, в которых предполагается использовать вращение вокруг центра масс всего аппарата или его кольцевой кабины для создания искусственного поля тяготения (рис. 6.6).

Определим, с какой угловой скоростью должна вращаться кольцевая кабина, наружный радиус которой R, чтобы имитировать силу земного тяготения. Предполагаем, что аппарат вращается с угловой скоростью ω относительно оси z некоторой инерциальной системы координат и летит с выключенными двигателями.

Тогда во вращающейся кабине на человека, находящегося в относительном покое, действует сила реакции опоры $\mathbf{N}$. Кроме того, необходимо согласно уравнению (6.9) приложить переносную силу инерции $\mathbf{J}_e$. Получим уравнение равновесия

$$\mathbf{N} + \mathbf{J}_e = 0. \tag{6.11}$$

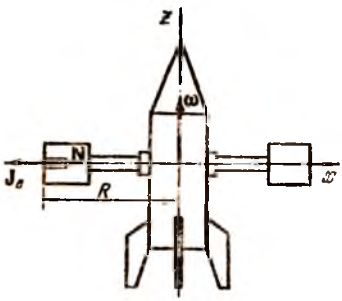


Рис. 6.6

Здесь $\mathbf{J}_e$ — центробежная сила инерции. Если пренебречь размерами человека по сравнению с радиусом R, то

$$J_e = m\omega^2 R. \tag{6.12}$$

Реакция опоры должна быть направлена к оси вращения.

Отсюда ясно, что человека будет прижимать к наружной боковой стенке корабля. Эта стенка станет для него «полом». На основании выражений (6.11) и (6.12) реакция равна $N = m\omega^2 R$. Потребуем, чтобы эта реакция была равна весу mg в земных условиях: $mg = m\omega^2 R$. Отсюда найдем угловую скорость вращения

$$\omega = \sqrt{g/R}.$$

Пусть, например, наружный радиус кольца $R = 20$ м; тогда $\omega = \sqrt{9{,}81/20} \approx 0{,}7$ рад/с, $n = 0{,}7/(2\pi) \approx 0{,}11$ об/с. Таким образом, один полный оборот будет совершаться примерно за девять секунд.

2. Измерение ускорений движущихся тел. Для управления движением ракеты на активном участке, самолета, подводной лодки и т. п. необходимо знать положение и скорость какой-либо точки аппарата, а также угловые координаты аппарата. По вектору ускорения некоторой точки аппарата можно путем интегрирования найти скорость, а затем и координаты этой точки.

Рассмотрим принцип действия простейшего измерителя ускорений — акселерометра (рис. 6.7). Допустим, что аппарат поднимается вертикально вверх. Тогда на груз M, укрепленный на пружине, ось которой (ось чувствительности) совпадает с направлением движения аппарата, действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{P}$ и сила упругости пружины $\mathbf{F}$.

Если аппарат поднимается равномерно, то эти силы взаимно уравновешиваются и стрелка акселерометра устанавливается на делении mg, указывая вес груза M.

При ускоренном движении, когда ускорение направлено вверх, в уравнение относительного покоя необходимо включить еще переносную силу инерции $\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}$. Тогда уравнение равновесия согласно (6.9) примет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{F} + \mathbf{J}_e = 0.$$

В проекции на вертикаль z_1 это дает

$$-P + F + (-mw) = 0, \quad F = m(w + g).$$

Стрелка установится против соответствующего деления, измеряя силу F. Величину $w + g$ называют иногда *кажущимся ускорением*. Шкалу можно градуировать не в масштабе сил, а в масштабе ускорений, так как кажущееся ускорение $w_к$ пропорционально силе, действующей на пружину:

$$w_к = w + g = \frac{F}{m}. \tag{6.13}$$

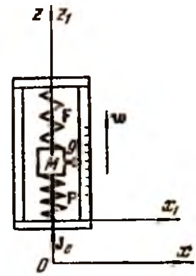


Рис. 6.7

Отсюда ясно, что при непрерывном измерении $w_к$ *) можно определить из (6.13) ускорение аппарата относительно Земли

$$w = w_к - g. \tag{6.14}$$

Теперь, чтобы получить текущее значение скорости, нужно проинтегрировать сигнал w, начиная с момента начала движения:

$$v(t) = \int_0^t [w_к(t) - g]\, dt.$$

Эта операция может выполняться электронным прибором. С помощью второго такого прибора интегрируется скорость и определяется координата z точки крепления акселерометра:

$$z = \int_0^t v(t)\, dt.$$

Для получения трех координат аппарата, очевидно, необходимо иметь три акселерометра. Их можно расположить по трем взаимно перпендикулярным осям. Измеряя кажущееся ускорение по каждой из осей, определяют затем проекции скорости и координаты движущегося аппарата.

Следует, однако, заметить, что при повороте тела на ось чувствительности акселерометра проектируется только часть ускорения $\mathbf{g}$.

---

*) Колебаниями массы M пренебрежем.

Для определения проекций этого вектора необходимо знать угловые координаты (например, углы Эйлера) аппарата. Такую информацию могут дать другие бортовые приборы — гироскопы.

3. **Размыв берегов рек.** Замечено, что в северном полушарии правые берега рек обрывистые, а левые пологие. Это явление может быть объяснено следующим образом (правило Бэра).

На некоторый объем воды, заключенный между двумя сечениями реки, текущей с юга на север (рис. 6.8), действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{P}$, реакция дна $\mathbf{Q}$, реакция берега $\mathbf{F}$. Для записи уравнения динамики в неинерциальной геоцентрической системе координат, которая равномерно вращается с угловой скоростью ω (один оборот в сутки), необходимо ввести в уравнение переносную и кориолисову силы инерции. Тогда согласно (6.5) получим уравнение движения

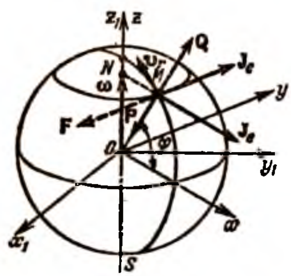


Рис. 6.8

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \qquad (6.15)$$

Переносное ускорение направлено к оси вращения Земли. Следовательно, переносная сила инерции направлена в противоположную сторону. Кориолисово ускорение находится по правилу векторного произведения $2\omega \times \mathbf{v}_r$ и поэтому направлено по параллели на запад. Кориолисова сила инерции направлена в противоположную сторону — на восток.

Если спроектировать (6.15) на направленную на запад касательную к параллели, то получим

$$F - J_c = 0. \qquad (6.16)$$

Здесь мы воспользовались тем, что относительное ускорение расположено в плоскости меридиана. Оно направлено при равномерном течении к центру Земли.

Из (6.16) получим (см. рис. 6.8)

$$F = 2m\omega v_r \sin \varphi, \qquad (6.17)$$

где φ — геоцентрическая широта места (угол между радиусом OM и экваториальной плоскостью).

Итак, реакция берега направлена налево, если смотреть по течению реки. Значит, сила давления воды на берег по третьему закону Ньютона должна быть направлена противоположно, т. е. она действует на правый берег реки.

Заметим, что это правило справедливо для всех рек, текущих в северном полушарии. Это объясняется тем, что в северном полушарии при любом движении точки по поверхности Земли горизонтальная составляющая кориолисова ускорения всегда направлена влево от относительной скорости (см. том I, задачу 13.7).

В южном полушарии размываются левые берега рек.

Формулу (6.17) можно привести к виду

$$\frac{F}{l}=\frac{2Pv_r\omega\sin\varphi}{gl},$$

где l — расстояние между сечениями реки, P — вес выделенного объема воды. Величина $q = Pv_r/l$ называется секундным сбросом реки. Величину $F/l = f$ назовем погонным давлением. Тогда

$$f=\frac{2\omega q\sin\varphi}{g}.$$

Для реки со сбросом $q = 20\,000$ кН/с на широте $\varphi = 60°$

$$f=\frac{2\cdot 20\,000}{9{,}81}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{24\cdot 3600}=0{,}26 \text{ кН/м}.$$

Если правый берег считать отвесным с подводной частью глубиной в 10 м, то на каждый квадратный метр будет действовать сила $p = 260/10 = 26$ Н.

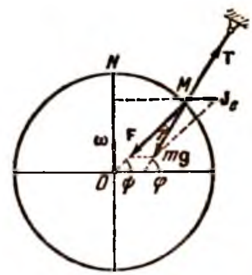


Рис. 6.9

В результате длительного воздействия таких сравнительно небольших сил берег с течением времени размывается. Река «наступает» на правый берег, оставляя слева по течению низменные луга, а справа крутые обрывы.

4. Уклонение линии отвеса от направления радиуса Земли. Рассмотрим силы, действующие на материальную точку M, подвешенную на нити (рис. 6.9). Будем предполагать, что точка находится в покое относительно Земли.

Обозначим силу тяготения через $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0$, причем g_0 — гравитационное ускорение), переносную силу инерции, обусловленную вращением Земли, через $\mathbf{J}_e$ и силу натяжения нити через $\mathbf{T}$. Тогда условием равновесия точки M будет векторное равенство (6.9). В нашем случае

$$\mathbf{T}+\mathbf{F}+\mathbf{J}_e=0. \qquad (6.18)$$

На рис. 6.9 геоцентрическая широта обозначена через ψ. Угол φ между линией отвеса и экваториальной плоскостью называется географической широтой. Из чертежа ясно, что угол γ между радиусом Земли и линией отвеса связан с ψ и φ соотношением $\varphi = \psi + \gamma$.

Спроектируем (6.18) на направление нити и на перпендикуляр к этому направлению:

$$T - F\cos\gamma + J_e\cos(\psi+\gamma)=0,\quad F\sin\gamma - J_e\sin(\psi+\gamma)=0.$$

Пренебрегая малой величиной γ по сравнению с геоцентрической широтой ψ, из первого уравнения получим

$$T \approx F - J_e \cos\psi = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2\psi = m(g_0 - \omega^2\rho\cos\psi), \quad (6.19)$$

где ρ — радиус географической параллели.

Силу, равную по модулю и направленную противоположно натяжению $\mathbf{T}$, называют *силой тяжести* и обозначают через $m\mathbf{g}$. Из этого определения следует, что *сила тяжести равна геометрической сумме силы притяжения* $\mathbf{F}$ *и силы инерции переносного движения, вызванной вращением Земли.*

Из равенства (6.19) можно найти ускорение силы тяжести на поверхности Земли

$$g = g_0\left(1 - \frac{\omega^2\rho}{g_0}\cos\psi\right).$$

Таким образом, g — переменная величина, зависящая от широты места. Наименьшее значение она имеет на экваторе:

$$g = g_0\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0}\right) = 9{,}82 - \left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\right)^2 6370\cdot 10^3 = 9{,}78 \text{ м/с}^2.$$

Из второго уравнения можно найти угол отклонения γ отвесной линии от радиуса Земли, т. е. разность между географической и геоцентрической широтами:

$$\sin\gamma \approx \gamma \approx \frac{\omega^2 R \sin 2\psi}{2g_0}.$$

Например, на широте Ленинграда ($\psi = 60°$) $\gamma = \omega^2 R\sqrt{3}/(4g_0) = \sqrt{3}/1160 \approx 5'$. Максимальное отклонение наблюдается на широте $\psi = 45°$ ($\gamma \approx 6'$).

Переносной силой инерции, вызванной вращением Земли, объясняется также и сжатие Земли. Земля имеет форму геоида, т. е. тела, ограниченного поверхностью, в каждой точке которой потенциальная энергия силы тяжести (равнодействующая силы притяжения и силы инерции переносного движения Земли при ее вращении вокруг своей оси) имеет постоянную величину. Такой поверхностью будет поверхность океанов и морей в равновесном положении. Поверхность геоида заменяют обычно эллипсоидом вращения, сжатие которого по данным измерений равно

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298{,}3}.$$

Как правило, сжатием Земли пренебрегают и считают, что сила тяжести $m\mathbf{g}$ направлена вдоль радиуса к центру Земли.

5. Маятник Фуко. В 1851 году Фуко продемонстрировал в Пантеоне опыт с маятником, подвешенным на длинной нити. Плоскость качания маятника медленно вращалась в направлении, противоположном вращению Земли.

Для объяснения эффекта Фуко воспользуемся уравнениями относительного движения в системе координат, связанной с Землей. Направим ось z по линии отвеса в данной точке Земли вверх, ось x — перпендикулярно к оси z на восток и ось y — по меридиану на север.

Проекции угловой скорости Земли на оси прямоугольной системы координат выражаются через географическую широту места φ (рис. 6.10):

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega\cos\varphi, \quad \omega_z = \omega\sin\varphi.$$

Уравнение движения маятника имеет вид

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \qquad (6.20)$$

Здесь $\mathbf{T}$ — реакция нити, $\mathbf{F}$ — сила притяжения Земли, $\mathbf{J}_c$ — кориолисова сила инерции, $\mathbf{J}_e$ — переносная сила инерции.

Выше было показано, что сила притяжения $\mathbf{F}$, складываясь с переносной силой инерции $\mathbf{J}_e$, дает силу тяжести mg, направленную параллельно линии отвеса, т. е. параллельно оси z.

Введем цилиндрическую систему координат (рис. 6.11) и будем определять положение маятника при помощи трех координат: ρ, θ и z (см. также т. I, § 9.10). В положении равновесия маятник находится в начале координат.

Рис. 6.10

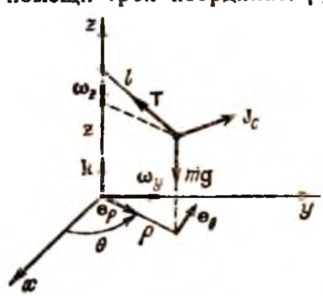


Рис. 6.11

Спроектируем на оси $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{k}$ угловую скорость вращения Земли

$$\omega_\rho = \omega\cos\varphi\sin\theta, \quad \omega_\theta = \omega\cos\varphi\cos\theta, \quad \omega_z = \omega\sin\varphi.$$

Проекции линейной скорости будут

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\theta = \rho\dot\theta, \quad v_z = \dot z.$$

Поэтому кориолисова сила инерции принимает вид

$$\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r = -2m\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \omega_\rho & \omega_\theta & \omega_z \\ v_\rho & v_\theta & v_z \end{vmatrix}. \qquad (6.21)$$

Реакция нити $\mathbf{T}$ имеет проекции на оси цилиндрической системы, определяемые равенствами

$$T_\rho = -T\frac{\rho}{l}, \quad T_\theta = 0, \quad T_z = T\frac{l-z}{l}. \qquad (6.22)$$

Запишем теперь уравнение (6.20) в проекциях на оси $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{k}$. При этом воспользуемся тем, что сумма $\mathbf{F}+\mathbf{J}_e = m\mathbf{g}$ направлена по оси z и, следовательно, проекции ее на $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_\theta$ равны нулю. Используя (6.21), получим

$$
\begin{aligned}
mw_\rho &= 2m\omega\rho\dot{\theta}\sin\varphi - 2m\omega\dot{z}\cos\varphi\cos\theta - T\frac{\rho}{l},\\
mw_\theta &= 2m\omega\dot{z}\cos\varphi\sin\theta - 2m\omega\dot{\rho}\sin\varphi,\\
mw_z &= -mg + 2m\omega\dot{\rho}\cos\varphi\cos\theta - 2m\omega\rho\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta + T\frac{l-z}{l}.
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Заметим, что $z = l - \sqrt{l^2-\rho^2} = l\left(1-\sqrt{1-\rho^2/l^2}\right)$, а проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат будут

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho, \quad w_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

Уравнения (6.23) содержат три неизвестные функции ρ, θ, T (z выражается через ρ). Интегрирование этой системы в общем виде оказывается довольно сложным. Поэтому мы ограничимся приближенным интегрированием. При отклонениях маятника от вертикали, малых по сравнению с его длиной ($\rho \ll l$), можно считать $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$.

Тогда из второго уравнения получим $\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = -2\omega\dot{\rho}\sin\varphi$, или $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta} + \omega\rho^2\sin\varphi) = 0$. Отсюда следует первый интеграл (интеграл площадей)

$$\rho^2\dot{\theta} + \omega\rho^2\sin\varphi = c.$$

Предположим, что в какой-нибудь момент времени маятник проходил через начало координат; тогда $\rho = 0$ и $c = 0$. Следовательно,

$$\dot{\theta} + \omega\sin\varphi = 0, \quad \dot{\theta} = -\omega\sin\varphi.$$

Отсюда видно, что плоскость качания маятника вращается в сторону, противоположную вращению Земли, но с меньшей угловой скоростью.

6. **Отклонение падающих тел к востоку.** При падении материальной точки вблизи поверхности Земли на нее действует сила тяготения $\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0$. Присоединяя к ней переносную и кориолисову силы инерции, напишем дифференциальное уравнение относительного движения для свободной материальной точки

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c.$$

Сумму переносной силы инерции и силы тяготения можно заменить силой тяжести $\mathbf{F} + \mathbf{J}_e = m\mathbf{g}$, и тогда

$$m\mathbf{w}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{J}_c.$$

Вектор скорости свободно падающего тела близок к вертикали места. Поэтому кориолисова сила инерции $\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$ почти перпендикулярна к плоскости меридиана (рис. 6.12) и направлена на восток. Спроектируем последнее уравнение на ось z, направленную по вертикали вверх, ось x, направленную на восток, и ось y, направленную на север:

$$m\ddot{x} = -2m\omega(\dot{z}\cos\varphi - \omega\dot{y}\sin\varphi),$$
$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x}\sin\varphi, \qquad (6.24)$$
$$m\ddot{z} = -mg + 2m\dot{x}\omega\cos\varphi.$$

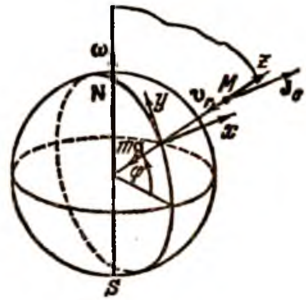


Рис. 6.12

Здесь φ — географическая широта места, g — ускорение силы тяжести на широте φ.

Интегрирование системы проведем сначала для $\omega = 0$. Полагая, что в начальный момент времени $\dot{x}_0(0) = \dot{y}_0(0) = \dot{z}_0(0) = 0$, получим

$$\dot{x}_0(t) \equiv 0, \quad \dot{y}_0(t) \equiv 0, \quad \dot{z}_0(t) = -gt.$$

Найдем теперь поправки к этому приближенному решению, полагая $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$, $z = z_0 + z_1$. После подстановки в (6.24) получим

$$\ddot{x}_1 = 2\omega g t\cos\varphi, \quad \ddot{y}_1 = 0, \quad \ddot{z}_1 = 0.$$

Отсюда при нулевых начальных условиях имеем

$$\dot{x}_1 = \omega g t^2\cos\varphi, \quad x_1 = \frac{\omega g t^3}{3}\cos\varphi, \quad y_1 \equiv 0, \quad z_1 \equiv 0. \qquad (6.25)$$

При падении с высоты h время падения связано с t равенством $h = gt^2/2$, $t = (2h/g)^{1/2}$. Полное отклонение на восток получим, подставляя в (6.25) время t:

$$x = \frac{1}{3}\omega g\cos\varphi\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}.$$

§ 6.4. Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении

Все общие теоремы динамики точки сохраняют свою форму и в относительном движении. Не надо только забывать присоединять в разряд действующих на точку сил переносную и кориолисову силы инерции. Некоторое исключение составляет теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении. Покажем, что при ее использовании нет необходимости учитывать кориолисову силу инерции.

Уравнение движения имеет вид

$$m\frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J}_e - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r). \qquad (6.26)$$

Умножим левую и правую части (6.26) скалярно на относительную скорость

$$m\mathbf{v}_r\cdot\frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_r+\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}_r+\mathbf{J}_e\cdot\mathbf{v}_r-2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r)\cdot\mathbf{v}_r.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как вектор $\mathbf{v}_r$ перпендикулярен к векторному произведению $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$.

Отсюда получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_r^2}{2}\right)=N, \tag{6.27}$$

где N — мощность активных сил, сил реакции и переносной силы инерции. Знак относительного дифференцирования теперь опущен, так как дифференцируется скалярная функция времени.

Обозначив кинетическую энергию относительного движения через T_r, т. е. $T_r = mv_r^2/2$, перепишем (6.27):

$$\frac{dT_r}{dt}=N. \tag{6.28}$$

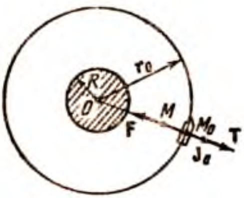


Рис. 6.13

Интегрируя по времени (6.28) от некоторого начального момента времени t_0 до текущего t, получим

$$T_r^{(1)}-T_r^{(0)}=\int_{t_0}^{t}N\,dt.$$

Но интеграл, стоящий справа, — работа всех сил при перемещении точки из начального положения в конечное. Таким образом,

$$T_r^{(1)}-T_r^{(0)}=A_{01}=A_{01}^F+A_{01}^R+A_{01}^J.$$

Изменение кинетической энергии в относительном движении равно сумме работ всех действующих сил и переносной силы инерции. В некоторых случаях переносные силы инерции могут быть консервативны (поле однородных сил инерции, поле центробежных сил).

Доставка груза на стационарный спутник. Спутник, движущийся по круговой экваториальной орбите в направлении вращения Земли с периодом, равным одним суткам, называется *стационарным* (рис. 6.13). Такой спутник «висит» над экваториальной точкой Земли. Он может быть использован для решения задач глобальной связи, а также удобен в качестве межпланетной станции.

Ранее в § 4.7 был найден радиус орбиты стационарного спутника. Оказалось, что $r_0\approx 42\,000$ км. Если теперь из r_0 вычесть радиус Земли, то получим высоту орбиты над поверхностью Земли $H = r_0 - R = 42\,000 - 6371 = 35\,629$ км.

Решим следующую задачу.

Задача 6.4. Какую работу необходимо затратить, чтобы доставить груз с поверхности Земли на стационарный спутник, полагая, что движение ракеты с грузом происходит в экваториальной плоскости?

Свяжем с Землей и спутником вращающуюся систему координат. К грузу следует приложить силу тяготения $\mathbf{F}$, силу инерции $\mathbf{J}_e$ переносного ускорения и силу тяги $\mathbf{T}$. Будем считать, что в начальный и конечный моменты относительная скорость равна нулю. Тогда на основании теоремы об изменении кинетической энергии в относительном движении можно записать

$$A_{12}^F + A_{12}^J + A_{12}^T = 0,$$

где A_{12}^F — работа силы тяготения, она отрицательна, и A_{12}^J — работа центробежной силы инерции — положительная величина. Отсюда работа силы тяги

$$A_{12}^T = -A_{12}^F - A_{12}^J.$$

Для гравитационных сил потенциальная энергия была вычислена ранее (§ 3.5):

$$\Pi_F = -mgR^2/r.$$

Найдем потенциальную энергию центробежной силы инерции. В условиях задачи (спутник «висит» над Землей, ракета движется в экваториальной плоскости) имеем $J_e = m\omega^2 r$. Эти силы центральные, поэтому их поле консервативно.

Примем в качестве фиксированной точки для вычисления потенциальной энергии центр Земли, тогда, по определению потенциальной энергии,

$$\Pi_J(r) = A_{MO} = \int_r^0 m\omega^2 r\,dr = -\int_0^r m\omega^2 r\,dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Отсюда работа силы тяги окажется равной

$$A_{12}^T = \left(-\frac{mgR^2}{r} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right)_{r=R} - \left(-\frac{mgR^2}{r_0} + \frac{m\omega^2 r_0^2}{2}\right) =$$

$$= mRg\left(1 + \frac{\omega^2 R}{2g}\right) - \frac{3mgR^2}{2r_0} = mgR\left(1 + \frac{\omega^2 R}{2g} - \frac{3R}{2r_0}\right).$$

Заметим, что $\omega^2 R/(2g) \approx 1/_{580}$, $3R/(2r_0) \approx 0{,}226$; следовательно, $A_{12}^T = 0{,}776 mgR$.

Для подъема одного килограмма массы груза потребуется затратить работу $A_{12}^T = 0{,}776 \cdot 6371 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 = 49{,}4 \cdot 10^6$ Дж.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Глава VII

МАТЕРИАЛЬНАЯ СИСТЕМА

§ 7.1. Центр масс

В первой части курса динамики мы изучали законы движения одной материальной точки, находящейся под действием приложенных к ней сил. В практике чаще встречаются более сложные случаи, когда движение одной материальной точки или одного тела нельзя изучать изолированно от движения других материальных точек (тел). Так, например, движение Луны относительно Земли существенным образом зависит от движения Земли относительно Солнца, вращение коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания зависит от движения его поршней и т. п. Эти и многочисленные другие примеры заставляют нас перейти от изучения движения одной материальной точки к изучению движения материальных систем.

В механике под *материальной системой* понимают *совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.* Твердое тело рассматривается как неизменяемая материальная система с распределенной по объему массой. Эта модель представляет, конечно, некоторую идеализацию твердого тела, так как при этом не учитываются расстояния между молекулами или кристаллами тела. Однако эти расстояния настолько малы по сравнению с размерами самого тела, что предположение о сплошном распределении массы не вносит сколько-нибудь заметных погрешностей в вычисления.

Массой M материальной системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \tag{7.1}$$

где m_k — масса материальной точки с номером k, а n — число всех точек системы.

Центром масс или *центром инерции* материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор $\mathbf{r}$ которой определяется равенством

$$\mathbf{r}_O = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k, \tag{7.2}$$

т. е. точка с декартовыми координатами

$$x_C=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k,\quad y_C=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\quad z_C=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k. \tag{7.3}$$

В этих формулах $\mathbf{r}_k$ и x_k, y_k, z_k — соответственно радиус-вектор и координаты k-й материальной точки.

При непрерывном распределении массы суммы, стоящие в правых частях формул (7.2) и (7.3), переходят в соответствующие интегралы.

Легко видеть, что центр масс твердого тела, находящегося в однородном поле силы тяжести, совпадает с его центром тяжести. Действительно, умножим числитель и знаменатель правой части формулы (7.2) на модуль ускорения силы тяжести g:

$$\mathbf{r}_C=\frac{1}{Mg}\sum_{k=1}^{n} m_k g\mathbf{r}_k.$$

Учитывая, что произведение Mg равно весу P тела, а $m_k g$ — весу p_k k-й материальной точки, получим

$$\mathbf{r}_C=\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} p_k\mathbf{r}_k,$$

что совпадает с выражением для радиуса-вектора центра тяжести твердого тела (том I, глава VIII).

В динамике следует говорить о центре масс материальной системы, а не о центре тяжести. При определении центра масс материальной системы можно пользоваться методами, установленными в статике для определения центра тяжести (метод симметрии, метод расчленения, метод отрицательных масс и т. п.). Необходимо отметить, что положение центра масс твердого тела не меняется относительно точек тела. Если же система состоит из перемещающихся друг относительно друга материальных точек, то положение центра масс системы относительно ее точек может изменяться.

§ 7.2. Внешние и внутренние силы

В курсе статики мы делили все силы, приложенные к твердому телу или к системе тел, на активные силы и реакции связей, понимая под первыми силы, не зависящие от связей. Там же было показано, что силы можно разделить и на две другие группы, а именно на внешние и внутренние.

Напомним еще раз определения внешних и внутренних сил. Силы, действующие на точки системы, называются *внешними*, если они вызваны действием тел, не входящих в систему. Силы, вызванные взаимодействием точек, входящих в систему, называются *внутренними*. Обозначаются внешние силы верхним индексом «*e*», а внутренние — верхним индексом «*i*» (от начальных букв французских слов extérieur — внешний и intérieur — внутренний):

$\mathbf{F}^e$ — внешняя сила, $\mathbf{F}^i$ — внутренняя сила.

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим силы, приложенные к движущемуся прямолинейно по горизонтальной дороге автомобилю (рис. 7.1). Прежде всего на автомобиль действует сила тяжести G. Эта сила внешняя, так как она вызвана действием Земли — тела, не входящего в рассматриваемую материальную систему (автомобиль). Она одновременно является и активной, так как не зависит от связей. К активным внешним силам относится также аэродинамическая сила сопротивления воздуха $\mathbf{F}_c$; эта сила непосредственно не зависит от связей и вызвана сопротивлением окружающей среды. Применим теперь принцип освобождаемости и заменим действие связи (дороги) ее реакциями $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$. Первые две силы представляют равнодействующие нормальных составляющих реакций дороги к передним и задним колесам, а силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — равнодействующие сил трения, вызванных вращением ведомых и ведущих колес (см. раздел Статика, стр. 95). Силы $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — внешние, так как они обусловлены действием дороги, которая в систему не входит. Таким образом, к автомобилю приложены шесть внешних сил: G, $\mathbf{F}_c$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$.

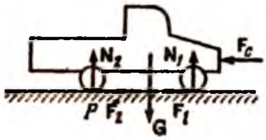


Рис. 7.1

Сила давления газов на поршни двигателя, силы давления поршней на шатуны и шатунов на кривошипы коленчатого вала, силы трения на осях колес и т. п. — это все внутренние силы системы.

Рис. 7.2

Отметим, что в некоторых случаях внешние силы появляются за счет действия внутренних сил. Так, например, внешняя сила трения скольжения $\mathbf{F}_2$ между задними колесами автомобиля и дорогой (см. рис. 7.1) не может возникнуть без внутренних сил, передающих вращающий момент на ведущие колеса. Точно так же внешние силы трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ между подошвами ботинок и полом не могут возникнуть без внутренних мускульных усилий человека (на рис. 7.2 показаны две внешние силы, действующие на идущего вправо человека). Если выключить двигатель автомобиля или если человек не будет создавать мускульных усилий, то соответствующие внешние силы трения обратятся в нуль.

Рассмотрим еще один пример. Если пренебречь силами притяжения звезд, то нашу Солнечную систему можно рассматривать как изолированную механическую систему, на которую не действуют никакие внешние силы. Силы притяжения между отдельными телами всей Солнечной системы являются активными внутренними силами.

§ 7.3. Свойства внутренних сил

Из третьего закона Ньютона следует, что внутренние силы входят попарно, причем, если точка B действует на точку A с силой $\mathbf{F}_1^i$, а точка A действует на точку B с силой $\mathbf{F}_2^i$, то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 7.3):

$$\mathbf{F}_2^i = -\mathbf{F}_1^i. \tag{7.4}$$

Из этого следуют два свойства внутренних сил системы.

Первое свойство. *Геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^i = 0, \tag{7.5}$$

где $\mathbf{F}_k^i$ — равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке с номером k.

Второе свойство. *Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства (главный момент внутренних сил) равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i = 0. \tag{7.6}$$

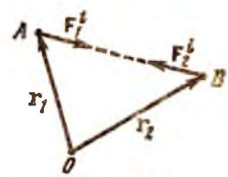


Рис. 7.3

Для системы, состоящей из двух точек A и B с силами взаимодействия $\mathbf{F}_1^i$ и $\mathbf{F}_2^i$ (см. рис. 7.3), это свойство очевидно. Действительно, так как $\mathbf{F}_2^i = -\mathbf{F}_1^i$, а плечи относительно точки O у обеих сил равны, то моменты этих сил численно равны, но направлены в противоположные стороны. Доказательство первого и второго свойств для любого количества внутренних сил следует теперь из того, что они входят в систему попарно.

Равенство нулю главного вектора и главного момента внутренних сил материальной системы не означает, что эти силы уравновешены. Это объясняется тем, что внутренние силы приложены к разным материальным точкам, которые в общем случае могут перемещаться друг относительно друга. Хорошим примером, иллюстрирующим сделанное замечание, может служить Солнечная система, планеты которой и их спутники совершают весьма сложные движения под действием одних внутренних сил.

§ 7.4. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Применим принцип освобождаемости и заменим связи их реакциями. Обозначим через $\mathbf{F}_k^e$ и $\mathbf{F}_k^i$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к k-й материальной точке. Тогда каждую точку можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием сил $\mathbf{F}_k^e$ и $\mathbf{F}_k^i$. Применим к каждой точке второй закон Ньютона:

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}=\mathbf{F}_1^e+\mathbf{F}_1^i,\ \ldots,\ m_n\frac{d^2\mathbf{r}_n}{dt^2}=\mathbf{F}_n^e+\mathbf{F}_n^i, \tag{7.7}$$

или, в проекциях на неподвижные оси декартовых координат,

$$m_k\ddot{x}_k=X_k^e+X_k^i,\quad m_k\ddot{y}_k=Y_k^e+Y_k^i,\quad m_k\ddot{z}_k=Z_k^e+Z_k^i \tag{7.8}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Векторные уравнения (7.7) или эквивалентные им скалярные уравнения (7.8) представляют дифференциальные уравнения движения материальных точек всей системы. Число дифференциальных уравнений в векторной форме равно n, а число дифференциальных уравнений в координатной форме равно $3n$. Следовательно, общее решение зависит от $6n$ произвольных скалярных постоянных. Конечно, если все точки движутся параллельно одной плоскости или одной прямой, то число дифференциальных уравнений (7.8) в первом случае будет равно $2n$, а во втором n.

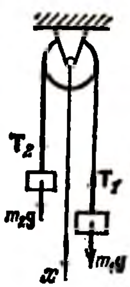


Рис. 7.4

Проиллюстрируем методы составления дифференциальных уравнений (7.8) на элементарном примере.

Задача 7.1. Два тела массы m_1 и m_2 связаны между собой тросом, перекинутым через блок (рис. 7.4). Пренебрегая силами трения, а также массой троса и блока, определить закон движения грузов и натяжения троса.

Система состоит из двух материальных точек (оба тела перемещаются поступательно), движущихся параллельно одной прямой. Следовательно, мы будем иметь два дифференциальных уравнения движения в проекциях на ось x. Предположим, что правый груз движется с ускорением $\ddot{x}_1$ вниз; тогда левый груз будет двигаться вверх с ускорением $\ddot{x}_2=-\ddot{x}_1$. Мысленно освободимся от связи (троса) и заменим ее реакциями $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$. Считая теперь оба тела свободными, составим дифференциальные уравнения движения в проекции на ось x:

$$m_1\ddot{x}_1=m_1g-T_1,\quad m_2\ddot{x}_2=m_2g-T_2.$$

Учтем теперь, что $\ddot{x}_2=-\ddot{x}_1$ и $T_1=T_2=T$ (так как силами трения, а также массой троса и блока пренебрегаем; строго последнее равенство будет доказано в примере § 19.1); тогда получим

$$m_1\ddot{x}_1=m_1g-T,\quad -m_2\ddot{x}_1=m_2g-T.$$

Решая эти уравнения относительно ускорения $\ddot{x}_1$ и натяжения T троса, найдем

$$\ddot{x}_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g,\quad T=2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g.$$

Из этого решения видно, что правый груз движется равноускоренно вниз, если $m_1>m_2$ и вверх, если $m_1<m_2$. При $m_1=m_2$ оба груза находятся в покое или движутся равномерно (это зависит от начальных условий). Отметим, что натяжение троса при $m_1\neq m_2$ не равно силе тяжести соответствующего груза.

§ 7.5. Задача двух тел

В качестве второго примера на составление дифференциальных уравнений движения материальной системы рассмотрим следующую задачу. Две свободные материальные точки M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 соответственно движутся под действием сил ньютоновского притяжения. Определить закон движения системы.

В небесной механике и теории движения искусственных спутников Земли эта задача является одной из основных (она называется задачей двух тел). В главе IV решалась аналогичная задача в предположении, что тело, обладающее большей массой, неподвижно (в теории движения больших планет — это Солнце, в теории движения искусственных спутников — небесное тело, вокруг которого движется искусственный спутник).

Введем инерциальную систему отсчета $Oxyz$ и обозначим через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиусы-векторы соответствующих точек, а через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M_2 относительно M_1. Из рис. 7.5 видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{7.9}$$

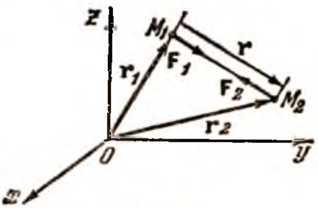


Рис. 7.5

По закону всемирного тяготения имеем

$$F_1 = F_2 = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{7.10}$$

где f — гравитационная постоянная.

Направление силы $\mathbf{F}_1$ определяется единичным вектором $\mathbf{r}/r$, а силы $\mathbf{F}_2$ — единичным вектором $-\mathbf{r}/r$ (обе силы направлены по одной прямой в противоположные стороны).

Дифференциальные уравнения движения в векторной форме (7.7) для рассматриваемой системы будут таковы:

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = f\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -f\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{7.11}$$

где вектор $\mathbf{r}$ определен равенством (7.9), а $r = |\mathbf{r}|$. Умножим первое уравнение (7.11) на m_2, а второе на m_1 и после этого вычтем почленно из второго уравнения первое:

$$m_1 m_2\left(\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}\right) = -f\frac{m_1 m_2(m_1+m_2)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

или, сокращая на m_1 и преобразовывая левую часть,

$$m_2\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -f\frac{m_2(m_1+m_2)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Учтем теперь равенство (7.9):

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -f\frac{m_2(m_1+m_2)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{7.12}$$

Из этого уравнения видно, что материальная точка M_2 движется относительно точки M_1 как относительно неподвижного центра, масса которого равна не m_1, а $M = m_1 + m_2$. Следовательно, пренебрежение движением точки большей массы вносит в расчеты погрешность, относительное значение которой определяется равенством

$$\varepsilon = \frac{M - m_1}{m_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Если m_2 — масса искусственного спутника, а m_1 — масса Земли, то относительную погрешность ε можно только вычислить, но не измерить (так как мы не располагаем столь чувствительными приборами). Если же m_2 — масса планеты, а m_1 — масса Солнца, то погрешность для Земли равна 0,000003, а для Юпитера (самой большой планеты Солнечной системы) — 0,001.

Перейдем теперь к исследованию движения двух тел относительно их центра масс. Для этого прежде всего покажем, что центр масс C рассматриваемой системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Действительно, сложив почленно оба уравнения (7.11), получим

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = 0,$$

или, интегрируя,

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = M\mathbf{A}, \tag{7.13}$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный постоянный вектор (скалярный множитель $M = m_1 + m_2$ введен для удобства).

Воспользуемся формулой (7.2) и найдем радиус-вектор центра масс системы

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2).$$

Дифференцируя по времени, получим скорость $\mathbf{v}_C$ центра масс C:

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right).$$

Сравнивая с первым интегралом уравнения (7.13), найдем

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{A}.$$

Пусть при $t = 0$ $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{0C}$. Тогда последнее равенство примет вид

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{0C},$$

т. е. центр масс находится в покое (если в начальный момент $\mathbf{v}_C = 0$) или движется равномерно и прямолинейно (если в начальный момент $\mathbf{v}_C \neq 0$) *).

*) Установленное здесь свойство центра масс в задаче двух тел является частным случаем теоремы о движении центра масс материальной системы см. § 8.4 следующей главы.

Очевидно, что центр масс C рассматриваемых точек M_1 и M_2 находится на прямой, соединяющей эти точки (рис. 7.6). Будем теперь откладывать радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ точек M_1 и M_2 от точки C. Тогда дифференциальные уравнения движения (7.11) примут вид

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}, \quad m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}. \tag{7.14}$$

Центр масс делит расстояние между точками M_1 и M_2 на части, обратно пропорциональные массам:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

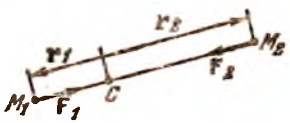


Рис. 7.6

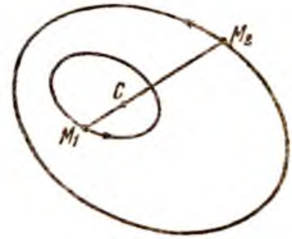


Рис. 7.7

Составим из этой пропорции две производные пропорции:

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \frac{r_1 + r_2}{r_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}.$$

Отсюда

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1, \quad r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2.$$

Внесем эти равенства в дифференциальные уравнения движения (7.14):

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -f \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 m_2}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}, \quad m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 m_2}{r_2^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}. \tag{7.15}$$

Из этих уравнений видно, что движение каждой точки относительно их центра масс происходит как движение вокруг неподвижного притягивающего центра с массой $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ для первой точки и $\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ — для второй. При соответствующих начальных условиях обе точки движутся по эллипсам, имеющим общий фокус C, совпадающий с центром масс системы (рис. 7.7). В частности, траектория планеты представляет эллипс, фокус которого совпадает не с центром Солнца, а с центром масс системы Солнце — планета (влиянием других небесных тел пренебрегаем). Эта точка отстоит от центра Солнца на небольшом расстоянии, которым в первом приближении можно пренебречь.

§ 7.6. Общие замечания

На первый взгляд может показаться, что изучение движения материальной системы можно свести к составлению и анализу дифференциальных уравнений (7.7) или (7.8). В принципе эта точка зрения справедлива, но практически реализовать такой путь исследования удается только для систем, состоящих из небольшого числа материальных точек (свободных или имеющих сравнительно простые связи, как это имело место в рассмотренных примерах). Сложность использования дифференциальных уравнений движения (7.7) или (7.8) состоит прежде всего в том, что, как правило, мы не знаем аналитического выражения внутренних сил и реакций связей.

В теоретической механике разработаны методы, которые позволяют обойти основные трудности, возникающие при использовании дифференциальных уравнений движения материальной системы в форме (7.7) и (7.8). С этой целью прежде всего вводятся некоторые векторные и скалярные величины, характеризующие в какой-то степени движение всей материальной системы (так называемые *меры движения*). К ним относятся вектор количества и вектор момента количеств движения, а также кинетическая энергия материальной системы. Зная характер изменения этих величин, можно составить частичное, а иногда и полное представление о движении материальной системы.

Глава VIII

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 8.1. Количество движения материальной системы

В конце предыдущей главы было отмечено, что о движении материальной системы можно составить частичное, а иногда и полное представление по характеру изменения некоторых векторных или скалярных величин, называемых мерами движения. В качестве первой такой меры мы рассмотрим вектор количества движения материальной системы.

Количеством движения материальной точки называется, как известно, векторная величина, равная произведению массы точки m на ее скорость $\mathbf{v}$, т. е. вектор $m\mathbf{v}$. *Количеством движения материальной системы называется вектор* $\mathbf{Q}$, *равный сумме количеств движения (главный вектор количеств движения) точек, входящих в систему*:

$$\mathbf{Q}=\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{v}_k. \tag{8.1}$$

Так как $\mathbf{v}_k=\dot{\mathbf{r}}_k$, где $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор k-й точки, проведенный из начала инерциальной системы отсчета, то равенство

(8.1) можно преобразовать следующим образом (массы точек постоянны):

$$\mathbf{Q}=\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k.$$

Пользуясь выражением (7.2), сумму, стоящую под знаком производной, заменим произведением $M\mathbf{r}_C$, где M — масса всей системы, а $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс:

$$\mathbf{Q}=\frac{d}{dt}(M\mathbf{r}_C), \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}=M\frac{d\mathbf{r}_C}{dt}.$$

Производная $d\mathbf{r}_C/dt$ есть скорость $\mathbf{v}_C$ центра масс системы. Окончательно имеем

$$\mathbf{Q}=M\mathbf{v}_C, \tag{8.2}$$

т. е. *количество движения материальной системы равно массе всей системы, умноженной на скорость ее центра инерции.*

Равенство (8.2) можно прочитать также следующим образом: *количество движения материальной системы равно количеству движения ее центра масс, если сосредоточить в нем массу всей системы.*

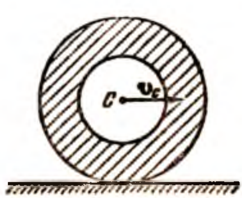


Рис. 8.1

Задача 8.1. Однородный полый цилиндр массы $m=20$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v=2$ м/с (конечно, это скорость центра цилиндра; рис. 8.1). Определить количество движения цилиндра.

Количества движения отдельных точек цилиндра имеют различные направления. Их главный вектор $\mathbf{Q}$ (количество движения всего цилиндра) совпадает по направлению со скоростью центра масс C цилиндра, а его модуль определяется равенством $Q=mv_C=40$ кг·м/с $=40$ Н·с.

Вектор количества движения $\mathbf{Q}$ может быть задан своими проекциями, выражения для которых непосредственно следуют из формул (8.1) и (8.2) и теоремы о проекции суммы векторов:

$$\begin{aligned} Q_x&=\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx}=Mv_{Cx},\\ Q_y&=\sum_{k=1}^{n} m_k v_{ky}=Mv_{Cy},\\ Q_z&=\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kz}=Mv_{Cz}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Кроме инерциальной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, построим поступательно перемещающуюся систему координат $Cx_2y_2z_2$, начало которой совпадает с центром масс C (рис. 8.2). Теперь движение каждой материальной точки можно рассматривать как сложное движение: переносное вместе с осями $Cx_2y_2z_2$ и движение относительно этих осей. Поэтому количество движения можно представить как сумму количеств переносного и относительного движения

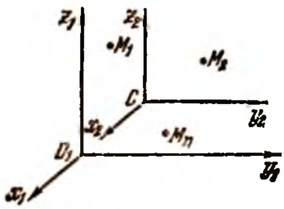


Рис. 8.2

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^e + \mathbf{Q}^r.$$

Так как в относительном движении $\mathbf{v}_{Cr} = 0$ (центр масс системы C совпадает с началом координат подвижной системы отсчета $Cx_2y_2z_2$), то согласно формуле (8.2) $Q^r = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^e.$$

Таким образом, количество движения материальной системы характеризует ее поступательное движение вместе с центром масс.

§ 8.2. Теорема об изменении количества движения материальной системы

Теорема. *Производная по времени вектора количества движения системы материальных точек равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.*

Для доказательства теоремы перепишем дифференциальные уравнения движения (7.7) материальной системы в следующей форме:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_1^i, \quad \ldots, \quad m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \mathbf{F}_n^e + \mathbf{F}_n^i \tag{8.4}$$

и сложим почленно все уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^i.$$

Первая сумма, стоящая в правой части равенства, равна главному вектору $\mathbf{F}^e$ всех внешних сил, а последняя сумма по первому свойству внутренних сил равна нулю (см. формулу (7.5)). После преобразований левой части получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{F}^e,$$

или, учитывая равенство (8.1),

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e, \tag{8.5}$$

что доказывает теорему.

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат векторное равенство (8.5) эквивалентно трем скалярным:

$$\frac{dQ_x}{dt} = X^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = Z^e. \tag{8.6}$$

Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

1. *Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения материальной системы* (они могут оказать косвенное влияние через внешние силы; см. окончание § 7.2).

2. *Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор количества движения материальной системы остается постоянным по величине и направлению.*

Действительно, по условию $\mathbf{F}^e = 0$. Тогда из равенства (8.5) будем иметь

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 = \text{const}, \tag{8.7}$$

где $\mathbf{Q}_0$ — начальное значение вектора $\mathbf{Q}$.

3. *Если проекция главного вектора всех внешних сил, приложенных к системе, на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция количества движения материальной системы на эту ось остается постоянной.*

Пусть проекция главного вектора всех внешних сил на ось x равна нулю: $X^e = 0$. Тогда из первого равенства (8.6) будем иметь

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$Q_x = Q_{0x} = \text{const}, \tag{8.8}$$

где Q_{0x} — начальное значение проекции Q_x.

Первые интегралы (8.7) и (8.8), определяющие второе и третье следствия, называются *законами сохранения количества движения материальной системы.*

Пользуясь введенным ранее понятием импульса силы, преобразуем равенство (8.5). Для этого умножим обе части на dt и проинтегрируем в пределах от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} d\mathbf{Q} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}^e\,dt,$$

или

$$\mathbf{Q}(t) - \mathbf{Q}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}^e\,dt.$$

Обозначим количество движения материальной системы в момент времени t через $\mathbf{Q}$, а в момент t_0 — через $\mathbf{Q}_0$, и воспользуемся выражением (3.3) для импульса силы. Тогда окончательно получим

$$\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}^e, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{S}^e = \sum \mathbf{S}_k^e$ — главный вектор импульсов всех внешних сил.

Таким образом, приходим к теореме об изменении количества движения материальной системы в интегральной форме (теорема импульсов): *изменение количества движения материальной системы за промежуток времени* $[t_0, t]$ *равно главному вектору импульсов всех внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.*

Векторное уравнение (8.9) эквивалентно трем скалярным равенствам в проекциях на оси инерциальной системы координат:

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e, \quad Q_y - Q_{0y} = S_y^e, \quad Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \tag{8.10}$$

В этих формулах S_x^e, S_y^e и S_z^e — проекции главного вектора импульсов всех внешних сил на оси координат, а Q_x, Q_y, Q_z и Q_{0x}, Q_{0y}, Q_{0z} — значения проекций количества движения материальной системы в момент времени t и t_0.

Теорема импульсов широко применяется в теории удара.

§ 8.3. Теорема о движении центра масс

Внесем в равенство (8.5) выражение для количества движения материальной системы (8.2):

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}^e$$

или, учитывая, что масса системы постоянна, получим

$$M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F}^e. \tag{8.11}$$

Это равенство по виду совпадает со вторым законом Ньютона, записанным для точки с массой M и ускорением $\mathbf{w}_C = d\mathbf{v}_C/dt$, к которой приложена сила $\mathbf{F}^e$. Равенство (8.11) представляет математическую запись теоремы о движении центра масс: *центр масс материальной системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Напомним, что $\mathbf{F}^e$ — главный вектор всех внешних сил, приложенных к системе.

Векторное равенство (8.11) эквивалентно трем скалярным:

$$M\frac{dv_{Cx}}{dt} = X^e, \quad M\frac{dv_{Cy}}{dt} = Y^e, \quad M\frac{dv_{Cz}}{dt} = Z^e. \tag{8.12}$$

Здесь предполагается, что оси декартовых координат неподвижны.

Необходимо помнить, что центр масс представляет геометрическую точку (см. рис. 8.1). Кроме того, внешние силы фактически приложены не к центру масс, а к точкам системы. Вместе с тем эта геометрическая точка при движении системы перемещается по закону, определенному приведенной теоремой.

Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

1. *Одними внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы.* Внутренние силы могут оказать косвенное влияние на движение центра масс только через внешние силы.

2. *Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс материальной системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Действительно, если $\mathbf{F}^e = 0$, то из равенства (8.11) будем иметь

$$M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = 0.$$

Сокращая на M и интегрируя, получим

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{0C} = \text{const}, \tag{8.13}$$

где $\mathbf{v}_{0C}$ — начальная скорость центра масс.

3. *Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось не изменяется.*

В самом деле, если $X^e = 0$, то из первого уравнения (8.12) найдем

$$M\frac{dv_{Cx}}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$v_{Cx} = \text{const}. \tag{8.14}$$

4. *Пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс (она может вызвать только вращение тела).*

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие закон движения центра масс.

Пример 1. *Движение с помощью сил трения.* На человека, стоящего на горизонтальном полу, действуют две внешние силы: сила тяжести $\mathbf{G}$ и нормальная реакция пола $\mathbf{N}$. Для движения в горизонтальном направлении (перемещения центра масс человека) этих сил недостаточно. В начале движения при перемещении одной ноги вперед за счет мускульных усилий вторая нога стремится переместиться назад, так как центр масс человека должен остаться в покое. В результате этого между подошвой второй ноги и полом возникает сила трения, направленная вперед (см. рис. 7.2). Эта сила трения является движущей для человека. Если пол будет абсолютно гладким, то одними мускульными усилиями человек не сможет перемещаться.

Точно так же движение автомобиля по горизонтальной дороге осуществляется с помощью внешних сил трения скольжения, которые возникают между полотном дороги и ведущими колесами автомобиля (см. рис. 7.1). Эти внешние силы трения возникают за счет внутренних сил, создающих вращающий момент на оси ведущих колес, и наличия шероховатой связи (дороги). Если полотно дороги достаточно гладкое (например, при гололеде), то даже при большом вращающем моменте, создаваемом внутренними силами, автомобиль не сможет начать движение.

Спортсмен, опускаясь на парашюте, может управлять движением центра масс своего тела, в частности, при известном опыте он может приземлиться в заданном круге. Осуществляется это управление за счет изменения внешних сил сопротивления воздуха. Это достигается подтягиванием с помощью мускульных усилий (внутренних сил) строп парашюта.

Пример 2. *Движение тел Солнечной системы в неподвижной системе координат.* Пренебрегая притяжением далеких звезд, нашу Солнечную систему можно считать изолированной, т. е. считать, что на тела Солнечной системы действуют только внутренние силы. По второму следствию теоремы о движении центра масс центр масс Солнечной системы, расположенный вблизи центра Солнца, находится в покое или двигается прямолинейно и равномерно. Наблюдения показывают, что он перемещается со скоростью 20 км/с к некоторой точке небесной сферы, расположенной вблизи звезды Веги и называемой *апексом*. Таким образом, движение планет Солнечной системы является сложным: их траектории относительно системы

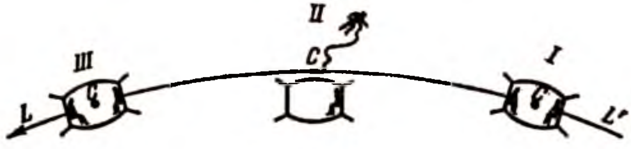


Рис. 8.3

отсчета, связанной с центром масс Солнечной системы, — эллипсы (если пренебречь силами взаимного тяготения планет), а траектории относительно далеких звезд — пространственныеэллиптические спирали.

Пример 3. *Движение искусственного спутника Земли при выходе из его кабины космонавта.* Пусть центр масс C всей системы (искусственного спутника Земли вместе с находящимися в нем космонавтами) движется под действием сил тяготения Земли по некоторой траектории LL' (рис. 8.3, положение I). При выходе космонавта из кабины спутника их общий центр масс будет перемещаться с той же скоростью и по той же траектории (так как внешние силы не изменились), но спутник и космонавт разойдутся по разные стороны от нее (см. рис. 8.3, положение *II*). Когда космонавт возвратится в кабину спутника, последний перейдет на прежнюю траекторию (положение *III*). Конечно, эти явления будут происходить только в том случае, если космонавт не пользуется микрореактивными двигателями.

§ 8.4. Теорема Эйлера

Дифференциальная форма теоремы об изменении количества движения материальной системы имеет важные и интересные приложения в механике сплошной среды. Рассмотрим одно, самое простое, но очень интересное приложение *).

Пусть некоторая сплошная среда (жидкость, газ) движется внутри трубы переменного сечения. Выделим часть трубы объемом w (рис. 8.4). Будем считать, что этот объем ограничен боковой поверхностью трубы и двумя ее поперечными сечениями σ_1 и σ_2, причем σ_1 и σ_2 означают одновременно и площади поперечных сечений (см. рис. 8.4). Обозначим через $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}$ средние скорости частиц среды, протекающих соответственно через сечения σ_1, σ_2 и некоторое среднее сечение σ. Тогда в единицу времени через сечение σ_1 будет протекать масса жидкости, равная $\rho_1\sigma_1 v_1$, а через сечения σ_2 и σ — массы $\rho_2\sigma_2 v_2$ и $\rho\sigma v$, где ρ_1, ρ_2 и ρ — плотность среды в соответствующих сечениях.

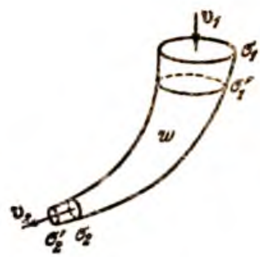


Рис. 8.4

Будем считать, что движение среды установившееся. Это означает, что скорости отдельных частиц среды и ее плотность в каждом сечении не изменяются с течением времени t. В этом предположении (оно является основным) через каждое сечение в единицу времени будут протекать равные количества массы среды, т. е.

$$M_c = \rho_1\sigma_1 v_1 = \rho_2\sigma_2 v_2 = \rho\sigma v, \tag{8.15}$$

где через M_c обозначена *секундная масса — масса среды, протекающей через любое сечение трубы в единицу времени*. Размерность секундной массы в системе СИ равна кг·с$^{-1}$, а в технической системе — кгс·м$^{-1}$·с.

Перейдем теперь к вычислению изменения количества движения среды, заполняющей объем w. Пусть в момент времени t рассматриваемая среда занимала объем w, заключенный между сечениями σ_1 и σ_2, а в момент времени $t + dt$ эта же масса среды занимает объем, ограниченный сечениями σ_1' и σ_2' (см. рис. 8.4). Тогда изменение

*) Доказательство будет вестись в упрощающих предположениях (см., например, Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1983, 1984; Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1978.

количества движения рассматриваемой массы среды произойдет только за счет потери количества движения в объеме между сечениями σ_1 и σ_1' и возрастания количества движения в объеме между сечениями σ_2 и σ_2'.

Так как при установившемся движении в единицу времени через сечения σ_1 и σ_2 проходят одинаковые массы, равные M_c, то за время dt через эти сечения пройдут массы $M_c\,dt$. Их количества движения будут $M_c\,dt\,\mathbf{v}_1$ и $M_c\,dt\,\mathbf{v}_2$, а изменение количества движения $d\mathbf{Q}$ рассматриваемой массы среды за то же время определится равенством

$$d\mathbf{Q} = M_c\,dt\,\mathbf{v}_2 - M_c\,dt\,\mathbf{v}_1.$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = M_c\mathbf{v}_2 - M_c\mathbf{v}_1. \tag{8.16}$$

В этом равенстве произведения $M_c\mathbf{v}_1$ и $M_c\mathbf{v}_2$ называются *секундными количествами движения* среды в сечениях σ_1 и σ_2.

Внешние силы, действующие на среду, можно разбить на две категории:

1) силы *массовые*, или *объемные*, т. е. такие, которые действуют на каждую частицу рассматриваемой среды независимо от того, находятся ли эти частицы внутри выделенного объема или на его поверхности;

2) силы *поверхностные* — силы, действующие только на частицы, лежащие на поверхности объема.

К массовым силам относятся прежде всего силы тяжести. Поверхностные силы — это силы давления стенок на среду, силы трения выделенного объема среды о стенки и т. п.

Обозначим через $\mathbf{F}_{об}$ главный вектор всех внешних объемных сил, а через $\mathbf{F}_{пов}$ — главный вектор всех внешних поверхностных сил. Тогда, применяя к рассматриваемой массе среды теорему об изменении количества движения материальной системы в ее дифференциальной форме (8.5), получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}_{об} + \mathbf{F}_{пов},$$

или, пользуясь соотношением (8.16) и перенося все члены в одну сторону,

$$\mathbf{F}_{об} + \mathbf{F}_{пов} + M_c\mathbf{v}_1 - M_c\mathbf{v}_2 = 0. \tag{8.17}$$

Это равенство представляет математическую запись теоремы Эйлера, которую можно прочитать следующим образом: *сумма главных векторов объемных и поверхностных сил, а также секундных количеств движения среды, протекающей через два поперечных сечения трубы, равна нулю, если векторы секундных количеств движения направить внутрь выделенного сечениями объема.*

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат векторное равенство (8.17) дает

$$\begin{aligned} X_{об} + X_{пов} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} &= 0, \\ Y_{об} + Y_{пов} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} &= 0, \\ Z_{об} + Z_{пов} + M_c v_{1z} - M_c v_{2z} &= 0. \end{aligned} \tag{8.18}$$

§ 8.5. Задачи

Задача 8.2. На корме находящейся в покое баржи установлен автомобиль. В некоторый момент времени автомобиль начал перемещаться по палубе, направляясь к носу баржи. Пренебрегая сопротивлением воды движению баржи, определить ее скорость v в зависимости от скорости автомобиля u относительно баржи (учет сил сопротивления будет дан в следующей задаче 8.3). Масса баржи равна m_1, а масса автомобиля m_2.

Рассмотрим систему, состоящую из баржи и автомобиля. В условиях задачи внешними силами, действующими на систему, будут вертикальные силы тяжести $m_1 g$, $m_2 g$ и архимедова сила G (рис. 8.5). Проекция этих сил на горизонтальную ось x равна нулю, и, следовательно, проекция количества движения всей системы на эту ось сохраняет постоянное значение, равное начальному:

$$Q_x = Q_{x0} = \text{const}.$$

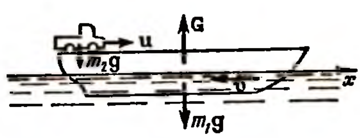


Рис. 8.5

Количество движения баржи равно $m_1 v$, а количество движения автомобиля $m_2 (u + v)$ (при вычислении нужно иметь в виду, что количество движения определяется для абсолютных скоростей). Считая, что баржа движется в сторону, противоположную автомобилю (рис. 8.5), найдем проекцию количества движения всей системы на ось x:

$$Q_x = -m_1 v + m_2 (u - v). \tag{8.19}$$

Будем отсчитывать время с начала движения автомобиля. Тогда при $t = 0$ $u = 0$, $v = 0$. Внося эти значения для u и v в выражение для Q_x, получим $Q_{x0} = 0$.

Учитывая, что проекция на ось x количества движения системы не меняется, будем иметь

$$-m_1 v + m_2 (u - v) = 0.$$

Отсюда найдем скорость движения баржи v как функцию скорости автомобиля

$$v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u. \tag{8.20}$$

Так как полученное выражение для скорости v положительно, то сделанное предположение о том, что баржа движется в сторону, противоположную движению автомобиля, является верным.

Из формулы (8.20) видно, что в условиях задачи (отсутствие сил сопротивления) скорость баржи v прямо пропорциональна относительной скорости автомобиля u. В частности, в момент остановки автомобиля остановится и баржа. При отсутствии сил сопротивления эта остановка баржи должна произойти в результате динамического эффекта, вызванного взаимодействием внутренних сил между баржей и автомобилем. Заметим, что за все время движения количество движения системы не изменяется, а происходит перераспределение скоростей тел, входящих в систему.

В заключение этого примера отметим, что сделанное предположение об отсутствии сил сопротивления движению несущего тела (баржи) является, конечно, идеалированным и на практике, за исключением аналогичной ситуации в космосе (см. § 9.8), оно не оправдано. Поэтому формула (8.20) справедлива только при сделанных предположениях и в реальных земных условиях она дает весьма приближенное решение, которым не всегда можно пользоваться. В частности, вывод, что баржа остановится одновременно с прекращением движения автомобиля, не подтверждается наблюдениями — после остановки автомобиля баржа, изменив предварительно направление движения на противоположное, будет продолжать движение в сторону перемещения автомобиля. Это явление, вызываемое взаимодействием внутренних сил системы с внешними силами сопротивления, будет разобрано в следующей задаче.

Задача 8.3. В условиях предыдущей задачи определить скорость движения баржи, считая, что при ее движении возникает сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости, а автомобиль перемещается относительно баржи по

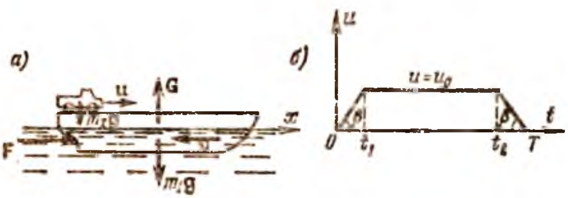


Рис. 8.6

закону, график которого изображен на рис. 8.6, б (в начальном промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ автомобиль движется равноускоренно, затем в промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ равномерно и, наконец, на третьем этапе $t_2 \leqslant t \leqslant T$ равнозамедленно).

В отличие от предыдущей задачи, теперь, кроме внешних вертикальных сил тяжести $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ и архимедовой силы $\mathbf{G}$, приложенных к системе, на баржу действует еще одна внешняя сила — сила сопротивления $F = \alpha v$, где α — коэффициент пропорциональности. Эта сила направлена в сторону, противоположную скорости баржи $\mathbf{v}$ (рис. 8.6, а). Проекция количества движения системы на ось x была определена в предыдущей задаче — см. формулу (8.19):

$$Q_x = -(m_1 + m_2)\, v + m_2 u.$$

Внося это выражение для Q_x в первое уравнение (8.6) и учитывая значение силы сопротивления F, получим

$$-(m_1 + m_2)\frac{dv}{dt} + m_2\frac{du}{dt} = \alpha v,$$

или

$$\frac{dv}{dt} + kv = f(t). \qquad (8.21)$$

В этом уравнении коэффициент k и функция $f(t)$ определены равенствами

$$k = \frac{\alpha}{m_1 + m_2}, \qquad f(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{du}{dt}.$$

Учитывая, что автомобиль движется относительно баржи сначала равноускоренно ($\dot{u} = \mathrm{const} > 0$), затем равномерно ($\dot{u} = 0$) и, наконец, равнозамедленно ($\dot{u} = \mathrm{const} < 0$), получим

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ 0, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ -a, & t_2 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t \geqslant T, \end{cases} \qquad (8.22)$$

где положительное число a пропорционально ускорению автомобиля на первом интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ времени его движения:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{du}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_0}{t_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{tg} \beta \tag{8.23}$$

(значение u_0 и угла β видно на рис. 8.6, *б*). Для простоты мы считаем, что время разгона автомобиля t_1 равно времени его торможения $T - t_2$:

$$t_1 = T - t_2. \tag{8.24}$$

Поэтому на третьем этапе $f(t) = -a$.

Для первого промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ уравнение движения (8.21) согласно (8.22) примет вид

$$\frac{dv}{dt} + kv = a. \tag{8.25}$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами решается очень легко, и его общее решение можно записать в следующей форме:

$$v = C_1 e^{-kt} + a/k \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{8.26}$$

(читателю полезно самостоятельно получить это решение).

Произвольную постоянную интегрирования C_1 найдем из начальных условий: в начале движения при $t = 0$ скорость баржи $v = 0$. Подставим эти значения для t и v в общее решение (8.26): $0 = C_1 + a/k$. Отсюда $C_1 = -a/k$. Внеся это значение для C_1 в (8.26), получим скорость баржи на первом интервале времени

$$v = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{8.27}$$

В конце этого промежутка времени скорость баржи будет

$$v_1 = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt_1}). \tag{8.28}$$

На участке равномерного движения автомобиля дифференциальное уравнение (8.21) на основании равенства (8.22) примет вид

$$\frac{dv}{dt} + kv = 0.$$

Общее решение этого уравнения запишем в следующей форме *):

$$v = C_2 e^{-k(t-t_1)} \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2). \tag{8.29}$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем из условия: при $t = t_1$ $v = v_1$. После подстановки получим $C_2 = v_1$. Следовательно, на втором интервале времени скорость баржи изменяется по закону

$$v = v_1 e^{-k(t-t_1)} \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{8.30}$$

где v_1 определено равенством (8.28).

В конце этого периода скорость баржи будет

$$v_2 = v_1 e^{-k(t_2-t_1)}. \tag{8.31}$$

*) Эта форма решения совпадает по существу с решением (8.26) уравнения (8.25) при $a = 0$. Действительно, решение (8.29) можно записать так: $v = C_2 e^{kt_1} e^{-kt} = Ce^{-kt}$, что совпадает с (8.26) при $a = 0$ ($C = C_2 e^{kt_1}$ — новая постоянная).

На третьем интервале времени (участок торможения автомобиля) дифференциальное уравнение (8.21) принимает вид

$$\frac{dv}{dt}+kv=-a \qquad (t_2 \leqslant t \leqslant T).$$

Его общее решение запишем в следующей форме:

$$v=C_3e^{-k(t-t_2)}-\frac{a}{k} \qquad (t_2 \leqslant t \leqslant T).$$

Произвольную постоянную C_3 найдем из условия: при $t=t_2$ $v=v_2$. После подстановки получим $C_3=v_2+a/k$. Следовательно, на третьем интервале времени скорость баржи изменяется по закону

$$v=\left(v_2+\frac{a}{k}\right)e^{-k(t-t_2)}-\frac{a}{k} \qquad (t_2 \leqslant t \leqslant T). \tag{8.32}$$

Скорость баржи в конце этого периода (при остановке автомобиля) будет

$$v_3=\left(v_2+\frac{a}{k}\right)e^{-k(T-t_2)}-\frac{a}{k}.$$

Внесем в это равенство значение v_2 из (8.31), затем учтем значение v_1 из (8.28) и примем во внимание равенство (8.24). После элементарных преобразований получим

$$v_3=-v_1\left(1-e^{-kt_1}\right). \tag{8.33}$$

Из этого выражения видно, что $v_3<0$. Это означает, что на участке торможения автомобиля баржа изменяет направление движения на противоположное и начинает двигаться в сторону движения автомобиля, причем в момент остановки автомобиля баржа не останавливается, а продолжает движение. Момент времени t_3, когда баржа изменяет направление движения, можно найти из равенства (8.32), положив в нем $t=t_3$ и $v=0$:

$$0=\left(v_2+\frac{a}{k}\right)e^{-k(t_3-t_2)}-\frac{a}{k}.$$

Отсюда $t_3=t_2+\frac{1}{k}\ln\frac{kv_2+a}{a}$.

Перейдем к определению закона изменения скорости баржи после остановки автомобиля ($t \geqslant T$). Уравнение (8.21) при $t \geqslant T$ принимает вид

$$\frac{dv}{dt}+kv=0 \qquad (t \geqslant T).$$

В общем решении этого уравнения

$$v=C_4e^{-k(t-T)} \qquad (t \geqslant T)$$

произвольную постоянную интегрирования C_4 найдем из условия: при $t=T$ $v=v_3$. Следовательно, $C_4=v_3$, и скорость баржи будет изменяться по закону

$$v=v_3e^{-k(t-T)} \qquad (t \geqslant T). \tag{8.34}$$

На рис. 8.7 по равенствам (8.27), (8.30), (8.32) и (8.34) построен график закона изменения скорости баржи $v=v(t)$ (на графике учтено, что за положительное направление движения баржи принято направление, противоположное направлению движения автомобиля).

Рассмотрим теперь случай, когда промежуток времени $t_1=T-t_2$ очень мал и его практически можно считать равным нулю (автомобиль за пренебрежимо малый промежуток времени набирает скорость $u=u_0$ и так же быстро останавливается — рис. 8.8, *а*).

Воспользуемся равенством (8.28) и подставим в него значение a из (8.23):

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{u_0}{k}\,\frac{1-e^{-kt_1}}{t_1}.$$

При $t_1 \to 0$ имеется неопределенность вида $0:0$. Для раскрытия ее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{t_1\to 0} v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{u_0}{k}\lim_{t_1\to 0}\frac{(1-e^{-kt_1})'_{t_1}}{(t_1)'_{t_1}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}u_0.$$

Таким образом, при $t_1 \to 0$ будем иметь

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}u_0. \qquad (8.35)$$

После набора автомобилем этой скорости баржа будет двигаться по закону (8.30), если положить в нем $t_1 = 0$:

$$v = v_1 e^{-kt} \qquad (0 < t < T). \qquad (8.36)$$

Скорость баржи перед началом торможения автомобиля определяется равенством

$$v_2 = v_1 e^{-kT}. \qquad (8.37)$$

Скорость движения баржи в конце торможения автомобиля найдем из равенства (8.33) при $t_2 = T$:

$$v_3 = -v_1\left(1-e^{-kT}\right) = v_2 - v_1,$$

где v_1 и v_2 определены равенством (8.35) и (8.37).

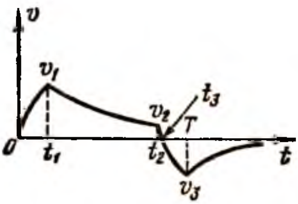


Рис. 8.7

График скорости баржи при $t_1 = T - t_2 \to 0$ показан на рис. 8.8, *б*.

Явления, описанные в этом примере, читатель может наблюдать самостоятельно; при переходе человека с кормы лодки к ее носовой части (или наоборот) лодка сначала начнет двигаться в сторону кормы, а затем при остановке человека движение лодки будет происходить в обратном направлении.

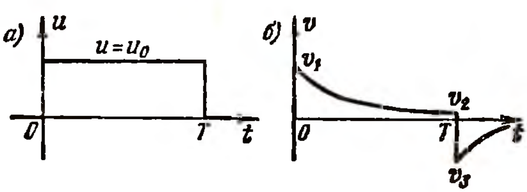


Рис. 8.8

В заключение этого примера отметим, что качественная сторона закона изменения скорости движения не зависит от сделанных предположений ($T - t_2 = t_1$, $F = \alpha v$). Читатель может убедиться в этом самостоятельно, разобрав для примера случай, когда сила сопротивления воды пропорциональна не первой, а второй степени скорости движения баржи ($F = \mu v^2$, где μ — коэффициент пропорциональности).

Задача 8.4. Груз массы $m_1 = 3000$ кг скользит вниз по наклонной эстакаде, свободно лежащей на земле. Масса эстакады $m_2 = 2000$ кг, коэффициент трения скольжения между грузом и эстакадой $f = 0{,}2$, угол наклона $\alpha = 30°$. При каких условиях эстакада остается неподвижной?

Эстакада будет находиться в покое до тех пор, пока сила трения F между землей и эстакадой не достигнет своего предельного значения, равного $f_0 N$, где f_0 — коэффициент трения покоя, а N — сила нормального давления. Для определения силы трения F и нормального давления N рассмотрим систему, состоящую из груза и эстакады. На эту систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести груза $m_1\mathbf{g}$, сила тяжести эстакады $m_2\mathbf{g}$, нормальная реакция земли $\mathbf{N}$ и сила трения между землей и эстакадой $\mathbf{F}$ (рис. 8.9, *а*).

Обозначим скорость движения груза через $\mathbf{v}$. Очевидно, что скорость $\mathbf{v}$ направлена параллельно наклонной плоскости, и поэтому проекции количества движения груза, а следовательно, и всей системы (количество движения эстакады равно нулю, так как она находится в покое) на координатные оси x и y будут (рис. 8.9, *а*)

$$Q_x = m_1 v\cos\alpha, \quad Q_y = -m_1 v\sin\alpha.$$

Применим теперь теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме и равенства (8.6). Пользуясь выражениями для Q_x и Q_y, с помощью рис. 8.9, *а* получим

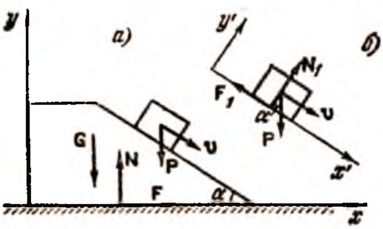


Рис. 8.9

$$m_1\frac{dv}{dt}\cos\alpha = F,$$

$$-m_1\frac{dv}{dt}\sin\alpha = -m_2 g - m_1 g + N.$$

Отсюда найдем силу нормального давления

$$N = m_2 g + m_1 g - m_1\frac{dv}{dt}\sin\alpha.$$

Эстакада будет находиться в покое, если сила трения F не превышает своего предельного значения $f_0 N$, т. е. при $F < f_0 N$.

Из полученных соотношений найдем

$$m_1\frac{dv}{dt}\cos\alpha < f_0\left(m_2 g + m_1 g - m_1\frac{dv}{dt}\sin\alpha\right),$$

или

$$f_0 > \frac{m_1\dfrac{dv}{dt}\cos\alpha}{m_2 g + m_1 g - m_1\dfrac{dv}{dt}\sin\alpha}.$$

Для полного решения задачи необходимо определить ускорение dv/dt. Для этого рассмотрим движение одного груза (рис. 8.9, *б*). На груз действуют сила тяжести $m_1\mathbf{g}$, нормальная составляющая реакции наклонной плоскости $\mathbf{N}_1$ и сила трения $\mathbf{F}_1$, по модулю равная fN_1. Составим дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси x' и y':

$$m_1\frac{dv}{dt} = m_1 g\sin\alpha - F_1, \quad 0 = N_1 - m_1 g\cos\alpha.$$

Из второго уравнения найдем $N_1 = m_1 g\cos\alpha$, следовательно, $F_1 = fN_1 = fm_1 g\cos\alpha$. Внесем это выражение для F в первое уравнение и определим из него ускорение груза:

$$\frac{dv}{dt} = (\sin\alpha - f\cos\alpha)g.$$

После подстановки в неравенство, определяющее f_0, получим

$$f_0 > \frac{m_1(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha}{m_2 + m_1\cos\alpha(\cos\alpha + f\sin\alpha)}.$$

Этому условию должен удовлетворять f_0 — коэффициент трения покоя между землей и эстакадой, чтобы последняя не пришла в движение. В условиях примера ($m_2 = 2000$ кг, $m_1 = 3000$ кг, $f = 0{,}2$ и $\alpha = 30°$) найдем $f_0 > 0{,}19$.

В главе XVI мы решим эту задачу другим методом.

Задача 8.5. Электромотор прикреплен с помощью четырех болтов к горизонтальному основанию. В результате затяжки каждый болт создает вертикальную силу давления $P_1 = 12{,}5$Н. Коэффициент трения покоя между мотором и основанием $f_0 = 0{,}2$. Определить величину бокового давления на болты, если ротор электромотора, имея небольшой эксцентриситет $e = 0{,}5$ мм, равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 50\pi$ рад/с ($n = 1500$ об/мин). Сила тяжести статора $G_1 = 100$ Н, сила тяжести ротора $G = 50$ Н (рис. 8.10).

При вращении ротора центр тяжести его (точка C) будет описывать окружность, радиус которой равен эксцентриситету e. В результате этого корпус электромотора будет стремиться совершать горизонтальные колебания. Этому стремлению препятствуют болты и сила трения между электромотором и основанием (фундаментом).

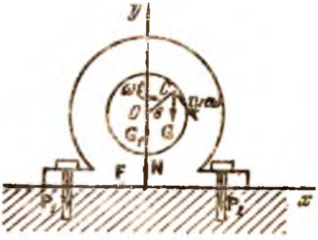


Рис. 8.10

Обозначим через $\mathbf{F}_{тр}$ силу трения между основанием и статором мотора, через $\mathbf{F}_1$ — суммарную горизонтальную составляющую силы давления болтов на статор мотора и через $\mathbf{F}$ — равнодействующую сил $\mathbf{F}_{тр}$ и $\mathbf{F}_1$. Так как последние направлены всегда в одну сторону, то

$$F = F_{тр} + F_1.$$

Нужно иметь в виду следующее: если сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ по модулю меньше своего предельного значения f_0N, где N — значение нормального давления, то корпус мотора будет удерживаться в покое только за счет сил трения. В этом случае $F_1 = 0$ и $F = F_{тр}$. Как только сила трения достигнет своего предельного значения, в работу вступят болты, причем модуль силы $\mathbf{F}_1$ можно будет определить из последнего равенства

$$F_1 = F - F_{тр} = F - f_0N.$$

Таким образом, имеем

$$F_1 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad F \leqslant f_0N, \\ F - f_0N, & \text{если} \quad F \geqslant f_0N. \end{cases} \tag{8.38}$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из статора и ротора. Количество движения статора равно нулю (он неподвижен), а количество движения ротора равно $(G/g)\,\mathbf{v}_C$, где $\mathbf{v}_C$ — скорость его центра тяжести C. Модуль скорости точки C равен $e\omega$, а проекции вектора $\mathbf{v}_C$ на оси x и y будут (рис. 8.10)

$$v_{Cx} = e\omega\cos\omega t, \quad v_{Cy} = -e\omega\sin\omega t.$$

Следовательно, проекции количества движения всей системы равны

$$Q_x = \frac{G}{g}e\omega\cos\omega t, \quad Q_y = -\frac{G}{g}e\omega\sin\omega t.$$

Внешними силами для системы будут: сила тяжести статора $\mathbf{G}_1$, сила тяжести ротора $\mathbf{G}$, четыре силы $\mathbf{P}_1$ затяжки болтов (их равнодействующую обозначим через $\mathbf{P}$), нормальная составляющая реакции основания $\mathbf{N}$, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ и боковые составляющие давления болтов $\mathbf{F}_1$ ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}_1$). Воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы в дифференциальной форме и применим уравнения (8.6). Пользуясь полученными выражениями для Q_x и Q_y, с помощью рис. 8.10 получим (рассматриваем первый полуоборот, в течение которого сила F будет направлена влево)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{G}{g}e\omega\cos\omega t\right)=-F,\quad \frac{d}{dt}\left(-\frac{G}{g}e\omega\sin\omega t\right)=N-P-G_1-G,$$

или, выполняя дифференцирование и умножая первое уравнение на -1,

$$\frac{G}{g}e\omega^2\sin\omega t=F,\quad -\frac{G}{g}e\omega^2\cos\omega t=N-P-G_1-G.$$

Найдем из второго уравнения силу нормального давления

$$N=P+G_1+G-\frac{G}{g}e\omega^2\cos\omega t.$$

Будем считать, что N всегда положительно, и введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\omega t)=F-f_0N=\frac{G}{g}e\omega^2\sin\omega t-f_0\left(P+G_1+G-\frac{G}{g}e\omega^2\cos\omega t\right).$$

Отметим, что входящая в это выражение предельная сила трения покоя f_0N является величиной переменной (так как N изменяется).

Учитывая соотношение (8.38), найдем $(0\leqslant\omega t\leqslant\pi)$

$$F_1=\begin{cases}0, & \text{если}\ \Phi(\omega t)\leqslant 0,\\ \Phi(\omega,\ t), & \text{если}\ \Phi(\omega t)\geqslant 0.\end{cases}\qquad(8.39)$$

Преобразуем функцию $\Phi(\omega t)$:

$$\Phi(\omega t)=\frac{G}{g}e\omega^2(\sin\omega t+f_0\cos\omega t)-f_0(P+G_1+G).$$

Воспользуемся равенством

$$f_0=\operatorname{tg}\varphi,$$

в котором φ — угол трения. Функцию $\Phi(\omega t)$ можно привести теперь к виду

$$\Phi(\omega t)=\frac{G}{g}\frac{e\omega^2}{\cos\varphi}\sin(\omega t+\varphi)-f_0(P+G_1+G).\qquad(8.40)$$

Максимальное значение функции $\Phi(\omega t)$ достигается при $\sin(\omega t+\varphi)=1$:

$$\Phi_{\max}=\frac{G}{g}\frac{e\omega^2}{\cos\varphi}-f_0(P+G_1+G).$$

Если это выражение неположительно, то при любом значении угла ωt функция $\Phi(\omega t)\leqslant 0$. В этом случае сила трения не превосходит своего предельного значения и болты не оказывают давления на мотор ($F_1=0$). Это имеет место при условии

$$e\omega^2\leqslant\frac{g}{G}(P+G_1+G)\sin\varphi.\qquad(8.41)$$

Если же неравенство (8.41) будет иметь обратный смысл, то при некотором $\omega t=\omega t_1$ функция $\Phi(\omega t)$ обратится в нуль. Угол поворота ωt_1 легко находится из уравнения $\Phi(\omega t_1)=0$, или, после очевидных преобразований,

$$\sin(\omega t_1+\varphi)=\frac{g}{Ge\omega^2}(P+G_1+G)\sin\varphi.\qquad(8.42)$$

С момента времени $t=t_1$ функция $\Phi(\omega t)$ начнет возрастать и сделается положительной (t_1 — наименьший корень уравнения (8.42)). С этого же момента болты начнут оказывать давление на мотор, равное $F_1=\Phi(\omega t)$.

При угле ωt_2, определяемом уравнением

$$\omega t_2+\varphi=\pi-(\omega t_1+\varphi),\qquad(8.43)$$

функция Ф (ωt) опять сделается равной нулю, давление болтов прекратится, и мотор снова будет удерживаться одной силой трения. При $\omega t > \pi$ характер распределения сил будет повторяться в обратном порядке.

В данном примере

$$e\omega^2 = 0{,}0005\,(50\pi)^2 = 1{,}25\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

$$\frac{g}{G}(G_1 + G + P) = 39{,}2 \text{ м/с}^2, \qquad f_0 = \operatorname{tg}\varphi = 0{,}2,$$

$$\sin\varphi \approx 0{,}196, \qquad \varphi \approx 0{,}198\ (11^\circ).$$

Условие (8.41) не выполняется и, следовательно, одной силы трения недостаточно для удержания в горизонтальном положении мотора. Значение угла ωt_1 найдем из уравнения (8.42):

$$\sin(\omega t_1 + \varphi) = \frac{39{,}2}{1{,}25\pi^2}\cdot 0{,}196 \approx 0{,}64,$$

$$\omega t_1 + \varphi = 0{,}695\ (40^\circ), \quad \omega t_1 \approx 0{,}497\ (29^\circ).$$

Таким образом, при $0 \leqslant \omega t \leqslant \omega_1 t$ мотор удерживается одной силой трения. Начиная с момента времени t_1, в работу вступают болты, действие которых прекращается в момент времени t_2; угол ωt_2 определяется равенством (8.43):

$$\omega t_2 = \pi - \omega t_1 - 2\varphi = 2{,}247\ (129^\circ).$$

В промежутке $\omega t_1 < \omega t < \omega t_2$ суммарная сила давления болтов найдется из равенств (8.39) и (8.40):

$$F_1 = 63\sin(\omega t + \varphi) - 40.$$

При $\omega t \geqslant \omega t_2$ сила F_1 снова обращается в нуль. График проекции силы $\mathbf{F}_1$ на ось x изображен на рис. 8.11.

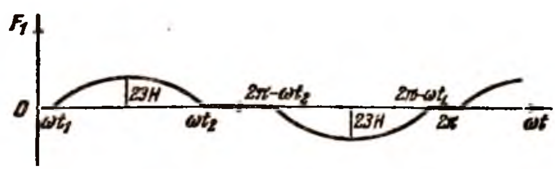


Рис. 8.11

Максимальное давление, приходящееся на один болт (сила давления мотора на болты равна по модулю F_1 и направлена в сторону, противоположную $\mathbf{F}_1$), равно 5,75 Н, а при отсутствии трения ($f_0 = 0$) оно составляет 15,75 Н. Следовательно, сила трения снимает в данной системе две трети всей нагрузки на болты и существенно облегчает условия их работы.

При большом эксцентриситете сила давления $\mathbf{F}_1$, меняющая свое направление с каждым полуоборотом ротора (в нашем примере 3000 раз в минуту), может достигнуть величины, при которой болты будут сломаны.

Если увеличить затяжку болтов, т. е. увеличить силу $\mathbf{P}$, то можно создать такое нормальное давление N, при котором мотор будет удерживаться в горизонтальном положении одной силой трения и болты не будут испытывать горизонтальных давлений. Критическое значение для силы P найдем из неравенства (8.41):

$$P \geqslant \left(\frac{e\omega^2}{g\sin\varphi} - 1\right)G - G_1.$$

В рассматриваемом примере будем иметь $P \geqslant 170$ Н. Следовательно, каждый болт нужно затянуть с силой 42,5 Н (напомним, что P — суммарная сила затяжки всех четырех болтов), т. е. затяжку болтов нужно увеличить в 3,4 раза.

Задача 8.6. Горизонтальный участок трубопровода земснаряда имеет изогнутое под углом 90° колено. Определить динамическое давление **P** пульпы на изогнутую часть трубопровода, если его диаметр равен 60 см, удельный вес пульпы $\gamma = 12$ кН/м³ и скорость ее течения $v = 6$ м/с.

Рассмотрим изогнутую часть трубопровода и обозначим через σ_1 и σ_2 площади поперечных сечений его в начале и конце изгиба, а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — векторы соответствующих скоростей пульпы (рис. 8.12, *а*). Ось x направим вдоль оси симметрии изогнутой части трубопровода, а ось y — перпендикулярно к ней. По условию задачи модули $v_1 = v_2 = v$, а векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ составляют с осью x углы, равные 45°. Силы тяжести направлены вертикально, и их проекции на оси x и y равны нулю (на рис. 8.12, *а* показан вид сверху). Обозначим через $X_{пов}$ и $Y_{пов}$ проекции главного вектора сил давления стенок трубопровода на пульпу и составим первые два уравнения (8.18):

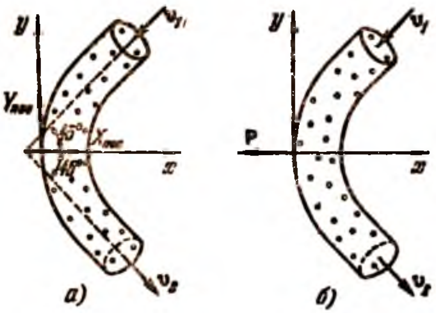


Рис. 8.12

$$X_{пов} - M_c v \cos 45^\circ - M_c v \cos 45^\circ = 0,$$

$$Y_{пов} - M_c v \sin 45^\circ + M_c v \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда находим

$$X_{пов} = M_c v \sqrt{2}, \quad Y_{пов} = 0.$$

Таким образом, главный вектор поверхностных сил направлен по оси x (это очевидно из соображений симметрии). Сила добавочного динамического давления **P** на трубопровод равна по модулю $X_{пов}$ и направлена в противоположную сторону (рис. 8.12, *б*):

$$P = \sqrt{2} M_c v. \tag{8.44}$$

По определению имеем (см. формулу (8.15)) $M_c = \rho\sigma v$. Плотность пульпы ρ связана с ее удельным весом равенством $\rho = \gamma/g$, а площадь поперечного сечения трубопровода $\sigma = \pi d^2/4$.

Внося выражения для M_c, ρ и σ в равенство (8.44), получим

$$P = \frac{\sqrt{2}\gamma}{4g} \pi d^2 v^2.$$

После подстановки численных значений $\gamma = 12$ кН/м³, $d = 0{,}6$ м, $v = 6$ м/с, найдем динамическое давление пульпы на трубопровод: $P = 17{,}7$ кН.

Глава IX

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 9.1. Момент количеств движения материальной системы

В предыдущей главе было показано, что, исследуя вектор количества движения материальной системы, можно составить представление о ее поступательном движении. Вращательное движение материальной системы характеризуется другой векторной величиной, а именно — моментом количеств движения. В этой главе мы рассмотрим способы вычисления этой величины и ее связи с другими динамическими характеристиками системы, с помощью которых можно составить частичное, а иногда и полное описание вращательных движений материальной системы.

Момент количества движения $\mathbf{K}_O$ одной материальной точки определяется равенством $\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. *Моментом количеств движения* $\mathbf{K}_O$ *материальной системы относительно центра* O *называется сумма моментов (главный момент) количеств движения всех материальных точек, входящих в систему, относительно того же центра:*

$$\mathbf{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k. \qquad (9.1)$$

В этом равенстве $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор материальной точки M_k с началом в центре O, m_k и $\mathbf{v}_k$ — масса и скорость этой точки. Если материальная система представляет непрерывно распределенную материальную среду, заполняющую некоторый объем, то сумма, конечно, переходит в соответствующий интеграл.

Как всякий вектор, момент количеств движения $\mathbf{K}_O$ может быть задан своими проекциями. В частности, равенство (9.1) в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}), \\ K_y &= \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}), \qquad (9.2) \\ K_z &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}), \end{aligned}$$

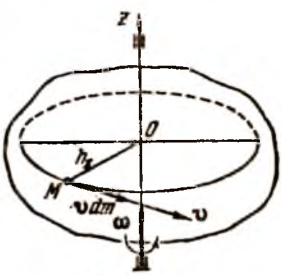


Рис. 9.1

где x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k.

По этим формулам можно определить проекции K_x, K_y, K_z (моменты количеств движения материальной системы относительно координатных осей), а следовательно, и сам вектор $\mathbf{K}_O$.

Момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. В этом примере нас интересует не момент количеств движения $\mathbf{K}_O$ твердого тела как вектор, а только одна его проекция K_z на ось вращения z тела.

Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси z (рис. 9.1). Выделим в теле элемент объема M с массой dm и будем рассматривать его как материальную точку. При вращении тела вокруг неподвижной оси элемент объема M будет двигаться по окружности с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию h_z от точки M до оси вращения. Проекция скорости $\mathbf{v}$ элемента объема M на касательную к окружности равна $\omega_z h_z$, а проекция количества движения на ту же ось будет $v_\tau\, dm =$

$= \omega_z h_z\, dm$. Так как плечо вектора $\mathbf{v}dm$ относительно оси вращения равно h_z, то момент количества движения элемента объема M относительно оси z равен $v_\tau\, dm\, h_z = \omega_z h_z^2 dm$. Для всего тела будем иметь

$$K_z = \int \omega_z h_z^2\, dm,$$

где интегрирование распространено на массу всего тела.

Проекция угловой скорости ω_z одинакова для всех точек тела, и, следовательно, ее можно вынести за знак интеграла:

$$K_z = \omega_z \int h_z^2\, dm.$$

Получившийся интеграл зависит только от характера распределения массы в теле и не зависит от его кинематического состояния. Он называется *моментом инерции тела относительно оси z* и обозначается символом I_z (в § 9.5 будет показано, что момент инерции тела представляет меру его инерции во вращательном движении):

$$I_z = \int h_z^2\, dm. \tag{9.3}$$

В этих обозначениях будем иметь

$$K_z = I_z \omega_z, \tag{9.4}$$

т. е. *момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на проекцию угловой скорости тела на ту же ось.*

§ 9.2. Краткие сведения о моментах инерции

Теории моментов инерции будет посвящена специальная глава XII. Здесь же мы весьма кратко остановимся на основных определениях и сообщим некоторые формулы, не останавливаясь на их выводах.

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы m этой точки на квадрат ее расстояния h до оси, т. е. величина mh^2. Моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма моментов инерции всех точек системы относительно той же оси.

Так, например, момент инерции материальной системы относительно оси z равен

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_{kz}^2,$$

где h_{kz} — расстояние от точки с номером k до оси z.

При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл (9.3).

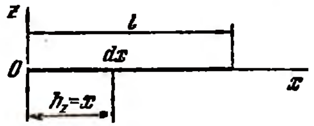
По определению момент инерции представляет существенно положительную величину. В нуль момент инерции может обратиться только в одном частном случае, когда все точки системы расположены на оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Размерность момента инерции в системе СИ равна кг·м², а в технической системе — кгс·м·с².

Для примера определим момент инерции однородного тонкого стержня массы M и длины l относительно оси z, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец (рис. 9.2).

Направим ось x вдоль стержня и выделим на нем элемент длины dx. Расстояние h_z от этого элемента до оси z равно x, масса единицы длины стержня равна M/l, а масса выделенного элемента $dm = (M/l)\,dx$. Внесем эти значения для h_z и dm в выражение (9.3) и учтем, что переменная интегрирования x изменяется от 0 до l. Тогда

$$I_z = \int h_z^2\,dm = \int_0^l x^2 \frac{M}{l}\,dx,$$



или, интегрируя,

$$I_z = {}^1\!/_3 Ml^2. \qquad (9.5)$$

Рис. 9.2

Таково значение момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец.

Момент инерции I_{Cz} однородного тонкого стержня длины l и массы M относительно оси z, проходящей перпендикулярно к стержню через его центр тяжести C, будет равен

$$I_{Cz} = {}^1\!/_{12} Ml^2. \qquad (9.6)$$

Не останавливаясь на выводе (см. § 12.3), заметим, что момент инерции однородного кругового цилиндра массы M и радиуса R относительно оси z цилиндра (рис. 9.3) определяется формулой

$$I_z = {}^1\!/_2 MR^2. \qquad (9.7)$$

Это выражение для момента инерции не зависит от высоты цилиндра H и поэтому оно справедливо и для однородного кругового диска.

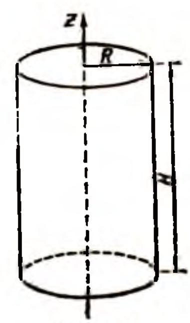


Рис. 9.3

Очень часто вводят *радиус инерции тела* относительно оси, понимая под ним расстояние ρ от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу M всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной оси равнялся моменту инерции тела относительно той же оси. По определению имеем

$$I = M\rho^2. \qquad (9.8)$$

Здесь M — масса материальной системы, I — ее момент инерции относительно данной оси, ρ — радиус инерции системы относительно этой же оси.

§ 9.3. Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы

Рассмотрим материальную систему, состоящую из n материальных точек. Мысленно освободимся от связей, заменим их действие реакциями и разобьем все силы (включая реакции связей) на внешние $\mathbf{F}_k^e$ и внутренние $\mathbf{F}_k^i$. Тогда все точки системы можно считать свободными и к каждой из них применима теорема об изменении момента количества движения (см. (3.10)):

$$\frac{d\mathbf{K}_{O1}}{dt} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1^e) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1^i),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\mathbf{K}_{On}}{dt} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n^e) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n^i).$$

Складывая почленно, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\mathbf{K}_{Ok}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^i).$$

В левой части равенства вынесем знак производной за знак суммы; в правой части равенства первая сумма равна главному моменту $\mathbf{M}_O^e$ всех внешних сил относительно центра O, а вторая сумма, на основании второго свойства внутренних сил, равна нулю (см. формулу (7.6)). Имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{K}_{Ok} = \mathbf{M}_O^e,$$

или, учитывая выражение (9.1),

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e. \tag{9.9}$$

Это уравнение представляет математическую запись теоремы об изменении момента количеств движения материальной системы: *полная производная по времени вектора момента количеств движения материальной системы, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил относительно того же центра.*

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат, начало которых совпадает с центром O, векторное равенство (9.9) эквивалентно трем скалярным:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \tag{9.10}$$

Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

1. *Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение момента количеств движения материальной системы* (они могут оказать косвенное влияние через внешние силы; см. § 7.2).

2. *Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то момент количеств движе-*

ния материальной системы относительно того же центра не изменяется по модулю и направлению.

Действительно, если $M_O^e = 0$, то равенство (9.9) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = 0;$$

отсюда

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O^0 = \text{const}, \qquad (9.11)$$

где $\mathbf{K}_O^0$ — начальное значение вектора $\mathbf{K}_O$.

3. *Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси* (например, оси x) *равен нулю, то момент количеств движения материальной системы относительно этой оси не изменяется в процессе движения.*

Если $M_x^e = 0$, то согласно первому равенству (9.10) будем иметь

$$\frac{dK_x}{dt} = 0;$$

отсюда

$$K_x = K_x^0 = \text{const}. \qquad (9.12)$$

Первые интегралы (9.11) и (9.12), определяющие второе и третье следствия, называются законами сохранения момента количеств движения материальной системы.

§ 9.4. Примеры и задачи

Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы имеет очень интересные и практически важные приложения. В этом параграфе мы рассмотрим примеры и задачи, иллюстрирующие применение теоремы и ее следствия, причем некоторые из них имеют самостоятельное значение.

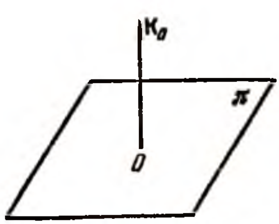


Рис. 9.4

1. **Плоскость Лапласа.** Солнечная система является изолированной (если пренебречь влиянием других звезд), и ее движение определяется только внутренними силами притяжения. Так как внешние силы отсутствуют, то на основании второго следствия момент количеств движения $\mathbf{K}_O$ всей Солнечной системы сохраняет постоянное направление относительно далеких «неподвижных» звезд. Поэтому сохраняет неизменное положение и плоскость π, перпендикулярная к вектору $\mathbf{K}_O$ (рис. 9.4). Эта плоскость (ее называют *плоскостью Лапласа*) имеет большое значение в астрономии, так как относительно нее ориентируют орбиты планет.

2. **Скамейка Н. Е. Жуковского.** Для демонстрации теоремы об изменении момента количеств движения материальной системы и ее следствий Н. Е. Жуковский построил прибор, состоящий из горизонтальной платформы, которая может вращаться вокруг вертикальной оси с пренебрежимо малым трением. Мы опишем два опыта, хорошо иллюстрирующих теорему.

а) В примере 1 § 8.3 было показано, что при отсутствии внешних сил человек не может изменить положения своего центра тяжести. Покажем, что, находясь в аналогичных условиях, человек может повернуться. Предположим, что человек стоит на скамейке Н. Е. Жуковского и держит над головой колесо или какой-нибудь другой предмет, который может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 9.5).

Будем считать, что вся система, состоящая из человека, платформы и колеса, сначала находилась в покое; затем внутренними силами колесо раскручивается (это можно сделать, например, второй рукой). Так как моменты всех внешних сил относительно вертикальной оси вращения равны нулю (силы тяжести параллельны

Рис. 9.5

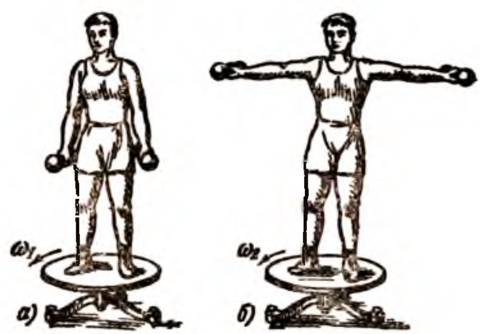


Рис. 9.6

оси вращения, а линии действия реакций опор платформы пересекают ее), то момент количеств движения K_z всей системы относительно этой оси должен сохранять постоянное значение, равное начальному:

$$K_z = K_z^1 + K_z^2 = 0, \tag{9.13}$$

где K_z^1 и K_z^2 — моменты количеств движения относительно оси z колеса и человека с платформой.

Равенство (9.13) должно сохраняться все время. Поэтому, если одно из слагаемых, например K_z^1, положительно, то второе слагаемое отрицательно. Это означает, что при вращении колеса в одном направлении человек вместе с платформой будет вращаться в обратном направлении. Если, повернув колесо на некоторый угол, затем прекратить его вращение, то платформа с человеком, повернувшись в обратном направлении на некоторый другой угол, также прекратит свое вращение.

В § 9.8 будет показано, как используется этот метод космонавтами для поворота и ориентации при свободном полете в космосе.

б) Второй опыт, хорошо демонстрируемый на скамейке Жуковского, состоит в следующем. Человек стоит на платформе, держа в руках гантели. Его раскручивают, после чего вращение происходит по инерции. Моменты внешних сил, действующих на систему «человек—платформа», относительно вертикальной оси вращения равны нулю. Поэтому момент количеств движения K_z системы относительно этой оси сохраняет постоянное значение. Предположим, что человек, держа руки с гантелями по швам, вращается с угловой скоростью ω_1 (рис. 9.6, *а*). Обозначим момент инерции всей системы в этом положении через I_1. Тогда согласно формуле (9.4) будем иметь $K_z = I_1\omega_1$. Если человек, расставив руки с гантелями, будет держать их на уровне плеч (рис. 9.6, *б*), то момент инерции всей системы относительно оси вращения z увеличится (увеличатся расстояния от гантелей до оси z). Обозначим новый момент инерции через I_2 и новую угловую скорость через ω_2. Согласно той же формуле (9.4) в новом положении $K_z = I_2\omega_2$. Так как момент количеств движения K_z относительно оси вращения не изменяется, то

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1.$$

Из этого равенства следует, что $\omega_2 < \omega_1$ (ибо $I_2 > I_1$). Таким образом, человек, поднимая руки до уровня плеч, уменьшает свою угловую скорость, а при опускании рук увеличивает ее.

Задача 9.1. Тележка D поворотного подъемного крана движется с постоянной по модулю скоростью u относительно стрелы BC крана. Мотор, вращающий кран, создает относительно оси вращения AB крана постоянный момент $M_{вр}$. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния s тележки D до оси AB, если масса тележки вместе с грузом равна m, а момент инерции крана (без тележки и груза) относительно оси вращения AB равен I. Вращение крана начинается в момент времени, когда тележка находилась на расстоянии s_0 от оси AB (рис. 9.7).

Рассмотрим систему, состоящую из вращающейся части крана и тележки с грузом. Для решения задачи применим теорему об изменении момента количеств движения системы относительно неподвижной оси вращения крана (см. третье уравнение (9.10)):

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \tag{9.14}$$

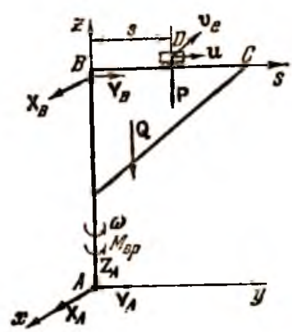


Рис. 9.7

На рассматриваемую систему действуют следующие внешние силы и моменты: сила тяжести тележки с грузом $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, сила тяжести крана $\mathbf{Q}$, вращающий момент $M_{вр}$ и реакция опор A и B крана (на рис. 9.7 показаны их составляющие). Моменты относительно оси z сил тяжести $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ и реакций опор A и B равны нулю (силы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ параллельны оси z, а линии действия реакций пересекают ее). Поэтому

$$M_z^e = M_{вр}. \tag{9.15}$$

Перейдем теперь к определению момента количеств движения K_z системы относительно оси вращения крана. Система состоит из двух движущихся тел: вращающегося крана и тележки с грузом (тележка и груз движутся одинаково, и их можно рассматривать как одно тело). Следовательно,

$$K_z = K_z^к + K_z^т, \tag{9.16}$$

где $K_z^к$ и $K_z^т$ — моменты количеств движения относительно оси z крана и тележки соответственно.

