

Н. В. БУТЕНИН, Я. Л. ЛУНЦ, Д. Р. МЕРКИН

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ТОМ II ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.21
Б 93
УДК 531

Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики: Учебник. Т. II.: Динамика. — 3-е изд., исправленное. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 496 стр.

В книге изложены динамика точки, динамика материальной системы и твердого тела, элементы аналитической механики и теории линейных и нелинейных колебаний. Более подробно, чем в традиционных курсах, излагаются вопросы движения материальной точки в центральном силовом поле, динамика тела переменной массы, теория гироскопов. Приводится много примеров прикладного значения.

Книга рассчитана на студентов дневных, вечерних и заочных отделений технических вузов с полной и сокращенной программой по механике, а также может быть полезной для аспирантов и инженерно-технических работников.

Табл. 3. Ил. 299.

Рецензент

доктор технических наук М. С. Сергеев

Николай Васильевич Бутенин

Яков Львович Луиц

Давид Рахмилевич Меркин

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ (ДИНАМИКА)

Том II

Редактор А. Г. Мордвинцев

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры: Е. В. Сидоркина, В. П. Сорокина

ИБ № 12713

Сдано в набор 20.08.84. Подписано в печать 19.07.85. Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 31. Усл. кр.-от. 31,25 Уч.-изд. л. 33,43. Тираж 76 000 экз. Заказ № 219. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144 Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

Б 1703020000—120
053 (02)-85 95-85

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы,
1979; с изменениями 1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	8
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	
Глава I. Введение в динамику. Дифференциальные уравнения движения	9
§ 1.1. Предмет и задачи динамики	9
§ 1.2. Инерциальные системы отсчета. Основное уравнение динамики точки	10
§ 1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	16
§ 1.4. Первая задача динамики	17
§ 1.5. Вторая задача динамики	18
§ 1.6. Прямолинейное движение материальной точки	23
§ 1.7. Задачи	27
Глава II. Прямолинейные колебания материальной точки	33
§ 2.1. Вводные замечания	33
§ 2.2. Свободные колебания	35
§ 2.3. Свободные колебания при линейно-вязком сопротивлении	40
§ 2.4. Свободные колебания при трении скольжения	46
§ 2.5. Вынужденные колебания	48
§ 2.6. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления	53
§ 2.7. Электродинамические аналогии. Понятие об исследовании колебаний материальных систем с помощью электронных аналоговых машин	58
Глава III. Общие теоремы динамики точки	61
§ 3.1. Теорема об изменении количества движения материальной точки	61
§ 3.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	64
§ 3.3. Работа силы. Мощность	68
§ 3.4. Теорема об изменении кинетической энергии	76
§ 3.5. Силовое поле. Потенциальная энергия	77
§ 3.6. Интеграл энергии. Понятие о рассеивании полной механической энергии	87
§ 3.7. Задачи	89
Глава IV. Движение материальной точки в центральном силовом поле	92
§ 4.1. Дифференциальное уравнение траектории точки, движущейся в центральном поле сил	92
§ 4.2. Виды траекторий. Круговая и параболическая скорости	94
§ 4.3. Определение параметров околоземной траектории по начальным условиям	97
§ 4.4. Траектории искусственных спутников Земли	99
§ 4.5. Определение времени полета по эллиптической орбите (уравнение Кеплера)	102
§ 4.6. Траектории, пересекающие земную поверхность	105
§ 4.7. Задачи	108

Глава V. Несвободное движение	111
§ 5.1. Определение несвободного движения. Связи. Принцип освобожденности	111
§ 5.2. Уравнения связей; классификация связей	113
§ 5.3. Движение точки по гладкой неподвижной поверхности	115
§ 5.4. Движение точки по гладкой неподвижной кривой	117
§ 5.5. Естественные уравнения движения. Математический маятник	120
§ 5.6. Теорема об изменении кинетической энергии для несвободного движения	127
§ 5.7. Метод кинетостатики для точки (принцип Даламбера)	129
§ 5.8. Задачи на применение метода кинетостатики	130
§ 5.9. Явление невесомости	132
Глава VI. Динамика относительного движения материальной точки	137
§ 6.1. Переносная и кориолисова силы инерции	137
§ 6.2. Условия относительного покоя	142
§ 6.3. Применение уравнений относительного движения и покоя	143
§ 6.4. Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении	151

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Глава VII. Материальная система	154
§ 7.1. Центр масс	154
§ 7.2. Внешние и внутренние силы	155
§ 7.3. Свойства внутренних сил	156
§ 7.4. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек	157
§ 7.5. Задача двух тел	159
§ 7.6. Общие замечания	162
Глава VIII. Теорема об изменении количества движения материальной системы	162
§ 8.1. Количество движения материальной системы	162
§ 8.2. Теорема об изменении количества движения материальной системы	164
§ 8.3. Теорема о движении центра масс	166
§ 8.4. Теорема Эйлера	169
§ 8.5. Задачи	171
Глава IX. Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы	180
§ 9.1. Момент количеств движения материальной системы	180
§ 9.2. Краткие сведения о моментах инерции	182
§ 9.3. Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы	183
§ 9.4. Примеры и задачи	185
§ 9.5. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	189
§ 9.6. Момент количеств движения системы, участвующей в сложном движении	191
§ 9.7. Теорема об изменении момента количеств относительного движения материальной системы	195
§ 9.8. Примеры и задачи	198

Глава X. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы	204
§ 10.1. Кинетическая энергия материальной системы и способы ее вычисления	204
§ 10.2. Кинетическая энергия твердого тела	206
§ 10.3. Работа сил, приложенных к материальной системе	211
§ 10.4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы	216
§ 10.5. Задачи	218
§ 10.6. Закон сохранения полной механической энергии материальной системы	222
§ 10.7. Теорема об изменении кинетической энергии относительного движения	225
Глава XI. Динамика тела переменной массы	227
§ 11.1. Понятие тела переменной массы	227
§ 11.2. Уравнение движения точки переменной массы	229
§ 11.3. Количество движения тела переменной массы	230
§ 11.4. Теорема об изменении количества движения тела переменной массы	231
§ 11.5. Уравнение Мещерского	233
§ 11.6. Задача Циолковского	234
§ 11.7. Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты	237
§ 11.8. Задачи	238

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава XII. Геометрия масс	242
§ 12.1. Введение	242
§ 12.2. Основные определения	242
§ 12.3. Примеры вычисления моментов инерции	246
§ 12.4. Моменты инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса—Штейнера)	250
§ 12.5. Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку	252
§ 12.6. Эллипсоид инерции	254
§ 12.7. Свойства главных осей инерции	256
§ 12.8. Вычисление моментов инерции относительно произвольных осей	257
§ 12.9. Вычисление тензора инерции	259
§ 12.10. Задачи на вычисление моментов инерции	261
Глава XIII. Динамика простейших движений твердого тела	264
§ 13.1. Основные задачи динамики твердого тела	264
§ 13.2. Количество движения, момент количества движения и кинетическая энергия твердого тела	266
§ 13.3. Поступательное движение твердого тела	269
§ 13.4. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и уравнения для определения реакций подшипников	270
§ 13.5. Добавочные динамические реакции. Статическая и динамическая уравновешенность тела	273
§ 13.6. Задачи	275
§ 13.7. Физический маятник	279
§ 13.8. Экспериментальное определение моментов инерции	280
§ 13.9. Плоское движение абсолютно твердого тела	282
§ 13.10. Задачи	284

Глава XIV. Динамика твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Движение искусственного спутника относительно центра масс	288
§ 14.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку	288
§ 14.2. Движение твердого симметричного тела, имеющего одну неподвижную точку, по инерции (случай Эйлера)	291
§ 14.3. Геометрическая интерпретация Пуансо	294
§ 14.4. Устойчивость вращения твердого тела вокруг главных осей инерции	296
§ 14.5. Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием силы тяжести (случай Лагранжа)	298
§ 14.6. Главный вектор и главный момент сил тяготения	301
§ 14.7. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ относительно центра масс	305
§ 14.8. Относительное равновесие ИСЗ	306
§ 14.9. Плоское движение ИСЗ по круговой орбите	308
Глава XV. Теория гироскопов	309
§ 15.1. Введение	309
§ 15.2. Основное допущение элементарной (прецессионной) теории гироскопов	311
§ 15.3. Теорема Резаля	312
§ 15.4. Основное свойство свободного (астатиического) гироскопа	313
§ 15.5. Закон прецессии оси гироскопа	315
§ 15.6. Момент гироскопической реакции	320
§ 15.7. Уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе	323
§ 15.8. Частные случаи движения гироскопа в кардановом подвесе	327
Глава XVI. Метод кинетостатики	330
§ 16.1. Метод кинетостатики	330
§ 16.2. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела	333
§ 16.3. Определение добавочных динамических реакций опор движущегося тела	334
§ 16.4. Задачи на определение добавочных динамических реакций	335
Глава XVII. Теория удара	339
§ 17.1. Основные определения	339
§ 17.2. Коэффициент восстановления	342
§ 17.3. Удар материальной точки об идеально гладкую поверхность	344
§ 17.4. Потеря кинетической энергии при ударе материальной точки о неподвижную поверхность	346
§ 17.5. Теорема об изменении количества движения и теорема об изменении момента количеств движения материальной системы при ударе	347
§ 17.6. Удар, действующий на тело, закрепленное в двух точках	349
§ 17.7. Условия отсутствия ударных реакций. Центр удара	350
§ 17.8. Удар двух тел	352
§ 17.9. Частные случаи удара двух тел	354
§ 17.10. Задачи	355
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	
Глава XVIII. Аналитическая статика	361
§ 18.1. Введение	361
§ 18.2. Связи	361
§ 18.3. Виртуальные перемещения голономных систем	365
§ 18.4. Идеальные связи	370

§ 18.5. Принцип виртуальных перемещений	372
§ 18.6. Обобщенные координаты и обобщенные силы	379
§ 18.7. Условия равновесия в обобщенных координатах	387
Глава XIX. Аналитическая динамика	389
§ 19.1. Общее уравнение динамики	389
§ 19.2. Уравнение Лагранжа второго рода	391
§ 19.3. Задачи на составление уравнений Лагранжа второго рода	394
§ 19.4. Особенности применения уравнений Лагранжа второго рода к системам с неидеальными и неудерживающими связями	401
§ 19.5. Выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты	405
§ 19.6. Обобщенный интеграл энергии	407
Глава XX. Малые колебания механических систем с одной и двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия	410
§ 20.1. Определение положений равновесия	410
§ 20.2. Устойчивость положения равновесия. Теорема Лагранжа— Дирихле. Критерий Сильвестра	413
§ 20.3. Малые колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия	420
§ 20.4. Случай произвольной возмущающей силы	424
§ 20.5. Определение периодических решений	430
§ 20.6. Малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия	433
§ 20.7. Задачи	438
§ 20.8. Нормальные координаты	445
§ 20.9. Функция рассеяния Рэлея	447
§ 20.10. Влияние сил сопротивления на колебания системы около по- ложения устойчивого равновесия	450
§ 20.11. Приближенный метод вычисления корней характеристиче- ского уравнения	451
§ 20.12. Вынужденные колебания	455
Глава XXI. Автономные нелинейные колебания систем с одной сте- пенью свободы	458
§ 21.1. Введение	458
§ 21.2. Фазовая плоскость	459
§ 21.3. Методы построения фазовых траекторий	467
§ 21.4. Метод припасовывания. Понятие об автоколебаниях	475
§ 21.5. Метод медленно меняющихся коэффициентов (метод Ван-дер- Поля)	481
Предметный указатель	492

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второй том настоящего курса рассчитан на студентов технических вузов с полной программой по теоретической механике. По сравнению с традиционными курсами в книге более подробно рассматриваются общие теоремы динамики системы, движение материальной точки в центральном силовом поле, динамика тела переменной массы, теория гироскопов, некоторые вопросы аналитической механики, а также теории колебаний.

При подготовке второго издания, выполненной Н. В. Бутениным и Д. Р. Меркиным, частично или полностью переработаны и заново изложены некоторые разделы курса, написаны новая XXI глава, посвященная элементам теории нелинейных колебаний, и § 14.6—14.9, в которых изложены основы теории движения искусственного спутника Земли относительно центра масс, добавлено много новых задач, пересмотрен весь текст, исправлены замеченные опечатки.

Учитывая, что учащиеся многих вузов нуждаются в более углубленном изучении ряда важнейших разделов механики, авторы рекомендуют им следующие книги, дополняющие настоящее руководство: Б у т е н и н Н. В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971; Л у н ц Я. Л. Введение в теорию гироскопов. — М.: Наука, 1972; М е р к и н Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1976; П а н о в к о Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1980; Б у т е н и н Н. В., Н е й м а р к Ю. И., Ф у ф а е в Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976; П а н о в к о Я. Г. Введение в теорию механического удара. — М.: Наука, 1977; М е р к и н Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980.

* * *

Все величины, приводимые в третьем издании, даются в единицах СИ — Международной системе единиц, введенной в СССР с 1 января 1982 года в соответствии с ГОСТ 8.417-82 (СТ СЭВ 1052—78) «Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин».

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1.1. Предмет и задачи динамики

Два предыдущих раздела курса механики — статика и кинематика — в сущности, мало связаны между собой. Каждому из них соответствует свой особый круг понятий, задач и методов их решения. В статике рассматриваются задачи о равновесии, а также задачи об эквивалентных преобразованиях систем сил; при таких преобразованиях даже не ставится вопрос о том, какое движение тела вызывают приложенные силы. В кинематике изучается движение «само по себе», вне связи с теми силами, под действием которых оно происходит.

Изолированное рассмотрение двух указанных проблем вызывается чисто методическими соображениями построения курса механики и, строго говоря, не вытекает из существа задач механики. Дело в том, что между действующими силами и движением существует глубокая внутренняя связь, которая отмечается уже в самом определении понятия силы. Эта связь принимается во внимание в динамике, предметом которой является изучение движения с учетом действующих сил.

Среди практических задач механики лишь небольшое число допускает чисто статическое или чисто кинематическое исследование: в большинстве случаев необходимо полное, т. е. динамическое изучение тех или иных механических явлений. При этом используются установленные в статике способы приведения сил, а также разработанные в кинематике методы описания и изучения движения; поэтому статику и кинематику можно рассматривать как введение в динамику, хотя они имеют и самостоятельное значение.

При всем разнообразии динамических задач выделяют две их категории. К первой категории относятся задачи, в которых движение тела (или механической системы) является заданным, и требуется найти силы, под действием которых это движение происходит (*первая задача*). В другую категорию входят задачи противоположного характера: в них силы являются заданными, а движение — искомым (*вторая задача*). Эти задачи называются *основными задачами динамики*.

При формулировании основных законов динамики пользуются моделью материальной точки, под которой понимают геометрическую

точку, наделенную конечной массой, т. е. в сущности под *материальной точкой* понимают тело конечной массы, размерами и различием в движении отдельных точек которого по условиям задачи можно пренебречь. В дальнейшем будет показано, что поступательно движущееся тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

§ 1.2. Инерциальные системы отсчета.

Основное уравнение динамики точки

В основании динамики лежат законы, впервые в наиболее полном и законченном виде сформулированные Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

В качестве первого закона Ньютон принял принцип инерции, открытый Галилеем, который можно сформулировать следующим образом: *изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.*

Под изолированной материальной точкой понимается материальная точка, которая не взаимодействует с другими телами или когда силы, действующие на точку, взаимно уравновешиваются.

Важнейшим обстоятельством при изучении движения тел относительно друг друга является выбор системы отсчета, что в свою очередь связано с принятым представлением о пространстве и времени. Естественно поставить вопрос: по отношению к какой же системе отсчета справедлив принцип инерции?

Ньютон, формулируя законы динамики, ввел в рассмотрение модели пространства и времени, которые предполагают наличие абсолютного неподвижного евклидова трехмерного пространства и абсолютного времени, т. е. времени, одинаково текущего для всех наблюдателей, где бы они ни находились и каково бы ни было их движение.

Исходя из этого представления о пространстве и времени, Ньютон и предполагал возможность существования абсолютной, неподвижной системы отсчета (системы координат), не связанной с материальными телами; для такой системы отсчета он и считал справедливым принцип инерции.

Последующее развитие представлений о пространстве привело к полному отрицанию понятия абсолютного пространства. Поэтому понятия «покой», «постоянная скорость» и т. п. лишены объективного смысла: пользуясь этим термином, необходимо указать, в какой системе отсчета рассматривается движение. Но движение, происходящее с постоянной скоростью в одной системе отсчета, может представляться ускоренным в другой системе отсчета; поэтому принцип инерции не обладает универсальностью, хотя, как показывают наблюдения, в некоторых системах отсчета принцип инерции оказывается справедливым.

Введем определение: системы отсчета, в которых справедлив принцип инерции, называются *инерциальными системами отсчета* (инерциальными системами координат). Подчеркнем, что об инерциальности или неинерциальности той или иной системы отсчета можно судить только на основе опыта. В частности, установлено, что *гелиоцентрическая система координат* (т. е. система координат с началом в центре Солнца и осями, направленными на «неподвижные» звезды) весьма близка к инерциальной системе.

Следует, однако, иметь в виду, что гелиоцентрическая система отсчета может считаться инерциальной только для движений внутри Солнечной системы, ибо центр масс Солнечной системы движется по криволинейной траектории относительно центра нашей Галактики с относительной скоростью, примерно равной $3 \cdot 10^5$ м/с, и ускорением порядка $3 \cdot 10^{-13}$ м/с².

Легко видеть, что система отсчета A_1 , которая движется относительно инерциальной системы отсчета A_0 поступательно и начало которой имеет постоянную по модулю и направлению скорость, также является инерциальной. Это вытекает из того, что ускорение точки в системе A_1 не отличается от ускорения точки в системе A_0 . В этом утверждении состоит *принцип относительности Галилея*.

Наоборот, в системах отсчета, движущихся относительно инерциальной системы отсчета не поступательно или не равномерно, принцип инерции не имеет места; такие системы называются *неинерциальными*. Если движение некоторой системы отсчета происходит с относительно малыми ускорениями относительно инерциальной системы отсчета, то при решении практических задач иногда можно пренебречь малой неинерциальностью (например, неинерциальностью геоцентрической системы, связанной с Землей); при этом приближенно принимают, что принцип инерции выполняется и в такой системе отсчета.

Развитие физики привело к концу XIX и началу XX века к необходимости создания других моделей пространства и времени. Так, например, в специальной теории относительности, в которой рассматриваются только инерциальные системы отсчета, моделью пространства и времени является четырехмерное пространство-время, т. е. пространство и время уже не считаются независимыми друг от друга.

Еще более сложная модель пространства и времени используется в общей теории относительности (теории тяготения), в которой рассматриваются неинерциальные системы отсчета. Эта модель уже предполагает зависимость пространства и времени от тяготеющих масс и полей.

Выводы как специальной, так и общей теории относительности при скоростях тел, значительно меньших скорости света, совпадают с выводами классической механики, а это значит, что классическая механика (механика Ньютона) является предельным случаем механики, основанной на принципах теории относительности.

Фундаментальное значение для всей динамики имеет следующий *основной закон динамики (второй закон Ньютона)*: *сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление силы*. В аналитической форме этот закон представляется в виде основного уравнения динамики

$$mw = F, \quad (1.1)$$

где F — сила, действующая на материальную точку, w — ее ускорение, m — масса материальной точки, являющаяся мерой ее инертных свойств.

Из формулировки основного закона динамики вовсе не вытекает, что в динамике исследуются движения, происходящие только в инерциальных системах. В главе VI мы будем рассматривать движение в неинерциальных системах, однако таких, движение которых относительно инерциальной системы задано; на языке кинематики задача сведется к выражению относительных ускорений через абсолютные ускорения.

Отметим, что *равенство действия и противодействия* двух материальных точек (*третий закон Ньютона*), о котором уже говорилось в начале курса статики, является общим законом всей механики и справедливо не только в задачах статики, но и в задачах динамики.

Строго говоря, в соответствии с третьим законом Ньютона движение любого тела нужно рассматривать во взаимодействии с другими телами. Однако достаточно часто встречаются случаи, когда взаимодействующие тела имеют несонизмеримые массы и, следовательно, от одинаковых действий приобретают несоизмеримые по модулю ускорения. Так, ИСЗ движется под действием силы тяготения Земли, но влияние ИСЗ на движение последней ничтожно. Точно так же сильное электромагнитное поле практически не зависит от нахождения и движения в нем заряженной частицы; в таких случаях можно рассматривать движение одного тела без учета обратного влияния.

Приведем еще одно фундаментальное положение механики — *закон независимости действия сил*: *если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение точки складывается из тех ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности*.

Это значит, что при действии на материальную точку сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, каждая из которых сообщает точке соответственно ускорения $w_1, w_2, \dots, w_n$, ускорение материальной точки будет

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

На основании (1.1) можно записать

$$mw_1 = F_1, \quad mw_2 = F_2, \dots, \quad mw_n = F_n.$$

Складывая между собой эти равенства, получим

$$m(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \dots + \mathbf{w}_n) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n,$$

или, на основании закона независимости сил,

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k,$$

где $\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$ — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Таким образом, движение материальной точки под действием сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ будет таким же, как и при действии одной силы, равной их геометрической сумме (равнодействующей).

В принципе основные законы динамики играют роль постулатов, проверенных не только прямыми экспериментами, но многовековой практикой человека

В сжатом виде законы динамики можно сформулировать следующим образом:

1. Существует такая система отсчета, в которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы. Такая система отсчета называется *инерциальной* (иногда ее условно называют неподвижной).

2. В инерциальной системе отсчета *вектор ускорения материальной точки пропорционален вектору силы, действующей на эту точку*.

3. Две материальные точки взаимодействуют друг с другом так, что *силы их взаимодействия равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия*.

4. При действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно сумме ускорений, которые имела бы точка при действии каждой силы в отдельности.

Отсюда следует, что систему сил, действующих на точку, можно заменить их равнодействующей.

Из основного уравнения динамики следует линейная зависимость между модулем силы и модулем ускорения

$$F = m\omega. \quad (1.2)$$

Эта зависимость дает возможность опытного определения массы материальной точки. Здесь имеются два подхода.

Массу некоторой материальной точки можно принять за единичную массу m_0 . Тогда, измеряя ускорения, приобретаемые под действием одной и той же силы двумя различными материальными точками (одна из них единичной массы), получим из (1.2)

$$F = m\omega, \quad F = m_0\omega_0. \quad (1.3)$$

Следовательно, $m = m_0\omega_0/\omega$. Масса m установлена. Отношение ускорений ω_0/ω определяет количество эталонных единиц массы, содержащихся в m .

При таком способе измерения массы единицы силы выражаются через единицы массы и единицы ускорения по формуле (1.2).

В международной системе единиц СИ единицей массы служит *килограмм* (кг). Единицы длины и времени — *метр* (м) и *секунда* (с).

Единица силы называется *ньютоном* (Н). Из (1.2) следует

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2.$$

Заметим, что часто применяется и более мелкая единица силы — *дина*:

$$1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н} = 0,001 \text{ кг} \cdot 0,01 \text{ м}/\text{с}^2 = 1 \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}^2.$$

Аналогично вводится один килоньютон (кН), который равен 1000 ньютонов.

Рассмотрим теперь другую возможность использования основного закона динамики. Можно, как и в статике, назначить единицу силы. Для измерения сил могут, например, служить пружинные весы. За единицу силы часто принимают силу тяжести на поверхности Земли одного килограмма массы. Такую единицу называют *килограмм-силой*, но, в отличие от килограмма-массы, записывают при помощи символа кгс. Здесь масса измеряется в производных единицах, имеющих размерность

$$[m] = [F] [w]^{-1}.$$

Если оставить без изменения масштабы длин и времени, то получим техническую систему единиц. Единица массы называется в ней *технической единицей массы* (т. е. м.),

$$1 \text{ т. е. м.} = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}.$$

Ниже при решении задач мы будем пользоваться международной системой единиц. Разумеется, масштабы всех единиц в пределах той или другой системы будут выбираться, исходя из соображений удобства решения той или иной задачи.

Масса, определяемая из основного уравнения динамики (1.2), называется *инертной массой*.

Однако существует и другой путь измерения массы.

Из закона всемирного тяготения следует, что между двумя материальными точками массы m_1 и m_2 , отстоящими друг от друга на расстоянии r , возникают силы взаимодействия, определяемые формулой

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.4)$$

где f — гравитационная постоянная.

Закон всемирного тяготения открывает новую возможность измерения массы. Пусть, например, $m_2 = M$ — масса Земли,

$m_1 = m_0$ — эталонная единичная масса, m — измеряемая масса. Тогда из (1.4) можно получить два соотношения:

$$F_0 = f \frac{m_0 M}{r^2}, \quad F_1 = f \frac{m M}{r^2}. \quad (1.5)$$

Предполагается, что обе массы m_0 и m помещены в одной и той же точке пространства.

Поделив одно из уравнений (1.5) на другое, получим

$$\frac{m}{m_0} = \frac{F_1}{F_0}, \quad m = \frac{F_1}{F_0} m_0. \quad (1.6)$$

Если r — радиус Земли, то очевидно, что F_1 и F_0 — силы притяжения на поверхности Земли. Как будет выяснено в главе VI, эти силы мало отличаются от сил тяжести. Масса, вычисляемая по формуле (1.6), называется «тяжелой» (или «гравитационной») массой.

Таким образом, отношение масс равно отношению сил притяжения.

Итак, масса одной и той же материальной точки может быть вычислена из двух совершенно различных опытов по формулам

$$\frac{m}{m_0} = \frac{w_0}{w}, \quad \frac{m}{m_0} = \frac{F_1}{F_0}.$$

Точные эксперименты, проведенные для проверки равенства инертной и тяжелой масс, показали совпадение этих значений. Они послужили отправной точкой для создания Эйнштейном теории тяготения.

В специальной теории относительности показывается, что масса m тела зависит от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — так называемая *масса покоя*, v — скорость тела, c — скорость света. В классической механике рассматриваются движения тел, скорости которых значительно меньше скорости света. Поэтому, пренебрегая отношением v^2/c^2 по сравнению с единицей*), считают массу тела постоянной.

Заметим, что если записать в обозначениях дифференциального исчисления второй закон Ньютона в том виде, как он его сформулировал, то основное уравнение динамики (1.1) примет вид

$$\frac{d(mv)}{dt} = F.$$

Эта форма основного уравнения динамики точки, в отличие от уравнения (1.1), применима не только для тела постоянной массы, но и тел, масса которых зависит от скорости.

*) Так, например, для второй космической скорости (см. § 4.2) $v = 11,2$ км/с и $v^2/c^2 \approx 1,4 \cdot 10^{-10}$.

§ 1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Положение материальной точки M в инерциальной системе отсчета будем определять ее радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Сила $\mathbf{F}$, действующая на точку, может зависеть от положения точки, т. е. от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (например, сила тяготения), скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ точки (например, сила сопротивления) и времени t (*). Следовательно, в общем случае $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t)$ и основное уравнение динамики точки (1.1) можно записать в следующей форме:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right).$$

Это равенство, представляющее физический закон, устанавливающий связь между массой точки, ее ускорением и действующей на точку силой, можно рассматривать одновременно как дифференциальное уравнение, в котором радиус-вектор $\mathbf{r}$ является функцией, а время t — аргументом. Это уравнение называется *дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме*.

Дифференциальное уравнение в векторной форме, естественно, эквивалентно трем скалярным уравнениям. В зависимости от выбора осей координат, на которые проектируется основное уравнение динамики (1.1), можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Так, например, если спроектировать обе части уравнения (1.1) на неподвижные оси декартовых координат, то будем иметь

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (1.7)$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ — проекции ускорения точки на координатные оси, F_x , F_y , F_z — проекции силы, действующей на точку, на те же оси.

Если пользоваться описанием движения в естественной форме, то нужно спроектировать основное уравнение динамики (1.1) на оси естественного трехгранника; в результате получим соотношения

$$m\omega_\tau = F_\tau, \quad m\omega_n = F_n, \quad m\omega_b = F_b, \quad (1.8)$$

где F_τ , F_n и F_b — проекции силы на касательную, главную нормаль и бинормаль. Вспоминая известные из кинематики выражения для проекций ускорения ω_τ , ω_n и ω_b на те же направления, получим

$$m \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = F_\tau, \quad \frac{m}{\rho} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (1.9)$$

где ρ — радиус кривизны в текущей точке траектории. Из последнего уравнения следует, что сила $\mathbf{F}$, под действием которой дви-

*) Подробнее см. в § 1.5.

жется материальная точка, лежит в соприкасающейся к траектории точки плоскости.

В случае плоского движения точки, рассматриваемого в полярных координатах r, φ , имеем

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi, \quad (1.10)$$

где F_r и F_φ — проекции силы на направление радиуса-вектора и перпендикулярное к нему направление (в сторону увеличения полярного угла φ).

Мы ограничились наиболее употребительными случаями; аналогично можно получить записи дифференциальных уравнений движения материальной точки в других системах криволинейных координат (цилиндрической, сферической и т. д.).

§ 1.4. Первая задача динамики

Как было сказано в § 1.1, в практике возникают различные постановки динамических задач. Прежде всего остановимся на первой задаче, когда движение задано и необходимо найти силу, под действием которой происходит это движение.

Эта задача решается следующим образом: закон движения подставляется в дифференциальные уравнения (1.7), (1.9) или (1.10) (в зависимости от способа задания движения) и с помощью дифференцирования соответствующих функций определяются проекции силы. Проследим за ходом решения на примерах.

Задача 1.1. Материальная точка массы m движется в плоскости xy , причем закон движения задан в виде

$$x = a \sin(kt + \varepsilon), \quad y = b \sin(kt + \delta) + c,$$

где $a, b, \varepsilon, \delta, c$ — любые постоянные параметры. Найти силу, под действием которой происходит это движение.

В данном случае движение задано в декартовых координатах. Поэтому выражение координат из закона движения нужно подставить в дифференциальное уравнение (1.7). При этом находим

$$F_x = -mk^2 a \sin(kt + \varepsilon), \quad F_y = -mk^2 b \sin(kt + \delta)$$

или, приняв во внимание закон движения, получим

$$F_x = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y + mk^2 c.$$

Таким образом, сила, действующая на материальную точку, будет

$$\mathbf{F} = -mk^2 \mathbf{r} + mk^2 c \mathbf{j},$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы осей x и y . Следовательно, материальная точка движется под действием силы притяжения, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию от начала координат до материальной точки, и постоянной силы, параллельной оси y .

Задача 1.2. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью v . Найти силу, под действием которой происходит такое движение.

Здесь движение задано естественным способом; поэтому согласно (1.9) находим $F_r = 0$, $F_n = mv^2/r$, т. е. заданное движение материальной точки происходит под

действием силы, постоянной по модулю и направленной по радиусу к центру окружности.

Задача 1.3. Материальная точка массы m движется по гладкой плоскости. Ее полярные координаты r и φ изменяются по закону (рис. 1.1) $r = at + b$, $\varphi = ct + d$, где a , b , c и d — положительные постоянные. Определить силу, под действием которой происходит это движение.

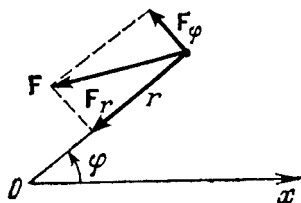


Рис. 1.1

Так как $\dot{r} = a$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = c$, $\ddot{\varphi} = 0$, то согласно первому уравнению (1.10) получаем

$$F_r = -m(at + b)c^2 = -mc^2r,$$

т. е. составляющая силы, действующая на материальную точку вдоль радиуса, направлена к полюсу и ее модуль растет пропорционально r .

Согласно второму уравнению (1.10) имеем

$$F_\varphi = 2mac,$$

т. е. составляющая силы, действующая на материальную точку по перпендикуляру к радиусу, постоянна. Модуль силы, действующей на точку, определяется равенством

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2} = mc \sqrt{c^2 r^2 + 4a^2}.$$

§ 1.5. Вторая задача динамики

Для определенности изложения будем рассматривать движение в декартовой системе координат, опираясь на уравнения (1.7). Как уже отмечалось ранее, сила (и ее проекции), действующая на материальную точку, в общем случае может зависеть от положения точки, ее скорости и времени.

Приведем несколько примеров переменных сил. На упругой балке установлен (рис. 1.2, а) не вполне уравновешенный двигатель. При заданном режиме работы двигателя сила давления на конструкцию, обусловленная неуравновешенностью, является функцией времени; заметим, что эта сила принимается нами не зависящей от того, как под ее воздействием колеблется конструкция. В этих условиях на конструкцию действует сила $P(t)$, заданная как явная функция времени t (здесь мы не касаемся вопроса о том, каким образом указанная конструкция схематизируется в виде материальной точки). Обратимся к другому примеру.