Кран представляет собой твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Поэтому согласно формуле (9.4) $K_z^к = I\omega_z$.

Тележка участвует в сложном движении. Ее относительная скорость равна $\mathbf{u}$, а модуль переносной скорости $\mathbf{v}_e$ равен $s\omega_z$, где s — расстояние от тележки до оси вращения (размерами тележки пренебрегаем). Абсолютная скорость тележки

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_e,$$

а количество ее движения

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}_e.$$

Следовательно,

$$K_z^{\text{т}} = K_{zr}^{\text{т}} + K_{ze}^{\text{т}},$$

где $K_{zr}^{\text{т}}$ и $K_{ze}^{\text{т}}$ — моменты количеств относительного и переносного движений тележки относительно оси z.

Так как вектор $m\mathbf{u}$ пересекает ось z, то $K_{zr}^{\text{т}} = 0$. Вектор количества переносного движения $m\mathbf{v}_e$ находится в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к оси z. Поэтому

$$K_z^{\text{т}} = K_{ze}^{\text{т}} = mv_e s,$$

или, учитывая, что $v_e = \omega_z s$,

$$K_z^{\text{т}} = m\omega_z s^2.$$

Внося найденные значения для $K_z^{\text{к}}$ и $K_z^{\text{т}}$ в (9.16), найдем

$$K_z = I\omega_z + m\omega_z s^2 = (I + ms^2)\,\omega_z. \tag{9.17}$$

Подставив выражения (9.15) и (9.17) в равенство (9.14), получим дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы

$$\frac{d}{dt}\left[(I + ms^2)\,\omega_z\right] = M_{\text{вр}}. \tag{9.18}$$

В этом уравнении величина s является переменной, причем $\dot{s} = u_s$, где u_s — проекция относительной скорости $\mathbf{u}$ тележки на ось стрелы BC ($u_s = u$, если тележка удаляется от оси вращения крана, и $u_s = -u$ в противном случае).

Так как по условию задачи u — величина постоянная, то

$$s - s_0 = u_s t.$$

Интегрируя уравнение (9.18), получим

$$(I + ms^2)\,\omega_z = M_{\text{вр}} t + C. \tag{9.19}$$

В начальный момент ($t = 0$) по условию задачи $\omega = 0$. Поэтому из формулы (9.19) следует, что $C = 0$. Заменим в равенстве (9.19) время t через расстояние s и найдем ω_z:

$$\omega_z = \frac{M_{\text{вр}}(s - s_0)}{u_s(I + ms^2)}. \tag{9.20}$$

Угловая скорость может быть выражена также как функция времени:

$$\omega_z = \frac{M_{\text{вр}} t}{I + m(s_0 + u_s t)^2}. \tag{9.21}$$

В частности, при неподвижной тележке $u_s = 0$

$$\omega_z = \frac{M_{\text{вр}} t}{I + ms_0^2}.$$

Из соотношений (9.20) и (9.21) видно, что знак ω_z совпадает со знаком $M_{\text{вр}}$. Это означает, что направление вращения крана всегда совпадает с направлением вращающего момента $M_{\text{вр}}$ — факт физически очевидный.

§ 9.5. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси обеспечивается специальными приспособлениями (подшипниками и подпятниками). Освободимся мысленно от связей и, заменив их соответствующими реакциями, будем в дальнейшем считать вращающееся тело свободным. Обозначим через I_z момент инерции этого тела относительно оси вращения и через ω_z — проекцию его угловой скорости на ту же ось. Тогда момент количеств движения K_z твердого тела относительно оси вращения будет равен (см. формулу (9.4))

$$K_z = I_z \omega_z.$$

Внося это выражение в третье равенство (9.10), получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^e. \tag{9.22}$$

При вычислении главного момента всех внешних сил, приложенных к твердому телу, относительно оси вращения нужно учитывать, что реакции идеальных (без трения) опор в уравнение (9.22) не войдут, так как линии их действия пересекают ось вращения и, следовательно, их моменты относительно этой оси равны нулю. Если же опоры создают моменты трения, то последние необходимо учитывать.

Сравним дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с дифференциальным уравнением прямолинейного поступательного движения твердого тела

$$M \frac{dv_z}{dt} = F_z^e. \tag{9.23}$$

Сравнивая уравнения (9.22) и (9.23), видим, что между ними можно провести глубокую аналогию: линейной скорости $\mathbf{v}$ поступательного движения тела соответствует его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ при вращении вокруг неподвижной оси (в уравнениях рассматриваются соответствующие проекции скоростей); силам, вызывающим поступательное движение тела, соответствуют моменты сил, вызывающих его вращение; массе тела в уравнении (9.23) соответствует момент инерции в уравнении (9.22). Так как масса тела представляет меру его инерции в поступательном движении, то из сделанного сопоставления следует, что *момент инерции тела представляет меру его инерции во вращательном движении.*

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (9.22) полезно сопоставить с формулировкой второго закона Ньютона: произведение массы точки на ее ускорение равно сумме всех сил, приложенных к точке. Аналогично можно прочитать и уравнение (9.22): *произведение момента инерции тела на его угловое ускорение равно сумме моментов всех сил, приложенных к телу.*

Задача 9.2. К ротору электромотора приложен вращающий момент $M_{\text{вр}}$, изменяющийся по закону $M_{\text{вр}} = M_0 - \varkappa\omega$, где M_0 и $\varkappa$ — некоторые положительные постоянные, характеризующие двигатель (постоянная $\varkappa$ называется *крутизной* характеристики мотора), а ω — угловая скорость ротора. Определить закон изменения угловой скорости ω в период разгона ротора, если его момент инерции относительно оси вращения равен I.

Совместим положительное направление оси вращения z с направлением вращающего момента $M_{\text{вр}}$. Тогда $M_z = M_{\text{вр}} = M_0 - \varkappa\omega$ и $\omega_z = \omega$ (направление вектора угловой скорости в период разгона ротора совпадает, конечно, с направлением вращающего момента).

Силы трения учтены постоянными M_0 и $\varkappa$, поэтому сумма моментов всех внешних сил, приложенных к ротору, будет равна $M_{\text{вр}} = M_0 - \varkappa\omega$. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела (9.22) в данном случае принимает вид

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_0 - \varkappa\omega. \tag{9.24}$$

Для определения закона изменения угловой скорости ω от времени нужно решить это дифференциальное уравнение. Для этого разделим переменные

$$\frac{I\,d\omega}{M_0 - \varkappa\omega} = dt$$

и проинтегрируем обе части равенства

$$-\frac{I}{\varkappa}\ln(M_0 - \varkappa\omega) = t + C.$$

В начале разгона при $t = 0$ $\omega = 0$. Подставляя это условие в полученный первый интеграл, найдем постоянную интегрирования

$$C = -\frac{I}{\varkappa}\ln M_0.$$

Внесем это значение для C в последнее равенство

$$-\frac{I}{\varkappa}\ln(M_0 - \varkappa\omega) = t - \frac{I}{\varkappa}\ln M_0.$$

Группируя члены с логарифмами, получим

$$\ln\frac{M_0 - \varkappa\omega}{M_0} = -\frac{\varkappa}{I}t. \tag{9.25}$$

Отсюда

$$1 - \frac{\varkappa}{M_0}\omega = e^{-\frac{\varkappa}{I}t}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{M_0}{\varkappa}\left(1 - e^{-\frac{\varkappa}{I}t}\right). \tag{9.26}$$

Это равенство и определяет закон изменения угловой скорости. С ростом времени t второй член в скобках стремится к нулю. Поэтому угловая скорость ротора, монотонно увеличиваясь, стремится к своему предельному значению, соответствующему установившемуся режиму:

$$\omega_{\text{уст}} = M_0/\varkappa. \tag{9.27}$$

Процесс разгона двигателя называется *переходным процессом* (его график показан на рис. 9.8). Переходной процесс считается для большинства электродвигателей законченным, когда угловая скорость ω достигнет 0,95 своего предельного значения. Продолжительность $t_{\text{пер}}$ переходного процесса легко определить, пользуясь формулой (9.25). Имеем

$$t = -\frac{I}{\varkappa}\ln\left(1 - \frac{\omega}{\omega_{\text{уст}}}\right). \tag{9.28}$$

При $\omega/\omega_{\text{уст}} = 0{,}95$ время $t = t_{\text{пер}}$. Следовательно,

$$t_{\text{пер}} = \frac{I}{\varkappa}\ln 20 \approx \frac{3I}{\varkappa}.$$

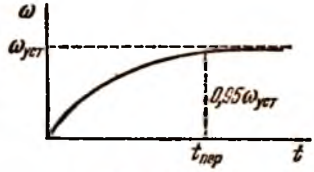


Рис. 9.8

Момент инерции ротора I и крутизну характеристики двигателя $\varkappa$ подбирают из условия, чтобы время переходного процесса находилось в заданных пределах (для электроприводов большинства механизмов $t_{\text{пер}}$ не превышает 2—3 с).

§ 9.6. Момент количеств движения системы, участвующей в сложном движении

Во многих случаях движение материальной системы относительно инерциальных осей рационально представить как сложное и разложить его на простейшие движения. При этом очень часто удается упростить вычисление момента количеств движения.

Введем подвижные координатные оси $Cx_2y_2z_2$, перемещающиеся поступательно относительно инерциальных осей $O_1x_1y_1z_1$; начало отсчета подвижных осей совместим с центром масс C материальной системы (рис. 9.9). Будем рассматривать движение материальной системы как относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$, так и относительно поступательно перемещающихся осей $Cx_2y_2z_2$. Пусть M_k — одна из точек материальной системы. Введем обозначения: m_k — масса точки M_k, $\mathbf{r}_k$ — ее радиус-вектор, проведенный из начала O_1 неподвижных осей, $\boldsymbol{\rho}_k$ — радиус-вектор той же точки, проведенный из начала C подвижных осей, $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор начала подвижных осей (т. е. центра масс) в системе $O_1x_1y_1z_1$. Очевидно, что

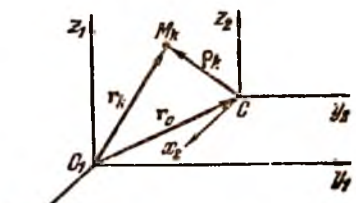


Рис. 9.9

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho}_k. \tag{9.29}$$

Из кинематики известно, что скорость $\mathbf{v}_k$ точки M_k относительно неподвижных осей складывается из переносной $\mathbf{v}_{ek}$ и относительной $\mathbf{v}_{rk}$ скоростей:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{ek} + \mathbf{v}_{rk}.$$

Учитывая, что подвижные оси перемещаются поступательно, будем иметь

$$\mathbf{v}_{ek} = \mathbf{v}_C, \quad \mathbf{v}_{rk} = \frac{d\boldsymbol{\rho}_k}{dt}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{rk}. \tag{9.30}$$

Момент количеств абсолютного движения $\mathbf{K}_{O1}$ материальной системы относительно неподвижного центра O_1 равен

$$\mathbf{K}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k. \tag{9.31}$$

Аналогичным образом определяется момент количеств относительного движения $\mathbf{K}_C^r$ материальной системы относительно начала C подвижных осей $Cx_2y_2z_2$ (абсолютная скорость $\mathbf{v}_k$ заменяется относительной скоростью $\mathbf{v}_{rk}$, абсолютный радиус-вектор $\mathbf{r}_k$ точки M_k — ее радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}_k$ в подвижной системе координат):

$$\mathbf{K}_C^r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_k \times m_k \mathbf{v}_{rk}. \tag{9.32}$$

Установим два тождества, которым должны удовлетворять радиусы-векторы $\boldsymbol{\rho}_k$ и относительные скорости $\mathbf{v}_{rk}$. Положение центра масс системы в осях $Cx_2y_2z_2$ определяется равенством (см. формулу (7.2))

$$\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k.$$

Так как начало подвижной системы координат совпадает с центром масс, то $\boldsymbol{\rho}_C = 0$; следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k = 0. \tag{9.33}$$

Дифференцируя это соотношение по времени и принимая во внимание, что $d\boldsymbol{\rho}_k/dt = \mathbf{v}_{rk}$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{rk} = 0. \tag{9.34}$$

Таким образом, движение любой материальной системы в поступательно перемещающихся осях, начало которых совпадает с центром масс системы, удовлетворяет тождествам (9.33) и (9.34).

Преобразуем теперь выражение для момента количеств абсолютного движения $\mathbf{K}_{O1}$. Для этого внесем в формулу (9.31) значения $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{v}_k$ из равенств (9.29) и (9.30):

$$\mathbf{K}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho}_k) \times m_k (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{rk}).$$

Раскроем в правой части скобки и разобьем все выражение на четыре суммы:

$$\mathbf{K}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_C \times m_k \mathbf{v}_C + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_k \times m_k \mathbf{v}_C + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_C \times m_k \mathbf{v}_{rk} + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_k \times m_k \mathbf{v}_{rk}.$$

Учтем следующие обстоятельства; а) множители $\mathbf{r}_C$ и $\mathbf{v}_C$ не зависят от индекса суммирования k, и их можно вынести за знак суммы; б) скалярный множитель m_k можно отнести к любому векторному множителю; в) последняя сумма в правой части в соответствии с (9.32) равна $\mathbf{K}_C^r$. На этом основании выражение для $\mathbf{K}_{O1}$ можно представить в виде

$$\mathbf{K}_{O1} = \mathbf{r}_C \times \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) \mathbf{v}_C + \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k\right) \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{rk} + \mathbf{K}_C^r.$$

Согласно тождествам (9.33) и (9.34) второе и третье слагаемые равны нулю, а $\sum_{k=1}^{n} m_k = M$, где M — масса всей системы. Следовательно,

$$\mathbf{K}_{O1} = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{v}_C + \mathbf{K}_C^r, \tag{9.35}$$

или

$$\mathbf{K}_{O1} = \mathbf{K}_{O1}(M\mathbf{v}_C) + \mathbf{K}_C^r. \tag{9.36}$$

Это равенство можно прочитать следующим образом: *момент количеств абсолютного движения* $\mathbf{K}_{O1}$ *относительно неподвижного центра* O_1 *равен сумме момента относительно того же центра количества движения центра масс системы, в предположении, что в нем сосредоточена вся ее масса, и момента относительно центра масс количеств относительного движения системы*, причем последнее движение рассматривается по отношению к поступательно перемещающимся координатным осям, начало которых совпадает с центром масс системы.

В проекциях на неподвижные оси координат векторное равенство (9.36) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= K_{x_1}(M\mathbf{v}_C) + K_{Cx_1}^r, \\ K_{y_1} &= K_{y_1}(M\mathbf{v}_C) + K_{Cy_1}^r, \\ K_{z_1} &= K_{z_1}(M\mathbf{v}_C) + K_{Cz_1}^r. \end{aligned} \tag{9.37}$$

Задача 9.3. Эпициклический механизм состоит из неподвижной шестерни *I*, кривошипа O_1C и сателлита *II* (рис. 9.10). Кривошип O_1C массы m_1 вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр O_1 шестерни *I* радиусом R. Считая сателлит *II* однородным диском массы m_2 и радиуса r, а кривошип однородным тонким стержнем длины $l = R + r$, определить момент количеств движения механизма относительно неподвижной оси вращения кривошипа.

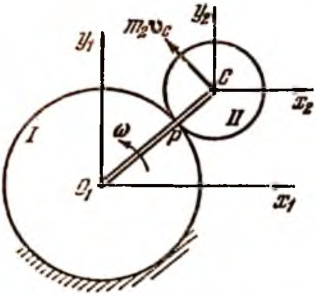


Рис. 9.10

Построим две системы координат: неподвижную $O_1x_1y_1z_1$ и поступательно перемещающуюся систему $Cx_2y_2z_2$, начало которой совпадает с центром тяжести сателлита *II*; координатные оси O_1z_1 и Cz_2 направлены на читателя. Так как шестерня *I* неподвижна, то момент количеств движения K_{z1} эпициклического механизма относительно неподвижной оси z_1 будет

$$K_{z_1} = K_{z_1}^{\text{кр}} + K_{z_1}^{\text{II}},$$

где $K_{z_1}^{\text{кр}}$ и $K_{z_1}^{\text{II}}$ — моменты количеств движения относительно оси O_1z_1 кривошипа и сателлита соответственно.

Кривошип представляет твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси O_1z_1. На основании формулы (9.4) имеем

$$K_{z_1}^{\text{кр}} = I_{z_1}^{\text{кр}}\omega,$$

где $\omega = \omega_z$ — проекция угловой скорости кривошипа на ось z_1, а $I_{z_1}^{\text{кр}}$ — его момент инерции относительно той же оси. Для однородного тонкого стержня согласно формуле (9.5)

$$I_{z_1}^{\text{кр}} = \frac{1}{3} m_1 l^2 = \frac{1}{3} m_1 (R + r)^2.$$

Следовательно,

$$K_{z_1}^{\text{кр}} = \frac{1}{3} m_1 (R + r)^2 \omega.$$

Подвижная шестерня участвует в сложном движении. Поэтому для вычисления момента количеств движения сателлита относительно оси O_1z_1 воспользуемся третьей формулой (9.37):

$$K_{z_1}^{\text{II}} = M_{z_1}(m_2\mathbf{v}_C) + K_{Cz_1}^{r}$$

Построим в центре тяжести C шестерни *II* вектор количества движения $m_2\mathbf{v}_C$ (см. рис. 9.10). Плечо вектора $m_2\mathbf{v}_C$ относительно оси O_1z_1 равно $l = R + r$. Следовательно,

$$M_{z_1}(m_2\mathbf{v}_C) = m_2 v_C (R + r).$$

Движение шестерни *II* относительно осей $Cx_2y_2z_2$ представляет вращение вокруг оси Cz_2. Поэтому согласно формуле (9.4)

$$K_{Cz_2}^{r} = I_{z_2}^{\text{II}}\omega_{\text{II}}.$$

В этом равенстве $I_{z_2}^{\text{II}} = {}^1/_2 m_2 r^2$ — момент инерции относительно оси Cz_2 шестерни *II* (см. формулу (9.7)) и ω_{II} — ее угловая скорость.

Внося $M_{z1}(m_2\mathbf{v}_C)$ и $K_{Cz_2}^{r}$ в выражение для $K_{z_1}^{\text{II}}$, получим

$$K_{z_1}^{\text{II}} = m_2 (R + r) v_C + {}^1/_2 m_2 r^2 \omega_{\text{II}}.$$

Для полного решения задачи нам осталось вычислить модуль скорости v_C центра тяжести C шестерни II и ее угловую скорость ω_{II}.

Точка C принадлежит одновременно и кривошипу O_1C. Поэтому $v_C = \omega(R+r)$. Мгновенный центр скоростей P шестерни II совпадает с точкой касания обеих шестерней. Скорость точки C, как точки шестерни II, определяется равенством $v_C = r\omega_{II}$. Сравнивая оба выражения для скорости точки C, найдем $\omega_{II} = \frac{R+r}{r}\omega$.

Подставим значения v_C и ω_{II} в выражение для $K_{z_1}^{II}$ и сгруппируем члены:

$$K_{z_1}^{II} = m_2(R+r)(R+{}^3/_2 r)\,\omega.$$

Теперь найдем момент количеств движения K_{z_1} всего механизма относительно оси O_1z_1:

$$K_{z_1} = (R+r)\left[{}^1/_3 m_1(R+r) + m_2(R+{}^3/_2 r)\right]\omega.$$

Это выражение можно записать в форме (9.4):

$$K_{z_1} = I^{\bullet}_{\text{пр}}\omega, \tag{9.38}$$

где величина

$$I^{\bullet}_{\text{пр}} = (R+r)\left[{}^1/_3 m_1(R+r) + m_2(R+{}^3/_2 r)\right] \tag{9.39}$$

называется *приведенным* к оси O_1z_1 моментом инерции механизма.

Заметим, что приведение момента инерции механизма к одной и той же оси можно производить различными методами. В данном примере это приведение выполнено при вычислении момента количеств движения системы.

§ 9.7. Теорема об изменении момента количеств относительного движения материальной системы

Доказанная в § 9.3 теорема относилась к абсолютному движению, т. е. к движению материальной системы относительно инерциальных осей. Кроме того, предполагалось, что точка, относительно которой вычислялся момент количеств движения, неподвижна. Эти ограничения вносят известные неудобства при изучении вращательных движений тел, не имеющих неподвижных точек (самолеты, корабли, ракеты, приборы, установленные на них и т. п.). В этом параграфе мы рассмотрим, какой вид принимает теорема об изменении момента количеств движения для относительного движения.

Будем изучать движение материальной системы относительно подвижных осей $O_2x_2y_2z_2$, перемещающихся поступательно относительно инерциальных осей $O_1x_1y_1z_1$. Напомним, что все теоремы динамики, доказанные для материальной точки, движущейся в инерциальной системе отсчета, остаются справедливыми для ее относительного движения, если только к силам, действующим на точку, присоединить переносную и кориолисову силы инерции (см. главу VI).

Подвижные оси $O_2x_2y_2z_2$ перемещаются по условию поступательно. Поэтому ускорения Кориолиса $\mathbf{w}_{kc}$ и соответствующие силы инерции, $m_k\mathbf{w}_{kc}$, равны нулю. Кроме того, при поступательном движении подвижных осей $O_2x_2y_2z_2$ переносные ускорения всех точек одинаковы и равны ускорению $\mathbf{w}_{O_2}$:

$$\mathbf{w}_{ke} = \mathbf{w}_{O_2}.$$

Следовательно, переносная сила инерции k-й точки определяется равенством

$$\mathbf{J}_{ke} = -m_k\mathbf{w}_{ke} = -m_k\mathbf{w}_{O_2}, \tag{9.40}$$

где m_k — масса точки.

На рис. 9.11 показаны координатные оси $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, ускорение полюса $\mathbf{w}_{O_2}$ и k-я точка материальной системы, к внешней $\mathbf{F}_k^e$ и внутренней $\mathbf{F}_k^i$ силам которой присоединена переносная сила инерции $-m_k\mathbf{w}_{O_2}$.

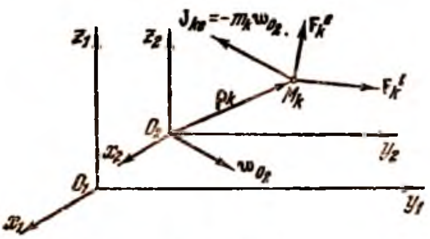


Рис. 9.11

Теперь координатные оси $O_2x_2y_2z_2$ можно считать неподвижными. В применении к теореме об изменении момента количеств движения это означает, что в равенстве (9.9) момент количеств абсолютного движения $\mathbf{K}_{O_1}$, вычисленный относительно неподвижной точки, нужно заменить на момент количеств относительного движения $\mathbf{K}'_{O_2}$, вычисленный относительно начала O_2 подвижных осей $O_2x_2y_2z_2$, и к моментам внешних сил нужно присоединить моменты переносных сил инерции всех точек системы:

$$\frac{d\mathbf{K}'_{O_2}}{dt} = \mathbf{M}^e_{O_2} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_2}(\mathbf{J}_{ke}). \tag{9.41}$$

Согласно (9.40) имеем (см. рис. 9.11)

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_2}(\mathbf{J}_{ke}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_k \times (-m_k\mathbf{w}_{O_2}).$$

Скалярный множитель m_k отнесем к вектору $\boldsymbol{\rho}_k$, а общий множитель — $\mathbf{w}_{O_2}$ вынесем за знак суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_2}(\mathbf{J}_{ke}) = \sum_{k=1}^{n} m_k\boldsymbol{\rho}_k \times (-\mathbf{w}_{O_2}).$$

В соответствии с формулой (7.2) сумма, стоящая перед $(-\mathbf{w}_{O_2})$, равна $M\boldsymbol{\rho}_C$, где M — масса всей системы, а $\boldsymbol{\rho}_C$ — радиус-вектор центра масс в подвижной системе координат. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_2}(\mathbf{J}_{ke}) = M\boldsymbol{\rho}_C \times (-\mathbf{w}_{O_2}) = \boldsymbol{\rho}_C \times (-M\mathbf{w}_{O_2}).$$

Произведение $-M\mathbf{w}_{O_2}$ назовем переносной силой инерции центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса M всей системы. (При поступательном движении осей $O_2x_2y_2z_2$ переносное ускорение центра масс C равно ускорению полюса $\mathbf{w}_{O_2}$.) Будем считать, что сила инерции $-M\mathbf{w}_{O_2}$ приложена в центре масс. Тогда произведение $\boldsymbol{\rho}_C \times (-M\mathbf{w}_{O_2})$ представляет собой момент силы $-M\mathbf{w}_{O_2}$ относительно подвижного центра O_2:

$$\mathbf{M}_{O_2}(-M\mathbf{w}_{O_2}) = \boldsymbol{\rho}_C \times (-M\mathbf{w}_{O_2}). \tag{9.42}$$

Учитывая введенные обозначения, равенству (9.41) можно придать следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{K}_{O_2}^r}{dt} = \mathbf{M}_{O_2}^e + \mathbf{M}_{O_2}(-M\mathbf{w}_{O_2}). \tag{9.43}$$

Это уравнение представляет математическую запись в векторной форме теоремы об изменении момента количеств относительного движения. В проекциях на поступательно перемещающиеся оси x_2, y_2, z_2 оно дает следующие три скалярных уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{dK_{x_2}^r}{dt} &= M_{x_2}^e + M_{x_2}(-M\mathbf{w}_{O_2}),\\
\frac{dK_{y_2}^r}{dt} &= M_{y_2}^e + M_{y_2}(-M\mathbf{w}_{O_2}),\\
\frac{dK_{z_2}^r}{dt} &= M_{z_2}^e + M_{z_2}(-M\mathbf{w}_{O_2}).
\end{aligned} \tag{9.44}$$

В частном, но весьма важном случае, когда начало O_2 поступательно перемещающихся осей совмещено с центром масс C материальной системы, уравнение (9.43) существенно упрощается. Действительно, в этом случае $\boldsymbol{\rho}_C = 0$,

$$\mathbf{M}_{O_2}(-M\mathbf{w}_{O_2}) = \boldsymbol{\rho}_C \times (-M\mathbf{w}_{O_2}) = 0$$

и уравнение (9.13) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{K}_C^r}{dt} = \mathbf{M}_C^e. \tag{9.45}$$

В проекциях на поступательно перемещающиеся оси x_2, y_2, z_2 будем иметь

$$\frac{dK_{x_2}^r}{dt} = M_{x_2}^e, \quad \frac{dK_{y_2}^r}{dt} = M_{y_2}^e, \quad \frac{dK_{z_2}^r}{dt} = M_{z_2}^e. \tag{9.46}$$

Сравним уравнение (9.9) с уравнениями (9.43) и (9.45). В первом из них при вычислении момента количеств движения $\mathbf{K}_O$ учитываются абсолютные скорости точек материальной системы и за центр выбирается неподвижная точка. В уравнениях (9.43) и (9.45) при вычислении момента количеств движения $\mathbf{K}_{O_2}^r$ учитываются скорости точек материальной системы относительно поступательно перемещающихся осей $O_2x_2y_2z_2$ (или $Cx_2y_2z_2$) и за центр выбирается начало подвижной системы координат.

В правой части уравнения (9.43) к моментам внешних сил нужно присоединить момент относительно подвижного центра переносной силы инерции $-M\mathbf{w}_{O_1}$.

Отметим, что если за полюс выбрать центр масс, то теорема об изменении момента количеств относительного движения (уравнение (9.45)) по своей форме полностью совпадает с аналогичной теоремой об изменении момента количеств абсолютного движения (уравнение (9.9)).

Остановимся подробнее на уравнении (9.45). Так как оно по своей форме в точности совпадает с уравнением (9.9), то *движение материальной системы относительно ее центра масс происходит так же, как если бы последний был неподвижен*. Все следствия теоремы моментов количеств движения относительно неподвижной точки остаются справедливыми и для момента количеств движения относительно центра масс. В частности, если сумма моментов всех внешних сил относительно центра масс равна нулю, то момент количеств движения $\mathbf{K}_C^r$ сохраняет постоянную величину и направление; если сумма моментов всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс и перемещающейся поступательно, равна нулю, то момент количеств движения относительно этой оси сохраняет свое первоначальное значение.

§ 9.8. Примеры и задачи

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих доказанные теоремы.

Пример 1. *Поворот космонавта.* Предположим, что космонавт вышел из космического корабля и совершает свободный полет. Будем считать, что космонавт отделился от корабля без вращения и что силы тяготения небесных тел (например, Земли), действующие на космонавта, сводятся к одной равнодействующей $\mathbf{F}$, проходящей через его центр масс C. Тогда момент сил тяготения относительно центра масс C будет равен нулю и, следовательно, момент количеств движения относительно точки C сохраняет постоянную величину и направление. Возникает вопрос: может ли космонавт без применения реактивных микродвигателей повернуться в нужном направлении?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним первый опыт на скамейке Жуковского, в котором поворот человека достигался поворотом колеса (или руки). Так как движение материальной системы относительно центра масс происходит по тем же законам, что и относительно неподвижной точки, то любая прямая, проходящая через центр масс космонавта и перемещающаяся поступательно, играет ту же роль, что и ось скамейки Жуковского. Поэтому поворотом руки космонавт может повернуть свое тело в противоположном направлении.

Пример 2. *Изменение угловой скорости спортсмена.* Рассмотрим вращение спортсмена, совершающего прыжок с вышки в воду. Во время прыжка на спортсмена действует одна внешняя сила (сопротивлением воздуха пренебрегаем) — сила тяжести. Эта сила приложена к центру масс C спортсмена и, следовательно, она не создает момента относительно точки C. Поэтому момент количества движения K_{Cz}^r спортсмена относительно горизонтальной оси z, проходящей через его центр масс перпендикулярно к плоскости движения, остается без изменения:

$$K_{Cz}^r = \text{const}.$$

Движение спортсмена относительно поступательно перемещающейся оси z представляет собой вращение вокруг этой оси. Тогда согласно формуле (9.4)

$$K_{Cz}^r = I_{Cz}\omega,$$

где I_{Cz} — момент инерции относительно горизонтальной оси z, а ω — угловая скорость спортсмена (направление оси z выберем так, чтобы $\omega = \omega_z$).

В начале прыжка спортсмен, отталкиваясь от трамплина, сообщает телу угловую скорость ω_1, имея момент инерции $I_{Cz} = I_1$. Затем в процессе прыжка он группируется (складывается), уменьшая тем самым момент инерции $I_{Cz} = I_2$. Учитывая, что $K_{Cz}^r = \text{const}$, получим

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1.$$

Так как $I_2 < I_1$, то $\omega_2 > \omega_1$, т. е. в середине прыжка, когда спортсмен группируется, его угловая скорость увеличивается.

Перед входом в воду спортсмен снова выпрямляется, увеличивая момент инерции I и уменьшая тем самым свою угловую скорость.

Весь процесс изменения угловой скорости спортсмена за счет изменения его момента инерции совпадает со вторым опытом на скамейке Жуковского (см. § 9.4). Роль оси скамейки играет горизонтальная ось z, проходящая через центр масс спортсмена.

Пример 3. *Методы стабилизации вращения космического аппарата.* В силу различных случайных причин космический аппарат при отделении от последней ступени ракеты получает небольшую угловую скорость Ω_0. Для выполнения различных работ (фотографирования Земли и небесных тел, изменения орбиты, стыковки с другим космическим аппаратом, торможения перед посадкой и т. п.) космический аппарат необходимо надлежащим образом ориентировать, для чего прежде всего необходимо прекратить его вращение.

Рассмотрим два метода, с помощью которых можно остановить вращательное движение аппарата.

а) Первый метод основан на введении реактивного момента M_p. Предположим, что космический аппарат вращается вокруг оси Cz_2, проходящей через его центр масс и перемещающейся поступательно относительно инерциальных осей координат. Два параллельно расположенных сопла реактивного микродвигателя устанавливаются на некотором расстоянии друг от друга (на рис. 9.12 ось Cz_2 направлена на читателя, а сопла A и B находятся в плоскости рисунка). При отделении продуктов сгорания создается момент M_p (см. главу XI), управляя которым можно сначала остановить вращение космического аппарата, а затем повернуть его таким образом, чтобы

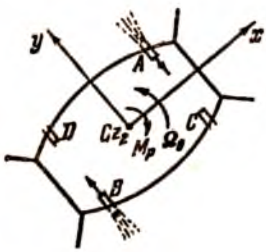


Рис. 9.12

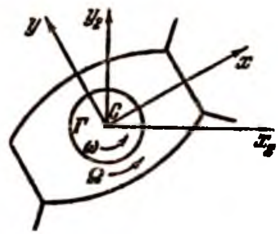


Рис. 9.13

ось Cx, жестко связанная с ним, приняла нужное направление (например, была бы направлена по вектору скорости центра масс или на какое-нибудь небесное тело).

Так как вращение космического аппарата может происходить вокруг любой оси, то он должен иметь три пары таких реактивных двигателей, расположенных в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

б) Второй метод основан на применении вращающихся масс. Пусть по-прежнему космический аппарат вращается с угловой скоростью Ω вокруг поступательно перемещающейся оси Cz_2, проходящей через центр масс аппарата C. Будем считать, что силы притяжения, действующие на космический аппарат, приводятся к одной равнодействующей $\mathbf{F}$, проходящей через точку C. Тогда момент внешних сил (сил притяжения) относительно центра C будет равен нулю.

Поместим внутри космического аппарата небольшой маховичок Г. Для простоты будем считать, что жестко связанная с аппаратом ось вращения маховичка Г совмещена с осью Cz_2 (рис. 9.13).

Рассмотрим систему, состоящую из маховичка Г и космического аппарата (без маховичка). Так как сумма моментов всех внешних сил, относительно поступательно перемещающейся оси Cz_2 равна нулю, то момент количеств движения всей системы относительно этой оси сохраняет постоянное значение. Поэтому, если заставить вращаться маховичок Г в ту же сторону, что и космический аппарат, вращение последнего начнет тормозиться.

Остановимся на этом явлении несколько подробнее.

Система состоит из двух тел, вращающихся вокруг поступательно перемещающейся оси Cz_2. Момент количеств движения всей системы $K^r_{Cz_2}$ относительно оси Cz_2 будет равен сумме моментов количеств движения относительно этой же оси космического аппарата и маховичка Г. В соответствии с формулой (9.4) будем иметь

$$K^r_{Cz_2} = I_0\Omega + I(\Omega + \omega),$$

где I_0 и I — моменты инерции относительно оси Cz_2 космического аппарата (без маховичка Г) и маховичка Г соответственно, Ω — угловая скорость космического аппарата относительно системы осей $Cx_2y_2z_2$, перемещающихся поступательно в инерциальной системе отсчета, и ω — угловая скорость маховичка Г относительно космического аппарата; при этом предполагаем, что оба тела вращаются в одну сторону, $\Omega_{z_2} = \Omega$ и $\omega_{z_2} = \omega$.

Так как $K^r_{Cz_2} = \text{const}$, то

$$I_0\Omega + I(\Omega + \omega) = I_0\Omega_0 + I(\Omega_0 + \omega_0). \tag{9.47}$$

Здесь Ω_0 и ω_0 — начальные значения Ω и ω.

Будем отсчитывать время с момента запуска маховичка. Тогда $\omega_0 = 0$. Решим теперь полученное уравнение относительно Ω:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{I}{I_0 + I}\omega. \tag{9.48}$$

Положив $\Omega = 0$, найдем

$$\omega = \frac{I_0 + I}{I}\Omega_0. \tag{9.49}$$

Таким образом, для того чтобы остановить вращение космического аппарата ($\Omega = 0$), маховичку Г необходимо сообщить угловую скорость ω, определяемую равенством (9.49), причем вращение маховичка должно происходить в ту же сторону, что и вращение космического аппарата (знаки ω и Ω_0 одинаковы). Отметим, что торможение космического корабля происходит не за счет сил трения, а путем использования динамического эффекта, при котором осуществляется перераспределение угловых скоростей тел, входящих в систему. Конечно, так же как и в первом методе, на космическом аппарате нужно установить три маховичка, оси вращения которых должны быть взаимно перпендикулярны.

Первый способ стабилизации, в отличие от второго, требует одновременной затраты энергии. В этом состоит основное его преимущество.

Покажем, что с помощью маховичков космический аппарат можно повернуть на заданный угол.

Предположим, что до запуска маховичка Г космический аппарат не вращался ($\Omega_0 = 0$). Тогда равенство (9.47) примет вид ($\omega_0 = 0$)

$$(I_0 + I)\Omega + I\omega = 0,$$

или

$$(I_0 + I)\frac{d\psi}{dt} + I\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Здесь ψ — угол поворота космического аппарата, отсчитываемый в поступательно перемещающейся системе отсчета Cx_2y_2, а φ — угол поворота маховичка относительно аппарата.

Интегрируя последнее равенство, получим

$$(I_0 + I)(\psi - \psi_0) + I(\varphi - \varphi_0) = 0,$$

где ψ_0 и φ_0 — начальные значения углов ψ и φ. Отсюда

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{I_0 + I}{I}(\psi - \psi_0),$$

т. е. для того, чтобы повернуть космический аппарат на угол $\psi - \psi_0$, нужно повернуть маховичок в противоположную сторону на угол $\frac{I_0 + I}{I}(\psi - \psi_0)$.

Задача 9.4. Для поворота космического аппарата используется электродвигатель-маховик, уравнение вращения которого на движущемся аппарате имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{T}\omega = u, \tag{9.50}$$

где ω — относительная угловая скорость ротора электродвигателя (маховика), T — его постоянная времени *), u — управляющее воздействие, принимающее значения $\pm u_0$.

Определить продолжительность разгона t_1, когда $u = u_0$, и торможения t_2 ($u = -u_0$) маховика, если первоначально невращающийся космический аппарат при неподвижном маховике требуется повернуть на заданный угол ψ и остановить. Ось вращения маховика проходит через центр масс космического аппарата; движение считать плоским. Моменты инерции маховика и аппарата относительно общей оси вращения соответственно равны I и I_0.

Интегрируя уравнение (9.50) при $u = u_0 = \text{const}$ (период разгона) и начальных условиях: $\omega = 0$ при $t = 0$, получим (см. решение уравнения (8.25))

$$\omega = Tu_0\left(1 - e^{-t/T}\right) \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{9.51}$$

В конце разгона угловая скорость маховика ω_1 будет равна

$$\omega_1 = Tu_0\left(1 - e^{-t_1/T}\right). \tag{9.52}$$

Интегрируя уравнение (9.50) при $u = -u_0$ (период торможения) и учитывая, что $\omega = \omega_1$ при $t = t_1$, получим (см. решение (8.32))

$$\omega = -Tu_0 + (\omega_1 + Tu_0)e^{-(t-t_1)/T} \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2). \tag{9.53}$$

В конце торможения маховик останавливается. Внося в равенство (9.53) $\omega = 0$, $t = t_1 + t_2$, найдем

$$e^{-t_2/T} = \frac{Tu_0}{\omega_1 + Tu_0}. \tag{9.54}$$

В условиях задачи космический аппарат и маховик должны вращаться в разные стороны, поэтому из уравнения моментов будем иметь

$$I_0\Omega + I(\Omega - \omega) = 0;$$

при этом учтено, что в начальный момент $\Omega = \omega = 0$ (Ω — угловая скорость космического аппарата). Полагая $\Omega = d\psi/dt$, найдем

$$\frac{I_0 + I}{I}\frac{d\psi}{dt} = \omega$$

или

$$\frac{I_0 + I}{I}\psi = \int_0^{t_1+t_2} \omega\, dt, \tag{9.55}$$

где ψ — заданный угол поворота аппарата.

---

*) Постоянный параметр T имеет размерность времени t. В теории автоматического регулирования и теории управления такие параметры называются постоянными времени.

Разобьем промежуток интегрирования $(0,\ t_1+t_2)$ на два промежутка: $(0,\ t_1)$ и $(t_1,\ t_1+t_2)$. В первом промежутке ω определяется равенством (9.51), а во втором — равенством (9.53). Следовательно, равенство (9.55) принимает вид

$$\frac{I_0+I}{I}\psi=\int_0^{t_1} Tu_0\left(1-e^{-t/T}\right)dt+\int_{t_1}^{t_1+t_2}\left[-Tu_0+(\omega_1+Tu_0)e^{-(t-t_1)/T}\right]dt,$$

или, после интегрирования,

$$\frac{I_0+I}{I}\psi=Tu_0\left[t_1+T\left(e^{-t_1/T}-1\right)\right]-Tu_0t_2-T(\omega_1+Tu_0)\left(e^{-t_2/T}-1\right).$$

Пользуясь (9.52) и (9.54), найдем из последнего равенства

$$t_1=\tau+t_2, \tag{9.56}$$

где

$$\tau=\frac{I_0+I}{ITu_0}\psi. \tag{9.57}$$

Внесем значение t_1 из (9.56) в равенство (9.52) и полученное значение для ω_1 подставим в (9.54). Тогда после сокращения на Tu_0 получим

$$e^{-t_2/T}=\frac{1}{2-e^{-(t_2+\tau)/T}};$$

отсюда

$$e^{-\tau/T}e^{-2t_2/T}-2e^{-t_2/T}+1=0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно $e^{-t_2/T}$. Имеем

$$e^{-t_2/T}=e^{\tau/T}\left(1-\sqrt{1-e^{-\tau/T}}\right)$$

(перед радикалом взят знак «минус», так как $e^{-t_2/T}<1$).

Последнее равенство преобразуем к следующему виду:

$$e^{t_2/T}=\frac{e^{-\tau/T}}{1-\sqrt{1-e^{-\tau/T}}},$$

или, умножая и деля на сопряженное выражение,

$$e^{t_2/T}=1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}}.$$

Логарифмируя это равенство, найдем t_2, затем из (9.56) получим t_1:

$$t_1=\tau+T\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}}\right),\quad t_2=T\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}}\right). \tag{9.58}$$

Эти равенства определяют время, в течение которого электродвигатель-маховик должен работать в режиме разгона ($u=u_0$) и режиме торможения ($u=-u_0$) для того, чтобы повернуть космический аппарат на заданный угол ψ.

Глава X

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 10.1. Кинетическая энергия материальной системы и способы ее вычисления

Как известно, кинетической энергией одной материальной точки называется половина произведения массы m точки на квадрат ее скорости. *Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий всех точек, входящих в систему.* Обозначается кинетическая энергия символом T. По определению имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_kv_k^2. \tag{10.1}$$

Стоящие в этом выражении скорости v_k точек материальной системы определяются относительно инерциальной системы отсчета.

Во многих случаях движение материальной системы относительно инерциальных осей целесообразно представить как сложное и разложить его на простейшие движения. При этом очень часто удается упростить вычисление кинетической энергии системы.

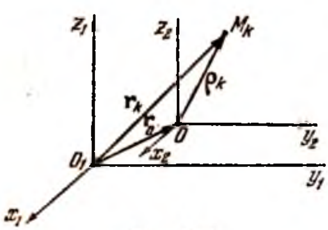


Рис. 10.1

Введем подвижные координатные оси $Ox_2y_2z_2$, перемещающиеся поступательно относительно инерциальных осей $O_1x_1y_1z_1$. Будем рассматривать движение материальной системы как относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$, так и относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_2y_2z_2$. Пусть M_k — одна из точек материальной системы массы m_k. Введем обозначения: $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор точки M_k, проведенный из начала O_1 неподвижных осей, $\boldsymbol{\rho}_k$ — радиус-вектор той же точки, проведенный из начала O подвижных осей, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор начала подвижных осей в системе $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 10.1).

В соответствии с формулой (9.30)

$$\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_O+\mathbf{v}_{kr}, \tag{10.2}$$

где $\mathbf{v}_k$ — скорость точки M_k, $\mathbf{v}_O$ — скорость начала O подвижных осей, $\mathbf{v}_{kr}$ — скорость точки M_k относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_2y_2z_2$.

Под кинетической энергией относительного движения будем понимать выражение

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_kv_{kr}^2, \tag{10.3}$$

получающееся из (10.1) заменой абсолютной скорости $\mathbf{v}_k$ точки M_k ее относительной скоростью $\mathbf{v}_{kr}$.

Учтем теперь, что скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля, т. е. $\mathbf{a}^2 = a^2$. Поэтому выражение (10.1) для кинетической энергии можно записать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k^2,$$

или, пользуясь равенством (10.2),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (\mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{kr})^2.$$

Возведем скобку в квадрат и разобьем сумму на три части:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (\mathbf{v}_O^2 + 2\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{kr} + \mathbf{v}_{kr}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_O^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{kr} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kr}^2.$$

Последняя сумма равна кинетической энергии T_r относительного движения; в первой и второй суммах множители $\mathbf{v}_O^2$ и $\mathbf{v}_O$ не зависят от индекса суммирования и их можно вынести за знаки сумм:

$$T = \frac{1}{2} v_O^2 \sum_{k=1}^{n} m_k + \mathbf{v}_O \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{kr} + T_r.$$

Выражение $\sum_{k=1}^{n} m_k$ равно массе всей системы M, а $\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{kr} = M\mathbf{v}_{Cr}$, где $\mathbf{v}_{Cr}$ — скорость центра масс C относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_2y_2z_2$. Докажем последнее утверждение.

В соответствии с формулой (7.2) имеем

$$\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k,$$

где $\boldsymbol{\rho}_C$ — относительный радиус-вектор центра масс.

Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\boldsymbol{\rho}_k}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_{Cr} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_{kr},$$

что и доказывает справедливость сделанного замечания.

На этом основании последнее выражение для кинетической энергии можно привести к следующему виду:

$$T = {}^1/_2 M v_O^2 + M\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{Cr} + T_r. \qquad (10.4)$$

Если начало подвижных осей O совпадает с центром масс C системы, то $v_O = v_C$ и $v_{Cr} = 0$. В этом случае последнее равенство упрощается:

$$T = {}^1/_2 M v_C^2 + T_{Cr}. \tag{10.5}$$

Словами его можно прочитать следующим образом (*теорема Кенига*): *кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении складывается из кинетической энергии* (${}^1/_2 M v_C^2$) *центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии* T_{Cr} *системы в ее движении относительно поступательно перемещающихся в инерциальном пространстве вместе с центром масс осей* $Cx_2y_2z_2$.

В следующем параграфе мы рассмотрим, как используются полученные формулы для определения кинетической энергии материальной системы.

§ 10.2. Кинетическая энергия твердого тела

Очень часто материальная система представляет твердое тело или совокупность твердых тел. В связи с этим нужно уметь определять кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

Так как твердое тело рассматривается как непрерывно распределенная масса, то все суммы, входящие в выражения для кинетической энергии материальной системы, переходят в интегралы, а масса m_k отдельной точки заменяется дифференциалом dm. Поэтому для твердого тела формула (10.1) примет вид

Рис. 10.2

$$T = \frac{1}{2}\int v^2\,dm, \tag{10.6}$$

где интегрирование производится по массе всего тела.

1. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно. При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек одинаковы (рис. 10.2). Вынося v^2 в формуле (10.6) за знак интеграла, получим

$$T = \frac{1}{2} v^2 \int dm,$$

или, учитывая, что $\int dm = M$, где M — масса всего тела,

$$T = \frac{1}{2} M v^2. \tag{10.7}$$

Таким образом, *кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.*

Формула (10.7) применима также для случая, когда скорости всех точек материальной системы равны между собой по модулю. Например, по такой формуле можно вычислить кинетическую энергию ремня, участвующего в передаче вращения от одного шкива к другому.

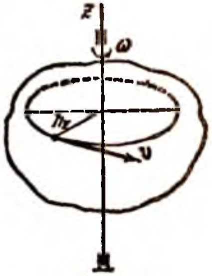


Рис. 10.3

2. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Модуль скорости любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен ωh_z, где ω — модуль угловой скорости твердого тела, а h_z — расстояние от точки до оси вращения z (рис. 10.3). Подставляя в формулу (10.6) значение скорости точки $v = \omega h_z$, получим

$$T = \frac{1}{2}\int \omega^2 h_z^2\, dm,$$

или, вынося за знак интеграла ω^2 (угловая скорость одинакова для всех точек тела и от переменной интегрирования не зависит),

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \int h_z^2\, dm.$$

Полученный интеграл согласно формуле (9.3) представляет момент инерции тела I_z относительно оси вращения. Следовательно,

$$T = {}^1/_2 I_z\omega^2, \qquad (10.8)$$

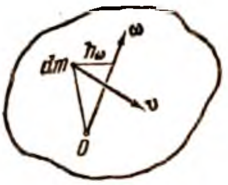


Рис. 10.4

т. е. кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

3. Кинетическая энергия твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. При сферическом движении твердого тела модуль скорости любой его точки M определяется равенством (рис. 10.4)

$$v = \omega h_\omega,$$

где ω — угловая скорость тела, а h_ω — расстояние от точки M тела до его мгновенной оси вращения. Сравнивая с предыдущим случаем, когда $v = \omega h_z$, получим выражение для кинетической энергии твердого тела при его сферическом движении

$$T = {}^1/_2 I_\omega\omega^2, \qquad (10.9)$$

где I_ω — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

Заметим, что, несмотря на внешнее сходство формул (10.8) и (10.9), между ними имеется и существенное различие. Положение оси вращения z неизменно относительно тела, поэтому момент инерции I_z в формуле (10.8) с течением времени не меняется. Положение мгновенной оси вращения в общем случае меняется относительно тела, вследствие чего момент инерции в формуле (10.9) есть величина переменная.

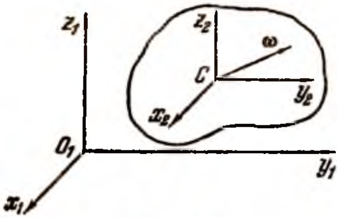


Рис. 10.5

4. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося произвольным образом. Пусть твердое тело движется произвольным образом относительно инерциальных осей. Введем поступательно перемещающуюся систему координат $Cx_2y_2z_2$, начало которой совместим с центром масс C тела, и воспользуемся теоремой Кенига (формула (10.5)):

$$T = {}^1/_2 Mv_C^2 + T_{Cr}.$$

Движение тела относительно поступательно перемещающихся осей $Cx_2y_2z_2$ представляет собой вращение с угловой скоростью ω (рис. 10.5). Поэтому кинетическая энергия относительного движения определится формулой (10.9):

$$T_{Cr} = {}^1/_2 I_{C\omega}\omega^2,$$

где $I_{C\omega}$ — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс C и совпадающей с вектором угловой скорости ω.

Подставляя значение T_{Cr} в выражение для T, получим

$$T = {}^1/_2 Mv_C^2 + {}^1/_2 I_{C\omega}\omega^2. \tag{10.10}$$

Это равенство представляет математическую запись теоремы Кенига для свободного твердого тела, которую можно прочитать следующим образом: *кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии в его движении относительно центра масс.*

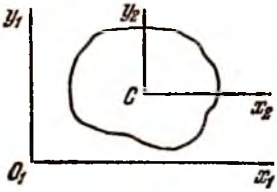


Рис. 10.6

В общем случае момент инерции $I_{C\omega}$ представляет переменную величину.

5. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении. При плоском движении твердого тела вектор угловой скорости ω всегда перпендикулярен к плоскости движения, совпадая с поступательно перемещающейся координатной осью Cz_2 (на рис. 10.6 оси O_1z_1 и Cz_2 не показаны).

Заменив в моменте инерции $I_{C\omega}$ формулы (10.10) нижний индекс $C\omega$ на Cz_2, получим выражение для кинетической энергии твердого тела в случае плоского движения:

$$T = {}^1/_2 M v_C^2 + {}^1/_2 I_{Cz_2}\omega^2. \tag{10.11}$$

Ось Cz_2 не меняет своего положения относительно тела, и, следовательно, момент инерции I_{Cz_2} не меняется с течением времени. Это обстоятельство существенно упрощает все вычисления.

Прежде чем перейти к примерам, сделаем два замечания.

а) При вычислении кинетической энергии твердого тела, движущегося произвольным образом или участвующего в плоском движении, формулы (10.10) и (10.11) не всегда являются самыми простыми. Иногда удобнее пользоваться более общей формулой (10.4) (см. пример в конце параграфа).

б) Если материальная система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия T будет равна сумме кинетических энергий T_i всех тел, входящих в систему (это непосредственно вытекает из определения):

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n. \tag{10.12}$$

Рассмотрим примеры на вычисление кинетической энергии материальной системы.

Задача 10.1. Каток К массы m_1 лежит на горизонтальной плоскости. Каток обмотан тросом, перекинутым через блок Б радиуса r. К свободному концу троса прикреплен груз Г массы m_3. При опускании груза со скоростью v трос, разматываясь, приводит в качение без скольжения каток К (рис. 10.7). Определить кинетическую энергию системы, если момент инерции блока Б относительно оси вращения равен I_2; каток считать однородным круглым цилиндром, массой троса пренебречь.

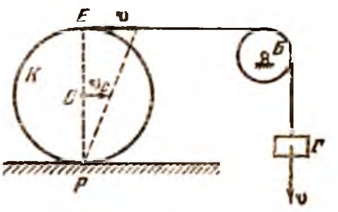


Рис. 10.7

Система состоит из трех тел: катка К, блока Б и груза Г. Поэтому ее кинетическая энергия T будет равна

$$T = T_К + T_Б + T_Г,$$

где $T_К$, $T_Б$ и $T_Г$ — кинетические энергии катка, блока и груза соответственно.

Груз Г движется поступательно. Его кинетическая энергия $T_Г$ согласно формуле (10.7) будет равна

$$T_Г = {}^1/_2 m_3 v^2.$$

Блок Б вращается вокруг неподвижной оси. Согласно формуле (10.8) его кинетическая энергия $T_Б = {}^1/_2 I_2 \omega_Б^2$, где $\omega_Б$ — угловая скорость блока.

Скорость точки касания блока с тросом равна скорости v груза Г. Следовательно, $v = r\omega_Б$. Отсюда $\omega_Б = v/r$ и

$$T_Б = \frac{1}{2} I_2 \frac{v^2}{r^2}.$$

Каток К участвует в плоском движении. Кинетическую энергию $T_К$ катка найдем по теореме Кенига (см. формулу (10.11)):

$$T_К = {}^1/_2 m_1 v_C^2 + {}^1/_2 I_{Cz_2}\omega_К^2.$$

где v_C — скорость центра C катка, ω_K — угловая скорость катка, I_{Cz_2} — его момент инерции относительно оси Cz_2 (на рис. 10.7 ось Cz_2 направлена на читателя).

Скорость верхней точки E катка К равна v. Точка P касания катка с горизонтальной плоскостью является мгновенным центром скоростей. Поэтому $v_C = v/2$. Угловую скорость ω_K найдем из равенства $v_C = R\omega_K$, где R — радиус катка. Отсюда

$$\omega_K = v_C/R = v/(2R).$$

Момент инерции катка относительно его оси Cz_2 определяется формулой (9.7): $I_{Cz_2} = {}^1/_2 m_1 R^2$.

Внося значения v_C, ω_K и I_{Cz_2} в выражение для T_K, после очевидных преобразований получим

$$T_K = {}^3/_{16} m_1 v^2.$$

Теперь находим кинетическую энергию T всей системы:

$$T = {}^3/_{16} m_1 v^2 + {}^1/_2 I_2 \frac{v^2}{r^2} + {}^1/_2 m_3 v^2,$$

или

$$T = {}^1/_2 M_{\text{пр}} v^2, \tag{10.13}$$

где величина

$$M_{\text{пр}} = \frac{3}{8} m_1 + \frac{I_2}{r^2} + m_3 \tag{10.14}$$

называется *приведенной массой системы*.

Рассмотрим задачу на применение формулы (10.4).

Задача 10.2. Твердое тело массы M вращается вокруг горизонтальной оси O_{z_2} (ось O_{z_2} перпендикулярна к плоскости рис. 10.8); момент инерции тела относительно оси вращения O_{z_2} равен I. Определить кинетическую энергию тела, если ось подвеса O_{z_2} перемещается горизонтально со скоростью $\mathbf{v}_O$ (эта скорость может быть переменной).

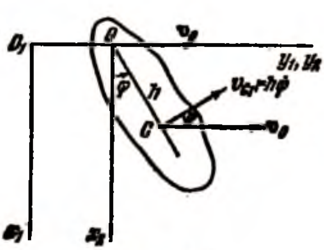


Рис. 10.8

Построим неподвижные оси Ox_1y_1 и подвижные оси Ox_2y_2. Движение тела относительно осей Ox_2y_2 представляет вращение вокруг оси O_{z_2}. Обозначив через φ угол между осью x_2 и прямой OC, где C — центр тяжести тела, найдем кинетическую энергию в относительном движении

$$T_r = {}^1/_2 I\dot\varphi^2.$$

Модуль скорости точки C относительно осей Ox_2y_2 равен $h\dot\varphi$ (считаем $\dot\varphi > 0$); направление скорости $\mathbf{v}_{Cr}$ показано на рис. 10.8. Скалярное произведение векторов $\mathbf{v}_O$ и $\mathbf{v}_{Cr}$ будет $\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{Cr} = v_O h\dot\varphi \cos\varphi$. Пользуясь формулой (10.4), найдем кинетическую энергию тела

$$T = {}^1/_2 M v_O^2 + M v_O h\dot\varphi \cos\varphi + {}^1/_2 I\dot\varphi^2. \tag{10.15}$$

Применение теоремы Кенига потребовало бы больших выкладок, так как нужно было бы определить абсолютную скорость точки C и перейти от момента инерции относительно оси Cz к заданному моменту инерции относительно оси Oz_2.

§ 10.3. Работа сил, приложенных к материальной системе

В дальнейшем нам нужно будет вычислять суммарную работу внешних и внутренних сил, приложенных к материальной системе. При этом возникает ряд особенностей, на которых полезно остановиться подробнее.

Предположим, что при своем движении материальная система перешла из одного положения, которое она занимала в момент времени t_0, в другое положение, соответствующее моменту времени t. Обозначим через A полную работу, которую совершают при этом перемещении системы все приложенные к ней силы, причем работы внешних и внутренних сил будем обозначать соответственно через A^e и A^i, так что

$$A = A^e + A^i. \tag{10.16}$$

Если через A_k^e и A_k^i обозначить работу, которую совершают внешние и внутренние силы, приложенные к k-й точке системы, при переходе ее из первого положения во второе, то по определению будем иметь

$$A^e = \sum_{k=1}^{n} A_k^e, \quad A^i = \sum_{k=1}^{n} A_k^i.$$

1. Работа сил тяжести. Если материальная система находится в однородном поле тяжести, то на каждую ее точку M_k массой m_k действует внешняя сила $\mathbf{F}_k^e = m_k\mathbf{g}$, элементарная работа $d'A_k^e$ которой равна $m_k\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}_k$. Направим ось z вертикально вверх.

Тогда проекции силы $\mathbf{F}_k^e$ будут равны 0, 0, $-m_k g$ и

$$d'A_k^e = m_k\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}_k = -m_k g\, dz_k.$$

Найдем теперь сумму элементарных работ всех сил тяжести, приложенных к системе:

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_k^e = -\sum_{k=1}^{n} m_k g\, dz_k = -g d \sum_{k=1}^{n} m_k z_k$$

или, учитывая третье равенство (7.3), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_k^e = -gM\, dz_C,$$

где M — масса всей системы, а z_C — аппликата ее центра тяжести.

Полная работа сил тяжести при переходе системы из первого положения во второе определится равенством

$$A^e = -Mg\int_{z_{0C}}^{z_C} dz_C = -Mg(z_C - z_{0C}),$$

или

$$A^e = Mg(z_{0C} - z_C) = P(z_{0C} - z_C). \qquad (10.17)$$

В этом равенстве z_C и z_{0C} — значения аппликаты центра тяжести системы в ее конечном и начальном положениях, а P — вес всей системы.

Таким образом, *полная работа сил тяжести системы равна весу всей системы, умноженному на вертикальное перемещение ее центра тяжести.*

2. Работа внутренних сил твердого тела. Докажем, что *сумма работ всех внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю.*

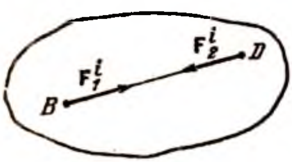


Рис. 10.9

Пусть $\mathbf{F}_1^i$ и $\mathbf{F}_2^i$ — внутренние силы взаимодействия точек B и D твердого тела (рис. 10.9). По третьему закону Ньютона они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$\mathbf{F}_2^i = -\mathbf{F}_1^i. \qquad (10.18)$$

Составим сумму мощностей этих сил:

$$N^i = \mathbf{F}_1^i \cdot \mathbf{v}_B + \mathbf{F}_2^i \cdot \mathbf{v}_D = \mathbf{F}_1^i \cdot \mathbf{v}_B - \mathbf{F}_1^i \cdot \mathbf{v}_D = \mathbf{F}_1^i \cdot (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_D),$$

где $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_D$ — скорости точек B и D соответственно.

Примем точку D за полюс. Тогда согласно известной формуле кинематики

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \overline{DB},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Внося это значение для скорости точки B в последнее равенство, получим

$$N^i = \mathbf{F}_1^i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \overline{DB}).$$

Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{F}_1^i$ и $\boldsymbol{\omega} \times \overline{DB}$ равно нулю (так как вектор $\boldsymbol{\omega} \times \overline{DB}$ перпендикулярен к вектору $\overline{DB}$, коллинеарному с силой $\mathbf{F}_1^i$). Поэтому

$$N^i = \sum_{j=1}^{n} N_j^i = 0,$$

причем полную мощность можно распространить, конечно, на все внутренние силы твердого тела (они входят попарно).

Так как сумма мощностей внутренних сил твердого тела равна нулю, то будет равна нулю и сумма работ этих сил:

$$A^i = \sum_{j=1}^{n} A_j^i = 0, \qquad (1\ .19)$$

что доказывает сделанное утверждение.

Аналогично можно доказать (мы не будем останавливаться на этом), что сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити равна нулю.

3. **Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.** Пусть сила $\mathbf{F}^e$ приложена к некоторой точке тела, отстоящей от неподвижной оси вращения z на расстоянии h. Точка приложения силы описывает при движении тела окружность радиуса h. Разложим силу $\mathbf{F}^e$ по осям естественного трехгранника и обозначим ее составляющие через $\mathbf{F}^e_\tau$, $\mathbf{F}^e_n$ и $\mathbf{F}^e_b$ (рис. 10.10). Работа составляющих сил $\mathbf{F}^e_n$ и $\mathbf{F}^e_b$ равна нулю, так как эти силы перпендикулярны к перемещению точки их приложения. Следовательно, работа силы $\mathbf{F}^e$ равна работе ее касательной составляющей $\mathbf{F}^e_\tau$. Для элементарной работы будем иметь

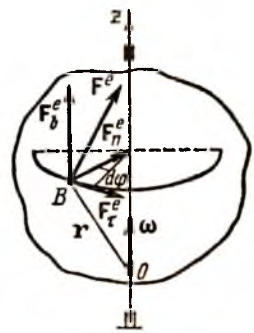


Рис. 10.10

$$d'A^e = F^e_\tau\, ds = F^e_\tau h\, d\varphi,$$

где $ds = h\, d\varphi$ — дифференциал дуговой координаты точки приложения силы, а $d\varphi$ — дифференциал угла поворота тела.

Учитывая, что произведение $F^e_\tau h$ равно моменту силы $\mathbf{F}^e$ относительно оси вращения тела, получим

$$d'A^e = M^e_z\, d\varphi, \tag{10.20}$$

т. е. *элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна моменту этой силы относительно оси вращения, умноженному на дифференциал угла поворота тела.*

Работа силы $\mathbf{F}^e$ на конечном угле поворота определится равенством

$$A^e = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M^e_z\, d\varphi, \tag{10.21}$$

где φ_0 и φ — начальное и конечное значения угла φ, определяющего положение тела (если момент M^e_z зависит не только от угла поворота φ, но также от угловой скорости ω и времени t, то нужно перейти к новой переменной интегрирования).

Если момент внешней силы не изменяется во время движения тела, т. е. $M^e_z = \text{const}$, то

$$A^e = M^e_z (\varphi - \varphi_0). \tag{10.22}$$

Деля обе части равенства (10.20) на dt, получим выражение для мощности силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси:

$$N^e = M_z^e \omega_z. \tag{10.23}$$

4. Работа потенциальных сил. Понятие потенциальных, или консервативных, сил, действующих на систему материальных точек, вводится как естественное обобщение понятия потенциальной силы для одной материальной точки.

Позиционные силы, зависящие только от положения системы, называются *потенциальными*, если работа их на перемещении системы из начального положения в конечное положение не зависит от пути, по которому происходит это перемещение.

Потенциальная энергия определяется как работа всех сил при переходе системы из данного положения в положение, условно принимаемое за нулевое (положение, при котором $\Pi = 0$):

$$\Pi = A_{MM_0}, \tag{10.24}$$

где M и M_0 символически обозначают положения системы в данном и нулевом положениях.

Так же как и для одной точки, легко показать, что *работа потенциальных сил* при перемещении системы из одного положения в другое определяется равенством

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{10.25}$$

где Π_1 и Π_2 — значения потенциальной энергии системы в ее начальном и конечном положениях.

Потенциальная энергия зависит от координат материальных точек, составляющих систему, т. е.

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n).$$

Предполагается, что функция Π однозначна и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Легко показывается, что частные производные от потенциальной энергии, взятые с обратным знаком, равны соответствующим проекциям сил:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{10.26}$$

Часто можно найти потенциальную энергию отдельных сил, входящих в систему. В этом случае потенциальная энергия системы будет равна сумме потенциальных энергий:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j. \tag{10.27}$$

Наконец, во многих случаях полезно разделить потенциальную энергию на энергию внутренних и внешних сил. Общая потенциальная энергия будет равна их сумме:

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^i. \qquad (10.28)$$

Так же как и для одной точки, рационально иногда пользоваться *силовой функцией* U, которая отличается от потенциальной энергии только знаком:

$$U = -\Pi.$$

5. Работа внутренних сил трения скольжения сочлененных тел. В различных устройствах между движущимися телами возникают силы трения скольжения. Эти силы приложены к обоим трущимся телам. Вычислим полную работу внутренних сил трения сочлененных тел.

Предположим, что тело B движется поступательно со скоростью $\mathbf{v}$, а тело C скользит по нему с относительной скоростью $\mathbf{u}$ (рис. 10.11). Между этими телами возникают силы трения $\mathbf{F}^i_{тр}$ и $\mathbf{F}'^i_{тр}$, работу которых нужно определить.

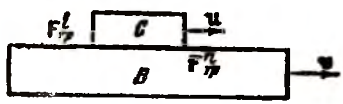


Рис. 10.11

При указанном на рис. 10.11 направлении относительной скорости $\mathbf{u}$ сила трения $\mathbf{F}^i_{тр}$ будет приложена к телу C, а сила трения $\mathbf{F}'^i_{тр}$ — к телу B. Конечно,

$$\mathbf{F}'^i_{тр} = -\mathbf{F}^i_{тр}. \qquad (10.29)$$

Мощность $N^i_{тр}$ этих сил будет равна

$$N^i_{тр} = N'^i + N^i = \mathbf{F}^i_{тр}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{F}'^i_{тр}\cdot\mathbf{v};$$

при этом учтено, что абсолютная скорость тела C равна $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ (направление скорости $\mathbf{v}$ тела B не имеет значения).

Принимая во внимание равенство (10.29), получим

$$N^i_{тр} = \mathbf{F}^i_{тр}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}^i_{тр}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}^i_{тр}\cdot\mathbf{u}.$$

Сила трения $\mathbf{F}^i_{тр}$, приложенная к телу C, направлена всегда в сторону, противоположную относительной скорости $\mathbf{u}$. Следовательно, угол между векторами $\mathbf{F}^i_{тр}$ и $\mathbf{u}$ равен 180° и их скалярное произведение будет равно $-F^i_{тр}u$. Таким образом,

$$N^i_{тр} = -F^i_{тр}u, \qquad (10.30)$$

т. е. *полная мощность внутренних сил трения скольжения двух сочлененных тел равна взятому со знаком минус произведению модуля силы трения на модуль относительной скорости.*

Из равенства (10.30) найдем сумму элементарных работ $d'A^i_{тр}$ внутренних сил трения ($d'A = N\,dt$ и $u = dx_r/dt$):

$$d'A^i_{тр} = -F^i_{тр}\,dx_r, \qquad (10.31)$$

где dx_r — элементарное относительное перемещение.

Аналогично доказывается, что для вращающихся сочлененных тел (рис. 10.12) полная мощность и элементарная работа всех внутренних сил трения определяются равенствами

$$N^i_{тр} = -M_{тр}\omega_r, \qquad (10.32)$$

$$d'A^i_{тр} = -M_{тр}d\varphi_r, \qquad (10.33)$$

где $M_{тр}$ — модуль момента сил трения относительно оси вращения, ω_r — модуль относительной угловой скорости и $d\varphi_r$ — элементарное относительное угловое перемещение тела C.

Рис. 10.12

§ 10.4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Рассмотрев методы вычисления работы сил, приложенных к материальной системе, и ее кинетической энергии, перейдем к установлению зависимостей, связывающих эти величины. Для этого освободимся мысленно от связей, заменив их соответствующими реакциями. Обозначим через $\mathbf{F}^e_k$ и $\mathbf{F}^i_k$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к материальной точке M_k системы. Рассмотрим два момента времени: начальный t_0 и текущий (или конечный) t. Пусть модуль скорости точки M_k в момент времени t_0 равняется v_{0k}, а в момент времени t — v_k. Тогда для каждой точки материальной системы будет справедлива теорема об изменении кинетической энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_1v_{01}^2}{2} = A^e_1 + A^i_1, \quad \ldots, \quad \frac{m_nv_n^2}{2} - \frac{m_nv_{0n}^2}{2} = A^e_n + A^i_n,$$

где A^e_k и A^i_k — работа сил $\mathbf{F}^e_k$ и $\mathbf{F}^i_k$ на действительном перемещении точки M_k.

Складывая почленно все равенства, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_kv_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_kv_{0k}^2 = \sum_{k=1}^{n} A^e_k + \sum_{k=1}^{n} A^i_k,$$

или, учитывая выражение для кинетической энергии (10.1),

$$T - T_0 = A^e + A^i, \qquad (10.34)$$

где T_0 — начальное значение кинетической энергии, а A^e и A^i — работа всех внешних и внутренних сил системы.

Равенство (10.34) представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы: *изменение кинетической энергии материальной системы при переходе ее из начального в текущее (конечное) положение равно сумме работ на этом перемещении всех внешних и внутренних сил, приложенных к точкам системы.*

Продифференцируем равенство (10.34) по времени:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dA^e}{dt}+\frac{dA^i}{dt}.$$

Учитывая, что производная от работы по времени равна мощности N_k силы $\mathbf{F}_k$, получим

$$\frac{dT}{dt}=N^e+N^i. \qquad (10.35)$$

Это уравнение представляет собой аналитическую запись теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: *полная производная кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе.*

Необходимо подчеркнуть, что в правую часть равенства (10.34) входит работа (в равенство (10.35) — мощность) всех внутренних и внешних сил, приложенных к системе.

Рассмотрим несколько простых примеров.

При движении автомобиля, оснащенного двигателем внутреннего сгорания, движущей силой является сила трения $\mathbf{F}_2$ между ведущими колесами и полотном шоссе (см. рис. 7.1). Без этой силы движение автомобиля осуществить нельзя (см. пример 1 § 8.3). Однако сила трения $\mathbf{F}_2$ при отсутствии проскальзывания колес работу не производит (так как эта сила приложена в мгновенном центре скоростей P ведущего колеса, элементарное перемещение $d\mathbf{r}_P$ которого равно нулю). Полезную работу при перемещении автомобиля производят внутренние силы давления газов, образовавшиеся при сгорании горючей смеси.

Точно так же при движении человека по горизонтальному полу или при его подъеме по лестнице движущими силами являются силы трения между полом и подошвами ног человека или реакции ступеней лестницы. Однако полезную работу производят не эти внешние силы, а внутренние мускульные усилия человека.

Прежде чем перейти к задачам, отметим два класса сил, которые не нужно учитывать при применении теоремы об изменении кинетической энергии системы (так как их работа равна нулю):

1) реакции связей без трения;

2) внутренние силы абсолютно твердого тела и абсолютно гибкой и нерастяжимой нити (см. п. 2 § 10.3).

§ 10.5. Задачи

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме определяют:

скорости точек материальной системы (в тех случаях, когда, зная перемещение системы, можно вычислить работу всех приложенных к ней сил);

работу одной из сил, приложенных к системе (когда по условию задачи скорости точек материальной системы известны или их можно определить другими методами).

Дифференциальная форма теоремы об изменении кинетической энергии системы применяется для составляния дифференциальных уравнений движения, а также для определения ускорений (линейных или угловых).

Мы начнем с задачи, иллюстрирующей метод определения скоростей.

Задача 10.3. В системе, рассмотренной в § 10.2, груз Г под действием силы тяжести опускается из состояния покоя вниз. Определить скорость v груза Г при опускании его на высоту h. Трением качения катка и трением на оси блока пренебречь.

Рассмотрим внешние силы, действующие на систему. На груз Г действует сила тяжести m_3g, на блок Б действуют сила тяжести m_2g и реакция опоры (на рис. 10.13 показаны ее составляющие X и Y), на каток K действуют сила тяжести m_1g и реакция горизонтальной плоскости, которая разложена на нормальную составляющую N и силу трения F (без силы трения F каток не катился бы, а скользил). Внутренние силы учитывать не нужно, так как согласно § 10.3 сумма их работ равна нулю.

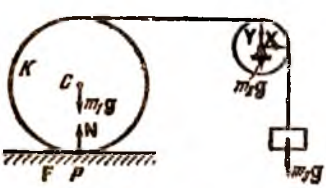


Рис. 10.13

Применим теорему о конечном изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T - T_0 = A^e.$$

Воспользуемся выражением (10.13) для кинетической энергии рассматриваемой системы:

$$T = {}^1/_2 M_{пр} v^2,$$

где приведенная масса определяется равенством (10.14):

$$M_{пр} = \frac{3}{8} m_1 + \frac{I_2}{r^2} + m_3.$$

Движение начинается из состояния покоя, поэтому $T_0 = 0$. Перейдем к вычислению работ сил, приложенных к системе. Работа сил m_2g, X и Y равна нулю, так как точка их приложения неподвижна. Работа силы тяжести m_1g катка K равна нулю, так как эта сила перпендикулярна к перемещению точки ее приложения C. Работа нормальной реакции N и силы трения F равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенном центре скоростей P катка K, элементарное перемещение которого $dr_P = 0$. Таким образом, осталась одна сила тяжести m_3g груза Г, работа которой равна m_3gh. Итак,

$$A^e = m_3gh.$$

перешла из начального в некоторое текущее положение. Обозначим значение кинетической энергии системы в начальном положении через T_0, а в рассматриваемом через T. Применим к этой системе теорему о конечном изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = A^e + A^i = A.$$

Так как по условию силы, действующие на систему, консервативны, то будет справедливо равенство (10.25):

$$A = \Pi_0 - \Pi,$$

где Π_0 и Π — значения потенциальной энергии в начальном и текущем положениях.

Тогда будем иметь первый интеграл

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

или

$$T + \Pi = h, \tag{10.36}$$

где постоянная

$$h = T_0 + \Pi_0$$

равна начальному значению полной механической энергии (напомним, что полной механической энергией называется сумма потенциальной и кинетической энергий).

Уравнение (10.36) называется *интегралом энергии* и оно выражает закон сохранения полной механической энергии системы: *если система движется под действием одних консервативных сил, то сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняет постоянное значение*. Интеграл энергии (10.36) и некоторые его обобщения имеют большое значение в теории устойчивости движения *).

Рассмотрим пример на применение интеграла энергии.

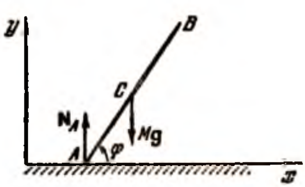


Рис. 10.16

Задача 10.6. Однородный тонкий стержень AB длиной l движется в вертикальной плоскости, скользя своим концом A по гладкой горизонтальной прямой (рис. 10.16). Определить угловую скорость движения стержня, если в начальный момент она равнялась $\dot\varphi_0$ и стержень составлял с горизонтом угол φ_0.

Освободимся мысленно от связи (гладкой горизонтальной плоскости) и заменим ее реакцией $\mathbf{N}_A$. Теперь можно считать стержень свободным, находящимся под действием двух вертикально направленных сил: силы тяжести стержня $M\mathbf{g}$ и реакции $\mathbf{N}_A$. Работа реакции $\mathbf{N}_A$ равна нулю, а сила тяжести $M\mathbf{g}$ — консервативная сила. Поэтому будет справедлив интеграл энергии (10.36):

$$T + \Pi = h.$$

*) См., например, Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения, — 1-е изд. — М.: Наука, 1971. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

Выбрав за нулевое положение горизонтальную плоскость, по которой движется точка A стержня, найдем потенциальную энергию силы тяжести Mg

$$\Pi = Mgy_C,$$

где y_C — ордината центра тяжести стержня.

Имеем (см. рис. 10.16) $y_C = {}^1/_2\, l \sin\varphi$, следовательно,

$$\Pi = {}^1/_2 Mgl \sin\varphi.$$

Кинетическую энергию стержня найдем, пользуясь теоремой Кенига для плоского движения твердого тела (см. формулу (10.11)):

$$T = {}^1/_2 Mv_C^2 + {}^1/_2 I_{Cz}\dot\varphi^2$$

Здесь v_C — скорость центра масс C стержня, а I_{Cz} — его момент инерции относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости движения.

Согласно формуле (9.6) $I_{Cz} = {}^1/_{12} Ml^2$. Кроме того, $v_C^2 = \dot x_C^2 + \dot y_C^2$, где x_C — абсцисса центра масс стержня. Так как $y_C = (l/2)\sin\varphi$, то $\dot y_C = (l/2)\cos\varphi\,\dot\varphi$. Внося эти значения для I_{Cz}, v_C^2 и $\dot y_C$ в выражение для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot x_C^2 + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{24} Ml^2\dot\varphi^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2} M\dot x_C^2 + \frac{Ml^2}{24}\left(1 + 3\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2.$$

Учитывая полученные выражения для T и Π, найдем интеграл энергии для рассматриваемой системы

$$\frac{1}{2} M\dot x_C^2 + \frac{Ml^2}{24}\left(1 + 3\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} Mgl\sin\varphi = h,$$

где h — постоянная энергии, которую можно найти из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \qquad \varphi = \varphi_0, \quad \dot\varphi = \dot\varphi_0, \quad \dot x_C = \dot x_{0C};$$

здесь $\dot x_{0C}$ — начальное значение проекции скорости центра масс стержня на ось x (эта величина по условию задачи не задана).

Внося начальные условия в интеграл энергии, получим

$$h = \frac{1}{2} M\dot x_{0C}^2 + \frac{Ml^2}{24}\left(1 + 3\cos^2\varphi_0\right)\dot\varphi_0^2 + \frac{1}{2} Mgl\sin\varphi_0.$$

После подстановки найденного значения h в интеграл энергии, приведем последний к виду

$$\dot x_C^2 + \frac{l^2}{12}\left(1 + 3\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 + gl\sin\varphi = \dot x_{0C}^2 + \frac{l^2}{12}\left(1 + 3\cos^2\varphi_0\right)\dot\varphi_0^2 + gl\sin\varphi_0.$$

Покажем, что проекция $\dot x_C$ скорости $\mathbf{v}_C$ центра масс C стержня остается постоянной во время движения. Действительно, сумма проекций всех внешних сил на неподвижную ось x равна нулю. Поэтому согласно третьему следствию теоремы о движении центра масс (см. формулу (8.14))

$$v_{Cx} = \dot x_C = \text{const},$$

т. е.

$$\dot x_C = \dot x_{0C}.$$

Тогда последнее выражение для интеграла энергии упрощается и принимает вид

$$\frac{l}{12}(1+3\cos^2\varphi)\dot\varphi^2+g\sin\varphi=\frac{l}{12}(1+3\cos^2\varphi_0)\dot\varphi_0^2+g\sin\varphi_0.$$

Отсюда найдем угловую скорость стержня

$$|\dot\varphi|=\sqrt{\frac{(1+3\cos^2\varphi_0)\,l\dot\varphi_0^2+12g(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}{l(1+3\cos^2\varphi)}}.$$

В момент падения на горизонтальную плоскость ($\varphi=0$) угловая скорость стержня будет

$$\dot\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{(1+3\cos^2\varphi_0)\dot\varphi_0^2+12\frac{g}{l}\sin\varphi_0}.$$

Любопытно отметить, что угловая скорость стержня не зависит от начальной скорости его центра масс (если бы горизонтальная плоскость была бы не абсолютно гладкой, то это было бы несправедливо).

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание.

Интеграл энергии в форме (10.36) имеет место для систем, движение которых определяется только консервативными силами. Если, помимо консервативных сил, система подвержена действию сил сопротивления, то происходит убывание полной механической энергии; если же материальная система соединена с источником энергии (например, двигателем), то полная механическая энергия возрастает.

§ 10.7. Теорема об изменении кинетической энергии относительного движения

Если движение материальной системы рассматривается в системе координат $Oxyz$, перемещающейся по данному закону относительно инерциальной системы отсчета, то в правую часть уравнения энергии (10.34) необходимо ввести работу переносных и кориолисовых сил инерции, а в левую часть должна входить кинетическая энергия относительного движения системы. Тогда вместо уравнения (10.34) получим

$$T_r-T_{r0}=A^e+A^i+\sum_{k=1}^{n}A_{ke}+\sum_{k=1}^{n}A_{kc},$$

где A_{ke} и A_{kc} — работа переносных и кориолисовых сил инерции. Но в соответствии с результатами § 6.4 работа кориолисовых сил инерции равна нулю. Поэтому уравнение энергии примет вид

$$T_r-T_{r0}=A^e+A^i+\sum_{k=1}^{n}A_{ke}. \qquad (10.37)$$

Если подвижные оси координат перемещаются поступательно относительно инерциальной системы отсчета, то последнюю сумму в (10.37) можно упростить. Действительно, в этом случае переносные ускорения всех точек будут одинаковы и равны ускорению начала подвижных осей O, т. е. $\mathbf{w}_{ke} = \mathbf{w}_0$. Имеем (для поступательно движущихся осей $\tilde{d}\rho = d\rho$)

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_{ke} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_{ke} \cdot d\rho_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{w}_{ke} \cdot d\rho_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{w}_0 \cdot d\rho_k.$$

Так как ускорение $\mathbf{w}_0$ полюса O от индекса суммирования не зависит, то его можно вынести за знак суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_{ke} = -\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \, d\rho_k\right) \cdot \mathbf{w}_0.$$

Из формулы (7.2) следует $\sum m_k \, d\rho_k = M \, d\rho_C$, где M — масса всей системы, а ρ_C — радиус-вектор ее центра масс в подвижной системе координат. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} d'A_{ke} = -M\mathbf{w}_0 d\rho_C.$$

При переходе системы из начального положения в текущее положение сумма работ переносных сил инерции будет равна

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ke} = \sum_{k=1}^{n} \int d'A_{ke} = \int (-M\mathbf{w}_0 \, d\rho_C) = A(-M\mathbf{w}_0),$$

где символом $A\,(-M\mathbf{w}_0)$ обозначена работа переносной силы инерции центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы.

Уравнение (10.37) можно записать теперь в следующей форме:

$$T_r - T_{r0} = A^e + A^i + A(-M\mathbf{w}_0). \qquad (10.38)$$

В этом равенстве кинетическая энергия и работа всех сил, включая переносную силу инерции центра масс, вычисляются для движения системы относительно подвижных осей $Oxyz$, перемещающихся поступательно относительно инерциальной системы отсчета.

В дифференциальной форме уравнение (10.38) принимает вид

$$\frac{dT_r}{dt} = N^e + N^i - M\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v}_{rC}, \qquad (10.39)$$

где $\mathbf{v}_{rC}$ — относительная скорость центра масс.

Если $\mathbf{w}_0 = \text{const}$, т. е. ускорение полюса постоянно по модулю и направлению, то сила инерции переносного ускорения центра масс будет консервативна с потенциальной энергией

$$\Pi^* = -M\mathbf{w}_0 \cdot \rho_C. \qquad (10.40)$$

Если, кроме того, силы, приложенные к системе, тоже потенциальны, то будем иметь интеграл энергии

$$T_r + \Pi + \Pi^* = h, \qquad (10.41)$$

где Π — потенциальная энергия всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе.

Задача 10.7. К потолку железнодорожного вагона подвешен физический маятник (твердое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, вокруг которой оно колеблется под действием силы тяжести). В начальный момент маятник удерживался в положении, при котором прямая OC была горизонтальна (см. рис. 10.17; O_1 — ось вращения, C — центр масс маятника). Затем маятник был отпущен без начальной скорости. Определить угловую скорость маятника в момент прохождения его центра масс через вертикаль, если масса маятника равна M, его момент инерции относительно оси вращения равен I, а железнодорожный вагон движется прямолинейно с постоянным ускорением $\mathbf{w}$ и $OC = l$.

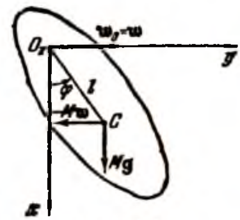


Рис. 10.17

Пусть ось z укреплена на движущемся вагоне (на рис. 10.17 вагон не показан). Направим подвижную ось y горизонтально в сторону ускорения вагона $\mathbf{w}$, а подвижную ось x вертикально вниз. Мысленно будем считать вагон неподвижным, введя одновременно переносную силу инерции центра масс маятника $-M\mathbf{w}$. Кинетическая энергия T_r относительного движения маятника вычисляется по формуле (10.8) как кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг оси z:

$$T_r = {}^1/_2 I\dot{\varphi}^2.$$

В начальный момент прямая OC была горизонтальна, в конечный момент — вертикальна. Работа силы тяжести Mg на заданном перемещении будет равна Mgl, а работа силы инерции $\pm Mwl$ (знак «+», если в начальный момент центр масс C находился на положительной части оси y, и знак «—» в противоположном случае). Поэтому $(T_{r0} = 0)$

$${}^1/_2 I\dot{\varphi}^2 = Mgl \pm Mwl;$$

отсюда найдем угловую скорость маятника в момент прохождения им вертикали

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2Ml\,(g \pm w)/I}.$$

Для рассматриваемой системы имеет место интеграл энергии (10.41). Примем положение маятника, при котором прямая OC горизонтальна и ордината точки C положительна, за нулевое. Тогда при перемещении маятника из данного положения в нулевое работа сил $M\mathbf{g}$ и $-M\mathbf{w}$ будет

$$A_g = \Pi_g = -Mgl\cos\varphi, \quad A_w = \Pi^* = -Mwl\,(1 - \sin\varphi).$$

Следовательно, интеграл энергии (10.41) примет вид

$${}^1/_2 I\dot{\varphi}^2 - Mgl\cos\varphi - Mwl\,(1 - \sin\varphi) = h_1,$$

или

$${}^1/_2 I\dot{\varphi}^2 - Ml\,(g\cos\varphi - w\sin\varphi) = h,$$

где $h = h_1 + Mwl$.

Глава XI

ДИНАМИКА ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

§ 11.1. Понятие тела переменной массы

В теоретической механике, как правило, рассматривается движение материальных систем и твердых тел, масса которых предполагается постоянной. Однако можно привести большое количество примеров, когда при движении тела его масса вследствие присоединения или отделения от него материальных частиц значительно изменяется. Например, на активном участке движения ракеты от нее отделяются продукты сгорания топлива, составляющего значительную часть исходной массы заправленной ракеты на старте. Решение задачи о движении ракеты как о движении тела постоянной массы в этом случае будет неверным.

В связи с этим возникает проблема разработки методов решения задач на движение тел с переменной массой, т. е. задач механики тела переменной массы *).

Перейдем теперь к определению понятия «тела переменной массы». Будем считать массу материальных точек, из которых состоит тело, постоянной. Исходя из этого, *под телом переменной массы будем понимать тело, масса которого изменяется вследствие процесса отделения от него или присоединения к нему материальных точек.* Это значит, что точки, изменяющие массу тела, не возникают и не исчезают, а лишь вводятся в рассмотрение или исключаются из него.

Введенное определение тела переменной массы позволяет рассматривать механику тела переменной массы как один из разделов механики системы материальных точек, так как все исследования движения такого тела можно выполнить методами классической механики.

В дальнейшем рассматривается только тот случай, когда весьма малы как масса каждой отделяющейся или присоединяющейся точки, так и время между последовательными отделениями или присоединениями точек. Это предположение делает возможным такую предельную идеализацию процесса изменения массы, при которой последняя может быть принята непрерывной и дифференцируемой функцией времени.

Хотя при мгновенном изменении массы тела на величину массы отделяющейся или присоединяющейся частицы скорость тела меняется скачкообразно, величина этого изменения также будет убывать с убыванием массы этой точки и в пределе скорость тела можно считать также непрерывной и дифференцируемой функцией времени.

Пусть масса тела в начальный момент времени $t = 0$ равна m_0. Обозначим через $m_1(t)$ массу отделившихся частиц к моменту времени t и через $m_2(t)$ — массу присоединившихся к телу частиц к этому же моменту времени t. При непрерывном присоединении и отделении частиц от тела функции $m_1(t)$ и $m_2(t)$ будут возрастающими положительными и при $t = 0$ $m_1(0) = 0$, $m_2(0) = 0$.

Таким образом, массу тела в момент времени t можно определить по формуле

$$m = m_0 - m_1(t) + m_2(t). \tag{11.1}$$

Если $m_1(t) = 0$, то происходит только процесс присоединения частиц; если $m_2(t) = 0$ — только процесс отделения.

*) В настоящее время вместо термина «тело переменной массы» часто пользуются термином «тело переменного состава».

§ 11.2. Уравнение движения точки переменной массы

Рассмотрим простейший случай, когда тело движется поступательно и, следовательно, его можно принять за материальную точку. Предположим также, что происходит процесс только отделения.

Пусть масса тела в момент времени t равна m, а скорость равна $\mathbf{v}$. Количество движения тела в этот момент времени равно

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}. \tag{11.2}$$

Так как рассматривается случай отделения частиц, то масса тела будет уменьшаться. Следовательно, изменение массы за промежуток времени Δt определится равенством

$$\Delta m = m(t + \Delta t) - m(t) \leqslant 0.$$

Предположим, что к моменту времени $t + \Delta t$ отделившаяся от тела частица массы $|\Delta m|$ приобрела скорость $\mathbf{u}'$. Скорость же тела переменной массы к моменту времени $t + \Delta t$ обозначим через $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$.

Количество движения тела и отделившейся частицы в момент времени $t + \Delta t$ будет

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = (m - |\Delta m|)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + |\Delta m|\mathbf{u}' = \\ = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - \Delta m\mathbf{u}'. \tag{11.3}$$

Согласно теореме об изменении количества движения имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{Q}(t + \Delta t) - \mathbf{Q}(t)}{\Delta t} = \mathbf{F}^e,$$

где $\mathbf{F}^e$ — равнодействующая всех сил, приложенных к телу. Перепишем это выражение, используя формулы (11.2) и (11.3):

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t}(\mathbf{u}' - \mathbf{v}) + \frac{\Delta m\,\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right] = \mathbf{F}^e.$$

Отсюда получаем

$$m\mathbf{w} - \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{F}^e,$$

или

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e + \mathbf{\Phi}, \tag{11.4}$$

где $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$ — ускорение точки, $\mathbf{\Phi} = (dm/dt)\,\mathbf{v}_{1r}$, $\mathbf{v}_{1r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ — относительная скорость отделяющейся частицы, $\mathbf{u}$ — скорость отделяющейся частицы в момент времени t.

Вектор

$$\mathbf{\Phi} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_{1r} \tag{11.5}$$

называется *реактивной силой*.

Уравнение (11.4) получено, независимо друг от друга, различными авторами. Обычно это уравнение называют *уравнением Мещер-*

ского, так как его работа *) оказала наибольшее влияние на развитие механики тела переменной массы. Более подробно уравнение Мещерского будет рассмотрено в § 11.5.

§ 11.3. Количество движения тела переменной массы

Рассмотрим общий случай и не будем считать тело переменной массы материальной точкой. Кроме того, будем считать, что частицы не только отделяются, но и присоединяются к телу.

Переменная масса тела в момент времени t определяется равенством (11.1).

Согласно формуле (8.2) количество движения любой системы материальных точек постоянной массы, а следовательно, и твердого тела вычисляется по формуле

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G, \tag{11.6}$$

где m — масса материальной системы, а $\mathbf{v}_G$ — скорость центра масс этой системы.

Рассмотрим теперь тело переменной массы. Благодаря процессу присоединения и отделения частиц в теле происходит перераспределение масс и поэтому центр масс тела может не оставаться в какой-либо фиксированной точке тела. Он будет совершать сложное движение: будет двигаться со всем телом (переносное движение) и будет перемещаться по отношению к телу (относительное движение). Так, например, по мере выгорания топлива центр масс ракеты перемещается относительно ее корпуса.

Итак, абсолютную скорость центра масс можно представить формулой

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{eG} + \mathbf{v}_{rG}, \tag{11.7}$$

где $\mathbf{v}_{eG}$ — переносная скорость центра масс тела, т. е. скорость той точки тела, с которой в данный момент t совпадает центр масс, а $\mathbf{v}_{rG}$ — скорость центра масс по отношению к телу, т. е. по отношению к системе координат, жестко связанной с телом.

Рассмотрим наряду с телом переменной массы тело постоянной массы и предположим, что в момент времени t массы точек, их расположение и скорости для обоих тел одинаковы. Тогда количество движения определится равенством

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{v}_k,$$

где n — число точек, составляющих тело, m_k — масса k-й точки, а $\mathbf{v}_k$ — ее скорость. Так как, по предположению, массы и скорости точек обоих тел одинаковы, то количества движения этих тел также будут равны.

---

*) Мещерский И. В. Динамика тела переменной массы. — С.-Петербург, 1897.

Для случая равенства секундного расхода и секундного прироста масс

$$-m_1(t) + m_2(t) = 0, \qquad \frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$$

и

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}_e + \frac{dm_2}{dt}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \tag{11.17}$$

В заключение этого параграфа отметим, что вывод теоремы об изменении количества движения тела переменной массы нами получен в предположении, что отделившиеся частицы сразу же после отделения прекращают свое взаимодействие с точками тела переменной массы, а влияние присоединившихся частиц начинается только с момента их присоединения к телу.

§ 11.5. Уравнение Мещерского

Пусть тело переменной массы движется поступательно, тогда согласно формуле (11.8) имеем

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}. \tag{11.18}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Так как согласно соотношению (11.1)

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt},$$

а $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$, то

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m\mathbf{w} - \frac{dm_1}{dt}\mathbf{v} + \frac{dm_2}{dt}\mathbf{v}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.14), будем иметь

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e - \frac{dm_1}{dt}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2}{dt}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}). \tag{11.19}$$

Это уравнение получено И. В. Мещерским и носит его имя. Вектор

$$\mathbf{\Phi} = -\frac{dm_1}{dt}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2}{dt}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) \tag{11.20}$$

называется *реактивной силой*.

В дальнейшем будем рассматривать только случай отделения частиц, имеющий наибольший технический интерес. Для него уравнение (11.19) сводится к виду

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e - \frac{dm_1}{dt}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}).$$

Так как $\mathbf{v}_{1r} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$ есть относительная скорость отделяющихся частиц, а

$$\frac{dm_1}{dt} = -\frac{dm}{dt},$$

то предыдущее уравнение движения можно записать следующим образом:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_{1r} = \mathbf{F}^e + \mathbf{\Phi}, \tag{11.21}$$

где $\mathbf{\Phi}$ определяется формулой (11.5). Так как при отделении частиц $dm/dt < 0$, то реактивная сила $\mathbf{\Phi}$ направлена в сторону, противоположную направлению скорости $\mathbf{v}_{1r}$.

§ 11.6. Задача Циолковского

Рассмотрим движение ракеты, запущенной с поверхности Земли вертикально вверх (рис. 11.1). Будем предполагать, что ракета движется поступательно. Движение ракеты будем рассматривать в системе координат с началом в точке пуска, ось x которой направлена вертикально вверх.

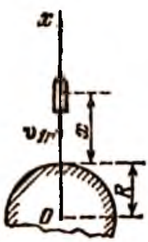


Рис. 11.1

В проекции на ось x уравнение (11.21) будет

$$m\ddot{x} = F_x^e - \frac{dm}{dt} v_{1r}, \tag{11.22}$$

так как $\mathbf{v}_{1r}$ направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси x. Здесь F_x^e представляет собой результирующую силу земного притяжения и силу аэродинамического сопротивления атмосферы. Реактивная сила

$$\Phi_x = -\frac{dm}{dt} v_{1r}$$

будет направлена в сторону положительного направления оси x, так как $dm/dt < 0$.

Как уже было сказано, при доказательстве теоремы об изменении количества движения предполагалось, что отделившиеся частицы между собой и телом не взаимодействуют. Но в действительности в отбрасываемой газовой струе частицы взаимодействуют друг с другом и с ракетой.

Кроме того, на ракету действует сила атмосферного давления, зависящая от высоты x над поверхностью Земли. Эта сила не входит в состав силы аэродинамического сопротивления и не зависит от скорости ракеты v.

Пусть s — площадь выходного сечения сопла, p — давление в газовом потоке на срезе сопла, а $p(x)$ — статическое атмосферное давление. Тогда сила, обусловленная давлением газового потока и статическим давлением атмосферы, будет

$$s\,[p - p(x)].$$

Прибавляя эту силу к реактивной силе, получим тягу двигателя

$$p_x = -\frac{dm}{dt} v_{1r} + s[p - p(x)].$$

При движении в пустоте $p(x) = 0$ и тяга будет

$$p_x = -\frac{dm}{dt} v_{1r} + sp.$$

Это соотношение записывают в виде

$$p_x = -\frac{dm}{dt} v_e,$$

где

$$v_e = v_{1r} + \frac{sp}{q}, \qquad q = -\frac{dm}{dt} > 0.$$

Величина v_e называется *эффективной скоростью истечения* ($v_e > v_{1r}$).

Таким образом, при решении задачи о движении ракеты нужно вместо уравнения (11.22) взять следующее:

$$m\ddot{x} = F_x^e - \frac{dm}{dt} v_{1r} + s[p - p(x)].$$

Решение этого уравнения в общем виде представляет значительные трудности из-за сложности закона изменения аэродинамического сопротивления, входящего в F_x^e, и находится за рамками курса теоретической механики.

При отсутствии атмосферы это уравнение примет вид

$$m\ddot{x} = F_x^e - \frac{dm}{dt} v_e, \tag{11.23}$$

где F_x^e представляет собой силу тяготения.

Если пренебречь силой притяжения Земли и сопротивлением атмосферы, то уравнение (11.23) упрощается:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} v_e.$$

Поставленную таким образом задачу впервые решил К. Э. Циолковский.

Предположим, что масса ракеты $m = m(t)$ является непрерывной функцией времени, а эффективная скорость истечения постоянна ($v_e = \text{const}$). Отметим, что $m(0) = m_0$ — стартовая масса ракеты. Перепишем уравнение движения ракеты в виде

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v(t) = -v_e \ln m + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

По условию, при $t = 0$ $v(0) = 0$; тогда $0 = -v_e \ln m_0 + C$ и, следовательно,

$$C = v_e \ln m_0.$$

Итак, скорость ракеты в момент времени t равна

$$v(t) = v_e \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Эта формула называется *формулой Циолковского.*

Пусть к моменту времени $t = t_к$ произошло полное сгорание топлива в ракете. Скорость ракеты в этот момент времени будет

$$v(t_к) = v_e \ln \frac{m_0}{m_к},$$

где $m_к = m(t_к)$ — масса ракеты без топлива. Введем в рассмотрение *число Циолковского* $z = m_0/m_к$, тогда формула для скорости ракеты в момент сгорания всего топлива примет вид

$$v = v_e \ln z. \tag{11.24}$$

Эта формула также называется *формулой Циолковского.*

Из рассмотрения формулы (11.24) следует, что скорость ракеты в момент, когда весь запас топлива будет израсходован, пропорциональна эффективной скорости истечения газов и натуральному логарифму от числа Циолковского.

Формула Циолковского (11.24) указывает на два возможных пути увеличения скорости ракеты к моменту сгорания топлива. Первый путь — это увеличение эффективной скорости истечения газов, второй путь — увеличение числа Циолковского.

В настоящее время для используемых в ракетах химических топлив эффективная скорость истечения газов $v_e \approx 2500$ м/с и несколько выше. Получение химических топлив, позволяющих получить более высокую эффективную скорость истечения газов, связано с большими трудностями. Увеличение числа z также представляет трудную техническую задачу.

Найдем, каким должно быть z, чтобы ракета к моменту сгорания топлива при $v_e = 2400$ м/с получила первую космическую скорость (≈ 8000 м/с).

При рассмотрении этой задачи, запуская ракету с Земли, нужно иметь в виду, что вследствие земного тяготения, сопротивления атмосферы, затрат на осуществление программного движения ракеты фактическая скорость ракеты после сгорания топлива будет меньше скорости, даваемой формулой (11.24). По некоторым данным потери в скорости составляют 10—15 %. Поэтому определение числа z проведем, исходя из необходимости получения скорости $v = 9000$ м/с.

Согласно формуле (11.24) найдем

$$z = e^{v/v_e} = e^{3{,}75} \approx 42{,}5.$$

Это значит, что $m_0 = 42{,}5\, m_к$, т. е. стартовая масса ракеты должна быть в 42,5 раза больше массы ракеты без топлива. Иначе говоря, вес топлива должен составлять примерно 98 % от стартового веса ракеты. Для современных ракет число Циолковского значительно меньше 42,5.

Как следует из приведенного расчета, получение космических скоростей с помощью одноступенчатой ракеты в настоящее время вряд ли возможно. Для этих целей используются многоступенчатые ракеты.

§ 11.7. Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты

На рис. 11.2 приведена примерная схема многоступенчатой ракеты. Многоступенчатая ракета состоит из нескольких ступеней и полезного груза. После израсходования топлива в ступени она отделяется от остальной конструкции.

Введем понятие *субракеты*. Под субракетой понимается совокупность работающей ступени, всех неработающих ступеней и полезного груза, причем для данной субракеты все неработающие ступени и полезный груз являются «полезным грузом», т. е. каждая субракета рассчитывается как одноступенчатая ракета. На рис. 11.2 указана нумерация ступеней и субракет.

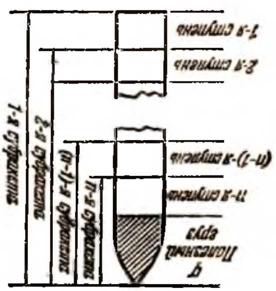


Рис. 11.2

Применяя формулу Циолковского (11.24) к каждой субракете, получим:

после полной отработки первой ступени скорость второй субракеты

$$v_1 = v_e^{(1)} \ln z_1,$$

где $v_e^{(1)}$ — эффективная скорость истечения в первой ступени, z_1 — число Циолковского для первой субракеты;

после отработки второй ступени скорость третьей субракеты

$$v_2 = v_1 + v_e^{(2)} \ln z_2 = v_e^{(1)} \ln z_1 + v_e^{(2)} \ln z_2,$$

где $v_e^{(2)}$ — эффективная скорость истечения во второй ступени, z_2 — число Циолковского для второй субракеты;

наконец, после отработки n-й ступени скорость полезного груза

$$v = v_e^{(1)} \ln z_1 + v_e^{(2)} \ln z_2 + \cdots + v_e^{(n)} \ln z_n, \qquad (11.25)$$

где $v_e^{(n)}$ — эффективная скорость истечения из n-й ступени, z_n — число Циолковского для n-й субракеты.