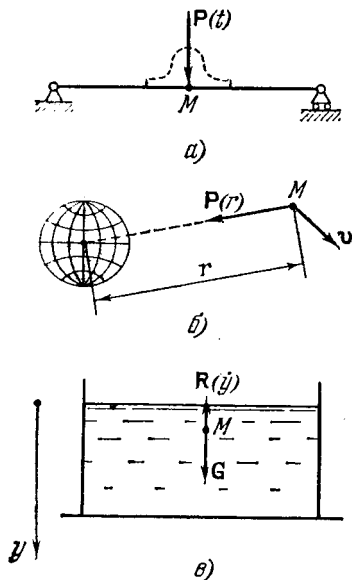


Рис. 1.2

С Земли произведен пуск космического корабля. После некоторого, сравнительно короткого промежутка времени двигатели выключаются, и корабль продолжает движение под действием практически единственной силы — силы притяжения

Земли (рис. 1.2, б); притяжение других небесных тел вначале движения пренебрежимо мало. Согласно закону всемирного тяготения эта сила не постоянна и постепенно убывает с увеличением расстояния r корабля от Земли. Здесь сила $P(r)$ притяжения зависит от положения корабля, т. е. определяется его координатами.

В качестве третьего примера рассмотрим силы, под действием которых происходит падение материальной точки в вязкой жидкости (рис. 1.2, в). На материальную точку действуют сила тяжести G и сила сопротивления жидкости R . Как показывает опыт, сила R зависит только от скорости падения, т. е. $R = R(\dot{y})$.

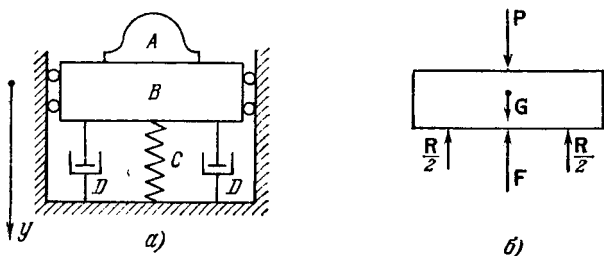


Рис. 1.3

В начале процесса, когда скорость мала, эта сила также невелика, но с возрастанием скорости растет и сила сопротивления.

Таким образом, зависимости, определяющие изменение переменных сил, весьма разнообразны по своей природе; можно указать три простейших типа переменных сил:

- а) силы, заданные как явные функции времени и не зависящие от движения материальной точки;
- б) силы, зависящие от координат материальной точки;
- в) силы, зависящие от скорости материальной точки.

Но возможны случаи, когда сила, действующая на точку, может быть одновременно функцией от нескольких аргументов. Например, действующая на космический корабль сила аэродинамического сопротивления при его движении в атмосфере (при взлете или снижении) зависит и от положения корабля, и от его скорости, так как плотность атмосферы убывает с высотой над поверхностью Земли.

Чаще всего на материальную точку одновременно действует несколько сил различных типов.

На рис. 1.3, а представлен пример, иллюстрирующий одновременное действие сил различной природы. Неуравновешенный двигатель A установлен на массивном фундаменте B , который в свою очередь установлен на амортизаторах (на рисунке они схематично изображены одной пружиной C и гидравлическими амортизаторами D).

В такой конструкции фундамент может иметь малые вертикальные поступательные перемещения (за счет деформации пружин), а при работе двигателя возникают колебания системы.

На фундамент действуют силы четырех типов. Во-первых, сила тяжести самого фундамента, обозначенная на рис. 1.3, б через G :

$$G = \text{const.} \quad (1.11)$$

Во-вторых, сила действия двигателя на фундамент, обозначенная на рисунке через P . Эта сила, меняющаяся во времени заданным образом, представляет переменное динамическое давление на фундамент, зависящее от величины неуравновешенных масс двигателя и угловой скорости вращения его ротора:

$$P = P(t). \quad (1.12)$$

В-третьих, на фундамент действует реакция пружины, которая в любой момент времени определяется деформацией пружины (т. е. перемещением фундамента):

$$F = F(y) \quad (1.13)$$

(y — вертикальное перемещение фундамента в данный момент).

Наконец, в-четвертых, на фундамент действуют реакции гидравлических амортизаторов D . Опыт показывает, что их реакции полностью определяются скоростью движения поршня в цилиндре амортизатора, т. е. скоростью самого фундамента:

$$R = R(\dot{y}). \quad (1.14)$$

При поступательном движении фундамента его можно рассматривать как материальную точку; дифференциальное уравнение движения этой точки (в проекции на ось y , которую будем считать направленной вниз) имеет вид

$$m\ddot{y} = G_y + P_y(t) + F_y(y) + R_y(\dot{y}). \quad (1.15)$$

Для того чтобы найти движение фундамента, необходимо решить это дифференциальное уравнение.

Подобным же образом дело обстоит и в других задачах. Следовательно, в общем случае вторая задача динамики приводит к необходимости решения системы трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

в которые искомые функции x, y, z входят вместе со своими первыми и вторыми производными по времени. Уравнения (1.16) представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций x, y и z и, как уже отмечалось, называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*.

Предположим, что нам удалось проинтегрировать систему уравнений (1.16) и получить общее решение

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, \dots, C_6), \\y &= y(t, C_1, \dots, C_6), \\z &= z(t, C_1, \dots, C_6),\end{aligned}\tag{1.17}$$

где $C_1, \dots, C_6$ — произвольные постоянные интегрирования. В каждую из функций (1.17) могут входить все шесть постоянных, так как в общем случае уравнения (1.16) не являются независимыми друг от друга.

Если теперь в соотношениях (1.17) постоянным интегрирования давать различные числовые значения, то можно получить совокупность различных решений. Это значит, что под действием одних и тех же сил, действующих на материальную точку, она может совершать различные движения.

Например, тело, отпущенное без начальной скорости, будет падать под действием силы тяжести вертикально вниз по прямой линии. Это же тело, брошенное под углом к горизонту, будет двигаться под действием той же силы тяжести (сопротивлением воздуха пренебрегаем) по некоторой кривой.

Таким образом, задания одних сил, действующих на материальную точку, еще недостаточно для определения конкретного закона ее движения. Для того чтобы выбрать из многообразия решений (1.17) то, которое соответствует решаемой нами конкретной задаче, нужно задать еще начальные условия движения. Начальное состояние движения точки определяется ее положением и ее скоростью в начальный момент времени, т. е. радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и скоростью $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ при $t = 0$.

В декартовой системе координат нужно задать соответствующие проекции:

при $t = 0$

$$\begin{aligned}x &= x_0, & y &= y_0, & z &= z_0, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0, & \dot{y} &= \dot{y}_0, & \dot{z} &= \dot{z}_0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Совокупность этих данных называется *начальными условиями движения*.

Для выбора значений шести постоянных интегрирования, входящих в общее решение (1.17) и соответствующих решаемой конкретной задаче, используются начальные условия движения (1.18). Это делается следующим образом: во-первых, требуем, чтобы при $t = 0$ значения x , y и z , определяемые выражениями (1.17), равнялись соответственно x_0 , y_0 и z_0 ; во-вторых, продифференцировав по времени выражения (1.17):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6), & \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6),\end{aligned}$$

требуем, чтобы при $t = 0$ эти $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ равнялись соответственно $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$.

Таким образом, мы получим шесть уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0, C_1, \dots, C_6), & \dot{x}_0 &= \dot{x}(0, C_1, \dots, C_6), \\ y_0 &= y(0, C_1, \dots, C_6), & \dot{y}_0 &= \dot{y}(0, C_1, \dots, C_6), \\ z_0 &= z(0, C_1, \dots, C_6), & \dot{z}_0 &= \dot{z}(0, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Решая эти уравнения относительно постоянных C_i , найдем

$$C_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (1.20)$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение (1.17), получим решение задачи, соответствующее данным начальным условиям:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (1.21)$$

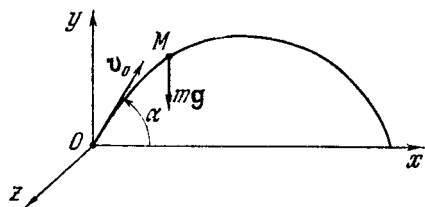


Рис. 1.4

В курсах математики доказывается, что при определенных условиях, накладываемых на правые части уравнений (1.16) (если задача механики поставлена правильно, то эти условия обычно выполняются), решение (1.21) единственное. Это значит, что при данных начальных условиях и данных силах движение точки полностью и единственным образом определено.

Следует заметить, что наибольшие затруднения обычно представляет первый этап — получение общего решения (1.17); после этого постоянные интегрирования определяются без особых трудностей.

Покажем на примере решение второй задачи динамики, причем ограничимся тем случаем, когда на материальную точку действует постоянная сила.

Задача 1.4. Исследовать движение материальной точки M массы m под действием силы тяжести; сопротивлением атмосферы пренебречь (рис. 1.4).

Выберем систему координатных осей так, чтобы ее начало O совпадало с начальным положением точки M , ось y направим вертикально вверх, а оси x и z — горизонтально. Ось x направим так, чтобы начальная скорость v_0 была расположена в плоскости xy . Из рассмотрения рис. 1.4 следует, что проекции действующей на точку силы тяжести на оси координат равны $F_x = 0$, $F_y = -mg$, $F_z = 0$. Следовательно, дифференциальные уравнения движения (1.16) в данном случае будут иметь вид

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg, \quad m\ddot{z} = 0, \quad (1.22)$$

или, после сокращения на m ,

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим общее решение

$$x = C_1 t + C_4, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_5, \quad z = C_3 t + C_6. \quad (1.23)$$

Для определения постоянных интегрирования C_i необходимо указать начальное состояние движения точки, т. е. ввести соответствующие начальные условия. Пусть начальная скорость v_0 составляет с осью x угол α . Тогда в силу выбора координатной системы будем иметь следующие начальные условия:

при $t = 0$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = v_0 \sin \alpha, \quad \dot{z} = 0.$$

В соответствии с (1.23) имеем

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2, \quad \dot{z} = C_3. \quad (1.24)$$

Используя теперь начальные условия, найдем постоянные интегрирования

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0, \quad C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя эти значения C_i в общее решение (1.23), получим уравнения движения материальной точки, брошенной под углом к горизонту:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \quad (1.25)$$

Из этих уравнений следует, что движение точки под действием силы тяжести происходит в вертикальной плоскости xOy ($z = 0$). Траекторией точки будет парабола:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.26)$$

Таким образом, задача решена. Дальнейшее исследование траектории (1.26) позволит определить дальность бросания и наибольшую высоту подъема. После этого можно поставить задачу об оптимальных условиях бросания, например, выяснить, при каком угле α достигается максимальная дальность (если считать значение v_0 заданным).

§ 1.6. Прямолинейное движение материальной точки

Выясним, при каких условиях материальная точка совершает прямолинейное движение.

Пусть материальная точка движется по прямой линии, которую мы примем за ось x ; тогда во все время движения будет $y = z = 0$. Следовательно, на основании уравнений (1.16) должны тождественно выполняться равенства

$$F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad (1.27)$$

т. е. если точка совершает прямолинейное движение, то сила, под действием которой происходит это движение, должна иметь линию действия, совпадающую с прямой, вдоль которой движется точка.

Однако необходимое условие (1.27) прямолинейного движения не является достаточным. Например, при движении точки под действием силы тяжести проекции силы на координатные оси, лежащие в горизонтальной плоскости, равны нулю, а точка движется не по прямой, а по параболе.

Для того чтобы материальная точка двигалась по прямой линии, необходимо и достаточно, чтобы действующая на нее сила была все

время параллельна начальной скорости точки. Если же начальная скорость равна нулю, то движение будет происходить по прямой, параллельной направлению силы.

В самом деле, если направить координатные оси так, чтобы ось x была направлена по начальной скорости точки, а начало координат было совмещено с начальным положением точки, то условия (1.27) будут соблюдены и, следовательно,

$$m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0,$$

откуда

$$\dot{y} = C_1, \quad \dot{z} = C_2 \quad \text{и} \quad y = C_1 t + C_3, \quad z = C_2 t + C_4.$$

Имеем начальные условия: при $t = 0$ $y = 0$, $z = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$; тогда

$$y \equiv 0, \quad z \equiv 0, \quad (1.28)$$

т. е. траектория движения точки — прямая линия — ось x . Таким образом, показана и достаточность условий прямолинейности движения.

Ниже рассматриваются некоторые задачи о прямолинейном движении материальной точки, причем во всех случаях координатную ось x мы будем совмещать с прямой, вдоль которой происходит движение. В таких задачах действующая на точку сила полностью определяется ее единственной проекцией F_x .

Рассмотрим несколько случаев прямолинейного движения материальной точки, в которых можно заранее указать методы интегрирования дифференциальных уравнений движения; каждый из случаев относится к определенному характеру действующей силы.

1. Прямолинейное движение материальной точки под действием силы, зависящей только от времени. Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x(t), \quad (1.29)$$

откуда

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Интегрируя, получим

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int F_x(t) dt + C_1,$$

где под $\int F_x(t) dt$ понимается первообразная функция. Интегрируя далее, будем иметь

$$x = \frac{1}{m} \int \left[\int F_x(t) dt \right] dt + C_1 t + C_2. \quad (1.30)$$

2. Прямолинейное движение материальной точки под действием силы, зависящей только от положения точки. В этом случае дифференциальное уравнение движения будет

$$m\ddot{x} = F_x(x). \quad (1.31)$$

Вводя $v = \dot{x}$, получим

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение примет вид

$$v dv = \frac{1}{m} F_x(x) dx.$$

После интегрирования найдем

$$v^2 = \frac{2}{m} \int F_x(x) dx + C_1,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \int F_x dx + C_1},$$

или, переходя к проекции скорости,

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \int F_x dx + C_1}^*), \quad dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F_x dx + C_1}}.$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F_x(x) dx + C_1}} + C_2.$$

Вводя обозначение

$$\Phi(x, C_1, C_2) = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F_x(x) dx + C_1}} + C_2,$$

получим

$$t = \Phi(x, C_1, C_2).$$

Решая это уравнение относительно x , найдем зависимость x от времени и постоянных интегрирования:

$$x = \varphi(t, C_1, C_2). \quad (1.32)$$

Таким образом, задача решается при помощи двух квадратур.

*) Здесь и в дальнейшем знак перед корнем выбирается в зависимости от направления движения точки в рассматриваемом промежутке времени. Если $\dot{x}_0 > 0$, то берется знак «плюс», при противоположном случае — «минус». Знак может изменяться на противоположный в моменты, когда $\dot{x} = 0$.

3. Прямолинейное движение точки под действием силы, зависящей только от скорости точки. Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}) \quad (1.33)$$

с помощью замены $v = \dot{x}$ преобразуется к виду

$$\frac{dv}{F_x(v)} = \frac{1}{m} dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int \frac{dv}{F_x(v)} + C_1 = \frac{1}{m} t.$$

Если ввести обозначение

$$\Phi(v, C_1) = m \left[\int \frac{dv}{F_x(v)} + C_1 \right],$$

то последнее равенство примет вид

$$t = \Phi(v, C_1),$$

или

$$t = \Phi(\dot{x}, C_1).$$

Решая это уравнение относительно $\dot{x}$, будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, C_1),$$

откуда

$$x = \int f(t, C_1) dt + C_2. \quad (1.34)$$

Если уравнение $t = \Phi(\dot{x}, C_1)$ нельзя решить относительно $\dot{x}$, то поступим следующим образом: вводя преобразование

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} v,$$

перепишем дифференциальное уравнение (1.33) в виде

$$\frac{mv dv}{F_x(v)} = dx,$$

откуда

$$x = m \int \frac{v dv}{F_x(v)} + C_1.$$

Из этого уравнения находим $v = \dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1)$$

и после интегрирования будем иметь

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1')} + C_2',$$

откуда и определим x как функцию времени t .

§ 1.7. Задачи

Задача 1.5. На покоящуюся материальную точку массы m в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, проекция которой на ось x выражается зависимостью $P_x = P \sin \omega t$. Найти закон движения и сравнить решение со случаем, когда указанная проекция изменяется по закону $P_x = P \cos \omega t$.

Совмещая начало оси x с начальным положением точки, получим дифференциальное уравнение движения в виде (1.29):

$$m\ddot{x} = P \sin \omega t.$$

Согласно (1.30) записываем

$$x = \frac{1}{m} \int \left[\int P \sin \omega t \, dt \right] dt + C_1 t + C_2,$$

т. е.

$$x = -\frac{P}{m\omega^2} \sin \omega t + C_1 t + C_2.$$

Подчиняя решение начальным условиям: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ при $t = 0$, находим

$$C_1 = P/(m\omega), \quad C_2 = 0.$$

Следовательно, материальная точка движется вдоль оси x по закону

$$x = \frac{P}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t).$$

Из графика функции $x(t)$, изображенного на рис. 1.5, а, видно, что точка постепенно удаляется от начального положения, совершая колебания около режима постоянной скорости.

Если на материальную точку действует косинусоидальная сила, то дифференциальное уравнение движения (1.29) будет

$$m\ddot{x} = P \cos \omega t$$

и в соответствии с (1.30) общее решение имеет вид

$$x = -\frac{P}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1' t + C_2'.$$

Из предыдущих начальных условий находим $C_1' = 0$, $C_2' = P/(m\omega^2)$; поэтому закон движения выражается при помощи соотношения

$$x = \frac{P}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

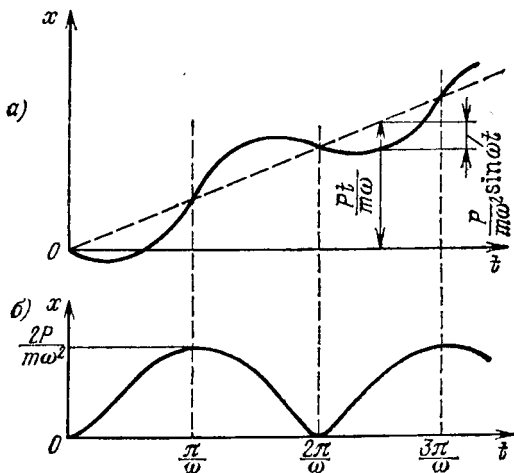


Рис. 1.5

На рис. 1.5, б изображен график этой функции; движение носит колебательный характер, причем точка не удаляется от начального положения дальше чем на

$$x_{\max} = \frac{2P}{m\omega^2}.$$

Мы получили на первый взгляд неожиданный результат. В обоих случаях на точку действовала периодическая сила, изменяющаяся по гармоническому закону; начальные условия также совпадали, однако отклонения точки от начального положения имеют различный характер. В первом случае наблюдается систематическое удаление точки от ее начального положения, во втором — удаления нет, движение имеет периодический характер.

С формально математической точки зрения ничего удивительного здесь нет. Периодичность изменения ускорения (второй производной от координаты) вовсе не влечет за собой периодичности изменения скорости (первой производной) и тем более самой координаты. Применительно к разобранному примеру можно привести следующие физические соображения. В первом случае сила, а значит, и ускорение меняются по синусоидальному закону $F = P \sin \omega t$. Это значит, что в течение полупериода ($0 \leq t \leq \pi/\omega$) ускорение было положительно и точка набирала скорость. Затем направление силы и, следовательно, ускорение изменялись и скорость начала убывать, так что к концу периода $t = 2\pi/\omega$ она достигала нуля. Таким образом, проекция скорости $\dot{x}$ была все время одного знака ($\dot{x} \geq 0$). Отсюда ясно, что координата x за это время могла только возрастать и к началу следующего цикла изменения силы она получила конечное приращение. Такое же приращение отклонения произойдет за второй и последующие периоды.

Во втором же случае к концу первого полупериода проекция скорости окажется равной нулю, в течение последующего полупериода она окажется отрицательной, и изменяясь по синусоидальному закону, в конце периода станет равной нулю. Такая закономерность скорости приводит к периодичности отклонения x .

Задача 1.6. На материальную точку массы m действует сила отталкивания F_x , пропорциональная координате x и равная $F_x = cx$, где c — коэффициент пропорциональности. Найти движение точки, если в начальный момент $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$m\ddot{x} = cx.$$

Уравнение движения имеет ту же форму, что и (1.31), однако здесь целесообразнее воспользоваться не общим приемом, а учесть то обстоятельство, что дифференциальное уравнение является линейным. Перенесем все члены этого уравнения в левую часть и разделим его на массу m :

$$\ddot{x} - \frac{c}{m} x = 0.$$

Согласно общей теории линейных однородных дифференциальных уравнений будем искать решение в форме $x = Ce^{\alpha t}$. Отсюда

$$\ddot{x} = C\alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Внесем эти значения для x и $\ddot{x}$ в дифференциальное уравнение и сократим его на $Ce^{\alpha t}$, в результате чего получим характеристическое уравнение

$$\alpha^2 - k^2 = 0,$$

где $k = \sqrt{c/m}$. Решая характеристическое уравнение, найдем $\alpha_1 = -k$, $\alpha_2 = k$. Так как оба корня оказались вещественными, то общее решение дифференциального уравнения будет

$$x = C_1 e^{-kt} + C_2 e^{kt},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий движения.

Имеем

$$\dot{x} = -C_1 k e^{-kt} + C_2 k e^{kt}.$$

Подставив в эти выражения для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ значения $t = 0$, $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$, получим

$$0 = C_1 + C_2, \quad v_0 = -C_1 k + C_2 k.$$

Отсюда $C_1 = -v_0/(2k)$, $C_2 = v_0/(2k)$. Подставим эти значения для C_1 и C_2 в выражение для x :

$$x = \frac{v_0}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt,$$

где гиперболический синус $\operatorname{sh} kt$ определен равенством $\operatorname{sh} kt = (e^{kt} - e^{-kt})/2$.

Полученное решение удовлетворяет выбранным начальным условиям (при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = v_0$). Если начальные условия будут при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, то точка будет двигаться по закону

$$x = x_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = x_0 \operatorname{ch} kt$$

($\operatorname{ch} kt = (e^{kt} + e^{-kt})/2$ — гиперболический косинус). График этой функции изображен на рис. 1.6 сплошной линией.

При относительно больших значениях времени второй член $(x_0/2)e^{-kt}$ становится пренебрежимо малым и можно принять $x \approx (x_0/2)e^{kt}$ (см. штриховую линию на рис. 1.6).

Заметим, что это приближенное решение не удовлетворяет начальным условиям.

Задача 1.7. Считая, что при прямолинейном движении корабля возникает сила сопротивления, пропорциональная квад-

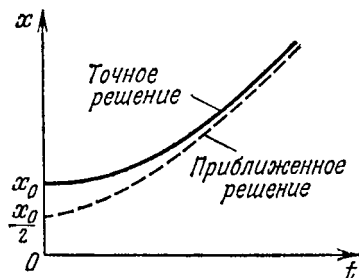


Рис. 1.6

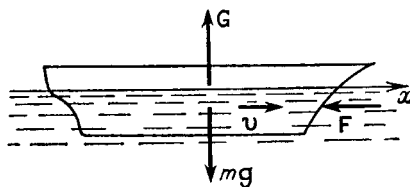


Рис. 1.7

рату его скорости, определить путь, который пройдет корабль после остановки двигателей за время, в течение которого скорость корабля уменьшится в два раза.

Обозначим через m массу корабля и через v_0 его скорость в момент остановки двигателей. На корабль действуют три силы: сила тяжести mg , архимедова сила G и сила сопротивления F , причем $F = \alpha v^2$, где α — постоянный коэффициент жидкостного сопротивления. Первые две силы вертикальны, а сила сопротивления горизонтальна и направлена в сторону, противоположную скорости корабля (рис. 1.7).

Напишем основное уравнение динамики (1.1) для рассматриваемого примера:

$$m \frac{dv}{dt} = mg + G + F.$$

В проекции на горизонтальную ось x получим

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x^2.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{m dv_x}{v_x^2} = -\alpha dt.$$

После интегрирования получим

$$-\frac{m}{v_x} = -\alpha t + C_1. \quad (1.35)$$

Условимся отсчитывать время с момента остановки двигателей корабля. Тогда при $t = 0$ $v_x = v_0$ и, следовательно, $C_1 = -m/v_0$.

Выражение (1.35) теперь может быть записано в виде

$$v_x = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}. \quad (1.36)$$

Так как $v_x = dx/dt$, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{m}{\alpha} \ln(m + \alpha v_0 t) + C_2. \quad (1.37)$$

Постоянную C_2 найдем из условия: $x = 0$ при $t = 0$, т. е. $0 = (m/\alpha) \ln m + C_2$. Отсюда $C_2 = -(m/\alpha) \ln m$, и равенство (1.37) принимает вид

$$x = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{m + \alpha v_0 t}{m}.$$

Подставив сюда соотношение

$$\frac{m + \alpha v_0 t}{m} = \frac{v_0}{v_x},$$

получаемое из формулы (1.36), окончательно имеем

$$x = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{v_0}{v_x}.$$

Полагая $v_x = v_0/2$, найдем путь, который пройдет корабль за время, в течение которого его скорость уменьшится вдвое:

$$S = \frac{m}{\alpha} \ln 2.$$

Задача 1.8. Точка массы m падает на Землю из состояния покоя под действием постоянной силы тяжести. Найти скорость и закон движения точки, если сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ($R = k^2 v^2$, где k — постоянная).

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - mk^2\dot{x}^2,$$

т. е. соответствует форме (1.33).

Последуем указанному выше пути решения и обозначим $\dot{x} = v$. Это позволит привести уравнение движения к уравнению первого порядка

$$\frac{dv}{dt} = g - k^2 v^2,$$

или

$$\frac{dv}{g - k^2 v^2} = dt.$$

После интегрирования получим

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv}{\sqrt{g} - kv} = t + C_1.$$

Так как движение начинается из состояния покоя, то $v = 0$ при $t = 0$ и $C_1 = 0$. Следовательно, имеем

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv}{\sqrt{g} - kv} = t,$$

откуда

$$v = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{2kt\sqrt{g}} - 1}{e^{2kt\sqrt{g}} + 1}.$$

Из этой формулы следует, что $v \rightarrow \sqrt{g}/k$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. скорость падения стремится к определенному пределу.

Перейдем теперь к нахождению закона движения. Так как $v = dx/dt$, то

$$dx = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{2kt\sqrt{g}} - 1}{e^{2kt\sqrt{g}} + 1} dt,$$

или

$$dx = \frac{1}{k^2} \frac{d(e^{kt\sqrt{g}} + e^{-kt\sqrt{g}})}{e^{kt\sqrt{g}} + e^{-kt\sqrt{g}}};$$

отсюда

$$x = \frac{1}{k^2} \ln (e^{kt\sqrt{g}} + e^{-kt\sqrt{g}}) + C_2.$$

При $t = 0$ $x = 0$, следовательно, $C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln 2$. Таким образом, имеем

$$x = \frac{1}{k^2} \ln \frac{e^{kt\sqrt{g}} + e^{-kt\sqrt{g}}}{2}.$$

Даже при сравнительно небольших значениях времени $e^{kt\sqrt{g}} \gg e^{-kt\sqrt{g}}$; поэтому, пренебрегая слагаемым $e^{-kt\sqrt{g}}$, получим приближенно

$$x = \frac{1}{k^2} \ln \frac{e^{kt\sqrt{g}}}{2} = \frac{\sqrt{g}}{k} t - \frac{\ln 2}{k^2},$$

т. е. движение по истечении некоторого промежутка времени становится практически равномерным.

Как и в предыдущем примере, это решение вследствие своей приближенности не удовлетворяет начальным условиям; это можно понять, рассматривая рис. 1.8, где графически представлены точное и приближенное решения.

Задача 1.9. Материальная точка начинает движение в вязкой жидкости с горизонтальной скоростью, равной по модулю v_0 . Движение начинается из точки

с координатами $x = 0$, $y = h$, $z = 0$ (рис. 1.9). На точку действуют сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости ($R = kmv$, где k — коэффициент пропорциональности). Найти закон движения точки.

В качестве координатной плоскости xy примем вертикальную плоскость, проходящую через направление начальной скорости точки; ось y направим вертикально вверх.

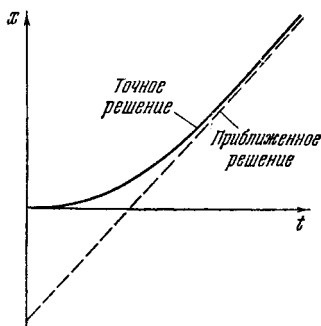


Рис. 1.8

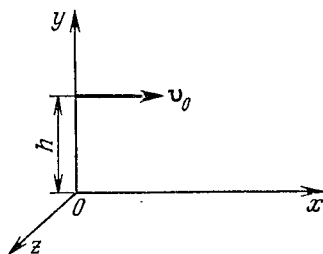


Рис. 1.9

Силы, действующие на точку, равны

$$P = mg, \quad R = -kmv.$$

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg, \quad m\ddot{z} = -km\dot{z},$$

или

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + k\dot{y} = -g, \quad \ddot{z} + k\dot{z} = 0.$$

Система уравнений движения распадается на три линейных уравнения, общие решения которых будут

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt}, \quad y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k} t, \quad z = C_5 + C_6 e^{-kt}.$$

Так как

$$\dot{x} = -C_2 k e^{-kt}, \quad \dot{y} = -C_4 k e^{-kt} - \frac{g}{k}, \quad \dot{z} = -C_6 k e^{-kt},$$

то при начальных условиях:

при $t = 0$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = h, \quad z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0$$

получим

$$C_1 = \frac{v_0}{k}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{k}, \quad C_3 = h + \frac{g}{k^2}, \quad C_4 = -\frac{g}{k^2}, \\ C_5 = 0, \quad C_6 = 0$$

и тогда

$$x = v_0 \frac{1 - e^{-kt}}{k}, \quad y = h + g \frac{1 - e^{-kt} - kt}{k^2}, \quad z = 0.$$

Отсюда следует, что движение точки будет происходить в вертикальной плоскости.

Для получения закона движения при отсутствии сопротивления среды следует k устремить к нулю; тогда получим

$$x = v_0 t, \quad y = h - gt^2/2, \quad z = 0.$$

Глава II

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 2.1. Вводные замечания

Среди различных сил, которые могут действовать на материальную точку, особое место занимают *восстанавливающие силы*, т. е. силы, стремящиеся вернуть точку в положение равновесия. Такие силы зависят от отклонения точки от положения равновесия и направлены к положению равновесия.

Как мы увидим ниже, восстанавливающие силы придают движению материальной точки *колебательный характер*. Природа этих сил весьма разнообразна. Три случая показаны на рис. 2.1.

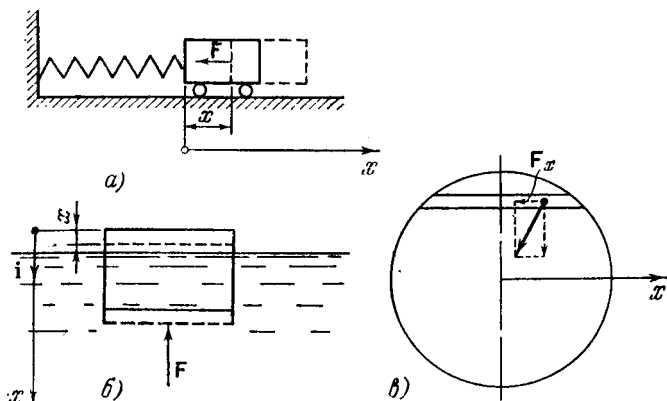


Рис. 2.1

В первом случае (рис. 2.1, а) восстанавливающая сила обусловлена упругими свойствами пружины и возникает вследствие деформации пружины. Во втором случае (рис. 2.1, б) при вертикальных отклонениях плавающего понтона от положения равновесия возникает дополнительная (архимедова) сила, также направленная против отклонения и играющая роль восстанавливающей силы. В третьем случае (рис. 2.1, в) имеется в виду материальная точка, падающая в прямолинейном сквозном канале, который проходит внутри Земли. Если тело отклонено от положения равновесия, возникает составляющая силы притяжения, направленная к положению равновесия.

Однако, кроме восстанавливающих сил, в подобных случаях одновременно действуют, как правило, также *силы сопротивления* $R(\dot{x})$, зависящие от скорости движения; таково в схеме рис. 2.1, а трение между телом и горизонтальной поверхностью, в схеме

рис. 2.1, б — зависящее от скорости сопротивление воды, в схеме рис. 2.1, в — сопротивление воздуха и трение скольжения. Наконец, возможно, что к материальной точке приложена *возмущающая сила*, т. е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Настоящая глава посвящена систематическому исследованию всех вариантов сочетания указанных сил в случае прямолинейного движения материальной точки. Хотя эта задача представляет практический интерес и сама по себе, но еще более важно, что ее решение можно почти без всяких изменений использовать для многих других случаев колебаний.

Дело в том, что различные по своему физическому содержанию колебательные явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, поэтому выводы, полученные при изучении колебательного движения в какой-либо одной области, могут быть использованы и в других областях.