Если приближенно считать, что для всех ступеней относительная скорость истечения одинакова:

$$v_e^{(1)} = v_e^{(2)} = \cdots = v_e^{(n)} = v_e,$$

то согласно формуле (11.22) будем иметь

$$v = v_e \ln (z_1 z_2 \dots z_n) = v_e \ln Z, \tag{11.26}$$

где

$$Z = z_1 z_2 \dots z_n. \tag{11.27}$$

Для упрощения выкладок положим, что у всех субракет числа Циолковского также одинаковы: $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, тогда формула (11.26) примет вид

$$v = n v_e \ln z. \tag{11.28}$$

Отсюда видно, что конечная скорость полезного груза пропорциональна числу ступеней (конечно, при условии, что $v_e^{(i)}$ и z_i одинаковы).

Найдем число z, которое должна иметь каждая ракета для достижения полезным грузом скорости $v = 9000$ м/с ($v_e = 2400$ м/с).

При $n = 1$ (одноступенчатая ракета) $z = e^{\frac{9000}{2400}} \approx 42{,}5$,

при $n = 2$ (двухступенчатая ракета) $z = e^{\frac{9000}{2 \cdot 2400}} \approx 6{,}48$,

при $n = 3$ (трехступенчатая ракета) $z = e^{\frac{9000}{3 \cdot 2400}} \approx 3{,}49$.

Из этих данных видно, что при реальных числах Циолковского космических скоростей можно достигнуть, применяя только многоступенчатые ракеты.

§ 11.8. Задачи

Задача 11.1. Ракета движется в однородном поле сил тяжести вертикально вверх с постоянным ускорением w (см. рис. 11.1). Сопротивлением атмосферы пренебрегаем. Эффективную скорость истечения газов v_e считаем постоянной. Определить: 1) закон изменения массы ракеты; 2) время T, за которое масса ракеты уменьшится вдвое. Определить также закон изменения массы при отсутствии поля тяготения.

В рассматриваемой задаче $F_x^e = -mg$ (g — ускорение силы тяжести), поэтому уравнение (11.23) примет вид

$$mw = -\frac{dm}{dt} v_e - mg.$$

Разделяя в этом уравнении переменные, получим

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w+g}{v_e} dt.$$

Интегрируя и принимая во внимание, что стартовая масса ракеты $m(0) = m_0$, будем иметь

$$\ln m - \ln m_0 = -\frac{w+g}{v_e} t,$$

откуда

$$m = m_0 e^{-\frac{w+g}{v_e} t}.$$

Для момента времени T по условию задачи

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\frac{w+g}{v_e}T}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{v_e}{w+g}\ln 2.$$

Если ракета движется вне поля тяготения, то $g = 0$ и

$$m = m_0 e^{-\frac{w}{v_e}t}.$$

Задача 11.2. Ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести. Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Изменение массы ракеты происходит по закону

$$m = m_0 e^{-\alpha t}$$

(α и m_0 — постоянные величины).

К моменту времени $t = t_к$ топливо сгорает. Определить при каком значении α ракета достигает максимальной высоты подъема *).

Уравнение движения ракеты (11.23) для рассматриваемого случая имеет вид

$$m_0 e^{-\alpha t}\ddot{x} = -m_0 e^{-\alpha t} g + \alpha m_0 e^{-\alpha t} v_e, \quad \text{или} \quad \ddot{x} = -g + \alpha v_e = (k-1)g,$$

где $k = \alpha v_e/g$. Интегрируя, получим

$$\dot{x} = (k-1)gt + v_0, \tag{11.29}$$

где v_0 — начальная скорость ракеты. Считая, что при $t = 0$ $x = 0$, найдем

$$x = (k-1)\frac{gt^2}{2} + v_0 t. \tag{11.30}$$

Полученное выражение описывает движение ракеты при работающем двигателе.

Пусть масса ракеты после сгорания топлива равна $m_к$; тогда момент времени сгорания $t_к$ найдется из условия

$$m_к = m_0 e^{-\alpha t_к},$$

откуда

$$t_к = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_к} = \frac{\mu}{\alpha},$$

где $\mu = \ln z$ (z — число Циолковского).

Скорость ракеты в момент времени $t = t_к$ определится из формулы (11.29):

$$\dot{x}_1 = (k-1)gt_к + v_0 = (k-1)\frac{g\mu}{\alpha} + v_0.$$

К этому моменту времени высота подъема ракеты согласно уравнению (11.30) будет равна

$$x_1 = (k-1)\frac{g\mu^2}{2\alpha^2} + v_0\frac{\mu}{\alpha}.$$

---

*) Космодемьянский А. А. Экстремальные задачи для точки переменной массы. — ДАН СССР, 1946, т. 53, № 1, с. 17—19.

Начиная с момента времени $t = t_к$, ракета будет двигаться только под действием силы притяжения Земли. Высота, на которую поднимется ракета после момента времени $t = t_к$, равна

$$x_2 = \frac{\dot{x}_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[(k-1)g\frac{\mu}{\alpha} + v_0\right]^2.$$

Таким образом, полная высота подъема ракеты будет

$$H = x_1 + x_2 = (k-1)g\frac{\mu^2}{2\alpha^2} + v_0\frac{\mu}{\alpha} + \frac{1}{2g}\left[(k-1)g\frac{\mu}{\alpha} + v_0\right]^2.$$

Найдем теперь максимальную высоту подъема, считая H функцией α. Применяя обычный способ отыскания максимума функции, т. е. находя производную от H по α и приравнивая ее нулю, мы определим значение α, при котором достигается максимальная высота подъема. Эта максимальная высота равна

$$H_{max} = \frac{(v_e\mu + v_0)^2}{2g}$$

и достигается при $\alpha = \infty$, т. е. при мгновенном сгорании топлива. Мгновенное сгорание топлива влечет за собой бесконечно большое ускорение ракеты в начале движения, и, следовательно, полученное условие максимального подъема ракеты ($\alpha = \infty$) практически невыполнимо и недопустимо.

При постепенном сгорании топлива ускорение ракеты будет конечным, но при этом неизбежен проигрыш в достигаемой высоте. Коэффициент $k = \alpha v_e/g$ называется *коэффициентом перегрузки* (давление любого груза в ракете на свою опору точно в k раз превосходит величину силы притяжения груза к Земле) *).

Зададимся каким-либо фиксированным значением коэффициента перегрузки k. Тогда $\alpha = kg/v_e$. При этом значении α и при $v_0 = 0$ высота подъема ракеты будет

$$H = (k-1)\frac{\mu^2 v_e^2}{2gk}.$$

При $v_0 = 0$

$$H_{max} = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g}.$$

Следовательно,

$$H = H_{max}\frac{k-1}{k}.$$

Из этой формулы (формулы Космодемьянского) следует, что уменьшение коэффициента перегрузки влечет за собой уменьшение максимальной высоты подъема ракеты. При $k = 4$ она будет на 25 % меньше, чем H_{max}.

Задача 11.3. Ракета движется вертикально вверх с постоянной скоростью v_0 (см. рис. 11.1). Эффективная скорость истечения газов постоянна. Сила притяжения к Земле обратно пропорциональна квадрату расстояния от ракеты до центра Земли. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Определить закон изменения массы ракеты.

Так как для рассматриваемой задачи

$$F_x^e = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \qquad w = 0,$$

то уравнение (11.23) будет иметь вид

$$\frac{dm}{dt}v_e - \frac{mgR^2}{(R+x)^2} = 0. \tag{11.31}$$

---

*) Пусть груз, находящийся в ракете, имеет массу m_1; тогда на основании принципа Даламбера имеем $-m_1 g(k-1) - m_1 g + R = 0$, где R — реакция, действующая на груз. Следовательно, $R = km_1 g$.

По условию задачи скорость ракеты v_0 постоянна, т. е. $dx/dt = v_0 = \text{const}$, откуда

$$x = v_0 t + C.$$

При $t = 0$ $x = 0$, следовательно, $C = 0$ и $x = v_0 t$. Подставляя это выражение в соотношение (11.31), получим

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{gR^2}{v_e (R + v_0 t)^2}.$$

Интегрирование дает

$$\ln m = \frac{gR^2}{v_0 v_e (R + v_0 t)} + C_1.$$

Так как при $t = 0$ $m(0) = m_0$, то

$$C_1 = \ln m_0 - \frac{gR}{v_0 v_e}.$$

Подставляя это значение C_1 в предыдущее равенство, найдем после очевидных преобразований закон изменения массы ракеты

$$m = m_0 e^{-\frac{gRt}{v_e (R + v_0 t)}}.$$

Задача 11.4. Ракета движется в поле земного тяготения вертикально вверх так, что ее масса изменяется по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$, где α и m_0 — постоянные величины. Эффективная скорость истечения газов постоянна. Начальная скорость равна нулю ($v_0 = 0$). Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить скорость ракеты как функцию x, где x — высота подъема ракеты над поверхностью Земли (см. рис. 11.1).

По условию $F_x^e = -mgR^2/(R + x)^2$; уравнение движения ракеты (11.23) имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R + x)^2} - \frac{dm}{dt} v_e.$$

Так как $m = m_0 e^{-\alpha t}$, то после подстановки получим

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R + x)^2} + \alpha v_e.$$

Принимая во внимание, что $dx = v\,dt$, и умножая обе части полученного уравнения на $v\,dt$, будем иметь

$$v\,dv = -\frac{gR^2}{(R + x)^2}dx + \alpha v_e\,dx.$$

Интегрируя уравнение

$$\int_0^v v\,dv = -\int_0^x \frac{gR^2}{(R + x)^2}dx + \alpha v_e \int_0^x dx,$$

получим

$$\frac{v^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R + x} - \frac{1}{R}\right) + \alpha v_e x;$$

отсюда найдем закон изменения скорости ракеты от высоты x ее подъема

$$v = \sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{R + x} - \frac{1}{R}\right) + 2\alpha v_e x}, \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{2(\alpha v_e - gR^2)}{R(R + x)}x}.$$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава XII

ГЕОМЕТРИЯ МАСС

§ 12.1. Введение

Динамика твердого тела является важным разделом теоретической механики, что объясняется прежде всего теми приложениями, которые она имеет в самых различных вопросах техники. Так, например, конструирование и расчет станков, железнодорожного и автомобильного транспорта, управление полетом самолетов и космических аппаратов, борьба с качкой судна, конструирование и расчет гироскопических приборов, сохраняющих заданную ориентацию или автономно определяющих нужное направление (гироскопические компасы, гировертикали), и т. п. основаны на динамике твердого тела.

Движение тел существенным образом зависит от характера распределения масс. В этом мы уже убедились на ряде примеров. Так, спортсмен при прыжке в воду, группируясь (т. е. меняя распределение масс), увеличивает свою угловую скорость (см. пример на стр. 199); время установления угловой скорости ротора электромотора зависит от момента инерции ротора (см. пример на стр. 191); скорость вращения маховичка, которую необходимо сообщить ему для прекращения вращательного движения космического аппарата, зависит от соотношения моментов инерции (см. пример на стр. 200—201) и т. д. Поэтому изучение динамики твердого тела начинается, как правило, с вводной главы, посвященной геометрии масс. Из самого названия видно, что в этой главе изучается не движение твердого тела, а только характер распределения его массы.

§ 12.2. Основные определения

Как уже отмечалось, в теоретической механике считается, что масса твердого тела распределена непрерывно (см. стр. 154).

Возьмем в теле некоторую точку и выделим небольшой объем Δv с массой Δm так, чтобы выбранная точка находилась внутри этого объема. Отношение $\gamma_{\text{ср}} = \Delta m/\Delta v$ называется *средней плотностью объема* Δv тела, а предел этого отношения

$$\gamma = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} \tag{12.1}$$

— *плотностью тела в данной точке* (предполагается, что при $\Delta v \to 0$ выбранная точка остается все время внутри объема Δv).

Если тело неоднородно, то его плотность меняется от точки к точке. Отнесем тело к системе координат $Oxyz$. Тогда для неоднородного тела плотность γ будет функцией координат

$$\gamma = \gamma(x, y, z).$$

Масса неоднородного тела вычисляется по формуле

$$M = \int \gamma\, dv = \iiint \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Плотность однородного тела одинакова во всех его точках, причем

$$\gamma = M/V = \text{const}, \qquad (12.2)$$

где M — масса тела, а V — его объем.

В § 9.2 было дано определение момента инерции относительно оси: *моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма произведений масс точек системы на квадраты расстояний от точек до оси.* При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл.

Возьмем в теле элемент с массой $dm = \gamma\, dv$ и координатами x, y, z. Квадраты расстояний от этого элемента до координатных осей x, y, z будут соответственно равны (рис. 12.1)

$$h_x^2 = y^2 + z^2, \quad h_y^2 = z^2 + x^2, \quad h_z^2 = x^2 + y^2.$$

Рис. 12.1

Следовательно, моменты инерции тела относительно координатных осей определяются равенствами

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm, \quad I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm. \qquad (12.3)$$

В этих формулах под символом $\int F(x, y, z)\, dm$ подразумевается интеграл, распространенный по массе всего тела. Такое условное обозначение вводится для простоты записи. Конечно, при непосредственном вычислении интеграла нужно перейти к тройным интегралам по объему, причем дифференциал массы $dm = \gamma\, dv = \gamma\, dx\, dy\, dz$. В дальнейшем будет показано, что в некоторых случаях тройной интеграл можно заменить двойным или даже обычным определенным интегралом.

Одновременно с осевыми моментами инерции введем *полярный момент* I_O, определив его как сумму произведений масс точек материальной системы на квадраты их расстояний до данного полюса O. Если за полюс взять начало координат O, то квадрат расстояния от элемента dm до точки O будет равен $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и, следовательно, полярный момент инерции твердого тела можно вычислить по формуле

$$I_O = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm. \tag{12.4}$$

По самому определению полярный момент инерции зависит только от выбора полюса и не зависит от направления координатных осей.

Сравнивая равенства (12.3) и (12.4), легко установить формулу

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O. \tag{12.5}$$

Отметим два свойства моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей.

1. Момент инерции относительно любой из осей всегда меньше суммы моментов инерции относительно двух других осей, но больше их разности.

Действительно, например,

$$I_x + I_y - I_z = 2\int z^2\, dm > 0, \qquad I_x - I_y - I_z = -2\int x^2\, dm < 0;$$

отсюда

$$I_z < I_x + I_y, \qquad I_z > I_x - I_y. \tag{12.6}$$

Этому свойству можно дать простое геометрическое толкование: из трех отрезков, длины которых пропорциональны моментам инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, всегда можно построить треугольник.

2. Сумма моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей не зависит от направления этих осей.

Это свойство вытекает из равенства (12.5).

Из первого свойства следует, что моменты инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей нельзя задать произвольно — они должны удовлетворять соотношениям (12.6).

Напомним, что *радиусом инерции* тела относительно данной оси называется расстояние ρ от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу M всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной оси равнялся моменту инерции I тела относительно той же оси:

$$I = M\rho^2. \tag{12.7}$$

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, так как они представляют сумму положительных чисел. В нуль осевой момент инерции может обратиться только в одном частном случае, когда все материальные точки системы расположены на оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Для полной характеристики распределения массы тела относительно данной системы координат, кроме осевых моментов инерции I_x, I_y и I_z, вводят еще центробежные моменты инерции. *Для одной материальной точки центробежным моментом инерции I_{xy} называется произведение ее координат x и y на массу точки m, т. е. величина xym* (аналогично определяются центробежные моменты инерции I_{yz} и I_{zx}). *Центробежными моментами инерции твердого тела называются величины, определенные равенствами*

$$I_{xy} = \int xy\, dm, \qquad I_{yz} = \int yz\, dm, \qquad I_{zx} = \int zx\, dm. \tag{12.8}$$

Как видно из (12.8), центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов:

$$I_{xy}=I_{yx},\qquad I_{yz}=I_{zy},\qquad I_{zx}=I_{xz}.$$

Центробежные моменты нельзя задавать произвольно. Действительно, из неравенства

$$\int (x-y)^2\,dm \geqslant 0$$

следует

$$\int (x^2+y^2)\,dm \geqslant 2\int xy\,dm,$$

или, пользуясь формулами (12.3) и (12.8),

$$I_{xy}\leqslant {}^1/_2 I_z,\qquad I_{yz}\leqslant {}^1/_2 I_x,\qquad I_{zx}\leqslant {}^1/_2 I_y$$

(два других неравенства получаются аналогично).

Центробежные моменты инерции зависят не только от направления координатных осей, но и от выбора начала координат. В связи с этим часто говорят о центробежных моментах инерции в данной точке, понимая под этим, что начало координат совпадает с данной точкой.

В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут иметь любой знак и обращаться в нуль. *Главной осью инерции тела называется ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие индекс этой оси, равны нулю.* Например, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, то ось z — главная ось инерции тела. *Главной центральной осью инерции называется главная ось инерции, проходящая через центр масс тела.*

Отметим два частных случая, когда можно сразу определить характер оси.

1. Если тело имеет плоскость материальной симметрии *), то для всех ее точек ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью инерции.

2. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции и называется *осью динамической симметрии.*

Докажем для примера второе свойство (первое доказывается аналогично). Возьмем на оси материальной симметрии произвольную точку O и построим систему координат с началом в этой точке, направив ось z по оси симметрии, а оси x и y перпендикулярно к оси z произвольным образом. В силу материальной симметрии относительно оси z каждой точке A тела с координатами (x_A, y_A, z_A) и массой dm будет соответствовать другая точка B такой же массы и с коорди-

*) Под материальной симметрией понимается не только геометрическая симметрия, но и симметричное распределение плотности.

натами $(-x_A, -y_A, z_A)$ (рис. 12.2). При составлении интегральных сумм для центробежных моментов инерции I_{xz} и I_{yz} будем иметь

$$xz\,dm + (-x)\,z\,dm = 0,$$
$$yz\,dm + (-y)\,z\,dm = 0.$$

Следовательно,

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0,$$

т. е. ось z — главная центральная ось инерции (она будет центральной, так как центр масс тела находится на оси симметрии).

Осевые и центробежные моменты инерции часто обозначаются первыми буквами латинского алфавита:

$$I_x = A, \quad I_y = B, \quad I_z = C, \quad I_{yz} = D, \\ I_{zx} = E, \quad I_{xy} = F. \tag{12.9}$$

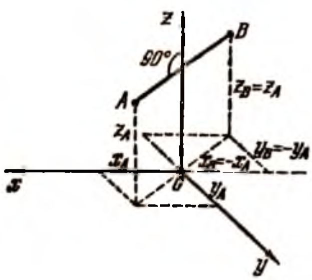


Рис. 12.2

Матрица, составленная из осевых I_x, I_y, I_z и взятых с обратным знаком центробежных моментов инерции $-I_{xy}$, $-I_{yz}$, $-I_{zx}$, называется *тензором инерции* в данной точке *):

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}. \tag{12.10}$$

В силу симметрии центробежных моментов инерции этот тензор имеет шесть составляющих. Тензор инерции характеризует распределение масс тела относительно данной точки.

Размерность всех моментов инерции (осевых, полярных и центробежных) в международной системе СИ равна кг·м², а в технической — кгс·м·с².

§ 12.3. Примеры вычисления моментов инерции

Приведем несколько примеров на вычисление моментов инерции.

1. **Моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда.** Вычислим моменты инерции относительно осей Cx, Cy, Cz, проведенных через центр масс параллельно ребрам; масса параллелепипеда M, длины ребер $2a$, $2b$, $2c$ (рис. 12.3).

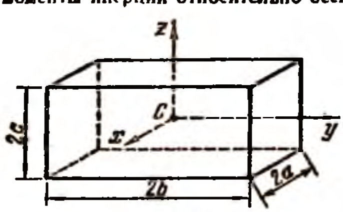


Рис. 12.3

Воспользуемся первой формулой (12.3):

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\,dm.$$

*) Для того чтобы матрица была тензором, необходимо, чтобы ее элементы (в данном случае моменты инерции) удовлетворяли некоторым условиям инвариантности относительно преобразования поворота осей координат. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данного курса. Заметим только, что моменты инерции удовлетворяют этим условиям.

Заменим дифференциал массы dm на $\gamma\,dv = \gamma\,dx\,dy\,dz$, где $\gamma = M/V = M/(8abc)$, и перейдем к тройному интегралу

$$I_x = \iiint \gamma\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{M}{8abc}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Этот интеграл можно представить следующим образом:

$$I_x = \frac{M}{8abc}\left[\int_{-a}^{a}dx\int_{-c}^{c}dz\int_{-b}^{b}y^2\,dy + \int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{b}dy\int_{-c}^{c}z^2\,dz\right],$$

или, интегрируя,

$$I_x = \frac{M}{8abc}\left[2a2c2\frac{b^3}{3} + 2a2b2\frac{c^3}{3}\right] = \frac{M}{3}(b^2+c^2).$$

Таким образом, моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда относительно центральных осей определяются равенствами (I_y и I_z получены круговой перестановкой букв)

$$I_x = \frac{M}{3}(b^2+c^2),\quad I_y = \frac{M}{3}(c^2+a^2),\quad I_z = \frac{M}{3}(a^2+b^2). \tag{12.11}$$

Из этих формул следует, что момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к некоторой грани, равен одной трети массы тела, умноженной на квадрат половины гипотенузы рассматриваемой грани.

Центробежные моменты инерции равны нулю, так как координатные плоскости являются плоскостями материальной симметрии.

Очень часто выбором соответствующего элемента можно сразу свести вычисление момента инерции к обычному интегралу.

Проиллюстрируем это на следующих примерах.

2. **Момент инерции однородного цилиндра относительно его оси.** Пусть радиус цилиндра равен R, а его масса M. Построим цилиндрическую трубку радиуса ρ ($\rho < R$) и толщиной $d\rho$ (рис. 12.4). За элемент массы dm возьмем массу этой трубки. Такой выбор элемента массы объясняется тем, что расстояния от всех его точек до оси цилиндра одинаковы и равны ρ.

Объем трубки с точностью до членов высшего порядка равен

$$dv = 2\pi\rho H\,d\rho,$$

а ее масса

$$dm = \gamma\,dv = \gamma 2\pi\rho H\,d\rho.$$

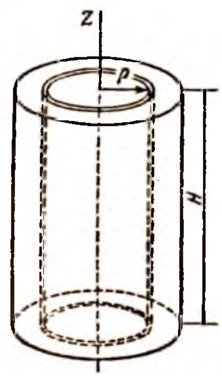


Рис. 12.4

В этих равенствах H — высота цилиндра, а γ — его плотность. Объем всего цилиндра $V = \pi R^2 H$. Следовательно,

$$\gamma = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H},\qquad dm = \frac{2M\rho\,d\rho}{R^2}.$$

Умножим элемент массы на квадрат его расстояния до оси цилиндра ρ^2. Тогда

$$I = \int \rho^2\,dm = \frac{2M}{R^2}\int_0^R \rho^3\,d\rho.$$

Вычислив интеграл, найдем момент инерции однородного круглого цилиндра относительно его оси:

$$I = {}^1/_2 MR^2. \qquad (12.12)$$

3. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Построим прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с центром шара O. В силу симметрии все три осевых момента инерции, I_x, I_y и I_z, равны между собой:

$$I_x = I_y = I_z = I,$$

где I — их общее значение.

Из формулы (12.5) найдем $3I = 2I_O$; отсюда

$$I = {}^2/_3 I_O. \qquad (12.13)$$

Таким образом, задача свелась к вычислению полярного момента инерции шара относительно его центра.

За элемент массы возьмем массу шарового слоя радиусом ρ и толщиной $d\rho$. Выбор такого элемента массы объясняется тем, что расстояния от всех точек шарового слоя до его центра O равны ρ.

Объем слоя $dv = 4\pi\rho^2\,d\rho$, а его масса $dm = \gamma\,dv$, где

$$\gamma = \frac{M}{V} = \frac{M}{{}^4/_3 \pi R^3}.$$

Здесь M — масса шара, γ — его плотность, R — радиус. Полярный момент инерции шарового слоя относительно его центра O равен $\rho^2\,dm$, следовательно,

$$I_O = \int \rho^2\,dm = \int_0^R \rho^2 \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} 4\pi\rho^2\,d\rho = 3\frac{M}{R^3}\int_0^R \rho^4\,d\rho,$$

или

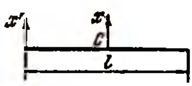
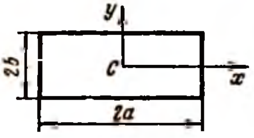
$$I_O = {}^3/_5 MR^2.$$

Зная полярный момент, найдем из равенства (12.13) момент инерции I однородного шара относительно оси, проходящей через его центр:

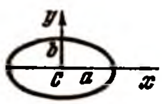
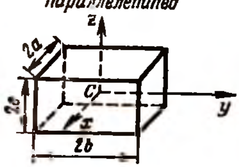
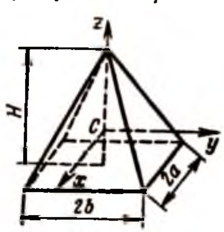
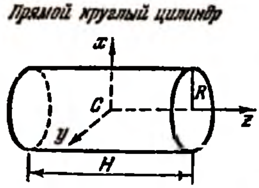
$$I = {}^2/_5 MR^2.$$

Ниже приведена таблица 3 моментов инерции простейших однородных тел.

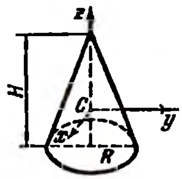
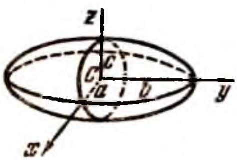
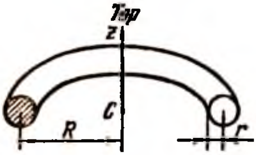
Таблица 3

Тело	Момент инерции
Отрезок прямой 	$I_x = \frac{1}{12} Ml^2$, $I_{x'} = \frac{1}{3} Ml^2$
Площадь прямоугольника 	$I_x = \frac{1}{3} Mb^2$, $I_y = \frac{1}{3} Ma^2$, $I_{cz} = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$

Продолжение табл. 3

Тело	Момент инерции
Площадь эллипса 	$I_x = \frac{1}{4} Mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4} Ma^2,$ $I_z = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$
Прямоугольный параллелепипед 	$I_x = \frac{1}{3} M(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{3} M(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$
Прямоугольная пирамида 	$I_x = \frac{M}{20}\left(\frac{3}{4} H^2 + 4b^2\right),$ $I_y = \frac{M}{20}\left(\frac{3}{4} H^2 + 4a^2\right),$ $I_z = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$
Прямой круглый цилиндр 	$I_x = I_y = \frac{1}{4} M\left(\frac{1}{3} H^2 + R^2\right),$ $I_z = \frac{1}{2} MR^2$

Продолжение табл. 3

Тело	Момент инерции
Прямой круглый конус 	$I_x = I_y = \frac{3}{20} M\left(\frac{1}{4} H^2 + R^2\right)$, $I_z = \frac{3}{10} MR^2$
Эллипсоид 	$I_x = \frac{M}{5}(b^2 + c^2)$, $I_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2)$, $I_z = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$
Тор 	$I_z = M\left(R^2 + \frac{3}{4} r^2\right)$

§ 12.4. Моменты инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса—Штейнера)

Существует простая связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Эта связь устанавливается теоремой Гюйгенса—Штейнера: *момент инерции I тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции I_C тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Действительно, пусть оси I и II параллельны, причем ось I проходит через центр масс C тела. Возьмем начало координат в точке C, совместим ось z с осью I, а ось y направим так, чтобы она пересекала ось II (рис. 12.5). Выделим в теле произвольный элемент массой dm и опустим из него перпендикуляры на оси I и II, обозначив их соответственно через ρ и ρ_1. Согласно определению моментов инерции будем иметь

$$I_C = \int \rho^2\, dm, \qquad I = \int \rho_1^2\, dm.$$

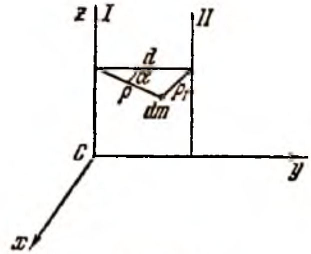


Рис. 12.5

По теореме косинусов найдем $\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d\cos\alpha$, или, учитывая, что $\rho\cos\alpha = y$, где y — ордината элемента,

$$\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2dy.$$

Подставим это выражение для ρ_1^2 в формулу, определяющую момент инерции I:

$$I = \int (\rho^2 + d^2 - 2yd)\, dm = \int \rho^2\, dm + d^2 \int dm - 2d \int y\, dm.$$

Первый интеграл равен I_C, второй — массе тела M, а третий — нулю (согласно формуле (7.3) $\int y\, dm = My_C = 0$, так как начало координат совпадает с центром масс). Следовательно,

$$I = I_C + Md^2, \tag{12.14}$$

что доказывает теорему.

Формула (12.14) широко используется в практических расчетах при определении моментов инерции тел относительно осей, не проходящих через центр масс. Кроме того, применяя метод разбиения, с помощью этой формулы можно определить осевые моменты инерции тел сложной формы. Поясним это примером.

Рис. 12.6

Задача 12.1. Маятник, изображенный на рис. 12.6, состоит из тонкого однородного стержня длиной l и массой m_1 и круглого однородного диска радиусом R и массой m_2. Определить момент инерции I_z маятника относительно оси его вращения Oz (ось Oz направлена перпендикулярно к плоскости рисунка).

Маятник состоит из двух тел: стержня и диска. Поэтому

$$I_z = I_z^{\text{ст}} + I_z^{\text{д}},$$

где $I_z^{\text{ст}}$ и $I_z^{\text{д}}$ — моменты инерции относительно оси Oz соответствующих тел.

Момент инерции стержня $I_z^{\text{ст}} = {}^1/_3 m_1 l^2$, а момент инерции диска найдем по формуле (12.14): $I_z^{\text{д}} = I_C^{\text{д}} + m_2 d^2$, где $I_C^{\text{д}} = {}^1/_2 m_2 R^2$ — момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси Oz, а $d = l + R$ — расстояние от центра диска до оси Oz. Имеем

$$I_z^{\text{д}} = {}^1/_2 m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2.$$

Пользуясь выражениями для моментов инерции стержня и диска, найдем момент инерции маятника относительно оси Oz:

$$I_z = {}^1/_3 m_1 l^2 + m_2 [{}^1/_2 R^2 + (l + R)^2].$$

Установим формулы для центробежных моментов инерции, аналогичные формуле (12.14). Для этого построим две системы координат со взаимно параллельными сторонами: $Ox_1y_1z_1$ и $Cxyz$, где C — центр масс тела (рис. 12.7). Обозначим через a, b и c координаты точки C в системе $Ox_1y_1z_1$. Тогда формулы перехода от одной системы координат к другой системе будут

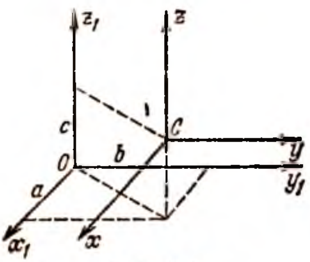


Рис. 12.7

$$x_1 = a + x, \quad y_1 = b + y, \quad z_1 = c + z.$$

По определению центробежных моментов инерции имеем

$$I_{x_1y_1} = \int x_1y_1\,dm = \int (a+x)(b+y)\,dm,$$

или, раскрывая скобки, группируя члены и вынося постоянные множители за знак интеграла,

$$I_{x_1y_1} = ab\int dm + a\int y\,dm + b\int x\,dm + \int xy\,dm.$$

Первый интеграл равен массе тела M, два средних интеграла равны нулю (так как они соответственно равны My_C и Mx_C), а последний интеграл равен I_{xy}. Таким образом, имеем (две другие формулы получены аналогично)

$$I_{x_1y_1} = Mab + I_{xy}, \quad I_{y_1z_1} = Mbc + I_{yz}, \quad I_{x_1z_1} = Mac + I_{xz}. \qquad (12.15)$$

§ 12.5. Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку

Возьмем в теле точку O и примем ее за начало системы координат $Oxyz$. Проведем через точку O произвольную прямую OL, составляющую с осями x, y, z углы α, β и γ соответственно. Требуется определить момент инерции I тела относительно оси OL, считая, что известны его осевые I_x, I_y, I_z и центробежные I_{xy}, I_{yz} и I_{zx} моменты инерции.

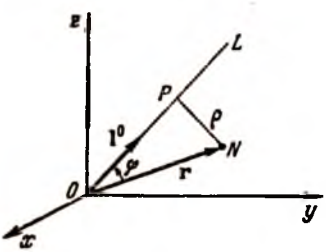


Рис. 12.8

Для решения задачи возьмем в теле произвольную точку N массой dm и с координатами x, y, z и опустим из нее перпендикуляр NP на прямую OL (рис. 12.8). Момент инерции тела относительно оси OL определяется равенством

$$I = \int \rho^2\,dm,$$

где ρ — длина отрезка NP.

Из треугольника ONP найдем

$$\rho = r \sin \psi = |\mathbf{l}_0 \times \mathbf{r}|,$$

где $\mathbf{l}_0$ — единичный вектор оси L.

Имеем

$$\mathbf{l}_0 \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (z\cos\beta - y\cos\gamma)\,\mathbf{i} + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,\mathbf{j} + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,\mathbf{k}.$$

Отсюда

$$\rho^2 = |\mathbf{l}_0 \times \mathbf{r}|^2 = (z\cos\beta - y\cos\gamma)^2 + \\ + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)^2 + (y\cos\alpha - x\cos\beta)^2,$$

или, раскрывая скобки и группируя члены,

$$\rho^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - \\ - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha.$$

Подставим это значение для ρ^2 в выражение для момента инерции I, разобьем интеграл на сумму интегралов и вынесем в каждом из них $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ за знаки интегралов. Тогда получим

$$I = \cos^2\alpha \int (y^2 + z^2)\,dm + \cos^2\beta \int (z^2 + x^2)\,dm + \cos^2\gamma \int (x^2 + y^2)\,dm - \\ - 2\cos\alpha\cos\beta \int xy\,dm - 2\cos\beta\cos\gamma \int yz\,dm - 2\cos\gamma\cos\alpha \int zx\,dm.$$

С помощью соотношений (12.3) и (12.8) найдем

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \qquad (12.16)$$

Формула (12.16) является искомой. Пользуясь ею, можно найти момент инерции I относительно оси OL, зная осевые и центробежные моменты инерции. Если координатные оси являются главными относительно своего начала, то центробежные моменты будут равны нулю и формула (12.16) примет более простой вид:

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma. \qquad (12.17)$$

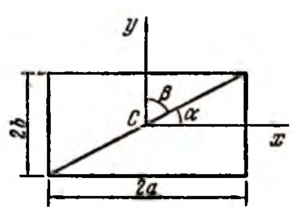


Рис. 12.9

Задача 12.2. Дана однородная прямоугольная пластинка с массой M и сторонами $2a$ и $2b$. Требуется определить момент инерции I относительно диагонали.

Построим систему координат $Cxyz$ с началом в центре масс пластинки. Ось x направим параллельно стороне $2a$, ось y — параллельно стороне $2b$, а ось z — перпендикулярно к плоскости пластинки (на рис. 12.9 ось z не показана — она направлена на читателя).

Координатные оси являются главными центральными осями инерции, так как тело симметрично относительно этих осей. Имеем (рис. 12.9)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = 90^\circ, \quad \cos\gamma = 0.$$

Пользуясь таблицей моментов инерции, найдем

$$I_x = {}^1/_3 Mb^2, \quad I_y = {}^1/_3 Ma^2, \quad I_z = {}^1/_3 M(a^2+b^2).$$

Внося эти значения в формулу (12.17), получим момент инерции однородной пластинки относительно ее диагонали:

$$I = \frac{1}{3} Mb^2 \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{3} Ma^2 \frac{b^2}{a^2+b^2},$$

или, после упрощения,

$$I = \frac{2}{3} M \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

§ 12.6. Эллипсоид инерции

Возьмем в теле точку O и проведем через нее ось OL. Пусть момент инерции тела относительно этой оси равен I. При изменении направления оси OL будет изменяться момент инерции I. Простое и вместе с тем очень наглядное представление об изменении момента инерции в зависимости от изменения положения оси, проходящей через данную точку O, дает следующее геометрическое построение.

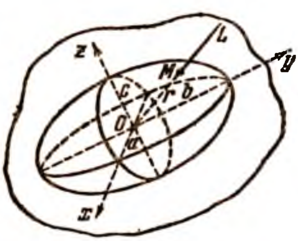


Рис. 12.10

Отложим на прямой OL отрезок OM (рис. 12.10), длину которого в соответствующем масштабе определим равенством

$$OM = r = \frac{1}{\sqrt{I}}. \tag{12.18}$$

Построим систему координат $Ox_1y_1z_1$ (на рис. 12.10 оси x_1, y_1 и z_1 не показаны). Обозначим координаты точки M в этой координатной системе через x_1, y_1 и z_1. Так как точка M принадлежит прямой OL, то будем иметь

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r} = x_1\sqrt{I}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{r} = y_1\sqrt{I}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{r} = z_1\sqrt{I},$$

где α, β и γ — углы, определяющие направление оси OL.

Внесем эти выражения для направляющих косинусов прямой OL в формулу (12.16) и сократим полученное выражение на I:

$$I_{x_1}x_1^2 + I_{y_1}y_1^2 + I_{z_1}z_1^2 - 2I_{x_1y_1}x_1y_1 - 2I_{y_1z_1}y_1z_1 - 2I_{z_1x_1}z_1x_1 = 1. \tag{12.19}$$

Этому уравнению второго порядка удовлетворяют координаты точки M на прямой OL. Следовательно, оно определяет поверхность, которую описывает точка M при изменении направления прямой OL.

Расстояние от начала координат O до точки M, принадлежащей поверхности (12.19), определяется равенством (12.18). Так как момент инерции I тела относительно любой оси всегда положителен и в нуль не обращается, то все точки поверхности (12.19) находятся на конечном расстоянии от начала координат (случай бесконечно тонкого стержня из рассмотрения временно исключается). Из всех поверхностей второго порядка этому условию удовлетворяет только эллипсоид. Поэтому построенная указанным образом поверхность называется *эллипсоидом инерции*.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение эллипсоида может быть упрощено, если за координатные оси взять три взаимно перпендикулярных направления главных диаметров поверхности. В таких осях уравнение эллипсоида не содержит членов с произведениями координат и имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \tag{12.20}$$

На рис. 12.10 показаны эллипсоид инерции, построенный для точки O, и координатная система $Oxyz$, в которой уравнение эллипсоида инерции имеет вид (12.20).

Из формы уравнения видно, что в этих осях все центробежные моменты равны нулю. Следовательно, для каждой точки существуют три *главные оси инерции*.

Сравнивая уравнение эллипсоида в канонической форме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

с уравнением эллипсоида инерции (12.20), отнесенного к главным осям инерции, найдем

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_z}}. \tag{12.21}$$

Из этих равенств следует, что большему главному моменту инерции соответствует меньшая ось эллипсоида инерции.

Если среди моментов инерции тела относительно главных осей в данной точке нет равных, то эллипсоид инерции называется *трехосным*. При двух равных моментах инерции (например, $I_x = I_y$) эллипсоид инерции превращается в *эллипсоид вращения*. Если же $I_x = I_y = I_z$, то эллипсоид инерции вырождается в сферу; соответствующие точки называются *шаровыми*.

Так как между моментами инерции I_x, I_y и I_z должны существовать соотношения (12.6):

$$I_x + I_y > I_z, \quad I_y + I_z > I_x, \quad I_z + I_x > I_y,$$

то не всякий эллипсоид может служить эллипсоидом инерции. Для бесконечного тонкого стержня эллипсоид инерции вырождается в бесконечный круговой цилиндр.

В заключение этого параграфа отметим, что для эллипсоида вращения любая ось, лежащая в экваториальной плоскости (плоскости равных полуосей эллипсоида) и проходящая через данную точку, является главной осью инерции. Это следует из того, что за главный диаметр эллипсоида вращения можно взять любой диаметр, лежащий в экваториальной плоскости. Этот же результат можно получить и из формулы (12.17).

§ 12.7. Свойства главных осей инерции

В предыдущем параграфе было показано, что в каждой точке можно построить главные оси инерции, т. е. оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю.

Пусть некоторая ось, например ось z, является главной для точки O. Поставим следующий вопрос. Существуют ли на этой оси точки, для которых ось Oz также будет главной осью инерции? Для решения этой задачи построим в точке O главные оси инерции $Oxyz$. По определению главных осей будем иметь

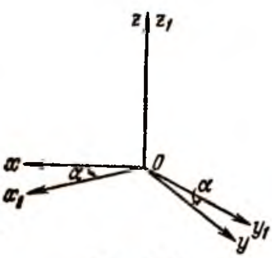


Рис. 12.11

$$I_{xy} = \int xy\,dm = 0, \quad I_{yz} = \int yz\,dm = 0, \quad I_{zx} = \int zx\,dm = 0. \tag{12.22}$$

Покажем прежде всего, что при повороте вокруг оси z осей x и y ось z останется главной осью инерции. Действительно, построим систему координат $Ox_1y_1z_1$, в которой ось z_1 совпадает с осью z, а оси x_1 и y_1 составляют с осями x и y угол α соответственно (рис. 12.11). Возьмем в теле произвольную точку. Между ее координатами x, y, z и x_1, y_1, z_1 существует очевидная связь:

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z_1 = z.$$

Вычислим центробежный момент инерции $I_{x_1z_1}$. Имеем

$$I_{x_1z_1} = \int x_1z_1\,dm = \int (x\cos\alpha + y\sin\alpha)z\,dm = \\ = \cos\alpha\int xz\,dm + \sin\alpha\int yz\,dm.$$

Так как оси x, y и z — главные оси инерции и для них справедливы равенства (12.22), то $I_{x_1z_1} = 0$. Аналогично показывается, что $I_{y_1z_1} = 0$. Таким образом, при повороте вокруг главной оси инерции z двух других осей x и y ось z остается главной осью инерции.

Перейдем теперь к рассмотрению основного вопроса. Если данная ось, например ось z, является главной осью инерции для точки O, то существует ли на этой оси другая точка, для которой ось z является главной осью инерции? Для ответа на этот вопрос выберем на оси z точку O_1 и построим систему координат $O_1x_1y_1z_1$, в которой ось z_1

совпадает с осью z, а оси x_1 и y_1 параллельны осям x и y соответственно (рис. 12.12). Формулы перехода имеют вид

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - h,$$

где $h = OO_1$.

Имеем

$$I_{x_1z_1} = \int x_1z_1\,dm = \int x(z-h)\,dm = \int xz\,dm - h\int x\,dm,$$

$$I_{y_1z_1} = \int y_1z_1\,dm = \int y(z-h)\,dm = \int yz\,dm - h\int y\,dm,$$

откуда с учетом равенств (12.22) и (7.3) получим для центробежных моментов инерции

$$I_{x_1z_1} = -Mhx_C, \qquad I_{y_1z_1} = -Mhy_C, \tag{12.23}$$

где M — масса тела, а x_C и y_C — координаты центра инерции тела в системе $Oxyz$.

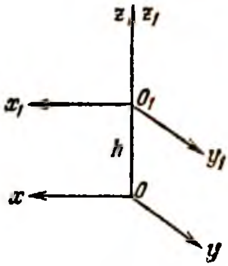


Рис. 12.12

Для того чтобы ось z (z_1) была главной осью инерции для точки O_1, необходимо и достаточно, чтобы оба центробежных момента инерции $I_{x_1z_1}$ и $I_{y_1z_1}$ равнялись нулю. Но согласно формулам (12.23) это возможно только при $x_C = 0$ и $y_C = 0$, т. е. если центр масс тела находится на оси z и, следовательно, ось z является главной центральной осью инерции. Таким образом, главная центральная ось инерции является главной центральной осью инерции для всех своих точек, а нецентральная главная ось инерции является главной осью инерции только для одной своей точки.

§ 12.8. Вычисление моментов инерции относительно произвольных осей

При вычислении моментов инерции обычно стремятся воспользоваться таблицами моментов инерции и теоремой Гюйгенса — Штейнера. Однако очень часто ось, относительно которой необходимо определить момент инерции, не параллельна ни одной из главных центральных осей инерции и не проходит через центр масс. В этих случаях наиболее рационально комбинировать формулу (12.17) с теоремой Гюйгенса—Штейнера и данными таблиц.

Пусть для тела известны главные центральные моменты инерции I_x, I_y и I_z. Предположим далее, что дана прямая LL', относительно которой требуется вычислить момент инерции I тела.

Проведем через центр масс тела прямую ll', параллельную LL'. Так как прямая LL' задана, то должны быть известны углы α, β, γ между этой прямой (или, что то же самое, прямой ll') и главными осями инерции x, y и z (рис. 12.13). Вычислим по формуле (12.17) момент инерции I_1 тела относительно оси ll':

$$I_1 = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma. \tag{12.24}$$

Тогда по теореме Гюйгенса—Штейнера момент инерции относительно оси LL' будет равен

$$I = I_1 + Md^2, \tag{12.25}$$

где M — масса тела, а d — расстояние между осями LL' и ll'.

Углы α, β и γ, а также расстояние d необходимо определить из условия задания прямой LL'. Конечно, не представляет труда найти эти величины, если заданы уравнения прямой LL', но обычно их значительно проще определить из условий задачи.

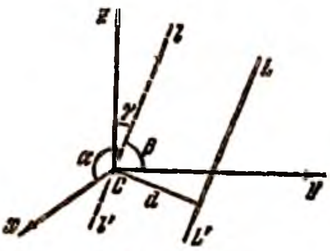


Рис. 12.13

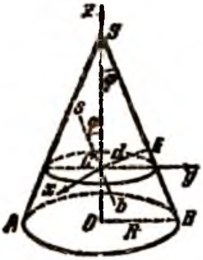


Рис. 12.14

Задача 12.3. Требуется определить момент инерции I прямого кругового конуса относительно образующей SB (рис. 12.14); радиус основания конуса равен R, высота равна H.

Построим систему координат $Cxyz$. Центр масс C конуса находится на его высоте OS, причем $OC = {}^1/_4\,OS = {}^1/_4\,H$. Ось z направим по оси конуса, ось y — параллельно основанию так, чтобы она пересекла образующую SB, ось x — перпендикулярно к плоскости yz. Координатные плоскости yz и xz являются плоскостями симметрии, поэтому оси x, y и z — главные центральные оси инерции конуса. Построим прямую sb, параллельную образующей SB; углы между прямой sb и осями x, y, z соответственно равны: $\alpha = 90°$, $\beta = 90° + \varphi$, $\gamma = \varphi$, где φ — угол полураствора конуса. Внося эти значения углов α, β и γ в формулу (12.14), получим

$$I_1 = I_y \sin^2\varphi + J_z \cos^2\varphi.$$

По таблице моментов инерции найдем

$$I_y = \frac{3}{20} M\left(\frac{1}{4} H^2 + R^2\right), \qquad I_z = \frac{3}{10} MR^2.$$

Из рис. 12.14 определяем

$$\sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для I_1, получим

$$I_1 = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{H^2+R^2}\left(\frac{9}{4} H^2 + R^2\right).$$

Расстояние d от центра масс C конуса до образующей найдем из треугольника CES:

$$d = CS \sin\varphi = \frac{3}{4} H \frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}.$$

Теперь с помощью формулы (12.25) легко находим момент инерции I конуса относительно его образующей:

$$I = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{H^2 + R^2} (6H^2 + R^2).$$

§ 12.9. Вычисление тензора инерции

При решении различных задач динамики, в частности, при определении динамических реакций опор твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, необходимо знать не только осевые, но и центробежные моменты инерции относительно вполне определенных координатных осей; короче говоря, необходимо знать тензор инерции I в произвольно выбранной координатной системе (см. формулу (12.10)). Конечно, при вычислении составляющих тензора инерции можно пользоваться основными формулами (12.3) и (12.8). Однако в тех случаях, когда известны моменты инерции тела относительно главных центральных осей, задача может быть существенно упрощена.

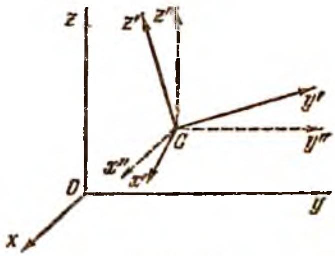


Рис. 12.15

Пусть тензор инерции I тела требуется определить для прямоугольной системы координат $Oxyz$. Будем считать, что нам известно положение центра масс C тела, т. е. известны координаты x_C, y_C, z_C в системе $Oxyz$, направления главных центральных осей инерции x', y', z' и соответствующие моменты инерции $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ — см. рис. 12.15 (в отличие от ранее применявшихся обозначений, главные центральные оси обозначены штрихами).

Построим вспомогательную систему координат $Cx''y''z''$, оси которой параллельны соответствующим осям системы $Oxyz$. Тогда направления главных центральных осей $Cx'y'z'$ будут определяться таблицей направляющих косинусов:

	x'	y'	z'
x, x''	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y, y''	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z, z''	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(12.26)

В этой таблице α_{ij} — косинусы углов между соответствующими осями; так, например, $\alpha_{32} = \cos(\widehat{z, y'}) = \cos(\widehat{z'', y'})$.

Моменты инерции I_x, I_y и I_z относительно осей x, y и z можно вычислить по формуле (12.25). По формуле (12.24) имеем

$$I_{1x} = \alpha_{11}^2 I_{x'} + \alpha_{12}^2 I_{y'} + \alpha_{13}^2 I_{z'}.$$

Квадрат расстояния между осями x и x'' равен, очевидно, расстоянию от точки C до оси x, т. е. $y_C^2 + z_C^2$. Поэтому согласно формуле (12.25) будем иметь (две другие формулы получаются аналогично)

$$\begin{aligned} I_x &= M\left(y_C^2 + z_C^2\right) + \alpha_{11}^2 I_{x'} + \alpha_{12}^2 I_{y'} + \alpha_{13}^2 I_{z'}, \\ I_y &= M\left(z_C^2 + x_C^2\right) + \alpha_{21}^2 I_{x'} + \alpha_{22}^2 I_{y'} + \alpha_{23}^2 I_{z'}, \\ I_z &= M\left(x_C^2 + y_C^2\right) + \alpha_{31}^2 I_{x'} + \alpha_{32}^2 I_{y'} + \alpha_{33}^2 I_{z'}. \end{aligned} \qquad (12.27)$$

Перейдем к вычислению центробежных моментов инерции тела относительно осей x, y, z. Рассмотрим произвольную точку N тела. Пусть ее координаты в системе $Cx'y'z'$ будут x', y' и z', а в системе $Oxyz$ — x, y, z. Эти координаты связаны формулами преобразования

$$\begin{aligned} x &= x_C + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y &= y_C + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z &= z_C + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{aligned}$$

Так как оси x', y', z' являются главными центральными осями инерции тела, то все центробежные моменты инерции относительно этих осей и все статические моменты равны нулю:

$$\begin{gathered} I_{x'y'} = \int x'y'\,dm = 0, \quad I_{y'z'} = \int y'z'\,dm = 0, \quad I_{z'x'} = \int z'x'\,dm = 0, \\ \int x'\,dm = 0, \qquad \int y'\,dm = 0, \qquad \int z'\,dm = 0. \end{gathered} \tag{12.28}$$

По определению центробежных моментов инерции имеем

$$I_{xy} = \int xy\,dm.$$

Подставим сюда значения x и y из формул преобразования, раскроем скобки и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} I_{xy} = x_C y_C \int dm &+ (\alpha_{21}x_C + \alpha_{11}y_C) \int x'\,dm + \\ &+ (\alpha_{22}x_C + \alpha_{12}y_C) \int y'\,dm + (\alpha_{23}x_C + \alpha_{13}y_C) \int z'\,dm + \\ &+ \alpha_{11}\alpha_{21} \int x'^2\,dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int y'^2\,dm + \alpha_{13}\alpha_{23} \int z'^2\,dm + \\ &+ (\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) \int x'y'\,dm + \\ &+ (\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}) \int x'z'\,dm + (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22}) \int y'z'\,dm, \end{aligned}$$

или, учитывая равенства (12.28),

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int x'^2\,dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int y'^2\,dm + \alpha_{13}\alpha_{23} \int z'^2\,dm.$$

Так как оси x и y взаимно перпендикулярны, то

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0;$$

отсюда

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = -(\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}).$$

Подставим это выражение в последнее равенство для I_{xy}:

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int x'^2\,dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int y'^2\,dm - (\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}) \int z'^2\,dm,$$

или, группируя члены,

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int (x'^2 - z'^2)\,dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int (y'^2 - z'^2)\,dm.$$

Добавляя и вычитая в первом интеграле y'^2, а во втором x'^2, будем иметь

$$I_{xy} = Mx_Cy_C + \alpha_{11}\alpha_{21}\left[\int (x'^2+y'^2)\,dm - \int (z'^2+y'^2)\,dm\right] +$$
$$+ \alpha_{12}\alpha_{22}\left[\int (y'^2+x'^2)\,dm - \int (z'^2+x'^2)\,dm\right].$$

Пользуясь выражениями (12.3) для осевых моментов инерции, найдем (две другие формулы получены аналогичным методом)

$$\begin{aligned} I_{xy} &= Mx_Cy_C + \alpha_{11}\alpha_{21}(I_{z'} - I_{x'}) + \alpha_{12}\alpha_{22}(I_{z'} - I_{y'}), \\ I_{yz} &= My_Cz_C + \alpha_{21}\alpha_{31}(I_{z'} - I_{x'}) + \alpha_{22}\alpha_{32}(I_{z'} - I_{y'}), \\ I_{zx} &= Mz_Cx_C + \alpha_{11}\alpha_{31}(I_{z'} - I_{x'}) + \alpha_{13}\alpha_{12}(I_{z'} - I_{y'}). \end{aligned} \tag{12.29}$$

Формулы (12.27) и (12.29) дают решение поставленной задачи об определении тензора инерции I в произвольной системе координат $Oxyz$.

§ 12.10. Задачи на вычисление моментов инерции

Задача об определении тензора инерции сводится к определению осевых и центробежных моментов инерции. Если направления главных центральных осей инерции нам не известны, то приходится прибегать к основным формулам (12.3) и (12.8). Но в тех случаях, когда известен тензор инерции для главных центральных осей инерции, его составляющие для произвольных осей определяются формулами (12.27) и (12.29).

Задача 12.4. Однородный диск D радиусом r и массой M насажен на вал, установленный в подшипниках A и B (рис. 12.16). При сборке были допущены погрешности, в результате которых ось вала пересекает плоскость диска в точке O, не совпадающей с центром C диска; кроме того, ось вала не перпендикулярна к плоскости диска и составляет с ней угол $90°-\alpha$. Определить момент инерции диска относительно оси вращения AB и его центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} (положение осей Ox и Oy будет указано в дальнейшем).

Рис. 12.16

Пусть прямая OE представляет проекцию оси вращения AB на плоскость диска. Опустим из центра C диска на прямую OE перпендикуляр и примем его за ось Cy'; ось Cx' построим в плоскости диска перпендикулярно к оси Cy'; ось Cz' перпендикулярна к плоскости диска. Очевидно, что оси Cx', Cy' и Cz' — главные центральные оси инерции диска. Через точку C проведем ось Cz'', параллельную оси вращения z, ось Cy'' совместим с осью Cy', а ось Cx'' проведем перпендикулярно к осям Cy'' и Cz''. При таком построении угол между осями x' и x'' равен α. Оси Ox и Oy параллельны осям Cx'' и Cy''.

Таблица направляющих косинусов имеет вид

	x'	y'	z'
x, x''	$\cos\alpha$	0	$-\sin\alpha$
y, y''	0	1	0
z, z''	$\sin\alpha$	0	$\cos\alpha$

Обозначим координаты точки O в осях $Cx'y'z'$, связанных с диском, через $\varepsilon, \delta, 0$ (см. рис. 12.16). Тогда координаты центра C диска в системе $Oxyz$ будут

$$x_C = -\varepsilon\cos\alpha, \quad y_C = -\delta, \quad z_C = -\varepsilon\sin\alpha.$$

Из таблицы моментов инерции найдем (§ 12.3)

$$I_{x'} = I_{y'} = {}^1/_4 Mr^2, \quad I_{z'} = {}^1/_2 Mr^2.$$

Воспользуемся далее третьей формулой (12.27):

$$I_z = M\left(x_C^2 + y_C^2\right) + \alpha_{31}^2 I_{x'} + \alpha_{32}^2 I_{y'} + \alpha_{33}^2 I_{z'}.$$

В нашем случае согласно таблице направляющих косинусов $\alpha_{31} = \sin\alpha$, $\alpha_{32} = 0$, $\alpha_{33} = \cos\alpha$. Пользуясь соответствующими выражениями, получим

$$I_z = M(\varepsilon^2\cos^2\alpha + \delta^2) + {}^1/_4 Mr^2\sin^2\alpha + {}^1/_2 Mr^2\cos^2\alpha,$$

или, группируя члены,

$$I_z = M\left[\delta^2 + (\varepsilon^2 + {}^1/_2 r^2)\cos^2\alpha + {}^1/_4 r^2\sin^2\alpha\right]. \tag{12.30}$$

Теперь с помощью формул (12.29) найдем после очевидных преобразований центробежные моменты

$$I_{xz} = {}^1/_2 M\varepsilon^2\sin 2\alpha + {}^1/_8 Mr^2\sin 2\alpha, \quad I_{yz} = M\delta\varepsilon\sin\alpha. \tag{12.31}$$

При правильной сборке будем иметь $\varepsilon = \delta = 0$, $\alpha = 0$. Следовательно, $I_z = {}^1/_2 Mr^2$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$, что очевидно.

Задача 12.5. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы KF длиной L и массой m_1, противовеса D массой m_2 и груза E массой m_3. Стрела составляет с вертикальной осью вращения угол α. Определить момент инерции I_z крана относительно оси вращения z и центробежные моменты, считая противовес D и груз E точечными массами, а стрелу — однородной тонкой балкой. Оси координат и геометрические размеры показаны на рис. 12.17; оси x и x' перпендикулярны к плоскости рисунка.

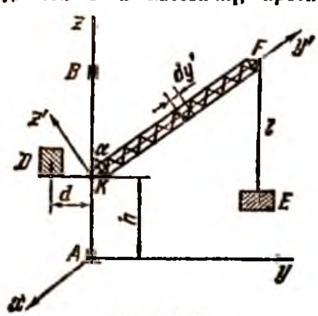


Рис. 12.17

Система состоит из трех тел: стрелы KF, противовеса D и груза E. Поэтому

$$I_z = I_z^{KF} + I_z^D + I_z^E.$$

Для точечных масс имеем

$$I_z^D = m_2 d^2, \quad I_z^E = m_3 L^2 \sin^2\alpha.$$

Момент инерции I_z^{KF} стрелы KF относительно оси вращения крана вычислим по формуле (12.17):

$$I_z^{KF} = I_{x'}^{KF}\cos^2(\widehat{x', z}) + I_{y'}^{KF}\cos^2(\widehat{y', z}) + I_{z'}^{KF}\cos^2(\widehat{z', z}).$$

В нашем случае $(\widehat{x', z}) = 90°$ и $\cos(\widehat{x', z}) = 0$, $I_{y'}^{KF} = 0$ (по условию задачи стрела KF представляет собой тонкую балку), $\cos(\widehat{z', z}) = \sin\alpha$ и $I_{z'}^{KF} = {}^1/_3 m_1 L^2$. Следовательно, момент инерции I_z всего крана относительно оси вращения z будет

$$I_z = m_2 d^2 + L^2\sin^2\alpha\left(\frac{m_1}{3} + m_3\right). \tag{12.32}$$

Центробежные моменты инерции I_{xy} и I_{xz} равны нулю, так как вся система находится в плоскости yz. Учитывая, что система состоит из трех тел, будем иметь

$$I_{yz}=I_{yz}^{KF}+I_{yz}^{D}+I_{yz}^{E}.$$

Для точечных масс D и E

$$I_{yz}^{D}=-m_2 dh,\qquad I_{yz}^{E}=m_3L\sin\alpha\,(h-l+L\cos\alpha).$$

Центробежный момент инерции I_{yz}^{KF} стрелы KF найдем путем непосредственного интегрирования. Для этого выделим элемент dy' с массой $dm=(m_1/L)\,dy'$. Координаты этого элемента —

$$y=y'\cos\alpha,\quad z=y'\cos\alpha+h,$$

где y' — расстояние вдоль стрелы от точки K до элемента dy'. Имеем

$$I_{yz}^{KF}=\int yz\,dm=\frac{m_1}{L}\int_0^L (h+y'\cos\alpha)\,y'\sin\alpha\,dy'=m_1L\sin\alpha\left(\frac{h}{2}+\frac{L}{3}\cos\alpha\right).$$

Для всей системы будем иметь

$$I_{yz}=L\sin\alpha\left[\frac{m_1L}{3}\cos\alpha+m_3(L\cos\alpha-l)\right]+\\+h\left(m_3L\sin\alpha+\frac{m_1L}{2}\sin\alpha-m_2d\right).$$

Если центр масс лежит на оси вращения, то

$$m_3L\sin\alpha+\frac{m_1L}{2}\sin\alpha-m_2d=0,$$

и выражение для центробежного момента упрощается:

$$I_{yz}=L\sin\alpha\left[\frac{m_1L}{3}\cos\alpha+m_3(L\cos\alpha-l)\right].\tag{12.33}$$

Задача 12.6. Определить тензор инерции однородной тонкой пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника, для осей координат, связанных с его катетами; длины катетов равны a и b (рис. 12.18).

Так как плоскость пластинки совпадает с плоскостью xy, то для всех точек $z=0$; формулы (12.3) и (12.8) принимают вид

$$I_x=\int y^2\,dm,\qquad I_y=\int x^2\,dm,\qquad I_z=I_x+I_y,$$

$$I_{xy}=\int xy\,dm,\qquad I_{xz}=0,\qquad I_{yz}=0.$$

Пусть γ — поверхностная плотность пластинки. Тогда ее масса M будет равна

$$M={}^1/_2\gamma ab.$$

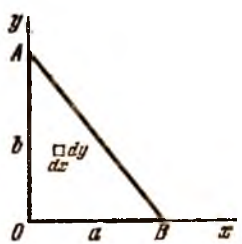


Рис. 12.18

В качестве элемента пластинки возьмем прямоугольник со сторонами dx и dy; его масса $dm=\gamma\,dx\,dy$.

Уравнение гипотенузы можно записать как уравнение прямой линии в отрезках, отсекаемых на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Отсюда найдем

$$y=\frac{b}{a}(a-x).$$

Пусть x будет внешней переменной интегрирования, а y — внутренней. Тогда пределы интегрирования по x будут 0 и a, а пределы интегрирования по y суть 0 и $\frac{b}{a}(a-x)$. Имеем

$$I_x = \int y^2\,dm = \gamma\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} y^2\,dy = \frac{\gamma}{3}\int_0^a y^3 \Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx =$$

$$= \frac{\gamma b^3}{3a^3}\int_0^a (a-x)^3\,dx = -\frac{\gamma b^3}{3a^3}\,\frac{(a-x)^4}{4}\Big|_0^a = \frac{\gamma}{12}ab^3.$$

Так как $\gamma = 2M/(ab)$, то

$$I_x = {}^1/_6 Mb^2, \qquad I_y = {}^1/_6 Ma^2, \qquad I_z = {}^1/_6 M(a^2+b^2) \tag{12.34}$$

(I_y получено надлежащей заменой букв).

Перейдем к вычислению центробежного момента инерции

$$I_{xy} = \int xy\,dm = \gamma\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} xy\,dy = \frac{\gamma}{2}\int_0^a xy^2 \Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx =$$

$$= \frac{\gamma b^2}{2a^2}\int_0^a x(a-x)^2\,dx = \frac{\gamma b^2}{2a^2}\int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3)\,dx =$$

$$= \frac{\gamma b^2}{2a^2}\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a = \frac{\gamma}{24}a^2b^2.$$

Подставляя значение γ, найдем

$$I_{xy} = \frac{M}{12}ab. \tag{12.35}$$

Тензор инерции имеет такой вид:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{M}{6}b^2 & -\frac{M}{12}ab & 0 \\ -\frac{M}{12}ab & \frac{M}{6}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{6}(a^2+b^2) \end{pmatrix}.$$

Глава XIII

ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 13.1. Основные задачи динамики твердого тела

В статике нами были рассмотрены условия равновесия систем сил, приложенных к абсолютно твердому телу, и условия, при которых твердое тело находится в покое. Задание движения твердого тела и определение скоростей и ускорений точек твердого тела было рассмотрено в кинематике. При изучении динамики твердого тела встают более сложные задачи. Эти задачи делятся на две основные группы. К одной группе относятся задачи, в которых по заданному движению твердого тела требуется определить систему сил, под действием которых происходит это движение. К другой группе относятся задачи, в которых по заданным силам, действующим на твердое тело, требуется при определенных начальных условиях найти закон движения тела, а для несвободного тела найти также реакции связей.

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, следовательно, для определения положения в пространстве требуется шесть независимых между собой параметров. В качестве таких параметров чаще всего выбирают координаты центра масс твердого тела и углы Эйлера или какую-либо другую систему углов, наиболее удобных в рассматриваемой конкретной задаче.

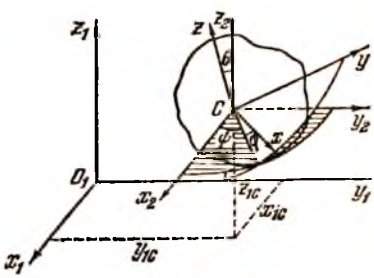


Рис. 13.1

Пусть твердое тело движется по отношению к неподвижной (инерциальной) системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 13.1). Предположим, что система координат $Cx_2y_2z_2$, имеющая начало в центре масс тела, движется поступательно, а система координат $Cxyz$ жестко связана с твердым телом.

Очевидно, что координаты центра масс (x_{1C}, y_{1C}, z_{1C}) и углы Эйлера θ, ψ, φ, которые составляет система координатных осей $Cxyz$ с осями системы $Cx_2y_2z_2$, полностью определяют положение твердого тела.

Для того чтобы решать сформулированные задачи динамики твердого тела, следует найти уравнения, связывающие эти параметры с силами, действующими на твердое тело. Этих уравнений должно быть шесть, так как число независимых параметров равно шести.

Для получения этих уравнений воспользуемся теоремой о движении центра масс (§ 8.3) и теоремой об изменении момента количеств движения в относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно и имеющей начало в центре масс твердого тела (§ 9.7).

Согласно теореме о движении центра масс:

$$M\mathbf{w}_C = \mathbf{F}^e$$

имеем

$$M\ddot{x}_{1C} = F^e_{x_1}, \quad M\ddot{y}_{1C} = F^e_{y_1}, \quad M\ddot{z}_{1C} = F^e_{z_1}, \tag{13.1}$$

где x_{1C}, y_{1C}, z_{1C} — координаты центра масс в неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, а $F^e_{x_1}$, $F^e_{y_1}$, $F^e_{z_1}$ — проекции главного вектора всех внешних сил на те же оси.

Используя теперь теорему об изменении момента количеств движения в относительном движении (§ 9.7):

$$\frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}^e_C, \tag{13.2}$$

аналогично можно получить три соотношения, связывающие углы Эйлера с моментами сил относительно координатных осей. Вывод этих соотношений будет приведен в главе XIV.

Эти соотношения и уравнения (13.1) и дают возможность решать сформулированные выше задачи динамики твердого тела.

§ 13.2. Количество движения, момент количеств движения и кинетическая энергия твердого тела

Для составления дифференциальных уравнений движения твердого тела при различных случаях его движения нам придется, как уже говорилось, пользоваться общими теоремами динамики системы. Поэтому в этом параграфе приводятся выражения для количества движения, момента количеств движения и кинетической энергии твердого тела для различных случаев его движения.

Количество движения твердого тела выражается в соответствии с формулой (8.2) следующим равенством:

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C, \tag{13.3}$$

где M — масса тела, $\mathbf{v}_C$ — скорость центра масс.

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его центра масс определяется формулой

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, а $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс, проведенный из неподвижной точки тела.

Проекции вектора количества движения на оси координат, имеющих начало в неподвижной точке тела, найдем из соотношения

$$\mathbf{Q} = M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) = M\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix},$$

где ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости, x_C, y_C, z_C — координаты центра масс, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей. Проекции вектора количества движения будут равны

$$Q_x = M(\omega_y z_C - \omega_z y_C), \quad Q_y = M(\omega_z x_C - \omega_x z_C), \quad Q_z = M(\omega_x y_C - \omega_y x_C). \tag{13.4}$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси вектор его угловой скорости направлен по оси вращения. Если теперь ввести систему координат с началом в какой-либо точке оси вращения, а ось z совместить с осью вращения, то вектор угловой скорости представится в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k} = \dot{\varphi}\mathbf{k},$$

где φ — угол поворота тела.

Формулы (13.4) в этом случае будут иметь вид

$$Q_x = -My_C\dot{\varphi}, \quad Q_y = Mx_C\dot{\varphi}, \quad Q_z = 0. \tag{13.5}$$

Момент количеств движения системы относительно начала координат определяется формулой (9.1):

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор k-й точки системы, m_k и $\mathbf{v}_k$ — ее масса и скорость.

Проекции момента количеств движения на координатные оси имеют следующий вид (9.2):

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}), \\ K_y &= \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}), \\ K_z &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}). \end{aligned} \tag{13.6}$$

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его любой точки находится по формуле

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость.

Выражения для проекций скорости $\mathbf{v}$ имеют вид

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \tag{13.7}$$

где x, y, z — координаты рассматриваемой точки.

Подставляя эти формулы в первое равенство (13.6) и переходя для твердого тела от суммы к интегралу, получим

$$K_x = \int [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)]\,dm = \\ = \int [\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz]\,dm.$$

Так как ω_x, ω_y и ω_z не зависят от переменных интегрирования, то

$$K_x = \omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int xz\, dm.$$

В этом равенстве $I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$ — момент инерции твердого тела относительно оси x, $I_{xy} = \int xy\, dm$ и $I_{xz} = \int xz\, dm$ — центробежные моменты инерции. Проделав аналогичные выкладки с выражениями для K_y и K_z, получим

$$\begin{gathered} K_x = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \quad K_y = -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ K_z = -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z. \end{gathered} \tag{13.8}$$

Если оси координат, имеющие начало в неподвижной точке O тела, будут главными осями инерции тела, то $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ и формулы (13.8) примут вид

$$K_x = I_x\omega_x, \quad K_y = I_y\omega_y, \quad K_z = I_z\omega_z. \tag{13.9}$$

Формулы (13.9) определяют проекции момента количеств движения абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, на оси координат, жестко связанные с телом. Из формул (13.8) и (13.9) видно, что в общем случае проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ и проекции вектора $\mathbf{K}$ не пропорциональны между собой, следовательно, направления векторов $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают.

При движении тела вокруг неподвижной оси при условии, что ось z направлена по оси вращения тела, имеем

$$K_x = -I_{xz}\omega_z = -I_{xz}\dot\varphi, \quad K_y = -I_{yz}\omega_z = -I_{yz}\dot\varphi, \quad K_z = I_z\omega_z = I_z\dot\varphi. \tag{13.10}$$

Перейдем теперь к нахождению кинетической энергии абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Кинетическая энергия твердого тела определяется формулой (10.6):

$$T = \frac{1}{2} \int v^2\, dm,$$

или (так как $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$)

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\, dm.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости точки твердого тела $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, получим

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm.$$

Вспоминая свойства скалярно-векторного произведения

$$\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

будем иметь

$$T=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,dm=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,dm,$$

но так как $\mathbf{K}=\int(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,dm$ есть момент количеств движения, то

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{K}. \tag{13.11}$$

Используя формулы (13.8), перепишем выражение (13.11) в виде *)

$$T={}^1/_2(\omega_xK_x+\omega_yK_y+\omega_zK_z)={}^1/_2(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2-\\-2I_{xy}\omega_x\omega_y-2I_{xz}\omega_x\omega_z-2I_{yz}\omega_y\omega_z). \tag{13.12}$$

Если оси координат x, y и z совпадают с главными осями инерции, то $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$ и

$$T={}^1/_2(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2). \tag{13.13}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси, например оси z, имеем $\omega_x=\omega_y=0$ и, следовательно,

$$T={}^1/_2I_z\omega_z^2={}^1/_2I_z\dot\varphi^2. \tag{13.14}$$

Примечание. Из формулы (13.12) следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\omega_x}&=I_x\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z=K_x,\\
\frac{\partial T}{\partial\omega_y}&=-I_{xy}\omega_x+I_y\omega_y-I_{yz}\omega_z=K_y,\\
\frac{\partial T}{\partial\omega_z}&=-I_{xz}\omega_x-I_{yz}\omega_y+I_z\omega_z=K_z,
\end{aligned} \tag{13.15}$$

т. е. частная производная от кинетической энергии твердого тела, имеющего неподвижную точку, по проекции угловой скорости на какую-либо ось, равна моменту количеств движения относительно этой оси.

§ 13.3. Поступательное движение твердого тела

Рассмотрим сначала решение первой задачи динамики. Пусть тело движется поступательно и координаты центра масс тела являются известными функциями времени. Это значит, что относительно поступательно движущейся системы координат $Cx_2y_2z_2$ тело

*) Формулу (13.12) можно получить и другим путем. Представив выражение для кинетической энергии в виде $T={}^1/_2\int(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,dm$ и подставляя сюда выражения для v_x, v_y и v_z из (13.7), получим формулу (13.12).

находится в покое. Следовательно, угловая скорость и момент количеств движения тела относительно центра масс равны нулю и в соответствии с (13.2) $\mathbf{M}_C^e = 0$. Таким образом, *для осуществления поступательного движения необходимо, чтобы главный момент всех внешних сил относительно центра масс был равен нулю.*

Отметим, что условие $M_C^e = 0$ не является достаточным для поступательного движения тела, так как при этом тело может совершать движение относительно центра масс. Характер этого движения будет рассмотрен подробно в главе XIV.

Легко показать (мы не будем останавливаться на этом), что если главный момент всех внешних сил относительно центра масс и начальная угловая скорость тела равны нулю, то тело будет двигаться поступательно (необходимое и достаточное условие поступательного движения).

Так как координаты центра масс (x_{1C}, y_{1C}, z_{1C}) являются известными функциями времени, то, вычисляя вторые производные ($\ddot{x}_{1C}$, $\ddot{y}_{1C}$, $\ddot{z}_{1C}$) и используя соотношения (13.1), получим проекции главного вектора всех внешних сил ($F_{x_1}^e$, $F_{y_1}^e$, $F_{z_1}^e$).

При решении второй задачи динамики, если заданы $F_{x_1}^e$, $F_{y_1}^e$ и $F_{z_1}^e$, соотношения (13.1) будут представлять собой уже дифференциальные уравнения движения, и решение их при определенных начальных условиях определит движение центра масс.

Если заранее известно, что тело движется поступательно, то на уравнения (13.1) можно смотреть как на дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

§ 13.4. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и уравнения для определения реакций подшипников

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, является примером несвободного твердого тела. Следовательно, при изучении его движения необходимо применить принцип освобождаемости, т. е. действие связей (в данном случае подшипников) следует заменить реакциями этих связей и рассматривать твердое тело как свободное.

Введем две системы координат с началом в какой-либо точке O оси вращения (рис. 13.2): неподвижную $Ox_1y_1z_1$, где ось z_1 совпадает с осью вращения тела, и подвижную $Oxyz$, жестко связанную с твердым телом (ось z совпадает с осью вращения тела). Положение тела будем определять углом φ между плоскостями x_1Oz_1 и xOz.

Отметим, что направления реакций подшипников заранее не известны. Пусть X_A, Y_A, Z_A — проекции реакции $\mathbf{R}_A$; X_B, Y_B,

Z_B — проекции реакции $\mathbf{R}_B$ на оси *подвижной* системы координат $Oxyz$; тогда можно записать

$$\mathbf{R}_A = X_A\mathbf{i} + Y_A\mathbf{j} + Z_A\mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_B = X_B\mathbf{i} + Y_B\mathbf{j} + Z_B\mathbf{k}, \tag{13.16}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей $Oxyz$.

Для нахождения закона движения тела и реакций подшипников воспользуемся теоремами об изменении количества движения и момента количеств движения системы:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B, \tag{13.17}$$

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e + \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_A) + \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_B). \tag{13.18}$$

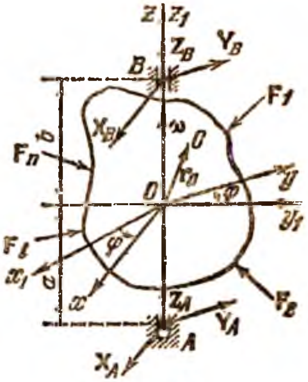


Рис. 13.2

Чтобы получить уравнения для определения движения и реакций подшипников, необходимо векторные уравнения (13.17) и (13.18) записать в проекциях на оси координат.

Так как координаты центра масс x_C, y_C и центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} в подвижной системе координат будут постоянными, то векторные уравнения (13.17) и (13.18) целесообразнее проектировать на оси подвижной системы координат.

Итак, определяем векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{K}_O$ в подвижной системе координат:

$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}, \tag{13.19}$$

$$\mathbf{K}_O = K_x\mathbf{i} + K_y\mathbf{j} + K_z\mathbf{k}. \tag{13.20}$$

Из курса кинематики известно, что если какой-либо вектор $\mathbf{a}$ задан в подвижной системе координат, то абсолютная производная от этого вектора

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}, \tag{13.21}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы координат; $\frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k}$ — относительная производная.

Поскольку векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{K}_O$ определены в подвижной системе координат, то согласно формуле (13.21) имеем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{Q}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{Q}, \quad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O, \tag{13.22}$$

где ω — угловая скорость твердого тела (система $Oxyz$ с ним жестко связана), причем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\frac{dQ_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dQ_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dQ_z}{dt}\mathbf{k},\quad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt}=\frac{dK_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dK_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dK_z}{dt}\mathbf{k}. \tag{13.23}$$

Уравнения (13.17) и (13.18) с учетом (13.22) принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{Q}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{Q}=\mathbf{F}^e+\mathbf{R}_A+\mathbf{R}_B,\\ \frac{d\mathbf{K}_O}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O=\mathbf{M}_O^e+\mathbf{M}_O(\mathbf{R}_A)+\mathbf{M}_O(\mathbf{R}_B).\end{gathered} \tag{13.24}$$

Пусть координаты подшипников A и B соответственно будут $0,\ 0,\ z_A$ и $0,\ 0,\ z_B$ (на рис. 13.2 приведен случай, когда $z_A=-a$, $z_B=b$); тогда

$$\mathbf{r}_A=z_A\mathbf{k},\qquad \mathbf{r}_B=z_B\mathbf{k}.$$

Моменты реакций подшипников определяются по формулам

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}_A)=\mathbf{r}_A\times\mathbf{R}_A=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&0&z_A\\X_A&Y_A&Z_A\end{vmatrix},\quad \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_B)=\mathbf{r}_B\times\mathbf{R}_B=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&0&z_B\\X_B&Y_B&Z_B\end{vmatrix},$$

откуда

$$\begin{gathered}M_x(\mathbf{R}_A)=-z_AY_A,\quad M_y(\mathbf{R}_A)=z_AX_A,\quad M_z(\mathbf{R}_A)=0,\\ M_x(\mathbf{R}_B)=-z_BY_B,\quad M_y(\mathbf{R}_B)=z_BX_B,\quad M\ (\mathbf{R}_B)=0.\end{gathered} \tag{13.25}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\omega}=\dot\varphi\mathbf{k}$, а также соотношения (13.19), (13.20) и (13.25), запишем уравнения (13.17) и (13.18) в проекциях на оси подвижной системы координат:

$$\begin{gathered}\frac{dQ_x}{dt}-\dot\varphi Q_y=F_x^e+X_A+X_B,\\ \frac{dQ_y}{dt}+\dot\varphi Q_x=F_y^e+Y_A+Y_B,\\ 0=F_z^e+Z_A+Z_B,\\ \frac{dK_x}{dt}-\dot\varphi K_y=M_x^e-z_AY_A-z_BY_B,\\ \frac{dK_y}{dt}+\dot\varphi K_x=M_y^e+z_AX_A+z_BX_B,\\ \frac{dK_z}{dt}=M_z^e.\end{gathered}$$

В соответствии с (13.5) и (13.10) получим

$$
\begin{aligned}
-My_C\ddot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 &= F_x^e + X_A + X_B,\\
Mx_C\ddot{\varphi} - My_C\dot{\varphi}^2 &= F_y^e + Y_A + Y_B,\\
0 &= F_z^e + Z_A + Z_B;\\
-I_{xz}\ddot{\varphi} + I_{yz}\dot{\varphi}^2 &= M_x^e - z_AY_A - z_BY_B,\\
-I_{yz}\ddot{\varphi} - I_{xz}\dot{\varphi}^2 &= M_y^e + z_AX_A + z_BX_B,\\
I_z\ddot{\varphi} &= M_z^e.
\end{aligned}
\qquad (13.26)
$$

Последнее уравнение системы (13.26) реакций не содержит и было уже получено раньше (§ 9.5). Оно позволяет по заданному закону вращения тела $\varphi(t)$ определить момент главного вектора внешних сил M_z^e относительно оси z или по заданному моменту M_z^e при заданных начальных условиях определить закон движения тела.

Первые пять уравнений служат для определения реакций. Продольные реакции Z_A и Z_B входят только в третье уравнение и от характера движения не зависят, т. е. будут такими же, как и при неподвижном теле. Мы можем определить только их сумму. Если предположить, что продольная реакция в подшипнике B равна нулю, то реакция $Z_A = -F_z^e$.

§ 13.5. Добавочные динамические реакции. Статическая и динамическая уравновешенность тела

Поперечные составляющие реакций, определяемые из первого, второго, четвертого и пятого уравнений (13.26), обусловливаются характером приложенных сил, законом движения тела, а также расположением оси вращения относительно тела.

Предположим, что ось вращения тела является главной центральной осью инерции, т. е. $x_C = y_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Тогда уравнения для определения поперечных реакций подшипников (13.26) примут вид

$$
\begin{aligned}
0 &= F_x^e + X_A^{\text{ст}} + X_B^{\text{ст}},\\
0 &= F_y^e + Y_A^{\text{ст}} + Y_B^{\text{ст}},\\
0 &= M_x^e - z_AY_A^{\text{ст}} - z_BY_B^{\text{ст}},\\
0 &= M_y^e + z_AX_A^{\text{ст}} + z_BX_B^{\text{ст}}.
\end{aligned}
\qquad (13.27)
$$

Реакции, определяемые из этих уравнений, обусловливаются действующими на тело активными силами. При этом следует иметь в виду, что силы, действующие на тело, могут зависеть от закона движения тела (например, силы сопротивления, зависящие от скорости вращения).

Уравнения (13.27) имеют такой же вид, как и уравнения статики для неподвижного тела; поэтому реакции $X_A^{\text{ст}}$, $X_B^{\text{ст}}$, $Y_A^{\text{ст}}$, $Y_B^{\text{ст}}$ условно называют «статическими» реакциями. Употребляя этот термин, следует помнить, что реакции, определяемые из уравнений (13.27) при движении тела, могут отличаться от чисто статических реакций, определяемых по уравнениям (13.27) для неподвижного тела, так как силы, действующие на вращающееся тело, как было уже сказано выше, могут зависеть от характера движения тела.

Возвращаясь к рассмотрению уравнений (13.26), представим реакции X_A, X_B, Y_A, Y_B в виде суммы реакций, определяемых уравнениями (13.27) и реакциями $X_A^{\text{д}}$, $X_B^{\text{д}}$, $Y_A^{\text{д}}$, $Y_B^{\text{д}}$, обусловленными как характером распределения масс в теле, так и характером движения тела, которые назовем *добавочными динамическими реакциями*:

$$\begin{aligned} X_A &= X_A^{\text{д}} + X_A^{\text{ст}}, \quad X_B = X_B^{\text{д}} + X_B^{\text{ст}}, \\ Y_A &= Y_A^{\text{д}} + Y_A^{\text{ст}}, \quad Y_B = Y_B^{\text{д}} + Y_B^{\text{ст}}. \end{aligned} \tag{13.28}$$

Тогда в соответствии с уравнениями (13.27) и соотношениями (13.28) получим из (13.26) уравнения для определения добавочных динамических реакций

$$\begin{aligned} -My_C\ddot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 &= X_A^{\text{д}} + X_B^{\text{д}}, \\ Mx_C\ddot{\varphi} - My_C\dot{\varphi}^2 &= Y_A^{\text{д}} + Y_B^{\text{д}}, \\ -I_{xz}\ddot{\varphi} + I_{yz}\dot{\varphi}^2 &= -z_AY_A^{\text{д}} - z_BY_B^{\text{д}}, \\ -I_{yz}\ddot{\varphi} - I_{xz}\dot{\varphi}^2 &= z_AX_A^{\text{д}} + z_BX_B^{\text{д}}. \end{aligned} \tag{13.29}$$

Выясним теперь, при каких условиях добавочные динамические реакции равны нулю. В этом случае уравнения (13.29) будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_C\dot{\varphi}^2 + y_C\ddot{\varphi} = 0, &\quad x_C\ddot{\varphi} - y_C\dot{\varphi}^2 = 0, \\ I_{xz}\ddot{\varphi} - I_{yz}\dot{\varphi}^2 = 0, &\quad I_{xz}\dot{\varphi}^2 + I_{yz}\ddot{\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{13.30}$$

Эта система однородных линейных алгебраических уравнений относительно x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} распадается на две независимые системы уравнений с одинаковым определителем, не равным нулю:

$$\begin{vmatrix} \ddot{\varphi} & -\dot{\varphi}^2 \\ \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \end{vmatrix} = \ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4 \neq 0,$$

так как для вращающегося тела угловая скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ одновременно в нуль не обращаются.

Следовательно, единственным решением уравнений (13.30) является

$$x_C = y_C = 0, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0. \tag{13.31}$$

Если же теперь принять, что условия (13.31) выполнены, то уравнения (13.29) примут вид

$$X_A^д + X_B^д = 0, \qquad Y_A^д + Y_B^д = 0,$$
$$z_A X_A^д + z_B X_B^д = 0, \quad z_A Y_A^д + z_B Y_B^д = 0,$$

единственным решением которых является $X_A^д = X_B^д = Y_A^д = Y_B^д = 0$, так как $z_B - z_A \neq 0$.

Остановимся на условиях (13.31) несколько подробнее. Условие $x_C = 0$, $y_C = 0$ означает, что центр масс тела находится на оси вращения. Если оно выполнено, то говорят, что тело *статически уравновешено*. Как видно из приведенного анализа, для уничтожения динамических реакций одной статической уравновешенности тела недостаточно. Необходимо, кроме того, чтобы центробежные моменты инерции относительно оси вращения равнялись нулю ($I_{xz} = 0$, $I_{yz} = 0$). Таким образом, *для того чтобы при вращении тела вокруг неподвижной оси не возникали добавочные динамические реакции, необходимо и достаточно, чтобы ось вращения была главной центральной осью инерции.*

Как будет показано в следующем параграфе, динамические реакции иногда во много раз превосходят статические реакции. Поэтому во всех случаях, когда это возможно, стремятся уменьшить или полностью уничтожить их. В особо важных случаях это достигается специальной балансировкой.

§ 13.6. Задачи

Задача 13.1. Центр тяжести махового колеса, масса которого $m = 300$ кг, находится на расстоянии 1 мм от горизонтальной оси вала; расстояния подшипников от колеса равны между собой. Найти реакции подшипников, если вал вращается равномерно, делая $n = 1200$ об/мин. Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения.

Возьмем начало координат в точке O пересечения оси вращения с маховиком. Ось x подвижной системы координат направим по прямой, проходящей через точку C. Оси z и z_1 направим по оси вращения (рис. 13.3). Очевидно, что при таком выборе подвижной системы координат $x_C = -1$ мм, $y_C = 0$.

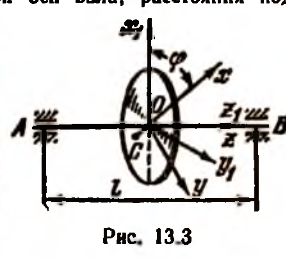


Рис. 13.3

Так как маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения, то центробежные моменты инерции равны нулю, т. е. $I_{xz} = 0$, $I_{yz} = 0$.

Для рассматриваемой задачи

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi \text{ рад/с}.$$

Поскольку маховик находится в середине между подшипниками, то $z_A = -l/2$, $z_B = l/2$, где l — расстояние между подшипниками.

Статические реакции равны:

$$X_{1A} = \frac{mg}{2} = 1470 \text{ H}, \qquad X_{1B} = \frac{mg}{2} = 1470 \text{ H}.$$

Для определения добавочных динамических реакций воспользуемся уравнениями (13.29). Для данной задачи они имеют следующий вид:

$$-mx_C\dot{\varphi}^2 = X_A^{д} + X_B^{д}, \quad 0 = Y_A^{д} + Y_B^{д}, \quad 0 = \frac{l}{2}Y_A^{д} - \frac{l}{2}Y_B^{д},$$

$$0 = -\frac{l}{2}X_A^{д} + \frac{l}{2}X_B^{д}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$X_B^{д} = X_A^{д} = -\frac{m}{2}x_C\dot{\varphi}^2 = -2352 \text{ H}, \quad Y_A^{д} = Y_B^{д} = 0.$$

Таким образом, добавочные динамические реакции в 1,6 раза превосходят статические; направления их линий действия вращаются вместе с маховиком, оставаясь все время параллельными линии OC.

Задача 13.2. Вычислить добавочные динамические реакции в подшипниках A и B при вращении вокруг оси AB однородного тонкого кругового диска CD, предполагая, что ось AB (рис. 13.4) проходит через центр диска, но вследствие неправильного рассверливания втулка составляет с перпендикуляром к плоскости диска $\angle AOE = \alpha = 0{,}02$ рад. Дано: масса диска $M = 3{,}27$ кг, радиус его $r = 20$ см, число оборотов $n = 30\,000$ об/мин, расстояния $AO = 50$ см, $OB = 30$ см. Ось AB считать абсолютно твердой и положить $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$.

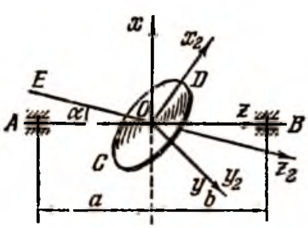


Рис. 13.4

Начало подвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с диском, выберем в центре диска O (см. рис. 13.4). Из условия задачи следует $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_A = -a = -50$ см, $z_B = b = 30$ см.

Статические реакции равны 12,05Н и 20Н.

Момент инерции I_z диска и его центробежные моменты I_{xz} и I_{yz} были получены в задаче 12.4 § 12.10. По формулам (12.30) и (12.31) для нашего случая ($\varepsilon = \delta = 0$) найдем

$$I_z = {}^1/_2 Mr^2 \cos^2\alpha + {}^1/_4 Mr^2 \sin^2\alpha, \quad I_{xz} = {}^1/_8 Mr^2 \sin 2\alpha, \quad I_{yz} = 0.$$

Так как угол α мал, то, ограничиваясь членами первого порядка малости относительно α, получим

$$I_z = {}^1/_2 Mr^2, \quad I_{xz} = {}^1/_4 Mr^2\alpha, \quad I_{yz} = 0.$$

Имеем далее $n = 30\,000$ об/мин,

$$\dot{\varphi} = \frac{\pi n}{30} = 1000\,\pi \text{ рад/с}.$$

Уравнения (13.29) примут вид ($\dot{\varphi} = \text{const}$ и $\ddot{\varphi} = 0$)

$$0 = X_A^{д} + X_B^{д}, \quad 0 = Y_A^{д} + Y_B^{д}, \quad 0 = aY_A^{д} - bY_B^{д}, \quad -{}^1/_4 Mr^2\alpha\dot{\varphi}^2 = -aX_A^{д} + bX_B^{д},$$

откуда получим

$$X_A^д = -X_B^д = \frac{Mr^2\alpha\dot\varphi^2}{4(a+b)}, \quad Y_A^д = Y_B^д = 0,$$

или

$$X_A^д = -X_B^д = \frac{Mr^2\alpha\pi^2\cdot 10^6}{4(a+b)} \approx 8000 \text{ Н}.$$

Реакции опор свелись к паре сил; модуль каждой реакции в 250 раз превосходит силу тяжести самого диска и в 400 раз максимальную статическую реакцию.

Задача 13.3. С какой угловой скоростью должна равномерно вращаться вокруг катета $AB = l$ однородная пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD, чтобы полное боковое давление на нижнюю опору равнялось нулю? Расстояние между опорами считать равным длине катета AB.

Начало подвижной системы координат возьмем в точке B. Ось z направим по вертикали вверх, а ось y проведем в плоскости пластинки. Следовательно, в этом случае $z_A = -l$, $z_B = 0$.

Из рис. 13.5 следует, что $x_C = 0$, $y_C = l/3$. Найдем сначала поперечные статические реакции. Уравнения для их определения имеют вид

$$X_A^{ст} + X_B^{ст} = 0, \quad Y_A^{ст} + Y_B^{ст} = 0,$$

$$Y_A^{ст}l - Mg\frac{l}{3} = 0, \quad -X_A^{ст}l = 0,$$

где M — масса пластинки.

Из этих уравнений следует

$$X_A^{ст} = X_B^{ст} = 0, \quad Y_A^{ст} = -Y_B^{ст} = Mg/3.$$

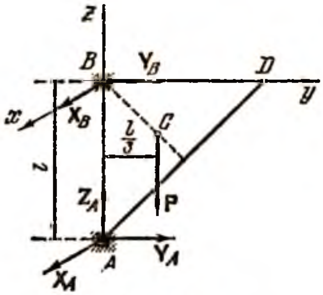


Рис. 13.5

Так как по условию задачи $\ddot\varphi = 0$, то уравнения (13.29) запишутся следующим образом:

$$0 = X_A^д + X_B^д, \quad -\frac{Ml}{3}\dot\varphi^2 = Y_A^д + Y_B^д, \quad I_{yz}\dot\varphi^2 = lY_A^д, \quad -I_{xz}\dot\varphi^2 = -lX_A^д.$$

Центробежные моменты инерции были найдены в задаче 12.6 § 12.10. При равных катетах и выбранном направлении осей из формулы (12.35) найдем $I_{xy} = -Ml^2/12$, $I_{xz} = 0$. Поскольку $I_{xz} = 0$, то будем иметь

$$X_A^д = X_B^д = 0.$$

Реакции $Y_A^д$ и $Y_B^д$ определяются из уравнений

$$-\frac{Ml}{3}\dot\varphi^2 = Y_A^д + Y_B^д, \quad -\frac{Ml^2}{12}\dot\varphi^2 = lY_A^д,$$

откуда

$$Y_A^д = -\frac{Ml}{12}\dot\varphi^2, \quad Y_B^д = -\frac{3Ml}{12}\dot\varphi^2.$$

В задаче требуется определить угловую скорость $\dot\varphi$, при которой полная реакция

$$Y_A = Y_A^{ст} + Y_A^д = 0.$$

Эту угловую скорость найдем из соотношения

$$\frac{Mg}{3} - \frac{Ml}{12}\dot{\varphi}^2 = 0,$$

откуда $\dot{\varphi} = 2\sqrt{g/l}$.

Задача 13.4. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы KF длины L, противовеса D и груза E (рис. 13.6). При включении постоянного по модулю тормозящего момента кран, вращающийся до этого с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \pi/20$ рад/с, останавливается через две секунды. Считая стрелу KF крана однородной тонкой балкой, а противовес D и груз E точечными массами, определить динамические реакции опор A и B крана в конце его торможения. Длина стрелы $L = 6$ м, расстояние между опорами крана $H = 3$ м, длина свисающей части троса $l = 2$ м, масса стрелы $m_1 = 8000$ кг, масса груза $m_3 = 10\,000$ кг, угол $\alpha = 45°$; центр тяжести всей системы находится на оси вращения крана (предполагается, что груз E находится все время в плоскости крана).

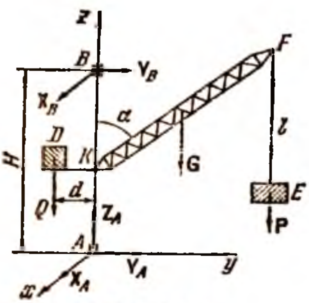


Рис. 13.6

Начало подвижной системы координат возьмем в опоре A, ось z направим по оси вращения вертикально вверх, ось y проведем в плоскости крана. Тогда $z_A = 0$, $z_B = H$.

По условию центр тяжести всей системы лежит на оси вращения. Поэтому $x_C = 0$, $y_C = 0$. Так как система плоская, то $I_{xz} = 0$. Кроме того, в конце вращения крана $\dot{\varphi} = 0$.

Добавочные динамические реакции опор вращающегося крана найдем из уравнений (13.29), которые в нашем случае примут вид

$$0 = X_A^{д} + X_B^{д}, \quad 0 = Y_A^{д} + Y_B^{д}, \quad 0 = -HY_B^{д}, \quad -I_{yz}\ddot{\varphi} = HX_B^{д}.$$

Отсюда находим

$$X_A^{д} = -X_B^{д} = \frac{I_{yz}}{H}\ddot{\varphi}, \quad Y_A^{д} = Y_B^{д} = 0.$$

Угловая скорость вращения крана в начале торможения была $\dot{\varphi} = \frac{\pi}{20}$ рад/с. При постоянном по модулю тормозящем моменте $\ddot{\varphi} = \text{const}$. Так как время торможения $t = 2$ с, то $\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}/t = -\pi/40$ рад/с^2.

Центробежный момент инерции I_{yz} для рассматриваемой системы был найден в задаче 12.5 § 12.10. Для статически уравновешенного крана имеем (см. формулу (12.33))

$$I_{yz} = L\sin\alpha\left[\frac{m_1 L}{3}\cos\alpha + m_3(L\cos\alpha - l)\right].$$

Подставляя числовое значение величин, входящих в полученные формулы, найдем $I_{yz} = 18\cdot 10^6$ кг·м^2, $X_A^{д} = -X_B^{д} = -47$ кН.

Таким образом, в конце торможения добавочные динамические реакции опор вращающегося крана образуют пару сил, лежащую в плоскости, перпендикулярной к плоскости крана. В менее благоприятных условиях (например) при меньшем времени торможения или меньшей длине l свисающего троса, добавочные динамические давления резко возрастают.

§ 13.7. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести. Рассмотрим случай, когда ось вращения горизонтальна. Проведем через центр тяжести C тела плоскость, перпендикулярную к оси вращения. Точка пересечения O этой плоскости с осью вращения называется *точкой подвеса*. Примем эту точку за начало координат. Ось z направим по оси вращения, оси x и y расположим в плоскости, проходящей через центр тяжести и точку подвеса, перпендикулярно к оси вращения (рис. 13.7). Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг оси z согласно § 9.5 запишется следующим образом:

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z^e,$$

где φ — угол между неподвижной осью x и линией OC (см. рис. 13.7).

Так как в этом случае

$$M_z^e = -Mga\sin\varphi,$$

где M — масса тела, a — расстояние от точки O до центра тяжести ($a = OC$), то дифференциальное уравнение движения тела примет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mga\sin\varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z}\sin\varphi = 0.$$

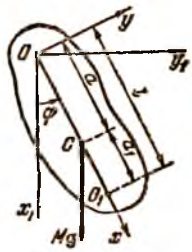


Рис. 13.7

Рассмотрим случай малых колебаний, для которых можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z}\varphi = 0, \tag{13.32}$$

а его общее решение имеет вид

$$\varphi = A\sin\left(\sqrt{\frac{Mga}{I_z}}\,t + \varepsilon\right).$$

Отсюда следует, что угол φ изменяется по гармоническому закону с периодом колебаний, равным

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mga}}. \tag{13.33}$$

Сравнивая дифференциальное уравнение движения математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{13.34}$$

с уравнением движения физического маятника, можно утверждать, что математический маятник, имеющий длину

$$l = \frac{I_z}{Ma}, \tag{13.35}$$

будет двигаться так же, как и физический маятник.

Величина l, определяемая формулой (13.35), называется *приведенной длиной физического маятника.*

Представляя по теореме Гюйгенса—Штейнера (§ 12.4) момент инерции тела относительно оси z в виде $I_z = I_C + Ma^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно оси z, получим для приведенной длины физического маятника выражение

$$l = \frac{I_C}{Ma} + a. \tag{13.36}$$

Откладывая эту величину от точки подвеса в направлении центра тяжести, получим точку O_1 (см. рис. 13.7), которая называется *центром качания.* Расстояние от центра тяжести до центра качания равно

$$a_1 = \frac{I_C}{Ma}. \tag{13.37}$$

Покажем, что точка подвеса и центр качания обладают *свойством взаимности* (*теорема Гюйгенса*).

Пусть ось вращения проходит через центр качания; тогда для новой приведенной длины согласно формуле (13.36) получим

$$l_1 = \frac{I_C}{Ma_1} + a_1.$$

На основании равенства (13.37) имеем $a = I_C/(Ma_1)$, следовательно,

$$l_1 = a + a_1 = l.$$

Таким образом, если старый центр качания сделать новой точкой подвеса, то старая точка подвеса станет новым центром качания, что и доказывает свойство взаимности.

§ 13.8. Экспериментальное определение моментов инерции

Рассмотрим два способа экспериментального определения момента инерции неоднородных твердых тел или тел сложной конфигурации: способ качания с использованием теории физического маятника и способ крутильных колебаний.

Способ качания проиллюстрируем на следующем примере. Пусть требуется найти момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через центр тяжести C шатуна параллельно осям его проушин.

Для определения момента инерции шатуна относительно оси, проходящей через точку A параллельно оси проушины, шатун подвешивают на призму A (рис. 13.8, *а*) и, отклонив его на малый угол от положения равновесия, измеряют период колебания шатуна. Зная период колебания, по формуле (13.33) определяют момент инерции шатуна относительно оси качания:

$$I_A = \frac{MgaT^2}{4\pi^2},$$

где a — расстояние центра тяжести шатуна от оси качания, M — масса шатуна.

Затем по теореме Гюйгенса—Штейнера вычисляют момент инерции относительно центральной оси:

$$I_G = I_A - Ma^2 = Ma\left(\frac{T^2 g}{4\pi^2} - a\right). \quad (13.38)$$

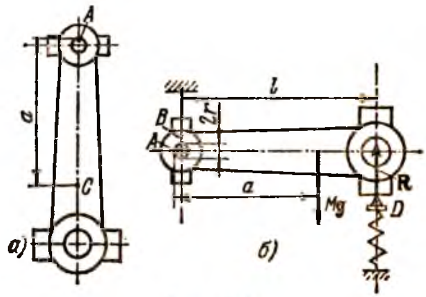


Рис. 13.8

Для определения величины a шатун подвешивают на нити в точке B и определяют реакцию R давления шатуна на штырь динамометра D (рис. 13.8, *б*). Затем из формулы

$$Rl - Mg(a - r) = 0,$$

где r — радиус проушины, находят величину

$$a = \frac{Rl + Mgr}{Mg}.$$

Подставив значения величины a в формулу (13.38), вычисляют I_C.

В рассмотренной схеме эксперимента наибольшую ошибку дает определение величины a, поэтому применяют иную схему эксперимента.

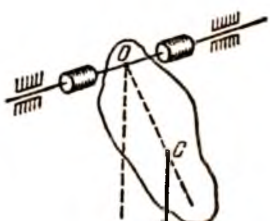


Рис. 13.9

Если требуется найти момент инерции тела относительно произвольной оси (рис. 13.9), то способом качания сначала определяют период колебаний тела относительно оси, на которую жестко насажены два цилиндра, с известными моментами инерции. Затем определяют период колебаний исследуемого тела относительно той же оси без цилиндров. Тогда, если период колебания тела совместно с цилиндрами равен $T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_O + 2I_O'}{Mga}}$, а период колебаний тела без цилиндров $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Mga}}$, то, исключив величину a, получим

$$I_O = \frac{2I'_O T^2}{T'^2 - T^2},$$

где I'_O — момент инерции цилиндра относительно его оси.

Рассмотрим теперь способ крутильных колебаний.

При определении момента инерции тела способом крутильных колебаний тело подвешивают на упругом стержне или струне так, чтобы центр масс тела лежал на продолжении оси стержня (рис. 13.10). Закрутив стержень, жестко связанный с телом, на малый угол φ, измеряют период колебания системы. Так как при малом угле закручивания момент упругих сил пропорционален углу закручивания, то дифференциальное уравнение крутильных колебаний системы имеет вид

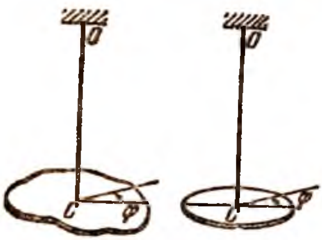


Рис. 13.10

$$I_C\ddot{\varphi} = -k\varphi,$$

где k — постоянный коэффициент, характеризующий упругие свойства стержня (струны).

Период колебаний, очевидно, будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{I_C/k}. \qquad (13.39)$$

Затем на тот же стержень подвешивают тело (например, диск), момент инерции которого относительно оси OC известен и равен I'_C, и измеряют период колебаний T' в этом случае. Этот период колебаний определяется формулой, аналогичной формуле (13.39):

$$T' = 2\pi\sqrt{I'_C/k}. \qquad (13.40)$$

Исключая из равенств (13.39) и (13.40) неизвестный коэффициент k, получим формулу для определения момента инерции

$$I_C = I'_C\left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

§ 13.9. Плоское движение абсолютно твердого тела

Свободное твердое тело будет совершать плоское движение, если в нем существует плоское сечение, относительно которого масса тела распределена симметрично; силы, действующие на тело, расположены в плоскости этого сечения, а начальные скорости всех точек тела расположены в плоскостях, параллельных плоскости сечения. Движение тела может быть плоским также и в силу наложенных на него связей, но это уже будет несвободное движение.

В кинематике было установлено, что положение твердого тела, совершающего плоское движение, определяется тремя параметрами. За эти параметры выберем координаты центра масс тела и угол поворота тела относительно оси, перпендикулярной к рассматриваемому плоскому сечению тела.

Пусть система координат Cx_2y_2, имеющая начало в центре масс тела, движется поступательно относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$. Положение тела будет полностью определено, если известны координаты центра масс тела (x_{1C}, y_{1C}) и угол φ между осью x_2 и осью x системы координат Cxy, жестко связанной с телом и имеющей начало в центре масс тела (рис. 13.11).

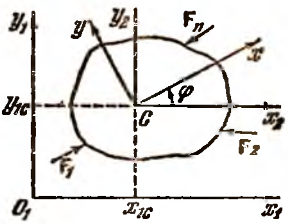


Рис. 13.11

В соответствии с теоремой о движении центра масс из уравнений (13.1) получаем зависимости, связывающие координаты центра масс тела и проекции главного вектора всех внешних сил ($F^e_{x_1}$, $F^e_{y_1}$), приложенных к твердому телу:

$$M\ddot{x}_{1C} = F^e_{x_1}, \quad M\ddot{y}_{1C} = F^e_{y_1}, \qquad (13.41)$$

где M — масса тела.

Используя теперь теорему об изменении момента количеств движения в относительном движении (13.2), получим зависимость между углом φ поворота тела и силами, действующими на тело.

Так как в системе координат Cx_2y_2 твердое тело совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости движения тела, то момент количеств движения тела относительно этой оси в соответствии с равенством (13.10) будет равен $K_C = I_C\dot{\varphi}$. Следовательно, на основании теоремы (§ 9.7) имеем

$$I_C\ddot{\varphi} = M^e_C, \qquad (13.42)$$

где I_C — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения тела и проходящей через центр масс тела, а M^e_C — главный момент всех внешних сил относительно этой же самой оси. Уравнения (13.41) и (13.42) позволяют решать задачи динамики плоского движения твердого тела.

Если движение твердого тела задано, т. е. координаты центра масс (x_{1C}, y_{1C}) и угол φ являются известными функциями времени, то в результате подстановки вторых производных от этих функций ($\ddot{x}_{1C}$, $\ddot{y}_{1C}$, $\ddot{\varphi}$) в уравнения (13.41) и (13.42) находятся силы, под действием которых происходит движение тела.

Если же заданы силы, т. е. известны $F^e_{x_1}$, $F^e_{y_1}$ и M^e_C, то уравнения (13.41) и (13.42):

$$M\ddot{x}_{1C} = F^e_{x_1}, \quad M\ddot{y}_{1C} = F^e_{y_1}, \quad I_C\ddot{\varphi} = M^e_C \qquad (13.43)$$

будут представлять уже систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих плоское движение твердого тела *). После решения этих уравнений и определения постоянных интегрирования получим закон плоского движения свободного твердого тела

$$x_{1C} = x_{1C}(t), \quad y_{1C} = y_{1C}(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Если тело совершает несвободное движение, то в число действующих сил следует включить реакции связей. Уравнения движения тела в этом случае будут

$$M\ddot{x}_{1C} = F^e_{x_1} + R_{x_1}, \quad M\ddot{y}_{1C} = F^e_{x_1} + R_{y_1}, \quad I_C\ddot{\varphi} = M^e_C + M^R_C, \tag{13.44}$$

где R_{x_1} и R_{y_1} — суммы проекций всех реакций соответственно на оси x_1 и y_1, а M^R_C — сумма моментов всех реакций относительно центра масс. В этих уравнениях $F^e_{x_1}$, $F^e_{y_1}$ и M^e_C относятся к внешним активным силам. К уравнениям (13.44) следует еще добавить уравнения связи.

Заметим, что иногда вместо одного из дифференциальных уравнений (13.44) бывает целесообразно применить теорему об изменении кинетической энергии.

§ 13.10. Задачи

Задача 13.5. Однородный стержень длины $2l$ и массы M за один из своих концов подвешен на нити длины a, массой которой можно пренебречь, к неподвижной точке O. Стержень вместе с нитью отклонили влево от вертикали на угол α и отпустили без начальной скорости (рис. 13.12). В момент, когда стержень, пройдя положение равновесия, составлял с вертикалью угол β ($\beta<\alpha$), нить оборвалась. Определить закон движения стержня после обрыва нити.

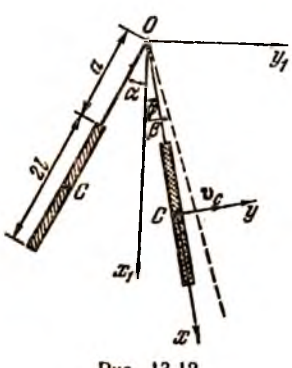


Рис. 13.12

Найдем сначала угловую скорость стержня, координаты и проекции скорости центра масс стержня на неподвижные координатные оси Ox_1y_1 в момент обрыва нити. В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии имеем

$$I_O\omega^2/2 = Mg(a+l)(\cos\beta - \cos\alpha),$$

где

$$I_O = I_C + M(a+l)^2 \qquad (I_C = Ml^2/3)$$

— момент инерции стержня относительно точки O, I_C — момент инерции стержня относительно его центра масс.

Следовательно, угловая скорость стержня в момент обрыва нити равна

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2Mg(a+l)(\cos\beta - \cos\alpha)}{I_C + M(a+l)^2}}.$$

*) Если траектория центра масс задана, то вместо первых двух уравнений системы (13.43) иногда целесообразно взять уравнения в проекциях на касательную и нормаль к траектории центра масс.

Координаты центра масс стержня в момент обрыва нити будут

$$x_{1C} = (a + l)\cos\beta, \quad y_{1C} = (a + l)\sin\beta,$$

а проекции его скорости на оси координат

$$\dot x_{1C} = -(a + l)\,\omega\sin\beta, \quad \dot y_{1C} = (a + l)\,\omega\cos\beta.$$

Угол между стержнем и осью x_1 в момент обрыва равен $\varphi = \beta$.

Дифференциальные уравнения движения стержня после обрыва нити имеют вид (единственная внешняя сила — сила тяжести Mg — приложена в точке C)

$$M\ddot x_{1C} = Mg, \quad M\ddot y_{1C} = 0, \quad I_C\ddot\varphi = 0,$$

и, следовательно, общее решение этих уравнений будет

$$\dot x_{1C} = gt + C_1, \qquad \dot y_{1C} = C_2, \qquad \dot\varphi = C_3,$$

$$x_{1C} = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_4, \quad y_{1C} = C_2 t + C_5, \quad \varphi = C_3 t + C_6.$$

Произвольные постоянные интегрирования определим из начальных условий: при $t = 0$

$$x_{1C} = (a + l)\cos\beta, \qquad y_{1C} = (a + l)\sin\beta,$$

$$\dot x_{1C} = -(a + l)\,\omega\sin\beta, \qquad \dot y_{1C} = (a + l)\,\omega\cos\beta,$$

$$\varphi = \beta, \qquad \dot\varphi = \omega.$$

Значения произвольных постоянных будут

$$C_1 = -(a + l)\,\omega\sin\beta, \quad C_2 = (a + l)\,\omega\cos\beta, \quad C_3 = \omega,$$

$$C_4 = (a + l)\cos\beta, \quad C_5 = (a + l)\sin\beta, \quad C_6 = \beta.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим закон движения стержня после обрыва нити

$$x_{1C} = \frac{gt^2}{2} - (a + l)(\omega t\sin\beta - \cos\beta),$$

$$y_{1C} = (a + l)(\omega t\cos\beta + \sin\beta), \quad \varphi = \omega t + \beta.$$

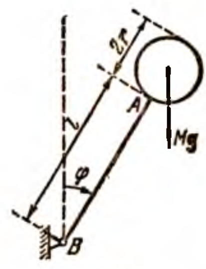


Рис. 13.13

Задача 13.6. Конец B невесомого стержня AB соединен шарнирно с неподвижной опорой. К другому концу стержня прикреплен тяжелый однородный диск радиуса r. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение. Получив ничтожно малую скорость, стержень начинает вращаться вокруг шарнира.

Определить угловую скорость диска и угол между вертикалью и стержнем в момент, когда составляющая реакции шарнира, направленная вдоль стержня, равна нулю.

Центр масс диска движется по окружности радиуса $l + r$ с центром в точке B, следовательно, уравнение движения центра масс диска в проекции на нормаль к его траектории будет иметь вид (рис. 13.13)

$$\frac{Mv^2}{r + l} = Mg\cos\varphi + R_n,$$

где M — масса диска, v — скорость центра масс, R_n — нормальная реакция, направленная от точки B вдоль стержня. Из этой формулы следует, что

$$R_n = \frac{Mv^2}{r + l} - Mg\cos\varphi.$$

Для определения скорости v в любой момент времени воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии.

Так как стержень вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку B, то

$$^1/_2 I_B \dot\varphi^2 = Mg(l+r)(1-\cos\varphi),$$

где I_B — момент инерции диска относительно точки B, равный

$$I_B = \frac{Mr^2}{2} + M(r+l)^2 = \frac{M}{2}(r+l)^2\left[2+\left(\frac{r}{r+l}\right)^2\right].$$

Следовательно,

$$\dot\varphi^2 = \frac{2(r+l)Mg(1-\cos\varphi)}{I_B}.$$

Принимая во внимание, что $v^2 = (l+r)^2\dot\varphi^2$, имеем

$$R_n = \frac{Mg}{n}[4-(4+n)\cos\varphi],$$

где $n = 2+\left(\frac{r}{r+l}\right)^2$.

Пусть в момент, когда $R_n = 0$, угол $\varphi = \alpha$, тогда $4-(4+n)\cos\alpha = 0$. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{4}{4+n},$$

а угловая скорость в момент, когда $R_n = 0$, будет

$$\dot\varphi = 2\sqrt{\frac{g}{(4+n)(l+r)}}.$$

Задача 13.7. Однородный стержень длины l и массы M одним концом укреплен при помощи идеального шарнира в точке A, другой конец стержня удерживается нитью BC, образующей со стержнем угол $90°$ (рис. 13.14). Стержень составляет с горизонтом угол α. Определить, насколько изменится давление стержня на шарнир A в момент внезапного обрыва нити BC.

Для определения реакции в шарнире A и натяжения нити составим уравнения статики (см. рис. 13.14):

$$X_{1A}^{ст} - R_B\sin\alpha = 0,\quad Y_{1A}^{ст} + R_B\cos\alpha - Mg = 0,$$

$$-\frac{Mgl}{2}\cos\alpha + R_B l = 0,$$

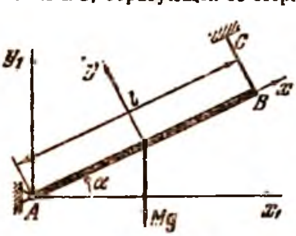


Рис. 13.14

откуда

$$Y_{1A}^{ст} = \frac{Mg}{2}(1+\sin^2\alpha),\quad X_{1A}^{ст} = \frac{Mg}{4}\sin 2\alpha,\quad R_B = \frac{Mg}{2}\cos\alpha.$$

Если нить оборвется, то стержень начнет совершать вращательное движение вокруг шарнира A.

Дифференциальные уравнения движения можно записать в виде *)

$$M\ddot x_{1C} = X_{1A},\quad M\ddot y_{1C} = Y_{1A} - Mg,\quad I_A\ddot\varphi = -\frac{Mgl}{2}\cos\varphi. \qquad (13.45)$$

*) Здесь используется то обстоятельство, что точка A неподвижна.

Из очевидных зависимостей

$$x_{1C}=\frac{l}{2}\cos\varphi,\quad y_{1C}=\frac{l}{2}\sin\varphi$$

найдем

$$\ddot{x}_{1C}=-\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi-\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi,\quad \ddot{y}_{1C}=\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi-\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi.$$

Так как в момент разрыва нити $\varphi=\alpha$, $\dot{\varphi}=0$, то

$$\ddot{x}_{1C}=-\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\alpha,\quad \ddot{y}_{1C}=\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\alpha. \tag{13.46}$$

Теперь из уравнений (13.45) с учетом выражений (13.46) для этого момента времени получим

$$X_{1A}=\frac{3Mg}{8}\sin 2\alpha,\quad Y_{1A}=Mg-\frac{3Mg}{4}\cos^2\alpha.$$

Изменение реакций будет равно

$$X_{1A}-X_{1A}^{\text{ст}}=\frac{Mg}{8}\sin 2\alpha,\quad Y_{1A}-Y_{1A}^{\text{ст}}=-\frac{Mg}{4}\cos^2\alpha.$$

Задача 13.8. Однородное тело массы M, имеющее форму полуцилиндра радиуса R, поставлено на горизонтальную шероховатую плоскость и выведено из состояния равновесия, после чего предоставлено самому себе. Определить период малых колебаний, которые будет совершать тело, если известно, что проскальзывать по плоскости оно не может. Трение качения отсутствует (рис. 13.15).

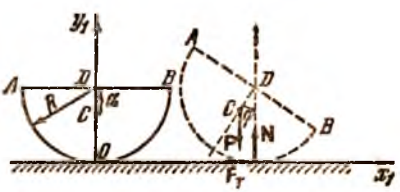


Рис. 13.15

Составим дифференциальные уравнения движения тела, учитывая, что на него действуют три внешние силы: сила тяжести $P=Mg$, сила трения скольжения $F_т$ и нормальная составляющая реакции в точке касания N. Выбрав начало координат в точке O касания тела и плоскости в тот момент, когда тело находится в равновесном состоянии, и направив оси координат, как показано на рис. 13.15, получим на основании формул (13.43) следующие три дифференциальных уравнения движения:

$$M\ddot{x}_{1C}=-F_т,\quad M\ddot{y}_{1C}=-Mg+N,\quad I_C\ddot{\varphi}=F_т(R-a\cos\varphi)-Na\sin\varphi,$$

где I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно к плоскости тела, a — расстояние DC.

Исключая $F_т$ и N из третьего уравнения при помощи первого и второго, получим

$$I_C\ddot{\varphi}=-(R-a\cos\varphi)M\ddot{x}_{1C}-a\sin\varphi(M\ddot{y}_{1C}+Mg). \tag{13.47}$$

Но так как диск перекатывается без скольжения, то

$$x_{1C}=R\varphi-a\sin\varphi,\quad y_{1C}=R-a\cos\varphi.$$

Ограничиваясь случаем малых колебаний ($\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$), находим

$$x_{1C}=(R-a)\varphi,\quad y_{1C}=R-a,\quad \ddot{x}_{1C}=(R-a)\ddot{\varphi},\quad \ddot{y}_{1C}=0.$$

Подставляя последние значения в уравнение (13.47), в котором также полагаем $\cos\varphi \approx 1$ и $\sin\varphi \approx \varphi$, получаем

$$I_C\ddot{\varphi} = -M(R-a)^2\ddot{\varphi} - Mga\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_C + (R-a)^2 M}\varphi = 0.$$

Отсюда находим период малых колебаний диска

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + (R-a)^2 M}{Mga}}.$$

Вычислим теперь величины a и I_C.

Величина a, определяющая положение центра тяжести однородного полудиска, была определена ранее (том I, глава VIII). Она равна $a = 4R/(3\pi)$.

Определим момент инерции полукруглого диска относительно оси, проходящей через точку D. Согласно определению момента инерции относительно оси он равен половине момента инерции круглого диска с массой $2M$ относительно той же оси. Так как последний равен MR^2, то интересующий нас момент инерции $I_D = {}^1/_2 MR^2$. Воспользовавшись затем теоремой Гюйгенса—Штейнера, имеем

$$I_D = I_C + Ma^2.$$

Следовательно,

$$I_C = I_D - Ma^2 = {}^1/_2 MR^2 - Ma^2.$$

Используя найденные значения a и I_C, получим окончательное выражение периода малых колебаний полукруглого диска

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)}.$$

Заметим, что период T не зависит от массы диска и определяется лишь его радиусом.

Глава XIV

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

§ 14.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Целью этого параграфа является установление зависимостей между параметрами, определяющими положение тела (например, углами Эйлера), и силами, приложенными к телу. Эти зависимости дадут возможность решать основные задачи динамики для тела, имеющего одну неподвижную точку.

Для получения этих зависимостей воспользуемся теоремой об изменении момента количеств движения (§ 9.3):

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e, \tag{14.1}$$

где $\mathbf{K}_O$ — момент количеств движения тела относительно неподвижной точки O тела, $\mathbf{M}_O^e$ — главный момент всех внешних сил относительно той же точки.

Пусть неподвижная система координат $Ox_1y_1z_1$ имеет начало в закрепленной точке тела. Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $Oxyz$ с началом в той же точке O (рис. 14.1).

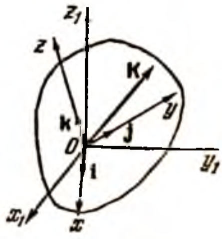


Рис. 14.1

При движении тела его моменты инерции и центробежные моменты инерции в неподвижной системе координат будут переменными величинами, так как тело при своем движении изменяет свое положение относительно осей этой системы. В подвижной же системе координат, жестко связанной с телом, моменты инерции и центробежные моменты инерции являются величинами постоянными.

Учитывая это обстоятельство, будем считать вектор момента количеств движения тела $\mathbf{K}_O$ определенным в подвижной системе координат, жестко связанной с телом. Тогда в соответствии с зависимостью (13.21) уравнение (14.1) можно записать в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^e, \tag{14.2}$$

где

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} = \frac{dK_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dK_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dK_z}{dt}\mathbf{k}, \tag{14.3}$$

а K_x, K_y, K_z — проекции вектора $\mathbf{K}_O$ на оси системы координат $Oxyz$; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей x, y, z; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела.

Имея в виду формулу (14.3), а также известное равенство

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \mathbf{j}(\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \mathbf{k}(\omega_x K_y - \omega_y K_x), \tag{14.4}$$

перепишем уравнение (14.2) в проекциях на оси подвижной системы координат:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dK_x}{dt} + (\omega_y K_z - \omega_z K_y) = M_x^e,\\
&\frac{dK_y}{dt} + (\omega_z K_x - \omega_x K_z) = M_y^e,\\
&\frac{dK_z}{dt} + (\omega_x K_y - \omega_y K_x) = M_z^e,
\end{aligned}
\qquad (14.5)
$$

где ω_x, ω_y и ω_z — проекции угловой скорости тела на оси подвижной системы координат, M_x^e, M_y^e и M_z^e — главные моменты всех внешних сил относительно тех же осей (см. § 9.3).

Если подвижную систему координат $Oxyz$ выбрать таким образом, чтобы координатные оси x, y и z были главными осями инерции для точки O, то все центробежные моменты инерции будут равны нулю и согласно (13.9)

$$K_x = I_x\omega_x, \quad K_y = I_y\omega_y, \quad K_z = I_z\omega_z. \qquad (14.6)$$

Уравнения (14.5) примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&I_x\frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z = M_x^e,\\
&I_y\frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x = M_y^e,\\
&I_z\frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y = M_z^e.
\end{aligned}
\qquad (14.7)
$$

Уравнения (14.7) называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Присоединяя к ним кинематические уравнения Эйлера (том 1, § 14.3)

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi,\\
\omega_y &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi,\\
\omega_z &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi,
\end{aligned}
\qquad (14.8)
$$

получаем полную систему уравнений, необходимую для решения задач динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

Если задается закон движения тела, т. е. задаются углы Эйлера как функции времени, то уравнения (14.7) и (14.8) позволяют определить силы, под действием которых происходит заданное движение.

Если же задаются действующие на тело силы, т. е. можно считать известными проекции главного момента всех внешних сил M_x^e, M_y^e, M_z^e, то уравнения (14.7) и (14.8) представляют собой систему шести дифференциальных уравнений первого порядка для определения углов Эйлера как функций времени.

Иногда при решении конкретных задач бывает выгодно вводить подвижную систему координат, не связанную жестко с телом. Пусть такая система координат $Ox_2y_2z_2$ имеет также начало в неподвижной точке тела. В этой системе координат уравнения (14.5) запишутся в виде

$$\begin{gathered}\frac{dK_{x_2}}{dt}+(\omega_{y_2}K_{z_2}-\omega_{z_2}K_{y_2})=M^e_{x_2},\\ \frac{dK_{y_2}}{dt}+(\omega_{z_2}K_{x_2}-\omega_{x_2}K_{z_2})=M^e_{y_2},\\ \frac{dK_{z_2}}{dt}+(\omega_{x_2}K_{y_2}-\omega_{y_2}K_{x_2})=M^e_{z_2},\end{gathered}\tag{14.9}$$

где ω_{x_2}, ω_{y_2}, ω_{z_2} — проекции угловой скорости подвижной системы координат на собственные оси.

Интегрирование дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, представляет значительные математические трудности. Мы рассмотрим лишь наиболее простые случаи, а именно случай вращения динамически симметричного тела вокруг неподвижной точки по инерции (*случай Эйлера*) и случай движения под действием силы тяжести, когда тело имеет относительно неподвижной точки ось динамической симметрии, а центр тяжести лежит на этой оси (*случай Лагранжа*).

§ 14.2. Движение твердого симметричного тела, имеющего одну неподвижную точку, по инерции (случай Эйлера)

В этом параграфе будет рассмотрен наиболее простой случай движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, а именно случай движения по инерции.

Если главный момент всех сил, приложенных к твердому телу, относительно неподвижной точки тела равен нулю, т. е. $M^e_O=0$ ($M^e_x=M^e_y=M^e_z=0$), то динамические уравнения Эйлера (14.7) примут вид

$$\begin{gathered}I_x\frac{d\omega_x}{dt}+(I_z-I_y)\,\omega_y\omega_z=0,\\ I_y\frac{d\omega_y}{dt}+(I_x-I_z)\,\omega_z\omega_x=0,\\ I_z\frac{d\omega_z}{dt}+(I_y-I_x)\,\omega_x\omega_y=0.\end{gathered}\tag{14.10}$$

Умножая первое из этих уравнений на $I_x\omega_x$, второе — на $I_y\omega_y$, третье — на $I_z\omega_z$ и складывая затем уравнения между собой, получим

$$I_x^2\omega_x\frac{d\omega_x}{dt}+I_y^2\omega_y\frac{d\omega_y}{dt}+I_z^2\omega_z\frac{d\omega_z}{dt}=0,$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(I_x^2\omega_x^2+I_y^2\omega_y^2+I_z^2\omega_z^2\right)=0;$$

отсюда

$$I_x^2\omega_x^2+I_y^2\omega_y^2+I_z^2\omega_z^2=K_O^2=\mathrm{const}. \tag{14.11}$$

Это уравнение представляет собой первый интеграл уравнений движения (14.10) и означает, что модуль момента количеств движения сохраняет постоянную величину во все время движения. Конечно, этот интеграл можно получить и непосредственно из теоремы об изменении момента количеств движения. Так как $\mathbf{M}^e=0$, то

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}=0$$

и, следовательно, $\mathbf{K}_O=\mathrm{const}$. Учитывая равенства (13.9) $K_x=I_x\omega_x$, $K_y=I_y\omega_y$, $K_z=I_z\omega_z$, найдем

$$I_x^2\omega_x^2+I_y^2\omega_y^2+I_z^2\omega_z^2=K_O^2=\mathrm{const}.$$

Умножая теперь уравнения (14.10) соответственно на ω_x, ω_y и ω_z и проделывая аналогичные выкладки, получим еще один первый интеграл

$$I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2=2h=\mathrm{const},$$

где h — постоянная энергии.

Механический смысл этого интеграла состоит в том, что кинетическая энергия тела во все время движения остается постоянной величиной. Найденный первый интеграл можно также получить из закона сохранения полной механической энергии $T+\Pi=h$ ($\Pi=0$, так как тело движется по инерции).

Определение углов Эйлера даже в этом простом случае является довольно сложной математической задачей. Поэтому обратимся к частному случаю, когда

$$I_x=I_y\neq I_z,$$

т. е. рассмотрим тело, у которого ось z представляет собой ось динамической симметрии.

Уравнения (14.10) при этом будут

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\omega_y \omega_z = 0,$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\omega_x \omega_z = 0, \qquad (14.12)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0.$$

Из третьего уравнения следует, что

$$\omega_z = \omega_{z0} = \text{const}. \qquad (14.13)$$

Имея в виду, что момент количеств движения $\mathbf{K}_O$ твердого тела имеет постоянный модуль и направление, неподвижную ось z_1 направим по вектору $\mathbf{K}_O$ (рис. 14.2). При таком выборе направления оси z_1 проекции вектора $\mathbf{K}_O$ на оси подвижной системы координат $Oxyz$ будут равны

$$K_x = K_O \sin\theta \sin\varphi, \quad K_y = K_O \sin\theta \cos\varphi, \quad K_z = K_O \cos\theta. \qquad (14.14)$$

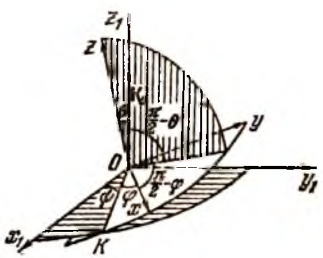


Рис. 14.2

С другой стороны,

$$K_x = I_x\omega_x, \quad K_y = I_y\omega_y, \quad K_z = I_z\omega_z. \qquad (14.15)$$

Сравнивая выражения для K_z в формулах (14.14) и (14.15) и учитывая равенство (14.13), найдем $K_O \cos\theta = I_z\omega_{z0}$, откуда

$$\cos\theta = \cos\theta_0 = I_z\omega_{z0}/K_O = \text{const}.$$

Таким образом, угол нутации θ является постоянной величиной:

$$\theta = \theta_0. \qquad (14.16)$$

Кинематические уравнения Эйлера (14.8) теперь принимают вид

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta_0 \sin\varphi, \quad \omega_y = \dot\psi \sin\theta_0 \cos\varphi, \quad \omega_{z0} = \dot\psi \cos\theta_0 + \dot\varphi. \qquad (14.17)$$

Из соотношений (14.14) и (14.15) находим ($I_x = I_y$)

$$K_O \sin\theta \sin\varphi = I_x\omega_x, \quad K_O \sin\theta \cos\varphi = I_x\omega_y,$$

или, учтя формулы (14.16) и (14.17),

$$K_O \sin\theta_0 \sin\varphi = I_x\dot\psi \sin\theta_0 \sin\varphi, \qquad K_O \sin\theta_0 \cos\varphi = I_x\dot\psi \sin\theta_0 \cos\varphi.$$

Откуда

$$K_O = I_x\dot\psi, \quad \text{или} \quad \dot\psi = \frac{K_O}{I_x} = n = \text{const}. \qquad (14.18)$$

Таким образом,

$$\psi = nt + \psi_0,$$

где ψ_0 — значение угла ψ в момент времени $t = 0$. Из третьей формулы уравнений (14.17) имеем

$$\dot{\varphi} = \omega_{z0} - n\cos\theta_0 = n_1 = \mathrm{const} \tag{14.19}$$

и, следовательно,

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0,$$

где φ_0 — начальное значение угла φ.

Итак, решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, в рассматриваемом случае будет

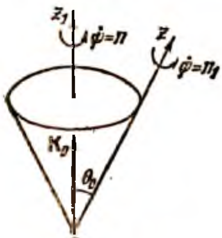


Рис. 14.3

$$\theta = \theta_0, \quad \psi = nt + \psi_0, \quad \varphi = n_1 t + \varphi_0. \tag{14.20}$$

Произвольные постоянные θ_0, ψ_0, φ_0, n и n_1, входящие в решение (14.20), связаны между собой соотношением (14.19), т. е.

$$\omega_{z0} - n\cos\theta_0 = n_1.$$

Это значит, что решение (14.20) содержит в выбранной системе координат только четыре независимые между собой произвольные постоянные интегрирования. Однако направление вектора момента количеств движения, с которым мы связали систему координат $Ox_1y_1z_1$, постоянно и определяется в произвольной координатной системе двумя независимыми произвольными постоянными.

Поэтому решение (14.20) является общим решением уравнений (14.12). Движение, описываемое уравнениями (14.20), называется *регулярной прецессией*. При этом движении ось симметрии тела z описывает круговой конус с углом раствора $2\theta_0$, равномерно вращаясь вокруг постоянного направления вектора момента количеств движения $\mathbf{K}_O$ с угловой скоростью $\dot{\psi} = n$; одновременно само тело равномерно вращается вокруг оси симметрии z с угловой скоростью $\dot{\varphi} = n_1$. На рис. 14.3 показаны неподвижная ось z_1 (с ней совпадает вектор $\mathbf{K}_O$), ось симметрии тела z и направления вращений.

§ 14.3. Геометрическая интерпретация Пуансо

При отсутствии динамической симметрии решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции описывается эллиптическими функциями. Мы проведем лишь качественный анализ, данный Пуансо. В соответствии с формулой (12.20) уравнение эллипсоида инерции, построенного для точки O в подвижных осях $Oxyz$ (точка O — неподвижная точка тела), жестко связанных с телом, имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \tag{14.21}$$

Пусть точка P с координатами x, y, z будет точкой пересечения мгновенной оси вращения тела с эллипсоидом инерции (рис. 14.4). Обозначая через $\boldsymbol{\rho}$ радиус-вектор точки P, проводимый из неподвижного полюса O, будем иметь

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей системы координат $Oxyz$.

Так как вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения, то $\boldsymbol{\rho}/\rho = \boldsymbol{\omega}/\omega$; отсюда

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\rho}\boldsymbol{\rho}$$

и

$$\omega_x = \frac{\omega}{\rho}x, \qquad \omega_y = \frac{\omega}{\rho}y, \qquad \omega_z = \frac{\omega}{\rho}z. \tag{14.22}$$

Рассматриваемое движение тела происходит по инерции, поэтому кинетическая энергия тела является постоянной величиной и на основании формулы (13.11)

$$2T = \mathbf{K}_O\cdot\boldsymbol{\omega} = K_x\omega_x + K_y\omega_y + K_z\omega_z = 2h. \tag{14.23}$$

Подставляя сюда выражения (14.6) и (14.22), получим

$$\frac{\omega^2}{\rho^2}(I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2) = 2h.$$

Так как координаты x, y, z точки P должны удовлетворять уравнению эллипсоида инерции (14.21), то

$$\omega = \rho\sqrt{2h}, \tag{14.24}$$

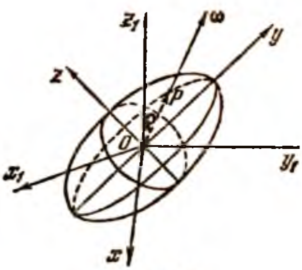


Рис. 14.4

т. е. длина радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ точки P пропорциональна величине угловой скорости тела.

Отметим, что из формулы (14.23) вытекает

$$\omega_k = \frac{2h}{K_O}, \tag{14.25}$$

т. е. проекция угловой скорости тела на направление момента количеств движения в рассматриваемом случае является постоянной величиной.

Проведем теперь через точку P касательную плоскость к эллипсоиду инерции. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$I_x xx' + I_y yy' + I_z zz' = 1, \tag{14.26}$$

где x', y', z' — текущие координаты касательной плоскости, а x, y, z — координаты точки P.

Используя формулы (14.6) и (14.22), запишем вектор $\mathbf{K}_O$ в виде

$$\mathbf{K}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k},$$

или

$$\mathbf{K}_O = \frac{\omega}{\rho}(I_x x\mathbf{i} + I_y y\mathbf{j} + I_z z\mathbf{k}).$$

Тогда, вводя радиус-вектор текущей точки касательной плоскости

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k},$$

представим уравнение (14.26) в виде

$$\frac{\rho}{\omega}\mathbf{K}_O\cdot\mathbf{r}=1. \qquad (14.27)$$

Уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору момента количеств движения и находящейся на постоянном расстоянии от неподвижной точки тела, как известно из аналитической геометрии, имеет вид

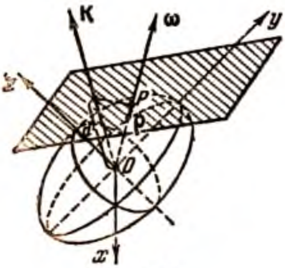


Рис. 14.5

$$\frac{\mathbf{K}_O}{K}\cdot\mathbf{r}=d, \qquad (14.28)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки плоскости, а d — расстояние от начала координат.

Эта плоскость будет касаться эллипсоида инерции в точке P, если выполняется равенство $\omega/\rho = K_O d$, вытекающее из соотношений (14.27) и (14.28). Отсюда, принимая во внимание (14.24), получим

$$d=\sqrt{2h}/K_O=\text{const}. \qquad (14.29)$$

Следовательно, касательная плоскость, проведенная в точке P к эллипсоиду инерции, перпендикулярна к вектору момента количеств движения и находится на постоянном расстоянии d, определяемом формулой (14.29), от неподвижной точки тела. Отсюда следует, что эта плоскость будет неподвижной по отношению к неподвижной системе координат, так как вектор $\mathbf{K}_O$ является постоянным вектором. Эллипсоид инерции касается этой плоскости в точке P, находящейся на мгновенной оси вращения; поэтому скорость точки касания равна нулю.

Таким образом, движение по инерции твердого тела, имеющего одну неподвижную точку можно представить как качение без скольжения эллипсоида по инерции по неподвижной плоскости, перпендикулярной к моменту количеств движения и находящейся на постоянном расстоянии от центра эллипсоида (рис. 14.5).

§ 14.4. Устойчивость вращения твердого тела вокруг главных осей инерции

Предположим, что твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, вращается по инерции с постоянной угловой скоростью Ω вокруг некоторой оси, совпадающей с одной из главных осей инерции. Не нарушая общности, будем считать, что ось вращения совпадает с главной осью инерции z. Тогда

$$\omega_x=0, \quad \omega_y=0, \quad \omega_z=\Omega=\text{const}.$$

Эти значения проекций угловых скоростей можно рассматривать как решение динамических уравнений Эйлера (14.10).

Выясним, будет ли такое вращение тела устойчивым, т. е. изменится ли оно, если сообщить телу произвольное, но достаточно малое изменение вектора угловой скорости (например, небольшим ударом по телу), или это движение в основном сохранится, вызвав только очень малые колебания оси вращения z.

Итак, пусть вектор угловой скорости Ω тела, вращающегося равномерно вокруг оси z, получил небольшое возмущение, в результате которого проекции угловой скорости изменили свои значения и сделались равными

$$\omega_x = \omega_1, \quad \omega_y = \omega_2, \quad \omega_z = \Omega + \omega_3,$$

причем в начальный момент возмущения ω_1, ω_2 и ω_3 малы по сравнению с Ω. Внесем эти значения ω_x, ω_y и ω_z в уравнения Эйлера (14.10) и сгруппируем члены:

$$I_x \frac{d\omega_1}{dt} + (I_z - I_y)\,\Omega\omega_2 + (I_z - I_y)\,\omega_2\omega_3 = 0,$$

$$I_y \frac{d\omega_2}{dt} + (I_x - I_z)\,\Omega\omega_1 + (I_x - I_z)\,\omega_1\omega_3 = 0,$$

$$I_z \frac{d\omega_3}{dt} + \qquad (I_y - I_x)\,\omega_1\omega_2 = 0.$$

Предположим, что во все время движения ω_1, ω_2 и ω_3 остаются малыми по сравнению с Ω. Пренебрегая тогда их произведениями (члены второго порядка малости), получим

$$I_x \frac{d\omega_1}{dt} + (I_z - I_y)\,\Omega\omega_2 = 0,$$

$$I_y \frac{d\omega_2}{dt} + (I_x - I_z)\,\Omega\omega_1 = 0,$$

$$I_z \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

Из третьего уравнения следует, что $\omega_3 = \omega_{30}$, а первые два уравнения легко приводятся к виду

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \frac{\Omega^2}{I_x I_y}(I_x - I_z)(I_y - I_z)\,\omega_1 = 0,$$

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + \frac{\Omega^2}{I_x I_y}(I_x - I_z)(I_y - I_z)\,\omega_2 = 0.$$

Если $(I_x - I_z)(I_y - I_z) > 0$, то $\omega_1 = \omega_x$ и $\omega_2 = \omega_y$ выражаются через тригонометрические функции и во все время движения остаются малыми величинами (так как их начальные значения были малы).

Если же $(I_x - I_z)(I_y - I_z) < 0$, то $\omega_1 = \omega_x$ и $\omega_2 = \omega_y$ выражаются через показательные функции и с течением времени принимают сколь угодно большие значения.

Следовательно, условие устойчивости вращения тела по инерции вокруг главной оси инерции z сводится к неравенству

$$(I_x - I_z)(I_y - I_z) > 0,$$

т. е.

$$I_x > I_z, \quad I_y > I_z, \quad \text{или} \quad I_x < I_z, \quad I_y < I_z. \tag{14.30}$$

Таким образом, вращение вокруг главной оси инерции устойчиво, если момент инерции относительно этой оси является наибольшим или наименьшим из трех главных моментов инерции. Заметим, что проведенный анализ математически недостаточно строг, так как точные уравнения заменялись приближенными, но можно показать (мы не будем останавливаться на этом), что полученные результаты остаются верными и при строгом рассмотрении.

§ 14.5. Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием силы тяжести (случай Лагранжа)

Второй практически важный случай движения твердого тела с одной неподвижной точкой (случай Лагранжа) соответствует следующим условиям:

1) эллипсоид инерции для неподвижной точки тела является эллипсоидом вращения ($I_x = I_y$);

2) центр тяжести тела лежит на оси z, которая является осью симметрии эллипсоида инерции и называется осью динамической симметрии тела.

Введем две системы координат с общим началом в неподвижной точке O тела. Оси подвижной системы $Oxyz$ направим по главным осям инерции тела, а неподвижную систему координат выберем так, чтобы ось z_1 была направлена вверх (рис. 14.6).

В этом случае Лагранжа можно указать три первых интеграла движения. Во-первых, имеет место интеграл энергии

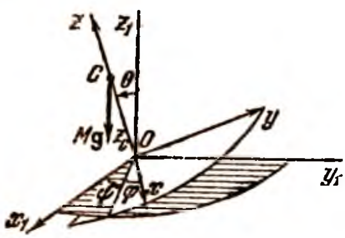


Рис. 14.6

$$T + \Pi = h. \qquad (14.31)$$

Так как кинетическая энергия тела с одной неподвижной точкой равна

$$T = {}^1/_2 I_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + {}^1/ I_z \omega_z^2,$$

то, используя равенство (14.8) можно записать

$$T = {}^1/_2 I_x (\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2 \theta) + {}^1/_2 I_z (\dot\psi \cos \theta + \dot\varphi)^2.$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = Mgz_{1C} = Mgz_C \cos \theta.$$

Таким образом, интеграл энергии (14.31) записывается в виде

$${}^1/_2 I_x (\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2 \theta) + {}^1/_2 I_z (\dot\psi \cos \theta + \dot\varphi)^2 + Mgz_C \cos \theta = h. \qquad (14.32)$$

Во-вторых, интеграл момента количеств движения относительно оси z_1 (сила Mg параллельна оси z_1):

$$K_{z_1} = c_1.$$

Проекция момента количеств движения на ось z_1 равна сумме проекций на эту ось составляющих момента количеств движения по осям подвижной системы координат $Oxyz$, т. е.

$$K_{z_1} = K_x \sin \theta \sin \varphi + K_y \sin \theta \cos \varphi + K_z \cos \theta.$$

Так как $K_x = I_x\omega_x$, $K_y = I_y\omega_y$ и $K_z = I_z\omega_z$, а ω_x, ω_y и ω_z определяются по формулам (14.8), то будем иметь

$$K_{z_1} = I_x \dot\psi \sin^2 \theta + I_z (\dot\psi \cos \theta + \dot\varphi) \cos \theta$$

и, следовательно,

$$I_x \dot\psi \sin^2 \theta + I_z (\dot\psi \cos \theta + \dot\varphi) \cos \theta = c_1. \qquad (14.33)$$

В-третьих, интеграл момента количеств движения относительно оси z (линия действия силы Mg пересекает ось z):

$$K_z = c_2,$$

т. е.

$$I_z\omega_z = I_z(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) = c_2. \tag{14.34}$$

Интегралы (14.32)—(14.34) могут быть получены и непосредственно из динамических уравнений Эйлера *).

Используя интегралы (14.33) и (14.34), исключим из интеграла энергии (14.32) $\dot\psi$ и $\dot\varphi$. Из формулы (14.34) найдем

$$\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = c_2/I_z. \tag{14.35}$$

Формулу (14.33) перепишем в виде

$$\dot\psi = \frac{c_1 - I_z(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\cos\theta}{I_x\sin^2\theta}. \tag{14.36}$$

Подставляя теперь выражения (14.35) и (14.36) в интеграл энергии, будем иметь

$$\frac{1}{2}I_x\dot\theta^2 + \frac{(c_1 - c_2\cos\theta)^2}{2I_x\sin^2\theta} + Mgz_C\cos\theta = c_3,$$

где $c_3 = h - \frac{1}{2}\frac{c_2^2}{I_z}$.

Полученное уравнение перепишем в виде

$$I_x^2\dot\theta^2\sin^2\theta = -(c_1 - c_2\cos\theta)^2 - 2Mgz_CI_x\sin^2\theta\cos\theta + 2c_3I_x\sin^2\theta.$$

Оно представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно θ. Для его исследования введем замену $u = \cos\theta$; тогда $\dot u = -\dot\theta\sin\theta$ и, следовательно,

$$I_x^2\dot u^2 = -(c_1 - c_2u)^2 - 2Mgz_CI_x(u - u^3) + 2c_3I_x(1 - u^2).$$

Вводя обозначение

$$f(u) = -(c_1 - c_2u)^2 - 2Mgz_CI_x(u - u^3) + 2I_xc_3(1 - u^2), \tag{14.37}$$

будем иметь

$$I_x^2\dot u^2 = f(u), \tag{14.38}$$

откуда

$$t = \pm I_x\int\frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{14.39}$$

Время t выражается через u эллиптическим интегралом, а следовательно, u будет эллиптической функцией t. Зная u как функцию t, мы тем самым определяем угол нутации θ как функцию времени t. Используя уравнения (14.35) и (14.36), определяем затем ψ и φ как функции времени. Таким образом, поставленная задача приводится к квадратурам.

Мы не будем проводить операции интегрирования, а постараемся выяснить характер движения, исходя из свойств функции $f(u)$. Согласно равенству (14.38) функция $f(u) \geqslant 0$. Поэтому в некоторой области значений u, заключенных между -1 и $+1$ (так как $u = \cos\theta$), функция $f(u)$ должна быть положительна. Учитывая также, что

$$f(-\infty) = -\infty, \qquad f(-1) = -(c_1 + c_2)^2 < 0,$$
$$f(+1) = -(c_1 - c_2)^2 < 0, \qquad f(+\infty) = +\infty,$$

*) Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1944.

мы заключаем, что кубическое уравнение $f(u) = 0$ имеет три вещественных корня, u_1, u_2, u_3 ($u_1 < u_2 < u_3$), а график функции $f(u)$ имеет вид, изображенный на рис. 14.7. Таким образом, для действительного движения u заключено между u_1 и u_2.

Так как $u = \cos\theta$, то угол нутации θ при движении тела будет изменяться в пределах

$$\theta_2 < \theta < \theta_1, \tag{14.40}$$

где $\theta_1 = \arccos u_1$, $\theta_2 = \arccos u_2$.

Для наглядного представления о характере движения тела построим сферу единичного радиуса с центром в неподвижной точке тела. Отложим на оси z единичный вектор, конец которого назовем *апексом*. Очевидно, что апекс будет все время находиться на поверхности построенной нами сферы. В силу условия (14.40) апекс все время будет находиться в полосе между двумя параллелями, соответствующими углам θ_1 и θ_2 (рис. 14.8). Вид траектории апекса в этой полосе зависит от скорости прецессии $\dot\psi$.

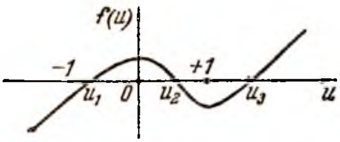


Рис. 14.7

Приведем без доказательства три возможных случая движения апекса.

1. Скорость прецессии $\dot\psi$ сохраняет знак и не обращается в нуль. В этом случае траекторией апекса будет волнистая кривая, касающаяся граничных параллелей (рис. 14.8, *а*).

2. Скорость прецессии $\dot\psi$ сохраняет знак, но обращается в нуль. Очевидно, что $\dot\psi$ может быть равной нулю лишь при $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$ (доказывается, что только при $\theta = \theta_2$), иначе $\dot\psi$ изменила бы знак во время движения. Траекторией апекса будет кривая с точками возврата (сферическая циклоида). Вид траектории показан на рис. 14.8, *б*.

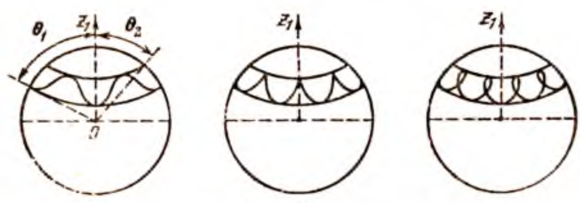


Рис. 14.8

3. Скорость прецессии $\dot\psi$ меняет знак во время движения. В этом случае траекторией апекса будет кривая с петлями (рис. 14.8, *в*).

Рассмотрим случай, когда движение будет *регулярной прецессией* ($\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\dot\varphi = \text{const}$ и $\dot\psi = \text{const}$). Это будет иметь место при $u_1 = u_2 = u_0$ (т. е. корни уравнения $f(u) = 0$ кратны), или

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_0,$$

и

$$\dot\psi = \frac{c_1 - c_2\cos\theta_0}{I_x \sin^2\theta_0} = n = \text{const}, \qquad \dot\varphi = \frac{c_2}{I_z} - n\cos\theta_0 = n_1 = \text{const}.$$

Уравнение $f(u) = 0$ будет иметь кратные корни, если одновременно $f'(u_0) = 0$, или

$$c_2(c_1 - c_2u_0) - I_xMgz_C\left(1 - 3u_0^2\right) - 2I_xc_3u_0 = 0. \tag{14.41}$$

Этому уравнению должны удовлетворять начальные условия, чтобы осуществлялось регулярное прецессионное движение.

Условие (14.41) можно упростить. Действительно, при регулярной прецессии $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\dot\psi = n = \text{const}$, $\dot\varphi = n_1 = \text{const}$. Следовательно, при $t = 0$ будем иметь

$$\theta = \theta_0, \quad \dot\theta = 0, \quad \dot\psi = n, \quad \dot\varphi = n_1.$$

Тогда произвольные постоянные c_1, c_2 и c_3 будут

$$c_1 = I_x n\left(1 - u_0^2\right) + I_z (nu_0 + n_1) u_0,$$

$$c_2 = I_z (nu_0 + n_1),$$

$$c_3 = \frac{(c_1 - c_2 u_0)^2}{2I_x\left(1 - u_0^2\right)} + Mgz_C u_0 = \frac{1}{2} I_x n^2 \left(1 - u_0^2\right) + Mgz_C u_C.$$

Подставляя эти значения для c_1, c_2 и c_3 в уравнение (14.41), получим

$$I_x I_z (nu_0 + n_1) n \left(1 - u_0^2\right) - I_x Mgz_C \left(1 - u_0^2\right) - I_x^2 n^2 u_0 \left(1 - u_0^2\right) = 0.$$

После деления на $I_x \left(1 - u_0^2\right)$ и замены $u_0 = \cos\theta_0$ будем иметь

$$\left(I_x - I_z\right) n^2 \cos\theta_0 - I_z n n_1 + Mgz_C = 0. \tag{14.42}$$

Это уравнение представляет собой условие существования регулярной прецессии в случае Лагранжа.

Отметим, что при движении по инерции при $I_x = I_y \neq I_z$ тело всегда совершает регулярную прецессию, а в случае Лагранжа только при начальных условиях, удовлетворяющих условию (14.42). При движении по инерции ось прецессии совпадает с неизменным направлением вектора момента количеств движения, а в случае Лагранжа ось прецессии вертикальна.

§ 14.6. Главный вектор и главный момент сил тяготения

С развитием космической техники возникли новые задачи механики, в частности большое значение приобрело исследование движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) относительно его центра масс. Это движение может быть вызвано различными силами. Учитывая характер настоящего руководства, мы ограничимся постановкой задачи и исследованием некоторых частных случаев движения ИСЗ относительно центра масс под действием центрального поля сил тяготения, создаваемого Землей, в следующих предположениях *):

1. Размеры ИСЗ конечны, но они малы по сравнению с расстоянием R от центра Земли O до центра масс спутника. Иначе говоря, если l — максимальный линейный размер спутника, то отношение l/R значительно меньше единицы:

$$l/R \ll 1. \tag{14.43}$$

2. Предполагается, что равнодействующая сила $\mathbf{F}$, с которой Земля действует на материальную точку массы m, находящуюся вне Земли, определяется законом всемирного тяготения

$$\mathbf{F} = -\mu \frac{m}{r^3}\mathbf{r}, \tag{14.44}$$

*) Более подробное изложение этого вопроса, свободное от некоторых сделанных ниже предположений, можно найти, например, в монографии: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. Там же дано исследование влияния других факторов (аэродинамических сил, магнитного поля Земли, светового давления и т. п.) на движение ИСЗ относительно центра масс.

где $\mu = fM$ — гравитационный параметр Земли (M — ее масса, f — гравитационная постоянная), $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра Земли O к материальной точке. Таким образом, предполагается, что Земля создает обычное ньютоновское поле сил притяжения.

3. Не учитывается движение Земли относительно Солнца, т. е. предполагается, что Земля неподвижна.

Построим две системы подвижных координатных осей: первая система $Ox_0y_0z_0$ с началом в центре Земли O и осью Oz_0, проходящей через центр масс G спутника; вторая система $Cx_1y_1z_1$ с началом в центре масс спутника и осями x_1, y_1, z_1, параллельными осям x_0, y_0, z_0 (оси Oz_0 и Cz_1 совпадают — см. рис. 14.9). Выделим в ИСЗ точку массы dm, положение которой относительно координатной системы $Cx_1y_1z_1$ будем определять радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$ или координатами x_1, y_1, z_1. На основании (14.43) будем считать отношения x_1/R, y_1/R и z_1/R членами первого порядка малости. Проведем теперь из центра Земли радиусы-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ (см. рис. 14.9).

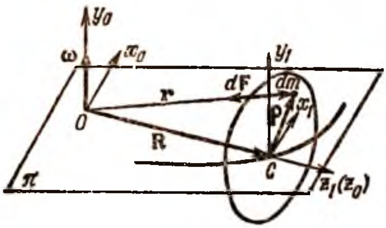


Рис. 14.9

Имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}. \tag{14.45}$$

Сила $d\mathbf{F}$, с которой Земля действует на выбранную точку, определяется формулой (14.44):

$$d\mathbf{F} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}\,dm. \tag{14.46}$$

Отсюда, пользуясь равенством (14.45), найдем проекции силы $d\mathbf{F}$ на оси x_1, y_1, z_1

$$dF_{x_1} = -\mu\frac{x_1}{r^3}\,dm, \quad dF_{y_1} = -\mu\frac{y_1}{r^3}\,dm, \quad dF_{z_1} = -\mu\frac{R+z_1}{r^3}\,dm. \tag{14.47}$$

Возводя обе части равенства (14.45) в скалярный квадрат, получим

$$r^2 = R^2 + 2\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\rho} + \rho^2 = R^2 + 2Rz_1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 + 2\frac{z_1}{R} + \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{R^2}\right)^{-1/2}, \tag{14.48}$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left(1 + 2\frac{z_1}{R} + \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{R^2}\right)^{-3/2}. \tag{14.49}$$

Разложим левую часть равенства (14.49) в ряд бинома Ньютона и ограничимся членами первого порядка малости *). Имеем.

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left(1 - 3\frac{z_1}{R}\right). \tag{14.50}$$

Внеся это выражение для $1/r^3$ в равенства (14.47), получим с принятой точностью

$$dF_{x_1} = -\mu\frac{x_1}{R^3}\,dm, \quad dF_{y_1} = -\mu\frac{y_1}{R^3}\,dm, \quad dF_{z_1} = -\frac{\mu}{R^2}\,dm + 2\mu\frac{z_1}{R^3}\,dm. \tag{14.51}$$

---

*) Ряд бинома Ньютона $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$ сходится абсолютно и равномерно для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < 1$.

Интегрируя эти равенства по массе всего спутника и учитывая соотношения

$$\int x_1\,dm = 0, \quad \int y_1\,dm = 0, \quad \int z_1\,dm = 0 \tag{14.52}$$

(начало координат совпадает с центром масс спутника C), найдем проекции главного вектора $\mathbf{F}$ сил притяжения Земли

$$F_{x_1} = 0, \quad F_{y_1} = 0, \quad F_{z_1} = -\mu \frac{m}{R^2}, \tag{14.53}$$

где m — масса спутника.

Из этих выражений видно, что с принятой точностью размеры ИСЗ не влияют на главный вектор сил притяжения Земли и, следовательно, центр масс спутника движется по эллипсу, один из фокусов которого совпадает с центром Земли O (см. главу IV). Заметим, что такая постановка задачи (она называется ограниченной) применяется не только при изучении движения ИСЗ относительно центра масс, но и в классических задачах о прецессии оси Земли и либрации Луны.

В дальнейшем будем считать, что координатная плоскость Cx_1z_1 (следовательно, и плоскость Ox_0z_0) совмещена с плоскостью π орбиты центра масс спутника. Тогда оси y_1 и y_0 будут все время перпендикулярны к неподвижной плоскости орбиты, а ось x_1 будет совпадать с ее трансверсалью (см. рис. 14.9). Построенная таким образом координатная система $Cx_1y_1z_1$ называется *орбитальной* системой.

Перейдем теперь к вычислению главного момента сил тяготения Земли относительно центра масс C. Найдем сначала момент $d\mathbf{M}_C^e$ силы $d\mathbf{F}$, приложенной к выбранной точке с массой dm. Имеем

$$d\mathbf{M}_C^e = \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ dF_{x_1} & dF_{y_1} & dF_{z_1} \end{vmatrix}.$$

Отсюда найдем моменты относительно осей x_1, y_1, z_1:

$$dM_{x_1}^e = y_1\,dF_{z_1} - z_1\,dF_{y_1}, \quad dM_{y_1}^e = z_1\,dF_{x_1} - x_1\,dF_{z_1}, \quad dM_{z_1}^e = x_1\,dF_{y_1} - y_1\,dF_{x_1},$$

или, пользуясь равенствами (14.51),

$$\begin{aligned} dM_{x_1}^e &= 3\frac{\mu}{R^3} y_1 z_1\,dm - \frac{\mu}{R^2} y_1\,dm, \\ dM_{y_1}^e &= -3\frac{\mu}{R^3} x_1 z_1\,dm + \frac{\mu}{R^2} x_1\,dm, \\ dM_{z_1}^e &= 0. \end{aligned} \tag{14.54}$$

Интегрируя эти равенства по массе всего спутника и учитывая (14.52), получим значения моментов сил тяготения относительно орбитальных осей x_1, y_1, z_1:

$$M_{x_1}^e = 3\frac{\mu}{R^3} I_{y_1 z_1}, \quad M_{y_1}^e = -3\frac{\mu}{R^3} I_{x_1 z_1}, \quad M_{z_1}^e = 0, \tag{14.55}$$

где $I_{y_1z_1}$ и $I_{x_1z_1}$ — соответствующие центробежные моменты инерции.

Так как спутник вращается относительно орбитальных осей, то центробежные моменты инерции $I_{x_1z_1}$ и $I_{y_1z_1}$ являются переменными величинами. Для того чтобы перейти к постоянным моментам инерции, введем еще одну систему координат $Cxyz$, в которой оси, жестко связанные со спутником, направлены по главным центральным осям инерции спутника (рис. 14.10). Положение новой координатной системы

$Cxyz$ относительно орбитальной системы $Cx_1y_1z_1$ будем определять таблицей направляющих косинусов:

	x	y	z
x_1	α_1	α_2	α_3
y_1	β_1	β_2	β_3
z_1	γ_1	γ_2	γ_3

Из девяти величин α_k, β_k, γ_k ($k = 1, 2, 3$) независимых только три, так как направляющие косинусы удовлетворяют трем условиям единичности и трем условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0,\\ &\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, \quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,\\ &\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1, \quad \gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2+\gamma_3\beta_3=0. \end{aligned} \tag{14.56}$$

Таблица косинусов представляет ортогональную матрицу Λ, равную обратной матрице Λ^{-1}. Поэтому каждый элемент этой матрицы равен своему алгебраическому дополнению, в частности,

$$\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \tag{14.57}$$

Обозначим моменты инерции спутника относительно осей x, y, z через I_x, I_y, I_z соответственно. Тогда, пользуясь формулами (12.29) и учитывая принятые здесь

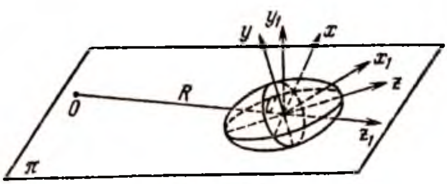


Рис. 14.10

обозначения, получим при $x_C = y_C = z_C = 0$

$$\begin{aligned} I_{x_1z_1}&=\alpha_1\gamma_1(I_z-I_x)+\alpha_2\gamma_2(I_z-I_y),\\ I_{y_1z_1}&=\beta_1\gamma_1(I_z-I_x)+\beta_2\gamma_2(I_z-I_y). \end{aligned} \tag{14.58}$$

Момент относительно оси x вычислим по формуле

$$M_x^e=M_{x_1}^e\alpha_1+M_{y_1}^e\beta_1+M_{z_1}^e\gamma_1.$$

Внесем в это равенство значения $M_{x_1}^e$, $M_{y_1}^e$ и $M_{z_1}^e$ из (14.55), а затем воспользуемся формулами (14.58). Тогда после очевидных преобразований получим

$$M_x^e=3\frac{\mu}{R^3}(I_z-I_y)\gamma_2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1),$$

или, пользуясь последней формулой (14.57),

$$M_x^e = 3\frac{\mu}{R^3}(I_z - I_y)\gamma_2\gamma_3, \quad M_y^e = 3\frac{\mu}{R^3}(I_x - I_z)\gamma_3\gamma_1,$$
$$M_z^e = 3\frac{\mu}{R^3}(I_y - I_x)\gamma_1\gamma_2 \tag{14.59}$$

(две другие формулы получены аналогичным методом).

Формулы (14.59), определяющие проекции главного момента сил тяготения, действующих на ИСЗ, содержат не переменные, а постоянные моменты инерции; кроме того, они симметричны. Этим они выгодно отличаются от формул (14.55).

§ 14.7. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ относительно центра масс

Обозначим через Ω абсолютную угловую скорость ИСЗ (скорость относительно осей $C\xi\eta\zeta$, имеющих начало в центре масс спутника и перемещающихся поступательно относительно инерциальной системы отсчета, — эти оси на рис. 14.9 не показаны). Пусть Ω_x, Ω_y, Ω_z — проекции этого вектора на оси x, y, z соответственно. Воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера (14.7), внеся в них значения моментов M_x^e, M_y^e и M_z^e из равенств (14.59) и заменив одновременно вектор ω на Ω. Тогда получим *)

$$\begin{aligned} I_x\frac{d\Omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\Omega_y\Omega_z &= 3\frac{\mu}{R^3}(I_z - I_y)\gamma_2\gamma_3,\\ I_y\frac{d\Omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\Omega_z\Omega_x &= 3\frac{\mu}{R^3}(I_x - I_z)\gamma_3\gamma_1,\\ I_z\frac{d\Omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\Omega_x\Omega_y &= 3\frac{\mu}{R^3}(I_y - I_x)\gamma_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{14.60}$$

Эти три уравнения содержат шесть неизвестных функций: Ω_x, Ω_y, Ω_z, γ_1, γ_2, γ_3. Поэтому их нужно дополнить уравнениями, определяющими закон изменения направляющих косинусов. Для этого обозначим через ω угловую скорость вращения орбитальной системы координат и через $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — орты ее осей. Так как плоскости Ox_0z_0 и Cx_1z_1 неподвижны, то орбитальная система вращается вокруг неподвижной оси Oy_0. Поэтому

$$\omega = \omega \mathbf{j}_1. \tag{14.61}$$

Воспользуемся формулами (том I, глава XIII)

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = \omega\times\mathbf{i}_1, \quad \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} = \omega\times\mathbf{j}_1, \quad \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = \omega\times\mathbf{k}_1,$$

или, пользуясь (14.61) и формулами

$$\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1 = \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{j}_1\times\mathbf{k}_1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{k}_1\times\mathbf{i}_1 = \mathbf{j}_1,$$
$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = -\omega\mathbf{k}_1, \quad \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = \omega\mathbf{i}_1. \tag{14.62}$$

*) Уравнения Эйлера (14.7) выведены для случая, когда тело имеет одну неподвижную точку. Так как теоремы об изменении момента количеств движения относительно центра масс и неподвижной точки имеют одну и ту же форму, то динамические уравнения Эйлера (14.7) применимы и в данном случае (см. формулы (9.9) и (9.45)).

Для того чтобы спроектировать эти равенства на подвижные координатные оси $Cxyz$, скрепленные с ИСЗ, нужно выразить абсолютные производные, стоящие в левых частях равенств (14.62), через локальные производные. Имеем

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{i}_1}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}_1 = -\omega \mathbf{k}_1.$$

Проектируя обе части этого равенства на оси x, y, z и учитывая, что проекции координатных ортов равны соответствующим направляющим косинусам, найдем (две вторые группы уравнений получены из (14.62) аналогичным методом)

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2\Omega_z - \alpha_3\Omega_y - \omega\gamma_1, && \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2\Omega_z - \beta_3\Omega_y, && \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2\Omega_z - \gamma_3\Omega_y + \omega\alpha_1,\\
&\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3\Omega_x - \alpha_1\Omega_z - \omega\gamma_2, && \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3\Omega_x - \beta_1\Omega_z, && \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3\Omega_x - \gamma_1\Omega_z + \omega\alpha_2,\\
&\frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1\Omega_y - \alpha_2\Omega_x - \omega\gamma_3, && \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1\Omega_y - \beta_2\Omega_x, && \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1\Omega_y - \gamma_2\Omega_x + \omega\alpha_3.
\end{aligned} \tag{14.63}$$

Эти девять кинематических уравнений (они называются *обобщенными уравнениями Пуассона*) вместе с тремя динамическими уравнениями Эйлера (14.60) составляют полную систему дифференциальных уравнений движения ИСЗ относительно центра масс. В этих уравнениях I_x, I_y, I_z и μ — известные постоянные величины, R и ω — в общем случае известные функции времени, определяемые из кеплерова движения центра масс спутника, Ω_x, Ω_y, Ω_z, α_k, β_k, γ_k ($k = 1, 2, 3$) — искомые функции времени. Не останавливаясь на методах решения этих уравнений (в общем виде они решаются только для частных случаев), заметим, что шесть первых интегралов нам известны — это равенства (14.56).

§ 14.8. Относительное равновесие ИСЗ

Большое практическое и теоретическое значение имеют условия относительного равновесия ИСЗ, т. е. условия, при выполнении которых спутник не будет перемещаться относительно орбитальной системы координат $Cx_1y_1z_1$. Мы будем решать эту задачу в предположении, что центр масс ИСЗ движется по окружности радиуса R. Как известно, в этом случае угловая скорость ω вращения орбитальной системы $Cx_1y_1z_1$ определяется равенством

$$\omega^2 = \frac{\mu}{R^3} = \text{const}. \tag{14.64}$$

При равновесии ИСЗ относительно осей x_1, y_1, z_1 все направляющие косинусы α_k, β_k и γ_k будут постоянными числами; при этом девять обобщенных уравнений Пуассона обращаются в тождества (читатель без труда может проверить это самостоятельно). Кроме того, при относительном покое абсолютная угловая скорость спутника $\boldsymbol{\Omega}$ будет равна угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения орбитальной системы $Cx_1y_1z_1$, т. е. $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, или, учитывая равенство (14.61),

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{j}_1 = \omega \mathbf{j}. \tag{14.65}$$

В проекциях на оси x, y, z, жестко связанные с ИСЗ, будем иметь

$$\Omega_x = \omega\beta_1, \quad \Omega_y = \omega\beta_2, \quad \Omega_z = \omega\beta_3,$$

причем все эти величины в силу сделанных предположений постоянны и, следовательно, их производные по времени равны нулю.

Внесем эти значения проекций угловой скорости и значение μ/R^3 из равенства (14.64) в уравнения (14.60) и сократим их на ω^2. Тогда получим

$$\begin{aligned}
(I_z - I_y)\,\beta_2\beta_3 &= 3\,(I_z - I_y)\,\gamma_2\gamma_3,\\
(I_x - I_z)\,\beta_3\beta_1 &= 3\,(I_x - I_z)\,\gamma_3\gamma_1,\\
(I_y - I_x)\,\beta_1\beta_2 &= 3\,(I_y - I_x)\,\gamma_1\gamma_2.
\end{aligned} \tag{14.66}$$

Будем считать, что среди моментов инерции I_x, I_y, I_z нет равных. Для определенности положим

$$I_y > I_x > I_z. \tag{14.67}$$

Тогда, сокращая уравнения (14.66) на не равные нулю множители, получим

$$\beta_2\beta_3 = 3\gamma_2\gamma_3, \quad \beta_3\beta_1 = 3\gamma_3\gamma_1, \quad \beta_1\beta_2 = 3\gamma_1\gamma_2. \tag{14.68}$$

Покажем, что среди корней этих уравнений имеются нулевые корни. Действительно, предположим, что все корни уравнений (14.68) отличны от нуля. Тогда, перемножая почленно эти уравнения, найдем $\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 = 27\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2$, или

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = \pm 3\sqrt{3}\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Деля почленно это равенство на уравнения (14.68), получим

$$\beta_1 = \pm\sqrt{3}\gamma_1, \quad \beta_2 = \pm\sqrt{3}\gamma_2, \quad \beta_3 = \pm\sqrt{3}\gamma_3.$$

Умножив первое уравнение на β_1, второе на β_2 и третье на β_3, а затем почленно сложив, будем иметь

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \pm\sqrt{3}\,(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3).$$

Это равенство невозможно, так как согласно (14.56) его левая часть равна единице, а правая — нулю. Это доказывает, что среди корней уравнений (14.68) имеются нулевые. Пусть $\beta_3 = \gamma_3 = 0$. Тогда первое уравнение (14.68) превратится в тождество, а второе и третье примут вид $\gamma_3\gamma_1 = 0$, $\beta_1\beta_2 = 0$. Отсюда $\gamma_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_2 = \beta_2 = 1$ (так как сумма квадратов одноименных косинусов равна единице). Из полученного решения и равенств (14.56) следует, что $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$

Таким образом, таблица направляющих косинусов в относительном равновесии ИСЗ имеет вид *)

	x	y	z
x_1	1	0	0
y_1	0	1	0
z_1	0	0	1

Эта таблица показывает, что в сделанных предположениях относительное равновесие ИСЗ возможно только в том случае, если его главные центральные оси инерции x, y, z совпадают с координатными осями орбитальной системы $Cx_1y_1z_1$. Иначе говоря, в относительном равновесном положении одна ось эллипсоида инерции ИСЗ будет все время направлена к центру Земли, вторая ось будет перпендикулярна плоскости орбиты и третья ось будет лежать в плоскости орбиты, перпендикулярно прямой OC.

Остановимся очень кратко на вопросе устойчивости положения относительного равновесия. В конце § 20.2 будет показано, что если к центру Земли будет направлена большая ось эллипсоида инерции ИСЗ (ей соответствует наименьший момент инерции), то это положение ИСЗ будет устойчиво **). (Здесь мы пользуемся

*) Заметим, что другие решения уравнений (14.68) не дают принципиально новых результатов и они будут совпадать с данным решением при соответствующей замене обозначений осей x_1, y_1, z_1.

**) См. также цитированную на стр. 301 книгу В. В. Белецкого или книгу: Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.

интуитивным представлением об устойчивости движения, которое было изложено в § 14.4. Строгое определение устойчивости равновесия будет дано в главе XX, § 20.2.) В следующем параграфе мы дадим аналитическое доказательство этого утверждения для плоскопараллельного движения ИСЗ, а сейчас ограничимся рассмотрением одного примера.

Пусть спутник состоит из двух точечных масс, соединенных невесомым стержнем длины $2l$ (спутник типа гантели). Согласно формулам (14.51) на каждую точку будет действовать сила, проекции которой определяются равенствами

$$F_{x_1} = -\mu \frac{x_1}{R^3} m, \quad F_{y_1} = -\mu \frac{y_1}{R^3} m, \quad F_{z_1} = -\frac{\mu}{R^2} m + 2\mu \frac{z_1}{R^3} m,$$

где m — масса каждой точки.

В выражении для F_{z_1} первое слагаемое не влияет на вращательное движение спутника (при вычислении моментов оно выпадает — см. формулы (14.54) и (14.55)). Поэтому в дальнейшем будем учитывать только второе слагаемое в F_{z_1}. Составим дифференциальные уравнения силовых линий (см. (3.53))

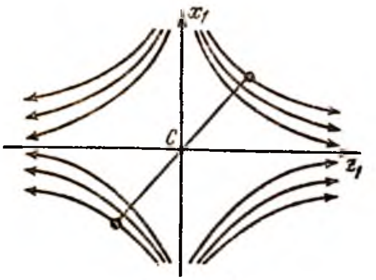


Рис. 14.11

$$\frac{dx_1}{-\mu \frac{x_1}{R^3} m} = \frac{dy_1}{-\mu \frac{y_1}{R^3} m} = \frac{dz_1}{2\mu \frac{z_1}{R^3} m},$$

или, упрощая,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{y_1} = -\frac{dz_1}{2z_1}.$$

Отсюда

$$z_1 = C_1/x_1^2, \qquad z_1 = C_2/y_1^2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

На плоскости x_1z_1 силовые линии и их направления имеют вид, показанный на рис. 14.11 (аналогичная картина имеет место на плоскости y_1z_1). Из рисунка видно, что если спутник-гантель находится в плоскости орбиты (плоскости x_1z_1), то каждая точечная масса будет стремиться к оси z_1, т. е. к радиусу-вектору центра масс спутника. Легко видеть, что если в начальный момент ось тела (стержень спутника-гантели) близка к направлению оси z_1, то при малом возмущении движение будет иметь колебательный характер (то же явление будет происходить в плоскости y_1z_1). Таким образом, если в начальный момент времени ось спутника-гантели будет направлена к Земле, то это равновесное положение будет устойчиво.

Обратим внимание теперь на то, что для гантели $I_x = I_y = ml^2$, $I_z = 0$ (ось z направлена по оси спутника-гантели), т. е. момент инерции относительно оси наименьший. Это объясняет для данного спутника устойчивость относительного равновесного положения, при котором ось спутника с наименьшим моментом инерции направлена к центру Земли.

§ 14.9. Плоское движение ИСЗ по круговой орбите

Рассмотрим плоское движение ИСЗ относительно центра масс, предполагая, что ось Cy все время перпендикулярна плоскости орбиты. В этом случае $\beta_1 = \beta_3 = \alpha_2 = \gamma_2 = 0$. Введем угол θ между осями z_1 и z (рис. 14.12). Тогда будем иметь

$$\gamma_1 = \cos(z_1, x) = -\sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos(z_1, z) = \cos\theta.$$

Обозначим через Ω_r угловую скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат $Cx_1y_1z_1$; очевидно, что в плоском движении $\Omega_r = \dot{\theta} \mathbf{j}_1$. Абсолютная угловая скорость Ω спутника определяется равенством $\Omega = \omega + \Omega_r$ или, учитывая значения Ω_r и ω (см. формулу (14.65)), получим

$$\Omega = (\omega + \dot{\theta}) \mathbf{j}_1.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае плоского движения спутника проекции его угловой скорости на оси x, y, z жестко связанные с ним, будут равны

$$\Omega_x = 0, \qquad \Omega_y = \omega + \dot\theta, \qquad \Omega_z = 0.$$

Внесем полученные значения для γ_k ($k = 1, 2, 3$) и Ω_x, Ω_y, Ω_z в уравнения (14.60), считая, что центр масс спутника движется по круговой орбите (в этом случае величина ω, определяемая формулой (14.64), является постоянной). Из трех уравнений (14.60) первое и третье уравнения обратятся в тождества, а второе уравнение примет вид

$$I_y\ddot\theta + 3\omega^2 (I_x - I_z) \sin\theta \cos\theta = 0. \quad (14.69)$$

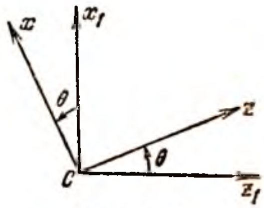


Рис. 14.12

Будем считать, что $I_x > I_z$. Тогда это уравнение приводится к дифференциальному уравнению движения математического маятника для угла 2θ. Действительно, положив $\psi = 2\theta$, преобразуем уравнение (14.69) к виду

$$\ddot\psi + k^2 \sin\psi = 0, \quad (14.70)$$

где

$$k^2 = 3\omega^2 \frac{I_x - I_z}{I_y}. \quad (14.71)$$

Дифференциальное уравнение (14.70) совпадает по форме с дифференциальным уравнением движения математического маятника. Поэтому все выводы, относящиеся к математическому маятнику, справедливы и для ИСЗ, совершающего плоскопараллельное движение. В частности, отсюда следует, что равновесное положение ИСЗ, при котором большая ось эллипсоида инерции направлена к центру Земли, является устойчивым положением относительного равновесия. Точно так же, как и математический маятник, ИСЗ может при определенных условиях совершать круговые движения. Наконец, период малых колебаний ИСЗ около устойчивого положения относительного равновесия определяется формулой $T = 2\pi/k$, или, если принять во внимание равенство (14.71),

$$T = \sqrt{\frac{I_y}{3(I_x - I_z)}} \cdot T^*,$$

где $T^* = 2\pi/\omega$ — период обращения спутника вокруг Земли.

Глава XV

ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ

§ 15.1. Введение

В современной технике под *гироскопом* *) *понимают твердое симметричное тело, которое может вращаться вокруг оси симметрии с угловой скоростью, значительно превышающей скорость вращения самой оси симметрии.*

---

*) Слово «гироскоп», буквально означающее «указатель вращения», образовано французским физиком Фуко из двух греческих слов: γῦρος (гирос) — вращение и σκοπεῖν (скопейн) — смотреть, наблюдать. Этими словами Фуко назвал построенный им в 1852 г. прибор для демонстрации суточного вращения Земли (см. § 15.4).

Примером гироскопа может служить волчок, имеющий неподвижную точку O (рис. 15.1).

Наиболее простым гироскопическим прибором является гироскоп в кардановом подвесе (рис. 15.2). Ротор вращается вокруг своей оси симметрии AA', причем ось вращения установлена в подшипниках, укрепленных во внутреннем кольце, которое может вращаться вокруг оси BB'. Вращение внутреннего кольца происходит в подшипниках, укрепленных в наружном кольце. Наконец, наружное кольцо может вращаться вокруг оси CC' в неподвижно

Рис. 15.1

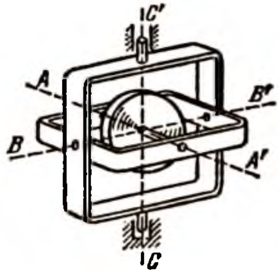


Рис. 15.2

укрепленных подшипниках. Таким образом, ротор может совершать три независимых друг от друга вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке — центре ротора, которая при движении гироскопа остается неподвижной. Заметим, что точка пересечения осей карданова подвеса или неподвижная точка называется *точкой подвеса гироскопа*.

Приведенные примеры гироскопов — волчок и гироскоп в кардановом подвесе — представляют примеры *гироскопов с тремя степенями свободы*, так как для описания их движения необходимо иметь три независимых между собой параметра. Если же, например, у гироскопа в кардановом подвесе закрепить наружное кольцо, то ротор гироскопа будет иметь возможность вращаться только вокруг своей оси симметрии и оси внутреннего кольца, т. е. будет иметь две степени свободы. Такой гироскоп называется *гироскопом с двумя степенями свободы*.

Гироскоп обладает рядом замечательных свойств, позволяющих широко использовать его в технике. Так, на всех морских и океанских судах установлены гироскопические компасы, работающие значительно точнее и устойчивее магнитных компасов; широко применяются гироскопы для получения на движущемся объекте (корабле, самолете, ракете) вертикали места, знание которой необходимо, в частности, для определения текущих координат объекта; с помощью гироскопов стабилизируются орудийные платформы на корабле; гироскопы используются для измерения с высокой степенью точности угловых и линейных скоростей и ускорений;

они применяются при прокладке туннелей, бурении скважин и т. п. Подробное описание гироскопических устройств и их теории читатель может найти в специальных руководствах *), здесь же мы дадим только краткое изложение основных свойств гироскопа, являющихся теоретической базой современного гироскопического приборостроения.

§ 15.2. Основное допущение элементарной (прецессионной) теории гироскопа

Пусть гироскоп совершает быстрое вращение вокруг своей оси материальной симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, а эта ось в свою очередь вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. На основании теоремы о сложении вращений тела абсолютная угловая скорость гироскопа $\boldsymbol{\omega}$ равна геометрической сумме угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

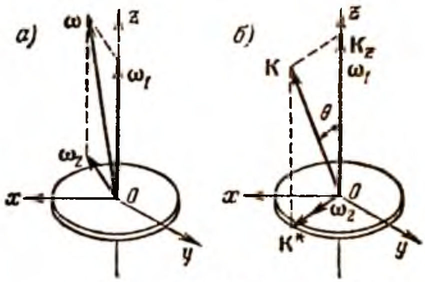


Рис. 15.3

Построим систему координат $Oxyz$, совместив ось z с осью симметрии гироскопа (рис. 15.3, *а*). Тогда оси этой системы координат будут главными осями инерции; следовательно, проекции момента количеств движения на оси x, y, z определяются равенствами

$$K_x = I_x\omega_{2x}, \quad K_y = I_y\omega_{2y}, \quad K_z = I_z(\omega_1 + \omega_{2z}),$$

где I_x, I_y и I_z — соответствующие моменты инерции гироскопа, причем $I_x = I_y$ (так как ось z — ось симметрии).

Таким образом, мы можем назвать три непараллельных направления: *направление угловой скорости собственного вращения* $\boldsymbol{\omega}_1$, *направление абсолютной угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$ *и направление вектора момента количеств движения* $\mathbf{K}$ (*кинетического момента*) *тела* **).

Для современных гироскопов угловая скорость ω_1 собственного вращения достигает 15000 рад/с (порядка 150 000 об/мин) и даже более, в то время как угловая скорость ω_2 оси гироскопа не превышает обычно 0,01 рад/с.

---

*) См., например, Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов. — М.: Наука, 1972; Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963; Ройтенберг Я. Л. Гироскопы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975; Магнус К. Гироскоп: теория и применение. Перевод с немецкого. — М.: Мир, 1974.

**) Если нет специальной оговорки, то предполагается, что кинетический момент $\mathbf{K}$ вычисляется относительно точки подвеса гироскопа.

Найдем угол между кинетическим моментом **K** и осью симметрии z. Для этого рассмотрим наиболее неблагоприятный случай, когда вектор угловой скорости вращения оси гироскопа ω_2 перпендикулярен оси z, т. е. лежит в плоскости Oxy, и, следовательно, $\omega_{2z}=0$. Найдем составляющую **K*** вектора **K**, расположенную в плоскости Oxy. Имеем

$$\mathbf{K}^*=\mathbf{K}_x+\mathbf{K}_y=I_x\omega_{2x}+I_y\omega_{2y},$$

или, учитывая, что для гироскопа $I_x=I_y$,

$$\mathbf{K}^*=I_x(\omega_{2x}+\omega_{2y})=I_x\omega_2,$$

т. е. составляющая **K*** вектора **K** совпадает по направлению с вектором ω_2 (рис. 15.3, *б*).

Согласно последнему равенству и рис. 15.3, *б* угол θ между вектором **K** и осью z определится из равенства

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{K^*}{K_z}=\frac{I_x\omega_2}{I_z\omega_1}.$$

Обычно для гироскопов $I_x/I_z\approx 0{,}6$. Если, кроме того, принять, что $\omega_1\geqslant 3000$ рад/с, а $\omega_2\leqslant 0{,}01$ рад/с, то получим следующую оценку: $\operatorname{tg}\theta\leqslant 0{,}6\dfrac{0{,}01}{3000}=0{,}000002$. Отсюда $\theta\leqslant 0{,}4''$. Очевидно, что эта величина пренебрежимо мала. Поэтому, не внося большой погрешности, можно считать, что вектор кинетического момента **K** совпадает с осью динамической симметрии гироскопа, т. е. можно положить

$$\mathbf{K}=I_z\omega_1=I_z\omega_1\mathbf{k},\qquad(15.1)$$

где **k** — орт оси симметрии гироскопа.

Теория, построенная на этом основном допущении, называется элементарной или прецессионной теорией гироскопа *).

§ 15.3. Теорема Резаля

Для изучения движения гироскопа удобно пользоваться теоремой Резаля, которая представляет по существу кинематическую интерпретацию теоремы об изменении момента количеств движения материальной системы. Согласно последней имеем

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\mathbf{M}^e,\qquad(15.2)$$

где $\mathbf{M}^e$ — главный момент всех внешних сил, приложенных к системе, относительно неподвижной точки.

*) Более строгое обоснование прецессионной теории гироскопов и рассмотрение условий, при выполнении которых она дает приемлемые для практики результаты, приводится в книге: Меркин Д. Р. Гироскопические системы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1974.

Производная от **K** по времени представляет собой «скорость» **u** конца этого вектора *), т. е. $d\mathbf{K}/dt = \mathbf{u}$ и, следовательно, равенство (15.2) можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}^e. \qquad (15.3)$$

Полученная формула представляет собой теорему Резаля *скорость конца вектора момента количеств движения (кинетического момента) равна главному моменту всех внешних сил.*

Теорема Резаля имеет общий характер, но особенно удобно пользоваться ею в теории гироскопов. Это объясняется тем, что согласно равенству (15.1) величина и направление вектора кинетического момента нам известна — модуль вектора **K** равен $I_z\omega_1$, а направлен он по оси динамической симметрии гироскопа. Поэтому с помощью зависимости (15.3) мы можем получить закон движения оси симметрии гироскопа по заданному моменту внешних сил или, зная закон движения оси гироскопа, определить момент сил, под действием которых происходит это движение.

§ 15.4. Основное свойство свободного (астатического) гироскопа

Рассмотрим гироскоп с тремя степенями свободы. Если сумма моментов всех внешних сил, приложенных к гироскопу, относительно неподвижной точки равна нулю, то гироскоп называется *свободным* (иногда его называют *астатическим* или *уравновешенным*). Из этого определения видно, что центр тяжести свободного гироскопа должен совпадать с точкой подвеса его. Если пренебречь массой рамок и трением в осях, то уравновешенный гироскоп, установленный в кардановом подвесе, будет свободным.

Предположим вначале, что гироскоп не вращается, т. е. находится в покое. Если ударом (толчком) сообщить оси такого невращающегося гироскопа небольшую угловую скорость, то очевидно, что в дальнейшем ось гироскопа будет равномерно вращаться с той угловой скоростью, которую сообщили ей при ударе. Совершенно иначе будет вести себя ось гироскопа, если до удара гироскоп вращался с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. В этом случае ось свободного быстро вращающегося гироскопа останется практически неподвижной. Действительно, для свободного гироскопа $\mathbf{M}^e = 0$ и, следовательно, согласно формуле (15.2)

$$\mathbf{K} = \mathrm{const},$$

или, учитывая, что в рамках элементарной теории гироскопа справедливо соотношение (15.1),

$$I_z\omega_1\mathbf{k} = \mathrm{const}.$$

---

*) Слово «скорость» взято нами в кавычки, так как размерность вектора **u** не совпадает с размерностью обычной скорости (размерность вектора **K** не равна размерности длины). В дальнейшем, помня условность этого слова, мы опускаем кавычки.

Из этого равенства следует, что вектор **k**, определяющий направление оси гироскопа, *сохраняет в инерциальной системе отсчета неизменное направление.*

Подействуем теперь на свободный гироскоп кратковременной силой, возникающей при ударе. Так как скорость **u** согласно формуле Резаля (15.3) не будет равна нулю только в промежутке времени действия этой кратковременной силы, то ось гироскопа практически (в рамках прецессионной теории) не изменит своего направления. Более полный анализ (см. § 14.2) показывает, что удар вызывает в свободном гироскопе колебания его оси очень малой амплитуды, но большой частоты *). Эти колебания (они называются *нутационными*) не учитываются в прецессионной теории гироскопов.

Доказанное свойство, являющееся основным для свободного гироскопа, формулируется следующим образом: *ось быстро вращающегося свободного гироскопа устойчиво сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета; удары или толчки могут вызвать вибрацию оси гироскопа очень малой амплитуды, но не отклонение ее от первоначального положения.*

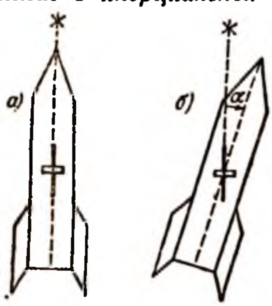


Рис. 15.4

Из этого свойства следует, что при установке на Земле свободного гироскопа ось последнего будет сохранять неизменное направление относительно далеких звезд. Следовательно, относительно Земли ось свободного гироскопа будет поворачиваться в сторону, противоположную вращению Земли. В 1852 г. этот опыт показал Л. Фуко (вслед за маятником, носящим теперь его имя), дав тем самым второе экспериментальное доказательство вращения Земли. Этот же опыт дал основание Л. Фуко назвать построенный им прибор гироскопом (см. примечание на стр. 309).

Свойство свободного гироскопа используется и в технике. Так, если установить быстро вращающийся свободный гироскоп на движущемся объекте (самолете, ракете, торпеде) и придать его оси требуемое направление, например, на звезду или цель, то ось такого гироскопа будет устойчиво сохранять заданное направление при любом движении объекта. Это неизменное направление оси гироскопа может быть использовано для управления и коррекции движения объекта, ориентации его и т. п.

Проиллюстрируем сказанное. Пусть на ракете установлен свободный гироскоп, ось которого совпадала в начальный момент с осью ракеты и была направлена на звезду (рис. 15.4, *а*). Предположим

*) См., например, книгу, ссылка на которую приведена в примечании на стр. 312.

далее, что ось ракеты должна сохранять заданное ей в начальный момент направление, но в силу случайных причин отклонилась от него на некоторый угол α. Так как ось установленного на ракете свободного гироскопа сохраняет первоначальное направление, то возникновение угла рассогласования между осями ракеты и гироскопа (рис. 15.4, *б*) немедленно зафиксируют чувствительные элементы, которые подадут полученный сигнал на устройство, управляющее вращательным движением ракеты (см. стр. 199). В результате ракета повернется в обратную сторону и ось ее займет первоначальное направление. Очевидно, что вся эта система может быть использована не только для стабилизации заданного направления оси ракеты, но и для поворота ее *).

§ 15.5. Закон прецессии оси гироскопа

До сих пор мы рассматривали свободный гироскоп, т. е. гироскоп, на который не действуют никакие внешние силы или, точнее, для которого сумма моментов всех внешних сил относительно точки подвеса равна нулю. Рассмотрим теперь гироскоп, к которому приложена внешняя сила, создающая момент относительно точки подвеса.

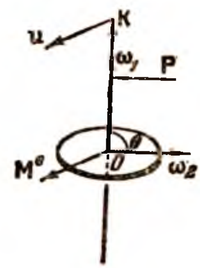


Рис. 15.5

Пусть к гироскопу приложена сила **P**, как это показано на рис. 15.5. Если гироскоп не вращается, то под действием силы **P** ось гироскопа будет перемещаться в сторону действия силы. Если же скорость собственного вращения гироскопа достаточно велика, то действие силы **P** вызовет совершенно другое движение оси гироскопа. Действительно, момент $\mathbf{M}^e$ силы **P** относительно неподвижной точки будет направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через линию действия силы и точку O, т. е. перпендикулярно плоскости рисунка, на читателя. Согласно теореме Резаля конец вектора **K** приобретает скорость

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}^e.$$

Это означает, что ось гироскопа начнет движение в направлении момента $\mathbf{M}^e$ перпендикулярно к линии действия силы.

Такая же картина будет наблюдаться и у гироскопа в кардановом подвесе, если к внутреннему кольцу приложить силу **F** (рис. 15.6). Момент этой силы **F** направлен по оси внутреннего

*) Описанная схема использования свободного гироскопа носит принципиальный характер и в практических условиях она может быть реализована для сравнительно короткого промежутка времени. Это связано с тем, что построить свободный гироскоп очень трудно, так как полностью не устранимые силы сопротивления создают моменты, уводящие с течением времени ось гироскопа от первоначального направления.

кольца, и, следовательно, ось гироскопа начнет совершать вращение вокруг оси наружного кольца.

Движение оси гироскопа под действием приложенной силы называют *прецессией*, а угловую скорость вращательного движения оси — *угловой скоростью прецессии оси гироскопа*.

Найдем модуль угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$. Согласно формуле $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ для скорости точки твердого тела в его вращательном движении скорость $\mathbf{u}$ конца вектора $\mathbf{K}$ определяется равенством

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{K}.$$

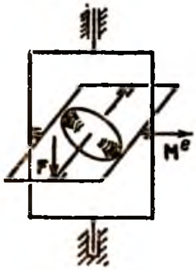


Рис. 15.6

Учитывая, что $\mathbf{u} = \mathbf{M}^e$ и $\mathbf{K} = I_z\boldsymbol{\omega}_1$, найдем

$$\mathbf{M}^e = \boldsymbol{\omega}_2 \times I_z\boldsymbol{\omega}_1. \tag{15.4}$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{M^e}{I_z\omega_1 \sin\theta}, \tag{15.5}$$

где θ — угол между осью гироскопа z и вектором угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_2$ (на рис. 15.5 угол $\theta = \pi/2$, но в общем случае он отличен от прямого).

Из всего сказанного следует, что *под действием внешних сил ось быстро вращающегося трехстепенного гироскопа начинает прецессировать. Скорость* $\mathbf{u}$ *конца вектора кинетического момента* $\mathbf{K}$, *направленного по оси симметрии гироскопа, равна по модулю и совпадает по направлению с главным моментом относительно точки подвеса внешних сил. Угловая скорость прецессии, определяемая равенствами* (15.4) *и* (15.5), *пропорциональна главному моменту внешних сил* M^e *и обратно пропорциональна кинетическому моменту* $I_z\omega_1$ *гироскопа и синусу угла между осью гироскопа* z *и вектором угловой скорости прецессии* $\boldsymbol{\omega}_2$. Это свойство гироскопа называют *законом прецессии оси гироскопа*.

Закон прецессии лежит в основе устройства различных приборов; этим же законом объясняются некоторые явления, на первый взгляд кажущиеся парадоксальными. Приводимые ниже примеры дают представление о применимости закона прецессии.

Пример 1. *Гироскопический измеритель скорости подъема ракеты.* Для определения скорости подъема ракеты применяется прибор, состоящий из гироскопа, помещенного в кожух (на рис. 15.7 гироскоп *) показан пунктиром); кожух вместе с гироскопом может вращаться вокруг горизонтальной оси O, укрепленной на валике OA, который в свою очередь может вращаться вокруг вертикальной оси ζ. Таким образом, гироскоп имеет три степени свободы: соб-

*) В технических устройствах гироскопом служит обычно ротор электродвигателя, помещенный в закрытый кожух, в котором укреплен статор.

ственное вращение вокруг горизонтальной оси симметрии гироскопа z, вращение вместе с кожухом вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, и вращение всей системы вокруг вертикальной оси ζ. Кинетический момент **K** гироскопа направлен, как всегда, по оси z.

Предположим, что ракета поднимается вертикально вверх с ускорением **w**. Тогда, применяя принцип Даламбера, можно считать ракету неподвижной если к силе тяжести гироскопа $m\mathbf{g}$ присоединить силу инерции $\mathbf{J} = -m\mathbf{w}$. Обе силы $m\mathbf{g}$ и **J** направлены в одну сторону и они создают относительно точки O момент M^e, перпендикулярный плоскости $Oz\zeta$; модуль его определяется равенством

$$M^e = ma(g + w),$$

где a — расстояние от центра масс гироскопа C до точки O (см. рис. 15.7). По теореме Резаля скорость **u** конца кинетического момента гироскопа **K** будет равна M^e, а по закону прецессии угловая скорость вращения оси гироскопа ω_2 равна M^e/K, или

$$\omega_2 = \frac{ma}{I_z\omega_1}(g + w),$$

где I_z — момент инерции гироскопа, а ω_1 — его угловая скорость собственного вращения.

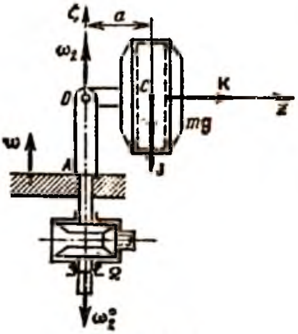


Рис. 15.7

Обозначим через ψ угол поворота оси гироскопа z относительно оси ζ; тогда $\omega_2 = d\psi/dt$. Внося это значение для ω_2 в последнее равенство и учитывая, что $w = dv/dt$, где v — искомая скорость подъема ракеты, получим

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{ma}{I_z\omega_1}\left(g + \frac{dv}{dt}\right).$$

Интегрируя и принимая во внимание, что при $t = 0$ $v = 0$ (на старте ракеты ее скорость равна нулю), найдем

$$\psi = \frac{ma}{I_z\omega_1}(gt + v).$$

Отсюда

$$v = \frac{I_z\omega_1}{ma}\psi - gt.$$

Из этого равенства видно, что, зная угол поворота оси гироскопа и время подъема ракеты, можно определить ее скорость.

Наличие члена $-gt$ создает некоторые неудобства. Поэтому для непосредственного измерения скорости v подъема ракеты устанавливается дифференциальный механизм (см. рис. 15.7), нижней шестеренке которого сообщается с помощью специального часового механизма угловая скорость $\omega_2^0 = mga/(I_z\omega_1)$, где ω_2^0 — угловая скорость прецессии оси гироскопа z при неподвижной ракете. Очевидно, что угловая скорость Ω вращения корпуса дифференциала определится равенством

$$\Omega = {}^1/_2\,(\omega_2 - \omega_2^0),$$

или, если учесть значения ω_2 и ω_2^0,

$$\Omega = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{ma}{2I_z\omega_1}\frac{dv}{dt},$$

где ψ_1 — угол поворота корпуса дифференциала.

Интегрируя это равенство при прежних начальных условиях, найдем

$$\psi_1 = \frac{ma}{2I_z\omega_1}v.$$

Отсюда

$$v = \frac{2I_z\omega_1}{ma}\psi_1.$$

Таким образом, вертикальная скорость подъема ракеты определяется по углу поворота корпуса дифференциала.

Пример 2. *Прецессия артиллерийского снаряда.* При стрельбе из гладкоствольных орудий продолговатыми снарядами было обнаружено, что во время полета снаряды кувыркаются и при падении ударяются, как правило, не головкой, где расположен взрыватель, а каким-либо другим местом. Для того чтобы снаряд в полете не кувыркался и при падении ударялся головкой, внутреннюю часть ствола орудия начали делать нарезной, в результате чего снаряд, вылетая из ствола орудия, стал приобретать большую скорость собственного вращения вокруг оси симметрии. Это обеспечило устойчивость оси снаряда, кувыркание его прекратилось, и при падении он начал ударяться головкой. Рассмотрим это на первый взгляд далеко не очевидное явление более подробно.

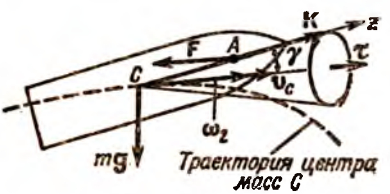


Рис. 15.8

Предположим, что быстро вращающийся вокруг своей оси симметрии снаряд занимает в некоторый момент времени положение, изображенное на рис. 15.8. Так как теорема об изменении момента количеств движения материальной системы относительно центра масс C имеет ту же форму, что и относительно неподвижной точки (см. формулы (9.9) и (9.45)), то при изучении вращательного движения снаряда его можно рассматривать как трехстепенной гироскоп с неподвижной точкой C. На снаряд действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и силы сопротивления воздуха. В простейшем случае можно считать, что последние приводятся к одной силе $\mathbf{F}$, направленной в сторону, противоположную скорости $\mathbf{v}_C$ центра масс снаряда C, причем точка A приложения силы $\mathbf{F}$ находится на оси снаряда на расстоянии a от C (см. рис. 15.8). Сила тяжести mg не создает, очевидно, момента относительно точки C, а момент силы сопротивления $\mathbf{F}$ относительно этой точки определяется равенством

$$M^e = Fa \sin \gamma,$$

где γ — угол между осью симметрии снаряда z и силой $\mathbf{F}$, или, что то же самое, вектором $\boldsymbol{\tau}$, направленным по касательной к траектории центра масс снаряда. В сделанных предположениях момент $\mathbf{M}^e$ направлен перпендикулярно плоскости стрельбы (в условиях рисунка — на читателя).

По теореме Резаля скорость $\mathbf{u}$ конца вектора кинетического момента снаряда $\mathbf{K}$ равна $\mathbf{M}^e$, а по закону прецессии численное значение угловой скорости вращения оси снаряда $\boldsymbol{\omega}_2$, направленной все время по $\boldsymbol{\tau}$, определяется равенством

$$\omega_2 = \frac{M^e}{K \sin \gamma},$$

где $K = I_z\omega_1$ — кинетический момент снаряда (I_z — момент инерции снаряда относительно оси симметрии z, а ω_1 — угловая скорость собственного вращения его).

Пользуясь выражением для M^e и K, окончательно найдем

$$\omega_2 = \frac{Fa}{I_z\omega_1}.$$

Так как вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_2$ направлен по $\boldsymbol{\tau}$, то ось снаряда z будет описывать в естественном трехграннике траектории точки C конус с небольшим углом раствора, равным 2γ (см. рис. 15.8). Ось этого конуса совпадает все время с касательной к траектории центра масс, и, следовательно, снаряд, летя без кувыркания, ударяется о цель своей головкой.

Пример 3. *Прецессия оси волчка.* Рассмотрим быстро вращающийся волчок, ось которого отклонилась от вертикали на угол γ (рис. 15.9). Сила тяжести $m\mathbf{g}$, приложенная к центру тяжести волчка C, направлена вертикально вниз. Эта сила создает момент относительно точки опоры волчка, перпендикулярный плоскости, проходящей через ось волчка z и вертикаль $O\zeta$. Реакция опоры $\mathbf{N}$ проходит через точку O, и, следовательно, ее момент относительно этой точки равен нулю. Сравнивая волчок с артиллерийским снарядом, мы видим, что между ними имеется полная аналогия. Действи-

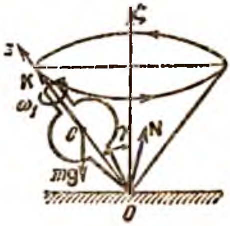


Рис. 15.9

тельно, точка C, вектор τ, сила $\mathbf{F}$ и сила mg снаряда (см. рис. 15.8) соответствуют точке O, вертикали $O\zeta$, силе mg и реакции $\mathbf{N}$ (см. рис. 15.9). Поэтому ось волчка будет описывать вокруг вертикали $O\zeta$ круговой конус с углом раствора 2γ, причем угловая скорость прецессии определится равенством

$$\omega_2 = \frac{mga}{I_z\omega_1},$$

где a — расстояние от точки опоры O до центра тяжести волчка, I_z — его момент инерции относительно оси симметрии z, ω_1 — угловая скорость собственного вращения волчка.

§ 15.6. Момент гироскопической реакции

Рассмотрим теперь случай, когда движение оси гироскопа задано и требуется определить возникающие при этом силы. Будем считать, что гироскоп вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 вокруг своей оси симметрии, а эта ось в свою очередь вращается (прецессирует) с угловой скоростью ω_2. Так, например, ротор, показанный на рис. 15.10, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, подшипники которой закреплены в рамке, вращающейся с угловой скоростью ω_2 вокруг вертикальной оси.

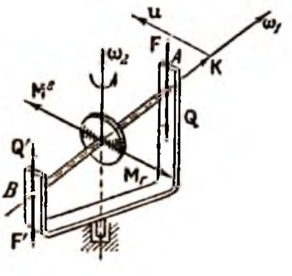


Рис. 15.10

Момент внешних сил $\mathbf{M}^e$, под действием которых ось гироскопа прецессирует с угловой скоростью ω_2, определяется равенством (15.4). Этот момент создается силами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$, приложенными к валу гироскопа со стороны подшипников A и B.

На основании третьего закона Ньютона можно утверждать, что на подшипники A и B со стороны гироскопа будут действовать силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$, равные по модулю и противоположно направленные силам $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$.

Главный момент этих сил относительно неподвижной точки равен по величине и противоположен по направлению моменту $\mathbf{M}^e$. Такой момент называется *моментом гироскопической реакции* или просто *гироскопическим моментом*.

Гироскопический момент $\mathbf{M}_г$ равен

$$\mathbf{M}_г = -\mathbf{M}^e = I_z(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2).$$

Отсюда найдем модуль момента гироскопической реакции

$$M_г = I_z\omega_1\omega_2 \sin\theta, \tag{15.6}$$

где θ — угол между осью симметрии гироскопа и осью прецессии *).

*) Можно показать, что гироскопический момент $\mathbf{M}_г$ равен главному моменту кориолисовых сил инерции.

Пара сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$, момент которых относительно точки O равен гироскопическому моменту, стремится совместить ось гироскопа с осью прецессии.

Отметим, что тело, на которое действует гироскопический момент, может под действием этого момента совершать движение. Например, пусть наружная рамка гироскопа в кардановом подвесе жестко укреплена на каком-либо основании (рис. 15.11). Пусть угловая скорость ротора равна $\boldsymbol{\omega}_1$ и направлена так, как указано на рис. 15.11. Сообщим теперь основанию угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_2$. Пара сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$, момент которых относительно неподвижной точки равен возникшему гироскопическому моменту $\mathbf{M}_г$, будет поворачивать внутреннее кольцо в направлении, указанном на рис. 15.11 стрелкой, т. е.

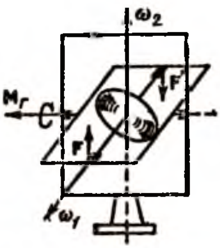


Рис. 15.11

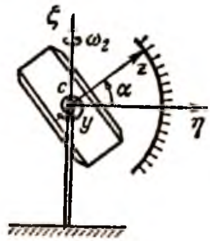


Рис. 15.12

в направлении кратчайшего пути совмещения вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ (оси гироскопа) с вектором $\boldsymbol{\omega}_2$ (угловой скоростью вынужденной прецессии).