Т а б л и ц а 1

Действующие силы	Дифференциальное уравнение	Наименование вида колебаний
Восстанавливающая сила $F(x)$: $F_x = -cx$	$m\ddot{x} + cx = 0$	Свободные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ + сила сопротивления $R(\dot{x})$: $F_x = -cx, R_x = -b\dot{x}$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	Свободные колебания при наличии вязкого трения
Восстанавливающая сила $F(x)$ + возмущающая сила $Q(t)$: $F_x = -cx, Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + cx = Q_x(t)$	Вынужденные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ + сила сопротивления $R(\dot{x})$ + возмущающая сила $Q(t)$: $F_x = -cx, R_x(\dot{x}) = -b\dot{x},$ $Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q_x(t)$	Вынужденные колебания при наличии вязкого трения

Наиболее просты для исследования те случаи колебательных движений, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения равновесия, а сила сопротивления пропорциональна скорости точки. Соответственно проекции восстанавливающей силы и силы сопротивления на ось x имеют вид

$$F_x = -cx, \quad R_x = -b\dot{x}.$$

В этих случаях дифференциальные уравнения движения *линейны*; соответственно такие колебания также называются *линейными* *).

В зависимости от того, какая комбинация сил действует на материальную точку, колебательное движение приобретает те или иные типичные особенности. В таблице 1 дана сводка различных изучаемых в дальнейшем типов линейных колебаний.

Возможны и более сложные случаи, когда сила зависит одновременно от координаты x и времени t и не может быть представлена в виде суммы $F_x(x)$ и $Q_x(t)$, а также когда сила зависит от координаты x и скорости $\dot{x}$, причем силу нельзя представить как сумму $F(x)$ и $R(\dot{x})$. Эти случаи здесь не рассматриваются.

§ 2.2. Свободные колебания

Рассматриваемая задача характеризуется тем, что на материальную точку действует только *восстанавливающая сила*; в линейных задачах ее модуль пропорционален отклонению точки от положения равновесия. Проекция восстанавливающей силы на ось x равна

$$F_x = -cx, \quad (2.1)$$

где c — коэффициент пропорциональности, а дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Положив $c/m = k^2$, получим

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, движение материальной точки под действием восстанавливающей силы описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\alpha^2 + k^2 = 0.$$

Так как его корни — чисто мнимые числа: $\alpha_1 = ki$, $\alpha_2 = -ki$, то общим решением дифференциального уравнения (2.2) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.3)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Для большего удобства анализа этого решения введем новые постоянные интегрирования a и ϵ , положив

$$C_1 = a \sin \epsilon, \quad C_2 = a \cos \epsilon.$$

Это можно сделать, так как из этих соотношений постоянные a и ϵ определяются через C_1 и C_2 с помощью формул

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \epsilon = C_1/C_2.$$

*) Термин «линейные колебания» никак не связан с прямолинейностью траектории точки и определяется исключительно линейностью дифференциальных уравнений.

Тогда

$$x = a \cos \varepsilon \sin kt + a \sin \varepsilon \cos kt,$$

или

$$x = a \sin (kt + \varepsilon). \quad (2.4)$$

Постоянные a и ε (или постоянные C_1 и C_2) определяются заданными начальными условиями — начальным положением и начальной скоростью движущейся точки.

Таким образом, под действием восстанавливающей силы материальная точка совершает движение по синусоидальному закону, т. е. гармоническое колебательное движение. Такие колебания называются *свободными колебаниями*.

Из уравнения (2.4) видно, что наибольшее отклонение материальной точки от положения равновесия (*амплитуда колебаний*) равно a .

Аргумент $(kt + \varepsilon)$ называется *фазой колебаний*, а величина ε — *начальной фазой*.

Величина k называется *угловой частотой* колебаний и определяет число колебаний, совершаемых точкой за 2π секунд. В дальнейшем величину k для краткости будем называть просто *частотой*. Частота колебаний k не зависит от начальных условий и определяется только параметрами системы (величинами s и m). По этому признаку частоту свободных колебаний называют также *собственной частотой*.

Для определения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся *начальными условиями*, которые должны быть заданы (в противном случае колебательный процесс не полностью определен). Пусть в начальный момент $t = 0$ известны начальное положение материальной точки $x = x_0$ и начальная скорость $\dot{x} = \dot{x}_0$. Тогда, подставив в уравнение движения (2.4) и в выражение для скорости

$$\dot{x} = ak \cos (kt + \varepsilon) \quad (2.5)$$

$t = 0$, $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$, получим для определения a и ε два уравнения:

$$x_0 = a \sin \varepsilon, \quad \dot{x}_0 = ak \cos \varepsilon.$$

Отсюда находим

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \quad (2.6)$$

*) Если $x_0 > 0$, то при $\frac{x_0}{\dot{x}_0} > 0$ $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, а при $\frac{x_0}{\dot{x}_0} < 0$ $\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \leq \pi$.
Если $x_0 < 0$, то при $\frac{x_0}{\dot{x}_0} > 0$ $\pi \leq \varepsilon \leq \frac{3\pi}{2}$, а при $\frac{x_0}{\dot{x}_0} < 0$ $\frac{3\pi}{2} \leq \varepsilon \leq 2\pi$.

и поэтому закон движения точки определяется следующим уравнением:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \sin \left(kt + \arctg \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \right). \quad (2.7)$$

График свободных колебаний материальной точки представлен на рис. 2.2; здесь отмечены начальное отклонение x_0 , амплитуда колебаний a , а также промежуток времени T , в течение которого происходит одно полное колебание. Этот наименьший промежуток времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется, называется *периодом колебаний*. Зависимость между периодом колебаний и частотой определится из условия периодичности движения:

$$k(t + T) + \varepsilon = kt + \varepsilon + 2\pi,$$

откуда $T = 2\pi/k$, или

$$T = 2\pi \sqrt{m/c}. \quad (2.8)$$

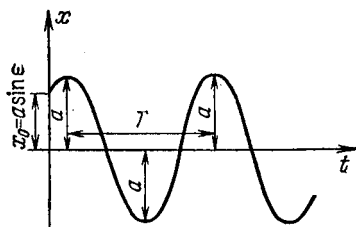


Рис. 2.2

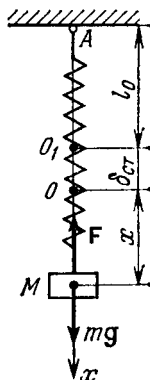


Рис. 2.3

Таким образом, период колебаний, так же как и частота, не зависит от начальных условий. Это свойство колебаний называется *изохронностью*. Как видно из (2.8), период и частота колебаний определяются величиной колеблющейся массы m и коэффициентом пропорциональности c , причем с увеличением массы и уменьшением коэффициента c период колебаний увеличивается.

Задача 2.1. Груз массы m подвешен на пружине, массой которой можно пренебречь (рис. 2.3). На колеблющийся груз действуют две силы: сила тяжести mg и сила упругости F , создаваемая пружиной. Составить дифференциальное уравнение движения.

Отметим на рис. 2.3 три положения: O_1 — положение нижнего конца пружины в ее недеформированном состоянии (l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии), O — положение равновесия груза, висящего на пружине, M — текущее положение груза при его движении. Обозначим расстояние O_1O через $\delta_{ст}$ (статическая деформация пружины) и направим ось x вертикально вниз, выбрав начало отсчета в положении равновесия груза (точка O).

По закону Гука при относительно небольших перемещениях модуль силы упругости пропорционален деформации пружины. В нашем случае деформация пружины равна $|\delta_{ст} + x|$, поэтому $F = c |\delta_{ст} + x|$, где c — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом жесткости* пружины. Очевидно, что коэффициент жесткости численно равен силе, которую нужно приложить к концу

пружины, чтобы деформировать ее на единицу длины. Проекция силы F на ось x равна $-c(\delta_{ст} + x)$. Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x).$$

Если груз находится в равновесии, то сила тяжести mg уравновешивается силой упругости, которая в положении равновесия равна $c\delta_{ст}$ (так как в этом случае $x = 0$). Следовательно,

$$mg = c\delta_{ст}. \quad (2.9)$$

Принимая это во внимание, приведем дифференциальное уравнение движения груза к виду

$$m\ddot{x} = -cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2x = 0,$$

где $k^2 = c/m$.

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (2.2). Поэтому груз, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания с частотой k .

Если начало координат взять в точке O_1 или в верхнем неподвижном конце A пружины, то дифференциальное уравнение движения усложнится. Так, если начало координат выбрано в точке O_1 , то $F_x = -cx$, и уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{x} = mg - cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2x = g.$$

Если начало координат выбрать в неподвижном конце A пружины, то $F_x = -c(x - l_0)$, где l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии. Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = mg - c(x - l_0)$$

после упрощения приводится к форме

$$\ddot{x} + k^2x = g + k^2l_0.$$

Таким образом, рациональным выбором начала отсчета можно упростить форму дифференциального уравнения движения и, следовательно, его решение.

Задача 2.2. На понтон (рис. 2.1, б) действует его сила тяжести G и архимедова выталкивающая сила F . Исследовать вертикальную качку понтона.

В состоянии равновесия сила тяжести понтона G уравновешивается архимедовой силой F . Если это состояние по какой-либо причине нарушается и понтон дополнительно погрузится в воду, то согласно закону Архимеда выталкивающая сила возрастет, т. е. получит приращение, направленное вверх. Понятно, что при любых отклонениях понтона от положения равновесия приращение силы F будет направлено против отклонения. Если понтон прямостоящий (в первом приближении это можно принять), то приращение архимедовой силы пропорционально отклонению x и определяется соотношением

$$\Delta F = -\gamma Sx,$$

где γ — удельный вес воды, S — площадь, ограниченная ватерлинией (площадь сечения понтона горизонтальной плоскостью на уровне поверхности воды). Действительно, произведение Sx определяет дополнительно вытесненный объем воды, так что произведение γSx равно «потере веса» по закону Архимеда, т. е. приращению модуля силы F .

Допустим, что после нарушения состояния равновесия понтон будет предоставлен самому себе. В любой момент последующего движения на понтон действуют две силы: сила тяжести $G = mg$ (направленная вниз) и архимедова сила $F + \Delta F$ (направленная вверх). Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - F - \gamma Sx.$$

читывая, что $mg = F$, найдем

$$m\ddot{x} + \gamma Sx = 0, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{x} + \frac{\gamma S}{m}x = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с подробно исследованным уравнением (2.2). Поэтому, независимо от начальных условий, можно сразу найти период (2.8) вертикальной качки понтона:

$$T = 2\pi \sqrt{m/(\gamma S)}.$$

Пусть, например, площадь, ограниченная ватерлинией понтона, равна 20 м^2 и его сила тяжести составляет 30 тс. Тогда находим ($\gamma = 1 \text{ тс/м}^3$, $m = \frac{30}{9,8} \text{ тс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$)

$$T = 2,3,14 \sqrt{\frac{30\,000}{9,8 \cdot 1000 \cdot 20}} = 2,5 \text{ с}.$$

Приведенное решение грубо приближенное, так как выталкивающая сила определялась по закону Архимеда, справедливому лишь для условий покоя. В данном случае следовало бы рассмотреть более сложные явления гидродинамического характера, связанные с движением воды при качке. Как показывают более подробные исследования, эти дополнительные обстоятельства можно учесть, условно добавляя некоторую массу воды («присоединенную массу») к массе понтона.

В заключение рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2.3. Для определения коэффициента сухого трения может быть использована установка, изображенная на рис. 2.4. Она состоит из двух валов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями в разные стороны, на которые кладется пластина. При совпадении центра тяжести пластины C с серединой расстояния между осями (точкой O) пластина находится в равновесии под действием равных и противоположно направленных сил трения F_A и F_B . Исследовать движение пластины, если в начальный момент ее равновесие было нарушено.

Если каким-либо способом нарушить состояние равновесия пластины, то она придет в движение в горизонтальной плоскости. Вследствие смещения центра тяжести C давления на диски окажутся неодинаковыми. Соответственно нарушится равенство сил трения, причем равнодействующая сил трения окажется направленной к точке O , т. е. в сторону положения равновесия, и будет восстанавливающей силой. Благодаря действию этой силы возникает процесс свободных колебаний, период которых зависит от свойств трения между пластиной и валами. Это позволяет по опытным значениям периода колебаний определить коэффициент трения f .

Для вывода соответствующей формулы составим дифференциальное уравнение горизонтальных колебаний пластины. Вдоль оси x действуют сила трения, приложенная в точке A , равная fN_A и направленная вправо, и сила трения, приложенная в точке B , равная fN_B и направленная влево. Если центр тяжести пластины смещен от положения равновесия на величину x , то

$$N_A = \frac{l-x}{2l} Q, \quad N_B = \frac{l+x}{2l} Q,$$

где Q — сила тяжести пластины, $2l$ — расстояние между осями валов *).

Дифференциальное уравнение движения пластины имеет вид

$$m\ddot{x} = f \frac{l-x}{2l} Q - f \frac{l+x}{2l} Q.$$

*) Здесь мы, в сущности, использовали уравнение статики. Уравновешенность сил, направленных перпендикулярно к оси Ox , следует из того, что ускорение пластины в этом направлении равно нулю.

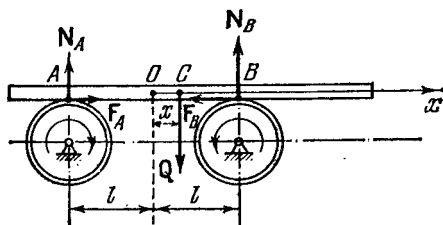


Рис. 2.4

Положив $fg/l = k^2$, получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0;$$

отсюда сразу следует, что период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{l/(fg)}.$$

Разрешая последнее уравнение относительно f , получим окончательную формулу

$$f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2}.$$

Определив из опыта период колебаний T и зная расстояние между осями колес $2l$, найдем отсюда коэффициент трения скольжения.

§ 2.3. Свободные колебания при линейно-вязком сопротивлении

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы и линейной силы сопротивления. Совместим начало координат с положением равновесия точки. Проекция восстанавливающей силы F на ось x равна $-cx$. Так как сила сопротивления R всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости точки, то проекция силы сопротивления на ось x равна $-b\dot{x}$, где b — коэффициент пропорциональности, характеризующий сопротивление среды (рис. 2.5).

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}. \quad (2.10)$$

Вводя обозначения $c/m = k^2$, $b/m = 2h$, получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.11)$$

Рис. 2.5

Это — линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0$, и его корни равны

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Характер движения точки существенно зависит от соотношения величин h и k .

Если $h < k$ (случай малого сопротивления), то корни характеристического уравнения комплексно сопряженные. Если $h \geq k$ (случай большого сопротивления), то корни вещественные. Рассмотрим подробно каждый из этих случаев.

1. Случай малого сопротивления ($h < k$). Корни характеристического уравнения будут

$$\alpha_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2}, \quad \alpha_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = e^{-ht} (C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t), \quad (2.12)$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$, C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Для большей наглядности введем новые постоянные a , ϵ при помощи формул $C_1 = a \cos \epsilon$, $C_2 = a \sin \epsilon$. Тогда получим

$$x = ae^{-ht} \sin (k^*t + \epsilon). \quad (2.13)$$

Из этого уравнения видно, что $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (так как $e^{-ht} \rightarrow 0$), т. е. движение является *затухающим*. Это затухающее движение

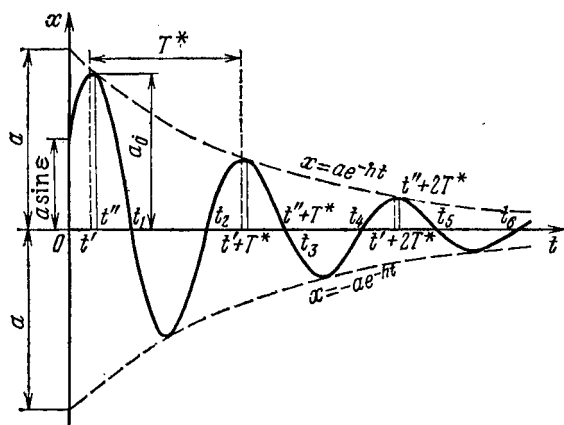


Рис. 2.6

носит колебательный характер, так как, приближаясь (при $t \rightarrow \infty$) к состоянию равновесия, система будет проходить через это состояние бесконечное число раз в моменты времени, равные

$$t_n = \frac{n\pi - \epsilon}{k^*},$$

где $n = 1, 2, \dots$ (рис. 2.6).

Движение, описываемое формулой (2.13), не является периодическим, так как с течением времени последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются. Важно, что максимальные отклонения точки от положения равновесия хотя и уменьшаются с течением времени, но промежуток времени между двумя любыми последующими отклонениями (например, в сторону положительного направления оси x) есть постоянная величина, равная $2\pi/k^*$. Эту величину условно называют *периодом затухающих колебаний*.

Рассмотрим подробнее график движения (см. рис. 2.6). На этом рисунке кривые $x = ae^{-ht}$ и $x = -ae^{-ht}$ являются границами области, внутри которой располагается график движения.

Вычислим моменты времени, соответствующие максимальным отклонениям точки от положения равновесия. С этой целью найдем скорость точки

$$\dot{x} = -hae^{-ht} \sin(k^*t + \varepsilon) + ak^*e^{-ht} \cos(k^*t + \varepsilon) \quad (2.14)$$

и приравняем ее нулю. Будем иметь

$$\operatorname{tg}(k^*t + \varepsilon) = k^*/h.$$

Отсюда следует, что если t' (наименьший корень полученного уравнения) соответствует первому максимальному отклонению в положительном направлении оси x , то последующие максимальные отклонения в положительном направлении оси x будут достигаться в следующие моменты времени: $t'_n = t' + (n - 1)T^*$, где $n = 1, 2, \dots$, а

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (2.15)$$

Из этой формулы видно, что при вязком трении период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний, равного $2\pi/k$. Максимальные отклонения $a_0, a_1, \dots$, соответствующие моментам времени $t', t' + T^*, t' + 2T^*, \dots, t' + nT^*$, равны

$$\begin{aligned} a_0 &= ae^{-ht'} \sin(k^*t' + \varepsilon), \quad a_1 = ae^{-h(t'+T^*)} \sin(k^*t' + \varepsilon), \dots \\ a_n &= ae^{-h(t'+nT^*)} \sin(k^*t' + \varepsilon), \dots \end{aligned}$$

при этом учтено, что

$$\begin{aligned} \sin[k^*(t' + mT^*) + \varepsilon] &= \\ &= \sin\left[k^*\left(t' + m\frac{2\pi}{k^*}\right) + \varepsilon\right] = \sin(k^*t' + \varepsilon + 2\pi m) = \sin(k^*t' + \varepsilon), \end{aligned}$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Из формул для $a_0, a_1, \dots$ видно, что отношение последующего максимального отклонения вдоль положительного направления оси x к предыдущему постоянно и равно

$$\eta = \frac{a_m}{a_{m-1}} = e^{-hT^*}. \quad (2.16)$$

Таким образом, амплитуды затухающих колебаний при вязком сопротивлении убывают в геометрической прогрессии. Величина η (знаменатель геометрической прогрессии) называется *декрементом колебаний* (или *фактором затуханий*), а модуль натурального логарифма этой величины

$$\Lambda = hT^* \quad (2.17)$$

называется *логарифмическим декрементом колебаний* *).

) Иногда вводят $\eta = e^{-hT^/2}$ и $\Lambda = hT^*/2$, т. е. сопоставляют два последовательных наибольших по модулю отклонения в разные стороны.

Заметим, что если $t = t''$ является положительным корнем уравнения $\sin(k^*t + \varepsilon) = 1$, то моменты времени, в которые график движения касается кривой ae^{-ht} , будут: $t'', t'' + T^*, t'' + 2T^*, \dots$

Декремент колебаний можно определить как отношение отклонения при $t = t'' + nT^*$ к отклонению при $t = t'' + (n-1)T^*$.

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Подставляя эти условия в равенства (2.13) и (2.14), получим уравнения для определения постоянных a и ε :

$$x_0 = a \sin \varepsilon, \quad \dot{x}_0 = -ha \sin \varepsilon + ak^* \cos \varepsilon,$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{k^{*2}}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{k^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

2. Граничный случай ($h = k$). Корни характеристического уравнения в этом случае будут вещественными и кратными: $\alpha_1 = \alpha_2 = -h$, и, следовательно, общее решение уравнения движения (2.11) имеет вид

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t), \quad (2.18)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Принимая во внимание, что $\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-ht}$, получим при начальных условиях: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ следующие уравнения для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 : $x_0 = C_1$, $\dot{x}_0 = -hC_1 + C_2$. Отсюда $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$.

Таким образом, для заданных начальных условий уравнение движения точки запишется в виде

$$x = e^{-ht} [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0) t]. \quad (2.19)$$

Из этой зависимости следует, что в рассматриваемом случае движение точки уже не носит колебательного характера, но остается затухающим движением, так как $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ *).

Такое движение называется *апериодическим*.

Для построения графиков этого движения найдем момент времени, соответствующий максимальному отклонению точки от положения равновесия, и момент времени прохождения точки через положение равновесия.

Приравнивая производную по времени от x нулю:

$$-h [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0) t] + \dot{x}_0 + hx_0 = 0,$$

имеем

$$t_0 = \frac{\dot{x}_0}{h (\dot{x}_0 + hx_0)}.$$

*) При $t \rightarrow \infty$ множитель e^{-ht} стремится к нулю, а множитель, стоящий в квадратных скобках, стремится к бесконечности. Раскрывая неопределенность (например, по правилу Лопиталя), найдем, что $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из условия $x = 0$ получим

$$t_1 = -\frac{x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

Для $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$ имеем $t_3 > 0$, $t_1 < 0$ и график движения имеет вид, показанный на рис. 2.7, а.

Если $x_0 > 0$, то при $\dot{x}_0 \leq 0$ и $|\dot{x}_0| < h x_0$ будет $t_3 < 0$, $t_1 < 0$, т. е. экстремальных точек нет и график движения имеет вид, показанный на рис. 2.7, б; при $\dot{x}_0 < 0$ и $|\dot{x}_0| > h x_0$ получаем, что $t_3 > 0$, $t_1 > 0$. Это значит, что точка, получив начальную скорость, пройдет в дальнейшем движении положение равновесия (при $t = t_1$) и при $t = t_3$ достигнет положения, соответствующего максимальному отклонению точки от положения равновесия. Далее точка будет асимптотически приближаться к положению равновесия. График движения для этого случая показан на рис. 2.7, в.

Отметим, что при $x_0 < 0$ характер графиков не изменится.

3. Случай большого сопротивления ($h > k$). В этом случае корни характеристического уравнения

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}$$

являются действительными и отрицательными. Общее решение уравнения движения (2.1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (2.20)$$

Так как $\dot{x} = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$, то при начальных условиях: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ уравнения для определения постоянных интегрирования будут $x_0 = C_1 + C_2$, $\dot{x}_0 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$. Найдя отсюда

$$C_1 = \frac{\alpha_2 x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

и подставив эти C_1 и C_2 в выражение (2.20), получим

$$x = \frac{\alpha_2 x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}. \quad (2.21)$$

Это уравнение описывает аperiodическое затухающее движение ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, так как α_1 и α_2 отрицательны).

Продифференцировав выражение (2.21) по времени и приравняв полученный результат нулю, получим значение $t = t_3$, соответствующее максимальному отклонению точки от положения равновесия:

$$t_3 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\alpha_2 (\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0)}{\alpha_1 (\dot{x}_0 - \alpha_2 x_0)}.$$

Принимая во внимание, что $\alpha_1 \alpha_2 = k^2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = -2 \sqrt{h^2 - k^2}$, это выражение можно переписать в виде

$$t_3 = \frac{1}{2 \sqrt{h^2 - k^2}} \ln \left[1 + \frac{2 \sqrt{h^2 - k^2} |\alpha_2| \dot{x}_0}{k^2 (\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0)} \right].$$

Очевидно, что t_3 будет больше нуля для тех значений x_0 и $\dot{x}_0$, для которых

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0} > 0.$$

Момент времени t_1 , в который координата x , определяемая формулой (2.21), обращается в нуль, найдем по формуле

$$t_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\dot{x}_0 - \alpha_2 x_0} = \frac{1}{2\sqrt{h^2 - k^2}} \ln \left[1 - \frac{2\sqrt{h^2 - k^2} x_0}{\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0} \right].$$

Отсюда следует, что t_1 будет больше нуля при

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0} < 0.$$

Виды графиков движения для рассматриваемого случая ($h > k$) представлены соответственно

- для $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$ на рис. 2.7, а;
- для $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 \leq 0$, но $|\dot{x}_0| < |\alpha_2| x_0$ на рис. 2.7, б;
- для $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 < 0$, но $|\dot{x}_0| > |\alpha_2| x_0$ на рис. 2.7, в.

Задача 2.4. При наблюдении колебаний груза массы 3 кг по виброграмме *) было установлено, что «оггибающая» графика затухающих колебаний имеет вид графика показательной функции (экспоненты), причем за один период амплитуда колебаний уменьшается вдвое. По той же виброграмме определено, что период колебаний равен 0,3 с. Определить коэффициент жесткости пружины и коэффициент h силы вязкого сопротивления.

Для решения задачи используем следующие соотношения:

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}, \quad \frac{a_{m-1}}{a_m} = e^{hT^*}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Подставив в эти формулы числовые данные, получим

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = 0,3, \quad e^{0,3h} = 2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Решая эти уравнения относительно c , h и k , находим $h = 2,31 \text{ с}^{-1}$, $k = 21,1 \text{ с}^{-1}$, $c = 13,36 \text{ Н/см}$.

Задача 2.5. Пользуясь данными предыдущей задачи, определить, во сколько раз следует уменьшить массу груза, чтобы свободное движение системы стало аperiодическим.

Пусть m_1 — новая масса, тогда, вводя обозначение $\lambda = m/m_1$, будем иметь

$$h_1 = \frac{b}{2m_1} = \frac{b\lambda}{2m} \quad \text{и} \quad k_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{c\lambda}{m}}.$$

Условия задачи будут удовлетворены, если $h_1 = k_1$, т. е.

$$\frac{b\lambda}{2m} = \sqrt{\frac{c\lambda}{m}}, \quad \text{или} \quad h\lambda = k\sqrt{\lambda}.$$

Используя данные предыдущей задачи, получим, что массу следует уменьшить в

$$\lambda = \left(\frac{k}{h} \right)^2 = \left(\frac{21,1}{2,31} \right)^2 \approx 83 \text{ раза}.$$

*) Виброграммой (или осциллограммой) называется полученный в эксперименте график колебаний.

Задача 2.6. Материальная точка совершает затухающие колебания под действием линейной восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, причем постоянная $h = b/(2m)$ составляет одну десятую от частоты k незатухающих колебаний ($h/k = 0,1$). Определить разность между периодами затухающих T^* и незатухающих T колебаний, а также во сколько раз уменьшится амплитуда затухающих колебаний через восемь полных колебаний.

Составим отношение периодов колебаний

$$\frac{T^*}{T} = \frac{2\pi/\sqrt{k^2 - h^2}}{2\pi/k} = \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)^{-1/2}.$$

Так как по условию задачи число h/k мало, то, пользуясь хорошо известной приближенной формулой $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, справедливой при малых значениях $|x|$ и любых α , получим с достаточно хорошей точностью

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{k^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T^* - T}{T} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{k^2}.$$

Следовательно, период затухающих колебаний T^* превышает период незатухающих колебаний T всего на $0,005 = 0,5\%$ (по условию задачи $h/k = 0,1$).

Рассмотрим теперь ряд последовательных амплитуд затухающих колебаний: $a_0, a_1, \dots, a_n$. Так как эти амплитуды убывают по закону геометрической прогрессии, то

$$a_n = a_0 \eta^n,$$

где η — декремент колебаний, определяемый формулой (2.16). Отсюда

$$a_0/a_n = e^{hT^*n}.$$

Заменив период затухающих колебаний T^* на его приближенное значение $T = 2\pi/k$, получим

$$a_0/a_n = e^{2\pi h n/k}.$$

Внеся сюда $n = 8$ и $h/k = 0,1$, найдем

$$a_0/a_n \approx 152.$$

Таким образом, при относительно небольшом значении сил сопротивления ($h/k = 0,1$) период затухающих колебаний мало отличается от периода незатухающих колебаний, но колебания гасятся весьма интенсивно — через восемь колебаний амплитуда уменьшается в 152 раза, т. е. колебания практически прекращаются.

§ 2.4. Свободные колебания при трении скольжения

Для простоты рассуждений рассмотрим движение прикрепленного к пружине тела массы m по шероховатой горизонтальной плоскости. Совместим начало координат с точкой, соответствующей положению тела при недеформированном состоянии пружины (рис. 2.8).

Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + T_x,$$

где $F_x = -cx$ — проекция на ось x силы, действующей на точку со стороны пружины (c — коэффициент жесткости пружины), T_x — проекция на ось x силы сухого трения. Сила сухого трения направлена в сторону, противоположную направлению скорости тела, и по модулю равна $fN = fmg$, где f — коэффициент трения.

Таким образом, окончательно дифференциальное уравнение движения тела распадается на два знакомых нам линейных уравнения:

$$m\ddot{x} = -cx + fmg \quad (\dot{x} < 0),$$

$$m\ddot{x} = -cx - fmg \quad (\dot{x} > 0),$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = fg \quad (\dot{x} < 0), \quad (2.22)$$

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg \quad (\dot{x} > 0), \quad (2.23)$$

где по-прежнему $k^2 = c/m$.

Допустим, что груз смещен от исходного положения вправо на расстояние $x_0 = a_0$ и затем свободно, без начальной скорости, отпущен. Тогда движение начнется при следующих условиях: $x = a_0 > 0$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$. Предполагается, что в указанном смещенном положении восстанавливающая сила больше силы трения, т. е. $ca_0 > fmg$, или $a_0 > fg/k^2$. При нарушении этого условия движение не начнется. Для интегрирования уравнения (2.22) введем новую переменную $\xi = x - fg/k^2$. Тогда

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = a \sin(kt + \varepsilon),$$

т. е.

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + fg/k^2, \quad (2.24)$$

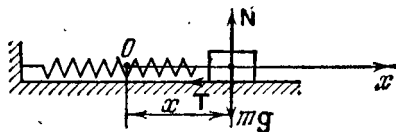


Рис. 2.8

где a и ε — постоянные интегрирования. Для их определения воспользуемся начальными условиями; получим $a = a_0 - fg/k^2$, $\varepsilon = \pi/2$. Следовательно, груз будет двигаться по закону

$$x = \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt + \frac{fg}{k^2}. \quad (2.25)$$

Однако это справедливо лишь до тех пор, пока скорость

$$\dot{x} = -\left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) k \sin kt \quad (2.26)$$

остается отрицательной, т. е. до момента $t_1 = \pi/k$.При этом значение x , соответствующее крайнему левому положению, равно

$$x = x_1 = \frac{fg}{k^2} - \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) = -\left(a_0 - \frac{2fg}{k^2}\right).$$

Амплитуда $a_1 = -x_1$ первого отклонения влево определяется равенством $a_1 = a_0 - 2fg/k^2$. В рассмотренном интервале времени тело совершит половину колебательного цикла относительно среднего положения fg/k^2 .

Дальнейшее (обратное) движение возможно, если $a_1 > fg/k^2$. Допустим, что это условие соблюдается; тогда начнется движение вправо при новых начальных условиях $x = x_1 = -a_1$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$. Дифференциальное уравнение движения на этом участке имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg. \quad (2.27)$$

Решение дифференциального уравнения (2.27) при указанных начальных условиях запишется следующим образом:

$$x = -\left(a_1 - \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt - \frac{fg}{k^2}, \quad \dot{x} = \left(a_1 - \frac{fg}{k^2}\right) k \sin kt \quad (\dot{x} > 0). \quad (2.28)$$

В конце второго участка движения $\dot{x} = 0$, откуда следует, что промежуток времени, в течение которого происходит движение во втором этапе, равен $t_2 = \pi/k$, т. е. $t_2 = t_1$.

Подставляя значение $t = t_2$ в уравнение (2.28), получим наибольшее отклонение в конце второго этапа: $a_2 = a_1 - 2fg/k^2$. Если при этом $a_2 > fg/k^2$, то вновь начнется движение влево. Здесь нужно снова обратиться к дифференциальному уравнению (2.22) и решать его при следующих начальных условиях: $x = a_2$, $\dot{x} = 0$ при $t = 0$.

Понятно, что при этом вновь приходим к уравнениям (2.24)–(2.26), в которых a_0 следует заменить на a_2 . Легко заметить, что на каждый полупериод максимальное отклонение тела от начала координат уменьшается на величину, равную $2fg/k^2$, причем длительность каждого полупериода равна π/k .