Это дает возможность сформулировать следующее правило (*правило Грюэ—Жуковского*): *при сообщении оси гироскопа принудительной прецессии ось гироскопа стремится кратчайшим путем установиться параллельно оси принудительной прецессии таким образом, чтобы направления векторов* $\boldsymbol{\omega}_1$ *и* $\boldsymbol{\omega}_2$ *совпали.*

Изложенное свойство гироскопа широко используется в технике. Приводимое ниже описание одного прибора дает об этом ясное представление.

Пример 4. *Гироскопический измеритель угловой скорости (гиротахометр).* Рассмотрим простейшую схему гиротахометра с двумя степенями свободы (рис. 15.12). Гироскоп вместе с кожухом может вращаться вокруг оси y, ось симметрии гироскопа z удерживается в положении равновесия пружиной (на рис. 15.12 показана спиральная пружина). Предположим, что корпус прибора вместе с основанием, на котором он установлен, вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг оси ζ. В результате возникает гироскопический момент, стремящийся совместить ось гироскопа z с осью вынужденной прецессии ζ. Модуль этого момента определится равенством (см. формулу (15.6) и рис. 15.12)

$$M_г = I_z\omega_1\omega_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = I_z\omega_1\omega_2 \cos\alpha,$$

или, для малых углов,

$$M_г = I_z \omega_1 \omega_2.$$

При повороте оси гироскопа z на угол α пружина создает момент, равный $c\alpha$ (c — коэффициент жесткости пружины), уравновешивающий момент гироскопической реакции. Таким образом, будем иметь $c\alpha = I_z\omega_1\omega_2$; отсюда

$$\omega_2 = \frac{c}{I_z\omega_1}\alpha.$$

Шкалу прибора размечают в единицах угловой скорости, и стрелка указывает сразу искомое значение.

Вернемся к рассмотрению сил, возникающих при вынужденной прецессии оси гироскопа.

При сообщении оси собственного вращения гироскопа или оси какой-либо быстро вращающейся части машины принудительной прецессии возникают гироскопические давления на подшипники, в которых укреплена ось.

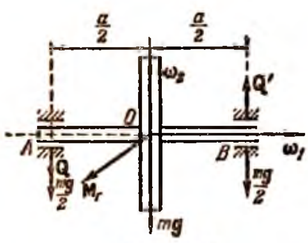


Рис. 15.13

Пусть ротор (маховик) вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси AB, закрепленной в подшипниках A и B (рис. 15.13).

Если масса ротора m, то статические давления на подшипники будут равны $mg/2$ для случая, когда ротор находится на равных расстояниях от подшипников (см. рис. 15.13). Если теперь сообщить ротору принудительную прецессию вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_2, то появится гироскопический момент

$$\mathbf{M}_г = I_z(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2),$$

где I_z — момент инерции ротора относительно собственной оси вращения.

Гироскопический момент, приложенный к оси, согласно правилу Грюэ—Жуковского будет стремиться повернуть ось так, чтобы векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ стали параллельными. Но этому препятствуют подшипники A и B. Сила $\mathbf{Q}$, приложенная к подшипнику A, и $\mathbf{Q}'$, приложенная к подшипнику B, образуют пару сил, момент которой равен гироскопическому моменту.

Так как векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ в рассматриваемом случае взаимно перпендикулярны, то модуль гироскопического момента равен

$$M_г = I_z\omega_1\omega_2.$$

Направлен гироскопический момент перпендикулярно к плоскости рисунка, на нас. Момент пары сил $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')$ по модулю равен Qa, следовательно, $Qa = I_z\omega_1\omega_2$, откуда

$$Q = Q' = \frac{I_z\omega_1\omega_2}{a}. \qquad (15.7)$$

Силы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ и представляют собой гироскопические давления на подшипники.

В рассматриваемом случае в подшипнике B статическое давление и гироскопическое давление имеют различные направления, а в подшипнике A — одинаковое направление.

Задача 15.1. Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, находящейся на корабле, подвергающемся гармонической килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с, считая, что ось ротора турбины параллельна продольной оси корабля. Ротор, имея массу 200 кг и радиус инерции 0,8 м, делает 18 000 об/мин; расстояние между подшипниками равно 1 м.

Рассмотрим рис. 15.14. При килевой качке изменяется угол дифферента корабля. Закон этого изменения имеет вид

$$\theta = D\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

где по условию задачи $D = 9° = \pi/20$, $T = 15$ с.

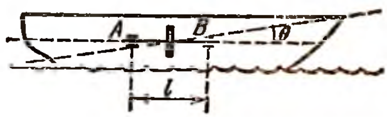


Рис. 15.14

Принудительная прецессия ротора происходит вокруг оси, перпендикулярной к диаметральной плоскости корабля, т. е. к плоскости симметрии корабля, проходящей через его киль.

Угловая скорость принудительной прецессии равна

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi D}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Максимальное значение этой угловой скорости

$$\omega_2 = \dot{\theta}_{max} = \frac{2\pi D}{T}.$$

Так как ось вращения ротора и ось принудительной прецессии взаимно перпендикулярны, то максимальное значение гироскопического момента будет $M_г = I\omega_1\omega_2$, где $I = 200\cdot 0{,}8^2 \approx 128$ кг·м² — момент инерции ротора, а

$$\omega_1 = \frac{2\pi\cdot 18\,000}{60} = 600\pi \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi^2}{20\cdot 15} \approx \frac{1}{15} \text{ рад/с}.$$

Согласно формуле (15.7) максимальные давления на подшипники равны:

$$Q = Q' = \frac{I\omega_1\omega_2}{l} \approx \frac{128\cdot 600\pi}{15} \approx 16{,}08 \text{ кН}.$$

Гироскопический момент направлен по вертикали вверх или вниз в зависимости от знака $\dot{\theta}$. Силы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$, приложенные к подшипникам, расположены в горизонтальной плоскости перпендикулярно диаметральной плоскости корабля. Эти силы, превосходящие в данном примере статические давления в 16 раз, периодически (каждые 7,5 с) меняют свое направление на противоположное, способствуя тем самым преждевременному износу подшипников.

§ 15.7. Уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе

Изложенная в предыдущих параграфах элементарная теория гироскопов основана на пренебрежении нутационными колебаниями оси гироскопа. Рассмотрим теперь более общую теорию.

Сначала выведем дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе (см. рис. 15.2) с учетом массы наружной и внутренней рамок.

Пусть неподвижная система координат $Ox_1y_1z_1$ имеет начало в неподвижной точке O. Ось z_1 направим по оси вращения наружного кольца (рис. 15.15). Начало подвижной системы координат $Oxyz$ возьмем также в точке O и свяжем эту систему координат с внутренним кольцом. Ось x направим по оси вращения ротора, ось y — по оси вращения внутреннего кольца, а ось z — перпендикулярно осям x и y, таким образом, чтобы система $Oxyz$ образовала правую систему координат. Отметим, что линией пересечения подвижной плоскости Oxy и неподвижной Ox_1y_1 является ось y.

Положение ротора можно определить следующими тремя углами: углом φ поворота ротора вокруг оси x, углом ϑ, т. е. углом между неподвижной осью z_1 и осью z (углом поворота внутреннего кольца вокруг оси y) и, наконец, углом ψ — углом поворота наружного кольца вокруг оси z_1. Угловая скорость $\dot{\varphi}\mathbf{i}$ направлена по оси x, угловая скорость $\dot{\vartheta}\mathbf{j}$ — по оси y, и угловая скорость $\dot{\psi}\mathbf{k}_1$ — по оси z_1 (рис. 15.16).

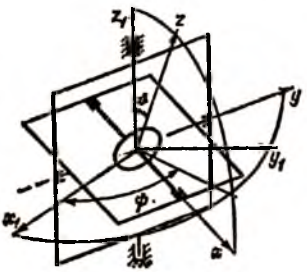


Рис. 15.15

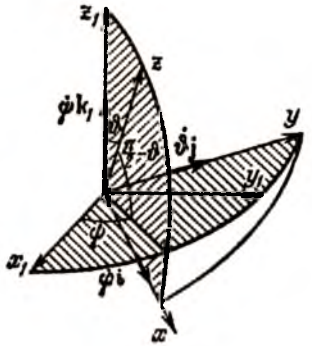


Рис. 15.16

Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей $Oxyz$, а векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — единичные векторы осей $Ox_1y_1z_1$.

Найдем теперь проекции угловой скорости внутреннего кольца и ротора на оси подвижной системы координат. Для внутреннего кольца, которое совершает вращение вокруг осей z_1 и y, имеем

$$\omega_x = \dot{\psi}\cos(\pi/2 + \vartheta) = -\dot{\psi}\sin\vartheta, \quad \omega_y = \dot{\vartheta}, \quad \omega_z = \dot{\psi}\cos\vartheta. \tag{15.8}$$

Обозначая p, q и r проекции угловой скорости ротора на оси x, y и z, получим

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\vartheta, \quad q = \dot{\vartheta}, \quad r = \dot{\psi}\cos\vartheta. \tag{15.9}$$

Проекция скорости наружного кольца на ось z_1 равна

$$\omega^*_{z_1} = \dot{\psi}.$$

Мы не будем вводить систему координат, жестко связанную с ротором, так как ротор представляет собой симметричное тело относительно оси x и поэтому любая ось в плоскости yz для ротора будет главной осью инерции. Однако для вывода уравнений движения ротора можно воспользоваться формулами (14.9). Будем только помнить, что введенная при выводе формул (14.9) система координат $Ox_2y_2z_2$ в рассматриваемом случае является системой координат $Oxyz$. Проекции момента количеств движения ротора на оси x, y и z согласно формулам (13.9) и (15.9) будут

$$K_x = I_x p = I_x(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\vartheta), \quad K_y = I_y q = I_y\dot{\vartheta}, \quad K_z = I_z r = I_y\dot{\psi}\cos\vartheta, \tag{15.10}$$

где I_x — момент инерции ротора относительно его оси вращения, $I_y = I_z \neq I_x$ — экваториальные моменты инерции ротора.

Для внутреннего кольца проекции момента количеств движения имеют такой вид:

$$K'_x = I'_x\omega_x = -I'_x\dot\psi\sin\vartheta,\quad K'_y = I'_y\omega_y = I'_y\dot\vartheta,\quad K'_z = I'_z\omega_z = I'_z\dot\psi\cos\vartheta, \qquad (15.11)$$

где I'_x, I'_y, I'_z — моменты инерции внутреннего кольца соответственно относительно осей x, y и z. Наружное кольцо вращается только вокруг оси z_1, и для него имеем

$$K''_{z_1} = I''_{z_1}\dot\psi, \qquad (15.12)$$

где I''_{z_1} — момент инерции наружного кольца относительно ее оси вращения.

Перейдем к составлению уравнений движения ротора вокруг оси x *). На основании первой формулы (14.9) имеем

$$\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = M^e_x.$$

Используя соотношения (15.8) и (15.10), получим

$$I_x\frac{d}{dt}(\dot\varphi - \dot\psi\sin\vartheta) + \dot\vartheta\dot\psi\cos\vartheta\,(I_z - I_y) = M^e_x,$$

где M^e_x — момент всех внешних сил, приложенных к ротору, относительно оси x.

Так как $I_z = I_y$, то

$$I_x\frac{d}{dt}(\dot\varphi - \dot\psi\sin\vartheta) = M^e_x. \qquad (15.13)$$

Вокруг оси y вращаются как ротор, так и внутреннее кольцо. Для ротора согласно второму уравнению (14.9)

$$\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = M'^e_y, \qquad (15.14)$$

где M'^e_y — момент всех сил, действующих на ротор, относительно оси y.

Для внутреннего кольца

$$\frac{dK'_y}{dt} + \omega_z K'_x - \omega_x K'_z = M''^e_y, \qquad (15.15)$$

где M''^e_y — момент всех сил, действующих на кольцо, относительно оси y.

Складывая почленно уравнения (15.14) и (15.15), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(K_y + K'_y\right) + \omega_z\left(K_x + K'_x\right) - \omega_x\left(K_z + K'_z\right) = M^e_y,$$

где $M^e_y = M'^e_y + M''^e_y$ — момент всех внешних сил, действующих на ротор и внутреннее кольцо, относительно оси y.

Используя соотношения (15.8), (15.10) и (15.11), имеем

$$\left(I_y + I'_x\right)\ddot\vartheta + \dot\psi\cos\vartheta\left(I_x p - I'_x\dot\psi\sin\vartheta\right) + \dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(I_y + I'_y\right) = M^e_y,$$

или

$$\left(I_y + I'_y\right)\ddot\vartheta + I_x p\dot\psi\cos\vartheta - \left(I'_x - I_y - I'_z\right)\dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = M^e_y. \qquad (15.16)$$

---

*) Николаи Е. Н. Теория гироскопов. — М.: Гостехиздат, 1948.

Перейдем теперь к составлению уравнения движения относительно оси z_1. Во вращении вокруг оси z_1 участвуют ротор, внутреннее и наружное кольца. Так как ось z_1 неподвижна, то для ротора будем иметь

$$\frac{dK_{z_1}}{dt} = M^{\text{р}}_{z_1},$$

где $K_{z_1} = K_z \cos \vartheta - K_x \sin \vartheta$ — проекция момента количеств движения ротора на ось z_1; $M^{\text{р}}_{z_1}$ — сумма моментов всех сил, действующих на ротор, относительно оси z_1.

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(K_z \cos \vartheta - K_x \sin \vartheta) = M^{\text{р}}_{z_1}. \tag{15.17}$$

Для внутреннего кольца уравнение движения относительно оси z_1 имеет вид

$$\frac{dK'_{z_1}}{dt} = M^{\text{в. к}}_{z_1}, \tag{15.18}$$

где

$$K'_{z_1} = K'_z \cos \vartheta - K'_x \sin \vartheta \tag{15.19}$$

— проекция момента количеств движения внутреннего кольца на ось z_1; $M^{\text{в. к}}_{z_1}$ — момент всех сил, действующих на внутреннее кольцо, относительно оси z_1.

Для наружного кольца имеем

$$\frac{dK''_{z_1}}{dt} = M^{\text{н. к}}_{z_1}, \tag{15.20}$$

где $M^{\text{н. к}}_{z_1}$ — момент всех сил, действующих на наружное кольцо, относительно оси z_1.

Складывая почленно уравнения (15.17), (15.18) и (15.20) и учитывая равенства (15.12) и (15.19), получим

$$\frac{d}{dt}\left[(K_z + K'_z)\cos \vartheta - (K_x + K'_x)\sin \vartheta + I''_{z_1}\dot{\psi}\right] = M^e_{z_1},$$

где $M^e_{z_1}$ — момент всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему (ротор, внутреннее и наружное кольца), относительно оси z_1; I''_{z_1} — момент инерции наружного кольца.

Принимая во внимание равенства (15.10) и (15.11), перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\left[(I_y + I_z)\dot{\psi}\cos^2\vartheta - (I_x p - I'_x \dot{\psi}\sin\vartheta)\sin\vartheta + I''_{z_1}\dot{\psi}\right] = M^e_{z_1},$$

или

$$\left[(I_y + I'_z)\cos^2\vartheta + I'_x \sin^2\vartheta + I''_{z_1}\right]\ddot{\psi} - I_x \dot{p}\sin\vartheta - I_x p\dot{\vartheta}\cos\vartheta -$$
$$- 2(I_y + I'_z - I'_x)\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = M^e_{z_1}.$$

Учитывая уравнение (15.13), найдем

$$\left[(I_y + I'_z)\cos^2\vartheta + I'_x \sin^2\vartheta + I''_{z_1}\right]\ddot{\psi} - I_x p\dot{\vartheta}\cos\vartheta -$$
$$- 2(I_y + I'_z - I'_x)\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = M^e_{z_1} + M^e_x \sin\vartheta. \tag{15.21}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе имеют вид

$$
\begin{gathered}
I_x\dot{p} = M_x^e, \\
(I_y + I'_y)\ddot{\vartheta} + I_x p\dot{\psi}\cos\vartheta - (I'_x - I_y - I'_z)\dot{\psi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = M_y^e,
\end{gathered} \tag{15.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(I_y + I'_z)\cos^2\vartheta + I_x\sin^2\vartheta + I''_{z_1}]\ddot{\psi} - I_x p\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \\
&\qquad - 2(I_y + I'_z - I'_x)\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = M_{z_1}^e + M_z^e\sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

Решение этих уравнений представляет собой большие математические трудности.

Предположим, что $M_x^e = 0$; это значит, что полезный момент, вращающий ротор вокруг его оси, уравновешивается моментом сил трения. Тогда

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\vartheta = \omega = \text{const}.$$

Для современных гироскопов угловая скорость $\dot{\varphi}$ собственного вращения ротора значительно больше угловых скоростей рамок, следовательно, можно принять $\omega \approx \dot{\varphi}$. Кроме того, предположим, что угол ϑ во все время движения остается малым, и примем $\sin\vartheta = \vartheta$, $\cos\vartheta = 1$. Также пренебрегаем всеми членами, содержащими произведения угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ и их квадраты. Уравнения (15.22) при этом примут вид

$$A\ddot{\vartheta} + I_x\omega\dot{\psi} = M_y^e, \quad B\ddot{\psi} - I_x\omega\dot{\vartheta} = M_{z_1}^e, \tag{15.23}$$

где $A = I_y + I'_y$, $B = I_y + I'_z + I''_{z_1}$.

Уравнения (15.23) называют *техническими уравнениями гироскопа*. Введем величину $H = I_x\omega$, часто называемую *кинетическим моментом гироскопа*. Тогда уравнения (15.23) примут вид

$$A\ddot{\vartheta} + H\dot{\psi} = M_y^e, \qquad B\ddot{\psi} - H\dot{\vartheta} = M_{z_1}^e. \tag{15.24}$$

§ 15.8. Частные случаи движения гироскопа в кардановом подвесе

Рассмотрим сначала случай, когда $M_y^e = 0$, $M_{z_1}^e = 0$. Уравнения (15.24) при этом будут

$$A\ddot{\vartheta} + H\dot{\psi} = 0, \qquad B\ddot{\psi} - H\dot{\vartheta} = 0. \tag{15.25}$$

Исключая из этих уравнений $\dot{\psi}$ и $\ddot{\psi}$, получим

$$\dddot{\vartheta} + \frac{H^2}{AB}\dot{\vartheta} = 0.$$

Характеристическое уравнение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\alpha^3 + \frac{H^2}{AB}\alpha = 0,$$

откуда находим корни характеристического уравнения

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = i\sqrt{\frac{H^2}{AB}}, \quad \alpha_3 = -i\sqrt{\frac{H^2}{AB}}.$$

Общее решение уравнения запишется следующим образом:

$$\vartheta = C_1 + C_2 \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

где C_1, C_2 и C_3 — постоянные интегрирования.

Так как согласно уравнениям (15.25)

$$\dot\psi = -\frac{A}{H}\ddot\vartheta, \quad \dot\vartheta = -C_2\frac{H}{\sqrt{AB}}\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3\frac{H}{\sqrt{AB}}\cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\ddot\vartheta = -C\,\frac{H^2}{AB}\cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}} - C_3\frac{H^2}{AB}\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

то

$$\dot\psi = \frac{H}{B}\left(C_2\cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right),$$

откуда, интегрируя, получим

$$\psi = \sqrt{\frac{A}{B}}\left(C_2\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} - C_3\cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right) + C_4,$$

где C_4 — постоянная интегрирования. Пусть при $t = 0$ (начальный момент) $\vartheta = 0$, $\psi = 0$, $\dot\vartheta = \dot\vartheta_0$, $\dot\psi = \dot\psi_0$. Тогда уравнения для определения постоянных интегрирования будут иметь вид

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_3\frac{H}{\sqrt{AB}} = \dot\vartheta_0, \quad -\sqrt{\frac{A}{B}}\,C_3 + C_4 = 0, \quad \frac{H}{B}C_2 = \dot\psi_0,$$

следовательно,

$$C_1 = -\frac{B}{H}\dot\psi_0, \quad C_2 = \frac{B}{H}\dot\psi_0, \quad C_3 = \frac{\sqrt{AB}}{H}\dot\vartheta_0 \quad C_4 = \frac{A}{H}\dot\vartheta_0.$$

Внося эти значения для C_1, C_2, C_3 и C_4 в общее решение, получим частное решение

$$\vartheta = -\frac{B}{H}\dot\psi_0\left(1 - \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right) + \frac{\sqrt{AB}}{H}\dot\vartheta_0\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\psi = \frac{\sqrt{AB}}{H}\dot\psi_0\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + \frac{A}{H}\dot\vartheta_0\left(1 - \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right).$$

Из этого решения следует, что ось гироскопа будет совершать колебательное движение около положения $\vartheta = -\frac{B}{H}\dot\psi_0$, $\psi = \frac{A}{H}\dot\vartheta_0$. Частота $k = \frac{H}{\sqrt{AB}}$ называется *частотой нутации*. Период нутационных колебаний $T = 2\pi\sqrt{AB/H^2}$. Если $\dot\psi_0 = 0$, то

$$\vartheta = \frac{\sqrt{AB}}{H}\dot\vartheta_0\sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}}, \qquad \psi = \frac{A}{H}\dot\vartheta_0\left(1 - \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right).$$

Таким образом, сообщение кольцам гироскопа угловых скоростей приводит их, а следовательно, и ось гироскопа в колебательное движение.

Рассмотрим еще случай, когда к внутреннему кольцу гироскопа приложена постоянная сила P (рис. 15.17). В этом случае $M_y^e = aP$, $M_{z_1}^e = 0$ и уравнения движения принимают вид

$$A\ddot{\vartheta} + H\dot{\psi} = aP, \quad B\ddot{\psi} - H\dot{\vartheta} = 0. \tag{15.26}$$

Общее решение этих уравнений складывается из общего решения однородных уравнений (15.25) и какого-либо частного решения уравнений (15.26). Частное решение будем искать в виде

$$\vartheta_1 = M_1 t, \quad \psi_1 = M_2 t.$$

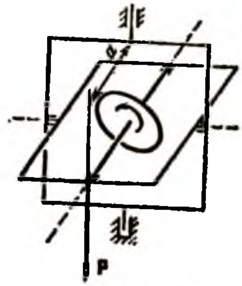


Рис. 15.17

Подставляя эти решения в уравнения (15.26), получим

$$HM_2 = aP, \quad -HM_1 = 0,$$

откуда

$$M_1 = 0, \quad M_2 = aP/H.$$

Таким образом,

$$\vartheta = C_1 + C_2 \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\psi = \sqrt{\frac{A}{B}}\left(C_2 \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} - C_3 \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right) + C_4 + \frac{aP}{H}t.$$

Пусть начальные условия будут: при $t = 0$

$$\vartheta = 0, \quad \psi = 0, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0.$$

Так как

$$\dot{\vartheta} = -C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}} \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{A}{B}}\left(C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}} \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right) + \frac{aP}{H},$$

то уравнения для определения постоянных интегрирования имеют вид

$$0 = C_1 + C_2, \qquad \dot{\vartheta}_0 = C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}},$$

$$0 = -\sqrt{\frac{A}{B}} C_3 + C_4, \qquad \dot{\psi}_0 = \sqrt{\frac{A}{B}} C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} + \frac{aP}{H},$$

откуда

$$C_1 = -\frac{B}{H}\dot{\psi}_0 + \frac{BaP}{H^2}, \quad C_2 = \frac{B}{H}\dot{\psi}_0 - \frac{BaP}{H^2}, \quad C_3 = \frac{\sqrt{AB}}{H}\dot{\vartheta}_0, \quad C_4 = \frac{A}{H}\dot{\vartheta}_0,$$

и, следовательно,

$$\vartheta = -\frac{B}{H}\left(\dot{\psi}_0 - \frac{aP}{H}\right)\left(1 - \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right) + \frac{\sqrt{AB}}{H}\dot{\vartheta}_0 \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\psi = \sqrt{\frac{A}{B}}\left(\frac{B}{H}\dot{\psi}_0 - \frac{aPБ}{H^2}\right) \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + \frac{A}{H}\dot{\vartheta}_0\left(1 - \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right) + \frac{aP}{H}t.$$

Пусть $\dot\vartheta_0 = 0$, $\dot\psi_0 = 0$; тогда

$$\vartheta = \frac{aPB}{H^2}\left(1 - \cos\frac{Ht}{\sqrt{AB}}\right), \quad \psi = -\frac{\sqrt{AB}}{H^2} aP \sin\frac{Ht}{\sqrt{AB}} + \frac{aP}{H} t. \qquad (15.27)$$

Из уравнений (15.27) следует, что внутреннее кольцо будет совершать нутационные колебания около положения $\vartheta^* = aPB/H^2$, а на равномерное вращение наружного кольца с угловой скоростью aP/H накладываются нутационные колебания.

Очевидно, что чем больше H — кинетический момент гироскопа, тем будут меньше амплитуды нутационных колебаний. При больших H нутационные колебания являются колебаниями очень высокой частоты с пренебрежимо малой амплитудой. В связи с этим во многих случаях нутационными колебаниями пренебрегают и считают, что

$$\vartheta = 0, \qquad \psi = \frac{aP}{H} t.$$

Поэтому говорят, что ось гироскопа совершает чисто прецессионное движение с угловой скоростью $\dot\psi = aP/H$ (§ 15.5).

Глава XVI

МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

§ 16.1. Метод кинетостатики

Так же как и для одной материальной точки (см. § 5.7), дифференциальным уравнениям движения материальной системы можно придать форму уравнений статики. Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно при определении динамических реакций опор твердого тела.

Рассмотрим материальную точку M_k системы. Обозначим массу этой точки через m_k, ее ускорение — через $\mathbf{w}_k$ и равнодействующие всех активных сил, приложенных к точке, и реакций связей соответственно — через $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{R}_k$. Тогда основному уравнению динамики (второму закону Ньютона), написанному для каждой точки системы:

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

можно придать вид уравнения статики

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{J}_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (16.1)$$

где сила инерции $\mathbf{J}_k$ определена равенством (см. § 5.7)

$$\mathbf{J}_k = -m_k \mathbf{w}_k. \qquad (16.2)$$

Складывая почленно все уравнения (16.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k = 0.$$

Первая сумма $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ равна главному вектору $\mathbf{F}$ всех активных сил, приложенных к системе, вторая сумма $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k$ — главному вектору $\mathbf{R}$ реакций связей и последняя сумма $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k$ — главному вектору $\mathbf{J}$ сил инерции. Таким образом, можем написать

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0, \tag{16.3}$$

т. е. *в каждый момент времени сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю.*

Выберем произвольный полюс O и проведем из него к точке M_k радиус-вектор $\mathbf{r}_k$. Умножая каждое из уравнений (16.1) векторно на соответствующий $\mathbf{r}_k$ слева и складывая все произведения, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = 0.$$

Первая сумма равна главному моменту $\mathbf{M}_O$ всех активных сил, приложенных к системе, вторая сумма — главному моменту $\mathbf{M}_O^R$ всех реакций связей системы, а последняя — главному моменту $\mathbf{M}_O^J$ сил инерции, причем все моменты должны быть вычислены относительно выбранного полюса O.

Следовательно, будем иметь

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^J = 0, \tag{16.4}$$

т. е. *в каждый момент времени сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю.*

При вычислении главных векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$ и главных моментов $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{M}_O^R$ активных сил и реакций связей нужно учитывать только внешние силы, так как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю.

Двум векторным уравнениям (16.3) и (16.4) соответствуют шесть уравнений в проекциях на оси декартовых координат:

$$\begin{gathered} F_x + R_x + J_x = 0, \quad F_y + R_y + J_y = 0, \quad F_z + R_z + J_z = 0, \\ M_x + M_x^R + M_x^J = 0, \; M_y + M_y^R + M_y^J = 0, \; M_z + M_z^R + M_z^J = 0. \end{gathered} \tag{16.5}$$

За оси координат можно выбрать любую систему декартовых осей, как неподвижных, так и перемещающихся произвольным образом в пространстве, следует только каждый раз определять соответствующие проекции главного вектора $\mathbf{J}$ и главного момента $\mathbf{M}_O^J$ сил инерции.

Движение твердого тела вполне определяется этими шестью уравнениями кинетостатики, точно так же как равновесие твердого тела вполне определяется соответствующими шестью уравнениями (тремя уравнениями проекций и тремя уравнениями моментов). Если рассматривается система, состоящая из нескольких тел, то можно составить соответствующие уравнения кинетостатики для каждого тела в отдельности.

Из всего сказанного следует, что применение метода кинетостатики для твердого тела требует прежде всего умения вычислять главный вектор и главный момент его сил инерции. Зная их проекции на выбранные оси координат, следует составить уравнения кинетостатики (они отличаются от уравнений равновесия твердого тела только тем, что к активным силам и реакциям связей присоединены силы инерции) и затем определить неизвестные величины.

Покажем теперь, что уравнения (16.3) и (16.4) представляют математическую запись теоремы об изменении количества движения и теоремы об изменении момента количеств движения материальной системы соответственно.

В самом деле, главный вектор всех сил инерции равен

$$\mathbf{J}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k=-\sum_{k=1}^{n}m_k\mathbf{w}_k=-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}m_k\mathbf{v}_k,$$

так как $\mathbf{w}_k=\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}$. Но сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\mathbf{v}_k=M\mathbf{v}_C$ есть количество движения $\mathbf{Q}$ материальной системы. Следовательно,

$$\mathbf{J}=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=-M\mathbf{w}_C, \tag{16.6}$$

т. е. *главный вектор всех сил инерции точек материальной системы равен производной по времени от количества движения материальной системы, умноженной на* —1.

Главный момент всех сил инерции равен

$$\mathbf{M}_O^J=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k\times\mathbf{J}_k=-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k\times m_k\mathbf{w}_k.$$

Так как $\mathbf{w}_k=\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}$, а $\mathbf{r}_k\times m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k\times m_k\mathbf{v}_k)$, то

$$\mathbf{M}_O^J=-\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}, \tag{16.7}$$

где $\mathbf{K}_O=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k\times m_k\mathbf{v}_k$ — момент количеств движения материальной системы.

Таким образом, *главный момент всех сил инерции равен производной по времени от момента количеств движения материальной системы, умноженной на* —1.

Заменяя в уравнении (16.3) главный вектор сил инерции выражением (16.6), а в уравнении (16.4) главный момент сил инерции выражением (16.7), получим соответственно теоремы об изменении количества движения и момента количеств движения материальной системы.

§ 16.2. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела

На основании выражения (16.6) главный вектор сил инерции твердого тела может быть найден по формуле

$$\mathbf{J} = -M\mathbf{w}_C, \tag{16.8}$$

т. е. *главный вектор сил инерции твердого тела равен силе инерции его центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всего тела* (этот вывод справедлив для любой материальной системы).

Перейдем к вычислению главного момента сил инерции твердого тела.

Рассмотрим сначала случай, когда тело движется произвольным образом. Выбирая за полюс центр масс C тела, на основании формулы (16.7), имеем

$$\mathbf{M}_O^J = -\frac{d\mathbf{K}_C}{dt}.$$

Пусть система координат $Cxyz$ жестко связана с телом. Тогда в соответствии с формулой (14.2) можно записать

$$\mathbf{M}_C^J = -\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_C}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_C \tag{16.9}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} M_{Cx}^J &= -\frac{dK_{Cx}}{dt} - (\omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy}), \\ M_{Cy}^J &= -\frac{dK_{Cy}}{dt} - (\omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz}), \\ M_{Cz}^J &= -\frac{dK_{Cz}}{dt} - (\omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx}). \end{aligned} \tag{16.10}$$

Подставляя в эти выражения значения проекций момента количеств движения, вычисленных для неподвижной точки (13.8):

$$\begin{aligned} K_{Cx} &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ K_{Cy} &= -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ K_{Cz} &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
M_{Cx}^J &= -I_x\varepsilon_x + I_{xy}(\varepsilon_y - \omega_x\omega_z) + I_{xz}(\varepsilon_z + \omega_x\omega_y) - \\
&\qquad - I_{yz}(\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z, \\
M_{Cy}^J &= -I_y\varepsilon_y + I_{yz}(\varepsilon_z - \omega_y\omega_x) + I_{yx}(\varepsilon_x + \omega_y\omega_z) - \\
&\qquad - I_{xz}(\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x, \\
M_{Cz}^J &= -I_z\varepsilon_z + I_{xz}(\varepsilon_x - \omega_y\omega_z) + I_{yz}(\varepsilon_y + \omega_x\omega_z) - \\
&\qquad - I_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y.
\end{aligned} \tag{16.11}$$

Эти формулы определяют главный момент сил инерции твердого тела в общем случае его движения. Если тело имеет неподвижную точку, то за полюс следует выбрать эту точку.

Из формул (16.11) легко получаются все частные случаи.

Случай плоского движения твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии. Если ось z перпендикулярна к плоскости материальной симметрии, совпадающей с плоскостью движения, то

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Теперь из формул (16.11) найдем, что

$$M_{Cx}^J = M_{Cy}^J = 0, \quad M_{Cz}^J = -I_{Cz}\varepsilon_z. \tag{16.12}$$

Случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Выберем в качестве полюса произвольную точку на оси вращения, ось z совместим с осью вращения, а оси x и y скрепим с вращающимся телом. Векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены по оси вращения z, и, следовательно, их проекции на оси x и y равны нулю:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.$$

Подставив эти значения в формулы (16.11) и принимая во внимание, что $\omega_z = \pm\omega$, получим проекции главного момента сил инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$M_x^J = I_{xz}\varepsilon_z - I_{yz}\omega^2, \quad M_y^J = I_{yz}\varepsilon_z + I_{xz}\omega^2, \quad M_z^J = -I_z\varepsilon_z. \tag{16.13}$$

§ 16.3. Определение добавочных динамических реакций опор движущегося тела

При движении несвободного твердого тела реакции связей $\mathbf{R}_k$ складываются из статических $\mathbf{R}_k^{\text{ст}}$ и добавочных динамических $\mathbf{R}_k^{\text{д}}$ составляющих:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k^{\text{ст}} + \mathbf{R}_k^{\text{д}}.$$

Аналогичным равенствам удовлетворяют главные векторы и главные моменты реакций связей

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\text{ст}} + \mathbf{R}^{\text{д}}, \quad \mathbf{M}_O^R = \mathbf{M}_O^{R\text{ст}} + \mathbf{M}_O^{R\text{д}}. \tag{16.14}$$

Как уже отмечалось (см. § 13.5), статические реакции удовлетворяют следующим шести уравнениям:

$$\begin{gathered} F_x + R_x^{\text{ст}} = 0, \quad F_y + R_y^{\text{ст}} = 0, \quad F_z + R_z^{\text{ст}} = 0, \\ M_x + M_x^{R\text{ст}} = 0, \quad M_y + M_y^{R\text{ст}} = 0, \quad M_z + M_z^{R\text{ст}} = 0. \end{gathered} \qquad (16.15)$$

Подставим в уравнения кинетостатики (16.5) значения проекций главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O^R$ реакций связей, определенных равенствами (16.14):

$$\begin{gathered} F_x + R_x^{\text{ст}} + R_x^{\text{д}} + J_x = 0, \\ F_y + R_y^{\text{ст}} + R_y^{\text{д}} + J_y = 0, \\ F_z + R_z^{\text{ст}} + R_z^{\text{д}} + J_z = 0, \\ M_x + M_x^{R\text{ст}} + M_x^{R\text{д}} + M_x^J = 0, \\ M_y + M_y^{R\text{ст}} + M_y^{R\text{д}} + M_y^J = 0, \\ M_z + M_z^{R\text{ст}} + M_z^{R\text{д}} + M_z^J = 0. \end{gathered}$$

Учитывая равенства (16.15), которым удовлетворяют статические реакции, получим уравнения для определения добавочных динамических реакций опор движущегося твердого тела:

$$\begin{gathered} R_x^{\text{д}} + J_x = 0, \quad R_y^{\text{д}} + J_y = 0, \quad R_z^{\text{д}} + J_z = 0, \\ M_x^{R\text{д}} + M_x^J = 0, \quad M_y^{R\text{д}} + M_y^J = 0, \quad M_z^{R\text{д}} + M_z^J = 0. \end{gathered} \qquad (16.16)$$

Отметим, что при составлении этих уравнений не нужно учитывать активные силы. Наконец, заметим также, что в частных случаях число уравнений может уменьшиться; например, при плоскопараллельном движении твердого тела их число будет равно трем.

§ 16.4. Задачи на определение добавочных динамических реакций

Добавочные динамические реакции можно определить различными методами, в частности, можно для этих целей использовать общие теоремы динамики (см. § 13.4). Одним из наиболее простых методов определения добавочных динамических реакций является метод кинетостатики. Мы проиллюстрируем его на нескольких задачах.

Задача 16.1. Две материальные точки M_1 и M_2, массы m каждая, прикреплены с помощью горизонтальных стержней к вертикальной оси AB (рис. 16.1). Пренебрегая массой стержней и оси AB, определить дополнительные динамические реакции опор A и B вала, если вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω. Длина стержней равна a, расстояние между ними равно h, расстояние между опорами H.

При равномерном вращении всей системы ускорения точек M_1 и M_2 будут направлены к оси вращения и численно равны $a\omega^2$. Силы инерции $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ направлены в противоположные стороны (см. рис. 16.1); модули этих сил равны между собою:

$$J_1 = J_2 = ma\omega^2.$$

Из рисунка видно, что силы инерции $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ составляют пару сил с моментом, численно равным $ma\omega^2 h$. Так как пара сил может быть уравновешена только другой парой сил, то добавочные динамические реакции $\mathbf{R}_A^{д}$ и $\mathbf{R}_B^{д}$ опор A и B составляют пару сил, момент которой равен $R_A^{д} H$. Из равенства модулей моментов пар

$$R_A^{д} H = ma\omega^2 h$$

найдем добавочные динамические реакции

$$R_A^{д} = R_B^{д} = \frac{h}{H} ma\omega^2.$$

Задача 16.2. Груз массы m_1 скользит вниз по наклонной эстакаде, свободно лежащей на земле. Масса эстакады m_2, коэффициент трения скольжения между

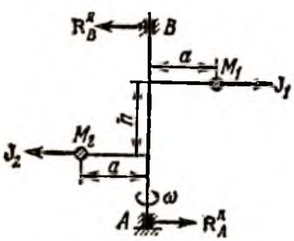


Рис. 16.1

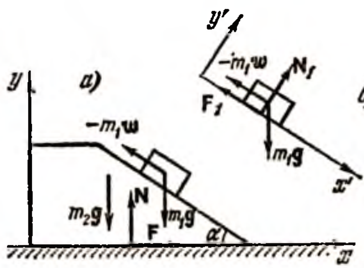


Рис. 16.2

грузом и эстакадой f, угол наклона равен α (рис. 16.2, *а*). При каких условиях эстакада не начнет движение?

В главе VIII эта задача была решена с помощью теоремы об изменении количества движения материальной системы. Решим теперь эту же задачу, используя метод кинетостатики. Для этого рассмотрим сначала отдельно движение груза (рис. 16.2, *б*). Так как груз скользит вниз по наклонной плоскости, то сила инерции $m_1\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение груза, направлена вверх. Применяя к грузу уравнения статики, найдем

$$m_1 g \sin\alpha - F_1 - m_1 w = 0, \qquad N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0.$$

Из второго уравнения найдем нормальное давление N_1, а затем из первого уравнения найдем силу инерции груза (напомним, что $F_1 = fN_1$)

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha, \qquad m_1 w = m_1 g (\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из груза и эстакады (см. рис. 16.2, *а*). Внешними силами для этой системы будут: сила тяжести $m_1\mathbf{g}$ груза, сила тяжести $m_2\mathbf{g}$ эстакады, сила нормального давления земли $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}$ между землей и эстакадой. Присоединим к этим силам силу инерции $m_1\mathbf{w}$ груза и составим два уравнения статики:

$$F - m_1 w\cos\alpha = 0, \qquad N - m_2 g - m_1 g + m_1 w \sin\alpha = 0.$$

Отсюда найдем силу трения F и нормальное давление N:

$$F = m_1 w\cos\alpha, \qquad N = m_2 g + m_1 g - m_1 w \sin\alpha,$$

или, учитывая найденное ранее значение силы инерции m_1w,

$$F = m_1g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha,$$

$$N = m_2g + m_1g - m_1g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha = m_2g + m_1g(\cos\alpha + f\sin\alpha)\cos\alpha.$$

Эстакада будет находиться в покое, если сила трения F меньше своего предельного значения, равного f_0N:

$$m_1g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha < f_0[m_2g + m_1g\cos\alpha(\cos\alpha + f\sin\alpha)].$$

Отсюда найдем условие, которому должен удовлетворять коэффициент трения покоя f_0, чтобы при движущемся грузе эстакада оставалась в покое:

$$f_0 > \frac{m_1(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha}{m_2 + m_1(\cos\alpha + f\sin\alpha)\cos\alpha}.$$

Сравнивая решение этой задачи методом кинетостатики с решением, в котором использовалась теорема об изменении количества движения материальной системы (стр. 176), мы видим, что оба метода приводят практически к одинаковым уравнениям.

Задача 16.3. Электромотор, установленный на горизонтальной балке, поднимает с помощью троса груз массы m. Радиус барабана, укрепленного на оси мотора, равен r, а момент инерции барабана вместе с ротором равен I. Пренебрегая весом троса, определить динамические реакции опор A и B балки, если груз поднимается с ускорением w. Линейные размеры указаны на рис. 16.3. Предполагается, что плоскость рисунка является плоскостью материальной симметрии движущихся частей.

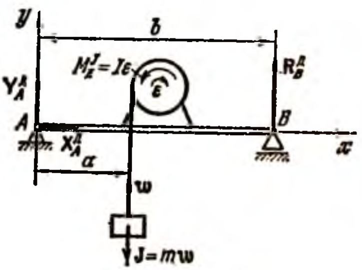


Рис. 16.3

Груз поднимается с ускорением w. Его сила инерции, равная по модулю mw, направлена вниз. Угловое ускорение вращающихся частей направлено по ходу часовой стрелки, следовательно, главный момент сил инерции направлен согласно формуле (16.12) против хода часовой стрелки и равен по модулю $I\varepsilon$ (на рис. 16.3 знак минус у силы инерции груза и у момента сил инерции барабана не показан, так как их направления указаны на рисунке). Главный вектор сил инерции барабана равен нулю, ибо его центр масс неподвижен. Вводим динамические реакции опор. Активные силы не учитываем и, считая условно барабан и груз неподвижными, составляем уравнения равновесия для сил инерции и добавочных динамических реакций. Мы составим два уравнения моментов (главный момент сил инерции можно рассматривать как момент некоторой пары) и одно уравнение для проекции сил. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum M_{iA} = 0, && I\varepsilon + R_B^д b - mwa = 0,\\
&\sum M_{iB} = 0, && I\varepsilon - Y_A^д b + mw(b-a) = 0, \qquad (16.17)\\
&\sum F_{ix} = 0, && X_A^д = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\varepsilon = w/r$, легко теперь найдем

$$X_A^д = 0, \quad Y_A^д = \left[\frac{I}{r} + m(b-a)\right]\frac{w}{b}, \quad R_B^д = \left(ma - \frac{I}{r}\right)\frac{w}{b}. \qquad (16.18)$$

Задача 16.4. В одной из конструкций лесовалочной машины конец A дерева AB перемещается с помощью захвата E с постоянной скоростью v_0 по горизонтальной направляющей, причем ствол дерева, поперечными размерами которого пренебрегаем, все время опирается на каток K. Масса дерева m, его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно к стволу, равен I, расстояние $AC = l$, превышение катка K над горизонтальной направляющей равно H (рис. 16.4). Определить добавочные динамические составляющие реакции катка K и захвата E в зависимости от угла φ.

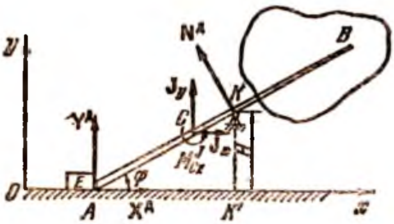


Рис. 16.4

Воспользуемся методом кинетостатики. Отбросим активные силы (вес дерева) и введем добавочные динамические реакции опор (см. рис. 16.4). Так как движение является плоскопараллельным, то главный момент сил инерции будет определяться равенством (16.12):

$$M_{Cz}^J = -I_{Cz}\varepsilon_z.$$

Главный вектор сил инерции согласно формуле (16.8) равен $\mathbf{J} = -m\mathbf{w}_C$, его проекции на оси x и y будут

$$J_x = -m\ddot{x}_C, \qquad J_y = -m\ddot{y}_C.$$

Предположим, что ε_z, $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ известны (мы найдем их несколько позднее). Примем центр масс C за центр приведения сил инерции и изобразим на рисунке составляющие их главного вектора $\mathbf{J}_x$, $\mathbf{J}_y$ и главный момент M_{Cz}^J (предполагается, что J_x, J_y и M_{Cz}^J положительны). Считая в соответствии с методом кинетостатики, что силы инерции и добавочные динамические реакции уравновешены, составим три уравнения равновесия этих сил:

$$\begin{aligned} J_x + X^д - N^д \sin\varphi &= 0, \\ J_y + Y^д + N^д \cos\varphi &= 0, \\ M_{Cz}^J + J_y l \cos\varphi - J_x l \sin\varphi + N^д \frac{H}{\sin\varphi} &= 0. \end{aligned} \qquad (16.19)$$

Из этих уравнений найдем динамические составляющие реакций

$$\begin{aligned} N^д &= \frac{\sin\varphi}{H}\left(J_x l \sin\varphi - J_y l \cos\varphi - M_{Cz}^J\right), \\ X^д &= N^д \sin\varphi - J_x, \qquad Y^д = -\left(N^д \cos\varphi + J_y\right). \end{aligned} \qquad (16.20)$$

Для полного решения задачи нам осталось найти $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ и $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, после чего сразу определяются J_x, J_y и M_{Cz}^J. По условию задачи точка A перемещается равномерно по оси x со скоростью v_0. Совместим начало координат O с начальным положением точки A. Тогда $OA = v_0 t$, $AK' = b - v_0 t$, где $b = OK' = \text{const}$.

Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{b - v_0 t}.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} = \frac{H v_0}{(b - v_0 t)^2}.$$

Отсюда найдем угловую скорость ($b - v_0 t = H \operatorname{ctg} \varphi$)

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{H} \sin^2 \varphi. \qquad (16.21)$$

Дифференцируя по времени еще один раз, найдем угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{v_0}{H} \sin 2\varphi \dot{\varphi},$$

или, пользуясь равенством (16.21),

$$\varepsilon = \frac{v_0^2}{H^2} \sin 2\varphi \sin^2 \varphi. \qquad (16.22)$$

Координаты центра масс определяются формулами (см. рис. 16.4)

$$x_C = v_0 t + l \cos \varphi, \quad y_C = l \sin \varphi.$$

Дифференцируя два раза по времени, получим

$$\ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad \ddot{y}_C = l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Подставляя сюда значения $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ из равенств (16.21) и (16.22), после элементарных преобразований будем иметь

$$\ddot{x}_C = -3 \frac{v_0^2}{H^2} l \sin^4 \varphi \cos \varphi, \quad \ddot{y}_C = -\frac{v_0^2}{H^2} l (1 - 3 \cos^2 \varphi) \sin^3 \varphi.$$

Теперь находим

$$J_x = -m \ddot{x}_C = 3 m \frac{v_0^2}{H^2} l \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

$$J_y = -m \ddot{y}_C = m \frac{v_0^2}{H^2} l (1 - 3 \cos^2 \varphi) \sin^3 \varphi,$$

$$M_{Cz}^J = -I\varepsilon = -I \frac{v_0^2}{H^2} \sin 2\varphi \sin^2 \varphi.$$

Подставляя эти выражения для J_x, J_y и M_{Cz}^J в равенства (16.20), определим добавочные динамические реакции $N^д$, $X^д$ и $Y^д$

$$N^д = 2\left(ml^2 + I\right) \frac{v_0^2}{H^3} \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

$$X^д = \frac{v_0^2}{H^2} \left[2\left(ml^2 + I\right) \frac{\sin \varphi}{H} - 3\, ml\right] \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

$$Y^д = -\frac{v_0^2}{H^2} \left[2\left(ml^2 + I\right) \frac{\cos^2 \varphi}{H} + ml\, (1 - 3 \cos^2 \varphi)\right] \sin^3 \varphi.$$

Глава XVII

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 17.1. Основные определения

Во многих случаях можно наблюдать явление, называемое *ударом, когда за очень малый промежуток времени τ скорости точек тел изменяются на конечную величину*. Так, например, если мяч падает на горизонтальный пол, имея в начале соприкосновения с полом скорость **v**, и отскакивает от пола со скоростью **V**, то изменение скорости $\mathbf{V}-\mathbf{v}$ представляет конечную величину, а весь процесс удара происходит за ничтожно малое время τ.

Чтобы за очень малый промежуток времени τ скорости точек тела изменились на конечную величину, силы, действующие на тело, должны быть очень велики. Действительно, пусть под действием силы $\mathbf{F}$ материальная точка массы m за очень короткий промежуток времени τ изменила скорость на конечную величину $\mathbf{V}-\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ — скорости точки до и после удара соответственно. Применим к материальной точке второй закон Ньютона

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}, \tag{17.1}$$

или

$$m\,d\mathbf{v}=\mathbf{F}\,dt.$$

Интегрируя это равенство от нуля до τ, получим

$$m(\mathbf{V}-\mathbf{v})=\int_0^\tau \mathbf{F}\,dt. \tag{17.2}$$

Пользуясь теоремой о среднем, найдем

$$m(\mathbf{V}-\mathbf{v})=\mathbf{F}_{\text{ср}}\tau,$$

где $\mathbf{F}_{\text{ср}}$ — среднее значение силы $\mathbf{F}$ за время ее действия. Отсюда

$$F_{\text{ср}}=\frac{m\,|\mathbf{V}-\mathbf{v}|}{\tau}.$$

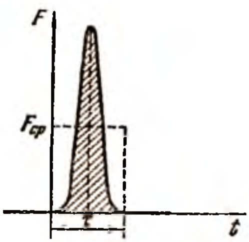


Рис. 17.1

Так как числитель правой части этого равенства представляет конечную величину, а знаменатель очень мал, то даже среднее значение силы F очень велико. В дальнейшем силу, действующую в течение очень короткого промежутка времени, модуль которой достигает большого значения, будем называть *ударной силой*.

Как правило, мы не знаем закона изменения ударной силы $\mathbf{F}$, но примерный график ее модуля можно построить. До удара и после него сила $\mathbf{F}$ равна нулю, а в промежутке $(0, \tau)$ ее модуль достигает очень большой величины. Очевидно, что график модуля силы $\mathbf{F}$ должен иметь вид, изображенный на рис. 17.1; на этом же рисунке показано среднее значение $F_{\text{ср}}$.

Для того чтобы примерно оценить модуль силы $\mathbf{F}$, рассмотрим простейший пример. Предположим, что камень массы $m=1$ кг падает вертикально вниз с высоты $H=10$ м на панель, причем после падения он не отскакивает. Считая, что продолжительность удара $\tau=0{,}001$ с, найдем среднее значение силы $\mathbf{F}_{\text{ср}}$.

В условиях задачи скорость камня в начале удара $v=\sqrt{2gH}\approx$ $\approx 14{,}1$ м/с (сопротивлением воздуха пренебрегаем), а скорость после удара V равна нулю. Пользуясь последней формулой, получим

$$F_{\text{ср}} = m\frac{v}{\tau} \approx 1 \cdot \frac{14{,}1}{0{,}001} \approx 14{,}1 \text{ кН}.$$

Это только среднее значение силы $\mathbf{F}$; если считать, что максимальное значение силы $\mathbf{F}$ вдвое больше среднего значения (см. рис. 17.1), то получим $F_{\max} = 28{,}2$ кН. Эти числа наглядно показывают, почему иногда при ударе происходит разрушение тел.

Вернемся к равенству (17.2), правая часть которого равна импульсу $\mathbf{S}$ силы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{S} = \int_0^\tau \mathbf{F}\, dt. \tag{17.3}$$

Теперь равенство (17.2) принимает вид

$$m(\mathbf{V} - \mathbf{v}) = \mathbf{S}. \tag{17.4}$$

Вектор $\mathbf{S}$ называется *ударным импульсом* (или *импульсом удара*). Очевидно, что численно ударный импульс равен площади заштрихованной фигуры рис. 17.1.

В теории удара материальной точки вместо уравнения (17.1) пользуются уравнением (17.4), в котором импульс удара $\mathbf{S}$ представляет собой конечный вектор.

Так как продолжительность удара τ очень мала, то в теоретической механике пренебрегают всеми величинами, имеющими порядок τ. Иначе говоря, в теоретической механике принята следующая идеализация удара: *при конечном ударном импульсе удар происходит мгновенно.*

Найдем перемещение точки за время удара. Для этого рассмотрим ударный импульс в момент времени t, где $0 < t < \tau$. Имеем

$$\mathbf{S}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(t)\, dt.$$

Обозначив скорость точки в момент времени t через $\mathbf{V}(t)$, получим из равенства (17.4)

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{S}(t).$$

Так как $\mathbf{V}(t) = d\mathbf{r}/dt$, то, интегрируя последнее равенство от 0 до τ, получим

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \left(\mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{S}_{\text{ср}}\right)\tau,$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы точки в начале и конце удара, а $\mathbf{S}_{\text{ср}}$ — среднее значение импульса $\mathbf{S}(t)$ в промежутке $[0, \tau]$.

Правая часть этого равенства имеет порядок τ, и ею можно пренебречь, положив $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 0$. Таким образом, в рамках сделанной идеализации перемещение точки за время удара равно нулю.

Если на точку действуют ударная сила $\mathbf{F}(t)$ и обычная медленно меняющаяся во времени сила $\mathbf{P}(t)$, то их общий импульс $\mathbf{S}_1$ за время τ будет равен

$$\mathbf{S}_1 = \int_0^\tau \mathbf{F}(t)\,dt + \int_0^\tau \mathbf{P}(t)\,dt.$$

Первое слагаемое равно ударному импульсу $\mathbf{S}$; применяя ко второму слагаемому теорему о среднем, получим

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} + \mathbf{P}_{\text{ср}}\tau.$$

Так как второе слагаемое имеет порядок τ, то им можно пренебречь. На этом основании при исследовании процессов, происходящих при ударе, медленно меняющиеся, ограниченные по модулю силы не учитываются.

Все сказанное можно отнести не только к ударным силам, возникающим при контакте тел, но и к любым другим силам, характер изменения которых во времени изображен на рис. 17.1. Такие силы возникают при взрыве в полости, при распространении упругих волн в сплошной среде и при так называемых разрывах в газе.

§ 17.2. Коэффициент восстановления

При соударении двух тел в точке контакта возникают ударные силы, приложенные к каждому из тел. Они имеют одинаковые модули и противоположно направлены. Пренебрегая трением, будем считать, что ударные силы и их импульсы S_1 и S_2 направлены по общей нормали к поверхности соударяющихся тел (рис. 17.2). Как показывают наблюдения, гипотеза об абсолютной твердости тел является недостаточной для объяснения процесса удара и необходимо учитывать физические свойства тел. Сам процесс удара можно разбить на две фазы. В течение первой фазы происходит сближение тел по линии общей нормали, в результате чего проекция на нормаль *относительной скорости* точки контакта тел уменьшается до нуля. Вслед за этим начинается вторая фаза удара: тела, восстанавливая свою форму, начинают удаляться друг от друга, нормальная составляющая относительной скорости точки соприкосновения, переменив знак, возрастает по абсолютной величине, но не достигает, как правило, своего значения в начале удара.

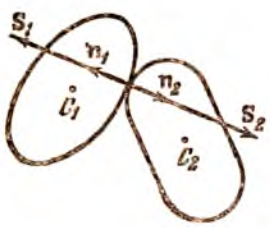


Рис. 17.2

Полное исследование процесса удара требует подробного рассмотрения физических свойств тел, что выходит за рамки теоретической механики. Однако, как показывают опыты, в первом приближении можно принять следующую гипотезу (*гипотеза Ньютона*): *отношение модуля нормальной составляющей относительной скорости* *точки контакта тел после удара к его значению до удара есть некоторая физическая постоянная*, характеризующая физические свойства соударяющихся тел, но не зависящая от их массы и относительной скорости. Эта физическая постоянная называется *коэффициентом восстановления*. Обозначая коэффициент восстановления через ε и учитывая, что полного восстановления скорости, как правило, не происходит, будем иметь

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1. \qquad (17.5)$$

В предельном случае, когда $\varepsilon = 1$, удар называется *абсолютно упругим*; во втором предельном случае, когда $\varepsilon = 0$, удар называется *абсолютно неупругим*. В остальных случаях $(0 < \varepsilon < 1)$ удар называется *не вполне упругим* или просто упругим. Заметим, что при абсолютно неупругом ударе двух тел нормальная составляющая относительной скорости точки соприкосновения после удара равна нулю. Для таких тел весь процесс удара заключается только в первой фазе; после максимального сближение тел восстановления их формы в точке контакта не происходит и оба тела движутся в дальнейшем совместно (в частности, оба тела могут остановиться) или одно тело скользит по поверхности другого.

Перед тем как перейти к дальнейшему, напомним еще раз, что гипотезу Ньютона об ударе и все выводы, которые из нее получаются, можно применять только в качестве первого приближения к реальным процессам, происходящим в телах при ударе. Это приближение оказывается достаточно хорошим, если при ударе наблюдается только местная деформация тел вблизи точки контакта. Если же при ударе происходит деформация всего тела, то гипотезу Ньютона применять нельзя *).

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор общей нормали к поверхностям тел в точке контакта, направленный внутрь второго тела. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — скорости точек контакта первого и второго тел в начале удара, а $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ — соответствующие величины в конце удара. Тогда, по определению коэффициента восстановления, будем иметь

$$\left| \frac{(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1)\cdot\mathbf{n}}{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{n}} \right| = \varepsilon, \qquad (17.6)$$

или, учитывая, что относительная скорость при ударе изменяет направление,

$$(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1)\cdot\mathbf{n} = -\varepsilon(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{n}. \qquad (17.7)$$

Наконец, если ввести два единичных вектора $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ $(\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1)$, направленные внутрь первого и второго тел соответственно,

*) Подробное рассмотрение процессов, происходящих в твердых телах при ударе, и анализ различных гипотез даны в книге: Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. — М.: Наука, 1977.

то последней формуле можно придать следующую симметричную форму:

$$\mathbf{U}_2\cdot\mathbf{n}_2+\mathbf{U}_1\cdot\mathbf{n}_1=-\varepsilon\,(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2+\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1). \qquad (17.8)$$

Этими формулами мы воспользуемся в дальнейшем.

Коэффициент восстановления может быть измерен следующим образом (рис. 17.3). Представим себе, что одно из соударяемых тел выполнено в виде плиты и неподвижно закреплено в горизонтальном положении, другое тело — шарик. Шарик поднят на высоту h_1 над плитой и отпущен без начальной скорости. Скорость его в момент соприкосновения с плитой вычисляется по известной формуле $v=\sqrt{2gh_1}$. Измерив высоту h_2, на которую поднимается шарик после отскакивания, можно найти его скорость в конце удара $V=\sqrt{2gh_2}$.

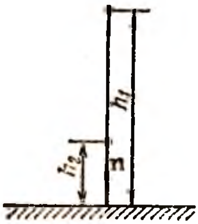


Рис. 17.3

Таким образом, коэффициент восстановления оказывается равным

$$\varepsilon=V/v=\sqrt{h_2/h_1}<1.$$

Значения коэффициентов восстановления для различных пар соударяемых материалов приводятся в справочниках. Так, например, при соударении стекла со стеклом $\varepsilon=15/16$, стали со сталью $\varepsilon=5/9$, дерева с деревом $\varepsilon=1/2$.

§ 17.3. Удар материальной точки об идеально гладкую поверхность

Материальная точка после удара о неподвижную поверхность (рис. 17.4) изменяет свою скорость. Со стороны поверхности на точку во время контакта действует ударная реакция. Полагаем, что поверхность идеально гладкая, так что реакция и ударный импульс $\mathbf{S}$ направлены по нормали к поверхности.

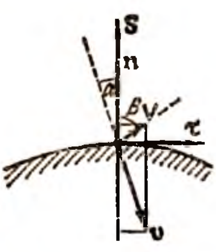


Рис. 17.4

Воспользуемся теперь теоремой об изменении количества движения при ударе (формулой (17.4)):

$$m\mathbf{V}-m\mathbf{v}=S\mathbf{n}. \qquad (17.9)$$

Проектируя это уравнение на оси τ и $\mathbf{n}$, получим (см. рис. 17.4)

$$V_\tau-v_\tau=0,\quad V_n-v_n=\frac{1}{m}S. \qquad (17.10)$$

Таким образом, касательная составляющая скорости v_τ сохраняет свой модуль и направление. Нормальная составляющая всегда изменяет направление, модуль же ее меняется в зависимости от значения ударного импульса S.

Пусть известны коэффициент восстановления ε, модуль скорости точки до удара v и угол α, составленный вектором скорости $\mathbf{v}$ с нормалью к поверхности (см. рис. 17.4). Требуется определить угол отражения β, скорость точки после удара $\mathbf{V}$ и ударный импульс S.

Исходя из определения коэффициента восстановления, найдем $V_n = \varepsilon |v_n|$, или $V_n = -\varepsilon v_n$. Из уравнений (17.10), как мы уже отмечали, следует сохранение касательной составляющей скорости после удара, т. е. $V_\tau = v_\tau$.

Заметим, что

$$|v_n| = v\cos\alpha, \quad v_\tau = v\sin\alpha, \quad V_n = V\cos\beta, \quad V_\tau = V\sin\beta. \qquad (17.11)$$

Поэтому

$$V\sin\beta = v\sin\alpha, \qquad V = v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (17.12)$$

Подставим теперь значение V в формулу для V_n и используем связь нормальных проекций скорости после удара и до удара с коэффициентом восстановления ε:

$$\varepsilon = \left|\frac{V_n}{v_n}\right| = \frac{V\cos\beta}{v\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Теперь без труда определяется угол β:

$$\operatorname{ctg}\beta = \varepsilon\operatorname{ctg}\alpha, \quad \beta = \operatorname{arcctg}(\varepsilon\operatorname{ctg}\alpha). \qquad (17.13)$$

Для вычисления модуля скорости после удара воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}}.$$

Из равенства (17.12) получим

$$V = v\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = v\sin\alpha\sqrt{1+\varepsilon^2\operatorname{ctg}^2\alpha}. \qquad (17.14)$$

Из формул (17.13) и (17.14) следует: а) для абсолютно упругого удара ($\varepsilon = 1$) $\beta = \alpha$, $V = v$; б) для абсолютно неупругого удара ($\varepsilon = 0$) $\beta = \pi/2$, $V = v_\tau = v\sin\alpha$. Таким образом, при абсолютно неупругом ударе материальная точка «рикошетирует» от неподвижной поверхности, сохраняя лишь касательную составляющую скорости.

При любом не вполне упругом ударе ($\varepsilon < 1$) модуль скорости отражения всегда меньше модуля скорости падения и угол отражения больше угла падения. В самом деле,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha, \quad \beta > \alpha,$$

$$V = v\sqrt{\sin^2\alpha + \varepsilon^2\cos^2\alpha}, \qquad V < v.$$

Определим ударный импульс. Для этого подставим в равенство (17.10) $V_n = -\varepsilon v_n$, $v_n = -v\cos\alpha$ и найдем S:

$$S = m(V_n - v_n) = m(1+\varepsilon)v\cos\alpha. \qquad (17.15)$$

Из этого соотношения видно, что максимальное значение ударного импульса при заданных коэффициенте восстановления и модуле начальной скорости v достигается при прямом ударе ($\alpha = 0$). При абсолютно упругом ударе ($\varepsilon = 1$) импульс удваивается по сравнению с импульсом при абсолютно неупругом ударе ($\varepsilon = 0$).

§ 17.4. Потеря кинетической энергии при ударе материальной точки о неподвижную поверхность

Изменение кинетической энергии при ударе определяется как разность значений кинетической энергии в конце и в начале удара:

$$T_2 - T_1 = \frac{m}{2}(V^2 - v^2).$$

Но из равенств $V_\tau = v_\tau$ и $V_n = \varepsilon |v_n|$ следует, что

$$V^2 = V_n^2 + V_\tau^2 = \varepsilon^2 v_n^2 + v_\tau^2, \qquad v^2 = v_n^2 + v_\tau^2.$$

Подставляя значения квадратов скоростей в разность значений кинетической энергии, получим

$$T_2 - T_1 = -\frac{m}{2}(1 - \varepsilon^2) v_n^2. \tag{17.16}$$

Таким образом, при абсолютно упругом ударе ($\varepsilon = 1$) кинетическая энергия материальной точки не изменяется, а при $\varepsilon < 1$ происходит потеря кинетической энергии. Наибольшая потеря будет при абсолютно неупругом ударе, когда $\varepsilon = 0$. Уменьшение кинетической энергии при $\varepsilon < 1$ обусловлено переходом механической энергии в другие формы энергии, в частности в тепловую.

Формулу (17.16) можно преобразовать к другому виду. Для этого заметим, что из равенства касательных составляющих скоростей $V_\tau = v_\tau$ следует

$$|\mathbf{V} - \mathbf{v}| = V_n + |v_n| = \varepsilon |v_n| + |v_n| = (1 + \varepsilon)|v_n|.$$

Отсюда

$$|v_n| = \frac{|\mathbf{V} - \mathbf{v}|}{1 + \varepsilon}$$

и, следовательно,

$$T_2 - T_1 = -\frac{m}{2}\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}(\mathbf{V} - \mathbf{v})^2. \tag{17.17}$$

Разность $\mathbf{V} - \mathbf{v}$ называется *«потерянной» скоростью.*

При абсолютно неупругом ударе ($\varepsilon = 0$) из (17.17) получим

$$T_2 - T_1 = -\frac{m}{2}(\mathbf{V} - \mathbf{v})^2,$$

т. е. *потеря кинетической энергии равна кинетической энергии потерянной скорости.* В общем случае потеря кинетической энергии составляет $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$-ю долю кинетической энергии потерянной скорости (*теорема Карно*).

§ 17.5. Теорема об изменении количества движения и теорема об изменении момента количеств движения материальной системы при ударе

Воспользуемся интегральной формой теоремы об изменении количества движения материальной системы (§ 8.2) и перепишем равенство (8.9) в форме

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \mathbf{S}^e. \tag{17.18}$$

Здесь $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ — количество движения системы в начальный и конечный моменты времени, $\mathbf{S}^e$ — главный вектор импульсов всех внешних сил.

Применим равенство (17.18) к ударным силам и выразим количество движения через скорость центра масс. Получим

$$M(\mathbf{V}_C - \mathbf{v}_C) = \mathbf{S}^e, \tag{17.19}$$

где $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{V}_C$ — скорости центра масс в начале и в конце удара, $\mathbf{S}^e$ — главный вектор импульсов всех внешних ударных сил (импульсы неударных сил при ударе, как уже отмечалось ранее, не учитываются).

Так как при ударе перемещения всех точек, к которым были приложены ударные силы, равны нулю (см. § 17.1), то *центр масс системы при ударе не меняет своего положения, скорость же центра масс меняется мгновенно.*

Перейдем к определению изменения момента количеств движения системы при ударе. Сначала в качестве полюса выберем неподвижную точку O.

Для одной материальной точки теорема импульсов (17.3) дает

$$m_k\mathbf{V}_k - m_k\mathbf{v}_k = \mathbf{S}_k^e + \mathbf{S}_k^i. \tag{17.20}$$

Здесь $\mathbf{S}_k^e$ — импульс внешних ударных сил, $\mathbf{S}_k^i$ — импульс внутренних ударных сил, действующих на точку.

Умножая каждое из равенств (17.20) векторно на $\mathbf{r}_k$ и складывая все равенства, получим

$$\mathbf{K}_{O2} - \mathbf{K}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{S}_k^e. \tag{17.21}$$

Сумма моментов импульсов внутренних сил в правую часть (17.21) не вошла, так как она равна нулю.

Доказательство этого свойства проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано для главного момента внутренних сил в § 7.3. Если обозначить сумму моментов импульсов всех ударных сил через $\mathbf{L}_O^e$, то будем иметь

$$\mathbf{K}_{O2} - \mathbf{K}_{O1} = \mathbf{L}_O^e.$$

Изменение момента количеств движения системы относительно неподвижного полюса при ударе равно сумме моментов импульсов всех внешних ударных сил относительно того же полюса.

Если в качестве полюса выбрать центр масс C системы, то формула (17.21) примет вид

$$\mathbf{K}_{C2}^r - \mathbf{K}_{C1}^r = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{S}_k^e, \tag{17.22}$$

где $\mathbf{K}_{C2}^r$ и $\mathbf{K}_{C1}^r$ — моменты количеств относительного движения материальной системы в конце и начале удара (см. § 9.7), а $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор точки приложения ударного импульса, проведенный из центра масс C системы. Уравнение (17.22) следует из того, что теоремы об изменении момента количеств движения относительно неподвижного полюса и центра масс имеют одинаковую математическую форму.

Запишем уравнения (17.21) и (17.22) в проекциях на оси координат. Для твердого тела в качестве осей координат удобнее выбрать оси, жестко связанные с телом; начало координатной системы следует выбрать либо в неподвижной точке O тела (если такая точка существует), либо в его центре масс C. Следует отметить, что при ударе все точки системы, в частности твердого тела, не перемещаются. Поэтому можно выбрать любую систему координатных осей, жестко связанных с телом, и заменить векторные уравнения (17.21) или (17.22) тремя скалярными уравнениями (см. § 13.2):

$$\begin{aligned} I_x(\Omega_x - \omega_x) - I_{xy}(\Omega_y - \omega_y) - I_{xz}(\Omega_z - \omega_z) &= L_x^e, \\ -I_{yx}(\Omega_x - \omega_x) + I_y(\Omega_y - \omega_y) - I_{yz}(\Omega_z - \omega_z) &= L_y^e, \\ -I_{zx}(\Omega_x - \omega_x) - I_{zy}(\Omega_y - \omega_y) + I_z(\Omega_z - \omega_z) &= L_z^e. \end{aligned} \tag{17.23}$$

В этих уравнениях ω_x, ω_y, ω_z и Ω_x, Ω_y, Ω_z — проекции вектора угловой скорости тела в начале и конце удара, I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} — соответствующие моменты инерции тела, L_x^e, L_y^e, L_z^e — проекции главного момента импульсов внешних ударных сил.

Если за оси координат приняты главные оси инерции тела, то уравнения (17.23) примут такой вид:

$$I_x(\Omega_x - \omega_x) = L_x^e, \quad I_y(\Omega_y - \omega_y) = L_y^e, \quad I_z(\Omega_z - \omega_z) = L_z^e. \tag{17.24}$$

Для плоского движения твердого тела, когда ось z проходит через центр масс C перпендикулярно к плоскости движения, и для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, уравнения (17.23) упрощаются ($\omega_x = \omega_y = 0$):

$$-I_{xz}(\Omega_z - \omega_z) = L_x^e, \quad -I_{yz}(\Omega_z - \omega_z) = L_y^e, \quad I_z(\Omega_z - \omega_z) = L_z^e. \tag{17.25}$$

Наконец, если тело имеет плоскость материальной симметрии, параллельно которой происходит движение, и все ударные силы лежат в этой плоскости, то из трех уравнений остается только одно:

$$I_z(\Omega_z - \omega_z) = L_z^e. \tag{17.26}$$

§ 17.6. Удар, действующий на тело, закрепленное в двух точках

На тело, закрепленное в точке B шарнирно (рис. 17.5) и в точке A при помощи подпятника, действует ударный импульс $\mathbf{S}$. Во время удара в точках A и B возникают реакции, имеющие также характер ударных сил. При значительных ударных воздействиях реакции могут достигать значений, опасных с точки зрения прочности подшипников и оси.

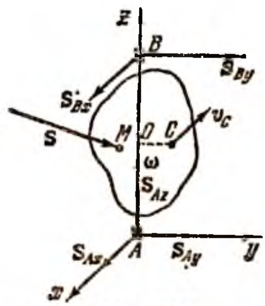


Рис. 17.5

Возникает задача определения ударных импульсов реакций при заданных динамических характеристиках тела (масса, моменты инерции) и при известном ударном импульсе, действующем на тело.

Пусть $\mathbf{S}$ — ударный импульс, действующий в точке M на тело. Совместим плоскость yAz с плоскостью, проходящей через центр масс C тела. Теорема об изменении количества движения при ударе и теорема об изменении момента количеств движения примут для нашего случая следующий вид:

$$M(\mathbf{v}_{C2} - \mathbf{v}_{C1}) = \mathbf{S} + \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B, \tag{17.27}$$

$$\mathbf{K}_{A2} - \mathbf{K}_{A1} = \mathbf{r}_M \times \mathbf{S} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{S}_B, \tag{17.28}$$

где $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{S}_B$ — импульсы реакций, $\mathbf{r}_M$ — радиус-вектор точки M.

Заметим, что скорость центра масс параллельна оси x:

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = -\omega_z y_C \mathbf{i}$$

и, следовательно, векторное уравнение (17.27) в проекциях на оси координат приводит к трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} S_x + S_{Ax} + S_{Bx} &= My_C(\omega_z - \Omega_z), \\ S_y + S_{Ay} + S_{By} &= 0, \\ S_{Az} + S_z &= 0. \end{aligned} \tag{17.29}$$

Здесь $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}$ — проекции ударных импульсов на соответствующие оси координат.

Теперь перейдем к составлению второй группы уравнений, вытекающей из векторного равенства (17.28). В проекциях на оси координат эти уравнения в общем виде совпадают с уравнениями (17.25). Для того чтобы воспользоваться этими уравнениями, вычислим прежде всего момент ударного импульса (импульсы реакций вычисляются непосредственно). Имеем

$$\mathbf{r}_M \times \mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_M & y_M & z_M \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} =$$
$$= (y_M S_z - z_M S_y)\,\mathbf{i} + (z_M S_x - x_M S_z)\,\mathbf{j} + (x_M S_y - y_M S_x)\,\mathbf{k},$$

где x_M, y_M и z_M — координаты точки M приложения импульса $\mathbf{S}$.

Уравнения (17.25) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} -I_{xz}(\Omega_z - \omega_z) &= y_M S_z - z_M S_y - z_B S_{By}, \\ -I_{yz}(\Omega_z - \omega_z) &= z_M S_x - x_M S_z + z_B S_{Bx}, \\ I_z(\Omega_z - \omega_z) &= x_M S_y - y_M S_x. \end{aligned} \qquad (17.30)$$

Из последнего уравнения определяется приращение угловой скорости вращения за время удара:

$$\Omega_z - \omega_z = \frac{1}{I_z}(x_M S_y - y_M S_x). \qquad (17.31)$$

Для определения неизвестных импульсов ударных сил остается подставить $\Omega_z - \omega_z$ в уравнения (17.29) и (17.30) и решить систему пяти уравнений с пятью неизвестными: S_{Az}, S_{Ay}, S_{Ax}, S_{Bx}, S_{By}.

§ 17.7. Условия отсутствия ударных реакций. Центр удара

Сначала найдем условия, которые необходимы для того, чтобы при ударе не возникали ударные импульсы реакции. Примем, что ударные импульсы в точках A и B равны нулю, и найдем те ограничения, которые эти условия накладывают на остальные величины, входящие в уравнения (17.29) и (17.30). При этом будем считать, что $\Omega_z - \omega_z \neq 0$. Из уравнений (17.29) и (17.30) получим

$$\begin{aligned} S_x &= -M y_C(\Omega_z - \omega_z), \\ S_y &= 0, \\ S_z &= 0, \\ y_M S_z - z_M S_y &= -I_{xz}(\Omega_z - \omega_z), \\ z_M S_x - x_M S_z &= -I_{yz}(\Omega_z - \omega_z), \\ x_M S_y - y_M S_x &= I_z(\Omega_z - \omega_z). \end{aligned} \qquad (17.32)$$

Из второго и третьего уравнений следует, что внешний ударный импульс должен иметь направление, параллельное оси x, т. е. он должен быть перпендикулярен к плоскости, проведенной через ось вращения и центр масс тела.

Для удобства дальнейших рассуждений введем новую систему координат $Ox_1y_1z_1$ с осями, параллельными исходным осям, и с началом в точке O (рис. 17.6), находящейся на оси вращения тела z, причем $\overline{AO} = z_M\mathbf{k}$. В новой системе координат $z_{1M} = 0$. Импульс $\mathbf{S}$, по доказанному, должен лежать в координатной плоскости x_1Oy_1 и быть параллельным оси x_1 (см. рис. 17.6).

В новой системе координат уравнения (17.32) сохраняют свой вид. Полагая в них $S_y = S_z = 0$, а также $z_{1M} = 0$, используем сначала четвертое и пятое уравнения. Имея в виду условие $\Omega_z - \omega_z \neq 0$, получим

$$I_{x_1z_1} = 0, \qquad I_{y_1z_1} = 0,$$

т. е. ось вращения должна быть главной осью инерции для точки O.

Из первого и последнего уравнений находим

$$y_M = \frac{I_z}{My_C}. \tag{17.33}$$

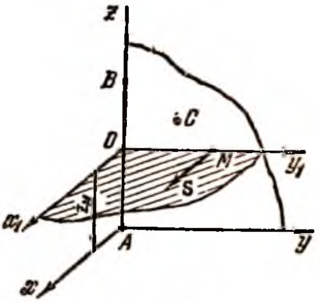


Рис. 17.6

Здесь мы воспользовались тем, что $y_{1M} = y_M$, $y_{1C} = y_C$, $I_{z_1} = I_z$. Значит, линия действия импульса $\mathbf{S}$ должна отстоять от оси вращения на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника (см. § 13.7).

Таким образом, если удар не передается на опоры, то должны выполняться следующие условия: 1) *линия действия ударного импульса должна быть перпендикулярна к плоскости, содержащей центр масс тела и ось вращения;* 2) *плоскость, содержащая ударный импульс и перпендикулярная к оси вращения, должна пересекаться с этой осью в точке, для которой ось вращения является главной осью инерции;* 3) *линия действия ударного импульса должна отстоять от оси вращения на расстоянии, определяемом равенством* (17.33).

Легко видеть, что перечисленные условия являются также достаточными. При их выполнении система (17.32) удовлетворяется при любых S_x, а тогда из системы уравнений (17.29) и (17.30) вытекает, что ударные импульсы реакций опор $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{S}_B$ обращаются в нуль.

Точка M в плоскости yAz (см. рис. 17.6), в которой приложен ударный импульс $\mathbf{S}$, удовлетворяющий всем указанным условиям, называется *центром удара*.

Следует отметить, что центр удара может и не существовать. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда ни для одной из точек на оси вращения сама ось вращения не является главной осью инерции.

§ 17.8. Удар двух тел

Пусть два тела с идеально гладкими поверхностями соударяются в точке E (рис. 17.7). Будем считать, что нам известны угловые скорости ω_1 и ω_2 тел, а также скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ их центров масс C_1 и C_2 в начале удара. Считая известными коэффициент восстановления ε и динамические характеристики тел (их массы и моменты инерции), требуется определить угловые скорости Ω_1, Ω_2 тел и скорости $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ их центров масс в конце удара.

Построим в точках E_1 и E_2 (при ударе они совпадают) единичные векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ внутренних нормалей к поверхностям тел. Применяя к каждому телу теорему о движении центра масс, получим

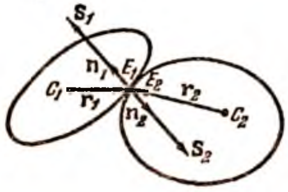


Рис. 17.7

$$M_1(\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1) = S\mathbf{n}_1, \qquad M_2(\mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_2) = S\mathbf{n}_2, \quad (17.34)$$

где $S = S_1 = S_2$.

Применим теперь к каждому телу теорему об изменении момента количеств движения (формула (17.22)):

$$\Delta \mathbf{K}^r_{C_1} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n}_1) S, \qquad \Delta \mathbf{K}^r_{C_2} = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{n}_2) S. \quad (17.35)$$

Построим в каждом теле системы координат $C_1x_1y_1z_1$ и $C_2x_2y_2z_2$, направив оси по главным осям инерции (на рис. 17.7 оси не показаны). Тогда два векторных уравнения (17.35) будут эквивалентны следующим шести скалярным уравнениям:

$$A_1\Delta\omega_{1x} = S\lambda_{1x}, \qquad B_1\Delta\omega_{1y} = S\lambda_{1y}, \qquad C_1\Delta\omega_{1z} = S\lambda_{1z}, \quad (17.36)$$

$$A_2\Delta\omega_{2x} = S\lambda_{2x}, \qquad B_2\Delta\omega_{2y} = S\lambda_{2y}, \qquad C_2\Delta\omega_{2z} = S\lambda_{2z}. \quad (17.37)$$

В этих уравнениях A_i, B_i, C_i — моменты инерции соответствующих тел, $\lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \lambda_{iz}$ — проекции векторов $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i$, а $\Delta\omega_{ix}$, $\Delta\omega_{iy}$, $\Delta\omega_{iz}$ — проекции векторов $\Delta\omega_i = \Omega_i - \omega_i$ ($i = 1, 2$). Для каждого тела проекции берутся на оси системы $C_ix_iy_iz_i$, связанные с соответствующим телом (индексы осей в равенствах (17.36) и (17.37) опущены).

Уравнениям (17.34) также соответствуют шесть скалярных уравнений. Таким образом, мы имеем двенадцать скалярных уравнений, содержащих тринадцать неизвестных величин: проекции векторов $\Delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1$, $\Delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_2$, $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$ и модуль импульса S. Еще одно уравнение дает гипотеза Ньютона (17.8):

$$\mathbf{U}_2\cdot\mathbf{n}_2 + \mathbf{U}_1\cdot\mathbf{n}_1 = -\varepsilon(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2 + \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1). \quad (17.38)$$

Здесь $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ — скорости точек контакта до удара, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ — скорости соответствующих точек после удара.

Пользуясь известной формулой кинематики, найдем скорость точки E_1, принадлежащей первому телу, в конце и начале удара

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_1 + \Omega_1 \times \mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \omega_1 \times \mathbf{r}_1.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1 = (\mathbf{V} - \mathbf{v}_1) + \Delta\omega_1 \times \mathbf{r}_1.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $\mathbf{n}_1$ и учтем, что

$$(\Delta\omega_1 \times \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n}_1 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n}_1)\cdot\Delta\omega_1,$$

$$(\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{n}_1 = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{n}_1 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n}_1)\cdot\Delta\omega_1.$$

Умножая теперь первое уравнение (17.34) скалярно на $\mathbf{n}_1$ и учитывая, что $|\mathbf{n}_1| = 1$, получим

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{n}_1 = \frac{S}{M_1}.$$

Теперь предыдущее равенство можно записать так:

$$(\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{n}_1 = \frac{S}{M_1} + \lambda_{1x}\,\Delta\omega_{1x} + \lambda_{1y}\,\Delta\omega_{1y} + \lambda_{1z}\,\Delta\omega_{1z},$$

или, пользуясь уравнениями (17.36),

$$(\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{n}_1 = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{\lambda_{1x}^2}{A_1} + \frac{\lambda_{1y}^2}{B_1} + \frac{\lambda_{1z}^2}{C_1}\right) S.$$

Аналогично для второго тела

$$(\mathbf{U}_2 - \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{n}_2 = \left(\frac{1}{M_2} + \frac{\lambda_{2x}^2}{A_2} + \frac{\lambda_{2y}^2}{B_2} + \frac{\lambda_{2z}^2}{C_2}\right) S.$$

Складывая почленно оба равенства, получим

$$\mathbf{U}_2\cdot\mathbf{n}_2 + \mathbf{U}_1\cdot\mathbf{n}_1 - (\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2 + \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1) = GS,$$

где

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{\lambda_{1x}^2}{A_1} + \frac{\lambda_{1y}^2}{B_1} + \frac{\lambda_{1z}^2}{C_1} + \frac{\lambda_{2x}^2}{A_2} + \frac{\lambda_{2y}^2}{B_2} + \frac{\lambda_{2z}^2}{C_2}. \tag{17.39}$$

Массы тел и их моменты инерции заданы, а числа λ_{ix}, λ_{iy}, λ_{iz} представляют собой кратчайшие расстояния между линией действия импульсов $S\mathbf{n}_1$, $S\mathbf{n}_2$ и соответствующими осями координат. Эти расстояния вычисляются подобно тому, как в статике определяются плечи сил относительно осей.

Для того чтобы, например, вычислить $|\lambda_{1x}|$, необходимо линию действия импульса спроектировать на координатную плоскость $y_1C_1z_1$ и найти плечо проекции импульса относительно точки C_1.

В случае плоского удара, когда все линии, изображенные на рис. 17.7, лежат в одной плоскости, а ось z_1 направлена перпендикулярно к плоскости чертежа, $|\lambda_{1z}|$ представляет собой отрезок перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на линию действия импульса $\mathbf{S}$.

Таким образом, G можно считать величиной известной. Пользуясь равенствами (17.38) и (17.39), найдем импульс

$$S = -\frac{1+\varepsilon}{G}(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2). \tag{17.40}$$

Величину, стоящую в скобке, можно выразить через угловые скорости тел и скорости их центров масс до удара:

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2 = (\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n}_1 + (\mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{n}_2 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}_2 +$$

$$+ \omega_{1x}\lambda_{1x} + \omega_{1y}\lambda_{1y} + \omega_{1z}\lambda_{1z} + \omega_{2x}\lambda_{2x} + \omega_{2y}\lambda_{2y} + \omega_{2z}\lambda_{2z}.$$

Заметим, что $-(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2) = u_{1r}$ представляет собой положительную величину, равную проекции относительной скорости точки контакта первого тела относительно точки контакта второго тела на нормаль $\mathbf{n}_2$ (см. рис. 17.7).

Отсюда следует, что

$$S = \frac{1+\varepsilon}{G}u_{1r}$$

— известная величина и можно, воспользовавшись формулами (17.34) — (17.37) найти искомые величины после удара:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 + \frac{S}{M_1}\mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{S}{M_2}\mathbf{n}_2,$$

$$\Omega_{ix} = \omega_{ix} + S\frac{\lambda_{ix}}{A_i}, \qquad \Omega_{iy} = \omega_{iy} + S\frac{\lambda_{iy}}{B_i}, \qquad \Omega_{iz} = \omega_{iz} + S\frac{\lambda_{iz}}{C_i}. \tag{17.41}$$

§ 17.9. Частные случаи удара двух тел

1. Центральный удар. *Удар называется центральным, если центры масс соударяющихся тел находятся на общей нормали, проведенной в точке контакта* (или на линии действия импульсов). Примером такого удара может служить удар двух однородных гладких шаров.

По определению центрального удара $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i = 0$. Следовательно, все λ равны нулю и формула (17.39) принимает вид

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}. \tag{17.42}$$

Из уравнений (17.35) находим, что $\Delta K^r_{C_i} = 0$. Тогда $\Delta\omega_i = 0$, т. е. при центральном ударе угловые скорости тел не изменяются. Скорости же центров масс изменяются согласно уравнениям (17.41). Найдем величину ударного импульса S. Для этого определим сначала u_{1r}:

$$u_{1r} = -(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2) = -(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}_2).$$

Введем углы α и β (рис. 17.8), составляемые векторами скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ центров масс до удара с линией центров. Тогда

$$u_{1r} = v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta.$$

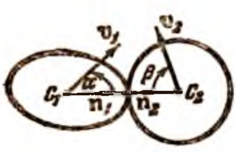


Рис. 17.8

Отсюда

$$S = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(1+\varepsilon)(v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta).$$

Подставляя это выражение в равенства (17.41), найдем скорости центров масс тел после удара

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 + \frac{M_2(1+\varepsilon)}{M_1 + M_2}(v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta)\,\mathbf{n}_1,$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{M_1(1+\varepsilon)}{M_1 + M_2}(v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta)\,\mathbf{n}_2.$$

2. Плоский удар двух тел. Будем считать, что оба тела имеют плоскости материальной симметрии, которые перемещаются в общей неподвижной плоскости. Пусть, кроме того, ударные импульсы расположены в той же плоскости (это всегда выполняется при цилиндрической структуре тел). При выполнении этих условий удар называется *плоским*.

В сделанных предположениях векторы $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i$, ω_i и Ω_i перпендикулярны к плоскости движения. Имеем

$$\Delta\omega_{ix} = \Delta\omega_{iy} = 0, \qquad \lambda_{ix} = \lambda_{iy} = 0, \qquad \lambda_{iz}^2 = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i|^2 = h_i^2, \tag{17.43}$$

где h_i — расстояния от центров масс C_i тел до линии действия импульсов (*плечи импульсов*).

Формула для вычисления параметра G принимает вид

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{h_1^2}{C_1} + \frac{h_2^2}{C_2}. \tag{17.44}$$

Остальные величины определяются по общим формулам, но из шести уравнений (17.36) и (17.37) остаются только два:

$$C_1 (\Omega_{1z} - \omega_{1z}) = Sh_1, \qquad C_2 (\Omega_{2z} - \omega_{2z}) = Sh_2, \tag{17.45}$$

причем h_1 и h_2 нужно вычислять, учитывая знак моментов.

§ 17.10. Задачи

Задача 17.1. Два шара с массами m_1 и m_2 движутся поступательно по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 17.9). В момент удара линия центров составляет угол $\pi/4$ с направлениями движения шаров до удара. Считая шары идеально гладкими и коэффициент восстановления равным ε, найти скорости шаров после удара.

Направим координатные оси параллельно прямым, по которым движутся центры шаров до удара (см. рис. 17.9). Пусть скорость первого шара $\mathbf{v}_1$ направлена по оси x. В соответствии с теоремой о сохранении количества движения системы при ударе имеем

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2.$$

Здесь $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — скорости шаров после удара.

В проекциях на оси координат это векторное равенство дает первые два уравнения для определения скоростей тела после удара:

$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x},$$

$$m_2 v_2 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}.$$

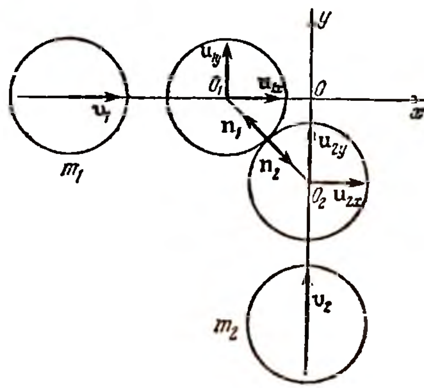


Рис. 17.9

Для получения третьего уравнения воспользуемся формулой (17.8), переписав ее в виде

$$\varepsilon = -\frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2 + \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}_2 + \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1} = -\frac{u_{2n_2} + u_{1n_1}}{v_{2n_2} + v_{1n_1}}.$$

Так как

$$u_{1n_1} = -u_{1x}\frac{\sqrt{2}}{2} + u_{1y}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad u_{2n_2} = u_{2x}\frac{\sqrt{2}}{2} - u_{2y}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$v_{1n_1} = -v_1\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad v_{2n_2} = -v_2\frac{\sqrt{2}}{2},$$

то

$$\varepsilon = \frac{u_{2x} - u_{2y} - u_{1x} + u_{1y}}{v_1 + v_2}.$$

Отсюда получим третье уравнение

$$-u_{1x}+u_{1y}+u_{2x}-u_{2y}=\varepsilon(v_1+v_2).$$

Наконец, четвертое уравнение можно составить, используя условие идеальной гладкости шаров. Так как ударный импульс в этом случае направлен по общей нормали к поверхностям шаров, то проекция количества движения на касательную для каждого шара при ударе не изменяется. Таким образом,

$$v_{1\tau}=u_{1\tau},\qquad v_1\frac{\sqrt{2}}{2}=u_{1x}\frac{\sqrt{2}}{2}+u_{1y}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

или

$$v_1=u_{1x}+u_{1y}.$$

Это — четвертое уравнение. Присоединяя к нему предыдущие три уравнения, получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}. Решение системы имеет такой вид:

$$u_{1x}=\frac{(1+2k-\varepsilon)\,v_1-(1+\varepsilon)\,v_2}{2(1+k)},\qquad u_{1y}=\frac{1+\varepsilon}{2(1+k)}(v_1+v_2),$$

$$u_{2x}=\frac{k(1+\varepsilon)}{2(1+k)}(v_1+v_2),\qquad u_{2y}=-\frac{-k(1+\varepsilon)\,v_1+[2+k(1-\varepsilon)]\,v_2}{2(1+k)}.$$

Здесь через k обозначено отношение масс шаров $m_1/m_2=k$. Применим эти формулы к частному случаю абсолютно упругого соударения шаров одинаковой массы. Примем также равными и скорости шаров.

Подставляя в формулы $k=\varepsilon=1$, $v_1=v_2=v$, получим

$$u_{1x}={}^1/_2v-{}^1/_2v=0,\qquad u_{1y}={}^1/_2v+{}^1/_2v=v,$$

$$u_{2x}={}^1/_2v+{}^1/_2v=v,\qquad u_{2y}={}^1/_2v-{}^1/_2v=0.$$

Таким образом, при ударе происходит обмен скоростями. Первый шар после удара приобретает скорость, которую имел второй шар до удара, а второй шар приобретает скорость первого.

Задача 17.2. Элементарная частица M массы m сталкивается с ядром элемента в точке O (рис. 17.10). Начальная скорость частицы v_0. После столкновения частица и два осколка ядра движутся в среде C, где оставляют следы OA_1, OA_2, OA_3. По длине свободного пробега частицы M в среде (отрезку OA_1) определяют скорость v_1 частицы после столкновения. Масса ядра m_0 также известна. Определить отношение масс осколков ядра, зная углы отклонения α, β, γ от начального направления Oy следов всех трех частиц после удара. Кроме того, известно, что $v_2>v_3$. Удар считать абсолютно упругим.

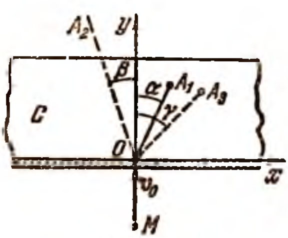


Рис. 17.10

Обозначим через m_2 и m_3 массы частиц со следами OA_2 и OA_3 соответственно: $m_2+m_3=m_0$.

Из теоремы о сохранении количества движения системы за время удара следует, что

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2+m_3\mathbf{v}_3=m\mathbf{v}_0.$$

Спроектируем на оси x и y это векторное уравнение:

$$-m_2v_2\sin\beta+m_3v_3\sin\gamma+mv_1\sin\alpha=0,\qquad (17.46)$$

$$m_2v_2\cos\beta+m_3v_3\cos\gamma+mv_1\cos\alpha=mv_0.$$

Кроме того, так как удар абсолютно упругий, то кинетическая энергия системы за время удара сохраняется (теорема Карно):

$$\frac{mv_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{m_3v_3^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}.\qquad (17.47)$$

Из (17.46) найдем v_2 и v_3:

$$v_2 = \frac{m[v_0 \sin\gamma - v_1 \sin(\gamma - \alpha)]}{m_2 \sin(\beta + \gamma)}, \qquad v_3 = \frac{m[v_0 \sin\beta - v_1 \sin(\alpha + \beta)]}{m_3 \sin(\beta + \gamma)}. \tag{17.48}$$

Поделив первое уравнение на второе и используя условие $v_2 > v_3$, получим

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{m_3}{m_2}\,\frac{a}{b} > 1, \tag{17.49}$$

где введены обозначения

$$a = v_0 \sin\gamma - v_1 \sin(\gamma - \alpha), \; b = v_0 \sin\beta - v_1 \sin(\alpha + \beta).$$

Подставив значения v_2 и v_3 из равенств (17.48) в уравнение (17.47), получим

$$\frac{a^2}{m_2} + \frac{b^2}{m_3} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{m}\sin^2(\beta + \gamma). \tag{17.50}$$

Нам необходимо найти отношение $k = m_3/m_2$. Помножим обе части (17.50) на $m_2 + m_3 = m_0$:

$$a^2\left(1 + \frac{m_3}{m_2}\right) + b^2\left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) = \frac{m_0}{m}(v_0^2 - v_1^2)\sin^2(\beta + \gamma),$$

или

$$a^2(1 + k) + b^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{m_0}{m}(v_0^2 - v_1^2)\sin^2(\beta + \gamma),$$

откуда получим квадратное уравнение для определения k

$$a^2k^2 - ck + b^2 = 0, \tag{17.51}$$

где использовано обозначение

$$c = \frac{m_0}{m}(v_0^2 - v_1^2)\sin^2(\beta + \gamma) - a^2 - b^2.$$

Решим уравнение (17.51):

$$k_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}. \tag{17.52}$$

Из двух корней следует выбрать тот, который удовлетворяет неравенству (17.49): $k > b/a$. Используя соотношение (17.52), получим

$$\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b^2}}{2a^2} > \frac{b}{a}, \qquad c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b^2} > 2ba,$$

откуда

$$\sqrt{c - 2ab} \pm \sqrt{c + 2ab} > 0.$$

Следовательно, пригоден только знак «плюс».

Теперь окончательно имеем

$$k = \frac{m_3}{m_2} = \frac{1}{2a^2}\left(c + \sqrt{c^2 - 4a^2b^2}\right).$$

Аналогично можно показать, что при $v_2/v_3 < 1$ в (17.49) нужно взять знак «минус».

Задача 17.3. При стыковке двух космических кораблей, схематично изображенных на рис. 17.11, возникает удар. До стыковки движение кораблей было плоским и поступательным, а их скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, направленные вдоль осей симметрии, образовывали между собой угол β. Линия действия ударного импульса составляет с осью первого корабля угол α. Расстояния от центров масс до точки контакта равны l_1 и l_2. Массы кораблей M_1 и M_2, а моменты инерции относительно центральных осей, перпендикулярных к плоскости движения и проходящих через центры масс C_1 и C_2. Коэффициент восстановления равен e.

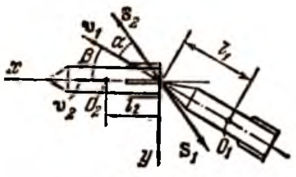


Рис. 17.11

Определить ударный импульс, скорости центров масс и угловые скорости кораблей после удара.

Пользуясь формулой (17.44), найдем параметр G:

$$G=\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}+\frac{h_1^2}{C_1}+\frac{h_2^2}{C_2}.$$

Здесь h_1 и h_2 — плечи импульсов, т. е. расстояния от точек O_1 и O_2 до линий действия $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$. Из рис. 17.11 находим $h_1=l_1\sin\alpha$, $h_2=l_2\sin(\alpha+\beta)$. Следовательно,

$$G=\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}+\frac{l_1^2\sin^2\alpha}{C_1}+\frac{l_2^2\sin^2(\alpha+\beta)}{C_2}. \qquad (17.53)$$

Найдем проекции скоростей точек контакта на соответствующие нормали; при этом учтем, что корабли до стыковки двигались поступательно и, следовательно, $u_1=v_1$, $u_2=v_2$,

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_1=-v_1\cos\alpha, \qquad \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}_2=v_2\cos(\alpha+\beta).$$

Внося найденные величины в формулу (17.40), найдем ударный импульс

$$S=\frac{1+e}{G}[v_1\cos\alpha-v_2\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (17.54)$$

Отсюда видим, что для стыковки необходимо выполнение условия $v_1\cos\alpha\geqslant v_2\cos(\alpha+\beta)$.

Перейдем к определению скоростей центров масс после удара. Проектируя векторные уравнения (17.41) на оси x и y, получим

$$V_{1x}=v_1\cos\beta-\frac{S}{M_1}\cos(\alpha+\beta), \qquad V_{2x}=v_2+\frac{S}{M_2}\cos(\alpha+\beta),$$

$$V_{1y}=-v_1\sin\beta+\frac{S}{M_1}\sin(\alpha+\beta), \qquad V_{2y}=-\frac{S}{M_2}\sin(\alpha+\beta).$$

Из второй группы уравнений, учитывая, что до удара корабли двигались поступательно ($\omega_{1z}=\omega_{2z}=0$), найдем угловые скорости после удара. При этом следует принять во внимание, что моменты импульсов относительно осей z_1 и z_2 положительны:

$$\Omega_{1z}=\frac{Sh_1}{C_1}, \qquad \Omega_{2z}=\frac{Sh_2}{C_2},$$

или

$$\Omega_{1z}=\frac{S}{C_1}l_1\sin\alpha, \qquad \Omega_{2z}=\frac{S}{C_2}l_2\sin(\alpha+\beta).$$

Если после сближения кораблей стыковка состоялась, то относительная скорость точки контакта после удара равна нулю. Следовательно, удар можно считать абсолютно неупругим и коэффициент восстановления $e=0$.

Полагая в равенстве (17.54) $\varepsilon = 0$, найдем ударный импульс

$$S = \frac{1}{G}\left[v_1 \cos\alpha - v_2 \cos(\alpha + \beta)\right].$$

Если $\alpha = \beta = 0$, то удар будет центральным и в соответствии с общей теорией $\Omega_{1z} = \Omega_{2z} = 0$. Корабли после стыковки будут двигаться без вращения. При α и β, отличных от нуля (в реальных условиях небольшие отклонения от прямого центрального удара всегда возможны), корабли начнут вращаться вокруг точки контакта. Так как $\Omega_{1z} \neq \Omega_{2z}$, то замок, скрепляющий оба корабля, будет испытывать при этом дополнительный удар.

Задача 17.4. Храповик, изображенный на рис. 17.12, подвергается в точке A действию ударного импульса S. Плечи рычага $OB = l_1$ и $BA = l_2$ можно считать однородными стержнями с массами M_1 и M_2 соответственно. Угол между плечами рычага OBA равен $\pi/2 - \beta$. Требуется определить, при каком отношении плеч l_1/l_2 и каком направлении линии действия импульса S ударная нагрузка не будет передаваться на ось храповика.

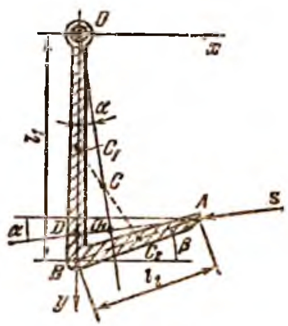


Рис. 17.12

Введем оси координат Oxy, как указано на чертеже. Координаты центра масс C храповика определяем, пользуясь тем, что точки C_1 и C_2 лежат в серединах стержней:

$$x_C = \frac{M_2 l_2 \cos\beta}{2M},$$

$$y_C = \frac{1}{M}\left[M_1 \frac{l_1}{2} + M_2\left(l_1 - \frac{l_2}{2}\sin\beta\right)\right].$$

Здесь M — масса всего храповика.

Проведем прямую OC. Она составляет со стержнем OB угол α. Очевидно, что

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y_C}{x_C} = \frac{l_1(M_1 + 2M_2) - M_2 l_2 \sin\beta}{M_2 l_2 \cos\beta}.$$

Если ввести обозначения $l_1/l_2 = u$, $(M_1 + 2M_2)/M_2 = k$ $(k \geqslant 2)$, то последнее равенство примет вид

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ku - \sin\beta}{\cos\beta}.$$

Величина u пока не известна. Ее надо найти, пользуясь основным соотношением, определяющим положение центра удара. Прежде всего заметим, что линия действия ударного импульса S согласно доказанному ранее должна быть перпендикулярна к линии OC. Следовательно, она образует с плечом OB угол $\pi/2 - \alpha$. Опустим из точки A перпендикуляр на OC и найдем точку O_1 — центр удара.