Имея в виду сказанное, можно записать следующую последовательность максимальных отклонений через каждый полупериод:

$$a_1 = a_0 - \frac{2fg}{k^2}, \quad a_2 = a_1 - \frac{2fg}{k^2}, \quad a_3 = a_2 - \frac{2fg}{k^2}, \dots, \quad a_n = a_{n-1} - \frac{2fg}{k^2}.$$

Складывая почленно все равенства, найдем

$$a_n = a_0 - 2fng/k^2.$$

Таким образом, при сухом трении последовательные амплитуды колебаний убывают по закону *арифметической* прогрессии, разность которой равна $2fg/k^2$; период затухающих колебаний при сухом трении равен периоду незатухающих колебаний $2\pi/k$. Напомним, что при вязком трении амплитуды колебаний убывают по геометрической прогрессии, а период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний.

Колебания будут происходить до тех пор, пока сила упругости ca_n в одном из крайних положений не сделается меньше силы трения fmg : $ca_n < fmg$, или $a_n < fg/k^2$. Пользуясь выражением для a_n , получим

$$a_n = x_0 < (2n + 1) fg/k^2.$$

Это неравенство может служить для определения числа полуколебаний до остановки груза, или начального отклонения x_0 по известному числу полуколебаний n .

На рис. 2.9 построен график колебаний. Параллельно оси времени проведены две прямые: $x = fg/k^2 = b$ и $x = -fg/k^2 = -b$. Около верхней прямой располагаются косинусоиды, соответствующие движению влево (нечетные полупериоды), а около нижней прямой — косинусонды, соответствующие движению вправо (четные полупериоды). Если какой-либо полупериод заканчивается в полосе, расположенной между двумя прямыми, то движение прекращается: эта полоса называется *зоной застоя*. «Огибающие» графика движения имеют вид наклонных прямых.

Задача 2.7. В системе, изображенной на рис. 2.8, коэффициент жесткости пружины $c = 1962$ Н/м, масса груза 3 кг и коэффициент сухого трения $f = 0,1$. Какому условию должно удовлетворять начальное отклонение x_0 груза, чтобы до полной остановки он совершил не более 10 полных колебаний?

По условию задачи должно выполняться неравенство

$$x_0 < (2n + 1) fg/k^2,$$

где n — число полупериодов. Подставляя сюда $n = 20$, $k^2 = c/m = 1962/3 = 654$ с⁻², получаем

$$x_0 < \frac{41fg}{k^2} = \frac{41 \cdot 0,1 \cdot 981}{654} = 6,15 \text{ см.}$$

§ 2.5. Вынужденные колебания

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием восстанавливающей силы и внешней возмущающей силы. Возмущающая сила может быть произвольной функцией времени,

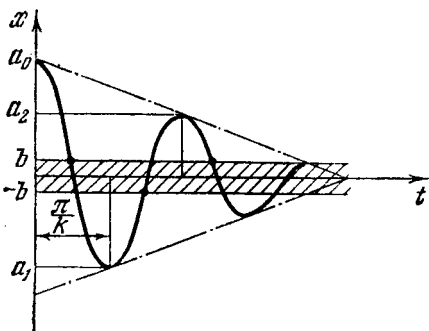


Рис. 2.9

однако мы ограничимся простейшим, но практически весьма важным случаем, когда сила изменяется по гармоническому закону. Пусть проекция возмущающей силы на ось x равна $H \sin(pt + \delta)$, где H — амплитуда и p — частота возмущающей силы, δ — начальная фаза. Тогда дифференциальное уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta),$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta), \quad (2.29)$$

где

$$k^2 = c/m, \quad H_0 = H/m.$$

Решив дифференциальное уравнение (2.29), мы определим закон движения материальной точки. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.29) равно сумме решений: частного решения уравнения (2.29) и общего решения однородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Общее решение последнего уравнения мы уже знаем:

$$x_1 = a \sin(kt + \varepsilon),$$

где a и ε — постоянные интегрирования. Если $p \neq k$, то частное решение уравнения (2.29) будем искать в виде

$$x_2 = A^* \sin(pt + \delta),$$

где A^* — неизвестная постоянная. Для ее определения подставим выражения x_2 и $\ddot{x}_2 = -A^*p^2 \sin(pt + \delta)$ в уравнение (2.29):

$$-A^*p^2 \sin(pt + \delta) + A^*k^2 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta),$$

или

$$A^* (k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Для тождественного выполнения этого равенства должно быть

$$A^* = \frac{H_0}{k^2 - p^2}.$$

Частное решение имеет вид

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (2.30)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.29) запишется в форме

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (2.31)$$

Постоянные a и ϵ зависят от начальных условий. Таким образом, искомое движение материальной точки является суммой гармонических колебаний, происходящих с собственной частотой k , и гармонических колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы p . Подробно исследуем второе слагаемое в (2.31), описывающее чисто вынужденные колебания и не зависящее от начальных условий.

Амплитуда чисто вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|}. \quad (2.32)$$

Перепишем решение (2.30), используя формулу (2.32):

$$x_2 = A \sin(pt + \delta) \quad (k \gg p),$$

$$x_2 = -A \sin(pt + \delta) = A \sin(pt + \delta - \pi) \quad (k \leq p).$$

Из полученных соотношений следует, что при $p \ll k$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы; при $p \gg k$ вынужденные колебания сдвинуты по фазе от возмущающей силы на π .

Проследим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от отношения частот p/k . Для этого преобразуем выражение амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H}{c|1 - p^2/k^2|} = \frac{x_{ст}}{|1 - p^2/k^2|}, \quad (2.33)$$

где $x_{ст} = H/c$ — величина статического отклонения точки от положения равновесия при действии силы, равной максимальному значению возмущающей силы. Обозначим

$$\mu = \frac{A}{x_{ст}} = \frac{1}{|1 - p^2/k^2|}.$$

Величина μ представляет собой коэффициент динамичности; он показывает, во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение. Из графика (рис. 2.10) видно, что при $p/k \rightarrow 1$ коэффициент динамичности резко возрастет.

Вернемся теперь к общему решению (2.31). Записав его в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad (2.34)$$

определим постоянные интегрирования, если $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Подставив начальные условия в уравнение (2.34) и в выражение для скорости движения

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{pH_0}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta),$$

получим

$$C_1 = x_0 - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \frac{H_0}{k^2 - p^2} \cos \delta.$$

Подставляя C_1 и C_2 в соотношение (2.34), будем иметь

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta). \quad (2.35)$$

Такая запись решения позволяет установить, что даже при нулевых начальных условиях ($x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$) точка будет совершать колебания, происходящие с собственной частотой; они определяются членом $-H_0 (k^2 - p^2)^{-1} \left(\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right)$, причем амплитуда этих колебаний не зависит от начальных условий.

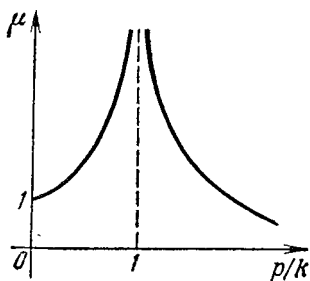


Рис. 2.10

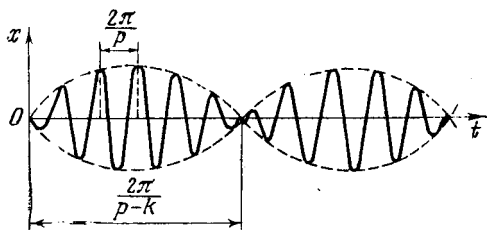


Рис. 2.11

Рассмотрим случай, когда частота p вынужденных колебаний близка к собственной частоте k ($p \approx k$). Тогда выражение (2.35) при $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$ примет вид (приближенно полагаем $p/k = 1$, но $k^2 - p^2 \neq 0$)

$$k \approx \frac{H_0}{k^2 - p^2} [\sin (pt + \delta) - \sin (kt + \delta)],$$

или

$$x \approx 2 \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \frac{p-k}{2} t \cos (pt + \delta). \quad (2.36)$$

Такое движение называется *биением* (рис. 2.11).

Показанные здесь биения представляют собой колебания, происходящие с частотой p возмущающей силы, причем амплитуда этих колебаний медленно меняется, следуя также периодическому закону.

Рассмотрим теперь случай, когда собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы, т. е. $p = k$. Частное решение уравнения (2.29) в этом случае нужно искать в виде

$$x_2 = At \sin (pt + \gamma). \quad (2.37)$$

Подставив выражение (2.37) в дифференциальное уравнение (2.29),

получим

$$2Ap \cos(pt + \gamma) = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Введя обозначение $\varphi = pt + \gamma$, перепишем это соотношение в виде

$$2Ap \cos \varphi = H_0 \sin \varphi \cos(\delta - \gamma) + H_0 \cos \varphi \sin(\delta - \gamma).$$

Это равенство будет тождественно удовлетворено, если

$$H_0 \cos(\delta - \gamma) = 0, \quad H_0 \sin(\delta - \gamma) = 2Ap.$$

Отсюда $A = H_0/(2p)$, $\gamma = \delta - \pi/2$ и, следовательно,

$$x_2 = \frac{H_0 t}{2p} \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{H_0 t}{2p} \cos(pt + \delta).$$

Общее решение имеет вид

$$x = a \sin(pt + \epsilon) - \frac{H_0 t}{2p} \cos(pt + \delta).$$

При начальных условиях $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ имеем *)

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{H}{2p^2} [\cos \delta \sin pt - pt \cos(pt + \delta)]. \quad (2.38)$$

На рис. 2.12 показан график функции x_2 . Как видно, при $k = p$ происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний, причем рост амплитуды линейен во времени. Это явление носит название *резонанса*.

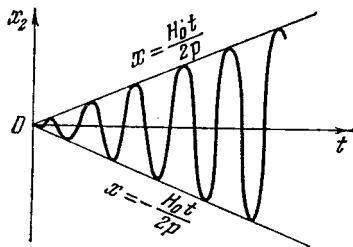


Рис. 2.12

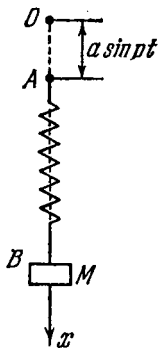


Рис. 2.13

Задача 2.8. Груз M массы m прикреплен к нижнему концу B вертикально расположенной пружины, жесткость которой равна c , а длина в ненапряженном состоянии l_0 . Верхний конец пружины A перемещают по закону $a \sin pt$ в вертикальном направлении (рис. 2.13).

Определить вынужденные колебания груза M , приняв $m = 0,4$ кг, $c = 39,2$ Н/м, $l_0 = 30$ см, $p = 7$ с⁻¹, $a = 2$ см.

Выберем начало координат в точке O и проведем ось x вертикально вниз. Если l_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии, то удлинение пружины равно

*) Это решение можно получить из (2.35), раскрывая неопределенность, которая возникает при $p \rightarrow k$.

$x = a \sin pt - l_0$ и, следовательно, сила, действующая на груз со стороны пружины, равна

$$F_x = -c(x - a \sin pt - l_0).$$

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -c(x - a \sin pt - l_0) + mg,$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = g + H_0 \sin pt + cl_0/m,$$

где $k^2 = c/m$, $H_0 = ca/m$.

Введем новую переменную z согласно равенству

$$z = x - (mg/c + l_0);$$

тогда дифференциальное уравнение движения преобразуется к следующей форме:

$$\ddot{z} + k^2z = H_0 \sin pt.$$

Введение новой переменной z равносильно переносу начала координат в положение равновесия груза. Вынужденные колебания груза определяются формулой (2.30):

$$z = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Подставляя сюда числовые значения параметров, получим

$$z = 4 \sin 7t \text{ см.}$$

Так как $x = z + mg/c + l_0$, то

$$x = (4 \sin 7t + 40) \text{ см.}$$

В этом случае амплитуда колебаний груза (4 см) влвое больше амплитуды колебаний точки подвеса пружины. Заметим, что груз колеблется около среднего положения, удаленного от верхнего конца пружины на 40 см; этому положению соответствует состояние равновесия груза при отсутствии колебаний точки подвеса.

§ 2.6. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления

Рассмотрим движение материальной точки вдоль оси x под действием линейной восстанавливающей силы, вязкой силы сопротивления и возмущающей силы, проекция которой на ось x равна $H \sin(pt + \delta)$.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + H \sin(pt + \delta).$$

Положив $c/m = k^2$, $b/m = 2h$, $H/m = H_0$, получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta). \quad (2.39)$$

Решение дифференциального уравнения (2.39) складывается из двух решений: общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 уравнения (2.39).

Как показано в § 2.3, при $k > h$ решение однородного уравнения записывается в виде

$$x_1 = e^{-ht} (C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t),$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, а $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Частное решение уравнения (2.39) будем искать в виде

$$x_2 = A \sin(pt + \gamma), \quad (2.40)$$

где A и γ — неопределенные постоянные величины. Таким образом, мы предполагаем, что частное решение описывает колебания постоянной амплитуды, происходящие с частотой возмущающей силы.

Находя $\dot{x}_2 = pA \cos(pt + \gamma)$, $\ddot{x}_2 = -p^2A \sin(pt + \gamma)$ и подставляя значения x_2 , $\dot{x}_2$, $\ddot{x}_2$ в уравнение (2.39), получим

$$-p^2A \sin(pt + \gamma) + 2hpA \cos(pt + \gamma) + k^2A \sin(pt + \gamma) = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Положив $pt + \gamma = \varphi$ и воспользовавшись соотношением

$$\sin(pt + \delta) = \sin(\varphi + \delta - \gamma) = \sin \varphi \cos(\delta - \gamma) + \cos \varphi \sin(\delta - \gamma),$$

для определения A и γ будем иметь следующие уравнения:

$$A(k^2 - p^2) = H_0 \cos(\delta - \gamma), \quad 2phA = H_0 \sin(\delta - \gamma),$$

откуда

$$A = \frac{H_0}{V(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}, \quad (2.41)$$

$$\operatorname{tg}(\delta - \gamma) = \frac{2hp}{k^2 - p^2}. \quad (2.42)$$

Подставив найденные значения A и γ в частное решение, получим

$$x_2 = \frac{H_0}{V(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \sin(pt + \delta + \gamma'),$$

где $\gamma' = \gamma - \delta$.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (2.39) имеет следующий вид:

$$x = e^{-ht} (C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t) + \frac{H_0}{V(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \sin(pt + \delta + \gamma'). \quad (2.43)$$

Для определения закона движения материальной точки нужно найти постоянные C_1 , C_2 . Пользуясь начальными условиями: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, получим значения постоянных

$$C_1 = \frac{1}{k^*} [\dot{x}_0 + hx_0 - hA \sin(\delta + \gamma') - Ap \cos(\delta + \gamma')],$$

$$C_2 = x_0 - A \sin(\delta + \gamma'),$$

где A — амплитуда вынужденных колебаний.

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (2.43), найдем закон движения материальной точки в рассматриваемом случае:

$$x = e^{-ht} \left[\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{k^*} \sin k^*t + x_0 \cos k^*t \right] - \\ - e^{-ht} \left\{ \frac{A}{k^*} [h \sin (\delta + \gamma') + p \cos (\delta + \gamma')] \sin k^*t + \right. \\ \left. + A \sin (\delta + \gamma') \cos k^*t \right\} + A \sin (pt + \delta + \gamma').$$

Следовательно, движение материальной точки складывается: из свободных затухающих колебаний (первое слагаемое), обусловленных начальными условиями; из затухающих колебаний (второе слагаемое), имеющих собственную частоту, но вызванных действием вынуждающей силы, и чисто вынужденных колебаний (третье слагаемое). Так как первые два движения с течением времени затухают, то основным колебанием, определяющим характер движения материальной точки, является чисто вынужденное колебание с амплитудой A и частотой p . Следует заметить, что при наличии сопротивления вынужденные колебания сдвинуты по фазе относительно возмущающей силы на γ' .

Вводя обозначения $z = p/k$, $\beta = h/k$, перепишем формулу (2.41) в виде

$$A = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{k^2} \frac{p^2}{k^2}}} = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (2.44)$$

где $x_{\text{ст}} = H_0/k^2 = H/c$ представляет собой статическое перемещение, вызываемое постоянной силой H .

Введем в рассмотрение коэффициент динамичности

$$\mu = \frac{A}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (2.45)$$

который характеризует динамический эффект, вызываемый вынуждающей силой.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности от z — отношения частот вынуждающей силы и собственных колебаний в среде без сопротивления, а также от коэффициента β , характеризующего сопротивление среды. Очевидно, что, найдя зависимость коэффициента динамичности от z и β , мы тем самым определим и зависимость от них амплитуды вынужденных колебаний.

Найдем экстремум функции

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2. \quad (2.46)$$

Для этого приравняем нулю производную

$$\frac{dy}{dz} = 2(1 - z^2)(-2z) + 8\beta^2 z = 0. \quad (2.47)$$

Корнями этого уравнения будут

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}, \quad z_3 = -\sqrt{1 - 2\beta^2}. \quad (2.48)$$

Так как $z \geq 0$, то корень z_3 должен быть отброшен. Найдем вторую производную от y

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 12z^2 - 4(1 - 2\beta^2).$$

Для $z_1 = 0$ при $1 - 2\beta^2 < 0$, т. е. при $\beta > \sqrt{2}/2$,

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 4(2\beta^2 - 1) > 0$$

и, следовательно, функция y имеет минимум, а коэффициент динамичности μ — максимум. Других действительных корней при этих значениях β уравнение (2.47) не имеет.

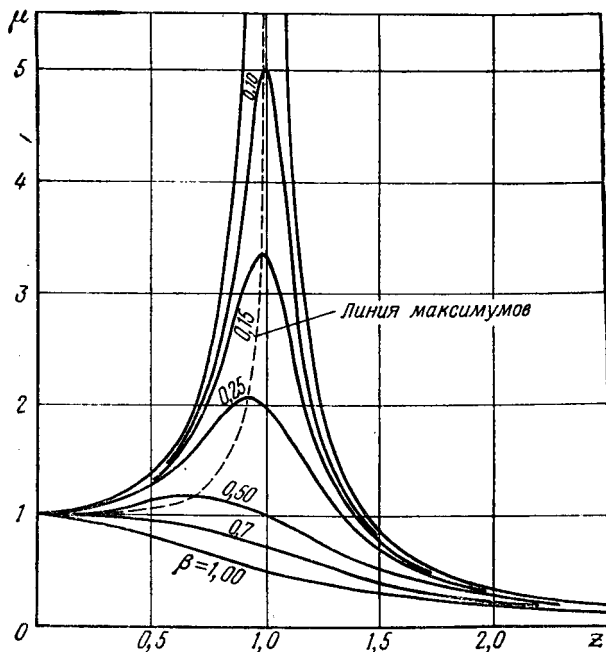


Рис. 2.14

Если $\beta < \sqrt{2}/2$, то для $z_1 = 0$ $d^2y/dz^2 < 0$. Это значит, что μ при этом имеет минимум. Для корня же $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 8(1 - 2\beta^2) > 0,$$

т. е. при $z = z_2$ коэффициент динамичности имеет максимум.

Заметим, что всегда $z_2 \leq 1$ и, только когда $\beta = 0$ (среда без сопротивления), $z_2 = 1$. Ранее было показано, что при $\beta = 0$ и $z_2 = 1$ решение (2.40) не имеет смысла и его нужно искать в виде (2.37).

Максимальное значение коэффициента динамичности найдем, подставив $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ в формулу (2.45):

$$\mu^{\max} = \frac{1}{2\beta \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.49)$$

На рис. 2.14 показаны кривые, определяющие зависимость коэффициента динамичности от $z = p/k$. Каждой из кривых соответствует определенное значение $\beta = h/k$. Пунктирная линия проходит через точки максимума.

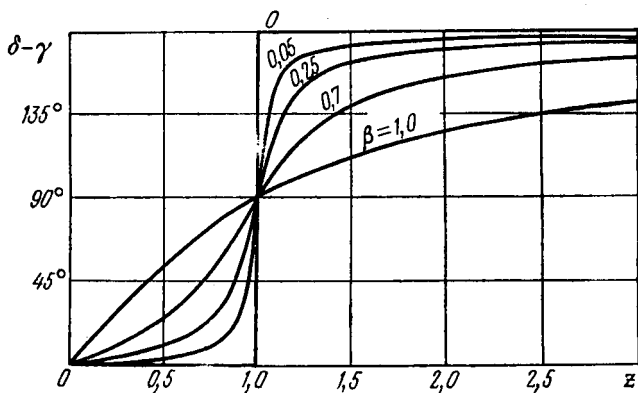


Рис. 2.15

Из рассмотрения этого рисунка следует, что амплитуда вынужденных колебаний при z , достаточно большом и достаточно малом по сравнению с $z = 1$, очень мало зависит от сопротивления среды. При z , близких к $z = 1$, влияние сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний весьма существенно.

При $z \rightarrow \infty$ амплитуда вынужденных колебаний асимптотически стремится к нулю. Это значит, что при большой частоте возмущающей силы по сравнению с собственной частотой амплитуда вынужденных колебаний весьма мала.

На рис. 2.15 представлена зависимость сдвига фазы вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в зависимости от z и β . Отметим, что при $z = 1$ сдвиг фаз равен $\pi/2$ при любом значении β . Резонансом при колебаниях в среде с сопротивлением называют вынужденные колебания при $z = 1$, т. е. при $p = k$, что отвечает примерно максимальному значению амплитуды вынужденных колебаний.

Задача 2.9. Под двигатель B (рис. 2.16) требуется подвести фундамент. Необходимо определить такую толщину кладки a , чтобы коэффициент динамичности не превышал единицы для всех частот вынужденных колебаний, передаваемых от двигателя фундаменту. Сопротивление грунта можно схематизировать как реакцию упругих сил F и вязких сил R , вызванных внутренними силами сопротивления.

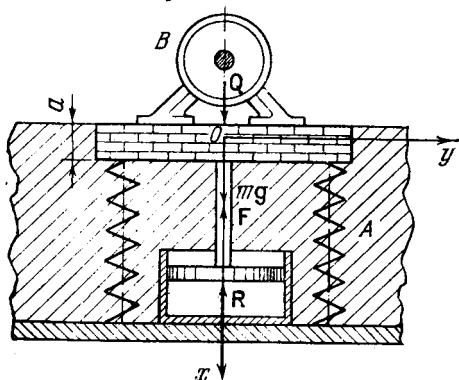


Рис. 2.16

Отнесенные к единице площади фундамента, коэффициенты жесткости и вязкости соответственно равны $c = 19,6 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ и $b = 588 \text{ кН} \cdot \text{с/м}^3$. Плотность материала фундамента $\rho = 24,5 \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$.

Введем систему координат xOy , выбрав ее начало O в положении равновесия центра тяжести фундамента.

Обозначим через S площадь основания и представим проекцию вынуждающей силы Q на ось x в виде $Q_x = H \sin pt$. Тогда уравнение движения

$$mw = F + R + Q + mg$$

в проекции на ось x дает

$$aS\rho\ddot{x} = -cS(x + \lambda_0) - bS\dot{x} + aSpg + H \sin pt.$$

Здесь мы воспользовались очевидными равенствами $m = aS\rho$, $F_x = -cS(x + \lambda_0)$, $R_x = -bS\dot{x}$, где λ_0 — статическая осадка фундамента.

Приведем уравнение движения к нормальному виду. Для этого разделим его на $aS\rho$ и воспользуемся равенством $aSpg = c\lambda_0$:

$$\ddot{x} + \frac{b}{a\rho} \dot{x} + \frac{c}{a\rho} x = \frac{H}{aS\rho} \sin pt.$$

Сравнивая с уравнением (2.39), найдем $h = b/(2a\rho)$, $k^2 = c/(a\rho)$. Следовательно, безразмерный коэффициент вязкости равен $\beta = h/k = b/(2\sqrt{a\rho c})$.

Коэффициент динамичности μ при всех частотах p не будет превосходить единицы, если потребовать, чтобы кривая $\mu(z)$ не имела максимума при $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$. Следовательно, должно выполняться неравенство $\beta \geq \sqrt{2}/2$, или $b/(2\sqrt{a\rho c}) \geq \sqrt{2}/2$. Отсюда получим толщину кладки $a: a \leq b^2/(2\rho c)$. Подставляя в это неравенство данные числовые значения параметров, получим

$$a \leq 3,6 \text{ м.}$$

§ 2.7. Электродинамические аналогии. Понятие об исследовании колебаний материальных систем с помощью электронных аналоговых машин

Колебательные процессы, происходящие в различных физических системах, описываются часто одинаковыми математическими уравнениями. Это обстоятельство дает возможность установить аналогию между системами различной физической природы. Наиболее полно эта аналогия установлена между механическими и электрическими системами.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, движение которой описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q(t). \quad (2.50)$$

Здесь x — координата, m — масса точки, b — коэффициент сопротивления среды, c — коэффициент жесткости пружины, $Q(t)$ — возмущающая сила. Символически систему, отвечающую уравнению (2.50), изображают обычно схемой, показанной на рис. 2.17.

Рассмотрим теперь электрический контур, в котором индуктивность L , омическое сопротивление R , конденсатор емкостью C и внешний источник энергии э. д. с. $E(t)$ соединены последовательно

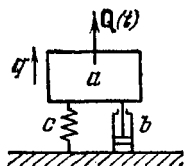


Рис. 2.17

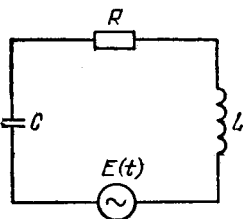


Рис. 2.18

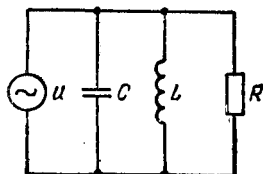


Рис. 2.19

(рис. 2.18). Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений на отдельных участках цепи равна разности потенциалов на концах зажимов, т. е. э. д. с. источника энергии. Падение напряжения от индуктивности равно $L \frac{di}{dt}$, где i — сила тока, падение напряжения от омического сопротивления равно Ri , а падение напряжения в конденсаторе определяется равенством $\frac{1}{C} q$, где q — заряд конденсатора. Следовательно, по второму закону Кирхгофа будем иметь

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t),$$

или, учитывая, что $i = dq/dt$,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (2.51)$$

Сравнивая с уравнением (2.50), видим, что колебания механической системы с одной степенью свободы и изменение заряда в электрической цепи описываются с точностью до обозначений совершенно одинаковыми дифференциальными уравнениями. Следовательно, между этими системами можно провести аналогию, сопоставив заряд q с координатой x , индуктивность L с массой m , омическое сопротивление R с коэффициентом сопротивления среды,

величину, обратную емкости $1/C$, с коэффициентом жесткости c и электродвижущую силу $E(t)$ с возмущающей силой $Q(t)$.

Для электрического контура с параллельно соединенными элементами (рис. 2.19) на основании первого закона Кирхгофа будем иметь (складываются токи)

$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = i(t),$$

где u — напряжение.

Дифференцируя по времени, получим

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = \frac{di}{dt}.$$

Здесь мы имеем другую систему аналогий, в которой координате x соответствует напряжение u , массе m соответствует емкость C конденсатора, коэффициенту сопротивления среды b отвечает проводимость $1/R$, коэффициенту жесткости пружины c — величина, обратная индуктивности $1/L$, и возмущающей силе $Q(t)$ — скорость изменения тока di/dt .

Сведем результаты в таблицу 2 электродинамических аналогий.

Т а б л и ц а 2

Механические величины	Электрические величины	
	1-я аналогия: сила—напряжение	2-я аналогия: сила—ток
1. Координата x	Заряд q	Напряжение u
2. Масса m	Индуктивность L	Емкость C
3. Коэффициент жесткости c	Обратная величина емкости $1/C$	Обратная величина индуктивности $1/L$
4. Коэффициент сопротивления среды b	Омическое сопротивление R	Проводимость $1/R$
5. Сила $Q(t)$	Э. д. с. $E(t)$	Скорость тока di/dt

Для того чтобы электродинамическими аналогиями можно было пользоваться без употребления переходных коэффициентов, достаточно выразить все величины в международной системе единиц СИ.

Пользуясь электродинамической аналогией можно для каждой механической системы построить соответствующую электрическую цепь, уравнения которой будут с точностью до обозначений совпадать с уравнениями движения механической системы. Электрическая

цепь, в отличие от механической системы, комплектна; кроме того, процессы, происходящие в ней, хорошо наблюдаются на осциллографе. Эти соображения лежат в основе конструкции электронных аналоговых (моделирующих) машин.

Аналоговые машины имеют набор смонтированных быстро настраиваемых элементов индуктивностей, емкостей, сопротивлений или других элементов, создающих аналогичный эффект. Соединяя эти элементы в соответствующие цепи, можно определить все параметры, характеризующие движение механической системы, для которой собранная цепь является аналогом. В частности, весьма просто определяются частоты собственных колебаний системы. Для этого достаточно включить в цепь э. д. с. $E_0 \sin \omega t$ и увеличивать частоту ω до тех пор, пока не наступит резонанс. Соответствующая частота — собственная частота системы. Эта работа не требует высокой квалификации (сложность работы на собранной схеме примерно та же, что и сложность настройки радиоприемника) и может быть выполнена за сравнительно короткий промежуток времени с относительно большой точностью.

С помощью электронных аналоговых машин можно решать нелинейные задачи, когда линейаризация дифференциальных уравнений движения по каким-либо причинам недопустима, а также задачи, приводящие к линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. В заключение отметим, что в современных аналоговых машинах устанавливается, как правило, не электродинамическая, а электроматематическая аналогия, когда математическим операциям сложения, умножения, дифференцирования, интегрирования и т. п. отвечает соответствующий электрический элемент. Такие машины более универсальны.

Г л а в а III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 3.1. Теорема об изменении количества движения материальной точки

При интегрировании дифференциальных уравнений движения в конкретных задачах эти уравнения подвергаются различным одноптипным преобразованиям, зависящим от характера действующих сил. Поэтому целесообразно проделать такие преобразования в общем виде. Общие теоремы динамики точки и представляют собой преобразования дифференциальных уравнений движения, причем в различных теоремах выделены и связаны между собой те или иные характеристики движений. В результате получаются удобные зависимости, широко используемые для решения конкретных задач динамики.

Заметим, что в основном уравнении динамики

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

масса материальной точки — величина постоянная и что $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$. Это позволяет переписать уравнение (3.1) в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

откуда следует, что

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} dt. \quad (3.2)$$

Вектор $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$, равный произведению массы точки на ее скорость, называется *количеством движения материальной точки*.

Произведение силы на элементарный промежуток времени ее действия, т. е. $\mathbf{F} dt$, называется *элементарным импульсом силы*.

Уравнение (3.2) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме:

элементарное изменение количества движения материальной точки равно элементарному импульсу силы, приложенной к этой точке.

Рассмотрим теперь движение материальной точки на конечном промежутке времени. Пусть в момент $t = 0$ скорость точки равна $\mathbf{v}_0$, а в момент t равна $\mathbf{v}$. Тогда, интегрируя уравнение (3.2), можно записать

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{F} dt. \quad (3.3)$$

Интеграл, входящий в правую часть этого соотношения, называется *импульсом силы за промежуток времени* $[0, t]$. Таким образом, *изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно импульсу силы, приложенной в точке, за тот же промежуток времени.*

Если воспользоваться декартовой системой координат, то будем иметь

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k},$$

где x, y, z — координаты точки, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — компоненты ее скорости, F_x, F_y, F_z — проекции силы, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы осей координат. Тогда, проектируя векторное равенство (3.3) на оси декартовой системы координат, получим три скалярных соотношения:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_0^t F_x dt, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \int_0^t F_y dt, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \int_0^t F_z dt. \quad (3.4)$$

Здесь, как и ранее, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — проекции скорости материальной точки на оси координат в момент времени t ; $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ — те же проекции в момент $t = 0$; F_x, F_y, F_z — проекции силы $\mathbf{F}$.

Как отмечалось в § 1.2, в общем случае F может быть функцией координат точки, ее скорости и времени, т. е.

$$F = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

и, следовательно, проекции силы также являются функциями этих величин:

$$F_x = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$F_y = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$F_z = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

Поэтому для фактического вычисления интегралов, стоящих в правых частях уравнений (3.4), нужно знать координаты материальной точки как функции времени. Но определение x , y и z как функций времени и есть то, к чему мы стремимся, решая вторую задачу динамики. Если эти функции откуда-либо известны, то отпадает необходимость пользоваться уравнениями (3.4). Таким образом, в общем случае теорема об изменении количества движения новых возможностей для решения задачи не открывает.

Однако, если сила является функцией только времени, интегралы в правых частях уравнений (3.4) могут быть вычислены и можно получить первые интегралы уравнений движения

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \Phi_1(t), \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \Phi_2(t), \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \Phi_3(t), \quad (3.5)$$

где $\Phi_1(t) = \int_0^t F_x dt$, $\Phi_2(t) = \int_0^t F_y dt$, $\Phi_3(t) = \int_0^t F_z dt$ — проекции импульса силы на оси координат.

Дальнейшее интегрирование также не представляет принципиальных трудностей:

$$x - x_0 = \dot{x}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \Phi_1(t) dt, \quad y - y_0 = \dot{y}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \Phi_2(t) dt,$$

$$z - z_0 = \dot{z}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \Phi_3(t) dt.$$

Здесь x_0 , y_0 , z_0 — начальные значения координат в момент времени $t = 0$.

Если сила постоянна, т. е. $F_x = A_1$, $F_y = A_2$, $F_z = A_3$ (A_1 , A_2 , A_3 — постоянные величины), то

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = A_1 t, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = A_2 t, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = A_3 t$$

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{A_1 t^2}{2m}, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{A_2 t^2}{2m}, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{A_3 t^2}{2m}.$$

В частном случае при $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, $A_2 = A_3 = 0$ будем иметь

$$m\ddot{x} - m\dot{x}_0 = A_1 t \quad (3.6)$$

и

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{A_1 t^2}{2m}, \quad (3.7)$$

т. е. материальная точка совершает равнопеременное прямолинейное движение вдоль оси x .

Задача 3.1. Определить промежуток времени T , необходимый для того, чтобы материальная точка массы m , движущаяся по горизонтальной прямой под действием постоянной силы F , увеличила свою начальную скорость v_0 в n раз.

Примем прямую, вдоль которой движется точка, за ось x ; тогда на основании (3.6) имеем $m(nv_0 - v_0) = FT$, откуда $T = \frac{mv_0}{F}(n - 1)$.

§ 3.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Вновь вернемся к основному уравнению динамики (3.1) и умножим его векторно слева на радиус-вектор точки $\mathbf{r}$, определяющий положение материальной точки относительно какой-либо точки O , которую будем называть центром:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (3.8)$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$, преобразуем левую часть этого уравнения следующим образом:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}.$$

Но $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, и векторное произведение параллельных векторов $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ равно нулю. Поэтому $\mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v})$, и уравнение (3.8) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (3.9)$$

Вектор $\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ называется *моментом количества движения материальной точки* относительно центра (точки O).

Вектор $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ нам известен из курса статики и представляет собой момент силы, приложенной к точке, относительно центра.

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O. \quad (3.10)$$

Это уравнение выражает собой теорему об изменении момента количества движения материальной точки: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.*

Векторное уравнение (3.10) эквивалентно трем скалярным равенствам.

Принимая точку O за начало системы координат x, y, z и записывая векторные произведения в виде определителей третьего порядка, вместо (3.10) получаем

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) &= yF_z - zF_y, \\ m \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) &= zF_x - xF_z, \\ m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту силы, приложенной к точке, относительно той же самой оси.*

Как видно из уравнений (3.11), при их интегрировании необходимо вычисление интегралов от правых частей. Однако вычисление этих интегралов возможно только тогда, когда x , y и z известны как функции времени, но тогда отпадает вообще надобность в применении равенств (3.11).

Тем не менее существуют случаи, когда теорема об изменении момента количества движения дает возможность эффективно решать задачи динамики. К ним относится прежде всего случай действия *центральной силы*. Этим термином мы будем пользоваться применительно к любой силе, линия действия которой проходит через некоторую фиксированную точку пространства *) (полюс). Так, например, при изучении движения Земли в Солнечной системе на Землю действует сила притяжения Солнца, все время направленная к центру Солнца.

Изучим действие центральной силы. Момент силы относительно точки, через которую проходит линия действия, тождественно равен нулю. Следовательно, согласно равенству (3.10) момент количества движения материальной точки относительно полюса является постоянной величиной:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (3.12)$$

Таким образом, мы получим сразу три первых интеграла движения:

$$m (y\dot{z} - z\dot{y}) = c_1, \quad m (z\dot{x} - x\dot{z}) = c_2, \quad m (x\dot{y} - y\dot{x}) = c_3. \quad (3.13)$$

*) В § 3.5 будет дано несколько более узкое определение центральной силы.

На основании этих результатов можно сделать некоторые общие выводы о характере движения материальной точки.

Для этой цели введем понятие *секторной скорости*. Секторная скорость вводится как вектор, характеризующий быстроту изменения площади поверхности, описываемой радиусом-вектором.

Пусть в момент времени t материальная точка находится в точке A траектории, а в момент времени $t + \Delta t$ — в точке A_1 (рис. 3.1). Площадь $\Delta\sigma$ треугольника OAA_1 равна половине модуля векторного произведения радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на вектор перемещения $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$, т. е.

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}|.$$

Разделив обе части этого соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|, \quad (3.14)$$

так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}$ — скорость точки в момент времени t .

Формула (3.14) определяет модуль секторной скорости. Заметим, что модуль секторной скорости может быть вычислен как площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. За направление вектора секторной скорости примем направление векторного произведения радиуса-вектора на скорость точки. Тогда вектор секторной скорости равен

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (3.15)$$

т. е. *секторная скорость равна половине векторного произведения радиуса-вектора точки на ее скорость*.

Сравнивая (3.15) с основным выражением для $\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, можем написать интеграл (3.12) в следующей форме:

$$\mathbf{K}_0 = 2m\mathbf{q} = \text{const.} \quad (3.16)$$

Следовательно, в случае действия центральной силы секторная скорость точки есть постоянная величина, т. е. *радиус-вектор точки описывает равные площади в любые одинаковые промежутки времени*. Этот результат называется *законом площадей*. Но, кроме того, из (3.16) следует, что траектория точки является плоской кривой. В самом деле, вектор $\mathbf{q}$ сохраняет постоянное направление в пространстве, поэтому на основании формулы (3.15) можно утверждать, что вектор $\mathbf{r}$ будет все время расположен в плоскости, перпендику-

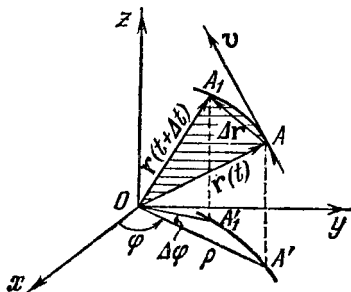


Рис. 3.1

лярной к вектору $\mathbf{q}$, т. е. траектория точки лежит в этой плоскости *).

Предположим, что движение происходит в плоскости и положение точки определяется полярными координатами r и φ . Тогда $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$, $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}^0 + r\dot{\varphi}\mathbf{r}^0$ (том I, § 9.4), и формула (3.15) может быть записана в виде

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} (\mathbf{r}^0 \times \mathbf{p}^0) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \mathbf{k}, \quad (3.17)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{r}^0 \times \mathbf{p}^0$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой происходит движение.

Если вектор $\mathbf{q}$ является постоянной величиной, то его проекция на направление, определяемое направлением вектора $\mathbf{k}$, также постоянная величина, т. е.

$$q_k = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = c, \quad (3.18)$$

где c — постоянная величина.

Соотношение (3.18) называется *законом площадей*. Это соотношение может быть получено и другим путем. Если плоскость, в которой расположена траектория, будет плоскостью xy , то вместо векторного равенства (3.16) можно записать

$$2mq_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const},$$

$$\text{или } q_z = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = c,$$

где c — постоянная величина.

Так как в полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то, принимая во внимание, что

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

получим

$$q_z = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = c.$$

Задача 3.2. Траектория наиболее удаленной от Солнца планеты Плутон имеет вид эллипса, причем расстояние от Солнца до Плутона меняется от $4,46 \cdot 10^9$ км до $7,4 \cdot 10^9$ км (рис. 3.2). Определить отношение между максимальной и минимальной скоростью Плутона.

Секторные скорости точки, движущейся по эллипсу, в моменты прохождения через положения максимального и минимального удаления одинаковы: $\frac{1}{2} v_{\max} r_{\min} = \frac{1}{2} v_{\min} r_{\max}$. Следовательно, искомое отношение составляет $v_{\max}/v_{\min} = r_{\max}/r_{\min}$, т. е. $v_{\max}/v_{\min} = 7,4/4,46 = 1,66$.

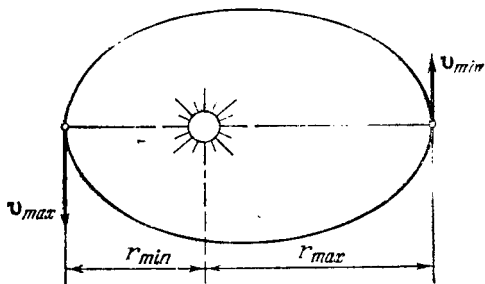


Рис. 3.2

*) Возможно и другое доказательство. Умножим обе части каждого из уравнений (3.13) на x , y , z и сложим. В результате получим $c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$. Это означает, что координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости. Следовательно, траектория есть плоская кривая.

Задача 3.3. Шарик, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити вытягивают с постоянной скоростью u в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R , а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0 (рис. 3.3).

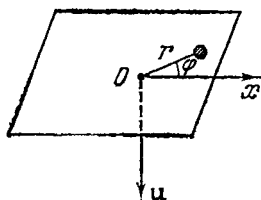


Рис. 3.3

На шарик действует сила, направленная вдоль нити. Так как эта сила центральная, то момент количества движения шарика относительно точки O является постоянной величиной и справедливо соотношение (3.18).

Постоянную c найдем из начальных условий: при $t = 0$ $r = R$, $\dot{\varphi} = v_0/R$. Подставляя эти выражения в (3.18), находим $r_0^2 \dot{\varphi}_0 = Rv_0$. Таким образом, для всего последующего процесса движения имеем

$$r^2 \dot{\varphi} = Rv_0.$$

По условию задачи скорость, с которой вытягивается нить, равна u , откуда следует, что $t = -u$. Приняв во внимание начальные условия, после интегрирования получим $r = R - ut$. Тогда уравнение для определения φ примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Rv_0}{(R - ut)^2}.$$

Интегрируя и имея в виду, что $\varphi = 0$ при $t = 0$, находим

$$\varphi = \frac{v_0 t}{R - ut}.$$

Чтобы построить траекторию шарика, исключим из уравнений для r и φ время t ; тогда получим величину радиуса-вектора r в функции полярного угла φ :

$$r = \frac{v_0 R}{u\varphi + v_0}.$$

Траектория шарика представляет собой свертывающуюся спираль. С приближением шарика к началу координат угол φ растет все быстрее и быстрее, т. е. скорость вращения радиуса-вектора возрастает. При $t \rightarrow R/u$ эта скорость стремится к бесконечности.

§ 3.3. Работа силы. Мощность

Перейдем к понятию работы, с помощью которого мы получим еще одну общую теорему динамики материальной точки.

В элементарном курсе физики понятие работы вводится следующим образом. Пусть материальная точка M движется по прямой линии BC и $\mathbf{F}$ — некоторая постоянная по модулю и направлению сила, приложенная к точке M . Будем считать, что точка M движется в одном направлении от положения M_1 до положения M_2 . Обозначим наименьший угол между силой $\mathbf{F}$ и скоростью $\mathbf{v}$ точки M через α (рис. 3.4). Тогда работой постоянной силы $\mathbf{F}$ на прямолинейном

отрезке M_1M_2 называют произведение модуля силы на величину перемещения $s = \overline{M_1M_2}$ и на косинус угла между ними

$$A_{1,2} = Fs \cos \alpha. \quad (3.19)$$

Конечно, это равенство можно записать в форме скалярного произведения

$$A_{1,2} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}, \quad (3.20)$$

где $\mathbf{s} = \overline{M_1M_2}$ — вектор перемещения точки.

Напомним, что единицей измерения работы в системе СИ является джоуль (1 Дж = 1 Н·м), а в технической системе — 1 кгс·м (1 кгс·м $\approx$ 9,81 Дж).

Приведенное определение работы силы применимо только в том случае, если сила постоянна по модулю и направлению, а точка приложения силы перемещается прямолинейно.

Перейдем к общему определению работы силы, считая, что

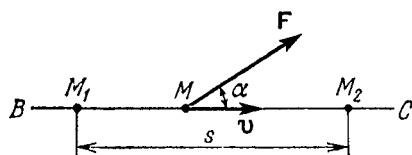


Рис. 3.4

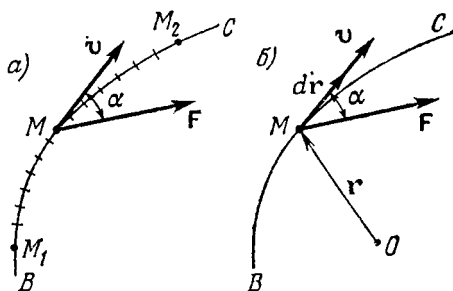


Рис. 3.5

сила может изменяться по модулю и направлению, а точка M приложения силы $\mathbf{F}$ перемещается по любой криволинейной траектории BC от M_1 до M_2 (рис. 3.5, а). Разобьем отрезок кривой M_1M_2 на n произвольных, но малых участков, обозначив длину участка с номером k через Δs_k . Не внося больших погрешностей в вычисление, можно считать каждый участок прямолинейным отрезком и что при перемещении точки M вдоль этого участка сила $\mathbf{F}$ остается постоянной по модулю и направлению. Тогда согласно формуле (3.19), работа силы на k -м участке будет приближенно равна $F_k \cos \alpha_k \Delta s_k$, а на всем пути от M_1 до M_2 — сумме работ на отдельных участках

$$A_{1,2} \approx \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \Delta s_k.$$

Точное значение работы получим, переходя к пределу, при условии, что число участков n неограниченно возрастает, а длина каждого участка Δs_k неограниченно убывает:

$$A_{1,2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \Delta s_k.$$

Такой предел называется криволинейным интегралом первого рода по дуге M_1M_2 и обозначается следующим образом *):

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} F \cos \alpha \, ds. \quad (3.21)$$

Для того чтобы, пользуясь формулой (3.21), вычислить работу силы, нужно выразить произведение $F \cos \alpha$ как функцию длины дуги s . В подавляющем большинстве случаев это очень трудно выполнить, поэтому обычно пользуются криволинейным интегралом второго рода. Для того чтобы сделать этот переход, введем в рассмотрение элементарную работу силы (это понятие имеет самостоятельное значение, и мы будем неоднократно пользоваться им).

Под элементарной работой $d'A$ силы F понимается выражение, стоящее под знаком интеграла (3.21):

$$d'A = F \cos \alpha \, ds. \quad (3.22)$$

В кинематике было показано, что дифференциал пути ds равен модулю дифференциала радиуса-вектора r , т. е. $ds = |dr|$. Следовательно, элементарную работу силы можно представить следующим образом:

$$d'A = F |dr| \cos \alpha,$$

или, через скалярное произведение векторов F и dr ,

$$d'A = F \cdot dr. \quad (3.23)$$

Теперь, сравнивая выражения (3.23) и (3.20), можно определить элементарную работу силы как работу ее на прямолинейном перемещении dr при условии, что величина и направление силы на этом перемещении не меняются. Напомним, что $dr = v \, dt$. Это означает, что вектор dr совпадает по направлению с вектором скорости v точки (рис. 3.5, б).

Запишем выражение (3.23) через проекции векторов, входящих в скалярное произведение:

$$d'A = F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz. \quad (3.24)$$

Даже в тех случаях, когда сила F зависит только от положения точки M , т. е. от координат x, y, z точки M , правая часть этого равенства не представляет, как правило, полный дифференциал некоторой функции координат $A(x, y, z)$. Поэтому в обозначение элементарной работы $d'A$ после буквы d ставится наверху знак «штрих» **) (в § 3.5 будет рассмотрен особый класс сил, для которых правая часть равенства равна полному дифференциалу функции координат).

*) Происхождение этого термина очевидно: подынтегральная функция $F \cos \alpha$ вычисляется на кривой, а в качестве переменной интегрирования берется длина дуги s .

**) В некоторых книгах элементарная работа обозначается символом δA . В настоящем руководстве символ δA применяется для обозначения работы силы на виртуальном перемещении δr (см. § 18.3).

Все три выражения (3.22), (3.23) и (3.24) для элементарной работы силы эквивалентны. Поэтому, пользуясь равенствами (3.21), (3.22) и (3.24), получим другую формулу для вычисления работы силы F на отрезке M_1M_2 дуги BC

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.25)$$

Правая часть этого равенства называется криволинейным интегралом второго рода (все функции F_x , F_y и F_z вычисляются на кривой M_1M_2 , а дифференциалы координат dx , dy , dz связаны между собой через ее уравнение).

Если сила F зависит только от положения точки, т. е. от координат x , y , z точки M приложения силы, то работа вычисляется непосредственно по формуле (3.25) и при этом совершенно не нужно знать закон движения точки M по кривой. Если же сила F зависит не только от координат точки приложения, но и от ее скорости и от времени t , то для вычисления работы силы нужно знать уравнения движения точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (3.26)$$

Отсюда

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dz = \dot{z} dt. \quad (3.27)$$

Подставив в формулу (3.25) вместо координат точки их значения из (3.26), вместо проекций скорости производные по времени от этих величин и вместо дифференциалов координат их значения из (3.27), мы сведем криволинейный интеграл (3.25) к обычному определенному интегралу

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt, \quad (3.28)$$

где t_1 и t_2 — моменты времени, в которые точка M проходит положения M_1 и M_2 соответственно (см. рис. 3.5, а).

Пусть теперь на материальную точку M действует несколько сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Легко доказать (читатель без труда сделает это самостоятельно), что *работа равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на некотором перемещении равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении*

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим один частный случай, когда действующая на точку M сила сохраняет постоянное направление и модуль ($F = \text{const}$). Вычислим работу такой силы при перемещении точки M по некоторой траектории BC от положения M_1

до положения M_2 (рис. 3.6, а). Для этого воспользуемся формулой (3.21), учтя, что $F \cos \alpha ds = F \cdot dr$. Имеем

$$A_{1,2} = \int_{M_1, M_2} F \cdot dr.$$

Вынесем постоянный множитель F за знак интеграла и примем во внимание, что при движении точки M от M_1 до M_2 радиус-вектор r меняется от r_1 до r_2 (см. рис. 3.6, а). Тогда последовательно получим

$$A_{1,2} = F \cdot \int_{r_1}^{r_2} dr = F \cdot (r_2 - r_1),$$

или, учитывая, что $r_2 - r_1 = \overline{M_1 M_2}$,

$$A_{1,2} = F \cdot \overline{M_1 M_2} = Fs \cos \alpha,$$

где $s = M_1 M_2$ и α — угол между неизменным направлением силы F и вектором перемещения $\overline{M_1 M_2}$.

Так как последнее равенство совпадает с (3.19), то это означает, что при постоянной силе

формулу (3.19) можно применять при перемещении точки M по любому криволинейному пути, если только под s понимать кратчайшее расстояние между начальным и конечным положениями точки приложения силы.

Применим полученный вывод к вычислению работы силы тяжести $P = mg$. Сила тяжести направлена вертикально вниз; произведение $s \cos \alpha$ равно по модулю вертикальному перемещению H точки M (рис. 3.6, б). Поэтому

$$A_{1,2} = \pm PH, \quad (3.29)$$

т. е. работа силы тяжести равна произведению модуля этой силы на вертикальное перемещение точки, взятому со знаком «плюс», если точка M опускается, и со знаком «минус», если точка M поднимается. Формулой (3.29) для вычисления работы силы тяжести мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Рассмотрим две задачи на непосредственное применение полученных ранее формул.

Задача 3.4. Проекция силы определены равенствами

$$F_x = -py, F_y = px, F_z = 0,$$

где p — некоторое положительное число, а x и y — координаты точки приложения силы F . Определить работу силы F при движении точки приложения ее от начала координат O до точки M с координатами x, y в трех случаях: 1) точка приложения силы перемещается от O к M по кратчайшему пути; 2) точка приложения силы перемещается сначала по оси x , а затем по прямой, параллельной оси y ; 3) точка приложения силы перемещается сначала по оси y , а затем по прямой, параллельной оси x (рис. 3.7).

Прежде всего заметим, что сила $\mathbf{F}$ перпендикулярна к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ точки приложения силы. Для того чтобы доказать это, достаточно составить скалярное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Имеем

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = xF_x + yF_y + zF_z = x(-py) + y(px) = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ перпендикулярны *). Отсюда следует, что при движении точки по первому пути от O до M по прямой OM работа A_1 силы $\mathbf{F}$ будет равна нулю. Покажем это аналитически, пользуясь формулой (3.25). Для этого напомним прежде всего уравнение прямой OM : $y = kx$, где k — угловой коэффициент. Отсюда $dy = k dx$.

Применим теперь формулу (3.25), учтя при этом заданные проекции сил, уравнение прямой OM и значение dy . Последовательно получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{OM} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{OM} (-py) dx + \\ &+ (px) dy = \int_0^x [(-pkx) + (px)k] dx \equiv 0. \end{aligned}$$

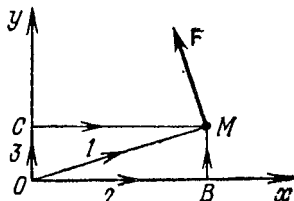


Рис. 3.7

Во втором случае разобьем весь путь интегрирования на два участка: от O до B и от B до M (рис. 3.7). На первом участке от O до B $y = 0$ и $dy = 0$, на втором участке от B до M $x = \text{const}$ и $dx = 0$. Имеем

$$A_2 = \int_{OM} = \int_{OB} + \int_{BM} = \int_0^x F_x dx + \int_0^y F_y dy = \int_0^y px dy = pxy.$$

В третьем случае разобьем весь путь интегрирования тоже на два участка: от O до C и от C до M (см. рис. 3.7). На участке от O до C $x = 0$ и $dx = 0$, на втором участке от C до M $y = \text{const}$ и $dy = 0$. Имеем

$$A_3 = \int_{OM} = \int_{OC} + \int_{CM} = \int_0^y F_y dy + \int_0^x F_x dx = \int_0^y (-py) dy = -pxy.$$

Итак, работа рассматриваемой силы $\mathbf{F}$ на первом пути равна нулю, на втором пути pxy и на третьем пути $-pxy$. Этот пример наглядно показывает, что в общем случае работа силы зависит не только от начального и конечного положения точки приложения силы, но также и от пути, по которому эта точка перемещается. Отметим еще, что во всех трех случаях данного примера для вычисления работы силы не нужно знать закона движения точки, ее массу и скорость.

Задача 3.5. Вычислить работу силы сопротивления, действующей на корабль, за время, в течение которого скорость корабля после остановки двигателей уменьшится вдвое (см. задачу 1.7).

Так как сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению корабля, то угол $\alpha = 180^\circ$. Пользуясь формулой (3.21) и значением модуля силы $\mathbf{F}$, получим ($v_x = dx/dt$)

$$A = -\alpha \int_{M_1 M_2} v_x^2 dx = -\alpha \int_0^t v_x^3 dt,$$

где t — значение времени, при котором скорость корабля уменьшилась вдвое.

*) Силы такой структуры встречаются весьма часто (следящие силы, действующие на упругие стержни, силы радиальной коррекции в гироскопических устройствах и т. п.). См., например, М е р к и н Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

Для дальнейших вычислений нужно знать закон движения корабля. Воспользуемся результатами задачи 1.7 (стр. 30). При решении этой задачи была установлена следующая зависимость скорости корабля от времени t (см. равенство (1.36)):

$$v_x = \frac{mv_0}{m + \alpha v_0 t}.$$

Подставив это выражение для скорости в последнее равенство, будем иметь

$$A = -\alpha \int_0^t \frac{m^3 v_0^3}{(m + \alpha v_0 t)^3} dt.$$

После интегрирования получим выражение для работы как функции времени

$$A = \frac{m^3 v_0^3}{2} \left[\frac{1}{(m + \alpha v_0 t)^2} - \frac{1}{m^2} \right]. \quad (3.30)$$

Пользуясь выражением для скорости, найдем

$$m + \alpha v_0 t = \frac{mv_0}{v}.$$

Теперь равенство (3.30) приводится к виду

$$A = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2). \quad (3.31)$$

Для того чтобы найти работу силы за время, в течение которого скорость уменьшится вдвое, нужно в последнем равенстве положить $v = v_0/2$. Получим

$$A = -\frac{3}{8} m v_0^2.$$

В отличие от предыдущей задачи, здесь работа силы зависит от массы и скорости тела.

В § 3.4 будет показано, что формула (3.31), полученная здесь путем анализа конкретной задачи, является общей для любых сил, действующих на материальную точку.

Остановимся теперь кратко на понятии мощности силы. В элементарном курсе физики мощность определяется как количество работы, производимой в единицу времени. Это определение применимо, конечно, только в том случае, если в равные промежутки времени сила производит равные работы. Нам остается распространить это определение на общий случай, когда работа производится не равномерно.

Вычислим работу силы $\mathbf{F}$ от некоторой фиксированной точки M_1 до точки M (см. рис. 3.5а)

$$A = \int_{M_1 M} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

При движении точки M работа A силы $\mathbf{F}$ будет с течением времени t меняться. Для того чтобы получить работу A как явную функцию времени t , достаточно воспользоваться формулой (3.28), заменив в ней фиксированный верхний предел интегрирования t_2 на переменный предел t :

$$A(t) = \int_{t_1}^t (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt. \quad (3.32)$$

Теперь мощность N силы F легко определяется как скорость изменения работы:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}, \quad (3.33)$$

где A рассматривается как функция времени t .

Легко видеть, что полный дифференциал работы, выраженной как функция времени t по формуле (3.32), равен элементарной работе силы $d'A$. Действительно, если рассматривать работу как функцию времени t , то, пользуясь формулой (3.32), найдем

$$dA(t) = (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

что совпадает с выражением (3.24) для элементарной работы. Таким образом, имеем

$$dA(t) = d'A, \quad (3.34)$$

или, пользуясь равенством (3.23),

$$dA(t) = F \cdot dr. \quad (3.35)$$

В этих равенствах предполагается, что правые части выражены с помощью соотношений (3.26) и (3.27) через время t . Теперь мощность N силы F можно записать следующим образом:

$$N = \frac{dA}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt},$$

или

$$N = F \cdot v = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}, \quad (3.36)$$

т. е. мощность N равна скалярному произведению силы F на скорость v точки приложения силы.

Теперь под знак интеграла в формулу (3.28) можно внести мощность:

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (3.37)$$

Если изменение работы происходит равномерно, т. е. мощность постоянна, то $A = Nt$ и тогда

$$N = A/t. \quad (3.38)$$

В этом случае, как уже отмечалось, мощность равна количеству работы, производимой в единицу времени.

Единицей измерения мощности в системе СИ является *ватт* (1 Вт = 1 Дж/с), а в технической системе — 1 кгс·м/с. В технике применяются также более крупные единицы мощности: 1 кВт = 1000 Вт и так называемая лошадиная сила (1 л. с. = 75 кгс·м/с).

§ 3.4. Теорема об изменении кинетической энергии

Найдем связь между работой сил, приложенных к материальной точке, и изменением скорости точки. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

где F — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Умножим обе части этого равенства скалярно на дифференциал радиуса-вектора dr :

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dr = F \cdot dr. \quad (3.39)$$

В правой части стоит элементарная работа $d'A$ равнодействующей всех сил, приложенных к материальной точке; левую часть можно представить в следующей форме:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot dr = m \frac{dr}{dt} \cdot dv = mv \cdot dv = d \left(\frac{mv^2}{2} \right);$$

при этом учтено, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля ($v \cdot v = v^2$). Теперь равенство (3.39) примет вид

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = d'A. \quad (3.40)$$

Половина произведения массы точки на квадрат ее скорости называется *кинетической энергией* материальной точки

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.41)$$

Уравнение (3.40) дает дифференциальную связь между кинетической энергией и элементарной работой: *полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе всех действующих на эту точку сил.*

Будем рассматривать все члены, входящие в равенство (3.40), как функции времени t . Тогда, учитывая соотношения (3.33), (3.34) и деля обе части равенства (3.40) на dt , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = N, \quad (3.42)$$

т. е. *полная производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна суммарной мощности всех действующих на точку сил.*

Пусть теперь материальная точка M перемещается по кривой BC от положения M_1 до положения M_2 (см. рис. 3.5, а). Обозначим

через v_1 и v_2 скорость точки M в положениях M_1 и M_2 соответственно и проинтегрируем обе части равенства (3.40) по кривой M_1M_2 :

$$\int_{M_1M_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_1M_2} d'A.$$

Правая часть этого равенства равна работе $A_{1,2}$ силы F на пути M_1M_2 ; при вычислении левой части следует иметь в виду, что криволинейный интеграл от полного дифференциала некоторой функции равен самой функции. Таким образом, будем иметь

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}, \quad (3.43)$$

т. е. изменение кинетической энергии материальной точки, при переходе ее из начального в конечное (текущее) положение равно сумме работ на этом перемещении всех сил, приложенных к точке.

С помощью только что доказанной теоремы об изменении кинетической энергии можно решать следующие две основные задачи. В первой определяется скорость материальной точки в конце или начале движения. Решение этой задачи с помощью равенства (3.43) имеет смысл, конечно, только в том случае, если работу всех сил, приложенных к материальной точке, можно вычислить, не зная закона движения, т. е. не интегрируя уравнения движения. К задачам второго типа относится вычисление работы силы по заданной скорости. Использование формулы (3.43) для решения задач такого рода особенно полезно в тех случаях, когда трудности, связанные с определением закона движения и вычислением интеграла (3.28), сравнительно велики (см. задачи 3.12 и 3.13) или когда неизвестна аналитическая зависимость силы (см. задачу 10.4).

§ 3.5. Силовое поле. Потенциальная энергия

В этом параграфе рассматриваются позиционные силы, которые зависят только от положения материальной точки в пространстве.

Будем называть *силовым полем* область (часть пространства), в каждой точке которой на помещенную в ней материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени. Таким образом, в силовом поле должна быть известна одна векторная функция F , зависящая от радиуса-вектора точки r и времени t :

$$F = F(r, t)$$

или три скалярные функции — проекции силы F

$$F_x = F_x(x, y, z, t), \quad F_y = F_y(x, y, z, t), \quad F_z = F_z(x, y, z, t),$$

где x, y, z — координаты точки.

Силовое поле называется *нестационарным*, если сила F зависит явно от времени t , и *стационарным*, если сила не зависит от вре-

мени t явно. В дальнейшем будем рассматривать только стационарные силовые поля, когда сила зависит только от положения точки, т. е. от ее радиуса-вектора

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

а ее проекции являются функциями координат точки

$$F_x = F_x(x, y, z), \quad F_y = F_y(x, y, z), \quad F_z = F_z(x, y, z). \quad (3.44)$$

Отметим два общих свойства таких полей:

1. Работа сил стационарного поля зависит в общем случае от начального M_1 и конечного M_2 положений и траектории, но не зависит от закона движения материальной точки по траектории.

2. Имеет место равенство

$$A_{2,1} = -A_{1,2}, \quad (3.45)$$

где $A_{1,2}$ — работа сил стационарного поля при движении материальной точки от M_1 к M_2 , а $A_{2,1}$ — работа сил поля при движении точки по той же траектории в обратном направлении от M_2 к M_1 .

Первое свойство следует непосредственно из формулы (3.25), а второе — из формулы (3.21) (модуль и направление силы $\mathbf{F}$ в каждой точке траектории не зависят от направления движения и времени t , а угол α между скоростью $\mathbf{v}$ и силой $\mathbf{F}$ при изменении направления движения перейдет в $\pi - \alpha$). Заметим, что для нестационарных силовых полей эти свойства не имеют места.

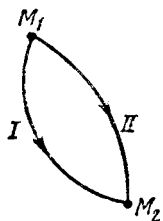


Рис. 3.8

Рассмотрим какое-нибудь стационарное поле и вычислим работу сил поля при перемещении материальной точки из положения M_1 в положение M_2 по двум различным траекториям (рис. 3.8). Работу сил поля при движении по первой траектории обозначим через $A_{1,2}^I$, а работу сил поля при движении

по второй траектории обозначим через $A_{1,2}^{II}$. В общем случае эти работы не равны между собой: $A_{1,2}^I \neq A_{1,2}^{II}$ (см. задачу 3.4).

Среди стационарных силовых полей важное место занимают поля, работа сил которых не зависит от траектории (пути) движения материальной точки и определяется только положением начальной и конечной точек пути. Такие силовые поля называются *потенциальными* (консервативными). Согласно определению для потенциальных сил работа не зависит от пути и, следовательно, для них имеет место равенство

$$A_{1,2}^I = A_{1,2}^{II} = A_{1,2}, \quad (3.46)$$

где I и II — любые пути, по которым материальная точка может перейти от M_1 к M_2 , а $A_{1,2}$ — общее значение работы.