Длины отрезков $r_C = OC$ и $r_{O_1} = OO_1$ должны удовлетворять условию

$$M r_C r_{O_1} = I_{Oz},$$

где I_{Oz} - момент инерции храповика относительно оси вращения. Найдем эти величины.

$$r_C = \frac{x_C}{\sin\alpha} = \frac{M_2 l_2 \cos\beta}{2M\sin\alpha},$$

$$r_{O_1} = OD\cos\alpha = (l_1 - l_2\sin\beta + l_2\cos\beta\,\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha.$$

Для осевого момента инерции получим выражение

$$I_{Oz} = \frac{M_1 l_1^2}{3} + \frac{M_2 l_2^2}{12} + M_2\left[\left(l_1 - \frac{1}{2} l_2 \sin\beta\right)^2 + \frac{l_2^2}{4}\cos^2\beta\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(M_1 + 3M_2) l_1^2 + M_2 l_2^2 - 3M_2 l_1 l_2 \sin\beta\right].$$

Подставим в основное равенство найденные величины:

$$\frac{M_2 l_2 \cos\beta \cos\alpha}{2 \sin\alpha}(l_1 - l_2 \sin\beta + l_2 \cos\beta \operatorname{tg}\alpha) =$$
$$= {}^1/_3\,[(M_1 + 3M_2)\, l_1^2 + M_2 l_2^2 - 3M_2 l_1 l_2 \sin\beta].$$

Разделим обе части уравнения на $M_2 l_2^2$ и воспользуемся введенными ранее обозначениями:

$$3\,[(u - \sin\beta)(ku - \sin\beta) + \cos^2\beta] = 2\,[(k+1)\,u^2 - 3u\sin\beta + 1].$$

Задача свелась к решению квадратного уравнения

$$(k-2)\,u^2 - 3u\,(k-1)\sin\beta + 1 = 0.$$

Отсюда найдем отношение плеч

$$u_{1,2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)_{1,2} = \frac{1}{2(k-2)}\left[3\,(k-1)\sin\beta \pm \sqrt{9\,(k-1)^2\sin^2\beta - 4\,(k-2)}\right].$$

Оба корня пригодны, если дискриминант уравнения неотрицателен, т. е.

$$9\,(k-1)^2\sin^2\beta - 4\,(k-2) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$|\sin\beta| \geqslant \frac{2\sqrt{k-2}}{3\,(k-1)}.$$

Заметим, что всегда $k = 2 + M_1/M_2$ и поэтому правая часть неравенства — действительное число. Убедимся теперь в том, что это число не может быть больше единицы. Для этого найдем экстремум функции

$$f(k) = \frac{2\sqrt{k-2}}{3\,(k-1)}, \quad f'(k) = \frac{2}{3}\left(\frac{k-1}{2\sqrt{k-2}} - \sqrt{k-2}\right)\frac{1}{(k-1)^2} = 0.$$

Отсюда получим $k - 1 - 2\,(k-2) = 0$, $k = 3$. Нетрудно проверить, что при $k = 3$ имеет место максимум, следовательно,

$$\max_{k>2}(k) = 1/3.$$

Таким образом, при любом соотношении масс можно подобрать такой угол $\pi/2 - \beta$ между плечами краповика, что при $\angle OBA = \pi/2 - \beta$ обеспечивается безударная работа оси краповика.

Интересно, что при отрицательных углах β (угол между плечами тупой) невозможно обеспечить безударную работу храповика. Это видно из формулы для u. Величина l_1/l_2 становится отрицательной, что невозможно.

Линия действия ударной силы определяется углом α. Теперь мы его можем вычислить:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ku}{\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta =$$
$$= \frac{k}{2\,(k-1)\cos\beta}\left[3\,(k-1)\sin\beta \pm \sqrt{9\,(k-1)^2\sin^2\beta - 4\,(k-2)}\right] - \operatorname{tg}\beta.$$

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Глава XVIII

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 18.1. Введение

Общие теоремы динамики и полученные из них следствия дают наглядные и вместе с тем мощные средства исследования движения материальной системы. Умело пользуясь ими, можно сразу получить ответ на поставленные вопросы либо составить дифференциальные уравнения, решение которых определяет движение системы.

Однако применение общих теорем связано с известными трудностями. Прежде всего, практически невозможно строго классифицировать задачи и указать, в каком случае какая теорема приведет быстрее всего к цели.

Кроме того, при составлении дифференциальных уравнений движения материальной системы с помощью общих теорем динамики приходится часто расчленять систему, увеличивать число уравнений, наконец, вводить неизвестные величины (реакции связей), определение которых не всегда требуется по условию задачи. Поясним сказанное примером.

Предположим, что требуется определить закон движения двух грузов, связанных между собой нерастяжимой гибкой нитью, перекинутой через блок. При решении этой задачи в § 7.4 мы расчленяли систему, вводили две реакции связей (натяжения нитей), которые затем исключали из полученных уравнений движения. Конечно, эту задачу можно решить, не вводя реакции связей, например, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, однако в более сложных случаях найти простейший путь к решению задачи не всегда бывает достаточно легко.

Аналитическая механика дает общие методы, с помощью которых можно составить дифференциальные уравнения движения, не вводя реакции идеальных связей. Методы аналитической механики оказались плодотворными не только в теоретических исследованиях, но и в практических инженерных расчетах.

§ 18.2. Связи

Изложение аналитической механики мы начнем с более подробного рассмотрения связей. В главе V уже рассматривались связи применительно к динамике несвободного движения одной материальной точки. Обобщим эти понятия на систему материальных точек.

Система материальных точек называется свободной, если ее точки могут занимать любые положения, а их скорости могут принимать произвольные значения. В противном случае система называется *несвободной*. Значит, для несвободной системы должны быть указаны ограничения, накладываемые на координаты или скорости (или и на координаты и скорости) отдельных точек. Эти ограничения называются *связями*. Они могут быть записаны в виде уравнений или неравенств. Конструктивно связи реализуются в виде шарниров, поверхностей, направляющих, стержней, нитей и т. п.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Две материальные точки соединены жестким, невесомым и нерастяжимым стержнем длины l. Уравнение связи будет

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2,$$

где x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 — координаты точек.

Пример 2. Две материальные точки соединены абсолютно гибкой, нерастяжимой и невесомой нитью длины l. В этом случае связь запишется в форме неравенства:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leqslant l^2.$$

Если нить натянута, то имеет место знак равенства, в противном случае — знак «меньше».

Прежде чем перейти к рассмотрению других примеров остановимся на связях твердого тела. Твердое тело, как система материальных точек, представляет несвободную систему. Уравнения связей между отдельными точками твердого тела выражают неизменность расстояний между ними. Число таких связей и, следовательно, уравнений связей бесконечно велико. Однако было показано (том I, глава X, § 10.1), что в самом общем случае положение твердого тела вполне определяется шестью независимыми параметрами, в качестве которых можно выбрать, например, три координаты полюса и три угла Эйлера (том I, глава XII, § 12.4). Поэтому, рассматривая связи несвободного твердого тела, целесообразно говорить не о связях между отдельными его точками, а о связях, ограничивающих движение тела как одного целого объекта. Соответственно этому для несвободного твердого тела следует составлять уравнения или неравенства для параметров, определяющих положение тела.

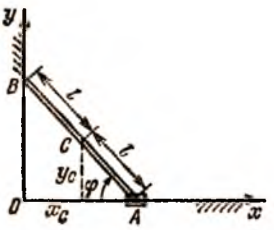


Рис. 18.1

Пример 3. Однородный стержень AB длины $2l$ движется так, что его конец A, шарнирно укрепленный в ползуне, перемещается по горизонтальной направляющей, а конец B опирается на вертикальную направляющую (рис. 18.1). Найдем связи, ограничивающие движение стержня.

Горизонтальную составляющую примем за ось x, а вертикальную — за ось y. Плоское движение тела определяется тремя параметрами: двумя координатами центра масс x_C и y_C и углом φ. Направляющие ограничивают это движение. Очевидно, что при любом положении стержня справедливы соотношения

$$y_C = l \sin\varphi, \qquad x_C^2 + y_C^2 \geqslant l^2.$$

Если стержень опирается концом B на вертикальную направляющую, то во втором соотношении имеет место знак равенства, если же конец B отошел от направляющей, то будет знак «больше».

Связи, которые описываются уравнениями, называются удерживающими; связи, описание которых осуществляется с помощью неравенств, называются неудерживающими. В первом примере связь удерживающая, во втором — неудерживающая, в третьем примере одна связь удерживающая и одна — неудерживающая.

До сих пор мы рассматривали связи, уравнения (неравенства) которых не содержат время t явно. Такие связи называются *стационарными*. Если же связь зависит от времени явно, то она называется *нестационарной* связью.

Пример 4. Трос, наматываясь на барабан, поднимает груз, вследствие чего свисающая часть троса укорачивается по заданному закону $l = l(t)$.

Примем точку схода троса с барабана за начало координат, ось z направим вертикально вниз, оси x и y — горизонтально. При подъеме груз может раскачиваться. Очевидно, что его координаты должны удовлетворять условию

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2(t).$$

В этом примере мы имеем дело с неудерживающей нестационарной связью (так как время входит явно в условие связи).

Остановимся несколько подробнее на неудерживающих связях. До тех пор пока связь удерживает тело (нить или трос натянуты, стержень опирается на направляющую и т. п.), в условии связи стоит знак равенства и мы можем применять к системам с такими связями все выводы и уравнения, которые будут установлены для систем с удерживающими связями. Но, в отличие от последних, неудерживающие связи могут не удержать тело (момент отделения тела определяется по обращению в нуль соответствующей реакции связи). Это следует всегда иметь в виду при исследовании систем с неудерживающими связями (см. § 19.4).

Перейдем к рассмотрению связей, зависящих от скоростей точек системы.

Пример 5. Конек AB движется по поверхности льда. Будем считать, что конек имеет выпуклое лезвие, которое касается льда в одной точке (рис. 18.2).

В плоскости xy конек может занимать произвольное положение, но скорость $\mathbf{v}$ точки касания C конька со льдом должна быть направлена вдоль конька. Иначе говоря, конек не может соскальзывать в направлении, перпендикулярном к его лезвию. Зададим положение конька тремя координатами: x_C, y_C и φ. Условие отсутствия соскальзывания принимает тогда вид

$$\dot{y}_C / \dot{x}_C = \operatorname{tg}\varphi,$$

или

$$\dot{x}_C \sin\varphi - \dot{y}_C \cos\varphi = 0,$$

Умножив это уравнение на dt, получим

$$dx_C \sin\varphi - dy_C \cos\varphi = 0. \tag{18.1}$$

Так как это уравнение (так же как и предыдущее) нельзя проинтегрировать, то связь (невозможность конька перемещаться в направлении, перпендикулярном к его лезвию) математически выражается уравнением, содержащим неинтегрируемым образом дифференциалы координат или их производные.

Пример 6. Шар движется по шероховатой плоскости без скольжения. Запишем все условия, налагаемые на движение шара. Прежде всего, центр шара O удовлетворяет условию (рис. 18.3)

$$z_1 \geqslant R, \tag{18.2}$$

где R — радиус шара, а z_1 — аппликата его центра O в неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$. Это обычная неудерживающая стационарная связь.

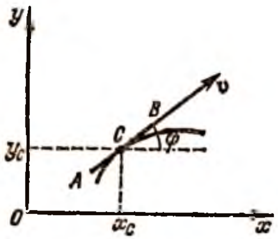


Рис. 18.2

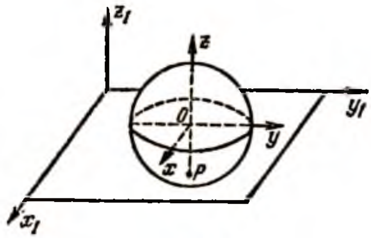


Рис. 18.3.

Учтем теперь, что шар катится без скольжения. Скорость любой точки шара определяется равенством

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

где $\mathbf{v}_O$ — скорость центра шара, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость и $\boldsymbol{\rho}$ — относительный радиус-вектор точки. Для точки касания шара P скорость $\mathbf{v}_P' = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_P = 0.$$

Спроектируем обе части этого равенства на поступательно перемещающиеся оси x, y, z:

$$v_{Ox} + \omega_y z_P - \omega_z y_P = 0, \qquad v_{Oy} + \omega_z x_P - \omega_x z_P = 0, \qquad v_{Oz} + \omega_x y_P - \omega_y x_P = 0. \tag{18.3}$$

Имеем (см. рис. 18.3)

$$v_{Ox} = \dot{x}_1, \quad v_{Oy} = \dot{y}_1, \quad v_{Oz} = 0, \quad x_P = 0, \quad y_P = 0, \quad z_P = -R,$$

где x_1 и y_1 — координаты центра шара O в неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$.

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (том I, глава XIV, формулы (14.6)):

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \qquad \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \qquad \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

где ψ, θ и φ — углы Эйлера.

После подстановки в уравнения (18.3) получим (третье уравнение обращается в тождество)

$$\dot{x}_1 - R(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) = 0,$$

$$\dot{y}_1 + R(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi) = 0,$$

или, умножая на dt,

$$\begin{aligned} dx_1 - R\,(d\psi \sin\theta \cos\varphi - d\theta \sin\varphi) = 0, \\ dy_1 + R\,(d\psi \sin\theta \sin\varphi + d\theta \cos\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Так как эти уравнения нельзя проинтегрировать, то связь шара с плоскостью (отсутствие проскальзывания) математически выражается двумя уравнениями, содержащими неинтегрируемым образом дифференциалы или скорости параметров, определяющих положение шара.

Связи называются голономными, если их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени или дифференциалов координат.

Связи называются неголономными, если их уравнения содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат.

Все связи примеров 1—4 голономные, в примере 5 имеется одна неголономная связь (18.1), а в примере 6 одна связь (18.2)— голономная и две связи (18.4) — неголономные.

Голономная нестационарная и удерживающая связь в общем случае имеет следующий вид:

$$f\,(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad (18.5)$$

а голономная стационарная и удерживающая связь

$$f\,(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (18.6)$$

В настоящем курсе мы будем изучать только системы с голономными связями. Системы с неголономными связями излагаются в специальных руководствах *).

§ 18.3. Виртуальные перемещения голономных систем

Понятие виртуальных перемещений лучше всего проиллюстрировать на примере одной удерживающей, нестационарной, голономной связи, наложенной на одну материальную точку. Другими словами, речь будет идти пока об одной материальной точке, движение которой ограничено связью

$$f\,(x, y, z, t) = 0. \quad (18.7)$$

Пусть в момент времени t точка занимает положение $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$. Зафиксируем время t и из данного положения M_0 мысленно дадим точке малое перемещение $\delta\mathbf{r}$. Обратим внимание на то, что это малое перемещение $\delta\mathbf{r}$ происходит

---

*) См., например, Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971; Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961; Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967.

не под действием приложенных к точке сил и вообще точка может не реализовать перемещение $\delta\mathbf{r}$ — это просто малое перемещение, которое мы мысленно даем точке из данного положения M_0 при фиксированном времени t.

Очевидно, что не всякое даже малое перемещение $\delta\mathbf{r}$ можно осуществить, не нарушив связь. Для того чтобы выяснить, какое и в каком смысле малое перемещение $\delta\mathbf{r}$ не нарушает связь, учтем, что после перемещения на $\delta\mathbf{r}$ точка займет новое положение, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$. Координаты x', y', z' нового положения точки будут

$$x' = x_0 + \delta x, \quad y' = y_0 + \delta y, \quad z' = z_0 + \delta z, \tag{18.8}$$

где δx, δy, δz — проекции вектора $\delta\mathbf{r}$.

Внесем эти координаты точки в уравнение связи (18.7) и разложим полученное выражение в ряд по степеням δx, δy и δz. Имеем

$$f(x_0+\delta x,\ y_0+\delta y,\ z_0+\delta z,\ t) = f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z + \ldots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Так как первое слагаемое правой части равно нулю (координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 должны удовлетворять уравнению связи (18.7)), то последнее равенство примет вид

$$f(x_0+\delta x,\ y_0+\delta y,\ z_0+\delta z,\ t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z + \ldots \tag{18.9}$$

Виртуальным перемещением точки называется такое малое перемещение $\delta\mathbf{r}$, мысленно осуществляемое из данного положения при фиксированном времени t, которое с точностью до членов первого порядка малости включительно не нарушает связи. Из этого определения следует, что виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$ (δx, δy, δz) должно удовлетворять уравнению, которое получается из (18.9), если приравнять правую часть нулю, отбросив одновременно все члены высшего порядка. Таким образом, проекции δx, δy, δz виртуального перемещения $\delta\mathbf{r}$ должны удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0. \tag{18.10}$$

Иначе говоря, *проекции δx, δy, δz виртуального перемещения $\delta\mathbf{r}$ обращают в нуль первую вариацию уравнения связи при условии, что время не варьируется*:

$$\delta f(x,\ y,\ z,\ t)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0.$$

Если ввести градиент функции (18.7) при фиксированном времени t в данной точке M_0

$$(\operatorname{grad} f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \mathbf{k},$$

то левую часть уравнения (18.10) можно представить как скалярное произведение векторов $(\operatorname{grad} f)_0$ и $\delta\mathbf{r}$

$$(\operatorname{grad} f)_0 \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \qquad (18.11)$$

Теперь легко выяснить геометрический смысл виртуального перемещения $\delta\mathbf{r}$. При фиксированном времени t уравнение связи (18.7) определяет в пространстве некоторую поверхность. Как известно, градиент функции представляет собой вектор, направленный по нормали к поверхности в данной точке M_0. Из уравнения (18.11) следует, что любой вектор виртуального перемещения $\delta\mathbf{r}$ перпендикулярен нормали к поверхности, т. е. лежит в касательной плоскости, проведенной к поверхности (18.7) при фиксированном времени t в данной точке M_0 (рис. 18.4,a).

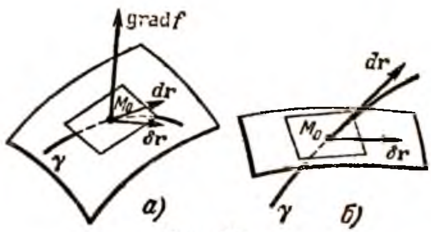


Рис. 18.4

Рассмотрим теперь действительное перемещение $d\mathbf{r}$ точки. Прежде всего отметим, что действительное перемещение $d\mathbf{r}$, в отличие от виртуального перемещения $\delta\mathbf{r}$, происходит под действием приложенных к точке сил за время dt. Это перемещение направлено всегда по касательной, проведенной к траектории точки (так как $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$). Рассмотрим два случая.

1. Связь стационарная. При стационарной связи поверхность уравнения связи $f(x, y, z) = 0$ не изменяется с течением времени и траектория γ точки M целиком лежит на этой поверхности. Касательная плоскость содержит в этом случае скорость $\mathbf{v}$ точки M (см. рис. 18.4, a), и, следовательно, мы можем всегда построить одно виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$, которое будет совпадать с действительным перемещением $d\mathbf{r}$.

Этот вывод можно получить и из аналитических соображений. Проекции dx, dy, dz действительного перемещения $d\mathbf{r}$ должны удовлетворять условию

$$df(x, y, z)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz = 0.$$

Это условие будет совпадать с (18.10), если в последнем положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ и $\delta z = dz$.

Таким образом, при стационарных связях действительное перемещение $d\mathbf{r}$ совпадает с одним из виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$.

2. Связь нестационарная. При нестационарной связи поверхность $f(x, y, z, t) = 0$, построенная при фиксированном времени t, не будет содержать траекторию γ точки M. Это следует хотя бы из того, что при действительном перемещении за время dt точка M перейдет на новую поверхность $f(x, y, z, t + dt) = 0$. Поэтому действительное перемещение $d\mathbf{r}$ не совпадает ни с одним из виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$ (рис. 18.4, *б*).

Дадим аналитическое доказательство этого утверждения. Проекции dx, dy, dz действительного перемещения $d\mathbf{r}$ при нестационарной связи должны удовлетворять условию

$$df(x, y, z, t)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt = 0.$$

Так как производная $(\partial f/\partial t)_0$ не равна нулю, то это условие не может совпадать с (18.10) при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ и $\delta z = dz$.

Все сказанное хорошо иллюстрируется простейшим примером.

Пример 1. Рассмотрим математический маятник постоянной длины l, движение которого происходит в плоскости xy (рис. 18.5, *а*). Уравнение связи (предполагается, что нить все время натянута) будет $x^2 + y^2 = l^2$, где $l =$ const.

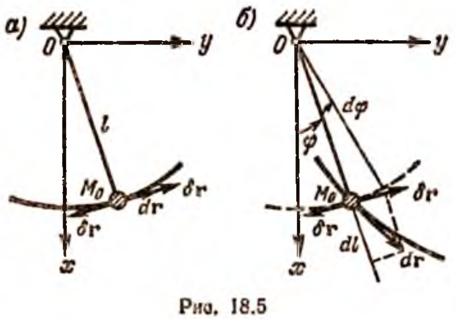


Рис. 18.5

Это обычная стационарная голономная связь. При плоском движении поверхность, определяемая уравнением связи, вырождается в линию — траекторию движения точки. В нашем случае точка M движется по окружности радиуса l. Из положения M_0, которое занимает точка в данный момент времени, мысленно дадим малое перемещение $\delta\mathbf{r}$, направленное по касательной к окружности. Это и будет виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$ математического маятника. Очевидно, что, меняя модуль и направление вдоль касательной, мы можем осуществить бесчисленное множество виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$. Действительное перемещение $d\mathbf{r}$ будет направлено по касательной к траектории и оно будет совпадать с одним из виртуальных перемещений (см. рис. 18.5, *а*).

Рассмотрим теперь случай, когда длина маятника изменяется по заданному закону (для определенности будем считать, что она увеличивается). Тогда уравнение связи примет вид $x^2 + y^2 = l^2(t)$. Это — нестационарная голономная связь. Зафиксируем время t и через данное положение M_0 построим окружность, определяемую уравнением связи при $t =$ const (на рис. 18.5, *б* она показана пунктиром). Виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}$ направлены по касательной к этой окружности. Однако, в отличие от предыдущего случая, когда длина маятника не изменялась, при действительном движении за время dt изменится не только угол φ, но изменится длина маятника l. В результате действительное перемещение $d\mathbf{r}$ маятника не будет совпадать ни с одним из виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$ (на рис. 18.5, *б* сплошной линией показан участок действительной траектории γ маятника при увеличивающейся его длине и возрастании угла φ).

Вернемся к общему случаю. Предположим, что на систему материальных точек наложено h голономных нестационарных удерживающих связей

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, h). \tag{18.12}$$

Виртуальным перемещением материальной системы называется такое мысленное малое перемещение $\delta r_1, \ldots, \delta r_n$ отдельных ее точек из данного положения при фиксированном времени t, при котором справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_0 \delta x_k + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)_0 \delta y_k + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k}\right)_0 \delta z_k\right] = 0 \quad (i = 1, \ldots, h), \tag{18.13}$$

где δx_k, δy_k, δz_k — проекции вектора $\delta \mathbf{r}_k$.

Эти равенства можно интерпретировать на языке многомерной геометрии. Для этого введем в рассмотрение $3n$-мерное пространство и изображающую точку M, положение которой определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ с проекциями $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$. Тогда левые части уравнений (18.13) можно записать в форме скалярных произведений

$$(\operatorname{grad} f_i)_0 \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (i = 1, \ldots, h).$$

Здесь $(\operatorname{grad} f_i)_0$ — вектор, направленный по нормали к поверхности $f_i = 0$ в данной точке M_0 при фиксированном времени t. Из этих равенств следует, что виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}$ изображающей точки M в $3n$-мерном пространстве должно находиться в касательных плоскостях, проведенных к каждой поверхности (18.12) в данной точке M_0 при фиксированном времени t.

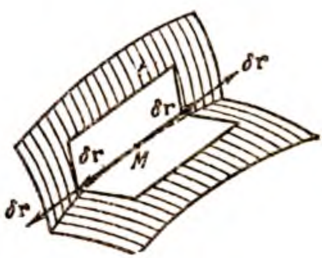


Рис. 18.6

Пример 2. На материальную точку M наложены две связи: $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$. Найдем направление виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}$.

Вектор $\delta \mathbf{r}$ должен удовлетворять двум условиям:

$$\operatorname{grad} f_1 \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \qquad \operatorname{grad} f_2 \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Из этих равенств следует, что вектор $\delta \mathbf{r}$ лежит одновременно в двух касательных плоскостях, проведенных к данной точке заданных поверхностей $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Следовательно, все виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}$ лежат на пересечении касательных плоскостей, т. е. на касательной, проведенной к линии пересечения данных поверхностей (рис. 18.6).

Пример 3. Рассмотрим плоский рычаг, шарнирно укрепленный в точке O (рис. 18.7). Любая точка рычага, например точка M, будет двигаться по окружности радиуса OM. Следовательно, виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_M$ точки M будет направлено по касательной к этой окружности, т. е. перпендикулярно вектору $\mathbf{r}_M = \overline{OM}$. Таким образом, виртуальные перемещения точек рычага перпендикулярны к рычагу. Модули этих векторов не могут быть выбраны произвольно.

Если в качестве независимого виртуального перемещения взять вектор $\delta\mathbf{r}_M$, то виртуальное перемещение, например, точки N (см. рис. 18.7) можно выразить через $\delta\mathbf{r}_M$.

Действительно, для точки N имеем $\mathbf{r}_N = -\dfrac{ON}{OM}\mathbf{r}_M$. Отсюда $\delta\mathbf{r}_N = -\dfrac{ON}{OM}\delta\mathbf{r}_M$. Другими словами, модули виртуальных перемещений пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения. Распределение векторов виртуальных перемещений точек рычага показано на рис. 18.7.

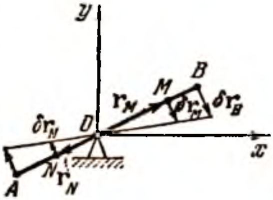


Рис. 18.7

В заключение этого параграфа введем понятие виртуальной работы сил, приложенных к системе.

Пусть система материальных точек занимает в некоторый момент времени t какое-то положение. Обозначим через $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ силы, приложенные к точкам системы. Из данного положения при фиксированном времени t сообщим системе виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_1, \ldots, \delta\mathbf{r}_n$. Будем считать, что на этом перемещении силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, приложенные к системе, не изменяются. Составим сумму работ этих сил на виртуальном перемещении $\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \ldots, \delta\mathbf{r}_n$

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k.$$

Эта сумма называется *виртуальной работой* заданных сил.

Наконец, отметим, что очень часто вместо термина «виртуальное перемещение» употребляют термин «возможное перемещение». По существу это одно и то же, так как латинское слово virtualis означает возможный. Однако, если пользоваться словами «возможные перемещения», то для нестационарных связей мы должны будем сказать: «действительное перемещение невозможно» (ибо действительное перемещение $d\mathbf{r}$ не совпадает ни с одним из возможных перемещений $\delta\mathbf{r}$). Так как на русском языке такая фраза звучит неестественно, то в отечественной научной и учебной литературе чаще пользуются латинским термином «виртуальное перемещение» вместо однозначного русского — «возможное перемещение».

§ 18.4. Идеальные связи

Введем еще одну классификацию связей.

Связи называются идеальными, если сумма работ всех реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

Обозначим через $\mathbf{R}_k$ равнодействующую всех реакций связей, приложенных к точке с номером k. Тогда условие идеальности связей будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0. \tag{18.14}$$

Для одной материальной точки и одной связи $f(x, y, z) = 0$ условие (18.14) упрощается:

$$\mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{r} = 0,$$

т. е. реакция **R** идеальной связи перпендикулярна к любому виртуальному перемещению $\delta\mathbf{r}$ точки и, следовательно, она направлена по нормали к поверхности связи $f(x, y, z) = 0$. Это означает, что при идеальной связи точка движется по поверхности без трения. Конечно, этот вывод остается справедливым и при движении точки по линии. Условие (18.14) является естественным обобщением понятия идеальности связи для одной точки на случай n материальных точек, подчиненных h связям.

Ввиду фундаментального значения понятия идеальности связей мы укажем на три, часто встречающиеся на практике, идеальные связи.

1. Связь — жесткая неизменяемая система. Такая связь реализуется в абсолютно твердом теле, жестких, недеформируемых стержнях и т. п. Для примера рассмотрим две материальные точки, связанные жестким невесомым и нерастяжимым стержнем. Покажем, что такая связь идеальная.

Реакции стержня на материальные точки направлены по стержню, и $\mathbf{R}_B = -\mathbf{R}_A$ (рис. 18.8).

Из условия нерастяжимости стержня имеем

$$(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2 = (AB)^2 \quad (AB = \text{const}).$$

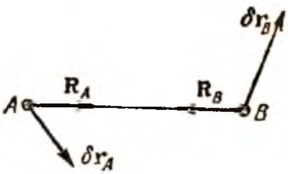


Рис. 18.8

Варьируя это уравнение связи, получим

$$(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)\cdot(\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_B) = 0,$$

т. е. векторы $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$ и $(\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_B)$ взаимно перпендикулярны.

Найдем сумму работ реакций связей на виртуальном перемещении точек. По определению имеем

$$\mathbf{R}_A\cdot\delta\mathbf{r}_A + \mathbf{R}_B\cdot\delta\mathbf{r}_B = \mathbf{R}_A\cdot\delta\mathbf{r}_A - \mathbf{R}_A\cdot\delta\mathbf{r}_B = \mathbf{R}_A\cdot(\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_B) = 0.$$

Последнее произведение равно нулю, так как вектор $\mathbf{R}_A$, совпадающий по направлению с вектором $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$, перпендикулярен вектору $(\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_B)$.

Таким образом, стержень, а следовательно, и внутренние связи абсолютно твердого тела представляют идеальные связи. Заметим, что в данном примере работа отдельных реакций на виртуальном перемещении не равна нулю, но их сумма равна нулю.

В заключение этого случая отметим одно свойство виртуальных перемещений точек твердого тела: проекции виртуальных перемещений точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой, т. е.

$$\text{пр}_{AB}\delta\mathbf{r}_A = \text{пр}_{AB}\delta\mathbf{r}_B. \tag{18.15}$$

Действительно, из ортогональности векторов $\overline{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ и $(\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_B)$ следует, что $\text{пр}_{AB}(\delta\mathbf{r}_A - \delta\mathbf{r}_B) = 0$; это равносильно (18.15).

2. Связь — шарнир без трения. Пусть рычаг укреплен шарнирно в неподвижной точке (рис. 18.9). При отсутствии трения виртуальная работа реакции шарнира O будет $\delta A = \mathbf{R}_O \cdot \delta\mathbf{r}_O$. Но точка O неподвижна, следовательно, ее виртуальное перемещение

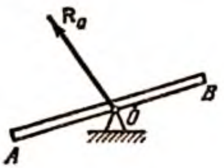


Рис. 18.9

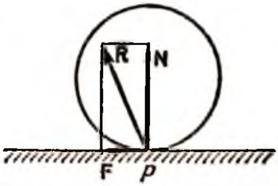


Рис. 18.10

$\delta\mathbf{r}_O$ равно нулю и $\delta A = 0$. Поэтому шарнир без трения представляет собой идеальную связь.

3. Связь при качении без скольжения. Пусть по абсолютно твердой поверхности катится без скольжения другое абсолютно твердое тело (рис. 18.10). Покажем, что такая связь идеальная. Действительно, так как оба тела абсолютно твердые, то трение качения отсутствует (см. том I, § 6.2) и виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_P$ точки P приложения реакции шероховатой поверхности равно нулю: $\delta\mathbf{r}_P = 0$. Отсюда следует, что работа $\delta A = \mathbf{R}\,\delta\mathbf{r}_P$ реакции связи $\mathbf{R}$ на виртуальном перемещении тела равна нулю.

§ 18.5. Принцип виртуальных перемещений

В этом параграфе мы будем изучать условия равновесия системы материальных точек. Прежде всего следует отметить, что слово «равновесие» приложимо скорее к силам, чем к материальным телам, и, строго говоря, оно не равнозначно слову «покой». Действительно, если мы говорим, что все силы, приложенные к свободной материальной точке, уравновешены, то это означает только то, что сумма сил равна нулю. Но из этого, конечно, не следует еще, что точка находится в покое — она может также двигаться равномерно и прямолинейно.

Для того чтобы материальная точка находилась в покое, условия, налагаемые на силы, необходимо дополнить, очевидно, требованием равенства нулю начальной скорости точки, причем совокупность этих условий на основании закона инерции будет и достаточна.

Однако по сложившейся многовековой традиции в динамике слово «равновесие» применяется не только к силам, но и к системе материальных точек; при этом под словами «равновесие системы материальных точек» понимается состояние покоя системы. При такой трактовке этих слов, учитывая сказанное ранее, можно сформулировать самые общие условия равновесия системы материальных точек, а именно: *для равновесия системы материальных точек необходимо и достаточно, чтобы суммы всех сил, действующих на каждую точку системы, и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю.* Если обозначить через $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{R}_k$ равнодействующие всех активных сил и реакций связей соответственно, приложенных к точке с номером k, то математически условие равновесия запишется следующим образом:

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k(0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{18.16}$$

Эти условия имеют один существенный недостаток — они требуют учета всех сил, включая, разумеется, и реакции связей, действующих на каждую точку системы. При такой общности эти условия, за редкими исключениями, не могут быть практически применены к исследованию равновесия материальной системы, но их можно использовать для доказательства других, более простых условий равновесия системы материальных точек.

В 1788 г. Лагранж, обобщая работы своих предшественников, сформулировал весьма удобный в приложениях принцип виртуальных перемещений, устанавливающий условия равновесия системы материальных точек с идеальными и стационарными связями. Многие годы это был именно принцип, т. е. положение, принимаемое без доказательства. В настоящее время предпочитают, пользуясь законами Ньютона и их следствиями, все условия этого принципа строго доказывать, иначе говоря, принцип стали рассматривать как теорему. Помня об анахронизме названия, мы сформулируем и приведем доказательство принципа виртуальных перемещений для частного случая, когда связи не только идеальные и стационарные, но и удерживающие *).

Теорема (принцип виртуальных перемещений). *Для того чтобы система материальных точек, подчиненная идеальным стационарным, голономным и удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении системы и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю.* Таким образом, нужно доказать, что для равновесия системы материальных точек необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k(0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{18.17}$$

*) Формулировку и доказательство принципа возможных перемещений для неудерживающих связей можно найти, например, в книге: Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.

Необходимость. Предположим, что система находится в равновесии. Следовательно, должны выполняться условия

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k(0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Из данного положения дадим системе виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_1, \ldots, \delta\mathbf{r}_n$. Умножим каждое из уравнений равновесия на $\delta\mathbf{r}_k$ и сложим их почленно:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0.$$

Так как связи идеальны, то последняя сумма равна нулю (см. (18.14)). Следовательно, при равновесии системы должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0,$$

доказывающее необходимость условий (18.17).

Достаточность. Для доказательства достаточности нужно показать, что при выполнении условий (18.17) система будет находиться в равновесии. Мы дадим два доказательства достаточности условий (18.17).

Первое доказательство основано на применении теоремы об изменении кинетической энергии. Предположим, что условия (18.17) выполнены, но, несмотря на это, система под действием приложенных к ней сил начала двигаться из состояния покоя. По условию теоремы все связи стационарны, поэтому действительное перемещение системы за время dt будет совпадать с одним из виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}_1, \ldots, \delta\mathbf{r}_n$.

На основании теоремы об изменении кинетической энергии сумма работ всех активных сил и реакций связей на этом перемещении будет положительна, так как при переходе из состояния покоя в движение система получит положительное приращение кинетической энергии. Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k > 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k > 0.$$

По условию теоремы связи идеальны, поэтому вторая сумма равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k > 0.$$

Несовместимость этого неравенства с принятым предположением (18.17) доказывает достаточность условий принципа виртуальных перемещений.

Второе доказательство основано на использовании условий (18.16). Установим предварительно, что если скорости всех точек равны нулю, то перемещения, пропорциональные ускорениям точек, являются виртуальными перемещениями системы. В самом деле, для действительного движения системы уравнения стационарных, голономных связей должны удовлетворяться тождественно по t:

$$f_i[x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ y_n(t),\ z_n(t)] = 0 \qquad (i = 1,\ \ldots,\ h).$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\dot{y}_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k}\dot{z}_k\right) = 0 \qquad (i = 1,\ \ldots,\ h). \tag{18.18}$$

Дифференцируя второй раз, найдем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\ddot{x}_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\ddot{y}_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k}\ddot{z}_k\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{x}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \dot{y}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial y_k} + \dot{z}_k\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial z_k}\right) = 0.$$

Так как скорости всех точек в данный момент времени равны нулю, то последняя сумма исчезает ($\dot{x}_k = \dot{y}_k = \dot{z}_k = 0$) и проекции ускорений удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\ddot{x}_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\ddot{y}_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k}\ddot{z}\right) = 0 \qquad (i = 1,\ \ldots,\ h). \tag{18.19}$$

Сравнивая эти уравнения с (18.13) убеждаемся в том, что если положить $\delta x_k = k_0\ddot{x}_k$, $\delta y_k = k_0\ddot{y}_k$, $\delta z_k = k_0\ddot{z}_k$, или $\delta\mathbf{r}_k = k_0\mathbf{w}_k$, то уравнения (18.13) будут удовлетворены, так как после сокращения на k_0 они просто перейдут в равенства (18.19).

Заметим, что доказанное утверждение имеет простой смысл: ускорения точек при равенстве нулю скоростей направлены по касательным к траекториям движения (это очевидно, так как при $v_k = 0$ нормальные ускорения $w_{kn} = v_k^2/\rho_k = 0$).

Теперь легко доказать достаточность условий (18.17). Запишем первое условие (18.17) вместе с условием идеальности связей (18.14):

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\mathbf{R}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0.$$

После сложения получим

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0.$$

Предположим, что при выполнении условий (18.17) движение началось и точки приобрели ускорения $\mathbf{w}_k$. Возьмем в качестве виртуального перемещения систему векторов, пропорциональных ускорениям точек $\delta\mathbf{r}_k = k_0\mathbf{w}_k$ (это можно сделать, так как по условию связи стационарны и голономны и $\mathbf{v}_k(0) = 0$). Тогда последнее равенство примет вид

$$k_0 \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k)\cdot \mathbf{w}_k = 0,$$

или, учитывая, что для каждой точки справедлив второй закон Ньютона $m_k\mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k$,

$$k_0 \sum_{k=1}^{n} m_k w_k^2 = 0.$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если все $\mathbf{w}_k = 0$. Следовательно,

$$m_k\mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Значит, условия равновесия (18.16) выполняются, что дает второе доказательство достаточности принципа виртуальных перемещений.

Принцип виртуальных перемещений широко применяется при различных технических расчетах. Прежде чем проиллюстрировать его на примерах, сделаем несколько замечаний общего характера.

1. Если есть неидеальные связи, то их реакции (например, силы трения) следует отнести к активным силам.

2. В тех случаях, когда требуется определить реакцию идеальной связи, нужно мысленно отбросить эту связь, а соответствующую реакцию рассматривать как активную силу.

Рис. 18.11

3. В некоторых случаях вместо виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}_k$ рассматривают виртуальные скорости $\mathbf{v}_k^*$, пропорциональные $\delta\mathbf{r}_k$. Действительно, если положить $\delta\mathbf{r}_k = k_0\mathbf{v}_k^*$, то в уравнениях (18.13) проекции δx_k, δy_k, δz_k вектора $\delta\mathbf{r}_k$ заменятся просто на проекции $\dot{x}_k^*$, $\dot{y}_k^*$, $\dot{z}_k^*$ вектора $\mathbf{v}_k^*$. При движении системы со стационарными связями действительные скорости $\mathbf{v}_k$ будут совпадать с одной из систем виртуальных скоростей $\mathbf{v}_k^*$.

Задача 18.1. Кривошипно-ползунный механизм (рис. 18.11) состоит из кривошипа OA, шатуна AB и поршня, на который действует сила $\mathbf{P}$. Известны длина кривошипа l, длина шатуна L, угол α между осью цилиндра и кривошипом OA. Пренебрегая трением и силами тяжести поршня, шатуна и кривошипа, определить момент пары сил M, приложенной к кривошипу OA, при котором механизм находится в равновесии.

Введем вспомогательный угол $\beta = \angle OBA$; тогда расстояние $OB = r$ можно вычислить по формуле

$$r = l\cos\alpha + L\cos\beta.$$

По теореме синусов имеем

$$\frac{\sin\beta}{l} = \frac{\sin\alpha}{L}, \qquad \text{или} \qquad \sin\beta = \frac{l}{L}\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$r = l\cos\alpha + L\sqrt{1-\mu^2\sin^2\alpha},$$

где $\mu = l/L$. Варьируя полученное соотношение, найдем

$$\delta r = -\left(l\sin\alpha + L\frac{\mu^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\alpha}}\right)\delta\alpha.$$

Знак «минус» показывает, что при увеличении угла α расстояние r уменьшается.

В соответствии с принципом виртуальных перемещений имеем

$$\delta A_P + \delta A_M = 0,$$

где δA_P и δA_M — работа на виртуальном перемещении системы силы **P** и пары сил с моментом M соответственно.

Работа пары сил равна произведению момента пары M на угол поворота кривошипа $\delta\alpha$. Следовательно,

$$\delta A_M = -M\,\delta\alpha.$$

Учитывая, что вектор $\delta\mathbf{r}$ при положительном $\delta\alpha$ направлен вниз и сила **P** также направлена вниз, получим

$$\delta A_P = P\cdot|\delta\mathbf{r}| = Pl\sin\alpha\left(1+\mu\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\alpha}}\right)\delta\alpha.$$

Применим теперь принцип виртуальных перемещений:

$$\left[Pl\sin\alpha\left(1+\mu\frac{\cos\alpha}{1-\mu^2\sin^2\alpha}\right)-M\right]\delta\alpha=0.$$

Так как $\delta\alpha$ можно выбрать произвольно, то квадратная скобка должна равняться нулю. Отсюда получаем значение искомого момента

$$M = Pl\sin\alpha\left(1+\mu\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\mu^4\sin^2\alpha}}\right).$$

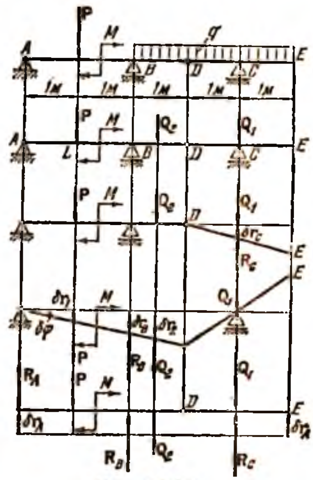


Рис. 18.12

Задача 18.2. Консольная балка AE состоит из двух сочлененных шарниром D балок (рис. 18.12, *а*). На балку действуют вертикальная сила $P = 16$ кН, равномерно распределенная нагрузка $q = 4$ кН/м и пара сил с моментом $M = 6$ кН·м. Размеры показаны на чертеже. Определить реакции опор A, B и C.

Заменим действие равномерно распределенной нагрузки силами $Q_1 = 2q = 8$ кН и $Q_2 = 1\cdot q = 4$ кН (рис. 18.12, *б*). Для определения реакции R_C освободим консоль DE от опоры C и заменим ее реакцией R_C, как указано на рис. 18.12, *в*. Сообщим теперь виртуальное перемещение точкам консоли DE. Так как консоль DE получила возможность поворачиваться вокруг шарнира D, то все виртуальные перемещения будут перпендикулярны к DC в исходном положении (см. пример 3 § 18.2 и рис. 18.7).

Используем теперь принцип виртуальных перемещений:

$$Q_1\cdot\delta\mathbf{r}_Q + R_C\cdot\delta\mathbf{r}_C = 0,$$

или

$$Q_1\cdot|\delta\mathbf{r}_C| - R_C\cdot|\delta\mathbf{r}_C| = 0.$$

Отсюда $R_C = Q_1 = 8$ кН.

Теперь освободим балку от опоры B (рис. 18.12, *г*), заменим ее реакцией R_B, дадим виртуальные перемещения точкам балки и подсчитаем работу на этом перемещении:

$$\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r}_1+\mathbf{R}_B\cdot\delta\mathbf{r}_B+\mathbf{Q}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2+M\,\delta\varphi=0,$$

или

$$P\,|\delta\mathbf{r}_1|-R_B\,|\delta\mathbf{r}_B|+Q_2\,|\delta\mathbf{r}_2|+M\,\delta\varphi=0.$$

Здесь $\delta\varphi$ — угол поворота балки AD вокруг оси A. Из рис. 18.12, *г* видно, что модули виртуальных перемещений пропорциональны расстояниям до оси вращения:

$$|\delta\mathbf{r}_1|=1\cdot\delta\varphi,\qquad |\delta\mathbf{r}_B|=2\delta\varphi,\qquad |\delta\mathbf{r}_2|=2{,}5\,\delta\varphi.$$

Следовательно,

$$(P-2R_B+2{,}5Q_2+M)\,\delta\varphi=0;$$

отсюда $R_B=\dfrac{P+2{,}5Q_2+M}{2}=21$ кН.

Освободим теперь все опоры, заменим их реакциями и сообщим одинаковые виртуальные перемещения вверх всем точкам балки (рис. 18.12, *д*). Тогда, пользуясь принципом виртуальных перемещений, получим $(R_A+R_B+R_C-Q_1-Q_2-P)\,|\delta r_A|=0$ и, следовательно, $R_A=Q_1+Q_2+P-R_B-R_C=-1$ кН.

Задача 18.3. К шарнирам B и C четырехзвенника $ABCD$ приложены две силы, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, перпендикулярные звеньям AB и CD соответственно. Считая силу P известной, определить силу Q при равновесии системы, если $\angle ABC=90°$, а $\angle BCD=120°$ (рис. 18.13). Массами стержней пренебречь.

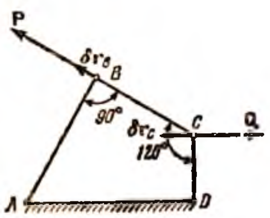


Рис. 18.13

Дадим системе виртуальное перемещение. Так как стержень AB может вращаться вокруг оси A, а стержень CD — вокруг оси D, то виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_B$ точки B перпендикулярно AB, а виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_C$ точки C перпендикулярно CD (см. рис. 18.13). Применяя принцип виртуальных перемещений, получим

$$P\cdot|\delta\mathbf{r}_B|-Q\cdot|\delta\mathbf{r}_C|=0.$$

Учтем теперь, что проекции виртуальных перемещений двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (см. равенство (18.15)). Для точек B и C будем иметь

$$|\delta\mathbf{r}_B|=|\delta\mathbf{r}_C|\cos 30°.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получим

$$P\,|\delta\mathbf{r}_C|\cos 30°-Q\,|\delta\mathbf{r}_C|=0.$$

Отсюда $Q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}P$.

Задача 18.4. К левой и правой частям трехшарнирной арки (рис. 18.14, *а*) приложены соответственно силы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Определить вертикальную составляющую реакцию шарнира B. Размеры указаны на рисунке.

Применяя принцип освобождаемости, заменим шарнир B шарниром, позволяющим точке B перемещаться по вертикали, и введем вертикальную составляющую реакции $\mathbf{Y}_B$ (рис. 18.14, *б*).

Виртуальное перемещение левой части арки осуществим поворотом вокруг неподвижной точки A. Виртуальное перемещение правой части арки можно осуществить путем вращения вокруг ее мгновенного центра скоростей. Поскольку направления виртуальных скоростей совпадают с направлениями виртуальных перемещений, то мгновенный центр находится как точка пересечения перпендикуляров к направлениям виртуальных перемещений (на рис. 18.14, *б* точка C_1).

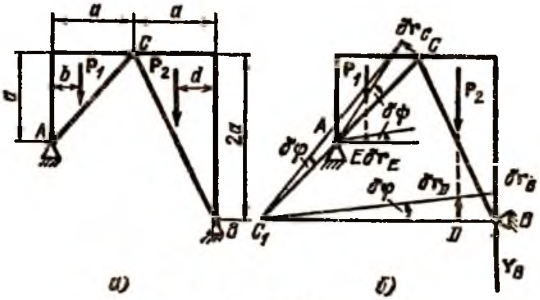


Рис. 18.14

Сообщим арке виртуальное перемещение, т. е. мысленно повернем левую часть на угол $\delta\psi$ вокруг точки A, а правую — на $\delta\varphi$ вокруг точки C_1.

Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\mathbf{Y}_B\cdot\delta\mathbf{r}_B+\mathbf{P}_2\cdot\delta\mathbf{r}_D+\mathbf{P}_1\cdot\delta\mathbf{r}_E=0,$$

но

$$|\delta\mathbf{r}_B|=3a\,\delta\varphi,\quad |\delta\mathbf{r}_D|=(3a-d)\,\delta\varphi,\quad |\delta\mathbf{r}_E|=b\,\delta\psi$$

и

$$|\delta\mathbf{r}_C|=a\sqrt{2}\,\delta\psi=2a\sqrt{2}\,\delta\varphi,\quad \text{т. е.}\quad \delta\psi=2\,\delta\varphi;$$

следовательно,

$$[Y_B3a-P_2(3a-d)-2bP_1]\,\delta\varphi=0,$$

отсюда

$$Y_B=\frac{2bP_1+(3a-d)\,P_2}{3a}.$$

Аналогично можно определить и другие составляющие реакций.

Читателю полезно решить последние три задачи с помощью обычных уравнений статики твердого тела и сравнить оба метода.

§ 18.6. Обобщенные координаты и обобщенные силы

При решении многих задач механики можно добиться существенного упрощения, если ввести в рассмотрение так называемые обобщенные координаты и соответствующие им обобщенные силы. Определению этих величин и посвящен этот параграф.

Рассмотрим материальную систему, состоящую из n материальных точек. В инерциальной системе отсчета $Oxyz$ положение каждой точки M_k определяется тремя координатами x_k, y_k, z_k, а положение всех точек — $3n$ декартовыми координатами.

Будем считать, что движение системы ограничено h голономными, идеальными и удерживающими связями

$$f_l(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (l = 1, \ldots, h). \tag{18.20}$$

Так как $3n$ координат x_k, y_k, z_k удовлетворяют h уравнениям связей, то они не являются независимыми. Очевидно, что *число независимых координат, определяющих положение системы, будет*

$$s = 3n - h. \tag{18.21}$$

В качестве независимых координат, определяющих положение системы, можно выбрать s из $3n$ декартовых координат, выразив остальные координаты с помощью уравнений связей. Однако такой способ выбора независимых координат не будет лучшим, так как он часто приводит к сложным зависимостям. Значительно удобнее ввести s каких-либо независимых параметров $q_1, \ldots, q_s$ (они называются *обобщенными координатами*), однозначно определяющих положение системы. По существу, не употребляя этого термина, мы уже неоднократно пользовались обобщенными координатами. Так, например, положение математического маятника определялось углом отклонения его от вертикали ($q = \varphi$), положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, определялось тремя углами Эйлера ($q_1 = \psi$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$), а положение твердого тела, совершающего плоское движение, определялось двумя декартовыми координатами полюса и одним углом поворота тела ($q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$).

В общем случае обобщенные координаты могут иметь различный геометрический и механический смысл. Ими могут быть линейные и угловые величины, а также параметры, имеющие размерность площади, объема; обобщенные координаты иногда содержат элементы силовых и иных физических характеристик системы.

Итак, пусть положение материальной системы определяется s независимыми обобщенными координатами *) $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Так как положение системы однозначно определяется обобщенными координатами, а каждая точка системы определяется ее радиусом-вектором $\mathbf{r}_k$, то последние можно выразить через обобщенные координаты и время:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \ldots, q_s, t) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{18.22}$$

Эти n векторных равенств эквивалентны $3n$ скалярным равенствам

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \ldots, q_s, t), \\ y_k &= y_k(q_1, \ldots, q_s, t), \quad (k = 1, \ldots, n). \\ z_k &= z_k(q_1, \ldots, q_s, t) \end{aligned}$$

*) Иногда вводят так называемые избыточные координаты. В этом случае число обобщенных координат будет больше числа $3n - h$. В настоящем курсе избыточные координаты не рассматриваются (см., например, Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, ч. II. — М.: Гостехиздат, 1955; Наука, 1983; Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, § 1.4, 7.11, 7.12).

Конечно, при подстановке этих выражений для x_k, y_k, z_k в уравнения связей (18.20) последние должны обратиться в тождества.

Заметим, что если связи стационарны, то всегда можно выбрать такие обобщенные координаты, при которых равенства (18.22) не будут содержать время t явно. Обобщенные координаты удобны тем, что они, во-первых, независимы и, во-вторых, их введение освобождает нас от необходимости учитывать уравнения голономных связей. Последние удовлетворяются теперь автоматически по самому смыслу выбора обобщенных координат.

Если система голономна и число независимых координат, определяющих ее положение, равно s, то столько же будет и независимых вариаций координат, характеризующих виртуальное перемещение системы. *Число независимых вариаций координат, определяющих положение системы, называется числом степеней свободы системы.* Для голономной системы, на которую наложено h связей (18.20), число степеней свободы равно числу независимых координат, определяющих ее положение. Очевидно, что для голономной системы в качестве независимых вариаций координат лучше всего выбрать вариации независимых обобщенных координат $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$.

Для неголономной системы число степеней свободы не будет равно числу независимых координат, определяющих положение системы. Действительно, пусть, кроме h голономных связей, движение системы подчинено еще m неголономным или кинематическим связям, уравнения которых содержат неинтегрируемым образом производные координат по времени (или их дифференциалы и дифференциал времени dt). В большинстве случаев, встречающихся в практике, неголономные связи содержат производные координат или их дифференциалы линейно. В этом случае движение системы будет подчинено m линейным зависимостям вида

$$\alpha_{r1}\, dq_1 + \ldots + \alpha_{rs}\, dq_s + \alpha_r\, dt = 0 \quad (r = 1, \ldots, m), \tag{18.23}$$

где α_{rk} и α_r — некоторые функции $q_1, \ldots, q_s$ и t. Заметим, что при стационарных неголономных связях $\alpha_r = 0$ и ни одна из функций α_{rk} не будет зависеть от времени t явно.

Условие неинтегрируемости уравнений неголономных связей (18.23) является существенным, так как в противном случае после интегрирования соответствующего уравнения получилась бы конечная зависимость между $q_1, \ldots, q_s$ и t, т. е. голономная, не кинематическая связь. В этом случае координаты $q_1, \ldots, q_s$ не были бы независимыми и их число можно было бы уменьшить. Таким образом, неголономные связи налагают ограничения на свободу движения системы и одновременно не позволяют уменьшить число параметров, определяющих положение системы.

В силу неголономных связей вариации обобщенных координат $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$, определяющих виртуальное перемещение системы, будут подчинены m условиям

$$\alpha_{r1}\delta q_1 + \ldots + \alpha_{rs}\delta q_s = 0 \quad (r = 1, \ldots, m),$$

которые получаются из (18.23) заменой dq_k на δq_k при $dt = 0$ (виртуальные перемещения осуществляются при фиксированном времени).

Из последних равенств следует, что число независимых вариаций координат $q_1, \ldots, q_s$ будет меньше числа координат и равно $s - m$. Таким образом, *число степеней свободы неголономной системы равно* $\nu = s - m$, *где* s — *число независимых координат, определяющих положение системы, а* m — *число неголономных связей.* Заметим, что число неголономных связей называется *степенью неголономности.*

Для конька, движущегося по поверхности льда (пример 5 § 18.2, рис. 18.2), число независимых координат, определяющих его положение, равно трем ($s = 3$), степень неголономности равна единице ($m = 1$ — одна неголономная связь (18.1)), число степеней свободы равно двум ($\nu = 3 - 1 = 2$).

Для шара, катящегося без скольжения по плоскости (пример 6, рис. 18.3), число независимых координат, определяющих его положение, равно пяти ($s = 5$), степень неголономности равна двум ($m = 2$ — две неголономные связи (18.4)), число степеней свободы равно трем ($\nu = s - m = 3$).

Перейдем теперь к определению обобщенных сил. Вычислим работу δA всех активных сил на виртуальном перемещении системы (если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k. \tag{18.24}$$

Пользуясь равенством (18.22), выразим вариацию $\delta \mathbf{r}_k$ радиуса-вектора $\mathbf{r}_k$ через вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ обобщенных координат:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{18.25}$$

При вычислении $\delta \mathbf{r}_k$ необходимо иметь в виду, что виртуальное перемещение системы определяется при фиксированном времени t.

Проекции вектора $\dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$ на оси неподвижных декартовых координат равны, конечно, производным от соответствующих координат точки:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)_x = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)_y = \frac{\partial y_k}{\partial q_j}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right)_z = \frac{\partial z_k}{\partial q_j}. \tag{18.26}$$

Подставим $\delta \mathbf{r}_k$ из равенства (18.25) в формулу (18.24):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

или, меняя порядок суммирования, получим

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Введем обозначения

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{18.27}$$

Тогда последнее равенство примет вид

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_s \delta q_s. \tag{18.28}$$

Множитель Q_j при вариации обобщенной координаты δq_j в выражении для виртуальной работы активных сил системы называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате q_j.

Обобщенная сила Q_j в общем случае не является силой в обычном понимании этого слова. Ее размерность зависит от размерности соответствующей ей обобщенной координаты q_j и определяется равенством $[Q_j] = [A]/[q_j]$, где $[A]$ — размерность работы.

Если обобщенная координата измеряется линейными величинами, то размерность обобщенной силы совпадает с размерностью силы; если же обобщенная координата представляет угол, то размерность обобщенной силы совпадает с размерностью момента, и т. д.

Рассмотрим способы вычисления обобщенных сил.

1. Обобщенные силы можно вычислить по формуле (18.27), которую удобнее представить в следующем виде (использовано равенство, выражающее скалярное произведение двух векторов через их проекции):

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \tag{18.29}$$

Здесь F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проекции силы $\mathbf{F}_k$ на оси декартовой системы координат.

2. Для вычисления обобщенной силы, например Q_1, дадим такое виртуальное перемещение, при котором все вариации обобщенных координат, кроме δq_1, равны нулю:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_s = 0.$$

Вычислим на этом перемещении виртуальную работу δA_1 всех активных сил, приложенных к системе. На основании формулы (18.28) будем иметь

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1.$$

Множитель при вариации δq_1 равен первой обобщенной силе.

Аналогичным образом вычисляются остальные обобщенные силы.

3. Третий способ применим только для консервативных сил. Если силы консервативны, то будут справедливы равенства

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k},$$

где П — потенциальная энергия системы.

Внося эти выражения для F_{kx}, F_{ky} и F_{kz} в формулу (18.29), получим

$$Q_j = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right),$$

или, учитывая, что потенциальная энергия П зависит от обобщенных координат сложным образом через декартовы координаты x_k, y_k и z_k,

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{18.30}$$

Таким образом, *обобщенная сила консервативной системы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, взятой с обратным знаком.*

Прежде чем перейти к примерам, еще раз напомним, что при вычислении обобщенных сил учитываются только активные силы, приложенные к системе. Реакции идеальных связей не учитываются (их работа равна нулю); если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам.

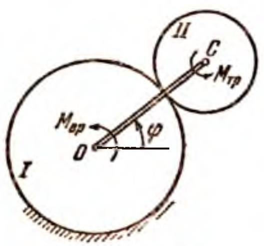


Рис. 18.15

Задача 18.5. В эпициклическом механизме кривошип OC вращается вокруг оси, проходящей через центр O неподвижной шестерни I радиуса R, и приводит в движение сателлит II радиуса r (рис. 18.15). К кривошипу приложен вращающий момент $M_{вр}$. Силы трения создают на оси C сателлита момент $M_{тр}$. Ввести обобщенную координату и определить соответствующую обобщенную силу, считая, что механизм расположен в горизонтальной плоскости. Положение движущихся частей механизма вполне определяется углом φ поворота кривошипа вокруг оси O. Поэтому эпициклический механизм имеет одну степень свободы. За обобщенную координату q примем угол φ.

На механизм действуют следующие силы: сила тяжести P и силы, создающие вращающий момент $M_{вр}$; к ним нужно присоединить силы трения на оси вращения C сателлита, момент которых равен $M_{тр}$ (реакции идеальных связей не учитываем). Приложенные к системе силы (за исключением силы тяжести) не консервативны, поэтому обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ, определим вторым способом.

Дадим кривошипу виртуальное перемещение δφ и вычислим работу всех перечисленных сил на этом перемещении:

$$\delta A = \delta A\,(P) + \delta A\,(M_{вр}) + \delta A\,(M_{тр}).$$

Виртуальная работа $\delta A\ (P)$ силы тяжести равна нулю (так как по условию механизм расположен в горизонтальной плоскости и, следовательно, перемещение точки приложения силы тяжести перпендикулярно самой силе).

Виртуальная работа вращающего момента $M_{вр}$ при повороте кривошипа на угол $\delta\varphi$ будет

$$\delta A\ (M_{вр}) = M_{вр}\delta\varphi.$$

Работа силы трения на оси вращения сателлита определяется равенством

$$\delta A\ (M_{тр}) = -M_{тр}\delta\varphi_r,$$

где $\delta\varphi_r$ — относительное угловое перемещение сателлита.

Очевидно, что между относительным угловым перемещением $\delta\varphi_r$ сателлита и угловым перемещением $\delta\varphi$ кривошипа имеется простая связь:

$$\delta\varphi_r = \frac{R}{r}\,\delta\varphi.$$

Подставляя это выражение для $\delta\varphi_r$ в предыдущее равенство, получим

$$\delta A\ (M_{тр}) = -\frac{R}{r}\,M_{тр}\delta\varphi.$$

Собирая все члены, найдем виртуальную работу δA сил, приложенных к эпициклическому механизму:

$$\delta A = \left(M_{вр} - \frac{R}{r}\,M_{тр}\right)\delta\varphi.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi$ обобщенной координаты φ равен обобщенной силе

$$Q_\varphi = M_{вр} - \frac{R}{r}\,M_{тр}. \qquad (18.31)$$

Таково значение обобщенной силы, если за обобщенную координату принять угол поворота кривошипа. Заметим, что полученное выражение для обобщенной силы Q_φ справедливо как для постоянных, так и для переменных моментов $M_{вр}$ и $M_{тр}$.

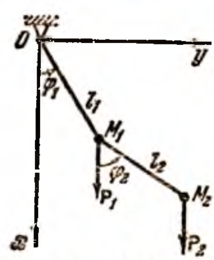


Рис. 18.16

Задача 18.6. Двойной математический маятник (рис. 18.16) состоит из двух невесомых стержней длины l_1 и l_2, на концах которых укреплены материальные точки M_1 и M_2 массы m_1 и m_2 соответственно. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O, а второй — вокруг горизонтальной оси, связанной с первой точкой. Ввести обобщенные координаты и вычислить обобщенные силы.

При такой конструкции вся система движется в вертикальной плоскости, которую мы примем за плоскость xy (ось z направим перпендикулярно к плоскости чертежа). Положение двойного математического маятника вполне определяется двумя углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали. Следовательно, система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты q_1 и q_2 примем углы φ_1 и φ_2. Обобщенные силы вычислим тремя способами.

Первый способ. Найдем проекции сил $\mathbf{P}_1 = m_1\mathbf{g}$, $\mathbf{P}_2 = m_2\mathbf{g}$ и координаты точек их приложения

$$P_{1x} = m_1 g, \quad P_{1y} = 0, \quad P_{1z} = 0,$$
$$P_{2x} = m_2 g, \quad P_{2y} = 0, \quad P_{2z} = 0,$$
$$x_1 = l_1\cos\varphi_1, \quad x_2 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2,$$
$$y_1 = l_1\sin\varphi_1, \quad y_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2,$$
$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Обобщенные силы найдем по формуле (18.29), написав ее в развернутом виде для каждой из величин Q_1 и Q_2 (q_1 и q_2 заменены на φ_1 и φ_2):

$$Q_1 = P_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial\varphi_1} + P_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial\varphi_1} + P_{1z}\frac{\partial z_1}{\partial\varphi_1} + P_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_1} + P_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial\varphi_1} + P_{2z}\frac{\partial z_2}{\partial\varphi_1},$$

$$Q_2 = P_{1x}\frac{\partial x_1}{\partial\varphi_2} + P_{1y}\frac{\partial y_1}{\partial\varphi_2} + P_{1z}\frac{\partial z_1}{\partial\varphi_2} + P_{2x}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_2} + P_{2y}\frac{\partial y_2}{\partial\varphi_2} + P_{2z}\frac{\partial z_2}{\partial\varphi_2}.$$

Подставляя значения проекций сил и координат точек их приложения, получим

$$Q_1 = -m_1gl_1\sin\varphi_1 - m_2gl_1\sin\varphi_1 = -(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi_1,$$

$$Q_2 = -m_2gl_2\sin\varphi_2.$$

Второй способ. Вычислим сначала обобщенную силу Q_2. Сообщим системе такое виртуальное перемещение, при котором угол φ_1 останется без изменения, а угол φ_2 получит приращение $\delta\varphi_2$ (рис. 18.17). При таком перемещении системы работу будет производить только одна сила $\mathbf{P}_2$ (точка приложения силы $\mathbf{P}_1$ осталась в прежнем положении).

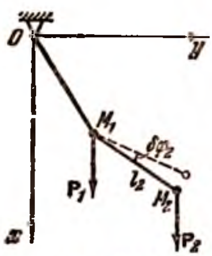


Рис. 18.17

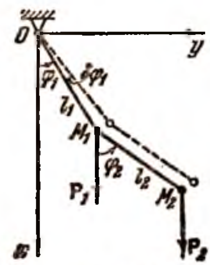


Рис. 18.18

Работу δA_2 силы $\mathbf{P}_2$ на виртуальном перемещении $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$ вычислим как работу силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси M_1. Момент силы $\mathbf{P}_2$ относительно оси вращения второго стержня равен $-P_2l_2\sin\varphi_2 = -m_2gl_2\sin\varphi_2$. Поэтому

$$\delta A_2 = -m_2gl_2\sin\varphi_2\,\delta\varphi_2.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi_2$ равен обобщенной силе

$$Q_2 = -m_2gl_2\sin\varphi_2.$$

Перейдем к вычислению обобщенной силы Q_1. Для этого дадим системе виртуальное перемещение $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ (рис. 18.18). Работу силы $\mathbf{P}_1$ вычислим по тому же правилу: момент силы $\mathbf{P}_1$ относительно оси вращения первого стержня равен $-m_1gl_1\sin\varphi_1$. Следовательно, работа этой силы на виртуальном перемещении $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ равна $-m_1gl_1\sin\varphi_1\,\delta\varphi_1$.

Перемещения точек M_1 и M_2 одинаковы (так как при неизменном угле φ_2 второй стержень перемещается поступательно). Поэтому виртуальная работа силы $\mathbf{P}_2$ получится из предыдущего выражения заменой m_1 на m_2, т. е. равна $-m_2gl_1\sin\varphi_1\,\delta\varphi_1$.

Сумма работ сил $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ на этом виртуальном перемещении будет иметь вид

$$\delta A_1 = -m_1gl_1\sin\varphi_1\,\delta\varphi_1 - m_2gl_1\sin\varphi_1\,\delta\varphi_1,$$

или

$$\delta A_1 = -(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi_1\,\delta\varphi_1.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi_1$ равен обобщенной силе, соответствующей обобщенной координате φ_1:

$$Q_1 = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \sin \varphi_1.$$

Третий способ. Активные силы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ консервативны. Найдем потенциальную энергию П, вычислив ее как работу сил $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ при перемещении системы из данного положения в горизонтальное:

$$\Pi = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g\,(l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2),$$

или

$$\Pi = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \tag{18.32}$$

Обобщенные силы Q_1 и Q_2 найдем теперь по формуле (18.30):

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \qquad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$Q_1 = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \sin \varphi_1, \qquad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Из самого определения видно, что обобщенные силы зависят не только от структуры системы и приложенных к ней активных сил, но также и от выбора обобщенных координат. Покажем это на примере двойного математического маятника.

Выберем в качестве обобщенных координат углы ψ_1 и ψ_2, как это показано на рис. 18.19. Тогда потенциальная энергия системы определится равенством

$$\Pi = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \cos \psi_1 - m_2 g l_2 \cos (\psi_1 + \psi_2).$$

Обобщенные силы вычислим по формуле (18.30):

$$Q_{\psi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_1}, \qquad Q_{\psi_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_2}.$$

В результате дифференцирования получим

$$Q_{\psi_1} = -(m_1 + m_2)\, g l_1 \sin \psi_1 - m_2 g l_2 \sin (\psi_1 + \psi_2),$$

$$Q_{\psi_2} = -m_2 g l_2 \sin (\psi_1 + \psi_2).$$

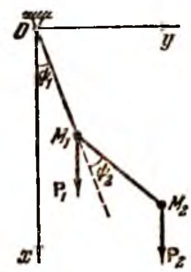


Рис. 18.19

Как и следовало ожидать, эти выражения для обобщенных сил отличаются от Q_1 и Q_2.

Из рассмотренных примеров видно, что наиболее универсальным методом определения обобщенных сил является второй метод, основанный на вычислении элементарной работы, но он не всегда наиболее прост.

§ 18.7. Условия равновесия в обобщенных координатах

Согласно принципу виртуальных перемещений для равновесия материальной системы с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы при $\mathbf{v}_k(0) = 0$ суммарная работа всех активных сил, приложенных к системе, на любом виртуальном перемещении равнялась нулю:

$$\delta A = 0.$$

Будем определять положение системы обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_s$. Тогда последнее уравнение согласно формуле (18.28) примет вид

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_s\delta q_s = 0. \qquad (18.33)$$

Так как обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$ независимы и, следовательно, их вариации $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ при голономных связях произвольны, то из последнего уравнения следует, что все обобщенные силы $Q_1, \ldots, Q_s$ равны нулю:

$$Q_1 = 0, \ldots, Q_s = 0. \qquad (18.34)$$

Действительно, докажем, например, что из равенства (18.33) следует $Q_s = 0$. Для этого возьмем такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_1 = \ldots = \delta q_{s-1} = 0$, $\delta q_s \neq 0$. Подставляя эти значения для вариаций обобщенных координат в равенство (18.33), получим $Q_s\delta q_s = 0$. По условию $\delta q_s \neq 0$, следовательно, $Q_s = 0$. Аналогично устанавливаются остальные уравнения (18.34).

Уравнения (18.34) являются искомыми: *для равновесия механической системы с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы системы равнялись нулю* (начальные скорости всех точек считаем равными нулю).

Если силы, действующие на систему, консервативны, то согласно равенствам (18.30) уравнения (18.34) примут вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \qquad (18.35)$$

Рассмотрим пример.

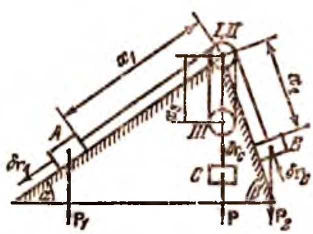


Рис. 18.20

Задача 18.7. Два груза A и B, находящиеся на гладких наклонных плоскостях, удерживают в равновесии груз C силы тяжести P при помощи троса, перекинутого через два соосных блока I и II и свободный блок III (рис. 18.20). Найти силы тяжести грузов P_1 и P_2, если наклонные плоскости составляют с горизонтом углы α и β. Трением и массой блоков и троса пренебречь.

Нерастяжимый трос представляет собой голономную и стационарную связь, уравнение которой можно записать в виде

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = a. \qquad (18.36)$$

Следовательно, система имеет две степени свободы. Примем x_1 и x_2 за обобщенные координаты. Варьируя уравнение связи (18.36), получим

$$\delta x_1 + \delta x_2 + 2\delta x_3 = 0;$$

отсюда

$$\delta x_3 = -{}^1/_2\,(\delta x_1 + \delta x_2).$$

Сообщим грузам A и B виртуальные перемещения, указанные на чертеже, вычислим работу сил тяжести $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}$ на этом перемещении и в соответствии с принципом виртуальных перемещений приравняем ее нулю:

$$\mathbf{P}_1\cdot\delta\mathbf{r}_A + \mathbf{P}_2\cdot\delta\mathbf{r}_B + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r}_C = 0,$$

или

$$P_1|\delta \mathbf{r}_A|\sin\alpha+P_2|\delta \mathbf{r}_B|\sin\beta-P|\delta \mathbf{r}_C|=0.$$

Имеем

$$|\delta \mathbf{r}_A|=\delta x_1,\quad |\delta \mathbf{r}_B|=\delta x_2,\quad |\delta \mathbf{r}_C|=|\delta x_3|=1/2\,(\delta x_1+\delta x_2).$$

Подставляя в предыдущее равенство и группируя члены, получим

$$\left(P_1\sin\alpha-\frac{P}{2}\right)\delta x_1+\left(P_2\sin\beta-\frac{P}{2}\right)\delta x_2=0.$$

Так как δx_1 и δx_2 независимы, то остается приравнять нулю коэффициенты (обобщенные силы) при них:

$$Q_1=P_1\sin\alpha-\frac{P}{2}=0,\qquad P_1=\frac{P}{2\sin\alpha},$$

$$Q_2=P_2\sin\beta-\frac{P}{2}=0,\qquad P_2=\frac{P}{2\sin\beta}. \tag{18.37}$$

Эту задачу можно решить, воспользовавшись консервативностью действующих на систему сил (сил тяжести).

Составим выражение для потенциальной энергии системы. Для этого вычислим работу, производимую силами тяжести при перемещении системы из данного положения в положение, когда $x_1=0$, $x_2=0$:

$$\Pi=-P_1x_1\sin\alpha-P_2x_2\sin\beta+\left(\frac{a}{2}-x_3\right)P.$$

Заменяя x_3 из формулы (18.36), получим

$$\Pi=-P_1x_1\sin\alpha-P_2x_2\sin\beta+P\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Условия равновесия имеют вид (18.35):

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}=-P_1\sin\alpha+\frac{P}{2}=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial x_2}=-P_2\sin\beta+\frac{P}{2}=0.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (18.37).

Глава XIX

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

§ 19.1. Общее уравнение динамики

Рассмотрим систему n материальных точек, движение которой ограничено h удерживающими идеальными и голономными связями. Воспользуемся принципом освобождаемости и заменим все связи их реакциями. Обозначим через $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{R}_k$ соответственно равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке M_k. Рассматривая точку M_k как свободную, движущуюся под действием сил $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{R}_k$, применим к ней второй закон Ньютона:

$$m_k\mathbf{w}_k=\mathbf{F}_k+\mathbf{R}_k,$$

или

$$\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{w}_k + \mathbf{R}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{19.1}$$

Мысленно зафиксируем время t и дадим системе виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Умножим каждое уравнение (19.1) скалярно на $\delta\mathbf{r}_k$ и сложим их:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{w}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0.$$

По определению идеальных связей последняя сумма равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{w}_k)\cdot\delta\mathbf{r}_k = 0. \tag{19.2}$$

Это уравнение, называемое *общим уравнением динамики*, может быть прочитано следующим образом: при движении материальной системы с идеальными и удерживающими связями работа всех активных сил $\mathbf{F}_k$ и сил инерции $-m_k\mathbf{w}_k$ на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

Если связи стационарны, то общее уравнение динамики представляет собой следствие принципа виртуальных перемещений и принципа Даламбера.

Аналогично принципу виртуальных перемещений, общее уравнение динамики (19.2) может быть непосредственно использовано для решения различных конкретных задач. Рассмотрим пример.

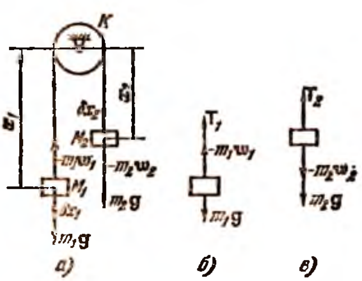


Рис. 19.1

Задача 19.1. Два тела M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 связаны между собой абсолютно гибкой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок K (рис. 19.1, *а*). Пренебрегая массой нити и блока, а также трением, определить закон движения грузов.

Для решения этой задачи с помощью общего уравнения динамики изобразим на рисунке все активные силы (силы тяжести $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$) и силы инерции. Предположим, что тело M_1 имеет ускорение $\mathbf{w}_1$, направленное вниз. Тогда сила инерции $-m_1\mathbf{w}_1$ первого груза будет направлена вверх. Так как нить нерастяжима, то уравнение связи имеет вид (см. рис. 19.1, *а*) $x_1 + x_2 = \mathrm{const}$. Дифференцируя два раза по времени, получим $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$, или $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Это означает, что ускорение $\mathbf{w}_2$ второго груза равно по модулю ускорению первого груза, но направлено в противоположную сторону, т. е. вверх. Тогда сила инерции второго груза будет направлена вниз (см. рис. 19.1, *а*), а ее модуль равен

$$m_2w_2 = m_2w_1 = m_2w,$$

где w — общее значение модуля ускорений грузов.

Дадим системе виртуальное перемещение. Варьируя уравнение связей, получим $\delta x_1 + \delta x_2 = 0$; отсюда $\delta x_2 = -\delta x_1$.

Вычислим работу всех активных сил и сил инерции на этом виртуальном перемещении и приравняем ее нулю:

$$(m_1 g - m_1 w_1)\,\delta x_1 + (m_2 g + m_2 w_2)\,\delta x_2 = 0.$$

Принимая во внимание, что $\delta x_2 = -\delta x_1$ и $w_2 = w_1 = w$, получим

$$m_1 (g - w)\,\delta x_1 - m_2 (g + w)\,\delta x_1 = 0.$$

Сокращая это уравнение на δx_1 и решая полученное уравнение относительно w, найдем ускорение системы

$$w = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g.$$

Применяя к каждому телу принцип Даламбера (рис. 19.1, *б* и *в*) и учитывая последнее равенство, легко получим, что натяжения нити в обеих ветвях одинаковы ($T_1 = T_2$). Это доказывает сделанное без доказательства соответствующее утверждение в задаче 7.1 (стр. 158).

§ 19.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Общее уравнение динамики (19.2) дает возможность составлять дифференциальные уравнения движения, не содержащие реакции идеальных связей. Для сравнительно простых систем непосредственное применение этого уравнения вполне оправдано, однако в более сложных случаях использование общего уравнения динамики приводит, как правило, к относительно сложным преобразованиям. Поэтому значительно удобнее пользоваться не общим уравнением динамики (19.2), а вытекающими из него уравнениями Лагранжа второго рода, в которых основные трудности преобразования преодолены в общем виде.

Для вывода этих уравнений воспользуемся общим уравнением динамики (19.2):

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{F}_k - m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

Подставим в это уравнение значение вариации $\delta \mathbf{r}_k$ радиуса-вектора из равенства (18.25):

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{F}_k - m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\right) \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\,\delta q_j = 0.$$

Умножим это уравнение на -1, изменим порядок суммирования и разобьем сумму на две части:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} - \mathbf{F}_k\right) \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\,\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} \left(m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} - \mathbf{F}_k\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\,\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left[\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right] \delta q_j = 0.$$

Пользуясь выражением для обобщенных сил (18.27), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0. \tag{19.3}$$

Первый член, стоящий под знаком суммы, можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_k\mathbf{v}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right) - m_k\mathbf{v}_k\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}, \tag{19.4}$$

в чем легко убедиться простой проверкой, применив правило дифференцирования произведения.

Найдем скорость $\mathbf{v}_k$ как производную радиуса-вектора $\mathbf{r}_k$ по времени, учтя при этом, что время t входит в выражение (18.22) не только явным образом, но и через обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$:

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}\dot q_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot q_j + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\dot q_s + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}. \tag{19.5}$$

Производная обобщенной координаты по времени $\dot q = dq/dt$ называется *обобщенной скоростью.*

Дифференцируя обе части равенства (19.5) частным образом по обобщенной скорости, получим тождество

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot q_j}. \tag{19.6}$$

Составим теперь частную производную скорости $\mathbf{v}_k$ по обобщенной координате q_j, учитывая, что обобщенные координаты входят в правую часть равенства (19.5) через коэффициенты при обобщенных скоростях:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_1\,\partial q_j}\dot q_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_s\,\partial q_j}\dot q_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial t\,\partial q_j}.$$

Частная производная $\partial\mathbf{r}_k/\partial q_j$ зависит от времени t явно и через обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$. Поэтому ее полная производная по времени равна

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j\,\partial q_1}\dot q_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j\,\partial q_s}\dot q_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j\,\partial t}.$$

Сравнивая оба выражения и учитывая, что смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j}. \tag{19.7}$$

Заменим в правой части равенства (19.4) частную производную $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$ ее выражением (19.6), а производную по времени $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$ ее выражением (19.7)

$$m_k\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_k\mathbf{v}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot q_j}\right) - m_k\mathbf{v}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j}.$$

Замечая, что

$$m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right), \quad m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right),$$

приведем последнее равенство к виду

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right).$$

Теперь уравнение (19.3) можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right)\right] - Q_j\right\}\delta q_j = 0,$$

или, разбивая сумму по k на две части и вынося знак производной за знак суммы,

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} - Q_j\right\}\delta q_j = 0.$$

По определению

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} = T,$$

где T — кинетическая энергия системы. Поэтому общему уравнению динамики можно придать вид

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0.$$

Так как обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$ независимы и, следовательно, их вариации $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ при голономных связях произвольны, то из этого уравнения следует, что все скобки равны нулю (для доказательства достаточно повторить рассуждения, с помощью которых из равенства (18.33) были получены уравнения (18.34)):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{19.8}$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах, или, как принято их называть, *уравнения Лагранжа второго рода;* число уравнений равно числу степеней свободы *).

---

*) Уравнения (19.8) составлены для случая, когда число обобщенных координат равно числу степеней свободы. В тех случаях, когда имеются избыточные обобщенные координаты, форма уравнений Лагранжа усложняется (см. литературу, приведенную в примечании на стр. 380).

Эти уравнения представляют собой систему s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат.

Если силы, действующие на материальную систему, потенциальные, то в соответствии с формулой (18.30) уравнения (19.8) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{19.9}$$

Если теперь ввести в рассмотрение функцию Лагранжа $L=T-\Pi$ и учесть, что $\partial\Pi/\partial\dot{q}_j\equiv 0$, то получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{19.10}$$

Уравнения (19.10) являются уравнениями Лагранжа второго рода для случая потенциальных сил.

§ 19.3. Задачи на составление уравнений Лагранжа второго рода

Прежде чем рассмотреть примеры на составление уравнений Лагранжа, сделаем несколько рекомендаций, вытекающих непосредственно из самой формы уравнений (19.8) и способа введения обобщенных координат.

Для составления уравнений Лагранжа второго рода нужно:

1) изобразить на чертеже все активные силы, действующие на систему; реакции идеальных связей изображать не следует; если имеются силы трения, то их следует присоединить к активным силам;

2) определить число степеней свободы и ввести обобщенные координаты;

3) вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты и скорости;

4) определить потенциальную энергию системы, если силы потенциальные;

5) найти обобщенные силы системы;

6) выполнить указанные в уравнениях Лагранжа (19.8) или (19.10) действия.

Задача 19.2. Тонкий однородный стержень длиной l имеет на концах ползуны A и B, которые скользят под действием силы тяжести стержня по направляющим OD и OE. Направляющие образуют прямой угол DOE, расположенный в вертикальной плоскости (рис. 19.2). Пренебрегая массой ползунов и силами трения, составить дифференциальное уравнение движения стержня и найти его угловую скорость, если направляющая OE горизонтальна.

Стержень имеет одну степень свободы, его положение будем определять одной обобщенной координатой — углом φ. На рис. 19.2 изображена только активная сила — сила тяжести $m\mathbf{g}$; реакции опор $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$ изображать не следует, так как они не войдут в уравнение Лагранжа.

Кинетическую энергию T стержня вычислим по теореме Кёнига:

$$T = {}^1/_2 m v_C^2 + {}^1/_2 I_C \dot\varphi^2,$$

где m — масса стержня, v_C — скорость его центра масс C, $I_C = {}^1/_{12} ml^2$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости движения.

Для вычисления скорости центра масс C найдем его координаты (см. рис. 19.2)

$$x_C = {}^1/_2 l \sin\varphi, \qquad y_C = {}^1/_2 l \cos\varphi.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot x_C = {}^1/_2 l \dot\varphi \cos\varphi, \qquad \dot y_C = -{}^1/_2 l \dot\varphi \sin\varphi.$$

Отсюда

$$v_C^2 = \dot x_C^2 + \dot y_C^2 = {}^1/_4 l^2 \dot\varphi^2.$$

Внося значения для v_C^2 и I_C в выражение для кинетической энергии стержня, найдем

$$T = {}^1/_2 m \frac{l^2}{4} \dot\varphi^2 + {}^1/_2\,{}^1/_{12} ml^2 \dot\varphi^2,$$

или

$$T = {}^1/_6 ml^2 \dot\varphi^2.$$

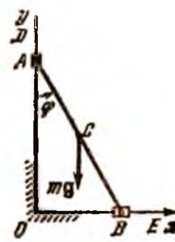


Рис. 19.2

Перейдем к вычислению обобщенной силы. Для этого найдем выражение потенциальной энергии системы, считая, что при горизонтальном положении стержня она принимает нулевое значение:

$$\Pi = {}^1/_2 mgl \cos\varphi.$$

Пользуясь формулой (18.30), определим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} mgl \sin\varphi.$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{1}{3} ml^2 \dot\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} ml^2 \dot\varphi\right) = \frac{1}{3} ml^2 \ddot\varphi.$$

Так как кинетическая энергия T от угла φ не зависит, то $\partial T/\partial\varphi = 0$. Внося полученные выражения в уравнение Лагранжа, получим

$${}^1/_3 ml^2 \ddot\varphi = {}^1/_2 mgl \sin\varphi,$$

или,

$$\ddot\varphi = \frac{3g}{2l} \sin\varphi. \qquad (19.11)$$

Это — дифференциальное уравнение движения стержня, полученное вторым методом Лагранжа.

Найдем обобщенную скорость $\dot{\varphi}$. Для этого умножим обе части уравнения (19.11) на $d\varphi$:

$$\ddot{\varphi}\, d\varphi = \frac{3g}{2l} \sin\varphi\, d\varphi.$$

Имеем

$$\ddot{\varphi}\, d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = d\dot{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = d\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right).$$

Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

$$d\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right) = -\frac{3g}{2l} d\cos\varphi.$$

Интегрируя и умножая обе части уравнения на 2, найдем

$$\dot{\varphi}^2 = -3\frac{g}{l}\cos\varphi + C.$$

Пусть стержень начинает движение из состояния покоя, составляя с вертикалью в начальный момент угол φ_0. Тогда при $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = 0$ и, следовательно, $C = 3\frac{g}{l}\cos\varphi_0$. Подставляя это значение для C в последнее равенство, найдем угловую скорость стержня в функции угла φ:

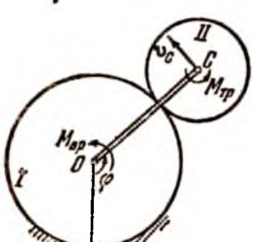


Рис. 19.3

$$\dot{\varphi}^2 = 3\frac{g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi). \qquad (19.12)$$

Это соотношение можно получить более простым методом из закона сохранения полной механической энергии.

Задача 19.3. Определить закон изменения угловой скорости ω кривошипа OC эпициклического механизма, изображенного на рис. 19.3, если масса кривошипа равна m_1, а масса сателлита m_2. Кривошип считать однородным тонким стержнем, сателлит — однородным диском; вращающий момент $M_{вр} = M_0 - \varkappa\omega$, где M_0 и $\varkappa$ — положительные постоянные и ω — угловая скорость кривошипа; момент трения $M_{тр}$ на оси сателлита считать постоянным; весь механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Система имеет одну степень свободы; за обобщенную координату возьмем угол φ поворота кривошипа. Система состоит из двух движущихся тел, поэтому ее кинетическая энергия

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 — кинетическая энергия кривошипа и T_2 — кинетическая энергия сателлита.

Так как кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси O, то

$$T_1 = {}^1/_2 I_1 \omega^2.$$

В этом равенстве $I_1 = {}^1/_3 m_1 (r + R)^2$ — момент инерции кривошипа относительно оси вращения, $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость кривошипа. Подставляя значение I_1 в выражение для T_1, получим

$$T_1 = {}^1/_6 m_1 (r + R)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Сателлит II движется плоскопараллельно, поэтому его кинетическую энергию T_2 найдем с помощью теоремы Кёнига:

$$T_2 = {}^1/_2 m_2 v_C^2 + {}^1/_2 I_C \omega_2^2,$$

где v_C — скорость центра C масс сателлита, I_C — его момент инерции относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости движения, ω_2 — угловая скорость сателлита.

Имеем

$$v_C = (r + R)\,\dot{\varphi}, \qquad I_C = \frac{1}{2} m_2 r^2, \qquad \omega_2 = \frac{R+r}{r}\,\omega = \frac{R+r}{r}\,\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (r+R)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \frac{(R+r)^2}{r^2} \dot{\varphi}^2,$$

или

$$T_2 = {}^3/_4 m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Складывая полученные значения T_1 и T_2, найдем кинетическую энергию T эпициклического механизма:

$$T = {}^1/_2 I_{\text{пр}} \dot{\varphi}^2, \tag{19.13}$$

где приведенный момент инерции $I_{\text{пр}}$ системы равен *)

$$I_{\text{пр}} = ({}^1/_2 m_1 + {}^3/_2 m_2)(r+R)^2. \tag{19.14}$$

Обобщенная сила была определена в задаче 18.4 § 18.5 (см. формулу (18.31))

$$Q = M_{\text{вр}} - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} = M_0 - \varkappa\omega - \frac{R}{r} M_{\text{тр}},$$

или

$$Q = M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} - \varkappa\dot{\varphi}.$$

Воспользуемся теперь уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}} \dot{\varphi}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}} \ddot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

После подстановки получаем дифференциальное уравнение движения эпициклического механизма

$$I_{\text{пр}} \ddot{\varphi} = M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} - \varkappa\dot{\varphi}.$$

---

*) В понятие «приведенная масса» или «приведенный момент инерции» можно вкладывать различный смысл. В данном примере приведенный момент инерции $I_{\text{пр}}$ эпициклического механизма получен при вычислении кинетической энергии. В примере § 9.6 приведенный момент инерции $I^*_{\text{пр}}$ получен в результате вычисления момента количеств движения системы. Сравнивая выражения (9.39) и (9.14), мы видим, что величина приведенного момента инерции зависит от метода его введения.

При постоянном моменте трения $M_{тр}$ это уравнение легко интегрируется (см. задачу 9.2). Считая, что движение началось из состояния покоя, получим

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{\varkappa}\left(M_0 - \frac{R}{r} M_{тр}\right)\left(1 - e^{-\frac{\varkappa}{I_{пр}} t}\right).$$

С течением времени при $t \to \infty$ второй член в скобках стремится к нулю и, следовательно, угловая скорость ω кривошипа стремится к предельному значению

$$\omega_{пр} = \frac{1}{\varkappa}\left(M_0 - \frac{R}{r} M_{тр}\right).$$

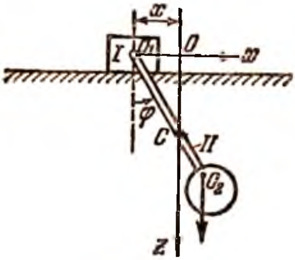


Рис. 19.4

Задача 19.4. Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из тела I, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и маятника II, подвешенного к телу I (рис. 19.4). Масса тела I равна M_1, масса маятника M_2, момент инерции маятника относительно оси подвеса I, расстояние от центра тяжести O_2 маятника до оси подвеса h. Составить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника и, считая угол отклонения маятника от вертикали малым, определить закон движения, если начальные скорости равны нулю.

Система имеет, очевидно, две степени свободы. За обобщенные координаты выберем абсциссу x тела I и угол φ отклонения маятника от вертикали. Кинетическая энергия T системы состоит из суммы кинетической энергии T_{I} и T_{II} тел I и II:

$$T = T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{II}}.$$

Тело I движется поступательно, поэтому

$$T_{\mathrm{I}} = {}^1/_2 M_1 \dot{x}^2.$$

Скорость точки подвеса маятника равна $\dot{x}$. Кинетическая энергия такого маятника была вычислена в § 10.2 (см. формулу (10.15)). В обозначениях данной задачи будем иметь

$$T_{\mathrm{II}} = {}^1/_2 M_2 \dot{x}^2 + M_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi + {}^1/_2 I \dot{\varphi}^2.$$

Таким образом,

$$T = {}^1/_2 (M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi + {}^1/_2 I \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -M_2 g h \cos\varphi.$$

Уравнения Лагранжа для данной системы имеют такой вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad L = T - \Pi.$$

Вычислим соответствующие величины:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x} + M_2 h \dot{\varphi} \cos\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} + M_2 h \dot{x} \cos\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\ddot{\varphi} - M_2 h \dot{\varphi} \dot{x} \sin\varphi + M_2 h \ddot{x} \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -M_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \sin\varphi - M_2 h g \sin\varphi.$$

После подстановки и очевидных упрощений получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}\left[(M_1+M_2)\dot{x}+M_2h\dot{\varphi}\cos\varphi\right]=0, \qquad I\ddot{\varphi}+M_2h\ddot{x}\cos\varphi+M_2hg\sin\varphi=0.$$

Интегрируя первое уравнение, найдем

$$(M_1+M_2)\dot{x}+M_2h\dot{\varphi}\cos\varphi=C_1.$$

По предположению $\dot{x}=0$, $\dot{\varphi}=0$ при $t=0$. Следовательно, $C_1=0$ и последнее равенство принимает вид

$$(M_1+M_2)\dot{x}+M_2h\dot{\varphi}\cos\varphi=0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left[(M_1+M_2)x+M_2h\sin\varphi\right]=0.$$

Отсюда

$$(M_1+M_2)x+M_2h\sin\varphi=C_2.$$

Пусть при $t=0$ маятник отклонен на угол φ_0. Воспользуемся произвольностью выбора начала координат O и подберем его так, чтобы при $t=0$

$$(M_1+M_2)x_0+M_2h\sin\varphi_0=0.$$

Тогда $C_2=0$ и из последнего равенства найдем

$$(M_1+M_2)x+M_2h\sin\varphi=0 \quad \text{или} \quad x=-\frac{M_2}{M_1+M_2}h\sin\varphi.$$

Эти равенства имеют простой механический смысл: центр тяжести C системы ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил движется по вертикали (при данном выборе начала координат эта вертикаль совпадает с осью z).

Перейдем ко второму дифференциальному уравнению, считая угол φ малым. Так как для малых углов $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$, то будем иметь

$$x=-\frac{M_2}{M_1+M_2}h\varphi.$$

Дифференцируя два раза получим

$$\ddot{x}=-\frac{M_2}{M_1+M_2}h\ddot{\varphi}.$$

После подстановки во второе дифференциальное уравнение значений $\ddot{x}$, $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, найдем

$$\left(I-\frac{M_2^2}{M_1+M_2}h^2\right)\ddot{\varphi}+M_2hg\varphi=0.$$

Легко показать, что коэффициент при $\ddot{\varphi}$ всегда положителен. Действительно, согласно (12.14)

$$I=I_{O_1}+M_2h^2,$$

где I_{O_1} — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно оси подвеса. Имеем

$$I-\frac{M_2^2}{M_1+M_2}h^2=I_{O_1}+M_2h^2-\frac{M_2^2}{M_1+M_2}h^2=I_{O_1}+\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}h^2>0$$

(для математического маятника $h=l$ и $I_{O_1}=0$, где l — длина маятника).

Поэтому угол φ изменяется по гармоническому закону (учтены начальные условия $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

где круговая частота k определяется равенством

$$k^2 = \frac{M_2 hg}{I_{O_2} + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} h^2}.$$

Центр тяжести маятника O_2 перемещается по эллипсу (читатель докажет без труда это самостоятельно), чем и объясняется название маятника.

Задача 19.5. Составить дифференциальные уравнения движения двойного математического маятника.

Двойной математический маятник (см. рис. 18.16) имеет две степени свободы. За обобщенные координаты возьмем углы φ_1 и φ_2. Система состоит из двух материальных точек, поэтому ее кинетическая энергия равна

$$T = {}^1/_2 m_1 v_1^2 + {}^1/_2 m_2 v_2^2,$$

где m_1 и m_2 — массы точек, а v_1 и v_2 — их скорости.

Координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 точек M_1 и M_2 найдем, пользуясь рис. 18.16:

$$x_1 = l_1 \cos \varphi_1, \quad x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2,$$
$$y_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \quad \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2,$$
$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2.$$

Тогда

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2,$$
$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\, \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

и кинетическая энергия системы примет вид

$$T = {}^1/_2 (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\, \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + {}^1/_2 m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \tag{19.15}$$

Обобщенные силы были найдены в задаче 18.5 § 18.5:

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2. \tag{19.16}$$

Перейдем к составлению уравнений Лагранжа, которые для данной задачи имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_2.$$

Составим сначала уравнение для φ_1. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\, \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 +$$
$$+ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\, \ddot{\varphi}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)\, \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\, \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2.$$

Подставив полученные выражения в уравнение Лагранжа для координаты φ_1:

$$(m_1+m_2)\,l_1^2\ddot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_2-\\-m_2l_1l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\left(\dot{\varphi}_2^2-\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right)-\\-m_2l_1l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2=-(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi_1. \qquad (19.17)$$

Деля обе части уравнения на l_1 и приводя подобные члены, окончательно получим (мы выписали сразу второе уравнение, которое получается аналогичным методом)

$$(m_1+m_2)\,l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_2-\\-m_2l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\,\dot{\varphi}_2^2+(m_1+m_2)\,g\sin\varphi_1=0, \qquad (19.18)$$

$$l_2\ddot{\varphi}_2+l_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_1+l_1\sin(\varphi_2-\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1^2+g\sin\varphi_2=0.$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений движения двойного математического маятника связано с большими трудностями, однако, если считать углы отклонения φ_1 и φ_2 малыми, то решение упрощается и может быть доведено до конца. Задачи такого рода мы будем рассматривать в главе XX.

§ 19.4. Особенности применения уравнений Лагранжа второго рода к системам с неидеальными и неудерживающими связями

Рассмотренные примеры хорошо иллюстрируют достоинства метода Лагранжа, состоящие в следующем.

Этот метод применим для широкого класса материальных систем; он экономичен в том смысле, что не требует введения дополнительных координат и реакций идеальных связей. Наконец, процедура применения метода Лагранжа одинакова во всех задачах, что имеет большое значение, так как не требует от исследователя подчас тонких рассуждений, в которых допустить ошибку значительно легче, чем в математических операциях.

Полезно отметить еще одно достоинство метода Лагранжа. По существу этот метод энергетический. Это обстоятельство дает возможность использовать метод Лагранжа в теоретической физике для анализа не только механических, но и других физических систем.

Необходимо остановиться и на некоторых особенностях метода Лагранжа, создающих подчас дополнительные трудности. Уравнения Лагранжа получены для систем с идеальными, удерживающими и голономными связями. Это не означает, что уравнения Лагранжа нельзя использовать для систем с неудерживающими или неидеальными связями. Но если для системы с удерживающими и идеальными связями уравнения Лагранжа полностью решают задачу об определении закона движения, то для системы с неудерживающими или неидеальными связями одних уравнений Лагранжа, составленных для независимых обобщенных координат, может оказаться недостаточно. Поясним сказанное на задаче 19.2 § 19.3, рассмотрев три случая.

1. Связи идеальные и удерживающие. На концах стержня шарнирно укреплены перемещающиеся без трения

ползуны, удерживающие стержень на направляющих (см. рис. 19.2). Этот случай разобран на стр. 395. Так как связи идеальные, то их реакции учитывать не нужно (поэтому они не изображены на рис. 19.2). Кинетическая энергия T и обобщенная сила Q_1 определены равенствами

$$T = {}^1/_6 ml^2\dot{\varphi}^2, \quad Q_1 = {}^1/_2 mgl\sin\varphi. \tag{19.19}$$

Уравнение Лагранжа для этой задачи приводится к виду

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l}\sin\varphi. \tag{19.20}$$

Это уравнение, справедливое для всех φ, полностью решает задачу, так как для его интегрирования не нужно знать ничего, кроме начальных условий.

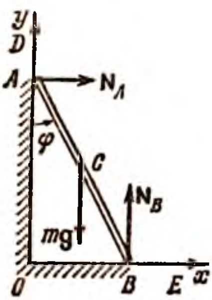


Рис. 19.5

2. **Связи идеальные и неудерживающие.** Стержень скользит без трения по сторонам прямого угла (рис. 19.5). До тех пор пока стержень опирается на обе стороны, связь не нарушена и движение стержня описывается тем же уравнением Лагранжа (19.20). Однако сразу пользоваться этим уравнением практически нельзя, так как неизвестно, произойдет или нет отрыв стержня от стенки. Поэтому прежде всего нужно определить возможность отрыва, затем, если отрыв действительно происходит, то нужно определить, при каком угле это произойдет.

Возможность отрыва определяется по обращению в нуль соответствующей нормальной реакции. Одного уравнения Лагранжа (19.20) для этих целей недостаточно, так как оно не содержит нормальных реакций *). Естественно, что дополнительно к этому уравнению нужно составить еще уравнение, которое содержало бы реакцию N_A (отрыв может произойти, конечно, от вертикальной стенки). Это можно сделать различными методами, но в данном случае проще всего приводит к цели теорема о движении центра масс:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}^e.$$

Проектируя это равенство на ось x и учитывая рис. 19.5, получим

$$m\ddot{x}_C = N_A. \tag{19.21}$$

Воспользуемся очевидным равенством, устанавливающим связь между координатами x_C и φ (см. рис. 19.5):

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

*) Существуют методы, позволяющие определять реакции идеальных связей с помощью видоизмененных уравнений Лагранжа второго рода (см. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, § 7.12, 7.13). Эти методы сложны и в настоящем руководстве не изучаются.

Отсюда найдем

$$\dot{x}_C = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \ddot{x}_C = \frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi).$$

Пользуясь теперь уравнением Лагранжа (19.20) и вытекающим из него первым интегралом (19.12)

$$\dot{\varphi}^2 = 3\frac{g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

выразим $\ddot{x}_C$, а затем N_A через угол φ (предполагается, что $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$):

$$\ddot{x}_C = \frac{3}{4}g\sin\varphi(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0),$$

$$N_A = \frac{3}{4}mg\sin\varphi(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Отсюда видно, что при угле φ_1, определяемом равенством

$$\cos\varphi_1 = \frac{2}{3}\cos\varphi_0,$$

нормальная реакция обращается в нуль, т. е. происходит отрыв стержня от вертикальной стенки.

Таким образом, уравнение Лагранжа (19.20) определяет закон движения стержня не для всех φ, как это было в первом случае, а только для углов, удовлетворяющих неравенству

$$\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1.$$

С момента отрыва от вертикальной стенки стержень будет иметь не одну, а две степени свободы (по предположению движение происходит в вертикальной плоскости), для определения движения его в новых условиях нужно составить уже два дифференциальных уравнения. В качестве упражнения предлагаем читателю определить угловую скорость и положение конца A стержня в момент его падения на горизонтальную плоскость.

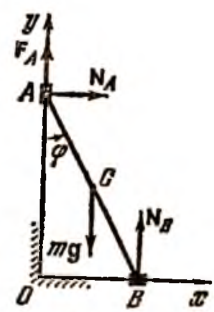


Рис. 19.6

3. Связи удерживающие и неидеальные. Учтем силу трения F_A в вертикальном ползуне A (для простоты выкладок трением в ползуне B пренебрегаем) (рис. 19.6). Будем считать, что сила трения пропорциональна нормальному давлению:

$$F_{yA} = fN_A,$$

где f — коэффициент трения (предполагается, что ползун A движется вниз, поэтому сила трения $\mathbf{F}_A$ направлена вверх).

Положение стержня по-прежнему определяется одной обобщенной координатой — углом φ, поэтому выражение для кинетической энергии стержня не изменится. Для составления уравнения Лагранжа нужно определить обобщенную силу Q, соответствующую углу φ, с учетом силы трения F_A. Дадим стержню AB виртуальное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим суммарную работу δA силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы трения $\mathbf{F}_A$ на этом перемещении (работа нормальных реакций $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$ равна нулю):

$$\delta A = \delta A_1 + F_{yA}\,\delta y_A,$$

где $\delta A_1 = Q_1\,\delta\varphi = {}^1/_2\, mgl \sin\varphi\cdot\delta\varphi$ — работа силы тяжести $m\mathbf{g}$ (использовано значение для Q_1, полученное в первом случае).