Пусть точка M с координатами x, y, z является точкой в области заданного потенциального силового поля. Выберем в этом же силовом поле произвольную точку M_0 , зафиксируем ее положение и назовем нулевой точкой. При движении материальной точки от положения M до нулевой точки M_0 работа сил потенциального поля будет зависеть только от положения точки M , т. е. от ее координат x, y, z , так как положение точки M_0 неизменно, а работа сил потенциального поля не зависит от пути. Следовательно, работа сил потенциального поля A_{MM_0} при движении материальной точки от точки M до точки M_0 является некоторой функцией координат x, y, z точки M . Эта функция называется *потенциальной энергией* и обозначается греческой буквой Π . По определению

$$\Pi(x, y, z) = A_{MM_0}; \quad (3.47)$$

при этом предполагается, что функция $\Pi(x, y, z)$ однозначна и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Из приведенного определения потенциальной энергии вытекает, что нулевая точка — это точка, в которой потенциальная энергия условно принимается равной нулю.

Покажем, что потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной. Действительно, выберем вместо точки M_0 другую нулевую точку — точку M_0^* и обозначим соответствующую потенциальную энергию через Π^* . По определению будем иметь

$$\Pi^* = A_{MM_0^*}.$$

Так как работа сил потенциального поля не зависит от пути, то выберем путь от M до M_0^* так, чтобы он проходил через точку M_0 (рис. 3.9). Разбивая весь путь от M до M_0^* на два участка: от M до M_0 и от M_0 до M_0^* , получим

$$\Pi^* = A_{MM_0} + A_{M_0M_0^*}.$$

Первое слагаемое равно потенциальной энергии Π при старой нулевой точке M_0 , а второе слагаемое постоянно (не зависит от координат x, y, z точки M). Обозначая это слагаемое через C , получим

$$\Pi^* = \Pi + C,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Предположим, что потенциальная энергия силового поля известна, т. е. известно значение функции Π в каждой точке области существования силового поля. Найдем, чему равна работа сил потенциального поля при переходе материальной точки из положения M_1 в положение M_2 . Для вычисления работы выберем путь

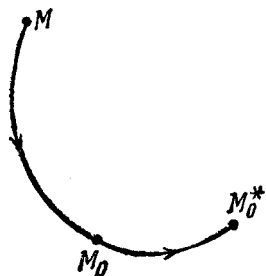


Рис. 3.9

от точки M_1 до точки M_0 проходящим через точку M_2 (рис. 3.10). Разбивая путь $M_1M_2M_0$ на два участка M_1M_2 и M_2M_0 , получим

$$A_{M_1M_0} = A_{M_1M_2} + A_{M_2M_0}.$$

По определению $A_{M_1M_0} = \Pi_1$, а $A_{M_2M_0} = \Pi_2$, где Π_1 — потенциальная энергия в точке M_1 , Π_2 — потенциальная энергия в точке M_2 , следовательно,

$$A_{M_1M_2} = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (3.48)$$

т. е. *работа сил потенциального поля при перемещении материальной точки равна разности потенциальных энергий в начальной и конечной точках пути.*

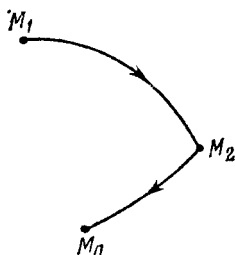


Рис. 3.10

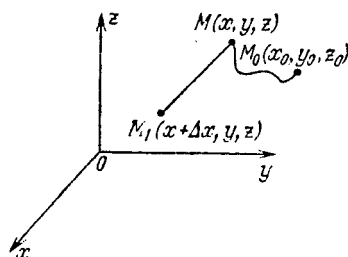


Рис. 3.11

Силевое поле задается обычно проекциями силы на оси координат, т. е. функциями (3.44).

Для того чтобы решить вопрос о том, является ли это данное силовое поле потенциальным, докажем предварительную теорему:

Для того чтобы силовое поле (3.44) было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная однозначная функция координат $\Pi(x, y, z)$, называемая потенциальной энергией поля, частные производные от которой удовлетворяют равенствам

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (3.49)$$

Докажем сначала необходимость этих условий. Предположим, что силовое поле является потенциальным, т. е. работа от пути не зависит.

Вычислим работу сил поля на перемещении точки из положения M с координатами x, y, z в положение M_1 с координатами $x + \Delta x, y, z$ (рис. 3.11), выбрав за путь прямолинейный отрезок, соединяющий точки M и M_1 (он параллелен оси x). Пользуясь формулами (3.48) и (3.25), получим

$$\Pi(x, y, z) - \Pi(x + \Delta x, y, z) = \int_{MM_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Так как при выбранном пути координаты y и z не меняются, то $dy = dz = 0$ и полученное выражение примет вид

$$\int_x^{x+\Delta x} F_x dx = \Pi(x, y, z) - \Pi(x + \Delta x, y, z).$$

По теореме о среднем

$$\int_x^{x+\Delta x} F_x(x, y, z) dx = F_x(x + \theta \Delta x, y, z) \Delta x,$$

где число θ удовлетворяет условию $0 < \theta < 1$. Следовательно, после деления на Δx будем иметь

$$F_x(x + \theta \Delta x, y, z) = - \frac{\Pi(x + \Delta x, y, z) - \Pi(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, найдем

$$F_x(x, y, z) = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Аналогично получаются и два других равенства (3.49).

Перейдем к доказательству достаточности условий (3.49). Предположим, что условия (3.49) выполнены.

Используя условия (3.24) и (3.49), получим

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right).$$

Так как потенциальная энергия Π зависит только от координат точки, то выражение, стоящее в скобках, равно полному дифференциалу $d\Pi$; следовательно,

$$d'A = -d\Pi. \quad (3.50)$$

Пусть точка переместилась из положения M_1 в положение M_2 , тогда

$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} d'A = - \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (3.51)$$

что совпадает с формулой (3.48). Это доказывает достаточность условий (3.49) (работа зависит только от значений потенциальной энергии в точках M_1 и M_2 и не зависит от пути).

Условие (3.49) часто берут в качестве определения потенциального поля. Тогда из соотношения (3.51) вытекает независимость работы от пути.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи: как, зная только проекции силы (3.49), определить, является ли силовое поле потенциальным. Продифференцируем первое равенство (3.49) частным образом по y , а второе по x . Имеем

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}.$$

Так как смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования, то из равенства правых частей следует равенство и левых частей; иначе говоря, если поле потенциально, то проекции сил должны удовлетворять условию (два других равенства получены аналогичным методом)

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (3.52)$$

Справедливо обратное утверждение (мы не будем останавливаться на доказательстве его): если условие (3.52) выполнено, то силовое поле потенциально.

При решении задач на исследование силовых полей вначале по условию (3.52) проверяют, является ли заданное поле потенциальным, а затем, если окажется, что условие (3.52) выполнено, то определяют потенциальную энергию поля, пользуясь определением (3.47): потенциальная энергия Π в данной точке $M(x, y, z)$ равна работе сил поля на перемещении от точки M до нулевой точки, в которой потенциальная энергия условно принимается равной нулю. Так как путь интегрирования не имеет значения, то его выбирают обычно так, чтобы все вычисления свести к минимуму.

Проиллюстрируем сказанное двумя простыми задачами чисто методического характера.

Задача 3.6. Проверить, является ли силовое поле

$$F_x = -py, \quad F_y = px, \quad F_z = 0$$

потенциальным.

Воспользуемся первым равенством (3.52). Имеем

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -p, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = p.$$

Так как первое равенство условия (3.52) не выполнено, то заданное поле не потенциально (в задаче 3.4 непосредственными вычислениями было показано, что работа такой силы зависит от пути движения и, следовательно, сила не потенциальна).

Задача 3.7. Проверить, потенциально ли силовое поле

$$F_x = xy^2, \quad F_y = x^2y, \quad F_z = z^2,$$

и если оно потенциально, то найти потенциальную энергию поля.

Так как

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0,$$

то условие (3.52) выполнено и заданное поле потенциально.

Для определения потенциальной энергии поля нулевую точку выберем в начале координат, а путь интегрирования построим следующим образом: из точки M с координатами x, y, z будем двигаться сначала параллельно оси z до точки B , расположенной в плоскости xy , затем из точки B — параллельно оси y до точки C , находящейся на оси x , а затем по оси x от точки C до начала координат (рис. 3.12). Пользуясь определением (3.47), последовательно получим

$$\Pi = A_{MO} = A_{MB} + A_{BC} + A_{CO} = \int_{MB} + \int_{BC} + \int_{CO}.$$

На первом пути $x = \text{const}$, $dx = 0$, $y = \text{const}$, $dy = 0$, а z меняется от z до 0; на втором пути $z = 0$, $dz = 0$, $x = \text{const}$, $dx = 0$, а y меняется от y до 0; на третьем участке $y = 0$, $dy = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, а x меняется от x до 0. Имеем

$$\Pi = \int_z^0 F_z dz + \int_y^0 F_y dy + \int_x^0 F_x dx = \int_z^0 z^2 dz + \int_y^0 x^2 y dy$$

(в третьем интеграле $F_x = xy^2 = 0$, так как $y = 0$). Интегрируя и учитывая, что во втором интеграле $x = \text{const}$, получим

$$\Pi = -1/2 x^2 y^2 - 1/3 z^3.$$

Легко проверить, что если вычислить от этой потенциальной энергии частные производные по x , затем по y и z , то получим заданные проекции сил с обратным знаком, что соответствует равенствам (3.49).

Наряду с потенциальной энергией многие авторы вводят в рас-

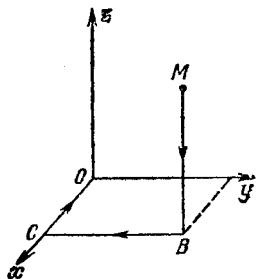


Рис. 3.12

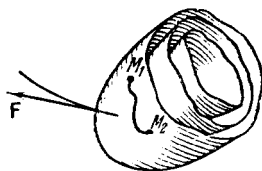


Рис. 3.13

смотрение силовую функцию $U(x, y, z)$, которая отличается от потенциальной энергии только знаком, т. е.

$$U = -\Pi.$$

Условия потенциальности силового поля (3.49) в этом случае имеют вид

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Потенциальное силовое поле допускает удобную и наглядную геометрическую интерпретацию.

Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия сохраняет постоянное значение, т. е. $\Pi(x, y, z) = C$, образует поверхность, которая называется *экипотенциальной поверхностью*. Через каждую точку потенциального поля можно провести только одну такую поверхность (рис. 3.13).

Ясно, что работа сил поля при перемещении материальной точки из начального положения в конечное, когда оба эти положения находятся на одной и той же экипотенциальной поверхности, равна нулю, так как

$$A_{M_1 M_2} = \Pi_1 - \Pi_2 = C - C = 0.$$

Экипотенциальные поверхности обладают еще одним интересным свойством. Допустим, что материальная точка перемещается

вдоль произвольной кривой на эквипотенциальной поверхности, и пусть закон движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тогда для любого момента времени t должно выполняться равенство $\Pi [x(t), y(t), z(t)] \equiv C$.

Продифференцируем обе части этого тождества по t :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \equiv 0.$$

Согласно (3.49) будем иметь

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Следовательно, в любой момент времени действующая на точку сила перпендикулярна к скорости точки. Но вектор $\mathbf{v}$ лежит в касательной плоскости к эквипотенциальной поверхности, поэтому сила $\mathbf{F}$ нормальна к эквипотенциальной поверхности (см. рис. 3.13).

Введем понятие *силовой линии* как кривой, в каждой точке которой касательная коллинеарна с силой данного силового поля. Очевидно, что уравнение такой линии может быть записано так:

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \quad (3.53)$$

Уравнения (3.53) выражают условия пропорциональности проекций двух векторов: силы $\mathbf{F}$ и дифференциала радиуса-вектора силовой линии $d\mathbf{r}$ (этот вектор всегда направлен по касательной линии).

Из уравнений (3.53) следует система двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями y и z :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}. \quad (3.54)$$

Через каждую точку силового поля проходит одна и только одна силовая линия, являющаяся решением системы (3.54), кроме особых точек — состояний равновесия, где $F_x = F_y = F_z = 0$.

Из определения силовых линий следует, что они пересекают все эквипотенциальные поверхности ортогонально (см. рис. 3.13).

В заключение остановимся на понятии градиента силового поля. Если задана какая-либо скалярная функция $\Phi(x, y, z)$, то вектор $\mathbf{E}$, образуемый по формуле

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k},$$

называется *градиентом функции* Φ . Обычно пользуются таким обозначением:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Выражение для силы

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

в случае потенциального поля с помощью (3.49) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\text{grad } \Pi.$$

Таким образом, в потенциальном поле силу можно рассматривать как взятый с обратным знаком градиент функции $\Pi(x, y, z)$.

Покажем, как вычисляется потенциальная энергия для некоторых часто встречающихся силовых полей.

1. Потенциальная энергия поля силы тяжести. Совмещая плоскость xOy с какой-либо горизонтальной плоскостью (рис. 3.14), для проекций силы тяжести будем иметь

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg.$$

Можно проверить, что условия (3.51) выполняются.

Элементарная работа равна

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg dz.$$

Следовательно, работа силы тяжести при перемещении материальной точки из точки O в какую-либо точку M равна согласно (3.25)

$$A_{OM} = - \int_0^z mg dz = -mgz. \quad (3.55)$$

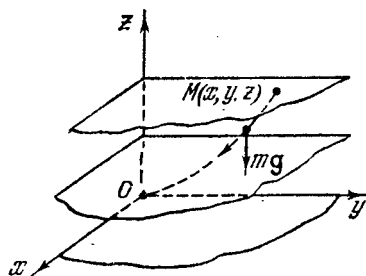


Рис. 3.14

Но так как потенциальная энергия в точке M поля равна работе, которую совершает сила при перемещении точки из положения M в положение O , то

$$\Pi = A_{MO} = mgz. \quad (3.56)$$

Эквипотенциальные поверхности $mgz = C$ образуют семейство горизонтальных плоскостей, а силовыми линиями являются прямые, параллельные оси z .

2. Потенциальная энергия поля центральных сил. Центральной силой будем называть силу, которая в любой точке пространства направлена по прямой, проходящей через некоторую точку поля (центр), причем модуль силы F зависит только от расстояния r точки до центра.

Если этот центр выбрать за начало координат, то для центральной силы можно написать

$$\mathbf{F}(r) = F_r(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.57)$$

где $F_r(r) = \pm F(r)$ (знак «+» для силы отталкивания, а знак «-» для силы притяжения).

Проверим, выполняется ли условие (3.52). Так как

$$F_x = F_r(r) \frac{x}{r}, \quad F_y = F_r(r) \frac{y}{r}, \quad F_z = F_r(r) \frac{z}{r}$$

и, кроме того,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial y} &= x \frac{d}{dr} \left[\frac{F_r(r)}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{F_r(r)}{r} \right], \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= y \frac{d}{dr} \left[\frac{F_r(r)}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{F_r(r)}{r} \right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

Остальные равенства (3.52) также выполняются.

Для вычисления потенциальной энергии найдем работу центральной силы при перемещении точки из некоторого произвольного положения M в фиксированное положение M_0 .

Элементарная работа имеет вид

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r(r) \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r} = F_r(r) dr.$$

Тогда потенциальная энергия будет равна

$$\Pi(r) = A_{MM_0} = \int_r^{r_0} F_r(r) dr. \quad (3.58)$$

Здесь эквипотенциальные поверхности $\Pi(r) = C$ — сферы с центром в начале координат, а силовые линии образуют пучок прямых, выходящих из начала координат.

В частности, центральной силой является гравитационная сила. Согласно закону всемирного тяготения

$$\mathbf{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad F_r(r) = -f \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f — постоянная тяготения, m_1 и m_2 — массы притягивающихся материальных точек, а r — расстояние между ними.

Примем за точку M_0 бесконечно удаленную точку; тогда, применяя (3.58), получим

$$\Pi(r) = - \int_r^{\infty} f \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = - \frac{f m_1 m_2}{r}. \quad (3.59)$$

3. Потенциальная энергия восстанавливающей силы пружины.

Примем за фиксированную точку M_0 , в которой потенциальная энергия равна нулю, положение конца недеформированной пружины (положение самой пружины не играет роли). Пусть длина пружины в недеформированном состоянии равна r_0 , а в положении M равна r (рис. 3.15). Тогда величина $F_r(r)$, входящая в равенства

(3.57) и (3.58), имеет вид $F_r(r) = -c(r - r_0)$. При $r < r_0$ упругая сила пружины является по отношению к центру (точке крепления) отталкивающей, при $r > r_0$ — притягивающей. Подставляя $F_r(r)$ в (3.58), получим

$$\Pi(r) = -c \int_r^{r_0} (r - r_0) dr = \frac{c(r - r_0)^2}{2},$$

или

$$\Pi(r) = \frac{c\lambda^2}{2}. \quad (3.60)$$

Здесь $\lambda = |r - r_0|$ — модуль приращения длины пружины.

Из формул (3.51) и (3.60) следует, что работа восстанавливающей силы пружины при перемещении конца пружины из положения M_1 в M_2 равна

$$A_{1,2} = \frac{c\lambda_1^2}{2} - \frac{c\lambda_2^2}{2}. \quad (3.61)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — деформации, соответствующие начальной и конечной точкам пути.

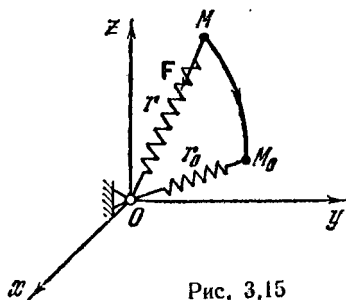


Рис. 3.15

§ 3.6. Интеграл энергии. Понятие о рассеивании полной механической энергии

Предположим, что все силы, действующие на материальную точку, потенциальны. Тогда элементарная работа сил, приложенных к точке, будет $d'A = -d\Pi$ и равенство (3.40) принимает вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d\Pi.$$

Интегрируя обе части этого равенства, найдем

$$T + \Pi = h, \quad (3.62)$$

где h — постоянная интегрирования (она называется постоянной энергии).

Равенство (3.62) называется *интегралом энергии*. Интеграл энергии показывает, что при движении точки в потенциальном поле *сумма кинетической и потенциальной энергий (полная механическая энергия) есть величина постоянная (закон сохранения механической энергии)*.

Равенству (3.62) можно придать и такой вид:

$$T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1, \quad (3.63)$$

где T_1 и T_2 , Π_1 и Π_2 — значения кинетической и потенциальной энергий в положениях M_1 и M_2 соответственно.

Интеграл энергии (3.62) справедлив при условии, что все силы, действующие на материальную точку, потенциальны. Если хотя бы одна из сил не потенциальна, то равенство (3.62) будет нарушено. Рассмотрим, какое влияние оказывают силы сопротивления (они, как правило, имеются всегда) на полную механическую энергию. Итак, будем считать, что на материальную точку действуют потенциальные силы (их потенциальная энергия равна Π) и силы сопротивления F_c . Относительно последних мы не будем делать никаких ограничений: они могут быть постоянны по модулю (сухое трение), пропорциональны любой степени скорости (вязкое трение) или любым иным образом зависеть от скорости точки, ее положения и времени t . Единственное предположение (оно для сил сопротивления естественно) состоит в том, что сила сопротивления всегда направлена противоположно скорости v точки (рис. 3.16).

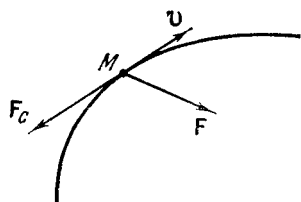


Рис. 3.16

Элементарная работа потенциальной силы F равна $-d\Pi$, а элементарная работа силы сопротивления будет $F_c \cdot dr$. Равенство (3.40) принимает вид

$$dT = -d\Pi + F_c \cdot dr.$$

Перегруппируем члены, разделим обе части равенства на dt и учтем, что $dr/dt = v$:

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = F_c \cdot v.$$

Угол между силой сопротивления F_c и скоростью v равен 180° ; скалярное произведение $F_c \cdot v = F_c v \cos 180^\circ = -F_c v$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = -F_c v < 0. \quad (3.64)$$

Так как производная по времени отрицательна, то полная механическая энергия под действием сил сопротивления убывает или рассеивается, переходя, конечно, в другие формы энергии, например в тепловую.

Модуль мощности $|F_c \cdot v| = F_c v$ силы сопротивления может служить мерой убывания полной механической энергии. Если модуль силы сопротивления равен $|b\dot{x}|$ (линейно-вязкое сопротивление), то

$$F_c \cdot v = -b\dot{x}^2 = -2 \frac{b\dot{x}^2}{2}.$$

Величина $bv^2/2$ называется *диссипативной функцией Релея*, удвоенная величина которой в данном случае служит мерой рассеивания (диссипации) энергии.

§ 3.7. Задачи

Задача 3.8. Какова длина разбега самолета, масса которого $m = 18\,000$ кг, тяга, развиваемая двигателем, $\Phi = 40$ кН, общая сила сопротивления $R = 10$ кН, взлетная скорость $v = 216$ км/час.

Применим теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (\Phi - R)s.$$

Полагая начальную скорость $v_0 = 0$, получим

$$s = \frac{mv^2}{2(\Phi - R)} = \frac{18000 \cdot 60^2}{2 \cdot 30000} = 1080 \text{ м.}$$

Задача 3.9. Самолет, масса которого $m = 10^4$ кг, совершает посадку. В момент касания колес земли самолет имеет вертикальную скорость снижения $u_0 = 2$ м/с. Вертикальная составляющая полной аэродинамической силы равна $N = 80$ кН, жесткость амортизационной системы $c = 10$ кН/см. Сопротивление в амортизационных стойках шасси при прямом ходе постоянно и равно $R = 30$ кН. Определить наибольшую осадку самолета, считая, что за время срабатывания стойки горизонтальная скорость остается неизменной (рис. 3.17).

Применим теорему об изменении кинетической энергии. В начальный момент вертикальная составляющая скорости $u_0 = 2$ м/с, в конечный момент $-u_f = 0$. Работу восстанавливающей силы пружины определим по формуле (3.61). Полагая $OM = \lambda$, получим для работы всех сил (силы тяжести mg , силы сопротивления R , подъемной силы N и силы упругости амортизаторов)

$$A_{OM} = mg\lambda - R\lambda - N\lambda - \frac{c\lambda^2}{2}.$$

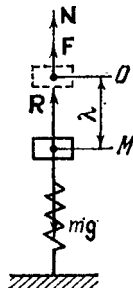


Рис. 3.17

Величина полной начальной скорости равна $\sqrt{v^2 + u_0^2}$; величина скорости в конце процесса сжатия амортизационной системы равна v . Поэтому приращение кинетической энергии составляет

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m(v^2 + u_0^2)}{2} = -\frac{mu_0^2}{2}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$-\frac{mu_0^2}{2} = mg\lambda - R\lambda - N\lambda - \frac{c\lambda^2}{2},$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{c} (mg - R - N \pm \sqrt{(mg - R - N)^2 + mu_0^2 c}).$$

Для крайнего нижнего положения следует перед корнем взять знак «плюс». Тогда, после подстановки численных значений, найдем

$$\lambda \approx 18,8 \text{ см.}$$

Задача 3.10. На какую высоту H над поверхностью Земли поднимается ракета, запущенная в вертикальном направлении с поверхности Земли, если ее начальная скорость равна v_0 ? Какую начальную скорость надо сообщить ракете, чтобы она неограниченно удалялась от Земли? Сопротивлением атмосферы пренебречь. Радиус Земли $R = 6370$ км (рис. 3.18).

Применим закон сохранения механической энергии, имея в виду, что конечная скорость ракеты $v = 0$, а потенциальная энергия силы тяготения определяется по формуле (3.59):

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{fM}{R} = -\frac{fM}{R+H}.$$

Здесь m — масса ракеты, M — масса Земли, f — гравитационная постоянная. От двух последних постоянных можно избавиться, заметив, что при $r = R$ (т. е. на поверхности Земли) сила притяжения приближенно равна силе тяжести

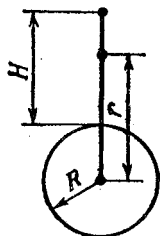


Рис. 3.18

$$f \frac{mM}{R^2} = mg,$$

откуда $fM = gR^2$. Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = -\frac{mgR^2}{R+H}.$$

Разрешая уравнение относительно H , получим

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Теперь нетрудно ответить на второй вопрос. Согласно условию задачи должно быть $H = \infty$ и, следовательно,

$$2gR - v_0^2 = 0, \quad v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370} = 11,2 \text{ км/с}.$$

Задача 3.11. С какой скоростью должна быть запущена с поверхности Земли ракета, чтобы она могла достигнуть той точки C между Землей и Луной (рис. 3.19), где силы притяжения Земли и Луны равны. Расстояние между центрами Луны и Земли $d = 370\,000$ км, а отношение их масс M_L и M_3 равно $1/80$. Радиус Земли $R = 6370$ км.

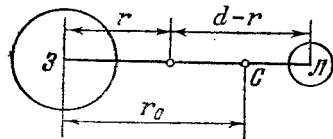


Рис. 3.19

В точке C должно выполняться равенство

$$\frac{m f M_3}{r_0^2} = \frac{f m M_L}{(d - r_0)^2},$$

т. е.

$$r_0 = \frac{d}{1 + \sqrt{M_L/M_3}}.$$

Потенциальная энергия силы притяжения Луны $\Pi_L = -\frac{f m M_L}{d - r}$. Применим закон сохранения механической энергии (полагая, что в точке C скорость ракеты равна нулю)

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{f m M_3}{R} - \frac{f m M_L}{d - R} = -\frac{f m R_3}{r_0} - \frac{f m M_L}{d - r_0}.$$

Используя равенство $f M_3 = g R^2$, получим

$$v_0^2 = 2 \left[gR + \frac{gR^2}{80(d - R)} - g \frac{R^2}{r_0} - \frac{gR^2}{80(d - r_0)} \right], \quad v_0 = 11,1 \text{ км/с}.$$

Задача 3.12. Сани спускаются с горы. Начиная с точки A (рис. 3.20), их притормаживают силой F таким образом, что до конца спуска (точки B) скорость саней остается постоянной. Определить работу, совершаемую силой F , если сила тяжести саней P , а высота горы h .

В отличие от предыдущих задач, здесь наряду с потенциальной силой — силой тяжести $\mathbf{P} = mg$ — действует непотенциальная сила $\mathbf{F}$. На основании теоремы об изменении кинетической энергии имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{AB}^P + A_{AB}^F.$$

Так как начальная и конечная скорости саней одинаковы, то $A_{AB}^P + A_{AB}^F = 0$.

Для работы силы тяжести имеем $A_{AB}^P = Ph$, откуда $A_{AB}^F = -Ph$. Найдём эту работу путем непосредственного вычисления. Так как скорость саней постоянна, то сумма проекций сил на направление скорости равна нулю, т. е. $P \sin \alpha - F = 0$, и, следовательно, $F = P \sin \alpha$, где $\sin \alpha$ можно определить из равенства $\sin \alpha = dy/ds$.

Вычислим мощность силы торможения:

$$N^F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -Fv = -P \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

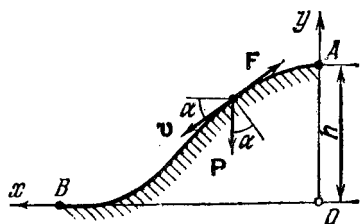


Рис. 3.20

Здесь мы приняли во внимание, что сила торможения $\mathbf{F}$ и скорость $\mathbf{v}$ имеют противоположные направления. Работа силы торможения за время спуска саней выражается следующим образом:

$$A_{AB}^F = \int_0^T N^F(t) dt = -P \int_0^T \frac{dy}{dt} dt = -P \int_0^h dy = -Ph.$$

Задача 3.13. Материальная точка совершает прямолинейные затухающие колебания под действием линейной восстанавливающей силы, создаваемой пружиной жесткости c , и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости ($\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$). Определить работу силы сопротивления за одно полное колебание материальной точки, а также максимальную работу этой силы при неограниченной продолжительности колебаний.

В момент времени, когда материальная точка достигает максимального отклонения, скорость ее равна нулю. Поэтому, применяя теорему об изменении кинетической энергии для перемещения от начального до последующего максимального отклонения, получим

$$0 = A_{уп} + A_c,$$

где $A_{уп}$ — работа упругой силы пружины, а A_c — работа силы сопротивления. Так как деформация пружины λ при максимальных отклонениях материальной точки равна соответствующей амплитуде, то согласно формуле (3.60) будем иметь

$$A_{уп} = \frac{c}{2} (a_0^2 - a_1^2),$$

где a_0 — начальная, а a_1 — последующая амплитуды.

Следовательно, работа силы сопротивления за один период будет равна

$$A_c = -\frac{c}{2} (a_0^2 - a_1^2).$$

Если выразить последующую амплитуду a_1 через предыдущую a_0 с помощью фактора затухания η по формуле (2.16), то последнее равенство примет вид

$$A_c = -\frac{ca_0^2}{2} (1 - \eta),$$

где $\eta = e^{-hT^*}$, причем $h = b/(2m)$ (m — масса точки), T^* — период затухающих колебаний.

За n полных колебаний работа силы сопротивления будет равна

$$A_c = -\frac{c}{2} (a_0^2 - a_n^2),$$

или, учитывая, что $a_n = a_0 \eta^n$,

$$A_c = -\frac{ca_0^2}{2} (1 - \eta^{2n}).$$

Так как $\eta < 1$, то при $n \rightarrow \infty$ будем иметь

$$A_c^{\max} = -\frac{ca_0^2}{2}.$$

Такова максимальная работа, которую совершат силы сопротивления при неограниченной продолжительности колебаний.

Работу силы сопротивления можно, конечно, вычислить и путем непосредственного применения формулы (3.25). Для этого нужно воспользоваться решением (2.13) дифференциального уравнения затухающих колебаний материальной точки:

$$x = ae^{-ht} \sin(k^*t + \varepsilon) \quad (k^{*2} = k^2 - h^2 = c/m - h^2).$$

Отсюда нужно найти $\dot{x}$, а затем $R_x = -b\dot{x}$ ($R_y = R_z = 0$). После чего работа силы сопротивления определится путем вычисления интеграла

$$A_c = -ba^2 \int_0^{T^*} e^{-2ht} [-h \sin(k^*t + \varepsilon) + k^* \cos(k^*t + \varepsilon)]^2 dt.$$

Этот путь непосредственного вычисления работы по общим формулам требует, очевидно, значительно большей затраты труда, чем применение теоремы об изменении кинетической энергии.

Глава IV

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

§ 4.1. Дифференциальное уравнение траектории точки, движущейся в центральном поле сил

В § 3.2 были установлены свойства движения точки в поле центральной силы. Напомним эти свойства.

Во-первых, траектория движения точки — плоская кривая. Центр, через который всегда проходит линия действия силы, лежит в плоскости траектории. Удобно описывать движение такой материальной точки в полярной системе координат с полюсом в центре силового поля. Полярную ось направим пока произвольно. Тогда положение точки в плоскости ее движения будет определяться по-

лярными координатами r и φ . Для центральной силы имеем выражение

$$\mathbf{F} = F_r(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.1)$$

где $F_r(r)$ — проекция силы на радиус-вектор точки.

Во-вторых, имеет место закон площадей (секторная скорость остается постоянной). В полярных координатах соблюдается равенство (3.18):

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = c. \quad (4.2)$$

Перейдем к составлению дифференциального уравнения движения материальной точки в центральном поле.

Воспользовавшись найденным в кинематике (том I, глава IX) выражением для радиального ускорения точки $\omega_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, запишем общее уравнение динамики

$$m\omega_r = F_r(r) \frac{r}{r},$$

в проекции на радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r). \quad (4.3)$$

В соответствии с интегралом площадей (4.2) уравнение (4.3) может быть переписано в виде

$$\ddot{r} - \frac{4c^2}{r^3} = \frac{1}{m} F_r(r). \quad (4.4)$$

Для определения траектории движения в полярных координатах перейдем в этом уравнении от независимой переменной t к полярному углу φ .

В силу интеграла площадей (4.2) имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -2c \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.5)$$

Продифференцируем это выражение по времени и вновь воспользуемся интегралом площадей (4.2):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2c}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right).$$

Приняв во внимание соотношение (4.5), перепишем полученный результат в виде

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.4), получим

$$-\frac{4c}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{4c^2}{r^3} = \frac{1}{m} F_r(r). \quad (4.7)$$

Вводя теперь новую искомую функцию $u = 1/r$, будем иметь

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r(1/u)}{4mc^2u^2}. \quad (4.8)$$

Полученное соотношение (4.8) и есть дифференциальное уравнение траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы (уравнение Бинэ).

Наиболее важным случаем центральной силы является гравитационная сила планеты или любого другого небесного тела.

Ньютоновская сила притяжения планеты, принимаемой за шар с радиальным распределением плотности, действующая на материальную точку, находящуюся вне пределов шара, равна

$$\mathbf{F} = -f \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.9)$$

где f — гравитационная постоянная, m — масса материальной точки, M — масса планеты, r — расстояние точки от центра планеты.