Имеем (см. рис. 19.6)

$$y_A = l\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\delta y_A = -l\sin\varphi\cdot\delta\varphi.$$

Подставим в δA значения δA_1, δy_A, F_{yA} и сгруппируем члены:

$$\delta A = l\,({}^1/_2 mg - fN_A)\sin\varphi\cdot\delta\varphi.$$

Обобщенная сила равна коэффициенту при $\delta\varphi$:

$$Q = l\,({}^1/_2\, mg - fN_A)\sin\varphi.$$

Составим теперь уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q,$$

учитывая, что $T = {}^1/_6\, ml^2\dot\varphi^2$. После подстановки и выполнения необходимых действий найдем

$${}^1/_3 ml^2\ddot\varphi = l\,({}^1/_2\, mg - fN_A)\sin\varphi.$$

Это дифференциальное уравнение движения стержня содержит неизвестную величину N_A. Поэтому необходимо составить еще одно уравнение для определения нормальной реакции N_A. Для этого, так же как и в предыдущем случае, применим теорему о движении центра масс относительно оси x (см. равенство (19.21)):

$$m\ddot x_C = N_A.$$

Воспользуемся полученным ранее результатом

$$\ddot x_C = \frac{l}{2}(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi).$$

Отсюда

$$N_A = \frac{ml}{2}(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi).$$

Внесем это выражение для N_A в найденное уравнение Лагранжа:

$$\frac{1}{3} ml^2\ddot{\varphi} = \frac{l}{2} mg \sin\varphi - \frac{1}{2} ml^2 f (\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) \sin\varphi.$$

После очевидных преобразований получим

$$\left(1 + \frac{3}{4} f \sin 2\varphi\right)\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\left(\frac{g}{l} + f\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right)\sin\varphi.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано приближенными методами.

В заключение отметим, что общность способа составления уравнений Лагранжа, доведенная до математического алгоритма, приводит иногда к формальному анализу без ясного понимания взаимодействия сил. Поэтому в тех случаях, когда необходимо провести анализ сил, возникающих в системе при ее движении, целесообразно пользоваться общими теоремами динамики либо комбинировать эти теоремы с уравнениями Лагранжа, как это было сделано нами в этом параграфе при рассмотрении второго случая.

§ 19.5. Выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты

Для дальнейшего нам понадобится значение кинетической энергии T материальной системы, выраженной через обобщенные скорости и координаты.

Кинетическая энергия T материальной системы определяется равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2.$$

Воспользуемся тождеством $v_k^2 = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k$ и заменим вектор скорости $\mathbf{v}_k$ точки M_k его значением по формуле (19.5). Тогда выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)^2.$$

Возведем скобку в квадрат и сгруппируем отдельно члены второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, члены первой степени относительно тех же величин и члены, не содержащие обобщенные скорости. Обозначив первую группу членов через T_2, вторую через T_1, а третью через T_0, получим

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{19.22}$$

где

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}\right)^2\dot{q}_1^2+\cdots+\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\right)^2\dot{q}_s^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\cdots+2\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_{s-1}}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s\right],$$

$$T_1=\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\dot{q}_s\right), \tag{19.23}$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)^2.$$

Введем обозначения

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j},\qquad b_i=\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}. \tag{19.24}$$

Тогда функции T_2 и T_1 можно будет записать в следующей форме:

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{19.25}$$

$$T_1=\sum_{i=1}^{s} b_i\dot{q}_i, \tag{19.26}$$

причем из самого определения коэффициентов a_{ij} (они называются *коэффициентами инерции*) видно, что они симметричны относительно своих индексов:

$$a_{ij}=a_{ji}. \tag{19.27}$$

В этих выражениях коэффициенты a_{ij} и b_i зависят от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и времени t, но не зависят от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$.

Равенства (19.22), (19.25) и (19.26) показывают, что в *общем случае кинетическую энергию материальной системы можно представить суммой квадратичной T_2, линейной T_1 и нулевой T_0 форм относительно обобщенных скоростей.*

При стационарных связях для движения в инерциальных осях время t явно не входит в выражение радиуса-вектора $\mathbf{r}_j$. Все частные производные $\partial\mathbf{r}_k/\partial t$ будут равны нулю, и вместе с ними обратятся в нуль слагаемые T_1 и T_0. Поэтому для этого случая *кинетиче-*

ская энергия системы представляет квадратичную форму обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{19.28}$$

коэффициенты которой явным образом не зависят от времени.

Напомним, что кинетическая энергия системы всегда положительна (как сумма произведений положительных величин $m_i v_i^2/2$) и в нуль она может обратиться только при условии, что система находится в покое. Поэтому *квадратичная форма* (19.28) *всегда определенно положительна.*

§ 19.6. Обобщенный интеграл энергии

Как известно, если силы, действующие на материальную систему, потенциальные, то имеет место интеграл энергии — сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная (см. § 10.6):

$$T + \Pi = h.$$

При выводе этого интеграла предполагалось, что движение изучается относительно инерциальной системы отсчета, а связи стационарны. Если же в потенциальной системе связи зависят явным образом от времени t или движение изучается в неинерциальной системе отсчета, то в общем случае интеграла энергии не существует. Это объясняется тем, что при нестационарных связях движение материальной системы частично осуществляется за счет сил, изменяющих связи, которые при анализе движения не учитываются.

Мы покажем, что если кинетическая энергия T системы, определенная равенством (19.22), не зависит явным образом от времени t, то дифференциальные уравнения движения допускают обобщенный интеграл энергии.

Пусть силы, действующие на систему, потенциальны. Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Умножим каждое уравнение на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения:

$$\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j. \tag{19.29}$$

Потенциальная энергия Π зависит от времени t только через обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$. Поэтому

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Воспользуемся очевидным тождеством (его легко проверить непосредственно)

$$\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j.$$

Кинетическая энергия T равна сумме трех однородных функций относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$ (см. формулу (19.22)):

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях будем иметь *)

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2 + T_1.$$

С учетом полученных выражений равенство (19.29) принимает следующий вид:

$$2\frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j = -\frac{d\Pi}{dt}.$$

Кинетическая энергия T зависит от времени через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ (по условию от времени t она явно не зависит). Поэтому

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Таким образом, последнее равенство приводится к виду

$$2\frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt},$$

или, снова пользуясь равенством (19.22),

$$2\frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_2}{dt} - \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_0}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt}.$$

---

*) Напомним эту теорему: сумма произведений частных производных однородной функции на соответствующие переменные равна произведению самой функции на степень ее однородности.

Приводя подобные члены, получим

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0 + \Pi) = 0, \tag{19.30}$$

откуда

$$T_2 - T_0 + \Pi = h, \tag{19.31}$$

где h — постоянная интегрирования.

Равенство (19.31) и представляет *обобщенный интеграл энергии Якоби*.

Если связи стационарны и движение изучается относительно инерциальных осей, то $T_0 = 0$ и обобщенный интеграл энергии вырождается в обычный интеграл $T + \Pi = h$.

Проиллюстрируем общую теорию простым примером.

Задача 19.6. На рис. 19.7 изображена схема центробежного регулятора. Два одинаковых тела M_1 и M_2, массой m каждое, могут перемещаться в пазу AB. Одинаковые пружины жесткости c неподвижно укреплены на вертикальной оси вращения O регулятора, а вторыми концами прикреплены к телам M_1 и M_2. Составить дифференциальные уравнения движения и показать, что при равномерном вращении регулятора они допускают обобщенный интеграл энергии.

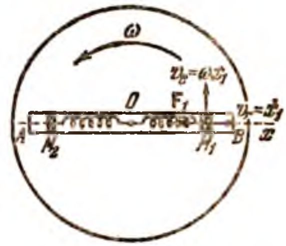


Рис. 19.7

Прежде всего заметим, что движения тел M_1 и M_2 независимы. Поэтому достаточно рассмотреть движение одного из них, например M_1. Положение тела M_1 определяется координатой $x_1 = OM_1$. Тело участвует в сложном движении, его относительная скорость равна $\dot{x}_1$, а переносная $x_1\omega$. Поэтому абсолютная скорость v_1 будет определяться равенством

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \omega^2 x_1^2,$$

а кинетическая энергия

$$T = {}^1/_2 m\dot{x}_1^2 + {}^1/_2 m\omega^2 x_1^2.$$

В рассматриваемом случае $T_2 = {}^1/_2 m\dot{x}_1^2$, $T_1 = 0$ и $T_0 = {}^1/_2\, m\omega^2 x_1^2$. При постоянной угловой скорости ω кинетическая энергия не зависит явным образом от времени.

На тело M_1 действуют две активные потенциальные силы: сила тяжести mg и сила упругости пружины F_1. Первую силу учитывать не нужно, так как по условию центробежный регулятор вращается в горизонтальной плоскости (ось вращения вертикальна). Потенциальная сила упругости равна

$$\Pi = {}^1/_2\, c\,(x_1 - l)^2,$$

где l — длина пружины в недеформированном состоянии.

Следовательно, рассматриваемая система удовлетворяет всем условиям существования обобщенного интеграла энергии (19), который в данном случае принимает вид (множитель 1/2 включен в постоянную интегрирования h)

$$m\dot{x}_1^2 - m\omega^2 x_1^2 + c\,(x_1 - l)^2 = h.$$

Было бы грубой ошибкой считать, что здесь имеет место равенство $T + \Pi = {}^1/_2 m\dot{x}_1^2 + {}^1/_2 m\omega^2 x_1^2 + {}^1/_2\, c\,(x_1 - l)^2 = h$. Физически несправедливость этого равейства объясняется весьма просто — переносное движение тела M_1 осуществляется за счет неучитываемых нами сил, приводящих в равномерное вращение регулятор.

Составим теперь уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m\ddot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = m\omega^2 x_1, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c(x_1 - l).$$

Внося найденное в уравнение Лагранжа, получим

$$m\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1 = -c(x_1 - l), \quad \text{или} \quad m\ddot{x}_1 = -c(x_1 - l) + m\omega^2 x_1.$$

Это дифференциальное уравнение движения тела M_1 во вращающемся пазу AB, справедливое как для постоянных, так и для переменных значений угловой скорости ω, можно получить, пользуясь обычным дифференциальным уравнением относительного движения, причем слагаемое $m\omega^2 x_1$ играет в этом случае роль переносной силы инерции (кориолисова сила инерции перпендикулярна к оси x, и ее проекция на эту ось равна нулю). Обобщенный интеграл энергии при $\omega = \text{const}$ получается из этого уравнения непосредственным интегрированием (обе части уравнения нужно умножить на dx_1 и воспользоваться тождеством $\ddot{x}_1\,dx_1 = \dot{x}_1\,d\dot{x}_1$).

Глава XX

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ И ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

§ 20.1. Определение положений равновесия

Теория колебаний, начав свое развитие с исследования движения математического маятника, превратилась в широко разветвленную самостоятельную дисциплину с весьма сложным математическим аппаратом. Теория колебаний быстро развивается, что объясняется значением ее в современной технике.

В настоящей главе мы рассмотрим простейшие вопросы колебаний механических систем, а именно — малые колебания систем с одной и двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия.

Рассмотрим вначале материальную систему с идеальными, стационарными и голономными связями, положение которой определяется s независимыми обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Для изучения колебаний около положения равновесия необходимо, очевидно, прежде всего найти те положения, в которых система может находиться в равновесии.

В § 18.7 было показано, что в положении равновесия все обобщенные силы системы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \quad Q_s = 0. \tag{20.1}$$

Для консервативной системы эти равенства принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}=0. \qquad (20.2)$$

Будем считать, что обобщенные силы зависят только от обобщенных координат. Тогда равенства (20.1) или (20.2) можно рассматривать как уравнения относительно $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Решая эти уравнения, найдем те положения, в которых система может находиться в равновесии. Если обобщенные силы зависят не только от обобщенных координат, но и от обобщенных скоростей $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s$, то при решении уравнений (20.1) все обобщенные скорости нужно приравнять к нулю.

Во многих случаях положения равновесия можно определить из элементарных соображений или с помощью обычных уравнений статики.

Задача 20.1. Определить возможные положения равновесия маятника со спиральной пружиной жесткости c (рис. 20.1), масса маятника m, расстояние от оси подвеса O до центра тяжести C равно l. При верхнем вертикальном положении маятника спиральная пружина находится в недеформированном состоянии. Массой пружины и трением горизонтально расположенного цилиндрического подшипника пренебречь.

Система имеет одну степень свободы; в качестве обобщенной координаты удобно принять угол φ.

Потенциальная энергия системы Π складывается из потенциальной энергии Π_1 силы тяжести и потенциальной энергии Π_2 спиральной пружины. За нулевое примем верхнее вертикальное положение маятника. Тогда при переходе маятника из данного положения в нулевое работа A_1 силы тяжести будет равна потенциальной энергии Π_1. Имеем

$$\Pi_1 = A_1 = -mg\cdot DE = -mgl\,(1-\cos\varphi).$$

Опыт показывает, что для закручивания спиральной пружины на не очень большой угол φ требуется приложить момент M, пропорциональный углу закручивания:

$$M = c\varphi.$$

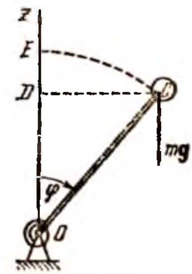


Рис. 20.1

Коэффициент c называется *коэффициентом жесткости на кручение*, его размерность равна размерности момента силы (угол φ измеряется, конечно, в радианах).

Момент, создаваемый пружиной, равен $-c\varphi$, и, следовательно, работа A_2 (потенциальная энергия Π_2) сил упругости такой пружины при переходе из данного положения в нулевое определится равенством

$$\Pi_2 = A_2 = -c\int_{\varphi}^{0}\varphi\,d\varphi,$$

или

$$\Pi_2 = {}^1/_2 c\varphi^2, \qquad (20.3)$$

т. е. *потенциальная энергия спиральной пружины, работающей на закручивание, равна половине коэффициента ее жесткости, умноженной на квадрат угловой деформации.*

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = mgl\cos\varphi + {}^1/_2 c\varphi^2 - mgl.$$

Составим уравнение равновесия (20.2):

$$\partial\Pi/\partial\varphi = 0$$

или, подставляя значение потенциальной энергии П, будем иметь

$$-mgl\sin\varphi + c\varphi = 0 \tag{20.4}$$

(это уравнение легко получить из условия равновесия рычага). Корни уравнения (20.4) определяют возможные положения равновесия маятника.

После того как составлено уравнение равновесия, задачу можно поставить двумя различными способами.

1. Как выбрать параметры системы, чтобы маятник мог находиться в заданном положении равновесия? Эта задача решается элементарно. Действительно, пусть требуется, чтобы в одном из возможных положений равновесия маятник составлял с вертикалью угол φ_0. Подставляя это значение угла φ в уравнение (20.4), получим

$$c\varphi_0 - mgl\sin\varphi_0 = 0,$$

откуда

$$\frac{mgl}{c} = \frac{\varphi_0}{\sin\varphi_0}.$$

В частности, если требуется, чтобы пружина удерживала маятник в горизонтальном положении ($\varphi_0 = \pi/2$), будем иметь

$$\frac{mgl}{c} = \frac{\pi}{2}. \tag{20.5}$$

При таком соотношении параметров (m, l, c) маятник может находиться в равновесии, занимая горизонтальное положение.

2. Задача может быть обращена, а именно: все параметры (m, l и c) заданы; требуется определить возможные положения равновесия маятника.

Как уже отмечалось, возможные положения равновесия определяются корнями уравнения равновесия (20.4). Представим это уравнение в виде

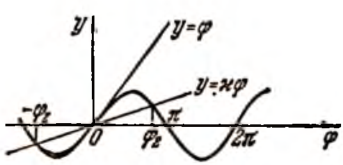


Рис. 20.2

$$\sin\varphi = \frac{c}{mgl}\varphi,$$

или

$$\sin\varphi = \varkappa\varphi, \tag{20.6}$$

где новый параметр $\varkappa$ определен равенством

$$\varkappa = \frac{c}{mgl}. \tag{20.7}$$

Один корень уравнения (20.6) очевиден: $\varphi_1 = 0$. Этому корню отвечает верхнее вертикальное положение равновесия маятника.

Для определения других возможных положений равновесия нужно найти остальные корни трансцендентного уравнения (20.6). Это можно осуществить различными методами, например табличным или графическим. Поясним второй способ. Составим два уравнения:

$$y = \sin\varphi, \quad y = \varkappa\varphi$$

и построим их графики (рис. 20.2).

Очевидно, что второй корень φ_2 определяется абсциссой точки пересечения обоих графиков, причем каждому положительному корню φ_2 отвечает равный по модулю, но отрицательный корень $-\varphi_2$. Физически это означает, что положения равновесия маятника могут быть как слева, так и справа от вертикали. Кроме того, видно, что, при $\varkappa > 1$ ($c > mgl$) прямая $y = \varkappa\varphi$ не пересекается с синусоидой $y = \sin\varphi$. В этом случае уравнение (20.6) имеет один тривиальный корень $\varphi_1 = 0$.

Легко показать (мы не будем останавливаться на подробностях), что при $\varkappa = \cos\varphi_0 = (\sin\varphi_0)/\varphi_0$ прямая $y = \varkappa\varphi$ коснется второй волны синусоиды. В этом случае $\varkappa \approx 0{,}129$ и уравнение будет иметь три корня: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 \approx 2{,}286$ $(130^\circ\,59')$ и $\varphi_3 = \varphi_0 \approx 7{,}725$ $(442^\circ\,37')$, причем третий корень двойной. При $\varkappa < 0{,}129$ прямая $y = \varkappa\varphi$ может пересечь не только вторую, но и следующие волны синусоиды, т. е. маятник будет иметь больше трех положений равновесия. Мы будем считать, что $\varkappa > 0{,}129$ *).

Таким образом, если $\varkappa > 1$, то маятник имеет одно верхнее вертикальное положение равновесия ($\varphi_1 = 0$), при $0{,}129 < \varkappa < 1$ маятник имеет два положения равновесия.

§ 20.2. Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа — Дирихле. Критерий Сильвестра

Найдя положения, в которых система может, вообще говоря, находиться в равновесии, нужно определить затем, какие из этих положений практически реализуемы или, иначе говоря, какие из этих положений являются устойчивыми, а какие неустойчивыми. Поясним сказанное простым примером. Обычный физический маятник с горизонтальной осью вращения имеет два возможных положения равновесия — верхнее и нижнее. Очевидно, что верхнее положение равновесия маятника практически нельзя осуществить, так как оно неустойчиво, а нижнее положение устойчиво и оно легко реализуемо.

Вопрос об устойчивости положения равновесия является частным случаем задачи об устойчивости движения. Эта задача имеет в современной технике большое значение (двигатель должен устойчиво удерживать заданный режим работы, самолет, ракета, корабль должны устойчиво сохранять заданное направление движения и т. п.). Эти вопросы выходят за рамки настоящего курса, поэтому желающим ознакомиться с общей задачей устойчивости движения мы рекомендуем обратиться к специальным руководствам **). Здесь же мы ограничимся только основными определениями и изложением теоремы Лагранжа — Дирихле.

Не нарушая общности, будем считать, что в рассматриваемом положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю (для этого достаточно отсчет их вести от положения равновесия). Выведем систему из равновесного состояния, сообщив в начальный момент времени $t = t_0$ небольшие по модулю значения обобщенным координатам и их скоростям $q_{01}, \ldots, q_{0s}$; $\dot q_{01}, \ldots, \dot q_{0s}$ (эти величины называются *возмущениями*).

Обозначим значения обобщенных координат и их скоростей при дальнейшем движении системы через $q_1(t), \ldots, q_s(t)$; $\dot q_1(t), \ldots, \dot q_s(t)$. Выберем теперь $2s$ произвольных сколь угодно малых положитель-

*) При малых значениях параметра $\varkappa$ корни будут велики. Им соответствуют положения равновесия при угле закручивания, большем одного полного поворота маятника. При таких углах формула (20.3) может оказаться несправедливой.

**) Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950; Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Физматгиз, 1955; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966; Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

ных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s; \varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_s'$. Если по этим числам можно найти другие $2s$ положительных чисел $\delta_1, \ldots, \delta_s; \delta_1', \ldots, \delta_s'$ таких, что для всех возмущений, удовлетворяющих условиям

$$|q_{01}| \leqslant \delta_1, \ldots, \quad |q_{0s}| \leqslant \delta_s; \quad |\dot{q}_{01}| < \delta_1', \ldots, \quad |\dot{q}_{0s}| < \delta_s',$$

и для всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться неравенства

$$|q_1(t)| < \varepsilon_1, \ldots, \quad |q_s(t)| < \varepsilon_s; \quad |\dot{q}_1(t)| < \varepsilon_1', \ldots, \quad |\dot{q}_s(t)| < \varepsilon_s',$$

то рассматриваемое положение равновесия называется *устойчивым*, в противном случае — *неустойчивым*.

Если при устойчивом равновесии все обобщенные координаты и скорости с течением времени стремятся к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} q_k(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_k(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

то рассматриваемое положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*. (Эти определения устойчивости равновесия представляют следствия из общих определений устойчивости движения, принадлежащих А. М. Ляпунову.)

Достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы определяются следующей теоремой Лагранжа—Дирихле: *если в положении изолированного равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Доказательство этой теоремы может быть получено как простое следствие теоремы Ляпунова об устойчивости движения (см. литературу, цитируемую на стр. 413).

Согласно теореме Лагранжа—Дирихле для доказательства устойчивости равновесия консервативной системы достаточно убедиться в том, что потенциальная энергия имеет в рассматриваемом положении минимум. Для системы с одной степенью свободы определение минимума решается элементарно. Действительно, в этом случае производная второго порядка от потенциальной энергии по обобщенной координате, вычисленная в положении равновесия, должна быть положительна (предполагается, что она существует):

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0. \tag{20.8}$$

Для консервативной системы, имеющей s степеней свободы, устойчивость рассматриваемого положения равновесия также определяется из условия минимума потенциальной энергии. В этом случае критерий минимума имеет более сложный вид. Установить его можно следующим образом.

Рассмотрим одно из положений равновесия системы. Не нарушая общности, будем считать, что в этом положении потенциальная энергия равна нулю:

$$\Pi(0, 0, \ldots, 0) = 0 \tag{20.9}$$

(это можно сделать, так как потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной).

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_s$:

$$\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = \Pi(0, 0, \ldots, 0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}\right)_0 q_s + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_s^2}\right) q_s^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \cdots \right. \\ \left. \cdots + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{s-1} \partial q_s}\right)_0 q_{s-1} q_s\right] + \cdots$$

Здесь точками после квадратной скобки обозначены члены высшего порядка относительно $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Первое слагаемое равно нулю по условию (20.9). Все коэффициенты при $q_1, q_2, \ldots, q_s$ в первой степени также равны нулю, так как в положении равновесия должны выполняться равенства (20.2). Коэффициенты при членах второй степени обозначим следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 = c_{ij}. \tag{20.10}$$

Эти коэффициенты, называемые *обобщенными коэффициентами жесткости*, вычисляются в положении равновесия при $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 0$, и, следовательно, все c_{ij} — постоянные числа, причем они симметричны:

$$c_{ij} = c_{ji}. \tag{20.11}$$

Учитывая сделанные замечания, получим следующее разложение потенциальной энергии в ряд по степеням $q_1, \ldots, q_s$:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + \cdots + c_{ss}q_s^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \cdots + 2c_{s-1,\,s}q_{s-1}q_s\right) + \cdots, \tag{20.12}$$

или, сокращенно,

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_iq_j + \cdots, \tag{20.13}$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Предположим, что квадратичная форма в (20.13) определенно положительна. В этом случае вблизи положения равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 0$ квадратичная часть потенциальной энергии и полная потенциальная энергия будут положительны. Так как $\Pi(0) = 0$, то это означает, что потенциальная энергия будет иметь в этом положении минимум и, следовательно, положение равновесия устойчиво.

Вопрос о знаке любой квадратичной формы определяется следующей теоремой Сильвестра: *для того чтобы квадратичная форма* *была определенно положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы были положительны.* Доказательство этой теоремы можно найти в курсах линейной алгебры.

Матрица квадратичной формы (20.13) и ее главные диагональные миноры имеют вид

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2s} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & c_{s3} & \dots & c_{ss} \end{Vmatrix}, \tag{20.14}$$

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}. \tag{20.15}$$

Таким образом, критерий определенной положительности квадратичной формы (20.13) будет

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_s > 0. \tag{20.16}$$

Теперь виден порядок применения теоремы Лагранжа—Дирихле: нужно разложить потенциальную энергию в ряд по степеням $q_1, \dots, q_s$, ограничиваясь членами второго порядка малости, определить обобщенные коэффициенты жесткости c_{ij} и составить определители (20.15). Если все $\Delta_i > 0$, то положение равновесия устойчиво.

Теорема Лагранжа—Дирихле дает только достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы, но она не дает никаких оснований судить о том, будет ли равновесие устойчиво или неустойчиво, если в этом положении потенциальная энергия не имеет минимума. Для одного частного случая ответ на этот вопрос дает следующая теорема Ляпунова: *равновесие консервативной системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии определяется членами второго порядка в ее разложении в ряд по степеням q.*

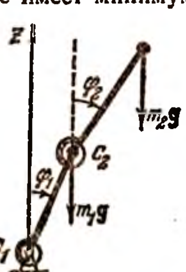


Рис. 20.3

А. М. Ляпунову принадлежит еще одна теорема о неустойчивости положения равновесия. Обобщение этих теорем дал Н. Г. Четаев (эти теоремы, а также доказательство сформулированной теоремы Ляпунова можно найти в курсах по устойчивости движения).

Задача 20.2. Дан двойной маятник со спиральными пружинами, массы маятников m_1 и m_2, их длины l_1 и l_2 (рис. 20.3). При верхнем вертикальном положении маятников спиральные пружины находятся в недеформированном состоянии. Требуется определить жесткости пружин c_1 и c_2 так, чтобы верхнее вертикальное положение маятников было устойчивым (силами сопротивления пренебречь).

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от верхнего вертикального положения. Потенциальная энергия системы П складывается из потенциальной энергии Π_1 сил тяжести маятников и потенциальной энергии Π_2 спиральных пружин. Приняв вертикальное положение маятников за нулевое, вычислим Π_1 как работу сил тяжести при переходе системы из данного положения в нулевое:

$$\Pi_1 = m_1 g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) - m_1 g l_1 - m_2 g (l_1 + l_2).$$

Потенциальная энергия Π_2 спиральных пружин определится по формуле (20.3):

$$\Pi_2 = {}^1/_2 c_1 \varphi_1^2 + {}^1/_2 c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

где $(\varphi_2 - \varphi_1)$ — угол закручивания второй пружины.

Потенциальная энергия системы будет равна

$$\Pi = (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2 + {}^1/_2 c_1 \varphi_1^2 + {}^1/_2 c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - (m_1 + m_2) g l_1 - m_2 g l_2.$$

Обобщенные коэффициенты жесткости c_{ij} можно определить по формуле (20.10), но еще проще они определяются при непосредственном разложении потенциальной энергии в ряд по степеням φ_1 и φ_2. Имеем

$$\cos\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} + \ldots, \quad \cos\varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} + \ldots$$

Тогда выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$\Pi = (m_1 + m_2) g l_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) + m_2 g l_2 \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - (m_1 + m_2) g l_1 - m_2 g l_2 + \ldots,$$

или, группируя члены,

$$\Pi = {}^1/_2 [c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1] \varphi_1^2 - c_2 \varphi_1 \varphi_2 + {}^1/_2 (c_2 - m_2 g l_2) \varphi_2^2 + \ldots$$

Сравнивая с общим выражением для потенциальной энергии (20.12), получим обобщенные коэффициенты жесткости

$$c_{11} = c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1, \quad c_{12} = c_{21} = -c_2, \quad c_{22} = c_2 - m_2 g l_2.$$

Критерий Сильвестра (20.16) для $s = 2$ сводится к неравенствам

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

или, раскрывая определитель, $c_{11} > 0$, $c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

Так как $c_{11} > 0$, то из второго неравенства следует, что $c_{22} > 0$. Поэтому эти условия можно заменить на следующие:

$$c_{22} > 0, \quad c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

После подстановки соответствующих значений получим

$$c_2 - m_2 g l_2 > 0, \quad [c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1] (c_2 - m_2 g l_2) - (-c_2)^2 > 0,$$

или

$$c_2 > m_2 g l_2, \quad c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1 > \frac{c_2^2}{c_2 - m_2 g l_2}.$$

Решая второе неравенство относительно c_1, найдем

$$c_2 > m_2 g l_2, \quad c_1 > (m_1 + m_2) g l_1 + \frac{m_2 g l_2 c_2}{c_2 - m_2 g l_2}.$$

Таким образом, для устойчивости верхнего вертикального положения двойного маятника достаточно, чтобы жесткости пружин c_1 и c_2 удовлетворяли этим неравенствам. Если хотя бы у одного из неравенств изменить знак на противоположный, то верхнее вертикальное положение равновесия будет неустойчивым. Это следует из сформулированной теоремы Ляпунова (при невыполнении этих условий отсутствие минимума потенциальной энергии П определяется членами второго порядка).

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос об устойчивости относительного равновесия ИСЗ, центр масс которого движется по круговой орбите (см. § 14.8). Так как устойчивость рассматривается относительно вращающейся орбитальной системы координат $Cx_1y_1z_1$ (см. рис. 14.9 и 14.10), то необходимо учесть не только потенциальную энергию сил тяготения Π_1, но и потенциальную энергию центробежных сил инерции Π_2. Таким образом, общая потенциальная энергия П будет равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2.$$

Согласно формуле (3.59) потенциальная энергия силы тяготения Земли для одного элемента массы dm равна $-\mu\, dm/r$, где μ — гравитационный параметр Земли, а r — расстояние от центра Земли до элемента dm (см. (14.44)). Для всего ИСЗ потенциальная энергия гравитационного поля Земли определяется равенством

$$\Pi_1 = -\mu \int \frac{dm}{r},$$

где интегрирование распространено на массу всего ИСЗ.

Воспользуемся равенством (14.48) и разложим правую часть его в ряд по степеням малых отношений x_1/R, y_1/R и z_1/R. Ограничиваясь членами не выше второго порядка малости, получим после очевидных преобразований (см. стр. 302)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{z_1}{R} + \frac{1}{2R^2}(2z_1^2 - x_1^2 - y_1^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{R}\left\{1 - \frac{z_1}{R} + \frac{1}{2R^2}\left[(z_1^2 + y_1^2) - 2(y_1^2 + x_1^2) + (z_1^2 + x_1^2)\right]\right\}.$$

Подставим это выражение для $1/r$ в Π_1 и проинтегрируем по массе всего тела. Учитывая равенства (14.52) и (12.3), найдем

$$\Pi_1 = -\mu\frac{m}{R} - \frac{\mu}{2R^3}(I_{x_1} + I_{y_1} - 2I_{z_1}).$$

Здесь m — масса ИСЗ, I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1} — его моменты инерции относительно орбитальных осей x_1, y_1 и z_1 соответственно.

Для того чтобы перейти к постоянным моментам инерции, воспользуемся формулами (12.27), учтя при этом принятые в §§ 14.6—14.8 обозначения и то, что в нашем случае $x_C = y_C = z_C = 0$. Имеем

$$I_{x_1} = I_x\alpha_1^2 + I_y\alpha_2^2 + I_z\alpha_3^2,$$

$$I_{y_1} = I_y\beta_1^2 + I_y\beta_2^2 + I_z\beta_3^2,$$

$$I_{z_1} = I_z\gamma_1^2 + I_y\gamma_2^2 + I_z\gamma_3^2.$$

Внесем эти значения для переменных моментов инерции I_{x_1}, I_{y_1} и I_{z_1} в последнее выражение для П. Тогда, используя формулы

$$\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2=1 \qquad (k=1,\ 2,\ 3),$$

получим

$$\Pi_1=-\frac{\mu m}{R}+\frac{3\mu}{2R^3}(I_x\gamma_1^2+I_y\gamma_2^2+I_z\gamma_3^2)-\frac{\mu}{2R^3}(I_x+I_y+I_z).$$

Отметим, что для круговой орбиты первое и последнее слагаемые постоянны и, следовательно, их можно отбросить.

Перейдем к вычислению потенциальной энергии центробежных сил инерции. При движении центра масс ИСЗ по круговой орбите центробежная сила, действующая на элемент массы dm, определяется равенством $\omega^2 dm\mathbf{r}^*$, где ω — угловая скорость вращения радиуса-вектора $\mathbf{R}$ центра инерции ИСЗ, а $\mathbf{r}^*$ — вектор, проведенный от оси Oy_0 до элемента dm параллельно плоскости орбиты (на рис. 14.9 вектор $\mathbf{r}^*$ не показан). Очевидно, что проекции вектора $\mathbf{r}^*$ на орбитальные оси координат x_1, y_1, z_1 равны x_1, 0, $R+z_1$ соответственно. Поэтому потенциальная энергия центробежной силы элемента dm будет равна (см. формулы (3.50) и (3.25))

$$-\omega^2 dm\int[x_1\,dx_1+(R+z_1)dz_1]=-\omega^2[{}^1/_2\,(x_1^2+z_1^2)+Rz_1]\,dm,$$

а для всего ИСЗ

$$\Pi_2=-\omega^2\int[{}^1/_2\,(x_1^2+z_1^2)+Rz_1]\,dm.$$

Учитывая равенства (14.52) и (12.3), получим

$$\Pi_2=-\frac{\omega^2}{2}I_{y_1},$$

или, снова переходя к осям x, y, z,

$$\Pi_2=-\frac{\omega^2}{2}(I_x\beta_1^2+I_y\beta_2^2+I_z\beta_3^2).$$

При круговой орбите $\mu/R^3=\omega^2=\text{const}$ (см. формулу (14.64)). Поэтому с точностью до несущественных для нас постоянных членов в Π_1 общая потенциальная энергия ИСЗ в относительном движении будет равна

$$\Pi=\frac{\omega^2}{2}[3(I_x\gamma_1^2+I_y\gamma_2^2+I_z\gamma_3^2)-(I_x\beta_1^2+I_y\beta_2^2+I_z\beta_3^2)].$$

Учитывая соотношения

$$\beta_2^2=1-\beta_1^2-\beta_3^2, \qquad \gamma_3^2=1-\gamma_1^2-\gamma_2^2,$$

представим потенциальную энергию в следующей форме:

$$\Pi=\frac{\omega^2}{2}\{3[(I_x-I_z)\gamma_1^2+(I_y-I_z)\gamma_2^2]-$$
$$-[(I_x-I_y)\beta_1^2+(I_z-I_y)\beta_3^2]\}+\text{const}.$$

Положение ИСЗ относительно орбитальной системы координат $Cx_1y_1z_1$ определяется тремя независимыми параметрами. Пусть это будут β_1, γ_1, γ_2. В соответствии с результатами § 14.8 мы будем рассматривать устойчивость относительного равновесия ИСЗ, когда большая ось эллипсоида инерции направлена к центру Земли. В этом положении относительного равновесия $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, а остальные направляющие косинусы равны нулю (см. § 14. 8). Поэтому при небольших отклонениях от рассматриваемого положения равновесия направляющие косинусы β_1, β_3, γ_1 и γ_2 будут малыми по модулю величинами. На этом основании из соотношения ортогональности

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \beta_1\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{1-\beta_1^2-\beta_3^2} + \beta_3\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2} = 0$$

с точностью до величин высшего порядка найдем, что $\beta_3 = -\gamma_2$. Внесем это значение для β_3 в потенциальную энергию, сгруппируем члены и снова отбросим несущественную постоянную. Тогда получим

$$\Pi = \frac{\omega^2}{2}\left[3(I_x - I_z)\gamma_1^2 + 4(I_y - I_z)\gamma_2^2 + (I_y - I_x)\beta_1^2\right].$$

Отсюда видно, что при $I_y > I_x > I_z$ (условие (14.67)) в положении относительного равновесия ($\gamma_1 = \gamma_2 = \beta_1 = 0$) потенциальная энергия имеет минимум. На основании теоремы Лагранжа—Дирихле заключаем, что положение относительного равновесия ИСЗ, при котором большая ось эллипсоида инерции направлена к центру Земли, устойчиво.

Отметим, что Луна имеет указанное выше распределение масс ($I_y > I_x > I_z$) и ее большая ось эллипсоида инерции с точностью до устойчивых колебаний (либраций) направлена все время к центру Земли. Этим объясняется причина, по которой мы видим только одну сторону Луны.

§ 20.3. Малые колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим произвольную потенциальную систему с голономными и стационарными связями, имеющую одну степень свободы. Положение системы будем определять обобщенной координатой q, отсчитываемой от положения устойчивого равновесия. Предположим, что система отклонена на небольшую величину от положения равновесия и ей сообщена небольшая начальная скорость. Тогда вследствие устойчивости положения равновесия система будет совершать движение вблизи этого положения равновесия, т. е. обобщенная координата q и ее скорость $\dot q$ будут все время малы по модулю. Это обстоятельство дает возможность применить приближенный метод исследования движения, основанный на том, что нелинейные в общем случае дифференциальные уравнения движения упрощаются и заменяются на приближенные линейные уравнения. Для этого, очевидно, достаточно выражения для кинетической и потенциальной энергий разложить в ряды по степеням q и $\dot{q}$, сохранив в них члены не выше второго порядка малости.

Для системы со стационарными связями, имеющей одну степень свободы, кинетическая энергия согласно формуле (19.25) имеет вид

$$T = {}^1/_2 a(q)\,\dot{q}^2, \tag{20.17}$$

где обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ является в общем случае функцией обобщенной координаты q.

Так как кинетическая энергия T при $\dot{q} \neq 0$ всегда положительна, то коэффициент $a(q)$ также положителен и не обращается в нуль ни при каких значениях q, в частности, $a(0) = a > 0$. Разложим $a(q)$ в ряд Маклорена по степеням q:

$$a(q) = a(0) + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \cdots$$

и подставим это выражение в равенство (20.17):

$$T = \frac{1}{2}\left[a + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \cdots\right]\dot{q}^2.$$

Для того чтобы сохранить члены не выше второго порядка малости относительно q и $\dot{q}$, отбросим все слагаемые в квадратной скобке, начиная со второго:

$$T = {}^1/_2 a\dot{q}^2. \tag{20.18}$$

Это приближенное выражение для кинетической энергии отличается от точного значения (20.17) тем, что обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ заменяется на его значение a в положении равновесия.

Разложение потенциальной энергии было уже получено (см. формулу (20.13)). Для системы с одной степенью свободы с принятой точностью будем иметь

$$\Pi = {}^1/_2 cq^2. \tag{20.19}$$

Приближенные выражения для кинетической и потенциальной энергий представляют квадратичные формы с постоянными положительными коэффициентами. Для кинетической энергии это следует из того, что она всегда положительна и в нуль обращается только при $\dot{q} = 0$, а положительность коэффициента c в выражении для потенциальной энергии следует из того, что рассматриваемое положение равновесия устойчиво (см. примечание к формуле (20.13)).

Составим уравнения движения, учитывая, что силы потенциальные:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

Пользуясь выражениями (20.18) и (20.19), составляем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и, принимая во внимание, что $a = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -cq.$$

Уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$a\ddot{q} + cq = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{q} + k^2 q = 0, \tag{20.20}$$

где

$$k^2 = c/a. \tag{20.21}$$

Заметим, что число k вещественно, так как коэффициенты a и c положительны.

Уравнение (20.20) называется *дифференциальным уравнением малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия.* Для получения этого уравнения не обязательно прибегать к уравнениям Лагранжа второго рода — можно пользоваться любыми другими методами, например, общими теоремами динамики. Важно, чтобы в результате получилось линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Однако изложенный здесь метод является общим, одинаково пригодным как для простых, так и для сложных систем с несколькими степенями свободы.

С уравнением (20.20) мы уже встречались при изучении прямолинейных колебаний материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы. Его общее решение можно представить в следующих двух эквивалентных формах:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

или

$$q = A \sin(kt + \varepsilon). \tag{20.22}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 или A и ε определяются из начальных условий. Круговая частота k вычисляется по формуле (20.21), а период незатухающих колебаний

$$T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{a/c}. \tag{20.23}$$

Из изложенного видно, что вблизи положения устойчивого равновесия консервативная система с одной степенью свободы совершает незатухающие гармонические колебания.

Задача 20.3. Чувствительный элемент прибора для регистрации вертикальных колебаний фундаментов состоит из ломаного рычага с грузом E и осью вращения O. Рычаг удерживается в равновесном положении, при котором плечо EO горизонтально, вертикально расположенной пружиной жесткости c_2. При этом две одинаковые горизонтально расположенные пружины жесткости c_1 находятся в недеформированном состоянии. Момент инерции рычага вместе с грузом относительно оси вращения O равен I. Составить уравнение малых колебаний и определить период колебаний системы; геометрические размеры указаны на рис. 20.4.

За обобщенную координату примем угол поворота рычага φ. Кинетическая энергия определяется равенством

$$T = {}^1/_2 I\dot{\varphi}^2.$$

Пусть масса рычага вместе с грузом равна m, а центр тяжести находится в точке C. Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии Π_1 силы тяжести и потенциальной энергии Π_2 трех пружин.

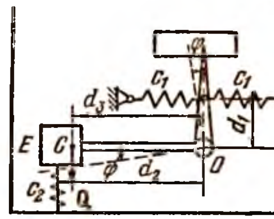


Рис. 20.4

За нулевое положение системы примем ее равновесное положение. Тогда потенциальная энергия Π_1 будет равна работе силы тяжести $Q = mg$ при переходе системы из данного положения в равновесное:

$$\Pi_1 = -Qd_3 \sin\varphi,$$

где $d_3 = OC$.

Для малых углов

$$\Pi_1 = -Qd_3\varphi.$$

Перейдем к вычислению потенциальной энергии пружин Π_2. Обозначим через $f_{ст}$ статическую деформацию вертикальной пружины, ее полная деформация при малом угле φ будет $f_{ст} + d_2\varphi$. Деформации горизонтальных пружин равны $d_1\varphi$ и $-d_1\varphi$. Теперь найдем

$$\Pi_2 = {}^1/_2 c_1 (d_1\varphi)^2 + {}^1/_2 c_1(-d_1\varphi)^2 + {}^1/_2 c_2 (f_{ст} + d_2\varphi)^2 - {}^1/_2 c_2 f_{ст}^2,$$

или

$$\Pi_2 = c_1 d_1^2\varphi^2 + {}^1/_2 c_2 (f_{ст} + d_2\varphi)^2 - {}^1/_2 c_2 f_{ст}^2.$$

Потенциальная энергия системы Π равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -Qd_3\varphi + c_1 d_1^2\varphi^2 + {}^1/_2 c_2 (f_{ст} + d_2\varphi)^2 - {}^1/_2 c_2 f_{ст}^2.$$

Раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$\Pi = (-Qd_3 + c_2 f_{ст} d_2)\,\varphi + {}^1/_2(2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)\,\varphi^2.$$

В положении равновесия должно выполняться равенство (20.2):

$$(\partial\Pi/\partial\varphi)_0 = 0.$$

Для данного примера

$$(\partial\Pi/\partial\varphi)_0 = [(-Qd_3 + c_2 f_{ст} d_2) + (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)\,\varphi]_{\varphi=0} = -Qd_3 + c_2 f_{ст} d_2 = 0.$$

Теперь выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$\Pi = {}^1/_2 (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)\,\varphi^2.$$

Пользуясь выражениями для T и Π, составим с помощью схемы Лагранжа дифференциальное уравнение малых колебаний чувствительного элемента прибора

$$I\ddot{\varphi} + (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)\,\varphi = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}{I}\varphi = 0.$$

Круговая частота k и период колебаний T определяются равенствами

$$k = \sqrt{\frac{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}{I}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}}.$$

Изложенный метод можно применить к системам, в которых, кроме консервативных сил, имеются и силы другой природы, например силы сопротивления, или возмущающие силы. Мы не будем сейчас рассматривать этот вопрос в общей постановке и поясним его на разобранном только что примере.

Как известно, собственные колебания чувствительного элемента прибора нужно погасить. Это может быть осуществлено как за счет естественных сил сопротивления, так и с помощью специального приспособления, называемого *демпфером*. Рассмотрим ту же схему вибрографа, но присоединим к нему демпфер D, создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости поршня (рис. 20.5). Обозначим расстояние от оси вращения до штока поршня через e. Тогда при малых углах φ скорость поршня будет равна $e\dot{\varphi}$, сила сопротивления — $\mu e\dot{\varphi}$ (μ — коэффициент пропорциональности), а соответствующая обобщенная сила — $\mu e^2\dot{\varphi}$. Полная обобщенная сила системы равна

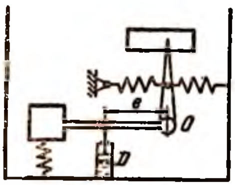


Рис. 20.5

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \mu e^2 \dot{\varphi}.$$

После подстановки соответствующих величин в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение малых колебаний

$$I\ddot{\varphi} = -(2c_1d_1^2 + c_2d_2^2)\varphi - \mu e^2\dot{\varphi}, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{20.24}$$

где k имеет прежнее значение, а $h = \mu e^2/(2I)$. Обычно $h < k$. Поэтому общее решение будет

$$\varphi = Ae^{-ht}\sin(k_1 t + \varepsilon), \qquad k_1 = \sqrt{k^2 - h^2},$$

что определяет затухающие колебания.

§ 20.4. Случай произвольной возмущающей силы

До сих пор мы рассматривали свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия. При отсутствии сил сопротивления дифференциальное уравнение малых колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \tag{20.25}$$

Если же, помимо потенциальных сил, действуют еще силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости, то дифференциальное уравнение приводится к следующей форме:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{20.26}$$

Предположим теперь, что, помимо потенциальных сил и сил сопротивления, на материальную систему действует возмущающая сила, явным образом зависящая от времени. Обозначим соответствующую обобщенную силу через $Q(t)$. Тогда, после деления на коэффициент инерции a, получим вместо уравнения (20.26) следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = F(t), \tag{20.27}$$

где $F(t)$ — обобщенная сила, отнесенная к коэффициенту инерции: $F(t) = Q(t)/a$ (не делая в дальнейшем этой оговорки, будем называть функцию $F(t)$ обобщенной силой).

В §§ 2.5 и 2.6 мы подробно исследовали решение этого уравнения в предположении, что возмущающая сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону. Поэтому в тех случаях, когда функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = F_0 \sin(pt + \delta),$$

можно использовать полученные в §§ 2.5, 2.6 результаты. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда возмущающая сила $F(t)$ изменяется произвольным образом.

Предположим сначала, что силы сопротивления отсутствуют. Тогда уравнение (20.27) примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = F(t). \tag{20.28}$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного уравнения (20.28). Соответствующее однородное уравнение будет

$$\ddot{q} + k^2 q = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$q = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt, \tag{20.29}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Частное решение уравнения (20.28) будем искать в форме (20.29), предположив, что D_1 и D_2 являются функциями времени *):

$$q = D_1(t) \cos kt + D_2(t) \sin kt. \tag{20.30}$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{q} = \frac{dD_1}{dt} \cos kt + \frac{dD_2}{dt} \sin kt - D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt.$$

Нам нужно найти одно частное решение, а мы ввели две неизвестные функции D_1 и D_2. Поэтому их можно подчинить некоторому условию. Потребуем, чтобы сумма первых двух слагаемых в правой части последнего равенства равнялась нулю:

$$\frac{dD_1}{dt} \cos kt + \frac{dD_2}{dt} \sin kt = 0. \tag{20.31}$$

Тогда

$$\dot{q} = -D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt.$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим

$$\ddot{q} = -\frac{dD_1}{dt} k \sin kt + \frac{dD_2}{dt} k \cos kt - D_1 k^2 \cos kt - D_2 k^2 \sin kt.$$

---

*) Этот метод определения частного решения, предложенный впервые Лагранжем, называется *методом вариации произвольных постоянных*.

Подставим это выражение для $\ddot{q}$ и выражение (20.30) для q в уравнение (20.28). Тогда, после приведения подобных членов, получим

$$-\frac{dD_1}{dt}k\sin kt+\frac{dD_2}{dt}k\cos kt=F(t). \qquad (20.32)$$

Решая совместно уравнения (20.31) и (20.32) относительно производных dD_1/dt и dD_2/dt, найдем

$$\frac{dD_1}{dt}=-\frac{1}{k}F(t)\sin kt, \quad \frac{dD_2}{dt}=\frac{1}{k}F(t)\cos kt.$$

Интегрируя, будем иметь

$$D_1=-\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin k\xi\,d\xi, \quad D_2=\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\cos k\xi\,d\xi,$$

где через ξ обозначена переменная интегрирования.

Подставив найденные значения для D_1 и D_2 в равенство (20.30), получим частное решение уравнения (20.28):

$$q=-\frac{1}{k}\cos kt\int_0^t F(\xi)\sin k\xi\,d\xi+\frac{1}{k}\sin kt\int_0^t F(\xi)\cos k\xi\,d\xi.$$

Так как функции $\cos kt$ и $\sin kt$ не зависят от переменной интегрирования ξ, то их можно внести под знаки интегралов:

$$q=-\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\cos kt\sin k\xi\,d\xi+\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin kt\cos k\xi\,d\xi.$$

Объединяя оба интеграла, получим

$$q=\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\,[\sin kt\cos k\xi-\cos kt\sin k\xi]\,d\xi,$$

или

$$q=\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin[k(t-\xi)]\,d\xi. \qquad (20.33)$$

Таково частное решение дифференциального уравнения (20.28) при произвольной возмущающей силе $F(t)$.

Для того чтобы найти частное решение уравнения (20.27), сделаем в нем замену переменных, положив $q=e^{-ht}z$, где z — новая неизвестная функция. Имеем

$$\dot{q}=-he^{-ht}z+e^{-ht}\dot{z},\ \ddot{q}=h^2e^{-ht}z-2he^{-ht}\dot{z}+e^{-ht}\ddot{z}.$$

После подстановки значений для q, $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ в уравнение (20.27) и приведения подобных членов получим

$$e^{-ht}\ddot{z}+(k^2-h^2)e^{-ht}z=F(t),$$

или, разделив на e^{-ht},

$$\ddot{z}+(k^2-h^2)z=F(t)e^{ht}.$$

Будем предполагать, что $h<k$ (силы сопротивления не очень велики). Тогда, положив

$$k_1^2=k^2-h^2, \tag{20.34}$$

мы придем к уравнению (20.28), где функция $F(t)$ заменена на функцию $F(t)\,e^{ht}$, а коэффициент k на k_1. Поэтому частное решение последнего уравнения согласно равенству (20.33) будет

$$z=\frac{1}{k_1}\int_0^t e^{h\xi}F(\xi)\sin[k_1(t-\xi)]\,d\xi,$$

Переходя к старой переменной $q=e^{-ht}z$, найдем

$$q=\frac{1}{k_1}e^{-ht}\int_0^t e^{h\xi}F(\xi)\sin[k_1(t-\xi)]\,d\xi.$$

или, внося множитель e^{-ht} под знак интеграла,

$$q=\frac{1}{k_1}\int_0^t F(\xi)\,e^{-h(t-\xi)}\sin[k_1(t-\xi)]\,d\xi. \tag{20.35}$$

Таково частное решение дифференциального уравнения (20.27) при произвольной возмущающей силе $F(t)$. Непосредственной проверкой легко установить, что частные решения (20.33) и (20.35) удовлетворяют нулевым начальным условиям, т. е.

$$q=0,\ \dot{q}=0 \text{ при } t=0. \tag{20.36}$$

Общее решение дифференциального уравнения (20.27) имеет вид ($h<k$)

$$q=e^{-ht}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+\frac{1}{k_1}\int_0^t F(\xi)\,e^{-h(t-\xi)}\sin[k_1(t-\xi)]\,d\xi, \tag{20.37}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Интегральная форма частного решения (20.35) дифференциального уравнения (20.27) позволяет определять движение системы и после того, как сила $F(t)$ прекратила свое действие. Поясним это подробнее. Пусть сила $F(t)$ до момента времени $t=0$ равнялась нулю, а затем в промежутке времени $(0, t_1)$ она приняла значение $F(t)$ и, начиная с момента $t=t_1$, она прекращает свое действие. Математически это можно записать следующим образом:

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ F(t) & \text{при } 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ 0 & \text{при } t>t_1.\end{cases} \tag{20.38}$$

Будем считать, что до начала действия силы $F(t)$ система находилась в покое. Тогда движение системы определится решением, удовлетворяющим нулевым начальным условиям, т. е. решением (20.35). Если $t > t_1$, то разобьем промежуток интегрирования $(0, t)$ на два промежутка $(0, t_1)$ и (t_1, t):

$$q = \frac{1}{k_1} \int\limits_0^{t_1} e^{-h(t-\xi)} F(\xi) \sin[k_1(t-\xi)]\, d\xi + \int\limits_{t_1}^{t} e^{-h(t-\xi)} F(\xi) \sin[k_1(t-\xi)]\, d\xi.$$

Второй интеграл равен нулю (так как при $t > t_1$ функция $F(t) = 0$). Поэтому движение системы после окончания действия силы $F(t)$ определяется равенством

$$q = \frac{1}{k_1} \int\limits_0^{t_1} e^{-h(t-\xi)} F(\xi) \sin[k_1(t-\xi)]\, d\xi. \tag{20.39}$$

Если силы сопротивления отсутствуют ($h = 0$, $k_1 = k$), то

$$q = \frac{1}{k} \int\limits_0^{t_1} F(\xi) \sin[k(t-\xi)]\, d\xi. \tag{20.40}$$

Задача 20.4. Прибор, описанный в § 20 (см. рис 20.4 и 20.5), установлен в лифте. Сначала лифт находился в покое, а затем начал подниматься вверх с постоянным ускорением w_0. По прошествии t_1 секунд стал двигаться равномерно. Определить колебания прибора при равномерном движении лифта.

Будем изучать колебания рычага относительно корпуса прибора, т. е. относительно движущегося лифта. Для того чтобы можно было рассматривать колебания рычага с помощью тех же уравнений, что и в абсолютном движении, нужно ввести переносную силу инерции (лифт движется поступательно, и, следовательно, кориолисова сила инерции равна нулю). При движении лифта вверх с ускорением w_0 сила инерции груза E, равная по модулю $\frac{Q}{g} w_0$, будет направлена вертикально вниз. Ей соответствует обобщенная сила $\frac{Q}{g} w_0 d_3$ (см. рис. 20.4). Учитывая упругие силы, создаваемые пружинами, и силу сопротивления, возникающую за счет действия демпфера, вместо уравнения (20.24) получим

Рис. 20.6

$$I\ddot{\varphi} = -(2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)\varphi - \mu e^2 \dot{\varphi} + \frac{Q}{g} w_0 d_3,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = F_0,$$

где $k^2 = \frac{1}{I}(2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)$, $\quad h = \frac{\mu e^2}{2I}$,

$$F_0 = \frac{Qd_3}{gI} w_0.$$

Возмущающая сила $F(t)$ удовлетворяет условиям (ее график изображен на рис. 20.6):

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 = \text{const} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Нас интересует поведение прибора при равномерном движении лифта, т. е. при $t > t_1$. Воспользуемся формулой (20.39):

$$\varphi = \frac{1}{k_1}\int_0^{t_1} F_0 e^{-h(t-\xi)} \sin [k_1 (t-\xi)]\, d\xi,$$

или, учитывая, что в промежутке $(0, t_1)$ функция $F = F_0 = \text{const}$,

$$\varphi = \frac{F_0}{k_1}\int_0^{t_1} e^{-h(t-\xi)} \sin [k_1 (t-\xi)]\, d\xi.$$

Вычисляя этот интеграл, найдем *)

$$\varphi = -\frac{F_0}{k_1 (h^2 + k_1^2)} e^{-h(t-\xi)} \{ h \sin [k_1 (t-\xi)] + k_1 \cos [k_1 (t-\xi)]\}\Big|_{\xi=0}^{\xi=t_1}.$$

Подставим верхний и нижний пределы и учтем равенство (20.34):

$$\varphi = -\frac{F_0}{k^2}\left\{ e^{-h(t-t_1)}\left[\frac{h}{k_1}\sin [k_1 (t-t_1)] + \cos [k_1 (t-t_1)]\right] - e^{-ht}\left(\frac{h}{k_1}\sin k_1 t + \cos k_1 t\right)\right\}. \quad (20.41)$$

Это решение справедливо при $t > t_1$. Им можно пользоваться и при $t < t_1$, если только положить в нем $t_1 = t$. Таким образом, при ускоренном подъеме лифта стрелка прибора колеблется по закону

$$\varphi = \frac{F_0}{k^2} e^{-ht}\left(\frac{h}{k_1}\sin k_1 t + \cos k_1 t\right) - \frac{F_0}{k^2}$$

и после окончания ускорения при $t \geqslant t_1$ закон колебания стрелки прибора определяется равенством (20.41).

Если применить обычные методы, то нужно сначала решить уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = F_0,$$

затем найти постоянные интегрирования по нулевым начальным условиям, после чего определить значения угла φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ в момент $t = t_1$. Полученные значения для φ и $\dot{\varphi}$ служат начальными условиями для движения, описываемого уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

(первое уравнение справедливо для промежутка $0 < t < t_1$, второе для $t \geqslant t_1$).

Несмотря на кажущуюся простоту этого метода (он называется методом *припасовывания*, или методом *поэтапного интегрирования*), он требует больших преобразований, чем определение решения в интегральной форме. Однако главный его недостаток состоит в том, что он, в отличие от интегральной формы, не может быть применен при произвольной возмущающей силе $F(t)$.

*) Интеграл $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ легко вычисляется по частям (см. также Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971).

§ 20.5. Определение периодических решений

Вопрос об определении периодических решений является одним из важнейших в теории колебаний. Мы рассмотрим случай, когда движение системы описывается дифференциальным уравнением (20.28), правая часть которого (возмущающая сила) представляет некоторую периодическую функцию периода τ

$$F(t+\tau) \equiv F(t).$$

Существует несколько методов определения периодического решения периода τ. Мы рассмотрим два из них.

1. Определение периодического движения с помощью ряда Фурье. Пусть периодическая функция $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и может быть разложена в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(pt + \varepsilon_1) + a_2 \sin(2pt + \varepsilon_2) + \ldots,$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... и сдвиги фаз каждой гармоники определяются по известным формулам, а $p = 2\pi/\tau$.

Уравнение (20.28) примет теперь вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(pt + \varepsilon_1) + a_2 \sin(2pt + \varepsilon_2) + \ldots$$

Для каждого слагаемого правой части легко определяется частное решение (см. § 2.5). Поэтому частное решение, отвечающее всей правой части, будет иметь вид

$$q = \frac{a_0}{2k^2} + \frac{a_1}{k^2 - p^2} \sin(pt + \varepsilon_1) + \frac{a_2}{k^2 - (2p)^2} \sin(2pt + \varepsilon_2) + \ldots \tag{20.42}$$

Это решение справедливо, если $p \neq k/n$ при любом целом n (предполагается, что это условие выполнено). Решение (20.42) определяет периодическое движение системы периода τ.

Применение ряда Фурье целесообразно использовать для определения периодического движения системы в том случае, когда ряд быстро сходится и можно ограничиться первыми несколькими членами.

2. Определение периодического решения в замкнутой форме. Даже в тех сравнительно редких случаях, когда ряд Фурье быстро сходится, практически можно получить только приближенное решение. Применение интегральной формы частного решения (20.33) дает возможность построить точное периодическое решение (решение в замкнутой форме).

Формула (20.33) определяет частное решение уравнения (20.28), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Поэтому решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям ($q = q_0$ и $\dot{q} = \dot{q}_0$ при $t = 0$), имеет вид

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin[k(t - \xi)]\, d\xi. \tag{20.43}$$

Если возмущающая сила $F(t)$ имеет период τ, то вынужденным колебаниям того же периода должно отвечать периодическое решение, удовлетворяющее условиям

$$q(0) = q(\tau) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}(\tau) = \dot{q}_0. \tag{20.44}$$

Так как дифференциальное уравнение (20.28) не изменяет своей формы от замены t на $t+\tau$, то условия (20.44) будут не только необходимыми, но и достаточными, т. е. решение, удовлетворяющее этим условиям, будет периодическим с периодом τ.

Решение (20.43) уравнения (20.28) является общим. Для того чтобы оно содержало частное периодическое решение с периодом τ, подчиним его условиям (20.44). Это даст нам два уравнения, из которых можно будет найти неизвестные для периодического движения начальные значения обобщенной координаты q_0 и обобщенной скорости $\dot{q}_0$.

Представим формулу (20.43) в следующем виде:

$$q = q_0 \cos kt + \\ + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{k}\left[\sin kt \int_0^t F(\xi)\cos k\xi\, d\xi - \cos kt \int_0^t F(\xi)\sin k\xi\, d\xi\right].$$

Вычислим производную по времени и разделим ее на k:

$$\frac{\dot{q}}{k} = -q_0 \sin kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\cos kt + \\ + \frac{1}{k}\left[\cos kt \int_0^t F(\xi)\cos k\xi\, d\xi + \sin kt \int_0^t F(\xi)\sin k\xi\, d\xi\right].$$

Подчиним решение условиям (20.44). Для этого положим $t=\tau$ и заменим q на q_0, а $\dot{q}$ на $\dot{q}_0$:

$$\begin{aligned} q_0 &= q_0 \cos k\tau + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin k\tau + \frac{1}{k}[A \sin k\tau - B\cos k\tau], \\ \frac{\dot{q}_0}{k} &= -q_0 \sin k\tau + \frac{\dot{q}_0}{k}\cos k\tau + \frac{1}{k}[A\cos k\tau + B\sin k\tau], \end{aligned} \tag{20.45}$$

где числа A и B определены равенствами

$$A = \int_0^\tau F(\xi)\cos k\xi\, d\xi, \quad B = \int_0^\tau F(\xi)\sin k\xi\, d\xi. \tag{20.46}$$

Решая уравнения (20.45) относительно q_0 и $\dot{q}_0/k$, найдем

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4k\sin^2(k\tau/2)}[A\sin k\tau + (1-\cos k\tau)B], \\ \frac{\dot{q}_0}{k} &= \frac{1}{4k\sin^2(k\tau/2)}[-(1-\cos k\tau)A + B\sin k\tau]. \end{aligned} \tag{20.47}$$

Внося эти выражения для q_0 и $\dot{q}_0/k$ в равенство (20.43), получим после элементарных преобразований искомое периодическое решение

$$q=\frac{A\cos k(t+\tau/2)+B\sin k(t+\tau/2)}{2k\sin(k\tau/2)}+\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin[k(t-\xi)]\,d\xi. \qquad (20.48)$$

Это решение определяет движение на отрезке $[0, \tau]$. На последующих отрезках $[\tau, 2\tau]$, $[2\tau, 3\tau]$ и т. п. значение обобщенной координаты и ее график (если он построен) нужно просто повторить.

Множитель $\sin(k\tau/2)$ в знаменателе указывает на возможность резонанса при $k\tau/2=n\pi$, или $\tau=\frac{2\pi}{k}n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, т. е. резонанс может наступить, если период τ возмущающей силы будет кратен периоду $T=2\pi/k$ собственных колебаний.

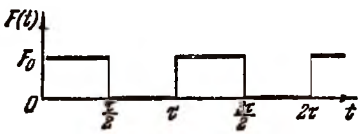


Рис. 20.7

Рассмотрим пример. Пусть периодическая возмущающая сила изменяется по закону, изображенному на рис. 20.7. На отрезке $[0, \tau]$ будем иметь

$$F(t)=\begin{cases}F_0 & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\tau/2,\\ 0 & \text{при} \quad \tau/2<t\leqslant\tau.\end{cases}$$

Вычислим коэффициенты A и B по формулам (20.46). Для этого разобьем отрезок интегрирования $[0, \tau]$ на два, равных $[0, \tau/2]$ и $[\tau/2, \tau]$, учтя, что во втором из них $F(t)=0$. Имеем

$$A=\int_0^{\tau/2}+\int_{\tau/2}^{\tau}=\int_0^{\tau/2}F_0\cos k\xi\,d\xi=\frac{F_0}{k}\sin\frac{k\tau}{2}, \qquad (20.49)$$

$$B=\int_0^{\tau/2}F_0\sin k\xi\,d\xi=\frac{F_0}{k}\left(1-\cos\frac{k\tau}{2}\right). \qquad (20.50)$$

Интеграл, стоящий в формуле (20.48), вычислим сначала для момента времени t, лежащего в промежутке $(0, \tau/2)$, когда $F=F_0$:

$$\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin[k(t-\xi)]\,d\xi=\frac{F_0}{k^2}\cos[k(t-\xi)]\Big|_0^t=\frac{F_0}{k^2}(1-\cos kt).$$

Для момента времени t, удовлетворяющего условию $\tau/2<t<\tau$, получим

$$\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin[k(t-\xi)]\,d\xi=\frac{1}{k}\int_0^{\tau/2}F_0\sin[k(t-\xi)]\,d\xi=$$

$$=\frac{F_0}{k^2}\left\{\cos\left[k\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]-\cos kt\right\}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{k}\int_0^t F(\xi)\sin[k(t-\xi)]\,d\xi=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k^2}(1-\cos kt) & \text{при}\quad 0\leqslant t<\dfrac{\tau}{2},\\ \dfrac{F_0}{k^2}\left\{\cos\left[k\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)\right]-\cos kt\right\} & \text{при}\quad \dfrac{\tau}{2}<t\leqslant\tau.\end{cases}$$

Подставляя полученные выражения для чисел A и B, а также значения интеграла в равенство (20.48), после очевидных упрощений найдем решение уравнения (20.28) при заданной возмущающей силе:

$$q=\frac{F_0}{2k^2}\frac{\cos[k(t+\tau/4)]}{\cos(k\tau/4)}+$$

$$+\begin{cases}\dfrac{F_0}{k^2}(1-\cos kt) & \text{при}\quad 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\tau}{2},\\ \dfrac{F_0}{k^2}\left\{\cos\left[k\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)\right]-\cos kt\right\} & \text{при}\quad \dfrac{\tau}{2}<t\leqslant\tau.\end{cases}$$

Положим $k\tau/4=\pi$, т. е. $\tau=2\cdot 2\pi/k=2T$. Тогда получим на отрезке $(0,\ \tau/2)$

$$q=\frac{F_0}{k^2}\left(1-\frac{1}{2}\cos kt\right),\qquad(20.51)$$

а на отрезке $[\tau/2,\ \tau]$

$$q=\frac{F_0}{2k^2}\cos kt.\qquad(20.52)$$

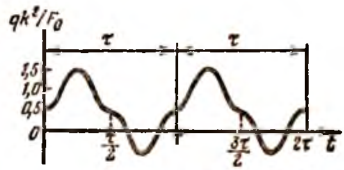


Рис. 20.8

Примерный график вынужденных колебаний показан на рис. 20.8 (на отрезке $[0,\ \tau]$ он построен обычным путем по точкам, а затем периодически продолжен). Отметим, что, несмотря на кратность периодов ($\tau=2T$), в данном примере резонанс не наступил (он имел бы место при $\tau=T$, $\tau=3T$, $\tau=5T$ и т. п.).

Мы рассмотрели построение периодических решений в предположении, что отсутствуют силы сопротивления. Учет их не представляет труда, нужно только при выводе воспользоваться формулой (20.37), а не формулой (20.43) *).

§ 20.6. Малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим произвольную консервативную систему с голономными и стационарными связями, имеющую две степени свободы. Положение системы будем определять обобщенными координатами q_1 и q_2, отсчитываемыми от положения устойчивого равновесия.

---

*) См., например, Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, том II. — М.: Гостехиздат, 1955.

Вблизи этого положения обобщенные координаты q_1 и q_2 и обобщенные скорости $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$ будут все время малы по модулю, так как равновесие устойчивое.

Кинетическая энергия системы для $s=2$ согласно формуле (19.25) имеет вид

$$T = {}^1/_2[a_{11}(q_1, q_2)\dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1, q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}(q_1, q_2)\dot{q}_2^2]. \quad (20.53)$$

Коэффициенты инерции в общем случае зависят от координат q_1 и q_2. Разложим их в ряд Маклорена по степеням q_1 и q_2 и ограничимся малыми нулевого порядка (для того, чтобы кинетическая энергия содержала члены не выше второго порядка малости относительно q_1, q_2, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$):

$$\begin{aligned} a_{11}(q_1, q_2) &\approx a_{11}(0, 0) = a_{11}, \\ a_{12}(q_1, q_2) &\approx a_{12}(0, 0) = a_{12}, \\ a_{22}(q_1, q_2) &\approx a_{22}(0, 0) = a_{22}. \end{aligned} \quad (20.54)$$

Теперь выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = {}^1/_2(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad (20.55)$$

где все обобщенные коэффициенты инерции — постоянные числа.

Так как при скоростях, отличных от нуля, кинетическая энергия положительна, то квадратичная форма (20.55) удовлетворяет критерию Сильвестра (20.16), который для данного случая имеет вид

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (20.56)$$

Разложение потенциальной энергии в ряд по степеням q_1 и q_2 дается формулой (20.13). Для системы с двумя степенями свободы получим

$$\Pi = {}^1/_2(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (20.57)$$

Для положения устойчивого равновесия квадратичная форма (20.57) определенно положительна и она удовлетворяет критерию Сильвестра (20.16):

$$c_{11} > 0, \qquad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (20.58)$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

и равенствами (20.55) и (20.57), составим дифференциальные уравнения малых колебаний. Имеем ($a_{jk} = \text{const}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -(c_{11}q_1 + c_{12}q_2).$$

Следовательно, уравнение для координаты q_1 будет

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0.$$

Второе уравнение может быть получено аналогичным способом.

Принимая во внимание, что $a_{12} = a_{21}$ и $c_{12} = c_{21}$, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \tag{20.59}$$

Таким образом, малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия описываются двумя линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений будем искать в форме

$$q_1 = A \sin (kt + \varepsilon), \quad q_2 = B \sin (kt + \varepsilon), \tag{20.60}$$

где A, B, k и ε — неизвестные постоянные.

Продифференцируем выражения для q_1 и q_2 дважды по времени t:

$$\ddot{q}_1 = -Ak^2 \sin (kt + \varepsilon), \qquad \ddot{q}_2 = -Bk^2 \sin (kt + \varepsilon)$$

и подставим полученные выражения в уравнения (20.59):

$$-a_{11}Ak^2 \sin (kt + \varepsilon) - a_{12}Bk^2 \sin (kt + \varepsilon) + \\ + c_{11}A \sin (kt + \varepsilon) + c_{12}B \sin (kt + \varepsilon) = 0,$$

$$-a_{21}Ak^2 \sin (kt + \varepsilon) - a_{22}Bk^2 \sin (kt + \varepsilon) + \\ + c_{21}A \sin (kt + \varepsilon) + c_{22}B \sin (kt + \varepsilon) = 0.$$

Для того чтобы эти равенства удовлетворялись тождественно при любых t, вычислим коэффициенты при $\sin (kt + \varepsilon)$ и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2) A + (c_{12} - a_{12}k^2) B &= 0, \\ (c_{21} - a_{21}k^2) A + (c_{22} - a_{22}k^2) B &= 0. \end{aligned} \tag{20.61}$$

Эти алгебраические линейные однородные уравнения относительно A и B должны иметь решение, отличное от нуля (в противном случае согласно (20.60) $q_1 \equiv q_2 \equiv 0$, что соответствует покою, а не движению). Поэтому определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{20.62}$$

Раскрывая определитель, получим

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0, \tag{20.63}$$

или

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) k^4 - \\ - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12}) k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \tag{20.64}$$

Уравнение (20.62), или эквивалентные ему уравнения (20.63) и (20.64), называется *уравнением частот*, или *вековым уравнением*.

Докажем, что оба корня этого уравнения относительно k^2 вещественны и положительны. Для доказательства обозначим левую часть уравнения (20.64) или, что то же самое, уравнения (20.63) через $\Delta(k^2)$. Тогда, пользуясь соотношениями (20.56) и (20.58), будем иметь

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad \Delta(\infty) > 0,$$

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\frac{(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2}{a_{11}^2} < 0, \quad \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\frac{(a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22})^2}{a_{22}^2} < 0$$

(значения $k^2 = 0$ и $k^2 = \infty$ подставлялись в левую часть уравнения (20.64), а значения $k^2 = c_{11}/a_{11}$ и $k^2 = c_{22}/a_{22}$ — в левую часть эквивалентного ему уравнения (20.63)).

Это означает, что между $k^2 = 0$ и $k^2 = \infty$ график функции $\Delta = \Delta(k^2)$ пересекает ось абсцисс в двух точках (рис. 20.9), определяющих два положительных корня k_1^2 и k_2^2 уравнения частот (при построении графика предполагалось для определенности, что $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$ и $k_1^2 < k_2^2$).

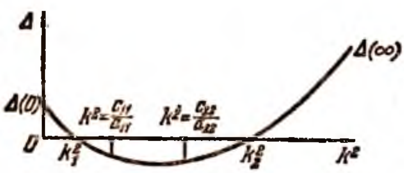


Рис. 20.9

Прежде чем перейти к дальнейшему, заметим, что в том случае, когда уравнения (20.61) распадаются на два независимых уравнения (это будет при $a_{12} = a_{21} = 0$ и $c_{12} = c_{21} = 0$), соответствующие частоты колебаний будут (они называются *парциальными частотами*)

$$k_1^* = \sqrt{c_{11}/a_{11}}, \quad k_2^* = \sqrt{c_{22}/a_{22}}.$$

Из полученных выражений и рис. 20.9 видно, что парциальные частоты больше меньшей частоты системы k_1 и меньше большей частоты системы k_2.

Извлечем теперь из k_1^2 и k_2^2 квадратные корни и воспользуемся только положительными значениями k_1 и k_2. Каждому корню k_1 и k_2 будет отвечать одно частное решение (20.60), причем каждой частоте k_1 и k_2 отвечают свои значения A, B и ε. Частные решения линейно независимы, поэтому общее решение будет равно их линейной комбинации:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2),$$
$$q_2 = B_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2).$$

Между числами A_1 и B_1, A_2 и B_2 имеется связь, которая устанавливается уравнениями (20.61). Если подставить в эти уравнения k_1 или k_2, то определитель системы (20.61) обратится в нуль. Следовательно, из двух уравнений этой системы независимых только одно. Возьмем одно из этих уравнений, например первое (при решении практических задач нужно выбирать наиболее простое уравнение), и найдем из него отношение

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{a_{12}k_i^2 - c_{12}} = \mu_i \quad (i = 1,\ 2). \tag{20.65}$$

Каждому значению частоты k_1 и k_2 отвечают соответствующие значения μ_1 и μ_2. Вычислив их по формуле (20.65), найдем

$$B_1 = \mu_1 A_1,\ B_2 = \mu_2 A_2. \tag{20.66}$$

Теперь общее решение примет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \tag{20.67}$$

В этом решении частоты k_1 и k_2 и коэффициенты μ_1 и μ_2 — известные числа, характеризующие данную систему, A_1, A_2, ε_1 и ε_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Из формы общего решения видно, что движение системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия складывается из двух независимых колебаний:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), & q_1^{(2)} &= A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2^{(1)} &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), & q_2^{(2)} &= \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Первое колебание в обеих координатах происходит с частотой k_1, а второе с частотой k_2. Эти колебания называются *главными*. Коэффициенты μ_1 и μ_2 определяют *формы колебаний*; согласно равенствам (20.65) они имеют простой физический смысл, показывая, во сколько раз амплитуда соответствующего главного колебания в одной из координат больше (или меньше) амплитуды другой координаты.

Из определения видно, что все координаты в каждом главном колебании изменяются по гармоническому закону, имея одинаковые частоты и фазы. Это означает, что они (т. е. координаты) одновременно обращаются в нуль, одновременно достигают максимальных значений и т. п., причем координаты в каждом главном колебании находятся в постоянном отношении μ_i, не зависящем от начальных условий.

Частоты колебаний (точнее, круговые частоты) k_1 и k_2, а также коэффициенты μ_1 и μ_2 являются основными характеристиками малых колебаний системы с двумя степенями свободы.

В заключение отметим, что методы составления и интегрирования дифференциальных уравнений малых колебаний системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия без всяких изменений могут быть распространены на системы с бо́льшим числом степеней свободы.

§ 20.7. Задачи

При решении задач на исследование малых колебаний системы с несколькими степенями свободы около положения устойчивого равновесия можно, конечно, пользоваться полученными формулами. Однако значительно полезнее для каждого примера производить все преобразования с самого начала. Это объясняется тем, что метод запомнить значительно проще, чем формулы.

Задача 20.5. Определить малые колебания двойного математического маятника (рис. 20.10).

Выражения для кинетической и потенциальной энергий двойного математического маятника были получены ранее (см. формулы (18.32) и (19.15)):

$$T = {}^1/_2\,[(m_1 + m_2)\,l_1^2\dot\varphi_1^2 + 2m_2l_1l_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\,\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + m_2l_2^2\dot\varphi_2^2],$$
$$\Pi = -(m_1 + m_2)\,gl_1\cos\varphi_1 - m_2gl_2\cos\varphi_2.$$

Среди коэффициентов инерции только один коэффициент, а именно $a_{12} = m_2l_1l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$, зависит от обобщенных координат φ_1 и φ_2. Согласно общей теории заменим этот коэффициент на его значение в положении равновесия при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, т. е. положим приближенно

Рис. 20.10

$$m_2l_1l_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx m_2l_1l_2.$$

Кинетическая энергия двойного математического маятника для малых колебаний принимает вид

$$T = {}^1/_2\,[(m_1 + m_2)\,l_1^2\dot\varphi_1^2 + 2m_2l_1l_2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + m_2l_2^2\dot\varphi_2^2].$$

Потенциальную энергию разложим в ряд по степеням φ_1 и φ_2, ограничиваясь членами не выше второго порядка малости. Имеем

$$\cos\varphi_1 = 1 - \varphi_1^2/2, \quad \cos\varphi_2 = 1 - \varphi_2^2/2.$$

Следовательно, для малых колебаний (постоянные слагаемые отброшены)

$$\Pi = {}^1/_2\,(m_1 + m_2)\,gl_1\varphi_1^2 + {}^1/_2 m_2gl_2\varphi_2^2.$$

Пользуясь этими выражениями для кинетической и потенциальной энергий, составим дифференциальные уравнения Лагранжа, определяющие малые колебания двойного математического маятника:

для координаты φ_1:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1} = (m_1 + m_2)\,l_1^2\dot\varphi_1 + m_2l_1l_2\dot\varphi_2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1} = (m_1 + m_2)\,l_1^2\ddot\varphi_1 + m_2l_1l_2\ddot\varphi_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = -(m_1 + m_2)\,gl_1\varphi_1;$$

для координаты φ_2:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_2} = m_2l_1l_2\dot\varphi_1 + m_2l_2^2\dot\varphi_2, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_2} = m_2l_1l_2\ddot\varphi_1 + m_2l_2^2\ddot\varphi_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi_2} = -m_2gl_2\varphi_2.$$

Следовательно, уравнения малых колебаний имеют вид (первое уравнение сокращено на l_1, а второе на m_2l_2; кроме того, все члены перенесены в левые части уравнений)

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,l_1\ddot\varphi_1 + m_2l_2\ddot\varphi_2 + (m_1 + m_2)\,g\varphi_1 &= 0,\\ l_1\ddot\varphi_1 + l_2\ddot\varphi_2 + g\varphi_2 &= 0.\end{aligned} \tag{20.68}$$

Общее решение будем искать в форме (20.60):

$$\varphi_1 = A\sin(kt+\varepsilon), \quad \varphi_2 = B\sin(kt+\varepsilon).$$

Отсюда следует

$$\ddot{\varphi}_1 = -Ak^2\sin(kt+\varepsilon), \quad \ddot{\varphi}_2 = -Bk^2\sin(kt+\varepsilon).$$

Подставим значения φ_1, φ_2, $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$ в уравнения (20.68) и приравняем к нулю коэффициенты при $\sin(kt+\varepsilon)$. После группировки членов получим алгебраические уравнения (20.61):

$$\begin{gathered}(m_1+m_2)(g-l_1k^2)A - m_2l_2k^2B = 0,\\ -l_1k^2A + (g-l_2k^2)B = 0.\end{gathered} \tag{20.69}$$

Так как A и B не равны нулю одновременно, то определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)(g-l_1k^2) & -m_2l_2k^2 \\ -l_1k^2 & g-l_2k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приведем частотное уравнение к виду

$$m_1l_1l_2k^4 - (m_1+m_2)(l_1+l_2)gk^2 + (m_1+m_2)g^2 = 0.$$

Дальнейшие вычисления в общем виде производить не рационально. Нужно задать числовые значения параметров двойного математического маятника либо соотношения между ними. Будем считать, что оба маятника одинаковы: $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$. Тогда частотное уравнение примет вид

$$k^4 - 4\frac{g}{l}k^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0.$$

Отсюда найдем две круговые частоты собственных колебаний:

$$k_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})g/l}, \quad k_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})g/l}. \tag{20.70}$$

Пользуясь вторым уравнением (20.69), найдем отношения амплитуд

$$\mu = \frac{B}{A} = \frac{l_1k^2}{g-l_2k^2}.$$

Подставляя сюда найденные значения для k_1^2 и k_2^2, получим ($l_1 = l_2 = l$)

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}, \quad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Следовательно, $B_1 = \sqrt{2}A_1$, $B_2 = -\sqrt{2}A_2$.

Теперь можно составить общее решение дифференциальных уравнений (20.68):

$$\begin{gathered}\varphi_1 = A_1\sin(k_1t+\varepsilon_1) + A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2),\\ \varphi_2 = \sqrt{2}A_1\sin(k_1t+\varepsilon_1) - \sqrt{2}A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2),\end{gathered} \tag{20.71}$$

где k_1 и k_2 определены равенствами (20.70).

Произвольные постоянные A_1, A_2, ε_1 и ε_2 находятся из начальных условий. Пусть, например,

при $t = 0$

$$\begin{gathered}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_0,\\ \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0,\end{gathered} \tag{20.72}$$

т. е. в начальный момент первый маятник занимал крайнее нижнее положение, второй маятник был отклонен на угол φ_0 и система была отпущена без начальной скорости.

Продифференцируем φ_1 и φ_2 по времени:

$$\dot\varphi_1 = A_1k_1\cos(k_1t+\varepsilon_1) + A_2k_2\cos(k_2t+\varepsilon_2),$$

$$\dot\varphi_2 = \sqrt{2}A_1k_1\cos(k_1t+\varepsilon_1) - \sqrt{2}A_2k_2\cos(k_2t+\varepsilon_2).$$

Подставим в эти выражения для $\dot\varphi_1$ и $\dot\varphi_2$ и в равенства (20.71) начальные условия

$$0 = A_1k_1\cos\varepsilon_1 + A_2k_2\cos\varepsilon_2, \qquad 0 = \sqrt{2}A_1k_1\cos\varepsilon_1 - \sqrt{2}A_2k_2\cos\varepsilon_2,$$

$$0 = A_1\sin\varepsilon_1 + A_2\sin\varepsilon_2, \qquad \varphi_0 = \sqrt{2}A_1\sin\varepsilon_1 - \sqrt{2}A_2\sin\varepsilon_2.$$

Из первых двух уравнений найдем $\cos\varepsilon_1 = \cos\varepsilon_2 = 0$, откуда $\varepsilon_1 = \pi/2$, $\varepsilon_2 = \pi/2$. Теперь вторая пара уравнений принимает вид

$$A_1 + A_2 = 0, \qquad A_1 - A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_0.$$

Следовательно, $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\varphi_0$, $A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\varphi_0$. Частное решение, соответствующее начальным условиям (20.72), будет

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\varphi_0(\cos k_1t - \cos k_2t), \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2}\varphi_0(\cos k_1t + \cos k_2t).$$

Главные колебания согласно (20.71) определяются следующими равенствами первое главное колебание:

$$\varphi_1^{(1)} = A_1\sin(k_1t+\varepsilon_1), \qquad \varphi_2^{(1)} = \sqrt{2}A_1\sin(k_1t+\varepsilon_1);$$

второе главное колебание:

$$\varphi_1^{(2)} = A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2), \qquad \varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2}A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2).$$

Формы главных колебаний изображены на рис. 20.11. Если в первом главном колебании первый маятник отклонится от вертикали на угол $\varphi_1^{(1)}$, то второй отклонится в ту же сторону на угол $\varphi_2^{(1)} = \sqrt{2}\varphi_1^{(1)}$. Во втором главном колебании при

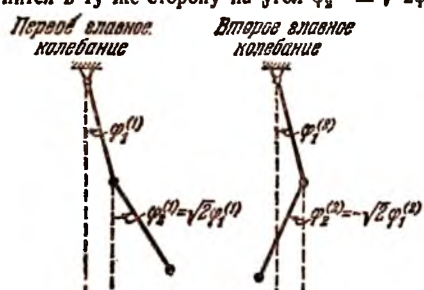


Рис. 20.11

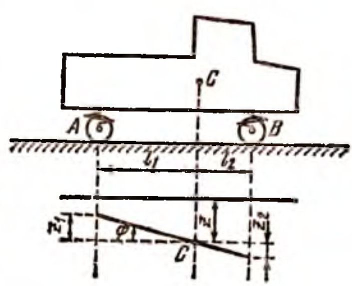


Рис. 20.12

отклонении первого маятника на угол $\varphi_1^{(2)}$ второй маятник отклонится в противоположную сторону на угол $\varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2}\varphi_1^{(2)}$.

Задача 20.6. Определить колебания автомобиля в его средней вертикальной плоскости при следующих условиях: масса подрессоренной части автомобиля равна m, расстояния от центра тяжести C до вертикальных плоскостей, проведенных через оси колес, равны l_1 и l_2, радиус инерции подрессоренной части относительно центральной оси, параллельной оси автомобиля, ρ, жесткости рессор c_1 и c_2.

Так как колебания автомобиля происходят в его средней вертикальной плоскости, то система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем вертикальное перемещение z центра масс C автомобиля и угол φ поворота вокруг оси, проходящей через точку C параллельно осям (рис. 20.12).

Кинетическая энергия на основании теоремы Кёнига будет равна

$$T = {}^1/_2\, m\dot{z}^2 + {}^1/_2\, I_C\dot{\varphi}^2,$$

где $I_G = m\rho^2$ — момент инерции автомобиля.

Потенциальная энергия П системы складывается из потенциальной энергии $\Pi_1 = -mgz$ силы тяжести и потенциальной энергии $\Pi_2 = \Pi_A + \Pi_B$ рессор A и B. Из рис. 20.12 видно, что деформация пружины A от положения равновесия для малых углов равна $z - z_1 = z - l_1\varphi$, а с учетом статической деформации f_A она будет $f_A + z - l_1\varphi$. Поэтому потенциальная энергия пружины A

$$\Pi_A = {}^1/_2 c_1 \left(f_A + z - l_1\varphi\right)^2 - {}^1/_2 c_1 f_A^2.$$

Аналогично для пружины B

$$\Pi_B = {}^1/_2 c_2 \left(f_B + z + l_2\varphi\right)^2 - {}^1/_2 c_2 f_B^2.$$

Потенциальная энергия всей системы равна

$$\Pi = -mgz + {}^1/_2 c_1 \left(f_A + z - l_1\varphi\right)^2 + {}^1/_2 c_2 \left(f_B + z + l_2\varphi\right)^2 - {}^1/_2 c_1 f_A^2 - {}^1/_2 c_2 f_B^2.$$

В положении равновесия при $z = 0$ и $\varphi = 0$ должны выполняться равенства (20.2):

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = 0.$$

Имеем

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = \left[-mg + c_1\left(f_A + z - l_1\varphi\right) + c_2\left(f_B + z + l_2\varphi\right)\right]_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = -mg + c_1 f_A + c_2 f_B,$$

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right|_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = \left[-c_1 l_1\left(f_A + z - l_1\varphi\right) + c_2 l_2\left(f_B + z + l_2\varphi\right)\right]_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = -c_1 l_1 f_A + c_2 l_2 f_B.$$

Следовательно, параметры системы удовлетворяют условиям

$$-mg + c_1 f_A + c_2 f_B = 0, \qquad -c_1 l_1 f_A + c_2 l_2 f_B = 0. \tag{20.73}$$

Раскроем в выражении для потенциальной энергии скобки и сгруппируем члены:

$$\Pi = \left(-mg + c_1 f_A + c_2 f_B\right) z + \left(c_2 l_2 f_B - c_1 l_1 f_A\right)\varphi + {}^1/_2\left(c_1 + c_2\right) z^2 + \left(c_2 l_2 - c_1 l_1\right) z\varphi + {}^1/_2\left(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2\right)\varphi^2,$$

или, принимая во внимание равенства (20.73),

$$\Pi = {}^1/_2\left(c_1 + c_2\right) z^2 + \left(c_2 l_2 - c_1 l_1\right) z\varphi + {}^1/_2\left(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2\right)\varphi^2.$$

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \qquad L = T - \Pi$$

после очевидных операций приводятся к такому виду:

$$m\ddot{z} + \left(c_1 + c_2\right) z + \left(c_2 l_2 - c_1 l_1\right)\varphi = 0,$$

$$I_C\ddot{\varphi} + \left(c_2 l_2 - c_1 l_1\right) z + \left(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2\right)\varphi = 0.$$

Запишем полученные дифференциальные уравнения малых колебаний автомобиля следующим образом (напомним, что $I_G = m\rho^2$):

$$\ddot{z} + az + b\varphi = 0, \qquad \ddot{\varphi} + \frac{b}{\rho^2} z + \frac{e}{\rho^2}\varphi = 0, \tag{20.74}$$

где

$$a=\frac{c_1+c_2}{m}, \qquad b=\frac{c_2 l_2-c_1 l_1}{m}, \qquad e=\frac{c_1 l_1^2+c_2 l_2^2}{m}. \tag{20.75}$$

Ищем решение уравнений в форме (20.60):

$$z=A\sin(kt+\varepsilon), \qquad \varphi=B\sin(kt+\varepsilon).$$

Подставляя z, $\ddot{z}$, φ и $\ddot{\varphi}$ в дифференциальные уравнения движения и приравнивая нулю коэффициенты при $\sin(kt+\varepsilon)$, получим систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно A и B:

$$(a-k^2)A+bB=0, \qquad \frac{b}{\rho^2}A+\left(\frac{e}{\rho^2}-k^2\right)B=0. \tag{20.76}$$

Так как при колебаниях A и B не равны нулю одновременно, то определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a-k^2 & b \\ \dfrac{b}{\rho^2} & \dfrac{e}{\rho^2}-k^2 \end{vmatrix}=0.$$

Это уравнение частот после раскрытия определителя и группировки членов примет вид

$$k^4-\left(\frac{e}{\rho^2}+a\right)k^2+\frac{ae-b^2}{\rho^2}=0,$$

откуда

$$k^2=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\rho^2}+a\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{e}{\rho^2}+a\right)^2-\frac{ae-b^2}{\rho^2}},$$

или

$$k_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\rho^2}+a\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{e}{\rho^2}-a\right)^2+\frac{b^2}{\rho^2}}.$$

Из первого уравнения системы (20.76) найдем отношения амплитуд

$$\mu_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{b}{k_1^2-a}, \qquad \mu_2=\frac{A_2}{B_2}=\frac{b}{k_2^2-a}.$$

Теперь составим общее решение дифференциальных уравнений малых колебаний (20.74):

$$z=\mu_1 B_1\sin(k_1t+\varepsilon_1)+\mu_2 B_2\sin(k_2t+\varepsilon_2),$$
$$\varphi=B_1\sin(k_1t+\varepsilon_1)+B_2\sin(k_2t+\varepsilon_2).$$

Здесь k_1 и k_2, μ_1 и μ_2 вычисляются по установленным формулам, а произвольные постоянные B_1, B_2, ε_1 и ε_2 определяются из начальных условий.

Рассмотрим численный пример: $m=4000$ кг, $\rho=1{,}2$ м, $l_1=1{,}5$ м, $l_2=1{,}3$ м, $c_1=2{,}94$ кН/см, $c_2=1{,}96$ кН/см. После подстановки этих значений получим $k_1=10{,}06$ рад/с, $k_2=13{,}9$ рад/с, что соответствует 95,6 колеб/мин и 133 колеб/мин. Найдем теперь отношения амплитуд: $\mu_1=A_1/B_1=218$ см/рад $=3{,}8$ см/град, $\mu_2=A_2/B_2=-66$ см/рад $=-1{,}15$ см/град.

Таким образом, если в первом главном колебании центр масс опустится на 3,8 см, то автомобиль повернется одновременно по ходу часовой стрелки на один градус. Во втором главном колебании при опускании центра масс на 1,15 см автомобиль повернется против хода часовой стрелки на один градус. Формы главных колебаний показаны на рис. 20.13.

Если $c_1 = c_2 = c$, $l_1 = l_2 = l$ (соответствует железнодорожным вагонам), то по формулам (20.75) будем иметь

$$a = 2\frac{c}{m}, \qquad b = 0, \qquad e = 2\frac{cl^2}{m}.$$

Дифференциальные уравнения малых колебаний (20.74) в этом случае разделяются:

$$\ddot{z} + az = 0, \qquad \ddot{\varphi} + \frac{e}{\rho^2}\varphi = 0,$$

и, следовательно, колебания в каждой координате будут независимыми друг от друга.

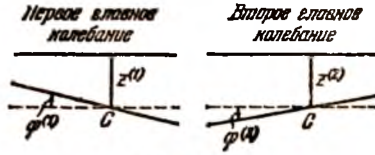


Рис. 20.13

Задача 20.7. Электромотор массы $m_1 = 100$ кг установлен на фундаменте с помощью амортизаторов, суммарная жесткость которых равна $c_1 = 490$ Н/см. Учитывая упругость фундамента, определить вертикальные колебания системы, если приведенная масса фундамента $m_2 = 1000$ кг, а его упругие свойства характеризуются коэффициентом жесткости $c_2 = 245$ Н/см (рис. 20.14, *а*).

Схематично представим фундамент в виде тела *II*, установленного на пружине жесткости c_2 (рис. 20.14, *б*). Тело *I* (мотор) связано с телом *II* с помощью пружины жесткости c_1.

Обозначим через O_1 и O_2 положения равновесия соответствующих тел. На систему, состоящую из двух тел, действуют активные силы тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$ и

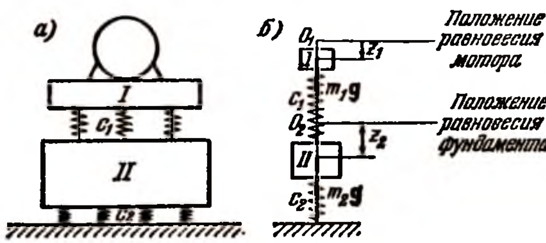


Рис. 20.14

упругие силы пружин. Положение системы будем определять двумя обобщенными координатами z_1 и z_2 (z_i — вертикальное перемещение центра тяжести тела i от соответствующего положения равновесия). Кинетическая энергия системы равна

$$T = {}^1/_2 m_1 \dot{z}_1^2 + {}^1/_2 m_2 \dot{z}_2^2.$$

Потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии сил тяжести и потенциальной энергии двух пружин:

$$\Pi = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 + {}^1/_2 c_1 (f_1 + z_2 - z_1)^2 + {}^1/_2 c_2 (f_2 + z_2)^2 - {}^1/_2 c_1 f_1^2 - {}^1/_2 c_2 f_2^2,$$

где f_1 и f_2 — статические деформации пружин. Раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$\Pi = (-m_1 g - c_1 f_1) z_1 + (-m_2 g + c_1 f_1 + c_2 f_2) z_2 + {}^1/_2 c_1 (z_2 - z_1)^2 + {}^1/_2 c_2 z_2^2.$$

В положении равновесия при $z_1 = z_2 = 0$ должны выполняться равенства (20.2):

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_1}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_2}\right)_0 = 0.$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_1}\right)_{z_1=z_2=0} = -m_1 g - c_1 f_1 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_2}\right)_{z_1=z_2=0} = -m_2 g + c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0.$$

В силу этих равенств выражение для потенциальной энергии системы примет вид

$$\Pi = {}^1/_2 c_1 (z_2 - z_1)^2 + {}^1/_2 c_2 z_2^2.$$

Воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Для координаты z_1 имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot z_1} = m_1 \dot z_1, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z_1} = m_1 \ddot z_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial z_1} = c_1 (z_2 - z_1).$$

Подставляя соответствующие выражения и перенося все члены в левую часть, получим дифференциальные уравнения малых колебаний рассматриваемой системы (уравнение для z_2 составлено аналогично)

$$m_1 \ddot z_1 + c_1 z_1 - c_1 z_2 = 0, \qquad m_2 \ddot z_2 - c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2 = 0. \tag{20.77}$$

Будем искать решение в форме (20.60):

$$z_1 = A \sin (kt + \varepsilon), \qquad z_2 = B \sin (kt + \varepsilon).$$

Продифференцируем эти выражения для z_1 и z_2 дважды по времени, подставим в дифференциальные уравнения движения, приравняем к нулю коэффициенты при $\sin (kt + \varepsilon)$ и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} (c_1 - m_1 k^2) A - c_1 B &= 0, \\ -c_1 A + (c_1 + c_2 - m_2 k^2) B &= 0. \end{aligned} \tag{20.78}$$

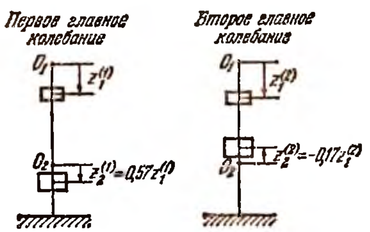


Рис. 20.15

Составим уравнение частот

$$\begin{vmatrix} c_1 - m_1 k^2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель,

$$m_1 m_2 k^4 - [m_1 (c_1 + c_2) + m_2 c_1] k^2 + c_1 c_2 = 0.$$

Подставляя численные значения и деля на коэффициент при k^4, получим

$$k^4 - 784\, k^2 + 120\,000 = 0.$$

Отсюда найдем $k_1^2 = 209$, $k_2^2 = 575$ и частоты главных колебаний $k_1 = 14{,}5$ рад/с, $k_2 = 24{,}0$ рад/с.

Из первого уравнения (20.78) определим отношения амплитуд для каждого главного колебания:

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{c_1 - m_1 k_1^2}{c_1} = 0{,}57, \qquad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{c_1 - m_1 k_2^2}{c_1} = -0{,}17.$$

Формы главных колебаний показаны на рис. 20.15. В первом главном колебании оба тела перемещаются в одну сторону, во втором — в разные стороны (на рисунке по-прежнему точки O_1 и O_2 — положения равновесия тел).

В заключение отметим, что все методы, изложенные для систем с двумя степенями свободы, почти без всяких изменений переносятся на системы с любым числом степеней свободы. В частности, уравнение частот малых колебаний консервативной системы с s степенями свободы имеет вид (см. уравнение (20.62))

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & c_{12}-a_{12}k^2 & \cdots & c_{1s}-a_{1s}k^2 \\ c_{21}-a_{21}k^2 & c_{22}-a_{22}k^2 & \cdots & c_{2s}-a_{2s}k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1}-a_{s1}k^2 & c_{s2}-a_{s2}k^2 & \cdots & c_{ss}-a_{ss}k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (20.79)$$

Принципиально можно решить задачу о малых колебаниях системы с любым числом степеней свободы. Однако в общем случае при решении задач приходится преодолевать ряд трудностей чисто вычислительного характера. Наибольшие затруднения возникают при решении уравнения частот (20.79). Уже раскрытие определителя при $s > 2$ представляет трудоемкий процесс. Действительно, определитель порядка s содержит $s!$ членов, каждый из которых для уравнения (20.79) состоит из произведения s биномов вида $c_{ij} - a_{ij}k^2$. Таким образом, если раскрыть определитель (20.79), то в общем случае получится $2^s s!$ слагаемых. Так, для $s = 3$ число слагаемых равно $2^3 \cdot 3! = 48$, а при $s = 4$ это число будет $2^4 \cdot 4! = 384$.

Для того чтобы оценить сложность и значение этой проблемы, укажем, что над ее решением работали Лагранж, Лаплас, Гаусс, Леверье, Якоби, Лобачевский, Крылов и многие другие ученые. Были разработаны различные точные и приближенные методы, позволяющие упростить численное решение уравнения частот и связанных с этим задач *).

С появлением электронных вычислительных машин многие из ранее разработанных методов утратили свое значение, некоторые из них легли в основу программ работы вычислительных машин. В настоящее время в сложных случаях решение осуществляется на цифровых электронных вычислительных машинах дискретного действия. Кроме цифровых вычислительных машин, используются также аналоговые (моделирующие) электронные машины непрерывного действия. Об этом рассказано более подробно в § 2.7.

§ 20.8. Нормальные координаты

Сложность решения дифференциальных уравнений (20.59) малых колебаний консервативной системы:

$$\begin{gathered} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0 \end{gathered} \qquad (20.80)$$

---

*) Изложение некоторых из этих методов можно найти, например, в следующих работах: Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1966; Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1963; Бабаков И. М. Теория колебаний. — М.: Гостехиздат, 1958.

объясняется тем, что эти уравнения связаны между собой. Если бы можно было найти такие координаты θ_1 и θ_2 (они называются *нормальными*, или *главными координатами*), в которых дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\theta}_1 + \lambda_1\theta_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_2 + \lambda_2\theta_2 = 0, \tag{20.81}$$

где $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, то решение определилось бы сразу:

$$\theta_1 = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_1}t + \varepsilon_1\right), \quad \theta_2 = A_2 \sin\left(\sqrt{\lambda_2}t + \varepsilon_2\right) \tag{20.82}$$

(A_1, A_2, ε_1 и ε_2 — произвольные постоянные интегрирования).

Покажем, что существует линейное преобразование, с помощью которого можно перейти от обобщенных координат q_1 и q_2 к нормальным координатам θ_1 и θ_2. Для этого умножим первое уравнение (20.80) на l_1, а второе на l_2 и сложим почленно оба уравнения (l_1 и l_2 — пока не известные множители). Имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[(a_{11}l_1 + a_{21}l_2)q_1 + (a_{12}l_1 + a_{22}l_2)q_2\right] +$$
$$+ \left[(c_{11}l_1 + c_{21}l_2)q_1 + (c_{12}l_1 + c_{22}l_2)q_2\right] = 0. \tag{20.83}$$

Возьмем еще одно число λ и подчиним числа l_1, l_2 и λ двум условиям:

$$\begin{aligned} c_{11}l_1 + c_{21}l_2 &= \lambda\,(a_{11}l_1 + a_{21}l_2), \\ c_{12}l_1 + c_{22}l_2 &= \lambda\,(a_{12}l_1 + a_{22}l_2). \end{aligned} \tag{20.84}$$

Введем теперь новую переменную θ по формуле

$$\theta = (a_{11}l_1 + a_{21}l_2)\,q_1 + (a_{12}l_1 + a_{22}l_2)\,q_2. \tag{20.85}$$

Тогда дифференциальное уравнение (20.83) примет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda\theta = 0. \tag{20.86}$$

Уравнения (20.84) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda a_{11})\,l_1 + (c_{21} - \lambda a_{21})\,l_2 &= 0, \\ (c_{12} - \lambda a_{12})\,l_1 + (c_{22} - \lambda a_{22})\,l_2 &= 0. \end{aligned} \tag{20.87}$$

Для существования ненулевого решения этой системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно l_1 и l_2 необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{21} - \lambda a_{21} \\ c_{12} - \lambda a_{12} & c_{22} - \lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{20.88}$$

Это уравнение совпадает с уравнением частот (20.62), и, следовательно, два корня этого уравнения, λ_1 и λ_2, совпадают с k_1^2 и k_2^2, где k_1 и k_2 — частоты главных колебаний. Так как каждому корню λ_1 и λ_2 соответствует своя система значений чисел l_1 и l_2 (они определяются из уравнений (20.87)), то согласно равенству (20.85) мы получим две координаты, θ_1 и θ_2, удовлетворяющие двум уравнениям вида (20.86). Таким образом, преобразование (20.85) приводит нас к нормальным координатам.

Из приведенного доказательства следует, что переход к нормальным координатам не сокращает вычисления по сравнению с решением исходных дифференциальных уравнений (уравнение для определения λ совпадает с уравнением частот, а уравнения (20.87) совпадают с уравнениями (20.61), служащими для определения форм главных колебаний). Поэтому нормальные координаты имеют главным образом теоретическое значение для доказательства различных положений.

В заключение заметим, что кинетическая и потенциальная энергии в нормальных координатах имеют вид

$$T = {}^1\!/_2\,(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2), \quad \Pi = {}^1\!/_2\,(\lambda_1\theta_1^2 + \lambda_2\theta_2^2), \tag{20.89}$$

где $\lambda_1 = k_1^2$ и $\lambda_2 = k_2^2$.

§ 20.9. Функция рассеяния Релея

Исследуем, какое влияние оказывают силы сопротивления на движение потенциальной системы. Будем считать, что сила сопротивления $\mathbf{F}_k$, приложенная к точке M_k, направлена в сторону, противоположную скорости $\mathbf{v}_k$ точки M_k:

$$\mathbf{F}_k = -F_k\frac{\mathbf{v}_k}{v_k},$$

где F_k — модуль силы $\mathbf{F}_k$.

Пусть, далее, F_k зависит только от модуля скорости v_k. Разлагая $F_k = F_k(v_k)$ в ряд по степеням v_k и ограничиваясь членами первого порядка, получим

$$F_k = F_k(0) + F_k'(0)\,v_k.$$

Если при покое сила сопротивления не равна нулю ($F_k(0) \neq 0$), то говорят, что имеется *сухое трение*. Такой случай встречается при наличии трения скольжения и трения качения. Если же $F_k(0) = 0$, т. е. при покое сила сопротивления равна нулю, то говорят, что имеет место *вязкое трение*. Этот случай встречается при движении в сопротивляющейся среде.

В случае вязкого трения имеем

$$\mathbf{F}_k = -b_k\mathbf{v}_k, \tag{20.90}$$

где все постоянные коэффициенты $b_k = F_k'(0)$ неотрицательны (так как F_k и v_k — модули соответствующих величин).

Положение системы будем определять обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Тогда согласно формуле (18.27) обобщенные силы сопротивления Q_j' будут равны

$$Q_j' = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q_j}.$$

Воспользуемся тождеством (19.6) и выражением (20.90) для силы $\mathbf{F}_k$:

$$Q'_j = -\sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j}, \quad \text{или} \quad Q'_j = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{k=1}^{n} b_k v_k^2;$$

при этом учтено, что $\mathbf{v}_k^2 = v_k^2$.

Введем обозначение

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k v_k^2. \tag{20.91}$$

Функция Φ называется *функцией рассеивания Релея*, или *диссипативной функцией* (происхождение этого термина будет объяснено в дальнейшем). В этих обозначениях обобщенные силы сопротивления примут вид (для общности мы считаем, что число степеней свободы равно s)

$$Q'_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{20.92}$$

Выразим функцию рассеивания Φ через обобщенные скорости $\dot{q}$. Для этого заметим, что выражение (20.91) по своей форме полностью совпадает с выражением для кинетической энергии (10.1) (массы точек m_k заменены неотрицательными коэффициентами b_k). Поэтому при стационарных связях выражение функции Релея Φ через обобщенные скорости $\dot{q}$ будет совпадать по форме с аналогичным выражением (19.26) для кинетической энергии. Изменятся только коэффициенты квадратичной формы. Обозначив эти коэффициенты через b_{ij}, получим

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{20.93}$$

причем $b_{ij} = b_{ji}$.

Будем считать, что на рассматриваемую материальную систему действуют потенциальные силы и силы сопротивления. Тогда обобщенные силы

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q'_j,$$

или, учитывая равенства (20.92),

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{20.94}$$

Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода примут такой вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{20.95}$$

Покажем, что при наличии сил сопротивления полная механическая энергия убывает. Действительно, умножим каждое уравнение на $\dot{q}_j$ и сложим почленно все уравнения:

$$\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j. \quad (20.96)$$

Члены, стоящие в левой части этого равенства, и первая сумма правой части преобразуются к виду (см. формулы (19.29) и (19.30)) $\frac{d}{dt}(T+\Pi)$, так как при стационарных связях $T_0=0$ и $T_2=T$.

Функция Релея согласно равенству (20.93) представляет однородную квадратичную форму относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$. Поэтому на основании теоремы Эйлера об однородных функциях (см. примечание на стр. 408) будем иметь

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2\Phi.$$

Теперь равенство (20.96) может быть записано в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi) = -2\Phi. \quad (20.97)$$

Так как функция Релея Φ согласно (20.91) неотрицательна, то

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi) < 0$$

и, следовательно, полная механическая энергия под действием сил сопротивления убывает или рассеивается, переходя, конечно, в другие формы энергии (например, тепловую). Из равенства (20.97) следует, что функция Релея может служить мерой рассеивания энергии, чем оправдывается ее название. На этом же основании силы сопротивления называются часто *диссипативными силами*.

Если функция рассеивания Релея (20.93) определенно положительна относительно обобщенных скоростей, то диссипация называется *полной*. Если же функция Релея может, кроме положительных значений, принимать значения, равные нулю, когда не все $\dot{q} = 0$, то диссипация называется *неполной*, или *частичной*.

Все выводы этого раздела были получены нами в предположении, что действуют силы $\mathbf{F}_k$ вязкого трения, причем их модули пропорциональны модулям соответствующих скоростей v_k, а по направлению силы $\mathbf{F}_k$ противоположны скоростям $\mathbf{v}_k$ (предположение о линейности самой системы для вывода формулы (20.97) не требуется). Полученные результаты можно обобщить на силы сопротивления более общей природы *)

---

*) См. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, гл. 5, § 5.11; Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1976, § 6.2.

§ 20.10. Влияние сил сопротивления на колебания системы около положения устойчивого равновесия

Пусть на потенциальную систему с двумя степенями свободы, движущуюся около положения устойчивого равновесия, действуют, помимо потенциальных сил, еще силы вязкого трения. Обобщенные силы сопротивления вычислим по формуле (20.92):

$$Q_j' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1,\ 2),$$

где диссипативная функция Релея определена равенством (20.93). Выполняя дифференцирование, найдем

$$Q_j' = -(b_{j1}\dot{q}_1 + b_{j2}\dot{q}_2) \qquad (j = 1,\ 2).$$

Присоединяя обобщенные силы сопротивления Q_j' к уравнениям (20.59) и перенося все члены в левую часть, получим дифференциальные уравнения малых колебаний под действием потенциальных и диссипативных сил:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{aligned} \tag{20.98}$$

Будем искать решение этих уравнений в следующей форме:

$$q_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = A_2 e^{\lambda t}, \tag{20.99}$$

где A_1, A_2 и λ — некоторые постоянные числа, которые требуется определить. Продифференцируем эти выражения для q_1, q_2 дважды по времени:

$$q_j = A_j e^{\lambda t}, \qquad \dot{q}_j = A_j \lambda e^{\lambda t}, \qquad \ddot{q}_j = A_j \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставим значения координат и их производных в уравнения (20.98), сократим полученные равенства на общий множитель $e^{\lambda t}$ и сгруппируем члены. В результате получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} (a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})\,A_1 + (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})\,A_2 = 0, \\ (a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21})\,A_1 + (a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22})\,A_2 = 0. \end{aligned} \tag{20.100}$$

Так как эти линейные однородные уравнения относительно A_1, A_2 должны иметь решение, отличное от нулевого, то определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{20.101}$$

Можно доказать (мы не будем на этом останавливаться), что вещественные части корней этого характеристического уравнения отрицательны либо равны нулю. Таким образом, корни этого уравнения могут иметь вид

$$\lambda = -h \pm ni, \quad \lambda = -m, \quad \lambda = \pm ki,$$

где h, n, m и k — вещественные положительные числа.

Вещественным отрицательным корням (они бывают при больших силах сопротивления; см. § 2.3) соответствует апериодическое движение

$$q = Ae^{-mt}.$$

Чисто мнимым корням (они могут появиться при частичной диссипации) отвечают главные колебания вида

$$q = A\sin(kt + \varepsilon).$$

Комплексно сопряженным корням отвечают затухающие главные колебания

$$q = Ae^{-ht}\sin(nt + \varepsilon).$$

Обычно силы сопротивления невелики. В этом случае при полной (а иногда и при частичной) диссипации все корни характеристического уравнения (20.101) будут комплексно сопряженными с отрицательными вещественными частями:

$$-h_1 \pm n_1 i, \quad -h_2 \pm n_2 i.$$

Каждой паре комплексно сопряженных корней отвечает свое главное затухающее колебание. Поэтому общее решение уравнений (20.98) имеет при этих условиях такой вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)}e^{-h_1 t}\sin(n_1 t + \varepsilon_1) + A_1^{(2)}e^{-h_2 t}\sin(n_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 &= A_2^{(1)}e^{-h_1 t}\sin(n_1 t + \varepsilon_1) + A_2^{(2)}e^{-h_2 t}\sin(n_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \tag{20.102}$$

В этом решении из четырех чисел $A_j^{(k)}$ произвольных только два, остальные определяются из уравнений (20.100) подобно тому, как это было сделано в § 20.6 при определении форм главных колебаний.

§ 20.11. Приближенный метод вычисления корней характеристического уравнения

Покажем, что при небольших по модулю силах сопротивления (случай, чаще всего встречающийся на практике) вычисление корней характеристического уравнения значительно упрощается, так как их мнимые и вещественные части приближенно могут быть вычислены независимо друг от друга. Действительно, при небольших силах сопротивления можно считать, что они зависят от малого параметра ε:

$$b_{jk} = \varepsilon\beta_{jk},$$

где β_{jk} — некоторые, вообще говоря, конечные числа.

Характеристическое уравнение (20.101) в развернутой форме будет иметь вид (с точностью до членов первого порядка относительно ε)

$$a_0\lambda^4 + \varepsilon a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + \varepsilon a_3\lambda + a_4 = 0. \tag{20.103}$$

Положим $\varepsilon = 0$ и $\lambda = \pm kl$; тогда характеристическое уравнение (20.103) переходит в уравнение частот незатухающих колебаний (20.64):

$$a_0k^4 - a_2k^2 + a_4 = 0. \tag{20.104}$$

Разложим вещественную и мнимую части корня λ уравнения (20.103) в ряды по степеням ε, ограничиваясь членами первого порядка относительно ε:

$$\lambda = \alpha\varepsilon + (\beta + \varepsilon\gamma)\, i,$$

где α, β и γ — вещественные числа.

Заметим, что вещественная часть λ не имеет свободного от ε члена, так как все корни уравнения (20.104) относительно k^2 вещественны и положительны (см. § 20.7), а следовательно, при $\varepsilon = 0$ корни уравнения (20.103) — чисто мнимые числа.

Вычислим λ^2, λ^3, λ^4, придерживаясь все время принятой точности. Имеем

$$\lambda^2 = -\beta^2 - 2\varepsilon\beta\gamma + 2\varepsilon\alpha\beta i, \quad \lambda^3 = -3\varepsilon\alpha\beta^2 - (\beta^3 + 3\varepsilon\beta^2\gamma)\, i,$$
$$\lambda^4 = \beta^4 + 4\varepsilon\beta^3\gamma - 4\varepsilon\alpha\beta^3 i.$$

Внесем выражения для λ, λ^2, λ^3, λ^4 в уравнение (20.103), отделим вещественную и мнимые части и сгруппируем члены по степеням ε, сохраняя члены не выше первого порядка:

$$[(a_0\beta^4 - a_2\beta^2 + a_4) + 2\beta\gamma(2a_0\beta^2 - a_2)\varepsilon] -$$
$$-\beta\varepsilon i\,[(4a_0\beta^2 - 2a_2)\,\alpha + (a_1\beta^2 - a_3)] = 0.$$

Это равенство может выполняться при всех ε только в том случае, если

$$a_0\beta^4 - a_2\beta^2 + a_4 = 0, \quad \gamma = 0, \quad (4a_0\beta^2 - 2a_2)\,\alpha + (a_1\beta^2 - a_3) = 0.$$

Так как $\gamma = 0$, то мнимая часть корня характеристического уравнения с точностью выше первого порядка относительно ε равна корню уравнения (20.104). Иначе говоря, частоты затухающих колебаний с указанной точностью совпадают с частотами незатухающих колебаний.

Пусть $\beta_j = k_j$ — одна из частот незатухающих колебаний. Тогда из последнего равенства будем иметь (мы перешли к старым обозначениям $\lambda = -h \pm ni$, в которых $h = -\alpha\varepsilon$)

$$h_j = \frac{1}{2}\,\frac{a_1k_j^2 - a_3}{2a_0k_j^2 - a_2}\,\varepsilon \qquad (j = 1,\ 2). \tag{20.105}$$

Формула (20.105) справедлива при условии, что k_j не является кратным корнем уравнения частот (20.104), так как в противном случае знаменатель правой части этого равенства обращается в нуль.

Обозначим точные значения корней характеристического уравнения (20.103) через $\lambda_j^* = -h_j^* \pm n_j i$, а приближенные значения через $\lambda_j = -h_j \pm k_j i$, где h_j вычислены по формулам (20.105), а k_j — корни частотного уравнения (20.104). Покажем, что сумма точных значений корней характеристического уравнения равна сумме их приближенных значений. Действительно, пусть k_1^2 и k_2^2 — корни уравнения частот (20.104); тогда по формулам Виета будем иметь

$$k_1^2+k_2^2=a_2/a_0, \qquad k_1^2k_2^2=a_4/a_0.$$

Вычислим по формуле (20.105) соответствующие значения h_1 и h_2:

$$h_1=\frac{1}{2}\,\frac{a_1k_1^2-a_3}{2a_0k_1^2-a_2}\,\varepsilon, \qquad h_2=\frac{1}{2}\,\frac{a_1k_2^2-a_3}{2a_0k_2^2-a_2}\,\varepsilon.$$

Найдем затем сумму этих коэффициентов

$$h_1+h_2=\frac{1}{2}\left[\frac{a_1k_1^2-a_3}{2a_0k_1^2-a_2}+\frac{a_1k_2^2-a_3}{2a_0k_2^2-a_2}\right]\varepsilon,$$

или

$$h_1+h_2=\frac{1}{2}\,\frac{4a_0a_1k_1^2k_2^2-(2a_0a_3+a_1a_2)(k_1^2+k_2^2)+2a_2a_3}{4a_0^2k_1^2k_2^2-2a_0a_2(k_1^2+k_2^2)+a_2^2}\,\varepsilon.$$

Пользуясь выражениями для $k_1^2+k_2^2$ и $k_1^2k_2^2$, после очевидных преобразований получим

$$h_1+h_2=\frac{1}{2}\,\frac{a_1}{a_0}\,\varepsilon.$$

Составим сумму приближенных значений корней характеристического уравнения. Имеем ($\lambda=-h\pm ki$)

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=-2\,(h_1+h_2).$$

Учитывая последнее равенство, найдем

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=-\frac{a_1}{a_0}\,\varepsilon.$$

Воспользуемся теперь первой формулой Виета для точных значений корней характеристического уравнения (20.103):

$$\lambda_1^*+\lambda_2^*+\lambda_3^*+\lambda_4^*=-\frac{a_1}{a_0}\,\varepsilon.$$

Сравнивая оба выражения, видим, что суммы приближенных и точных значений корней характеристического уравнения одинаковы. Это может служить дополнительным оправданием введения приближенных формул (20.105).

На основании доказанного при малом сопротивлении можно рекомендовать следующий порядок вычисления корней характеристического уравнения:

1. Выделить малый параметр ε и привести характеристическое уравнение (20.101) к виду (20.103).
2. Положить $\varepsilon=0$ и составить уравнение частот (20.104).
3. Определить частоты колебаний, положив $n_j\approx k_j$.

4. Вычислить вещественные части корней уравнения (20.103) по формуле (20.105).

Заметим также, что при малом сопротивлении формы главных колебаний мало отличаются от соответствующих форм незатухающих колебаний.

Задача 20.8. Электромотор установлен с помощью амортизаторов на упругом фундаменте (см. задачу 20.7 § 20.7). Гашение возникающих собственных колебаний осуществляется двумя демпферами A и B (рис. 20.16), создающими силу сопротивления, пропорциональную относительной скорости; коэффициент суммарной силы сопротивления $b = 4{,}9$ Н·с/см. Определить параметры затухающих колебаний.

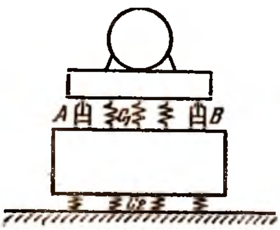


Рис. 20.16

Скорость электромотора относительно фундамента равна $\dot{z}_2 - \dot{z}_1$. Будем для определенности считать, что $\dot{z}_2 > \dot{z}_1 > 0$. Тогда относительная скорость электромотора будет направлена вверх, а сила сопротивления $\mathbf{F}_{1c}$, приложенная к электромотору, вниз; очевидно, что сила сопротивления $\mathbf{F}_{2c}$, приложенная к фундаменту, направлена вверх (силы сопротивления $\mathbf{F}_{1c}$ и $\mathbf{F}_{2c}$ для рассматриваемой системы являются внутренними силами). Из этого следует, что обобщенные силы сопротивления, соответствующие обобщенным координатам z_1 и z_2, будут

$$Q_1' = b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \qquad Q_2' = -b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1).$$

Функция рассеивания Релея (20.93) определяется равенством

$$\Phi = {}^1/_2\, b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2.$$

Легко проверить справедливость равенств (20.92):

$$Q_1' = -\partial\Phi/\partial\dot{z}_1, \qquad Q_2' = -\partial\Phi/\partial\dot{z}_2.$$

Отметим, что функция рассеивания не является определенно положительной, так как при $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 \neq 0$ она обращается в нуль.

Присоединяя к правым частям уравнений незатухающих колебаний (20.77) обобщенные силы сопротивления, получим дифференциальные уравнения затухающих колебаний

$$m_1\ddot{z}_1 - b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_1 z_1 - c_1 z_2 = 0,$$
$$m_2\ddot{z}_2 + b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2 = 0.$$

В соответствии с общей теорией будем искать решение в форме

$$z_1 = Ae^{\lambda t}, \quad z_2 = Be^{\lambda t},$$

откуда

$$\dot{z}_1 = A\lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{z}_1 = A\lambda^2 e^{\lambda t}, \quad \dot{z}_2 = B\lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{z}_2 = B\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставим эти выражения для z, $\dot{z}$ и $\ddot{z}$ в дифференциальные уравнения движения, сократим их на $e^{\lambda t}$ и сгруппируем члены:

$$(m_1\lambda^2 + b\lambda + c_1) A - (b\lambda + c_1) B = 0,$$
$$-(b\lambda + c_1) A + (m_2\lambda^2 + b\lambda + c_1 + c_2) B = 0.$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2 + b\lambda + c_1 & -(b\lambda + c_1) \\ -(b\lambda + c_1) & m_2\lambda^2 + b\lambda + c_1 + c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, будем иметь

$$m_1 m_2 \lambda^4 + b(m_1 + m_2)\lambda^3 + [(c_1 + c_2)m_1 + c_1 m_2 + b^2]\lambda^2 + bc_2\lambda + c_1 c_2 = 0.$$

При заданных значениях ($m_1 = 100$ кг, $m_2 = 1000$ кг, $c_1 = 490$ Н/см, $c_2 = 245$ Н/см, $b = 4{,}9$ Н·с/см) коэффициент b можно принять за малый параметр $\varepsilon = b$. В принятых для уравнения (20.103) обозначениях имеем

$$a_0 = m_1 m_2, \quad a_1 = m_1 + m_2, \quad a_2 = (c_1 + c_2)m_1 + c_1 m_2, \quad a_3 = c_2, \quad a_4 = c_1 c_2,$$

причем в a_2 отброшен малый член b^2.

Если в характеристическом уравнении положим $b = 0$ и $\lambda = ki$, то получим уравнение частот

$$m_1 m_2 k^4 - [(c_1 + c_2)m_1 + c_1 m_2]k^2 + c_1 c_2 = 0.$$

Корни этого уравнения были найдены при решении задачи 20.7 § 20.7: $k_1^2 = 209$ рад/с^2, $k_1 = 14{,}5$ рад/с, $k_2^2 = 575$ рад/с^2, $k_2 = 24{,}0$ рад/с. Внося в формулу (20.105) соответствующие значения параметров, найдем $h_1 = 0{,}105$ рад/с, $h_2 = 2{,}60$ рад/с.

Положив приближенно $n_j = k_j$, получим корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -0{,}105 \pm 14{,}5i, \quad \lambda_{3,4} = -2{,}6 \pm 24i.$$

Как уже отмечалось, при малом сопротивлении формы главных колебаний затухающих колебаний практически совпадают с соответствующими формами незатухающих колебаний. Поэтому, пользуясь значениями для μ_1 и μ_2, вычисленными в задаче 20.7 § 20.7, найдем главные колебания затухающих колебаний

$$z_1^{(1)} = A_1 e^{-0{,}105t}\sin(14{,}5t + \varepsilon_1), \qquad z_1^{(2)} = A_2 e^{-2{,}6t}\sin(24t + \varepsilon_2),$$

$$z_2^{(1)} = 0{,}57A_1 e^{-0{,}105t}\sin(14{,}5t + \varepsilon_1), \qquad z_2^{(2)} = -0{,}17A_2 e^{-2{,}6t}\sin(24t + \varepsilon_2).$$

Первое главное колебание затухает значительно медленнее, чем второе. Это объясняется тем, что в первом главном колебании оба тела движутся в одном направлении, скорости вычитаются и сила сопротивления $F_c = b(\dot z_2 - \dot z_1)$ будет меньше, чем во втором главном колебании, когда движение тел происходит в разные стороны.

§ 20.12. Вынужденные колебания

Предположим, что к потенциальной системе, движущейся вблизи положения устойчивого равновесия, приложены также возмущающие силы. Обозначим обобщенную возмущающую силу, соответствующую обобщенной координате q_j, через $Q_j(t)$. Тогда дифференциальные уравнения движения можно получить, присоединяя к уравнениям (20.59) обобщенные силы $Q_j(t)$ (для простоты силами сопротивления пренебрегаем):

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot q_1 + a_{12}\ddot q_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1(t), \\ a_{21}\ddot q_1 + a_{22}\ddot q_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \tag{20.106}$$

Общее решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений складывается из общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения данной неоднородной системы. Соответствующая однородная система дифференциальных уравнений совпадает с системой (20.59), ее общее решение определяется равенствами (20.67). Поэтому, если

$q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ — какое-нибудь частное решение системы (20.106), то ее общее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + q_1^*(t), \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + q_2^*(t). \end{aligned} \tag{20.107}$$

Совокупность главных колебаний называется *собственными колебаниями*; движение, определяемое частным решением $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ — *вынужденным движением* (эти термины иногда нуждаются в уточнении). В тех случаях, когда возмущающие силы изменяются по гармоническому закону (H_j, p и δ — заданные числа)

$$Q_j(t) = H_j \sin(pt + \delta),$$

частное решение ищется в той же форме:

$$q_j^*(t) = M_j \sin(pt + \delta),$$

где M_j — неопределенные коэффициенты, подлежащие определению. При этом предполагается, что частота p возмущающей силы не совпадает ни с одной из частот k_1, k_2 собственных колебаний.

С помощью линейного преобразования перейдем в уравнениях (20.106) к нормальным координатам (см. § 20.8)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_1^2\theta_1 &= H_1^* \sin(pt + \delta), \\ \ddot{\theta}_2 + k_2^2\theta_2 &= H_2^* \sin(pt + \delta), \end{aligned}$$

где H_j^* — новые амплитудные значения возмущающих сил, а k_j — частоты собственных незатухающих колебаний исходной системы.

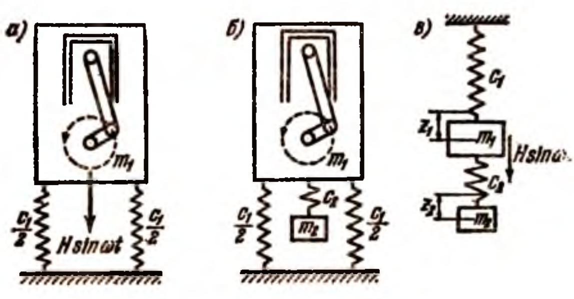


Рис. 20.17

Из этих уравнений видно, что резонанс в системе наступает при совпадении частоты p возмущающей силы с одной из частот собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим динамический поглотитель колебаний. На рис. 20.17, *а* приведена схема машины, установленной на упругой опоре. Если частота ω возмущающей силы $H \sin \omega t$, создаваемой движущимися внутри машины неуравновешенными массами, близка к собственной частоте $\sqrt{c_1/m_1}$ машины, то система будет работать в зоне резонанса и на фундамент будет передаваться чрезмерно большая нагрузка.

Подвесим к машине дополнительный груз массой m_2 (рис. 20.17, *б*; на рис. 20.17, *в* изображена эквивалентная система).

Сравнивая системы, изображенные на рисунках 20.14 и 20.17, *в*, видим, что они идентичны, поменялись местами только индексы у масс и у жесткостей пружин. Поэтому дифференциальные уравнения движения системы, изображенной на рис. 20.17, *б* и *в*, можно получить из уравнений (20.77), поменяв в них индексы и добавив в уравнение, отвечающее координате z_1, обобщенную силу $H \sin \omega t$:

$$\begin{gathered} m_1\ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) z_1 - c_2 z_2 = H \sin \omega t, \\ m_2\ddot{z}_2 - c_2 z_1 + c_2 z_2 = 0. \end{gathered} \tag{20.108}$$

Частное решение будем искать в форме

$$z_1 = M_1 \sin \omega t, \qquad z_2 = M_2 \sin \omega t.$$

Подставим значения для z_1 и z_2 в дифференциальные уравнения, сократим их на $\sin \omega t$ и сгруппируем члены:

$$(c_1 + c_2 - m_1\omega^2) M_1 - c_2 M_2 = H,$$

$$-c_2 M_1 + (c_2 - m_2\omega^2) M_2 = 0.$$

Решая эти уравнения относительно M_1 и M_2, получим

$$M_1 = \frac{(c_2 - m_2\omega^2) H}{(c_1 + c_2 - m_1\omega^2)(c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2},$$

$$M_2 = \frac{c_2 H}{(c_1 + c_2 - m_1\omega^2)(c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2}.$$

Теперь находим вынужденные колебания

$$z_1 = \frac{c_2 - m_2\omega^2}{(c_1 + c_2 - m_1\omega^2)(c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2} H \sin \omega t,$$

$$z_2 = \frac{c_2}{(c_1 + c_2 - m_1\omega^2)(c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2} H \sin \omega t.$$

Если параметры подвешенного груза подобрать так, что

$$c_2 - m_2\omega^2 = 0, \tag{20.109}$$

то машина не будет участвовать в вынужденных колебаниях. Действительно, в этом случае

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = -\frac{H}{c_2} \sin \omega t.$$

Таким образом, добавочный груз «поглотил» колебания машины. Из равенства (20.109) видно, что для «поглощения» колебаний машины параметры дополнительного груза должны удовлетворять условию $\sqrt{c_2/m_2} = \omega$, т. е. динамический поглотитель колебаний нужно настроить на резонанс с частотой возбуждающей силы. Заметим, что частота $\sqrt{c_2/m_2}$ не является одной из частот системы «машина + поглотитель колебаний». Это — парциальная частота; она соответствует динамическому поглотителю, подвешенному к неподвижной опоре.

Глава XXI

АВТОНОМНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ *)

§ 21,1. Введение

В предыдущей главе были рассмотрены колебания динамических систем, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти колебания называются также малыми колебаниями, так как линеаризация уравнений обосновывается предположением, что отклонения системы от положения равновесия малы.

Достоинства метода линеаризации состоят в основном в следующем:

1) во многих случаях этот метод дает вполне удовлетворительные результаты, описывая достаточно точно процесс колебаний не только с качественной, но и с количественной стороны;

2) интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами не содержит принципиальных трудностей и сводится к чисто алгебраическим вычислениям;

3) метод линеаризации применим не только к анализу колебаний механических систем около положения устойчивого равновесия, но он также может быть использован для исследования колебаний около любого устойчивого движения механических, электромеханических, электрических и других систем.

Отмечая достоинства метода линеаризации, следует все же иметь в виду, что при упрощении дифференциальных уравнений движения можно упустить ряд явлений, специфичных для систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями.

К таким явлениям, например, можно отнести явление «автоколебаний» — периодических колебаний, амплитуда и частота которых в широких пределах не зависят от начальных условий и определяются параметрами системы.

Имеются и другие интересные с теоретической стороны и очень важные по своим приложениям примеры, которые не могут быть объяснены линейной теорией колебаний. Кроме того, существует ряд нелинейных зависимостей, которые принципиально не могут быть линеаризованы (например, характеристика кулонова трения скольжения).

В связи с этим примерно с конца двадцатых годов нашего столетия начала интенсивно развиваться теория нелинейных колеба-

---

*) Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. — М.: Судпромгиз, 1962.

Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976.

ний, т. е. колебаний, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Материальные системы, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, называются *нелинейными системами.*

В теории нелинейных колебаний получает более глубокое развитие рассмотрение колебаний динамических систем, позволяющее изучить явления, недоступные линейной теории колебаний.

Безусловно, что нелинейные задачи значительно многообразнее, чем линейные, а изучение их представляет значительные трудности.

В настоящей главе, посвященной рассмотрению колебаний автономных нелинейных систем с одной степенью свободы, излагаются лишь некоторые методы исследования таких систем. Материалы этой главы следует рассматривать лишь как начальное введение в обширную и многообразную науку о колебаниях нелинейных систем.

§ 21.2. Фазовая плоскость

Одним из распространенных методов исследования нелинейных систем является метод фазовой плоскости (фазового пространства). Изложению этого метода на примере системы с одной степенью свободы и посвящен этот параграф *).

Многие задачи теории колебаний материальных систем с одной степенью свободы приводят к необходимости исследования дифференциального уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \tag{21.1}$$

где $f(x, \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$.

Вводя переменную $y = \dot{x}$, перепишем уравнения (21.1) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -f(x, y). \tag{21.2}$$

Полученная система уравнений представляет собой частный случай системы более общего вида

$$\dot{x} = P(x, y, t), \qquad \dot{y} = Q(x, y, t). \tag{21.3}$$

Если нелинейные функции P и Q не содержат явно времени, то система (21.3) называется *автономной системой*, а колебания, которые эта система описывает, называются *автономными*.

Если же функции P и Q содержат явно время, то система (21.3) называется *неавтономной*.

В этой главе будут рассматриваться только автономные системы.

*) Этот метод, разработанный и примененный к решению некоторых нелинейных задач радиотехники, механики, автоматического регулирования Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси, А. А. Андроновым и другими учеными, позволил решить многие нелинейные задачи и выявить специфические особенности нелинейных систем.

Вводя плоскость переменных x и $y = \dot{x}$, будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты.

Для простоты примем, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены на всей плоскости переменных x и y. Тогда каждому состоянию нелинейной системы, определяемому координатой x и скоростью $y = \dot{x}$, на плоскости xy будет соответствовать точка и, наоборот, каждая точка плоскости будет соответствовать только одному состоянию системы.

В связи с этим плоскость xy называют плоскостью состояний, или *фазовой плоскостью*. Каждому состоянию системы на фазовой плоскости соответствует одна точка, которую называют *изображающей точкой*.

При изменении состояния системы, т. е. при изменении координат x и $y = \dot{x}$, изображающая точка перемещается по фазовой плоскости. Траектория изображающей точки называется *фазовой траекторией*. Уравнение фазовой траектории представляет собой зависимость между координатой и скоростью движения рассматриваемой системы.

Целой фазовой траекторией называется кривая, которая описывается изображающей точкой за все время ее движения.

Положение изображающей точки на фазовой плоскости может быть определено радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

($\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы осей x и y). Следовательно, скорость изображающей точки (*фазовая скорость*) будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}. \tag{21.4}$$

Для исходной механической материальной системы производная $\dot{x}$ является скоростью изменения координаты x, а производная $\dot{y} = \ddot{x}$ — проекцией ускорения. Значит, точки фазовой плоскости, в которых фазовая скорость равна нулю, для исходной материальной системы будут соответствовать состояниям равновесия (скорость и ускорение системы одновременно равны нулю).

Деля второе уравнение системы (21.3) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{21.5}$$

Решение этого уравнения устанавливает связь между x и y, т. е. дает *интегральные кривые*.

Следует иметь в виду, что интегральные кривые лишь в простейших случаях являются фазовыми траекториями. Как это будет установлено ниже, интегральная кривая может состоять из нескольких фазовых траекторий.

В точках фазовой плоскости, где функции P и Q одновременно обращаются в нуль, т. е.

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \tag{21.6}$$

скорость изображающей точки равна нулю и, следовательно, для исходной материальной системы эти точки являются состояниями равновесия.

Точки фазовой плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнениям (21.6), для дифференциального уравнения (21.5) являются особыми точками; в этих точках не выполняются условия теоремы Коши о единственности решения дифференциального уравнения.

Таким образом, особые точки уравнения (21.5) имеют физический смысл как состояния равновесия исходной материальной системы.

Поведение фазовых траекторий на всей плоскости xy, а также вблизи особых точек позволяет судить как о характере движения исходной системы, так и о характере ее состояний равновесия. В качестве примера рассмотрим простейшую линейную систему.

Уравнение колебаний математического маятника имеет вид (стр. 122)

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0. \tag{21.7}$$

Введя обозначения $k^2=g/l$ и $x=\varphi$ и считая колебания малыми, получим

$$\ddot{x}+k^2x=0. \tag{21.8}$$

После замены $y=\dot{x}$ имеем

$$\dot{y}=-k^2x,\quad \dot{x}=y \tag{21.9}$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{k^2x}{y}. \tag{21.10}$$

Единственной особой точкой этого уравнения является точка $x=0$, $y=0$.

Интегрирование уравнения (21.10) дает

$$y^2+k^2x^2=c=\text{const}.$$

Полученная зависимость представляет собой семейство эллипсов. Каждый такой эллипс при конкретном значении постоянной c представляет собой фазовую траекторию, т. е. в этом случае интегральные кривые будут фазовыми траекториями. Полученное семейство эллипсов заполняет всю фазовую плоскость, за исключением начала координат. В этой точке эллипс, соответствующий $c=0$, вырождается в точку (рис. 21.1).

Особая точка, через которую не проходит ни одна фазовая траектория и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называется *центром*.

Поскольку модуль скорости изображающей точки равен

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{y^2+k^4x^2},$$

то фазовая скорость равна нулю только в особой точке ($x = 0$, $y = 0$).

Рассмотрение фазовой плоскости с нанесенными на ней фазовыми траекториями позволяет судить о характере движения системы. Направление движения изображающей точки можно определить по одному из уравнений (21.9), например, при $x > 0$ $\dot{y} < 0$, следовательно, y убывает (см. рис. 21.1).

Изображающая точка, начав движение из какой-либо точки фазовой траектории, по истечение конечного промежутка времени, возвратится опять в ту же точку, так как фазовая скорость равна нулю только при $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, система вернется в свое исходное положение, а это значит, что замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению.

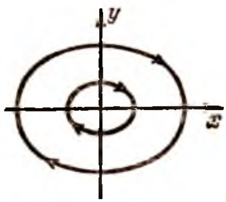


Рис. 21.1

Итак, нами установлено, что малые колебания маятника около устойчивого положения равновесия при любых начальных условиях совершаются по периодическому закону.

Рассмотрим теперь поведение маятника вблизи верхнего положения равновесия ($\varphi = \pi$).

Введя замену $\varphi = \psi + \pi$, перепишем уравнение (29.7) в виде

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l}\sin\psi = 0.$$

Для малых ψ, после замены ψ на x и g/l на k^2, будем иметь

$$\ddot{x} - k^2 x = 0.$$

Отсюда

$$\dot{y} = k^2 x, \quad \dot{x} = y \tag{21.11}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k^2 x}{y}.$$

Интегрируя это уравнение, получим уравнения интегральных кривых — семейство гипербол

$$y^2 - k^2 x = c, \tag{21.12}$$

заполняющих фазовую плоскость.

При $c = 0$ интегральная кривая вырождается в две прямые $y = kx$, $y = -kx$, проходящие через особую точку системы уравнений (21.11) $x = 0$, $y = 0$.

При $c \neq 0$ интегральные кривые через особую точку не проходят. Прямые $y = kx$ и $y = -kx$ являются асимптотами для интегральных кривых, для которых $c \neq 0$. Расположение интегральных кривых и направление движения по ним изображающей точки показано на рис. 21.2.

Отметим, что прямая $y = kx$ состоит из трех фазовых траекторий: прямой $y = kx$ при $x > 0$, особой точки $x = 0$, $y = 0$, прямой $y = kx$ при $x < 0$. Это же относится и к прямой $y = -kx$.

Таким образом, в рассматриваемом примере при любых начальных условиях, кроме соответствующих прямой $y = -kx$, изображающая точка или удаляется от особой точки или, вначале приближаясь к ней, затем удаляется от нее, причем движение исходной системы не является периодическим. Такая особая точка называется *седлом*.

Скорость изображающей точки равна нулю только в особой точке ($x = 0$, $y=0$).

Из этого следует, что состояние равновесия, соответствующее этой особой точке, является неустойчивым.

Движение по прямой $y = -kx$ соответствует такому случаю, когда изображающая точка, перемещаясь к особой точке со стремящейся к нулю скоростью, в конечный промежуток времени ее не достигает. Очевидно, что движение по этой прямой соответствует такой специально подобранной скорости, когда кинетическая энергия в начальный момент равна работе, которую должны совершить действующие силы, чтобы система попала в положение равновесия.

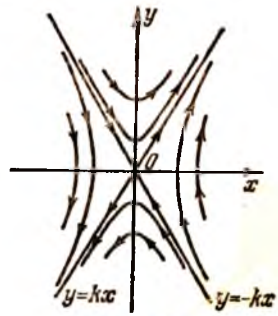


Рис. 21.2

Такое движение практически получить нельзя, так как нельзя точно реализовать такие начальные условия. Поэтому для всякого реального движения особая точка типа седла является неустойчивой.

На стр. 40 приведено уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы в среде с линейным сопротивлением

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0.$$

Заменяя $\dot{x}$ на y, имеем

$$\dot{y} = -2hy - k^2x, \quad \dot{x} = y$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - k^2x}{y}. \tag{21.13}$$

Единственной особой точкой этого уравнения является начало координат ($x = 0$, $y = 0$).

Уравнение интегральных кривых при $h < k$ имеет вид

$$(y^2 + 2hxy + k^2x^2)^{1/2} = ce^{\frac{h}{k^*}\operatorname{arctg}\frac{y+hx}{k^*x}}, \tag{21.14}$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Семейство интегральных кривых (21.14) заполняет всю фазовую плоскость. Фазовая скорость, равная $v = \sqrt{(2hy + k^2x)^2 + y^2}$, нигде не равна нулю, кроме особой точки, и стремится к нулю при приближении к этой точке.

Интегральные кривые являются в этом случае фазовыми траекториями и представляют собой спирали, навивающиеся на начало координат (рис. 21.3) Движение изображающей точки по фазовым траекториям происходит к началу координат (это видно из рассмотрения уравнений движения). Такая особая точка называется *устойчивым фокусом*.

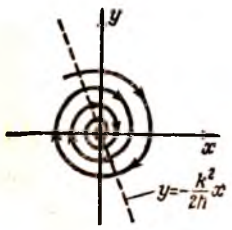


Рис. 21.3

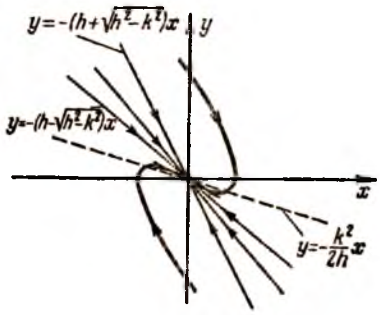


Рис. 21.4

Рассмотрение поведения фазовых траекторий позволяет сделать вывод, что при любых начальных условиях материальная точка совершает затухающие колебания, асимптотически приближаясь к состоянию равновесия.

При $h > k$ уравнение интегральных кривых будет

$$y^2 + 2hxy + k^2x^2 = c\left[\frac{y/x + h - \sqrt{h^2 - k^2}}{y/x + h + \sqrt{h^2 - k^2}}\right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2-k^2}}}$$

На рис. 21.4 показано примерное расположение интегральных кривых на плоскости xy. В этом случае фазовые траектории не совпадают с интегральными кривыми, так как каждая интегральная кривая состоит из трех фазовых траекторий: две из них соответствуют асимптотическим движениям изображающей точки к началу координат, а третья является особой точкой.

Особая точка, через которую проходят все интегральные кривые, называется *узлом*. В рассматриваемом случае изображающая точка по всем фазовым траекториям движется к особой точке, которая будет *устойчивым узлом*.

Для исходной системы устойчивый узел соответствует устойчивому состоянию равновесия. Представленные на рис. 21.4 фазовые траектории соответствуют апериодическому движению.

На основании фазовых представлений о простейшей линейной системе можно сделать следующие выводы:

1. Характер и расположение фазовых траекторий, направление движения по ним изображающей точки дают возможность судить о характере движения исходной материальной системы.

2. Особые точки и их характер определяют характер состояний равновесия материальной системы.

Эти обстоятельства требуют найти способы и приемы определения характера особых точек нелинейных уравнений, а также найти методы построения фазовых траекторий для нелинейных уравнений, особенно тогда, когда дифференциальные уравнения интегральных кривых не удается проинтегрировать.

Рассмотрим предварительно вопрос о типах и характере особых точек линейной однородной системы общего вида

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \tag{21.15}$$

где a, b, c, d — постоянные числа.

Характеристическое уравнение этой системы уравнений имеет вид

$$\alpha^2 - (a + d)\,\alpha + ad - cb = 0. \tag{21.16}$$

В дальнейшем ограничимся случаями, когда $a + d \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, т. е. случаями, когда отсутствуют чисто мнимые корни и нулевые корни.

Можно показать *), что для системы уравнений (21.15) могут быть следующие типы состояний равновесия:

1. Для корней уравнения (21.16) α_1 и α_2 действительных и отрицательных — устойчивый узел; изображающая точка движется по фазовым траекториям к состоянию равновесия.

2. Для α_1 и α_2 действительных и положительных — неустойчивый узел; изображающая точка движется по фазовым траекториям от состояния равновесия.

3. Для α_1 и α_2 действительных и разных знаков — седло.

4. Для α_1 и α_2 комплексно сопряженных при отрицательной действительной части — устойчивый фокус. Изображающая точка по фазовым траекториям (спиралям) приближается к состоянию равновесия.

5. Для α_1 и α_2 комплексно сопряженных при положительной действительной части — неустойчивый фокус. Изображающая точка по фазовым траекториям (спиралям) удаляется от состояния равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейной системы уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{21.17}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические нелинейные функции x и y. Предположим, что система уравнений (21.17) описывает поведение

*) Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

некоторой динамической системы, а координаты x и y являются координатами изображающей точки на фазовой плоскости.

Состояния равновесия исходной динамической системы являются особыми точками уравнения интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{21.18}$$

и находятся из уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \tag{21.19}$$

Пусть координаты особой точки будут x_0 и y_0. Поставим вопрос об определении характера и устойчивости этой точки, т. е. об определении устойчивости состояния равновесия исходной динамической системы.

Для ответа на вопрос об устойчивости особой точки с координатами x_0, y_0 выясним характер движения изображающей точки в окрестности особой точки. Для этого введем новые переменные ξ и η, характеризующие отклонения изображающей точки от точки с координатами x_0, y_0:

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta.$$

Разложим функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в ряды по степеням ξ и η. Эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + P'_x(x_0, y_0)\xi + P'_y(x_0, y_0)\eta + P_1(\xi, \eta), \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + Q'_x(x_0, y_0)\xi + Q'_y(x_0, y_0)\eta + Q_1(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{21.20}$$

где $P_1(\xi, \eta)$ и $Q_1(\xi, \eta)$ — функции, в которые ξ и η входят в степени не ниже второй.

Так как x_0, y_0 — координаты особой точки, что

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Вводя обозначения

$$a = P'_x(x_0, y_0), \quad b = P'_y(x_0, y_0), \quad c = Q'_x(x_0, y_0) \quad d = Q'_y(x_0, y_0)$$

и учитывая соотношения (21.20), перепишем уравнения (21.17) в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta + P_1(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta + Q_1(\xi, \eta). \tag{21.21}$$

Если отбросить в этих уравнениях функции $P_1(\xi, \eta)$ и $Q_1(\xi, \eta)$, то получим линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \tag{21.22}$$

Характеристическое уравнение системы уравнений (21.22) будет

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - cb = 0.$$

А. М. Ляпуновым было доказано, что в случае, когда оба корня этого уравнения имеют отличную от нуля действительную часть, состояние равновесия (особая точка) системы (21.21) асимптотически устойчиво, если действительные части корней отрицательны; если хотя бы одна действительная часть положительна, то состояние равновесия неустойчиво.

В случае, если действительные части корней характеристического уравнения равны нулю или если один из корней равен нулю, а другой отрицателен, то уравнения первого приближения (21.22) не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Характер поведения фазовых траекторий вблизи простых особых точек, т. е. точек, для которых оба корня характеристического уравнения имеют отличную от нуля действительную часть, также определяется уравнениями первого приближения (21.22) *).

Изложенное выше позволяет при определении характера и устойчивости особой точки нелинейной системы (21.17) пользоваться уравнениями первого приближения (21.22).

§ 21.3. Методы построения фазовых траекторий

Рассмотрим некоторые методы, позволяющие в ряде случаев точно или приближенно построить интегральные кривые на фазовой плоскости для динамической системы, имеющей одну степень свободы.

Консервативные системы. Пусть исходная система является консервативной. Дифференциальное уравнение движения такой системы можно привести к виду

$$m\ddot{x} = f(x)$$

(предполагаем, что $f(x)$ — аналитическая функция).

Это уравнение можно заменить двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{y} = \frac{1}{m} f(x), \quad \dot{x} = y. \tag{21.23}$$

Уравнение интегральных кривых в этом случае может быть проинтегрировано. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{my} \quad \text{и} \quad y\,dy = \frac{1}{m} f(x)\,dx,$$

то

$$\frac{y^2}{2} = h + \frac{1}{m}\int f(x)\,dx, \tag{21.24}$$

где h — постоянная интегрирования.

*) См., например, Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

Уравнение (21.24), представляющее собой уравнение интегральных кривых, выражает закон сохранения энергии, так как $m\dot{x}^2/2 = my^2/2$ — кинетическая энергия, а $\Pi = -\frac{1}{m}\int f(x)\,dx$ — потенциальная энергия исходной системы, поделенная на массу m.

После замены $y_1 = y\sqrt{2}$ соотношение (21.24) примет вид

$$y_1^2 = h - \Pi(x). \qquad (21.25)$$

Постоянная h определяется из начальных условий, причем каждому значению начальных условий соответствует одно значение h, каждому же значению h соответствует бесчисленное множество значений x и y, удовлетворяющих уравнению (21.25).

Построенная на фазовой плоскости в соответствии с уравнением (21.25) кривая называется *кривой равной энергии*. Ветви этой кривой являются фазовыми траекториями. Из уравнений (21.23) следует, что интегральные кривые пересекают ось x, имея вертикальные касательные ($\dot{x} = 0$). Кроме того, согласно (21.25) интегральные кривые симметричны относительно оси x.

Интегральные кривые будут иметь горизонтальные касательные в точках, расположенных на прямых, параллельных оси y, для всех x, являющихся корнями уравнения $f(x) = 0$.

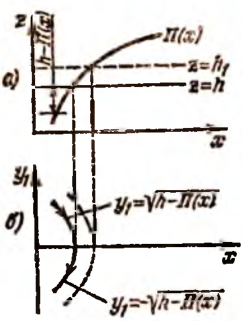


Рис. 21.5

Так как

$$y_1 = \sqrt{h - \Pi(x)}, \qquad (21.26)$$

то для x, удовлетворяющих неравенству $h - \Pi(x) < 0$, интегральные кривые действительных ветвей не имеют.

Особые точки, соответствующие состояниям равновесия исходной динамической системы, будут в точках фазовой плоскости, где $f(x) = 0$ и $y = 0$.

Для удобства введем в рассмотрение вспомогательную плоскость xz и построим на ней кривую $z = \Pi(x)$ (рис. 21.5, *а*).

Проведя прямую $z = h$, замечаем, что действительные движения будут только для x, расположенных левее точки пересечения кривой $z = \Pi(x)$ и прямой $z = h$. На рис. 21.5, *б* показан вид интегральной кривой на плоскости xy_1 (для $z = h_1 > h$ интегральная кривая показана пунктиром).

Рассмотрим случай, когда функция $z = \Pi(x)$ имеет минимум. Из рассмотрения рис. 21.6 следует, что при $h = h_0$ интегральная кривая вырождается в особую точку, где $f(x) = 0$ и $y = 0$. Для всех $h > h_0$ интегральные кривые будут замкнутыми кривыми, окружающими особую точку (центр).

Замкнутые интегральные кривые соответствуют периодическим движениям. Период этих движений определяется из уравнения (21.26).

Так как $y_1 = \dot{x}/\sqrt{2}$, то

$$dt = \frac{dx}{y_1\sqrt{2}} = \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}},$$

откуда следует, что искомый период равен

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}}, \tag{21.27}$$

где x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения интегральной кривой с осью x.

Пусть потенциальная энергия имеет максимум (рис. 21.7). При $h = h_0$ интегральная кривая распадается на четыре фазовые траектории, сходящиеся в особой точке. Эти фазовые траектории называются *усами*. При $h > h_0$ все фазовые траектории расположены выше

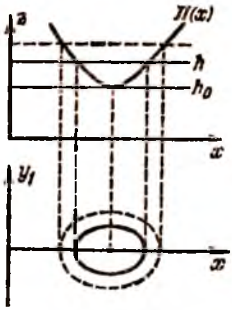


Рис. 21.6

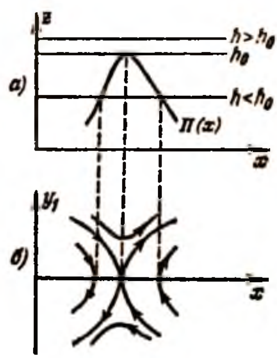


Рис. 21.7

и ниже особой точки, а при $h < h_0$ слева и справа от нее. Характер фазовых траекторий около особой точки подобен характеру фазовых траекторий у особой точки типа седла.

Рассмотренные случаи являются элементарным доказательством теоремы Лагранжа—Дирихле и теоремы Ляпунова, приведенных в § 20.2.

Перейдем теперь к рассмотрению возможных движений на всей фазовой плоскости. Будем по-прежнему предполагать, что $z = \Pi(x)$ является аналитической функцией для всех значений x. Построим на плоскости xz эту функцию и выясним возможный характер фазовых траекторий для какого-либо определенного значения z.

Возможны следующие случаи:

1. Кривая $z = \Pi(x)$ нигде не пересекается прямой $z = h$.

Если прямая $z = h$ лежит ниже кривой $z = \Pi(x)$, то на всей фазовой плоскости не будет движений, так как при этом y будет мнимым, т. е. движений с такой полной энергией у исходной системы не будет.

Если прямая $z = h$ лежит выше кривой $z = \Pi(x)$, то на фазовой плоскости будут две симметрично расположенные ветви интегральной кривой (рис. 21.8).

Для любых начальных условий, соответствующих точкам этой кривой, изображающая точка будет двигаться в одном направлении и уйдет в бесконечность.

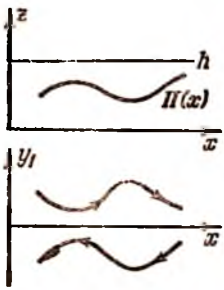


Рис. 21.8

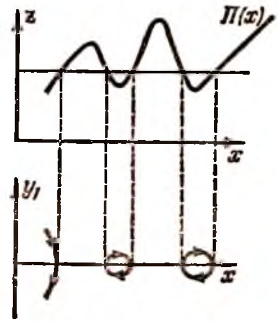


Рис. 21.9

Такие траектории называются *убегающими* траекториями.

2. Прямая $z = h$ пересекает кривую $z = \Pi(x)$, нигде ее не касаясь (рис. 21.9).

Для тех значений x, для которых $\Pi(x) > h$, фазовых траекторий не существует. Для x, для которых $\Pi(x) < h$, фазовые траектории могут быть двух видов: замкнутые ветви и ветви, уходящие в бесконечность. Замкнутые ветви соответствуют периодическим движениям, ветви, уходящие в бесконечность, соответствуют убегающим движениям.

3. Прямая $z = h$ имеет несколько точек касания с кривой $z = \Pi(x)$. В этом случае фазовые траектории возможны следующих видов:

а) изолированные точки, вблизи которых при данном h нет фазовых кривых. При изменении h мы будем иметь или замкнутую траекторию (при увеличении h) или не будем иметь действительных траекторий (при уменьшении h);

б) изолированные конечные куски фазовых траекторий (рис. 21.10). Это будут или просто замкнутые траектории, соответствующие периодическим движениям, или фазовые кривые с самопересечением, которые называются *сепаратрисами*. Точки самопересечения сепаратрис являются особыми точками типа седла и соответствуют точкам, где $z = h$ касается максимумов кривой $z = \Pi(x)$.

Сепаратрисы имеют очень большое значение, так как они отделяют друг от друга области, заполненные траекториями различных типов. В самом деле, при увеличении h мы получим интегральную кривую, охватывающую всю сепаратрису, при уменьшении h мы получим замкнутые траектории, которые показаны пунктиром на рис. 21.11;

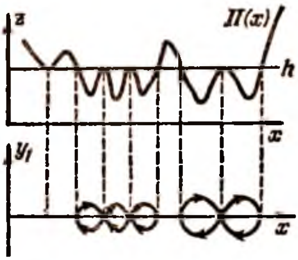


Рис. 21.10

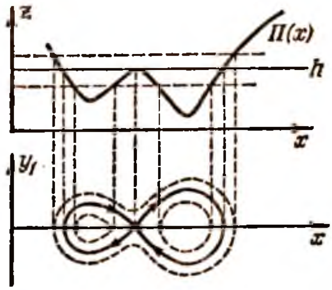


Рис. 21.11

в) бесконечные куски фазовых траекторий. Вид возможных фазовых траекторий показан на рис. 21.12. Здесь имеют место траектории, уходящие в бесконечность. Эти траектории также являются сепаратрисами, так как при изменении h мы получим существенно различные траектории.

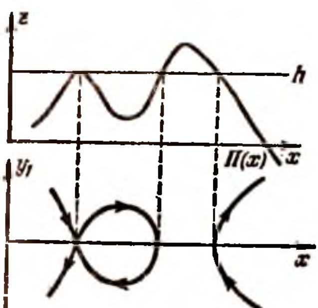


Рис. 21.12

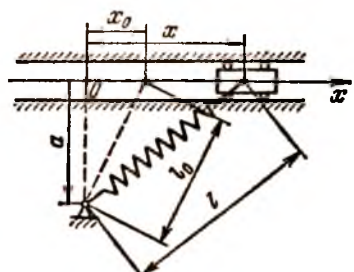


Рис. 21.13

Задача 21.1 *). Определить характер движения динамической системы, изображенной на рис. 21.13. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна $l_0 > a$. Жесткость пружины c. Масса тела m. Трением пренебречь.

Потенциальная энергия системы, поделенная на массу тела, равна

$$\Pi = \frac{c}{2m}(\Delta l)^2,$$

где $\Delta l = l - l_0$ — деформация пружины.

*) Идея задачи заимствована из книги: Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: ИЛ, 1961.

Так как $l = \sqrt{a^2 + x^2}$, $l_0 = \sqrt{a^2 + x_0^2}$, то

$$\Pi = \frac{c}{2m}\left(\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2+x_0^2}\right)^2 = \frac{ca^2}{2m}\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{x_0}{a}\right)^2}\right)^2.$$

Рассмотрим малые колебания системы и, ограничиваясь при разложении в ряд первыми членами одного порядка, отличными от нуля, получим

$$\Pi = \frac{c}{2m}\left[\frac{x_0^4}{4a^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 x^2 + \frac{x^4}{4a^2}\right]. \qquad (21.28)$$

Так как

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{c}{2m}\left[-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 x + \frac{x^3}{a^2}\right],$$

то значения x, где $\Pi(x)$ имеет экстремальные значения, определятся из уравнения

$$x\left[-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2}\right] = 0.$$

Корнями этого уравнения будут $x_1 = 0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0$. Найдя производную

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{c}{2m}\left[-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \frac{3x^2}{a^2}\right],$$

убеждаемся, что при $x = x_1 = 0$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = -\frac{cx_0^2}{2ma^2} < 0,$$

т. е. при $x = 0$ функция $\Pi(x)$ имеет максимум, равный $\Pi(0) = cx_0^4/(8ma^2)$.

При $x = \pm x_0$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{cx_0^2}{ma^2} > 0$$

и, следовательно, при этих значениях x функция $\Pi(x)$ имеет минимум, равный $\Pi(\pm x_0) = 0$.

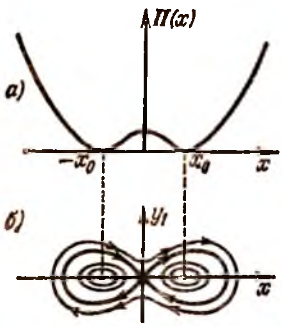


Рис. 21.14

Примерный вид функции $\Pi(x)$ показан на рис. 21.14, *а*. На рис. 21.14, *б* показаны фазовые траектории динамической системы. Жирными линиями показаны сепаратрисы.

Из рассмотрения рис. 21.14, *б* видно, что для начальных условий в областях внутри сепаратрис система совершает периодические движения около устойчивых положений равновесия ($x = x_0$ или $x = -x_0$). В начале координат — неустойчивая особая точка — седло (неустойчивое состояние равновесия).

Для начальных условий вне сепаратрис система совершает периодическое движение, симметричное относительно начала координат.

Метод изоклин. Общим методом построения интегральных кривых является графический метод изоклин.

Пусть уравнения движения динамической системы будут

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \qquad (21.29)$$

Уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \qquad (21.30)$$

где $\varphi(x, y) = Q(x, y)/P(x, y)$. Кривая

$$\varphi(x, y) = c \tag{21.31}$$

при фиксированном c представляет собой геометрическое место точек, в которых интегральные кривые имеют одинаковый угол наклона касательных, и называется *изоклиной*.

Метод изоклин заключается в следующем: на фазовой плоскости строится семейство изоклин, т. е. кривые (21.31) при различных значениях c. Пусть эти значения c будут $c_1, c_2, c_3, \ldots$

Отметим, что точки пересечения изоклин будут особыми точками уравнения (21.30) и, следовательно, состояниями равновесия для исходной динамической системы.

Возьмем теперь какую-либо точку A на изоклине, для которой $c = c_1$, и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом, равным c_1, затем проведем через эту же точку прямую с угловым коэффициентом, равным c_2 (рис. 21.15). Разделим теперь расстояние между точками пересечения этих прямых с изоклиной, для которой $c = c_2$, на две равные части и обозначим точку деления буквой $Б$. Отрезок $АБ$ и примем за отрезок интегральной кривой между рассматриваемыми изоклинами. Отметим, что для более точного построения этого участка интегральной кривой значения c_1 и c_2 нужно выбирать как можно более близкими друг к другу. Дальнейшее построение проводится аналогичным образом, только за исходную точку выбирается уже точка $Б$.

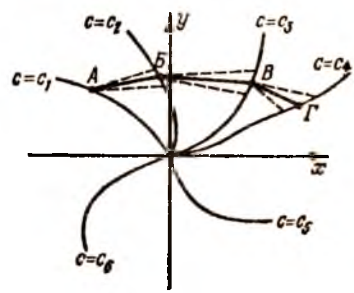


Рис. 21.15

Перейдем теперь к рассмотрению других приемов построения интегральных кривых, пригодных для некоторых частных случаев.

Метод Льенара *). Метод Льенара является графическим способом построения интегральных кривых для нелинейных уравнений вида

$$\ddot{x} + \varphi_1(\dot{x}) + k^2 x = 0. \tag{21.32}$$

Введем замену $\tau = kt$, тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}k \quad \text{и} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2}k^2$$

и, следовательно, уравнение (21.32) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0, \tag{21.33}$$

*) Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. — М.: ИЛ, 1952.

где

$$\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right)=\frac{1}{k^2}\varphi_1\left(k\frac{dx}{d\tau}\right).$$

Обозначив $dx/d\tau = y$, получим

$$\frac{dx}{d\tau}=y, \quad \frac{dy}{d\tau}=-\varphi(y)-x.$$

Уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\varphi(y)-x}{y}. \tag{21.34}$$

Построим теперь на фазовой плоскости xy кривую

$$x=-\varphi(y).$$

Возьмем на фазовой плоскости некоторую точку P с координатами x и y (рис. 21.16). Проведем из этой точки прямую, параллельную оси x, до пересечения с кривой $x = -\varphi(y)$. Обозначим точку пересечения буквой M. Из точки M опустим перпендикуляр MN на ось x.

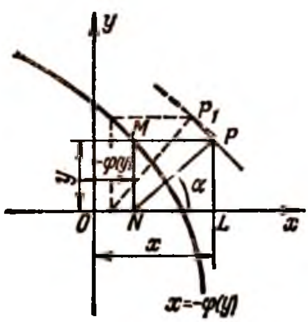


Рис. 21.16

Так как $MP = x - [-\varphi(y)] = x + \varphi(y)$, то тангенс угла наклона отрезка NP к оси x равен

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{PL}{MP}=\frac{y}{x+\varphi(y)}.$$

Следовательно, согласно (21.34) направление касательной к интегральной кривой, проходящей через точку P, будет перпендикулярно отрезку NP.

Таким образом, построение фазовой траектории можно провести следующим образом: через точку P проводим отрезок, перпендикулярный отрезку NP, на этом отрезке берем новую точку P_1 и определяем направление касательной к интегральной кривой указанным способом и т. д. В результате получим ломаную линию, которая будет тем ближе к интегральной кривой, чем меньше будут отрезки ломаной линии.

В приведенной ниже задаче показывается, когда построение Льенара сразу дает возможность точно построить интегральную кривую.

Задача 21.2. Влияние сухого трения на гармонический осциллятор.

Уравнение движения гармонического осциллятора при наличии сухого трения имеет вид

$$\ddot{x}+k^2x=T_x,$$

где $T_x = -T$ при $\dot{x} > 0$ и $T_x = T$ при $\dot{x} < 0$ $(T > 0)$.

Вводя $\tau = kt$, получим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right)+x=0,$$

где

$$\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right)=T_0=\frac{T}{k^2} \quad \text{при} \quad \frac{dx}{d\tau}>0 \quad \text{и} \quad \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right)=-T_0=-\frac{T}{k^2} \quad \text{при} \quad \frac{dx}{d\tau}<0.$$

Построим на фазовой плоскости кривую $x = -\varphi(y)$, где $y = dx/d\tau$.

Очевидно, что при $y > 0$ функция $x = -\varphi(y)$ будет иметь вид $x = -T_0$, а при $y < 0$ — вид $x = T_0$ (рис. 21.17).

Проводя для любой точки фазовой плоскости, где $y > 0$, построение Льенара, убеждаемся, что интегральная кривая, проходящая через эту точку, будет окружность с центром в точке O_1.

Для $y < 0$ интегральные кривые будут окружностями с центром в точке O_2. Вид фазовых траекторий показан на рис. 21.17. Заметим, что отрезок O_1O_2 является отрезком стыка фазовых траекторий — зоной «застоя». В точках этого отрезка величина упругой силы пружины меньше максимальной силы трения покоя.

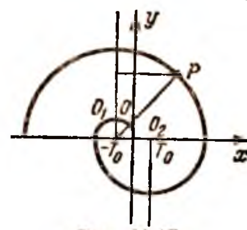


Рис. 21.17

§ 21.4. Метод припасовывания. Понятие об автоколебаниях

Метод припасовывания является одним из точных методов изучения движения нелинейных систем и применяется в том случае, когда нелинейная функция, входящая в дифференциальное уравнение движения, может быть заменена ломаной линией, каждое звено которой является прямолинейным отрезком. В этом случае движение системы будет описываться линейными уравнениями, сменяющими друг друга. Каждому звену ломаной линии будет соответствовать участок, на котором система описывается линейным дифференциальным уравнением.

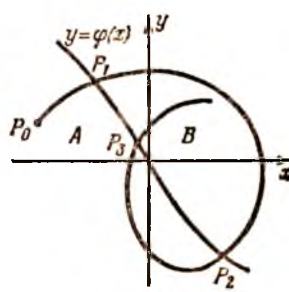


Рис. 21.18

Метод припасовывания заключается в следующем. Задавшись начальными условиями внутри какого-либо участка и решая соответствующее линейное дифференциальное уравнение, получим решение, справедливое на этом участке; затем определяем состояние системы (координату и скорость) на границе с соседним участком, на котором движение описывается уже другим линейным дифференциальным уравнением; для решения, соответствующего второму участку, за начальные условия выбираем конечное состояние на предыдущем участке и т. д.

Особенно наглядно метод припасовывания иллюстрируется на фазовой плоскости.

Пусть, например, кривая $y = \varphi(x)$ (рис. 21.18) делит фазовую плоскость на две области, в каждой из которых фазовые траектории определяются соответствующими линейными дифференциальными уравнениями. Пусть начальные условия задачи соответствуют точке P_0 с координатами x_0, y_0 на фазовой плоскости в области A.

Точка пересечения $P_1(x_1, y_1)$ фазовой траектории с кривой $y = \varphi(x)$ будет начальной точкой для фазовой траектории в области B. Точка $P_2(x_2, y_2)$ будет начальной точкой фазовой траектории в области A.

Производя такое последовательное припасовывание начальных условий, мы можем следить за движением изображающей точки и тем самым судить о поведении динамической системы.

В качестве примера рассмотрим маятник, находящийся в среде с вязким линейным сопротивлением. Предположим, что на маятник действует постоянный момент, направленный всегда в сторону движения:

$$M(\dot\varphi) = \begin{cases} M & \text{при} \quad \dot\varphi > 0, \\ -M & \text{при} \quad \dot\varphi < 0. \end{cases} \tag{21.35}$$

Уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot\varphi + 2h\dot\varphi + k^2\varphi = \pm M_0, \tag{21.36}$$

где $k^2 = g/l$, $2h = b/(ml)$, $M_0 = M/(ml)$ (m — масса маятника, l — его длина, b — коэффициент вязкого трения).

Вводя замену $\dot\varphi = \omega$, перепишем уравнение (21.36) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -2h\omega - k^2\varphi + M_0(\omega). \tag{21.37}$$

Рассмотрим часть фазовой плоскости $\varphi\omega$, для которой $\dot\varphi = \omega < 0$. Уравнения (21.37) в этом случае будут

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -2h\omega - k^2\varphi - M_0.$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-2h\omega - k^2\varphi - M_0}{\omega}. \tag{21.38}$$

Особая точка $\varphi = -M_0/k^2$, $\omega = 0$ здесь одна, и при $h < k$ это — устойчивый фокус.

Если предположить, что уравнение (21.38) справедливо для всех ω, то картина фазовой плоскости будет такой, как показано на рис. 21.19, *а*.

Для $\omega > 0$ уравнение (21.37) будет

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-2h\omega - k^2\varphi + M_0}{\omega}.$$

Особая точка $\varphi = M_0/k^2$, $\omega = 0$ — устойчивый фокус ($h < k$).

Если бы это уравнение было справедливо на всей плоскости $\varphi\omega$, то картина фазовой плоскости была бы такой, как на рис. 21.19, *б*.

Разрезая теперь обе фазовые плоскости, изображенные на рис. 21.19, по линии $\omega = 0$, произведем «сшивание» верхней полуплоскости, изображенной на рис. 21.19, *б*, и нижней, изображенной на рис. 21.19, *а*.

На рис. 21.20 изображен характер фазовых траекторий для рассматриваемой задачи. Из рассмотрения рис. 21.20 следует, что при достаточно больших начальных отклонениях движение системы будет колебательным затухающим и, наоборот, при достаточно малых начальных отклонениях движение точки будет колебательным нарастающим.

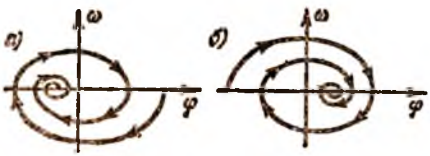


Рис. 21.19

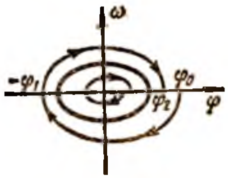


Рис. 21.20

Это происходит потому, что при малых значениях угловой скорости момент сил вязкого трения меньше возмущающего момента, а при больших значениях угловой скорости момент сил вязкого трения больше возмущающего момента.

Исходя из этого, естественно сделать вывод о существовании замкнутой фазовой траектории, на которую наматываются все остальные фазовые траектории. Эта замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению системы, причем параметры этого периодического движения не зависят от начальных условий и определяются параметрами динамической системы.

Докажем, применяя метод припасовывания, что эта замкнутая фазовая траектория будет единственной и движение маятника, соответствующее этой фазовой траектории, будет устойчивым.

Движению маятника влево ($\omega = \dot{\varphi} < 0$) соответствует уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = -M_0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi = e^{-ht}(c_1 \cos k^*t + c_2 \sin k^*t) - \frac{M_0}{k^2},$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$ (предполагается, что $k > h$). Отсюда

$$\dot{\varphi} = e^{-ht}\,[-h\,(c_1 \cos k^*t + c_2 \sin k^*t) + k^*(-c_1 \sin k^*t + c_2 \cos k^*t)].$$

Подставляя начальные условия, найдем

$$\varphi_0 = c_1 - \frac{M_0}{k^2}, \qquad 0 = -hc_1 + k^* c_2.$$

Следовательно,

$$c_1 = \varphi_0 + \frac{M_0}{k^2}, \qquad c_2 = \frac{h}{k^*}\left(\varphi_0 + \frac{M_0}{k^2}\right),$$

$$\varphi = e^{-ht}\left(\varphi_0 + \frac{M_0}{k^2}\right)\left(\cos k^* t + \frac{h}{k^*}\sin k^* t\right) - \frac{M_0}{k^2}.$$

Первая остановка маятника в крайнем левом положении произойдет в момент времени $t = \pi/k^*$. Соответствующий угол обозначим через $-\varphi_1$, т. е. при $t = \pi/k^*$ $\varphi = -\varphi_1$, $\dot\varphi = 0$. Внося соответствующие значения в последнее равенство, получим

$$-\varphi_1 = e^{-\frac{h\pi}{k^*}}\left(\varphi_0 + \frac{M_0}{k^2}\right)(-1) - \frac{M_0}{k^2}.$$

Отсюда находим ($f = e^{-h\pi/k^*} < 1$)

$$\varphi_1 = f\varphi_0 + (1+f)\frac{M_0}{k^2}.$$

Легко сообразить, что следующее крайнее отклонение вправо определится равенством (φ_0 заменяем на φ_1, а φ_1 на φ_2)

$$\varphi_2 = f\varphi_1 + (1+f)\frac{M_0}{k^2}.$$

Таким образом, амплитуды колебаний маятника последовательно могут быть определены из следующей цепочки равенств:

$$\varphi_1 = \varphi_0 f + (1+f)\frac{M_0}{k^2}, \qquad \varphi_2 = \varphi_1 f + (1+f)\frac{M_0}{k^2}, \; \ldots,$$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} f + (1+f)\frac{M_0}{k^2}.$$

Умножим первое равенство на f^{n-1}, второе на f^{n-2}, ..., последнее на 1 и сложим почленно все равенства. Тогда получим

$$\varphi_n = f^n\varphi_0 + (1+f)\frac{M_0}{k^2}(f^{n-1} + f^{n-2} + \cdots + 1),$$

или, суммируя геометрическую прогрессию,

$$\varphi_n = \varphi_0 f^n + (1+f)\frac{M_0}{k^2}\,\frac{(1-f^n)}{1-f}.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Учитывая, что $f < 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n = 0$, получим

$$\varphi^* = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \frac{1+f}{1-f}\,\frac{M_0}{k^2}. \tag{21.39}$$

Формулу (21.39) можно получить и несколько другим путем. Так как $\varphi_{n-1}=\varphi_{n-2}f+(1+f)\frac{M_0}{k^2}$ и $\varphi_n=\varphi_{n-1}f+(1+f)\frac{M_0}{k^2}$, то, исключая отсюда φ_{n-1}, получим

$$\varphi_n=\varphi_{n-2}f^2+(1+f)^2\frac{M_0}{k^2}. \tag{21.40}$$

Для периодического движения имеем

$$\varphi_n=\varphi_{n-2}=\varphi^*,$$

т. е.

$$\varphi^*=\varphi^*f^2+(1+f)^2\frac{M_0}{k^2};$$

отсюда имеем

$$\varphi^*=\frac{1+f}{1-f}\frac{M_0}{k^2}.$$

Эта величина φ^* и есть искомая амплитуда периодического движения. Таким образом, мы убедились, что в рассматриваемой задаче могут быть периодические движения, амплитуда которых не зависит от начальных условий, а зависит от свойств самой системы.

Однако одного факта определения амплитуды φ^* еще недостаточно, чтобы утверждать, что такое движение физически может быть реализовано. Нужно показать, при каких начальных условиях установится это решение и будет ли оно устойчиво. На эти вопросы можно ответить, построив соответствующую диаграмму, которая называется *диаграммой Кенигса — Лемерея.*

На этой диаграмме рассматривается графически связь между двумя последовательными максимальными отклонениями одного знака, т. е. φ_n и φ_{n-2}. Согласно формуле (21.40) φ_n можно считать функцией φ_{n-2}.

На плоскости $\varphi_{n-2}\varphi_n$ эта зависимость между φ_{n-2} и φ_n изображается прямой линией (рис. 21.21). Тангенс угла наклона этой прямой с осью φ_{n-2} равен $e^{-2h\pi/k^*}<1$. Проведем еще вспомогательную прямую $\varphi_n=\varphi_{n-2}$. Пересечение этих прямых и определяет амплитуду $\varphi_n=\varphi_{n-2}=\varphi^*$.

Пусть φ'_{n-2} — начальное отклонение, меньшее φ^*; тогда этому отклонению будет соответствовать φ'_n, которому будет соответствовать максимальное отклонение φ'_{n+2}. Продолжая эти построения, видим, что, как бы мало начальное отклонение ни было, колебания происходят с возрастающей амплитудой, пока максимальное отклонение не достигнет постоянного значения φ^*.

Если теперь взять максимальное отклонение $\varphi''_{n-2}>\varphi^*$, то по графику найдем следующее φ''_n, по которому найдем следующее φ''_{n+2} и т. д. Из этого построения видно, что колебания затухают до тех пор, пока отклонение не достигает постоянного значения φ^*.

Итак, в рассмотренном нами примере, несмотря на наличие вязкого трения, существует устойчивое периодическое движение.

Амплитуда этих незатухающих колебаний не зависит, как было уже показано, от начальных условий, а определяется свойствами системы. Такие колебания называются *автоколебаниями*, а системы, в которых возможны автоколебания, называются *автоколебательными системами* *).

Изолированная замкнутая траектория на фазовой плоскости, соответствующая автоколебаниям системы, называется *предельным циклом*.

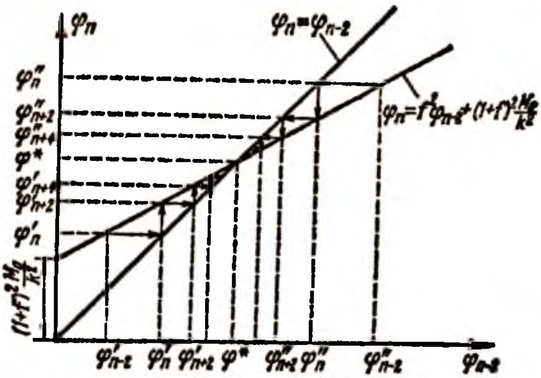


Рис. 21.21

Предельные циклы могут быть устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые.

Если фазовые траектории, близкие к предельному циклу, как внутри, так и вне его «наматываются» на него, т. е. изображающая точка приближается к предельному циклу, то такой предельный цикл называется *устойчивым* и соответствует автоколебаниям.

Если же траектории разматываются как снаружи, так и внутри с предельного цикла, т. е. изображающая точка удаляется от предельного цикла, то такой предельный цикл называется *неустойчивым* и физически реализован быть не может.

Наконец, может быть *полуустойчивый* предельный цикл, когда, с одной стороны, фазовые траектории на него наматываются, а с другой — разматываются.

Картины, показывающие устойчивый, неустойчивый и полуустойчивый предельные циклы соответственно, представлены на рис. 21.22, 21.23 и 21.24.

---

*) Термин «автоколебания» введен в теорию колебаний А. А. Андроновым.

Таким образом, с математической точки зрения автономные автоколебательные системы с одной степенью свободы можно определить как такие системы, уравнения движения которых характеризуются наличием на фазовой плоскости одного или нескольких устойчивых предельных циклов.

С физической точки зрения автономные автоколебательные системы, грубо говоря, можно охарактеризовать как системы, способные совершать незатухающие колебания за счет постоянных источников энергии, причем поступление энергии, расходуемой системой на преодоление сопротивлений, регулируется самой системой.

Рис. 21.22

Рис. 21.23

Рис. 21.24

Характерным свойством автоколебательных систем является то обстоятельство, что «амплитуда» колебаний в широких пределах не зависит от начальных условий. Это является основным отличием периодического движения в автоколебательной системе от периодического движения в консервативной системе.

Хотя в рассматриваемом нами примере период автоколебаний оказался равным периоду затухающих колебаний в линейной системе, в общем случае этот период определяется свойствами самой системы, а не навязывается извне. Это является основным отличием автоколебаний от вынужденных колебаний.

§ 21.5. Метод медленно меняющихся коэффициентов (метод ван-дер-Поля)

Существует несколько приближенных методов количественного исследования нелинейных систем *).

*) Изложение этих методов читатель найдет, например, в книгах: Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959; Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1958; Булгаков Б. В. Колебания. — М.: Гостехиздат, 1954; Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1956; Малкин И. Г. Некоторые задачи нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956; Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М. Наука, 1972; Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1960.

В этом параграфе рассмотрен лишь один из методов, а именно метод медленно меняющихся коэффициентов.

Пусть уравнение движения динамической системы имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu f_1(x, \dot{x}), \tag{21.41}$$

где $f_1(x, \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$, $\mu > 0$.

Мы будем предполагать, что рассматриваемая динамическая система близка к линейной консервативной. Коэффициент μ (обычно безразмерный) и будет тем малым параметром, который будет характеризовать близость исходной системы к линейной консервативной.

Введем «безразмерное время» $\tau = kt$, тогда в силу равенств $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} k$ и $\ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2} k^2$ уравнение (21.41) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right), \tag{21.42}$$

где

$$f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{k^2} f_1\left(x, \frac{dx}{d\tau} k\right).$$

Вводя $y = dx/d\tau$, получим

$$\frac{dy}{d\tau} = -x + \mu f(x, y), \qquad \frac{dx}{d\tau} = y.$$

Уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu f(x, y)}{y}. \tag{21.43}$$

При $\mu = 0$ рассматриваемая система будет линейной консервативной. Фазовые траектории будут представлять собой вложенные друг в друга окружности, окружающие состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Решение уравнения (21.42) в этом случае будет

$$x = a \cos \tau + b \sin \tau, \tag{21.44}$$

где a и b — постоянные числа (произвольные постоянные интегрирования).

Нашей задачей является выяснение вопроса о том, как изменится картина распределения фазовых траекторий на плоскости xy, если μ будет достаточно мало, но отлично от нуля.

Будем искать решение уравнения (21.42) при $\mu \neq 0$ в виде (21.44), но a и b будем уже считать функциями времени. Очевидно, что при заданном x функции a и b недостаточно определены, поэтому наложим на них условие, заключающееся в том, что производная от x по τ должна иметь такой же вид, как при постоянных a и b.

Таким образом, имеем

$$x = a \cos \tau + b \sin \tau,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau + \frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau. \tag{21.45}$$

Но в силу условия, наложенного на a и b,

$$\frac{dx}{d\tau} = -a\sin\tau + b\cos\tau \tag{21.46}$$

и, следовательно,

$$\frac{da}{d\tau}\cos\tau + \frac{db}{d\tau}\sin\tau = 0. \tag{21.47}$$

Вторая производная от x по τ будет

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -a\cos\tau - b\sin\tau - \frac{da}{d\tau}\sin\tau + \frac{db}{d\tau}\cos\tau. \tag{21.48}$$

Подставляя выражения (21.45), (21.46) и (21.48) в уравнение (21.42), получим

$$-\frac{da}{d\tau}\sin\tau + \frac{db}{d\tau}\cos\tau = \mu f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau). \tag{21.49}$$

Присоединяя к этому уравнению условие (21.47), получим систему уравнений для определения $da/d\tau$ и $db/d\tau$:

$$\frac{da}{d\tau}\cos\tau + \frac{db}{d\tau}\sin\tau = 0,$$

$$-\frac{da}{d\tau}\sin\tau + \frac{db}{d\tau}\cos\tau = \mu f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau).$$

Решая эту систему относительно $da/d\tau$ и $db/d\tau$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\mu f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau)\sin\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \mu f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau)\cos\tau. \end{aligned} \tag{21.50}$$

Отметим, что уравнения (21.50) — это уравнение (21.42), преобразованное к новым переменным. Как видно из (21.50), эта система уже неавтономная, хотя исходное уравнение было автономным.

Предположим теперь, что при достаточно малом μ функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ будут медленно меняющимися функциями τ, т. е. такими, изменениями которых в течение одного периода колебаний исходной системы можно пренебречь.

Это предположение равносильно тому, что производные $da/d\tau$ и $db/d\tau$ в течение одного периода (2π) считаются постоянными, имеющими порядок μ. Тогда, умножая обе части уравнений на $d\tau$ и интегрируя в пределах от 0 до 2π, получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau)\sin\tau\, d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau)\cos\tau\, d\tau. \end{aligned} \tag{21.51}$$

В сущности, эти уравнения отличаются от уравнений (21.50) тем, что в правых частях у них стоят средние интегральные значения за период 2π от правых частей уравнений (21.50).

Перепишем уравнения (21.51) в виде

$$\frac{da}{d\tau} = \mu P(a,\ b) \quad \frac{db}{d\tau} = \mu Q(a,\ b), \tag{21.52}$$

где

$$P(a,\ b) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau)\sin\tau\, d\tau,$$

$$Q(a,\ b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\tau + b\sin\tau,\ -a\sin\tau + b\cos\tau)\cos\tau\, d\tau.$$

Уравнения (21.52) называются «укороченными» уравнениями или уравнениями ван-дер-Поля.

Рассмотрим теперь плоскость ab. Очевидно, что согласно (21.45) состояние равновесия $a = 0$, $b = 0$ на плоскости ab будет соответствовать для исходной системы состоянию равновесия $x = 0$, $y = 0$. Состояния равновесия на плоскости ab, для которых $a \neq 0$, $b \neq 0$, для исходной системы будут соответствовать периодическим движениям. Таким образом, изучая состояния равновесия, а также расположение фазовых траекторий на плоскости ab, мы сможем судить о возможных движениях исходной системы. Этот прием был впервые применен А. А. Андроновым.

Покажем, что в системе (21.52) при переходе к полярным координатам переменные разделяются. Пусть

$$a = \rho\cos\vartheta, \quad b = \rho\sin\vartheta, \tag{21.53}$$

тогда

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{d\tau}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\sin\vartheta + \rho\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{d\tau},$$

$$a\cos\tau + b\sin\tau = \rho\cos(\tau - \vartheta),$$

$$-a\sin\tau + b\cos\tau = -\rho\sin(\tau - \vartheta).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (21.52) получим

$$\frac{d\rho}{d\tau}\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[\rho\cos(\tau - \vartheta),\ -\rho\sin(\tau - \vartheta)]\sin\tau\, d\tau,$$

$$\frac{d\rho}{d\tau}\sin\vartheta + \rho\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[\rho\cos(\tau - \vartheta),\ -\rho\sin(\tau - \sigma)]\cos\tau\, d\tau,$$

откуда будем иметь

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho), \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu\Psi(\rho). \tag{21.54}$$

Здесь

$$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\xi,\ -\rho\sin\xi)\sin\xi\,d\xi,$$
$$\Psi(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\xi,\ -\rho\sin\xi)\cos\xi\,d\xi, \tag{21.55}$$

где $\xi = \tau - \vartheta$*).

Рассмотрим первое уравнение

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho). \tag{21.56}$$

Это уравнение первого порядка, и фазовая плоскость для него вырождается в прямую.

Качественная картина уравнения такого типа полностью определяется характером и расположением состояний равновесия, которые располагаются на фазовой прямой. Координаты этих состояний равновесия являются корнями уравнения

$$\Phi(\rho) = 0. \tag{21.57}$$

Пусть один из корней этого уравнения будет $\rho = \rho_0$. Рассмотрим поведение изображающей точки вблизи этого состояния равновесия. Введем новую переменную u, определяющую положение изображающей точки вблизи состояния равновесия, т. е. положим $\rho = \rho_0 + u$. Тогда уравнение (21.56) будет

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi(\rho_0 + u).$$

Разложим функцию $\Phi(\rho_0 + u)$ в ряд по степеням u:

$$\Phi(\rho_0 + u) = \Phi'(\rho_0)\,u + \text{члены высших порядков.}$$

Ограничиваясь членами с первой степенью u, получим уравнение первого приближения

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi'(\rho_0)\,u.$$

А. М. Ляпунов доказал **), что при $\Phi'(\rho_0) \neq 0$ состояние равновесия будет устойчивым, если $\Phi'(\rho_0) < 0$, и неустойчивым, если

---

*) Эту замену можно произвести, так как подынтегральные функции периодические.

**) См., например, Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

$\Phi'(\rho_0) > 0$. Качественно это можно объяснить следующим образом. Так как при достаточно малом μ членами высших порядков можно пренебречь, т. е. определяющим знак $du/d\tau$ будет знак $\Phi'(\rho_0)$, то при $\Phi'(\rho_0) < 0$ изображающая точка будет стремиться к состоянию равновесия, а при $\Phi'(\rho_0) > 0$ будет уходить от состояния равновесия.

Итак, состояние равновесия $\rho = \rho_0$ уравнения (21.56) будет устойчивым, если

$$\Phi'(\rho_0) < 0, \tag{21.58}$$

и неустойчивым, если

$$\Phi'(\rho_0) > 0. \tag{21.59}$$

Закон движения изображающей точки по фазовой прямой можно найти, интегрируя уравнение (21.56):

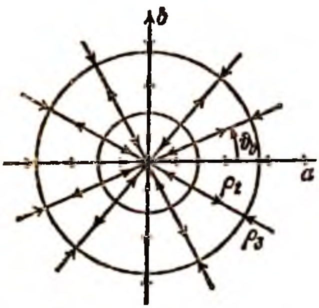


Рис. 21.25

$$\mu(\tau - \tau_0) = \int\limits_{\rho'}^{\rho} \frac{d\rho}{\Phi(\rho)},$$

где $\rho' = \rho_{\tau=\tau_0}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu\Psi(\rho).$$

В практике очень часто бывают случаи, когда

$$\Psi(\rho) \equiv 0,$$

тогда $d\vartheta/d\tau = 0$ и $\vartheta = \vartheta_0$ — постоянное число.

Следовательно, на плоскости ab все интегральные кривые представляют собой прямые, проходящие через начало координат и имеющие различные углы наклона $\vartheta = \text{const}$. Движение по каждой из таких прямых происходит одинаково и определяется уравнением (21.56). Состояния равновесия, определяемые уравнением $\Phi(\rho) = 0$, будут целиком заполнять окружности (на плоскости ab), радиусы которых равны корням уравнения (21.57). На рис. 21.25 показан вид плоскости ab в случае, когда уравнение (21.57) имеет три корня: $\rho_1 = 0$, $\rho_2 < \rho_3$.

Перейдем к плоскости xy; согласно формулам (21.45), (21.46) и (21.53) получим

$$x = \rho\cos\vartheta\cos\tau + \rho\sin\vartheta\sin\tau = \rho\cos(\tau - \vartheta),$$

$$y = -\rho\cos\vartheta\sin\tau + \rho\sin\vartheta\cos\tau = -\rho\sin(\tau - \vartheta).$$

Для какого-либо корня $\rho = \rho_i$ уравнения (21.57) будем иметь

$$x = \rho_i\cos(\tau - \vartheta_0), \quad y = -\rho_i\sin(\tau - \vartheta_0), \tag{21.60}$$

т. е. на плоскости xy будем иметь круговой предельный цикл.

Величина ϑ_0 в формулах (21.60) произвольна, это соответствует тому, что на плоскости ab состояния равновесия составляют целые окружности.

Если ρ_i соответствует устойчивому состоянию равновесия, то на плоскости xy будет устойчивый предельный цикл. Все соседние интегральные кривые будут спиралями, накручивающимися на этот цикл. Если же ρ_i соответствует неустойчивому состоянию равновесия, то на плоскости xy будет неустойчивый предельный цикл (рис. 21.26).

Рассмотрим теперь случай, когда $\Psi(\rho) \neq 0$. Тогда для какого-либо корня $\rho = \rho_i$ уравнения $\Phi(\rho) = 0$ (мы будем предполагать, что корни уравнения $\Phi(\rho) = 0$ не совпадают с корнями уравнения $\Psi(\rho) = 0$, так как в противном случае придем к рассмотренному уже случаю) будем иметь $d\vartheta/d\tau = \mu\Psi(\rho_i)$ и, следовательно,

$$\vartheta = \mu\Psi(\rho_i)\tau + \vartheta_0.$$

Движение изображающей точки на плоскости ab будет происходить по закону

$$a = \rho_i \cos[\mu\Psi(\rho_i)\tau + \vartheta_0],$$
$$b = \rho_i \sin[\mu\Psi(\rho_i)\tau + \vartheta_0],$$

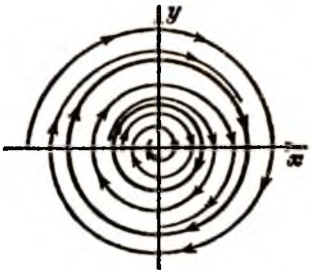


Рис. 21.26

т. е. по предельному циклу радиуса $\rho = \rho_i$.

Устойчивость или неустойчивость этого предельного цикла определяется характером состояния равновесия $\rho = \rho_i$. Направление движения определяется знаком $\Psi(\rho_i)$. Остальные интегральные кривые будут спиралями, накручивающимися на предельный цикл или раскручивающимися с него.

Переходя к плоскости xy, получим

$$x = \rho_i \cos\{[1 - \mu\Psi(\rho_i)]\tau - \vartheta_0\}, \qquad y = -\rho_i \sin\{[1 - \mu\Psi(\rho_i)]\tau - \vartheta_0\},$$

т. е. будем иметь круговые предельные циклы, соответствующие корням уравнения $\Phi(\rho) = 0$.

Отличием от случая $\Psi(\rho) \equiv 0$ здесь является то, что мы получаем поправку на частоту $\Delta\omega = -\mu\Psi(\rho_i)$. Картина на фазовой плоскости останется прежней.

Задача 21.3. Применить рассмотренный метод к уравнению (21.36). Вводя в рассмотрение безразмерное время $\tau = kt$, получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2h}{k}\frac{d\varphi}{d\tau} + \varphi = M_1\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right), \tag{21.61}$$

где

$$M_1\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \begin{cases} \dfrac{M_0}{k^2} & \text{при } \dfrac{d\varphi}{d\tau} > 0, \\ -\dfrac{M_0}{k^2} & \text{при } \dfrac{d\varphi}{d\tau} < 0. \end{cases}$$

Сделаем предположение о близости рассматриваемой системы к линейной консервативной. Примем, что $2h/k \ll 1$, $M_0/k^2 \ll 1$; тогда, введя $\mu = 2h/k$, будем иметь

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varphi = \mu\left[-\frac{d\varphi}{d\tau} + M_2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)\right], \tag{21.62}$$

где

$$M_2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \begin{cases} \dfrac{M_1}{2hk} & \text{при} \quad \dfrac{d\varphi}{d\tau} > 0, \\ -\dfrac{M_1}{2hk} & \text{при} \quad \dfrac{d\varphi}{d\tau} < 0. \end{cases} \tag{21.63}$$

Уравнение (21.62) имеет вид уравнения (21.42).

Если искать решение уравнения (21.62) в виде

$$\varphi = \rho\cos(\tau - \vartheta), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = -\rho\sin(\tau - \vartheta),$$

то уравнения (22.54) будут

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{\mu}{2}\left(\rho - \frac{4M_2}{\pi}\right), \qquad \frac{d\vartheta}{d\tau} = 0.$$

Так как в рассматриваемом случае

$$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{4M_2}{\pi}\right), \qquad \Psi \equiv 0, \qquad \text{то} \qquad \Phi'(\rho) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно, на плоскости $\varphi\dot\varphi$ имеется устойчивый круговой предельный цикл, радиус которого равен

$$\rho = \frac{4M_2}{\pi} = \frac{2M_0}{\pi hk}. \tag{21.64}$$

Рассмотрим формулу (21.39). Если предположить, что $h/k \ll 1$, и в разложении $e^{-\pi h/k^*}$ пренебречь малыми членами, начиная с члена, содержащего h^2, то получим $\varphi^* = 2M_0/(\pi hk)$ (принято, что $k^* = k\sqrt{1 - h^2/k^2} \approx k$).

Следовательно, результат (21.64) можно считать достоверным с точностью до членов h^2 (μ^2).

Задача 21.4. На равномерно вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вал насажена с некоторым трением втулка с жестко скрепленным с ней маятником. Пусть момент силы трения между валом и втулкой является функцией относительной угловой скорости $\omega = \Omega - \dot\varphi$ ($\dot\varphi$ — абсолютная угловая скорость маятника) и может быть представлен степенным рядом

$$M(\omega) = M(\Omega) - M'(\Omega)\,\dot\varphi - \frac{1}{2}M'''\dot\varphi^3 - \frac{1}{120}M^{(V)}(\Omega)\,\dot\varphi^5 + \ldots$$

Ограничиваясь написанными членами ряда, определить возможные движения маятника *).

Уравнение движения для малых φ имеет вид

$$I\ddot\varphi + b\dot\varphi + mgl\,\varphi = M(\Omega - \dot\varphi),$$

где I — момент инерции маятника, b — коэффициент вязкого сопротивления, m — масса маятника, l — расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

---

*) Стрелков С. П. Маятник Фроуда. — ЖТФ, 1933, т. 3, в. 4; Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. — М.: Судпромгиз, 1962.

Перепишем уравнение движения в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{I}\dot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = \frac{M(\Omega)}{I} - \frac{M'(\Omega)}{I}\dot{\varphi} - \frac{M''(\Omega)}{6I}\dot{\varphi}^3 - \frac{M^{(V)}\Omega}{120I}\dot{\varphi}^5.$$

Если ввести $\tau = kt$ и $\psi = \varphi - \dfrac{M(\Omega)}{Ik^2}$, где $k = \sqrt{\dfrac{mgl}{I}}$, предположить, что для безразмерных величин справедливы неравенства

$$\frac{b}{Ik} \ll 1, \quad \frac{|M'(\Omega)|}{Ik} \ll 1, \quad \frac{k|M''(\Omega)|}{I} \ll 1, \quad \frac{k^3|M^{(V)}(\Omega)|}{I} \ll 1$$

и ввести обозначения

$$\mu = \frac{b}{Ik}, \quad \alpha = -\left(1 + \frac{M'(\Omega)}{b}\right), \quad \beta = -\frac{k^2M''(\Omega)}{6b}, \quad \gamma = -\frac{k^4M^{(V)}(\Omega)}{120b},$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \psi = \mu\left[\alpha\frac{d\psi}{d\tau} + \beta\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^3 + \gamma\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^5\right]. \tag{21.65}$$

Параметр μ характеризует близость рассматриваемой системы к линейной консервативной.

Используя формулы (21.55), будем иметь

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2}\rho\left(\alpha + \frac{3}{4}\beta\rho^2 + \frac{5}{8}\gamma\rho^4\right), \quad \Psi(\rho) = 0.$$

Состояния равновесия системы, описываемой уравнением (21.56), найдем из условия

$$\rho\left(\alpha + \frac{3}{4}\beta\rho^2 + \frac{5}{8}\gamma\rho^4\right) = 0. \tag{21.66}$$

Очевидно, что корень $\rho_1 = 0$ соответствует состоянию равновесия исходной динамической системы, описываемой уравнением (21.65). Другие состояния равновесия получим, решая уравнение

$$\alpha + \frac{3}{4}\beta\rho^2 + \frac{5}{8}\gamma\rho^4 = 0. \tag{21.67}$$

Поскольку

$$\Phi'(\rho) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{9}{4}\beta\rho^2 + \frac{25}{8}\gamma\rho^4\right), \tag{21.68}$$

то при $\alpha < 0$ состояние равновесия $\rho_1 = 0$ будет устойчивым, а при $\alpha > 0$ — неустойчивым.

Состояниям равновесия, определяемым из уравнения (21.67), соответствуют только положительные корни.

Введем в рассмотрение плоскость $\alpha\rho^2$ и рассмотрим два случая: 1) $\beta < 0$, $\gamma < 0$; 2) $\beta > 0$, $\gamma < 0$.

Пусть $\beta < 0$, $\gamma < 0$. Из уравнения (21.67) следует

$$\rho^2 = -\frac{3\beta}{5\gamma} \pm \sqrt{\frac{9\beta^2}{25\gamma^2} - \frac{8\alpha}{5\gamma}}.$$

При $\alpha = 0$ $\rho_1^2 = 0$, $\rho_2^2 < 0$; при $\alpha > 0$ будет один положительный корень, при $\alpha < 0$ положительных корней уравнение (21.67) не имеет.

Кривая

$$\Phi'(\rho) = 0 \quad \text{или} \quad \alpha + \frac{9}{4}\beta\rho^2 + \frac{25}{8}\gamma\rho^4 = 0 \tag{21.69}$$

на плоскости $\alpha\rho^2$ отделяет область устойчивости, где $\Phi'(\rho) < 0$, от области неустойчивости, где $\Phi'(\rho) > 0$.

На рис. 21.27 показано расположение парабол (21.67) и (21.69). Из рассмотрения этого рисунка следует, что при $\alpha < 0$ будет только одно устойчивое состояние равновесия $\rho = 0$. При $\alpha > 0$ — два состояния равновесия: неустойчивое $\rho = 0$ и устойчивое, соответствующее точкам параболы в первом квадранте плоскости $\alpha\rho^2$.

Переходя к фазовой плоскости $x\frac{dx}{d\tau}$, видим, что при $\alpha < 0$ есть только одно устойчивое состояние равновесия в начале координат. Это значит, что исходная система совершает затухающие колебания. При $\alpha > 0$ на фазовой плоскости будет неустойчивое положение равновесия в начале координат и устойчивый предельный цикл, соответствующий автоколебаниям. При уменьшении α предельный цикл

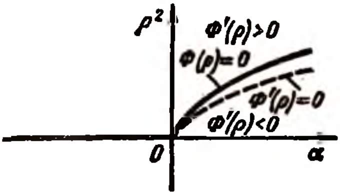


Рис. 21.27

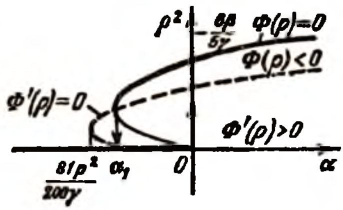


Рис. 21.28

стягивается к началу координат и, сливаясь с состоянием равновесия, передает ему устойчивость. При увеличении α от отрицательных значений при переходе через $\alpha = 0$ возникают автоколебания, амплитуда которых увеличивается с возрастанием α. Описанный характер возникновения автоколебаний называют *мягким возбуждением*.

Пусть теперь $\beta > 0$, $\gamma < 0$. Вид парабол (21.66) и (21.69) представлен на рис. 21.28. Из рассмотрения этого рисунка следует, что при $\alpha < \alpha_1$ ($\alpha_1 = 9\beta^2/(40\gamma)$) имеет место только одно устойчивое состояние равновесия и, следовательно, исходная динамическая система совершает затухающие колебания. При $\alpha_1 < \alpha < 0$ состояний равновесия три: устойчивое ($\rho = 0$), неустойчивое, соответствующее нежирной линии параболы, и устойчивое, соответствующее жирной линии параболы. Значит, на фазовой плоскости существует при этих значениях α в начале координат устойчивая особая точка, неустойчивый предельный цикл и устойчивый предельный цикл. Если начальные условия лежат внутри неустойчивого предельного цикла, то исходная система будет совершать затухающие колебания, если же начальные условия лежат вне неустойчивого предельного цикла, то установятся автоколебания. При $\alpha > 0$ состояние равновесия в начале координат неустойчиво, и при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания.

Таким образом, если начать изменять α от отрицательных значений к положительным, предполагая, что исходная система находится в устойчивом состоянии равновесия, то при $\alpha = 0$ в системе возникнут автоколебания конечной амплитуды. При дальнейшем увеличении α амплитуда будет увеличиваться. Такой режим возникновения автоколебаний называется *жестким возбуждением*. Если теперь уменьшать α, то амплитуда автоколебаний будет постоянно уменьшаться, и при $\alpha = \alpha_1$ автоколебания при конечной амплитуде прекратятся, система начнет совершать затухающие колебания.

Следовательно, возникновение и исчезновение автоколебаний происходит при различных значениях параметра α, который иногда называют *коэффициентом возбуждения*.

Исследование случаев $\beta < 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, $\gamma > 0$ проводится аналогично. Следует иметь в виду, что в этих случаях, при определенных значениях параметров, в системе могут возникнуть неограниченно возрастающие колебания. Но такие колебания требуют и все возрастающего поступления энергии в систему извне. Практически это невозможно. Следовательно, для суждения о поведении маятника при принятом в задаче приближении в разложении момента трения в степенной ряд недостаточно членов; нужно учитывать члены более высоких порядков.

Задача 21.5. Показать, что в первом приближении колебания системы, описываемой уравнением (21.42), эквивалентны (с точностью до величин порядка малости μ^2) колебаниям некоторой линейной системы. На с. 484 показано, что если искать решение уравнения (21.42) в виде

$$x = \rho\cos(\tau - \vartheta),$$

то получим укороченные уравнения (21.54). Если ввести обозначение

$$\omega_e(\rho) = 1 - \mu\Psi(\rho), \tag{21.70}$$

то уравнения (21.54) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho), \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \omega_e(\rho), \quad \xi = \tau - \vartheta. \tag{21.71}$$

Возведем выражение (21.70) в квадрат и отбросим члены с μ^2:

$$\omega_e^2(\rho) = 1 - 2\mu\Psi(\rho) = 1 - \frac{\mu}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\xi - \rho\sin\xi)\cos\xi\,d\xi.$$

Обозначим

$$h(\rho) = \frac{\mu}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\xi - \rho\sin\xi)\sin\xi\,d\xi = -\frac{\mu}{\rho}\Phi(\rho) \tag{21.72}$$

и перепишем уравнения (21.71)

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -h(\rho)\cdot\rho, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \omega_e(\rho). \tag{21.73}$$

Дифференцируя $x = \rho\cos\xi$, получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\cos\xi - \rho\frac{d\xi}{d\tau}\sin\xi = -h(\rho)\rho\cos\xi - \rho\omega_e(\rho)\sin\xi. \tag{21.74}$$

Продифференцировав еще раз, будем иметь

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{dh}{d\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\rho\cos\xi - h\frac{d\rho}{d\tau}\cos\xi + h\rho\frac{d\xi}{d\tau}\sin\xi - \\ - \frac{d\rho}{d\tau}\omega_e\sin\xi - \rho\frac{d\omega_e}{d\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\sin\xi - \rho\omega_e\frac{d\xi}{d\tau}\cos\xi.$$

Перепишем это выражение, использовав (21.73) и (21.74):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2h(\rho)\frac{dx}{d\tau} + \omega_e^2(\rho)x = Q(\mu^2), \tag{21.75}$$

где $Q(\mu^2)$ — величина порядка малости μ^2.

Итак, доказано, что решение $x = \rho(\tau - \vartheta)$ с точностью до величин порядка малости μ^2 удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2h(\rho)\frac{dx}{d\tau} + \omega_e^2(\rho)x = 0. \tag{21.76}$$

Линейную систему, движение которой описывается уравнением (21.76), называют *эквивалентной системой*. Получение уравнения (21.76) называют *методом эквивалентной линеаризации* *).

---

*) *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит 1958.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