Можно избавиться от произведения fM , если известна сила притяжения на поверхности планеты, т. е. при $r = R$. Для Земли эта сила притяжения равна mg , где g — ускорение свободного падения тела относительно невращающейся Земли. Аналогично определяется g и для других планет.

Таким образом, при $r = R$ из равенства (4.9) получим

$$mg = \frac{f m M}{R^2}, \quad f M = g R^2,$$

после чего (4.9) принимает вид

$$\mathbf{F} = -\frac{mgR^2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.10)$$

Следовательно, в данном случае $F_r(r) = F_r(1/u) = -mgR^2u^2$.

При движении точки вне пределов земной атмосферы, но в достаточной близости к ее поверхности, можно пренебречь действием гравитационных сил со стороны других небесных тел и считать, что на точку действует только сила (4.10). В этом случае дифференциальное уравнение траектории (4.8) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \quad (4.11)$$

где $p = 4c^2/(gR^2) = \text{const}$.

§ 4.2. Виды траекторий. Круговая и параболическая скорости

Исследуем решение осозного дифференциального уравнения (4.11). Общее решение этого уравнения можно представить в следующей форме:

$$u = \frac{1}{p} + a \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (4.12)$$

где a и ε — постоянные интегрирования. Вспоминая, что $u = 1/r$, перепишем уравнение (4.12) в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varepsilon)}, \quad (4.13)$$

где $e = ap$ — постоянная величина.

Уравнение (4.13) определяет траекторию материальной точки, движущейся под действием ньютоновской силы притяжения.

Для упрощения анализа введем новую переменную $\psi = \varphi - \varepsilon$. Очевидно, что теперь угол ψ будет отсчитываться не от первоначально взятого фиксированного направления, а от некоторого нового направления Ox_1 , повернутого относительно первого на угол ε (рис. 4.1). Конечно, вид траектории от такой формальной замены переменных не может измениться.

Теперь уравнение (4.13) примет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}. \quad (4.14)$$

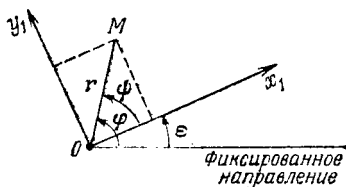


Рис. 4.1

Таким образом, вид траектории определяется единственным образом через постоянные p и e . Несколько дальше будет показано, как определить эти постоянные по начальным условиям.

Из курса аналитической геометрии известно, что кривые (4.14) представляют собой конические сечения *).

Тип траектории определяется значением величины e , называемой *эксцентриситетом конического сечения*.

В дальнейшем примем, что $e > 0$; это соответствует выбору положительного направления полярной оси Ox_1 ($\psi = 0$) от центра O на ближайшую к O точку траектории, называемую *перигеем* (для земных спутников — *перигеел*).

Если $e < 1$, то знаменатель в правой части (4.14) никогда не обращается в нуль, следовательно, кривая второго порядка не имеет бесконечно удаленных точек. Это может быть только эллипс. В частном случае, когда $e = 0$, получаем $r = p = \text{const}$, т. е. эллипс превращается в окружность.

Если $e > 1$, то появляются бесконечно удаленные точки при двух значениях угла ψ , полученных из уравнения

$$1 + e \cos \psi = 0,$$

т. е. при

$$\psi = \pm \arccos \left(-\frac{1}{e} \right).$$

Таким свойством обладает только гипербола.

*) В декартовой системе координат, для которой $x_1 = r \cos \psi$, $y_1 = r \sin \psi$, уравнение (4.14) приводится к виду $x_1^2 + y_1^2 = (p - ex_1)^2$, т. е. все траектории могут быть только кривыми второго порядка.

Наконец, при $e = 1$ знаменатель обращается в нуль при $\psi = \pi$.

Кривой второго порядка, имеющей бесконечно удаленную точку только при одном значении полярного угла ψ , является парабола.

На рис. 4.2 изображены возможные траектории при $e \geq 0$ и одинаковом для всех траекторий расстоянии от центра O до перигентра. Это расстояние в соответствии с уравнением (4.14) равно

$$r_{\min} = r_0 = \frac{p}{1+e}.$$

Установив, что тип траектории определяется значением эксцентриситета e , найдем зависимость эксцентриситета от начальных условий.

Сначала сделаем это, отнеся начальные условия к тому моменту времени, когда точка пересекает ось x_1 (см. рис. 4.1), т. е. при $\psi = 0$.

В соответствии с формулой (4.14) имеем

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{pe \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)}.$$

Следовательно, при $\psi = 0$ полярный радиус r достигает экстремума ($dr/d\psi = 0$). Это значит, что при $\psi = 0$ и любом e скорость точки перпендикулярна к радиусу-вектору r_0 , определяющему положение точки.

Имея в виду, что $\dot{\phi} = \dot{\psi}$ и поперечная скорость $v_p = r\dot{\psi}$, перепишем интеграл площадей в виде

$$\frac{1}{2} r v_p = c.$$

Пусть теперь $r = r_0$, $v = v_0$ при $\psi = 0$. Для этих начальных условий в соответствии с уравнением (4.14) будет

$$r_0 = \frac{p}{1+e}.$$

Отсюда находим

$$e = \frac{p}{r_0} - 1. \quad (4.15)$$

Так как для рассматриваемых начальных условий $v_p = v_0$, то $c = \frac{1}{2} r_0 v_0$ и, учитывая, что $p = 4c^2/(gR^2)$, получим

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{gR^2} - 1. \quad (4.16)$$

Это соотношение является основным и позволяет найти интервалы скоростей, которым соответствуют те или иные виды траекторий.

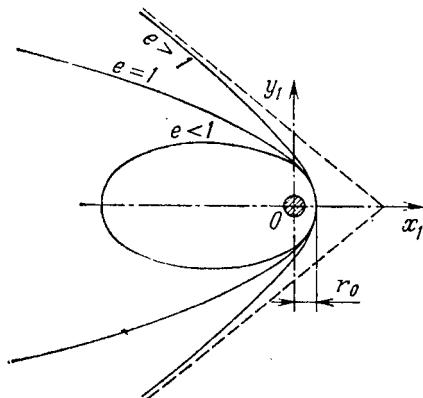


Рис. 4.2

Эллиптические траектории ($e < 1$) определяются неравенством

$$v_0 < \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

В частности, если $e = 0$, то траекторией будет окружность; при этом начальная скорость v_0 имеет значение

$$v_1 = v_0 = \sqrt{gR^2/r_0}$$

и называется *круговой скоростью*. Круговая скорость, вычисленная из условий движения вблизи Земли ($r_0 = R$), называется *первой космической скоростью*:

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ км/с.}$$

Параболической траектории соответствует значение $e = 1$, т. е. по формуле (4.16) скорость

$$v_2 = v_0 = \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

Найденное значение скорости называется *параболической скоростью*. Если начальная скорость задана вблизи Земли, то параболическая скорость

$$v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}$$

называется *второй космической скоростью*.

При сообщении такой начальной скорости точка неограниченно удалялась бы от Земли.

Гиперболические траектории характеризуются неравенством $e > 1$, которому соответствуют начальные скорости

$$v_0 > \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

§ 4.3. Определение параметров околоземной траектории по начальным условиям

Найдем теперь зависимость эксцентриситета от начальных условий в случае, когда материальная точка в некоторый момент времени начинает движение из точки A_0 вне пределов атмосферы (рис. 4.3).

Пусть материальная точка в некоторый момент времени начинает движение из точки A_0 вне пределов атмосферы только под действием силы притяжения Земли (рис. 4.3).

Определим параметры траектории p и e , если известны: r_0 — расстояние от центра Земли до точки A_0 , v_0 — модуль скорости материальной точки в положении A_0 , θ_0 — угол наклона вектора скорости к местному горизонту, т. е. к плоскости, перпендикулярной к радиусу-вектору точки A_0 .

Найдя параметры траектории, мы затем легко определим начальный полярный угол ψ_0 (см. рис. 4.3) и тем самым узнаем пока не известное направление оси Ox_1 .

Так как в точке A_0 скорость $v_p = v_0 \cos \theta_0$, то согласно формуле (4.2) секторная скорость равна

$$c = \frac{1}{2} r_0 v_0 \cos \theta_0. \quad (4.17)$$

Подставляя это выражение в формулу для p , получим

$$p = \frac{4c^2}{gR^2} = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}{gR^2} = r_0 \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^2 \cos^2 \theta_0 = r_0 v \cos^2 \theta_0, \quad (4.18)$$

где $v_1 = \sqrt{gR^2/r_0}$ — круговая скорость в точке A_0 , а $v = (v_0/v_1)^2$.

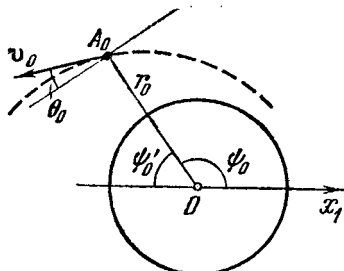


Рис. 4.3

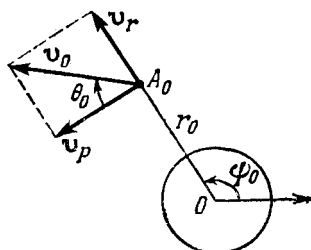


Рис. 4.4

Из формулы (4.14) следует, что

$$e \cos \psi = \frac{p}{r} - 1. \quad (4.19)$$

После дифференцирования этого выражения по времени получим

$$-e \sin \psi \frac{d\psi}{dt} = -\frac{p}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Принимая во внимание равенства $dr/dt = v_r$ (радиальная скорость), $\dot{\psi} = \dot{\phi}$ и $r^2 \dot{\psi} = 2c$, перепишем полученное выражение в виде

$$e \sin \psi = \frac{p}{2c} v_r. \quad (4.20)$$

Для рассматриваемых начальных условий $\psi = \psi_0$, $r = r_0$, $v_r = v_0 \sin \theta_0$ (рис. 4.4) выражения (4.19) и (4.20) с учетом формул (4.17) и (4.18) примут вид

$$e \cos \psi_0 = \frac{r_0 v \cos^2 \theta_0}{r_0} - 1 = v \cos^2 \theta_0 - 1, \quad (4.21)$$

$$e \sin \psi_0 = \frac{r_0 v \cos^2 \theta_0}{r_0 v_0 \cos \theta_0} v_0 \sin \theta_0 = v \sin \theta_0 \cos \theta_0. \quad (4.22)$$

Отсюда находим

$$e = \sqrt{(v \cos^2 \theta_0 - 1)^2 + v^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0} = \sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0}. \quad (4.23)$$

Зная параметры траектории p и e , можно найти из формулы (4.19) начальный полярный угол ψ_0 , т. е. положение полярной оси Ox_1 :

$$\cos \psi_0 = \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \frac{1}{e} = \frac{v \cos \theta_0 - 1}{\sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0}}. \quad (4.24)$$

Иногда удобно ввести дополнительный угол $\psi'_0 = \pi - \psi_0$ (см. рис. 4.3), для которого

$$\cos \psi'_0 = \frac{1 - v \cos^2 \theta_0}{\sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0}}. \quad (4.25)$$

Таким образом, траектория точки полностью определяется тремя параметрами r_0 , v и θ_0 и формула (4.14) может быть записана в виде

$$r = \frac{vr_0 \cos^2 \theta_0}{1 + \cos \psi \sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0}}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть

$$e = \sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0} = 0.$$

Отсюда имеем

$$v^2 - 2v + \sec^2 \theta_0 = 0$$

и, следовательно,

$$v = 1 \pm \sqrt{1 - \sec^2 \theta_0}.$$

Это значит, что $e = 0$ может быть только при $\theta_0 = 0$ и $v = 1$. При этом $r = r_0$, т. е. орбита будет окружностью, а необходимая начальная скорость равна

$$v_0 = v_1 = \sqrt{gR^2/r_0}.$$

Для параболической траектории

$$e = \sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0} = 1,$$

что выполняется при $v = 2$ и любом угле θ_0 . Начальная скорость v_0 , необходимая для движения по параболической траектории, равна

$$v_0 = v_1 \sqrt{2} = \sqrt{2gR^2/r_0}.$$

§ 4.4. Траектории искусственных спутников Земли

Пусть рассматривается движение материальной точки из положения A_0 . В этом положении точка расположена на высоте h над земной поверхностью и обладает начальной скоростью v_0 , направленной под углом θ_0 к местному горизонту.

Как установлено, при $v_0 < v_2$ траектория материальной точки есть эллипс, один из фокусов которого находится в центре Земли.

Из уравнения траектории (4.14) видно, что максимальное расстояние материальной точки от центра Земли достигается при

$$\cos \psi_m = -1 \quad (4.26)$$

и равно

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - e}. \quad (4.27)$$

Соответствующая точка траектории называется *апогеем*. Минимальное расстояние точки от центра Земли достигается в *перигее* и равно

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}. \quad (4.28)$$

Таким образом, максимальное расстояние точки от поверхности Земли составляет

$$h_{\max} = \frac{p}{1-e} - R,$$

а минимальное расстояние равняется

$$h_{\min} = \frac{p}{1+e} - R.$$

В зависимости от конкретных значений v_0 и θ_0 траектории могут оказаться пересекающимися либо не пересекающимися с поверхностью Земли. Найдем, при каком значении v_0 и фиксированном значении угла θ_0 траектории не будут пересекать поверхность Земли, т. е. могут быть траекториями искусственных спутников Земли.

Для траектории, не пересекающей поверхности Земли, должно выполняться неравенство $r_{\min} > R$, т. е. согласно (4.28)

$$\frac{p}{1+e} > R. \quad (4.29)$$

Принимая во внимание (4.23), получаем

$$r_0 v \cos^2 \theta_0 > R(1 + \sqrt{1 - v(2-v) \cos^2 \theta_0}),$$

или, так как $r_0 = R + h$,

$$[(R + h) v \cos^2 \theta_0 - R]^2 > R^2 [1 - v(2-v) \cos^2 \theta_0].$$

После небольших преобразований и подстановки $v = v_0^2/v_1^2$ найдем

$$\frac{v_0^2}{v_1^2} [(R + h)^2 \cos^2 \theta_0 - R^2] > 2Rh. \quad (4.30)$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$\cos \theta_0 > \cos \theta_0^*,$$

где $\cos \theta_0^* = R/(R + h)$.

Из соотношения (4.30) получаем значение v_0 , при котором траектории точки не будут пересекать поверхности Земли:

$$v_0 > v_h,$$

где

$$v_h = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \sqrt{\frac{2Rh}{(R+h)^2 \cos^2 \theta_0 - R^2}}. \quad (4.31)$$

Отметим, что при $h = 0$ это условие имеет смысл только при $\theta_0 = 0$ и принимает вид

$$v_0 > \sqrt{gR}.$$

Определим длину большой и малой полуосей эллипса (4.14). Формула для большой полуоси имеет вид

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{p}{2} \left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e} \right) = \frac{p}{1-e^2},$$

или, с учетом соотношения (4.23),

$$a = \frac{p}{v(2-v) \cos^2 \theta_0} = \frac{r_0}{2-v}. \quad (4.32)$$

Из формулы (4.32) с учетом равенства $v = (v_0/v_1)^2$ следует, что длина большой полуоси не зависит от угла θ_0 и определяется только начальной скоростью v_0 .

Найдем теперь расстояние между фокусами эллипса $2c$.

$$2c = 2(a - r_{\min}) = \frac{2p}{1 - e^2} - \frac{2p}{1 + e} = 2ae. \quad (4.33)$$

Отсюда, кстати, видно, что эксцентриситет $e = c/a$. Малая полуось эллипса b связана простым соотношением с величинами a и c :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{ap}. \quad (4.34)$$

Изучим характер изменения траекторий спутника в зависимости от $v = v_0^2/v_1^2$ при

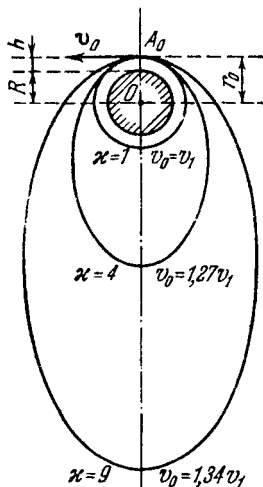


Рис. 4.5

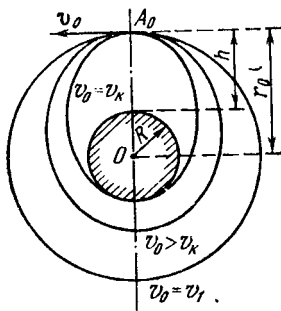


Рис. 4.6

$v_0 > v_k$. Для простоты положим, что $\theta_0 = 0$. Из (4.20) тогда следует

$$\sin \psi_0 = 0, \quad \cos \varphi_0 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right). \quad (4.35)$$

Имея в виду, что при $\theta_0 = 0$ согласно (4.23) $e = \sqrt{1 - v(2 - v)} = |v - 1|$ и, кроме того, $p = r_0 v$, получим

$$\cos \psi_0 = \frac{v - 1}{|v - 1|}. \quad (4.36)$$

Прежде всего остановимся на случае, когда $v > 1$; из (4.36) имеем

$$\cos \psi_0 = \frac{v - 1}{v - 1} = 1.$$

Следовательно, $\psi_0 = 0$, и положительное направление полярной оси совпадает с направлением OA_0 (рис. 4.5). Напомним, что мы условились считать $e > 0$. Это эквивалентно выбору положительного направления полярной оси от притягивающего центра через перигей.

На рис. 4.5 показаны три траектории спутников при различных значениях начальной скорости ($v_1 < v_0 < v_2$) и $\theta_0 = 0$. Это семейство эллипсов с общим фокусом в точке O и перигеем в A_0 .

Обратимся теперь к случаю $v < 1$. При этом $e = 1 - v$ и в соответствии с (4.36) $\cos \psi_0 = (v - 1)/(1 - v) = -1$, т. е. $\psi_0 = \pi$. Следовательно, направление на перигей противоположно OA_0 . Точка A_0 становится апогеем, и семейство эллипсов ($v_k < v_0 < v_1$) имеет вид, изображенный на рис. 4.6.

Уравнения эллипсов (4.14) при $\theta_0 = 0$ принимают вид

$$r = \frac{r_0 v}{1 + |v - 1| \cos \psi}. \quad (4.37)$$

Перигейное расстояние находится из (4.37) при $\psi = 0$. Заметив, что при $v > 1$ $|v - 1| = v - 1$, а при $v < 1$ $|v - 1| = 1 - v$, получим

$$r_{\min} = r_0 \quad (v > 1), \quad r_{\min} = \frac{r_0 v}{2 - v} \quad (v < 1).$$

Полагая в последней формуле $r_{\min} = R$, найдем

$$v_k = v_1 \sqrt{\frac{2R}{2R + h}}.$$

Аналогично, при $\psi = \pi$ определим апогейное расстояние

$$r_{\max} = \frac{r_0 v}{2 - v} \quad (v > 1), \quad r_{\max} = r_0 \quad (v < 1).$$

Большая полуось эллипса определяется по формуле (4.32), а малая — из (4.34); при этом $e^2 = (1 - v)^2$,

$$a = \frac{r_0}{2 - v}, \quad b = a \sqrt{1 - e^2} = a \sqrt{v(2 - v)}. \quad (4.38)$$

Найдем теперь период обращения спутника по эллиптической орбите. Исходя из интеграла площадей, имеем $S = ct$, где S — площадь, описываемая радиусом-вектором точки за время t , c — секторная скорость.

За время T полного оборота спутника радиус-вектор опишет полную площадь эллипса $S = \pi ab$. Следовательно, должно выполняться равенство $\pi ab = cT$. Вспомним, что согласно (4.18) и (4.34) $b = \sqrt{ap}$, $c = 1/2 \sqrt{pgR^2}$. Теперь получим

$$T = \pi \frac{ab}{c} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}}. \quad (4.39)$$

Таким образом, для двух спутников, движущихся по различным эллиптическим орбитам с большими полуосями a_1 и a_2 и периодами обращения T_1 и T_2 , имеем

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{gR^2}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{gR^2}}.$$

Отсюда выводится известное соотношение

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Эта формула справедлива не только для задач о движении спутников Земли, но и вообще для случаев движения материальной точки по эллиптической орбите вокруг любого притягивающего центра. Применительно к Солнечной системе эту формулу установил путем обработки наблюдений И. Кеплер (*третий закон Кеплера*).

§ 4.5. Определение времени полета по эллиптической орбите (уравнение Кеплера)

Пусть движение спутника происходит по эллипсу с полуосями a и b (рис. 4.7). Опишем из центра эллипса окружность радиусом, равным большой полуоси. Через точку A на эллипсе проведем линию, перпендикулярную к линии апсид (оси x). Пусть точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью будет A_1 . Угол E между отрезком $O_1 A_1$ и линией апсид называется *эксцентрисической ано-*

малей. Найдем связь между углами E и ψ (истинной аномалией). Из рассмотрения рис. 4.7 следует, что

$$a \cos E - r \cos \psi = c,$$

где c — половина фокусного расстояния. Подставляя в это выражение (см. формулу (4.14))

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi},$$

будем иметь

$$a \cos E - \frac{p \cos \psi}{1 + e \cos \psi} = c.$$

Так как $e = c/a$ и $p/a = 1 - e^2$, то

$$\cos E = \frac{c}{a} + \frac{p}{a} \frac{\cos \psi}{1 + e \cos \psi} = \frac{e + \cos \psi}{1 + e \cos \psi}; \quad (4.40)$$

отсюда следует, что

$$\cos \psi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}. \quad (4.41)$$

Если теперь в уравнении траектории (4.14) заменить угол ψ с помощью выражения (4.41) на угол E , то получим

$$r = a(1 - e \cos \psi). \quad (4.42)$$

Для дальнейшего нам необходимо определить еще и $\sin \psi$. По свойству эллипса имеем (см. рис. 4.7)

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

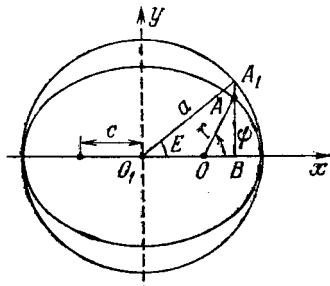


Рис. 4.7

В соответствии с рис. 4.7 получим $A_1B = a \sin E$, $AB = r \sin \psi$ и, следовательно,

$$\frac{r \sin \psi}{a \sin E} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Используя выражение (4.42), будем иметь

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (4.43)$$

Перейдем теперь к определению времени полета спутника. Для этого воспользуемся интегралом площадей (4.2):

$$dt = \frac{r^2}{2c} d\varphi = \frac{r^2}{2c} d\psi,$$

так как $\psi = \varphi - e$. В соответствии с формулой (4.42) получим

$$dt = \frac{a^2 (1 - e \cos E)^2}{2c} d\psi. \quad (4.44)$$

На основании зависимости (4.41) имеем

$$\sin \psi d\psi = \frac{\sin E (1 - e^2) dE}{(1 - e \cos E)^2}.$$

Отсюда, учтя соотношение (4.43), получим

$$d\psi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} dE.$$

Следовательно, выражение (4.44) может быть переписано в виде

$$dt = \frac{a^3 \sqrt{1-e^2}}{2c} (1-e\cos E) dE,$$

или

$$n(t-t_0) = \int_0^E (1-e\cos E) dE,$$

где t_0 — момент времени прохождения через перигей,

$$n = \frac{2c}{a^3 \sqrt{1-e^2}} = \frac{2c(1-e^2)^{3/2}}{p^2}.$$

После интегрирования найдем

$$E - e \sin E = n(t-t_0). \quad (4.45)$$

Полученное уравнение носит название *уравнения Кеплера*.

Уравнение Кеплера устанавливает связь между эксцентрической аномалией E и временем движения точки.

Для того чтобы определить положение точки в данный момент времени, следует по уравнению Кеплера определить угол E , соответствующий данному моменту времени, затем по найденному E , используя формулы (4.41) и (4.42), определить ψ и r .

Решению уравнения Кеплера посвящено много работ. Изложение способов его приближенного решения можно найти в курсах небесной механики.

В качестве примера применения уравнения Кеплера определим период обращения точки по эллиптической орбите.

Так как t_0 — момент времени прохождения через перигей, то при $t = t_0 + T$, где T — период обращения, $E = 2\pi$. Из уравнения Кеплера получаем $nT = 2\pi$. Отсюда

$$T = 2\pi/n.$$

Так как

$$n = \frac{2c(1-e^2)^{3/2}}{p^2},$$

$$\text{а } p = a(1-e^2) = \frac{4c^2}{gR^2} \quad (\text{см. § 4.3}), \quad \text{то } n = \sqrt{gR^2/a^3} \quad \text{и}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}}.$$

Эта формула была уже нами получена в § 4.4.

В заключение этого параграфа найдем выражение для проекций скорости и ускорения точки на радиальное и поперечное направления при ее движении по эллиптической траектории через эксцентрическую аномалию.

Так как $v_r = \dot{r}$ и $v_p = r\dot{\psi} = r\dot{\phi}$, то в соответствии с формулой (4.42) имеем

$$v_r = ae \sin E \frac{dE}{dt}, \quad v_p = a(1-e\cos E) \frac{d\psi}{dE} \frac{dE}{dt}.$$

Ранее было найдено

$$\frac{d\psi}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E},$$

а из уравнения (4.45) следует, что

$$\frac{dE}{dt} - e \cos E \frac{dE}{dt} = n.$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1-e \cos E} = \frac{an}{r}.$$

Таким образом,

$$v_r = \frac{a^2 en \sin E}{r}, \quad v_p = \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r}.$$

Модуль скорости будет

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1-e^2 \cos^2 E} = an \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}}.$$

Косинус угла между вектором скорости и радиусом-вектором материальной точки равен

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{v_r}{v} = \frac{e \sin E}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 E}}.$$

Для получения проекций ускорения на радиальную и поперечную оси используем равенства $m\omega_r = F_r$, $m\omega_p = F_p$, где $F_r = -mgR^2/r^2$, $F_p = 0$. Отсюда

$$\omega_r = -\frac{gR^2}{r^2}, \quad \omega_p = 0.$$

Модуль ускорения равен

$$\omega = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{n^2 a^3}{r^2},$$

так как

$$n = \sqrt{gR^2/a^3}.$$

§ 4.6. Траектории, пересекающие земную поверхность

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением только тех эллиптических траекторий ($e < 1$), которые пересекают земную поверхность.

Условием пересечения траектории с земной поверхностью является неравенство (см. § 4.4)

$$\frac{v_0^2}{v_1^2} [(R+h)^2 \cos^2 \theta_0 - R^2] < 2Rh.$$

Это условие будет выполнено, если $\cos \theta_0 < \cos \theta_0^*$, где $\cos \theta_0^* = R/(R+h)$.

Следовательно, если $\theta_0 > \theta_0^*$, то все траектории (эллипсы) пересекут земную поверхность.

Если же $\theta_0 < \theta_0^*$, то земную поверхность пересекут только те траектории, для которых начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$v_0 < v_1 \sqrt{\frac{2Rh}{(R+h)^2 \cos^2 \theta_0 - R^2}}. \quad (4.46)$$

Рассмотрим траекторию, которая изображена на рис. 4.8.

Найдем угол ψ_1 (см. рис. 4.8) между прямой OA_0 и большой осью эллипса. Для апогея $\cos \psi_m = -1$, следовательно, $\psi_m = \pi$; но $\psi_m = \psi_0 + \psi_1$, значит,

$$\psi_1 = \pi - \psi_0. \quad (4.47)$$

Так как в точке A_0 выполняется равенство

$$r_0 = \frac{p}{1 + e \cos \psi_0},$$

то

$$\cos \psi_0 = \frac{p - r_0}{er_0} \quad \text{и} \quad \psi_0 = \arccos \frac{p - r_0}{er_0}.$$

Таким образом, учитывая, что $p = r_0 v \cos^2 \theta_0$, имеем

$$\psi_1 = \pi - \arccos \frac{v \cos^2 \theta_0 - 1}{e},$$

или

$$\psi_1 = \arccos \frac{1 - v \cos^2 \theta_0}{e}. \quad (4.48)$$

Выразим длину дуги окружности радиуса r_0 , проходящей через точки A_0 и B_0 , через скорость v_0 и угол θ_0 . В силу симметрии эллипса относительно его большой оси имеем

$$S_{A_0 B_0} = 2r_0 \psi_1.$$

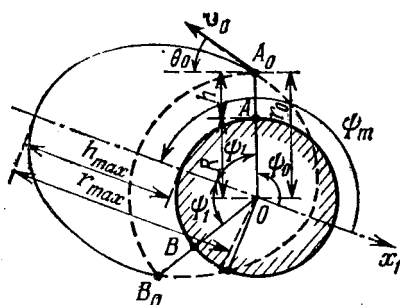


Рис. 4.8

Принимая во внимание формулу (4.48), получим

$$S_{A_0 B_0} = 2r_0 \arccos \frac{1 - v \cos^2 \theta_0}{e}. \quad (4.49)$$

Длина дуги AB определяется формулой

$$S_{AB} = 2R\psi_1. \quad (4.50)$$

При $h \ll R$ эту величину будем считать дальностью полета на пассивном участке траектории (см. рис. 4.8).

Исследуем характер зависимости угла ψ_1 от угла θ_0 при различных фиксированных v , т. е. v_0 .

Запишем формулу (4.48) в виде

$$\cos \psi_1 = \frac{1 - v \cos^2 \theta_0}{\sqrt{1 - v(2 - v) \cos^2 \theta_0}}. \quad (4.51)$$

При $v = 2$ формула (4.51) принимает вид

$$\cos \psi_1 = 1 - 2 \cos^2 \theta_0 = -\cos 2\theta_0$$

и, следовательно,

$$\psi_1 = \pi - 2\theta_0.$$

При $v = 1$ имеем

$$\cos \psi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0} = \sin \theta_0,$$

т. е.

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_0.$$

Найдем теперь значение угла θ_0 , при котором ψ_1 имеет максимальное значение при данном фиксированном v . Введя в формуле (4.51) замену $z = \cos^2 \theta_0$, получим:

$$\cos \psi_1 = \frac{1 - zv}{\sqrt{1 - v(2 - v)z}}. \quad (4.52)$$

Продифференцировав это выражение по z , найдем

$$-\sin \psi_1 \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{-2v[1 - v(2 - v)z] + (1 - vz)(2 - v)v}{2[1 - v(2 - v)z]^{3/2}}.$$

Приравняв нулю числитель правой части этого равенства, получим уравнение для определения того значения z , при котором ψ_1 имеет максимальное значение:

$$2[1 - v(2 - v)z] - (1 - vz)(2 - v) = 0.$$

Отсюда

$$z = \cos^2 \theta_0 = \frac{1}{2 - v}. \quad (4.53)$$

Следовательно, ψ_1 имеем экстремум только при $v < 1$. Формулу для определения максимального значения ψ_1 найдем, подставив результат (4.53) в выражение (4.52):

$$\cos \psi_1^{\max} = \frac{2\sqrt{1 - v}}{2 - v}. \quad (4.54)$$

Определив из выражения (4.53) v и подставив это в формулу (4.54), получим $\cos \psi_1^{\max} = \sin 2\theta_0$. Отсюда

$$\psi_1^{\max} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_0. \quad (4.55)$$

Из этой зависимости вытекает, что угол ψ_1 будет максимальным при заданном v , если

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi_1}{2}. \quad (4.56)$$

На рис. 4.9 построены зависимости ψ_1 от θ_0 при различных значениях v . Пунктиром показана линия максимумов (4.55).

Предполагая, что v (т. е. v_0) задано, определим угол θ_0 для получения необходимого угла ψ_{1i} при условии пересечения траекторий земной поверхности.

Рассмотрим случай $v = v_1 < 1$. По формуле $\cos \theta_0^* = R/(R + h)$ находим угол θ_0^* (заметим, что при $h \ll R$ угол θ_0^* близок к нулю). Из рассмотрения рис. 4.10 видно, что при $v_1 < 1$ заданный угол $\psi_{1i} < \pi/2$ может быть достигнут при двух значениях угла θ_0 :

$$\theta_0 = \theta_{01}, \quad \theta_0 = \theta_{02} \quad (\theta_{01} < \theta_{02}).$$

Если $\theta_{02} < \theta_0^*$, то обе траектории пересекут земную поверхность только при (см. условие (4.46))

$$v_1 < \frac{2Rh}{(R + h)^2 \cos^2 \theta_{01} - R^2}.$$

Если $\theta_{01} < \theta_0^* < \theta_{02}$, то траектория, полученная при $\theta_0 = \theta_{01}$, пересечет земную поверхность только при

$$v_1 < \frac{2Rh}{(R + h)^2 \cos^2 \theta_{01} - R^2}.$$

При $\theta_{01} > \theta_0^*$ обе траектории пересекут земную поверхность.

Этот же заданный угол ψ_{11} может быть достигнут при

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi_{11}}{2}, \quad (4.57)$$

но уже при $v_2 < v_1$, т. е. при меньшей начальной скорости (см. рис. 4.10).

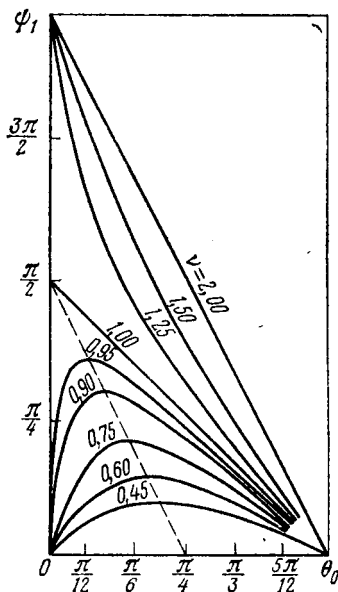


Рис. 4.9

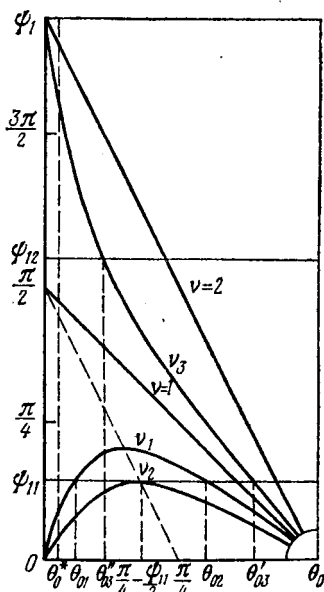


Рис. 4.10

Значение $v = v_2$, при котором заданное значение ψ_{11} достигается при $\theta_0 = \pi/4 - \psi_{11}/2$, найдем, используя формулу (4.53):

$$v_2 = 2 - \frac{1}{\cos^2 \theta_0} = \frac{2 \cos 2\theta_0}{1 + \cos 2\theta_0} = \frac{2 \sin \psi_{11}}{1 + \sin \psi_{11}}.$$

Отсюда следует, что начальная скорость должна быть равна

$$v_0 = v_1 \sqrt{\frac{2 \sin \psi_{11}}{1 + \sin \psi_{11}}}. \quad (4.58)$$

Формулы (4.57) и (4.58) дают возможность по заданному углу ψ_{11} найти угол θ_0 и минимальную начальную скорость v_0 , обеспечивающие получение этого угла ψ_{11} .

Пусть $v = v_3 > 1$. В этом случае заданное $\psi_1 = \psi_{11}$ или $\psi_1 = \psi_{12}$ может быть достигнуто только при одном значении угла $\theta_0 = \theta_{03}'$ или $\theta_0 = \theta_{03}''$ (см. рис. 4.10). При этом, если $\theta_0^* < \theta_{03}'$ ($\theta_0^* < \theta_{03}''$), то траектория пересечет земную поверхность при любом $v < 2$. Если же $\theta_0^* > \theta_{03}'$ ($\theta_0^* > \theta_{03}''$), то пересечение произойдет только при выполнении условия (4.46).

§ 4.7. Задачи

Задача 4.1. Спутник движется по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли. Какую дополнительную скорость нужно сообщить спутнику, чтобы он перешел на параболическую орбиту?

Спутник, двигаясь по окружности вокруг Земли на высоте h , имеет круговую скорость, равную

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}.$$

Для того чтобы спутник перешел на параболическую орбиту, он должен приобрести параболическую скорость, соответствующую высоте h , т. е.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}.$$

Следовательно, спутнику нужно сообщить дополнительную скорость, равную

$$v_d = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} (\sqrt{2} - 1).$$

Пусть $h = 200$ км $= 2 \cdot 10^5$ м, радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, $g = 9,81$ м/с², тогда $v_d = 3220$ м/с.

Задача 4.2. На какой высоте h следует запустить спутник по круговой орбите, чтобы период обращения его равнялся периоду обращения Земли вокруг своей оси (24 ч *).

Из формулы для периода обращения (4.39) следует, что

$$a^3 = \frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}.$$

Так как орбита круговая, то $a = R + h$,

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}} - R.$$

Подставляя $g = 9,81$ м/с², $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, $T = 8,64 \cdot 10^4$ с, находим $h \approx 35600$ км.

Задача 4.3. Найти начальную скорость, необходимую для того, чтобы траектория спутника представляла собой эллипс с заданным отношением между максимальным и минимальным расстоянием от центра Земли. Принять, что $\theta_0 = 0$, т. е. в начальный момент спутник находится на главной фокальной оси (линии апсид).

При решении будем различать два случая: 1) начальная скорость больше круговой скорости, т. е. начальная точка является перигеем орбиты; 2) начальная скорость меньше круговой скорости, т. е. начальная точка является апогеем орбиты.

В первом случае, когда $v > 1$, обозначим $r_{\max} = \kappa r_0$, $r_{\min} = r_0$, где $\kappa > 1$ — заданное число. Пользуясь формулой (4.37), имеем

$$r_{\max} = \frac{v}{2-v} r_0, \quad r_{\min} = r_0;$$

отсюда

$$\kappa = \frac{v}{2-v} \quad \text{и} \quad v = \frac{2\kappa}{1+\kappa}.$$

*) Если орбита спутника лежит в плоскости экватора и направление движения совпадает с направлением вращения Земли, то спутник будет все время располагаться над одной и той же точкой земной поверхности; такой спутник называется *стационарным*.

Так как $v = v_0^2/v_1^2$, где $v_1 = \sqrt{gR^2/r_0}$, то искомая начальная скорость равна

$$v_0 = v_1 \sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}} > v_1.$$

Большая и малая полуоси соответственно равняются $a = \frac{1+\kappa}{2} r_0$, $b = r_0 \sqrt{\kappa}$.

На рис. 4.5 возле каждого эллипса указаны соответствующие значения $\kappa = 1, 4, 9$.

Во втором случае, когда $v < 1$, удобно обозначить $r_{\max} = r_0$, $r_{\min} = \kappa_1 r_0$, причем κ_1 является заданным числом, меньшим единицы. Пользуясь формулой (4.37), найдем, что

$$r_{\max} = r_0, \quad r_{\min} = \frac{v}{2-v} r_0$$

и κ_1 выражается формулой

$$\kappa_1 = \frac{v}{2-v}.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{2\kappa_1}{1+\kappa_1} \quad \text{и} \quad v_0 = v_1 \sqrt{\frac{2\kappa_1}{1+\kappa_1}} < v_1.$$

При этом, если $\kappa_1 > R/r_0$, то эллипсы не пересекают поверхность Земли (см. рис. 4.6); если же $\kappa_1 < R/r_0$, то эллипсы пересекаются с поверхностью Земли (такие траектории могут быть использованы для так называемых суборбитальных полетов). Соответствующие эллипсы изображены на рис. 4.11 при $\kappa_1 = 0,2; 0,4$.

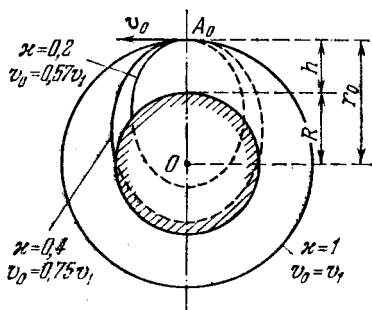


Рис. 4.11

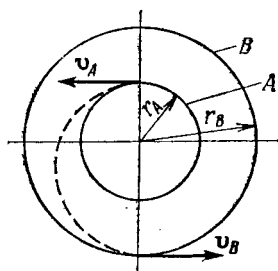


Рис. 4.12

Задача 4.4. Спутник, движущийся по круговой орбите A радиуса r_A , переводят на круговую орбиту B радиуса r_B ($r_B > r_A$).

Для этого сначала переводят спутник с круговой орбиты A на эллиптическую орбиту, апогей которой расположен на расстоянии r_B от центра Земли (рис. 4.12); а затем, сообщив дополнительную скорость, переводят на круговую орбиту B . Определить дополнительные скорости, которые следует сообщить спутнику на орбите A и в апогее переходного эллипса, чтобы выполнить предполагаемый переход с орбиты A на орбиту B .

При движении по орбите A спутник имеет скорость

$$v_{1A} = \sqrt{gR^2/r_A}.$$

Для перевода спутника на эллиптическую орбиту, расстояние апогея которой от центра Земли равно r_B , его скорость должна быть увеличена. Необходимая скорость была найдена в задаче 4.3 и равна

$$v_A = v_{1A} \sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}, \quad \text{где } \kappa = \frac{r_B}{r_A}.$$

Следовательно, добавочная скорость, которую нужно сообщить спутнику будет

$$\Delta_1 v = v_A - v_{1A} = v_{1A} \left(\sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}} - 1 \right).$$

Скорость спутника v_B в апогее эллипса найдем из интеграла площадей $v_A r_A = v_B r_B$. Отсюда

$$v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = \frac{v_A}{\kappa} = v_{1A} \sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}}.$$

Так как на орбите B круговая скорость спутника должна быть равна $v_{1B} = \sqrt{gR^2/r_B} = v_{1A} \sqrt{1/\kappa}$, то дополнительная скорость, которую следует сообщить спутнику для перехода на орбиту B , будет равна

$$\Delta_2 v = v_{1B} - v_B = v_{1A} \sqrt{\frac{1}{\kappa}} - v_{1A} \sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}} = v_{1A} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} - \sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}} \right).$$

Суммарное увеличение скорости спутника при переходе с орбиты A на орбиту B определяется соотношением

$$\Delta_1 v + \Delta_2 v = v_{1A} \left(\frac{\kappa-1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} - 1 \right).$$

Глава V

НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 5.1. Определение несвободного движения. Связи.

Принцип освобождаемости

В первой главе при формулировке основных задач динамики точки мы исходили из предположения, что на движение точки не наложено никаких ограничений, т. е. все ее три координаты могут меняться любым образом. Надлежащим выбором закона изменения силы F и начальных условий можно заставить материальную точку двигаться по любой траектории. Примером может служить движение управляемого космического корабля. В подобных случаях материальная точка называется *свободной*, а ее движение — *свободным движением*.

В других случаях на движение могут быть наложены те или иные ограничения. Рассмотрим, например, материальную точку, находящуюся на конце нерастяжимого стержня длины l , другой конец которого с помощью шарнира закреплен в неподвижной точке O (рис. 5.1). При любых силах, приложенных к материальной точке,

она совершает движение по поверхности сферы, радиус которой равен длине стержня. Координаты точки не будут независимыми, так как они должны удовлетворять уравнению сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (5.1)$$

Из этого уравнения одна из координат, например координата x , может быть выражена через остальные две:

$$x = \pm \sqrt{l^2 - y^2 - z^2}. \quad (5.2)$$

Скорость точки всегда располагается в касательной плоскости, проведенной к сфере в точке, где находится в данный момент материальная точка.

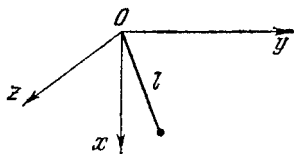


Рис. 5.1

Таким образом, в рассматриваемом примере начальные условия не могут быть выбраны произвольно, так как координаты начального положения должны удовлетворять уравнению (5.1), а начальная скорость должна быть расположена в касательной плоскости, проведенной к сфере

в точке начального положения материальной точки.

Итак, существуют случаи движения материальной точки, когда некоторые ограничения вынуждают точку совершать движение по строго фиксированной поверхности (в рассматриваемом примере таким ограничением является стержень). Можно привести примеры, когда ограничения принуждают материальную точку двигаться по строго определенной линии (например, кольцо, насаженное на изогнутую проволоку, будет двигаться только вдоль проволоки). Ограничения также вынуждают материальную точку двигаться лишь в некоторой части пространства. Во всех этих случаях независимо от действующих сил координаты точки определенным образом связаны между собой и выбор начальных условий не может быть произвольным.

Будем называть материальную точку *несвободной*, если вследствие тех или иных ограничений она при действии на нее любых сил совершает движение по строго фиксированной линии, поверхности или находится все время в строго фиксированной части пространства. Движение такой точки называется *несвободным движением*.

Ограничения, благодаря которым материальная точка вынуждена совершать несвободное движение, называются *связями*; это понятие уже встречалось в курсе статик.

При изучении несвободного движения пользуются также знакомым из курса статик *принципом освобожденности*, который заключается в следующем: при рассмотрении несвободного движения следует действие связей на материальную точку заменить реакциями этих связей и рассматривать материальную точку как свободную, но находящуюся под действием как сил активных, так и реакций связей. Если обозначить через $\mathbf{F}$ равнодействующую всех

активных сил, приложенных к точке, а через $\mathbf{R}$ — равнодействующую всех реакций связей, то основное уравнение динамики примет вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (5.3)$$

Следует иметь в виду, что реакция связи неизвестна и может возникнуть задача об определении этой силы.

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ в соответствии с уравнением (5.3) получим

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z.$$

Эти уравнения позволяют решать задачи, когда заданы движение и активные силы и требуется определить реакции, а также когда заданы активные силы и требуется определить закон движения и реакции.

§ 5.2. Уравнения связей; классификация связей

Независимо от фактической реализации тех или иных связей, наложенных на материальную точку, они могут быть заданы аналитически. Уравнения линии или поверхности, по которым совершает движение точка, называются *уравнениями связи*. Если точка припущена оставаться в некоторой области пространства, то связь аналитически задается в виде неравенств.

Если материальная точка движется по линии, то уравнения связи имеют вид

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad (5.4)$$

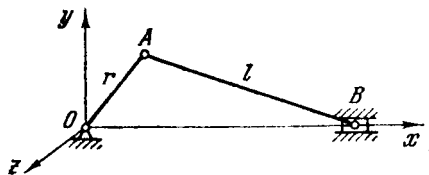


Рис. 5.2

где $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$ — уравнения тех поверхностей, линией пересечения которых является траектория точки. В случае плоского движения по заданной кривой уравнение связи можно записать в форме $f(x, y) = 0$. Например, в кривошипно-ползунном механизме (рис. 5.2) точка A шатуна движется по окружности радиуса, равного длине кривошипа. Уравнение связи получает вид

$$x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0.$$

Ползун B движется по прямой, и для него уравнение связи имеет вид $y_B = 0$. Неизменность расстояния между A и B выражается уравнением

$$(x_A - x_B)^2 + y_A^2 = l^2.$$

При движении точки по поверхности уравнением связи является уравнение этой поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение сферы (5.1) в рассмотренном выше примере и является уравнением связи. Заметим, что если в этом примере вместо стержня взята гибкая нерастяжимая нить, то точка получит возможность совершать движение не только по поверхности, но и внутри сферы радиуса, равного длине l нити. Вместо уравнения связь в этом случае аналитически задается неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0. \quad (5.6)$$

Следовательно, если какая-либо поверхность, определяемая уравнением $f(x, y, z) = 0$, ограничивает область движения точки, то вместо уравнения связи следует взять одно из неравенств:

$$f(x, y, z) \leq 0 \quad (5.7)$$

или

$$f(x, y, z) \geq 0.$$

Перейдем теперь к классификации связей.

Если связь со временем не меняется, т. е. время t явно в уравнение связи не входит, то связь называется *стационарной* (*склерономной*). Таковы, например, связи, удовлетворяющие условиям (5.4), (5.5) и (5.7).

Если же связь изменяется во времени заданным образом, то уравнение связи содержит явно время t . Такие связи называются *нестационарными* (*реономными*).

Например, если длина стержня l на рис. 5.1 будет изменяться по какому-либо заданному закону, в частности, пусть $l = l_0 + a \sin \omega t$ ($l_0 > a$), то уравнение связи будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - (l_0 + a \sin \omega t)^2 = 0.$$

Следовательно, в общем случае при изменении связей во времени они могут быть заданы следующим образом:

при движении точки по поверхности

$$f(x, y, z, t) = 0; \quad (5.8)$$

при движении точки по кривой

$$f_1(x, y, z, t) = 0, f_2(x, y, z, t) = 0; \quad (5.9)$$

при движении точки в ограниченной области

$$f(x, y, z, t) \leq 0 \text{ или } f(x, y, z, t) \geq 0. \quad (5.10)$$

Связь называется *удерживающей*, если уравнение связи имеет вид равенства, как, например, уравнения (5.4). Это означает, что при любых условиях точка движется по заданной поверхности или кривой. Связи, которые задаются с помощью неравенств, например, в виде (5.7) или (5.10), называются *неудерживающими*.

Примером неудерживающей связи служит связь, определяемая неравенством (5.6). Следовательно, связь является неудерживающей, если точка может покидать ее в какую-либо одну сторону.

Наконец, введем еще понятие об *идеальной* связи. При движении точки по поверхности или по кривой реакция связи может быть разложена на нормальную и касательную составляющие. Касательная составляющая реакции представляет собой силу трения. Очевидно, что чем более гладкой будет поверхность или кривая, тем меньше будет касательная составляющая реакции. Если поверхность или кривая абсолютно гладкие, то реакция будет направлена по нормали.

Для точки *идеальными* связями будем называть связи без трения, реакции которых не имеют касательных составляющих *).

§ 5.3. Движение точки по гладкой неподвижной поверхности

Для изучения движения материальной точки по поверхности используем уравнение (5.3).

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ имеем

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (5.11)$$

Эти три уравнения содержат шесть неизвестных: три координаты точки (x, y, z) и три неизвестные проекции R_x, R_y, R_z реакции. Но, как мы видели, координаты точки должны также удовлетворять уравнению поверхности, по которой движется точка. Это дает четвертое уравнение

$$f(x, y, z) = 0. \quad (5.12)$$

Конечно, четырех уравнений для определения шести неизвестных недостаточно. Для получения двух недостающих уравнений используем условие идеальности связи.

Так как поверхность, по которой движется точка, идеально гладкая, то реакция направлена по нормали к поверхности. Градиент

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

представляет собой вектор, который также направлен по нормали к поверхности.

Условие коллинеарности реакции $\mathbf{R}$ и $\text{grad } f$ и дает недостающие два уравнения:

$$\frac{R_x}{\partial f / \partial x} = \frac{R_y}{\partial f / \partial y} = \frac{R_z}{\partial f / \partial z}. \quad (5.13)$$

Таким образом, уравнения (5.11)—(5.13) в принципе дают возможность решить задачу о движении точки по гладкой неподвижной поверхности. Из уравнений (5.11) и (5.13) можно исключить реакции связей. Для этого обозначим равные отношения (5.13) через λ , т. е.

$$\frac{R_x}{\partial f / \partial x} = \frac{R_y}{\partial f / \partial y} = \frac{R_z}{\partial f / \partial z} = \lambda.$$

*) Более полное определение идеальных связей будет приведено в главе XVIII.

Тогда

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.14)$$

и уравнения (5.11) теперь примут такой вид:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (5.15)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связи (5.12), получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными x , y , z и λ . После отыскания этих неизвестных по формулам (5.14) можно определить проекции реакции. Модуль реакции равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (5.16)$$

Реакция определяется выражением

$$\mathbf{R} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \lambda \operatorname{grad} f.$$

Уравнения (5.15) называются *уравнениями Лагранжа первого рода*.

Задача 5.1. Рассмотрим движение тяжелой материальной точки массы m по внутренней поверхности цилиндра радиуса r ; ось цилиндра горизонтальна (рис. 5.3). Совместив начало координат с какой-либо точкой оси цилиндра, направим ось x вертикально вниз, ось y — горизонтально по радиусу цилиндра, а ось z — по оси цилиндра.

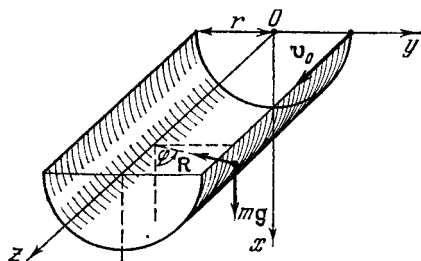


Рис. 5.3

Примем, что в начальный момент положение точки определяется координатами $x = 0$, $y = r$, $z = 0$. Положим также, что начальная скорость направлена параллельно оси цилиндра и равна v_0 . Это значит, что в начальный момент $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = v_0$.

На материальную точку действуют сила тяжести mg и реакция R , направленная по радиусу. Уравнение связи (цилиндрической поверхности) имеет вид

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Подставим $F_x = mg$, $F_y = F_z = 0$, $\partial f/\partial x = 2x$, $\partial f/\partial y = 2y$ и $\partial f/\partial z = 0$ в уравнения (5.15). В результате получим

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (5.17)$$

Из третьего уравнения системы (5.17) после интегрирования и использования начальных условий получим $z = v_0 t$, т. е. расстояние от начальной плоскости xy растет пропорционально времени.

Умножая первое уравнение системы (5.17) на y , второе уравнение — на x и вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgy.$$

Умножая теперь первое уравнение системы (5.17) на x и складывая его со вторым уравнением, умноженным на y , будем иметь

$$m(\ddot{x}x + \ddot{y}y) = mgx + 2\lambda(x^2 + y^2). \quad (5.18)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Так как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r\dot{\varphi} \sin \varphi, & \dot{y} &= r\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \ddot{x} &= -r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, & \ddot{y} &= r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,\end{aligned}$$

то уравнения (5.17) и (5.18) примут вид $m r^2 \ddot{\varphi} = -m g r \sin \varphi$, или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0 \quad (5.19)$$

и

$$-m r^2 \dot{\varphi}^2 = m g r \cos \varphi + 2 \lambda r^2. \quad (5.20)$$

Записав уравнение (5.19) в виде

$$\dot{\varphi} d\varphi = -\frac{g}{r} \sin \varphi d\varphi,$$

после интегрирования получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r} \cos \varphi + c.$$

Так как $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$, то $c = 0$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r} \cos \varphi. \quad (5.21)$$

Из этого уравнения видно, что при выбранных начальных условиях движение будет происходить в области, где $\cos \varphi > 0$, т. е. при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Подставляя выражение (5.21) в уравнение (5.20), будем иметь

$$\lambda = -\frac{3mg}{2r} \cos \varphi.$$

В соответствии с формулами (5.14) получаем

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -3mg \cos^2 \varphi, \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -3mg \sin \varphi \cos \varphi, \quad R_z = 0.$$

Модуль реакции равен $R = 3mg \cos \varphi$. Реакция равна нулю при $\varphi = \pm \pi/2$. Максимальное значение реакции будет при $\varphi = 0$ и равно $R = 3mg$.

Для определения закона изменения угла φ нужно проинтегрировать уравнение (5.19). Это будет сделано в § 5.5.

§ 5.4. Движение точки по гладкой неподвижной кривой

При движении материальной точки по кривой уравнения связей имеют вид

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad (5.22)$$

где $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$ — уравнения поверхностей, линия пересечения которых является траекторией точки (рис. 5.4).

В этом случае в уравнении (5.3) реакцию R следует рассматривать как сумму реакций, т. е.

$$R = R_1 + R_2, \quad (5.23)$$

где R_1 и R_2 — реакции, заменяющие действие соответственно первой и второй связи, уравнения которых имеют вид (5.22). Поэтому дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$m\ddot{x} = F_x + R_{1x} + R_{2x}, \quad m\ddot{y} = F_y + R_{1y} + R_{2y}, \quad m\ddot{z} = F_z + R_{1z} + R_{2z}. \quad (5.24)$$

Эти уравнения содержат девять неизвестных: три координаты и шесть проекций реакций.

Присоединяя к уравнениям (5.24) два уравнения связи (5.22) и условия идеальностей связей

$$\frac{R_{1x}}{\partial f_1 / \partial x} = \frac{R_{1y}}{\partial f_1 / \partial y} = \frac{R_{1z}}{\partial f_1 / \partial z} \quad (5.25)$$

и

$$\frac{R_{2x}}{\partial f_2 / \partial x} = \frac{R_{2y}}{\partial f_2 / \partial y} = \frac{R_{2z}}{\partial f_2 / \partial z}, \quad (5.26)$$

получим девять уравнений с девятью неизвестными. Из этих уравнений можно

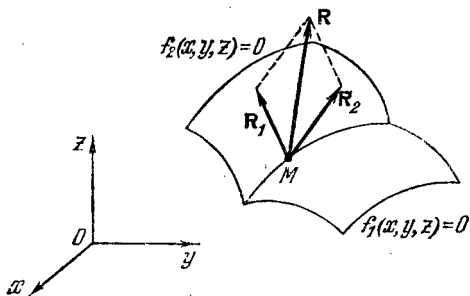


Рис. 5.4

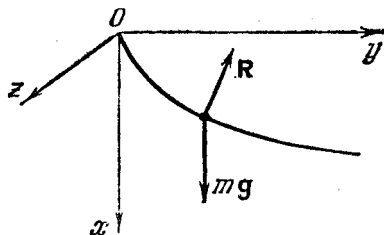


Рис. 5.5

исключить проекции реакций. Для этого отношения в выражениях (5.25) и (5.26) соответственно обозначим через λ_1 и λ_2 и получим

$$R_{1x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad R_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad R_{1z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad (5.27)$$

$$R_{2x} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad R_{2y} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad R_{2z} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \quad (5.28)$$

Следовательно, уравнения (5.24) примут следующий вид:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad (5.29)$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Система (5.29) совместно с уравнениями связи (5.22) образует систему пяти уравнений с пятью неизвестными x, y, z, λ_1 и λ_2 .

Реакции R_1 и R_2 определяются формулами

$$R_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} i + \frac{\partial f_1}{\partial y} j + \frac{\partial f_1}{\partial z} k \right) = \lambda_1 \text{grad } f_1,$$

$$R_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} i + \frac{\partial f_2}{\partial y} j + \frac{\partial f_2}{\partial z} k \right) = \lambda_2 \text{grad } f_2.$$

Модули этих реакций равны

$$R_1 = |\lambda_1| \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^2}, \quad (5.30)$$

$$R_2 = |\lambda_2| \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)^2}. \quad (5.31)$$

Задача 5.2. По проволоке, имеющей форму параболы, движется колечко; уравнения связи (параболы) имеют вид (рис. 5.5)

$$f_1(x, y, z) = 2y - x^2 = 0, \quad f_2(x, y, z) = z = 0. \quad (5.32)$$

Найти реакцию связи при нулевых начальных условиях.

Подставляя $\partial f_1/\partial x = -2x$, $\partial f_1/\partial y = 2$, $\partial f_1/\partial z = 0$, $\partial f_2/\partial x = 0$, $\partial f_2/\partial y = 0$, $\partial f_2/\partial z = 1$ в уравнения (5.29), получим

$$m\ddot{x} = mg - 2\lambda_1 x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda_1, \quad m\ddot{z} = \lambda_2. \quad (5.33)$$

Из второго уравнения связи имеем $\ddot{z} = 0$ и, следовательно, $\lambda_2 = 0$.

Умножая теперь второе уравнение на x и складывая его с первым уравнением, получим

$$\ddot{x} + x\ddot{y} = g. \quad (5.34)$$

Как согласно уравнениям (5.32) $y = \frac{1}{2}x^2$, то

$$\dot{y} = x\dot{x} \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 + x\ddot{x}.$$

Подставим полученное выражение $\ddot{y}$ в уравнение (5.34):

$$\ddot{x}(1 + x^2) + x\dot{x}^2 = g.$$

Используя равенство $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x}$, найдем

$$(x\dot{x}^2 - g)dx + \dot{x}(1 + x^2)d\dot{x} = 0.$$

Это уравнение в полных дифференциалах, и его решение имеет вид

$$\dot{x}^2(1 + x^2) - 2gx = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

При нулевых начальных условиях ($x = y = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ при $t = 0$) получаем, что $C = 0$ и, следовательно,

$$\dot{x}^2(1 + x^2) - 2gx = 0,$$

и

$$\dot{x}^2 = \frac{2gx}{1 + x^2}. \quad (5.35)$$

Дифференцировав выражение (5.35) по времени, найдем

$$2\dot{x}\ddot{x} = \frac{2g(1 + x^2) - 2gx \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} \dot{x},$$

куда

$$\ddot{x} = \frac{g(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Учитывая, что $\ddot{y} = \dot{x}^2 + x\ddot{x}$, получим

$$\ddot{y} = \frac{gx(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Тогда на основании второго уравнения системы (5.33) имеем

$$\lambda_1 = \frac{mg}{2} \frac{x(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Конечно, это же выражение можно получить и из первого уравнения системы (5.33). На основании формул (5.27) можно выразить проекции реакций через абсциссу колесика:

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -mg \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad R_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = mg \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Найдем скорость колесика в зависимости от его абсциссы. Так как $\dot{y} = x\dot{x}$ и учитывая $\dot{x} > 0$, имеем

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1+x^2},$$

или, принимая во внимание равенство (5.35),

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Этот результат можно было получить и сразу, применяя теорему об изменении кинетической энергии. Действительно, так как работа реакции, направленной по нормали к кривой, равна нулю, то

$$mv^2/2 = mgx \quad \text{и} \quad v = \sqrt{2gx}.$$

Рассмотренный пример показывает, что нахождение реакций с помощью уравнений Лагранжа первого рода (уравнений (5.29)) приводит к громоздким выкладкам. Поэтому этот метод и не нашел широкого практического применения. В следующем параграфе будет показано, как эту задачу можно решить значительно короче.

§ 5.5. Естественные уравнения движения.

Математический маятник

При изучении несвободного движения материальной точки по неподвижной кривой иногда удобно использовать уравнение (5.3) в проекциях на оси естественного трехгранника (глава I, § 1.3).

Эти уравнения имеют вид

$$m\omega_\tau = F_\tau + R_\tau, \quad m\omega_n = F_n + R_n, \quad m\omega_b = F_b + R_b.$$

Подставляя сюда проекции ускорения

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0,$$

получим

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau + R_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \quad (5.36)$$

Уравнения (5.36) называются *естественными уравнениями движения*. Из третьего уравнения следует, что бинормальная составляющая реакции определяется статически через бинормальную составляющую активной силы и от закона движения точки не зависит.

При заданных активных силах и известных уравнениях связи уравнения (5.36) позволяют определить закон движения точки и реакции связей. Заметим, что между проекциями реакции R_τ , R_n , R_b обычно существует простая связь.

При движении точки по шероховатой кривой проекция R_τ представляет собой силу трения скольжения. Модуль силы трения скольжения равен

$$|R_\tau| = f \sqrt{R_n^2 + R_b^2},$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Сила трения скольжения всегда направлена противоположно скорости, следовательно,

$$R_{\tau} = -f \sqrt{R_n^2 + R_b^2} \frac{v_{\tau}}{v}.$$

Если движение происходит по идеально гладкой кривой, то $\lambda_{\tau} = 0$ и естественные уравнения движения принимают вид

$$m \frac{dv_{\tau}}{dt} = F_{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \quad (5.37)$$

Отметим, что в этом случае первое уравнение служит для определения закона движения, а второе и третье — для определения реакции связи.

При движении точки по плоской, неподвижной шероховатой ривой уравнения (5.36) запишутся в виде

$$m \frac{dv_{\tau}}{dt} = F_{\tau} + R_{\tau} = F_{\tau} - f \sqrt{R_n^2 + R_b^2} \frac{v_{\tau}}{v}, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_n + R_n. \quad (5.38)$$

Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, второе уравнение истемы (5.38) можно записать следующим образом (см. рис. 5.5):

$$mv^2/\rho = R - mg \sin \alpha,$$

де α — угол, образуемый касательной к параболе с осью x .

Исходя из уравнения параболы $y = 1/2 x^2$, имеем

$$y' = x = \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.39)$$

тсюда

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (5.40)$$

Из курса высшей математики известно, что радиус кривизны кривой находится по формуле

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

читывая соотношение (5.39), получим

$$\rho = (1+x^2)^{3/2}.$$

ак как $v = \sqrt{2gx}$, то

$$R = \frac{mv^2}{\rho} + mg \sin \alpha = m \frac{2gx}{(1+x^2)^{3/2}} + mg \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = mg \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

ледовательно,

$$R_x = -mg \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad R_y = mg \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Применим теперь уравнения (5.38) для изучения движения математического маятника.

Математическим маятником называется материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Практически это

можно, например, осуществить, подвесив материальную точку к невесомой нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. При этом начальная скорость подвешенной точки должна располагаться в вертикальной плоскости перпендикулярно к радиусу.

Положение точки будем определять углом φ , образованным нитью с вертикалью (рис. 5.6). Если m — масса точки, то действующая на точку сила тяжести равна mg . Пусть длина нити равна l .

Так как

$$v_\tau = l\dot{\varphi}, \quad F_\tau = -mg \sin \varphi, \quad F_n = -mg \cos \varphi,$$

то уравнения (5.37) будут иметь вид

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi, \quad ml\dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi + R_n;$$

при этом учтено, что реакция направлена вдоль нити и, следовательно, $R_\tau = 0$.

Перепишем эти уравнения в следующей форме:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (5.41)$$

$$R_n = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi. \quad (5.42)$$

Рис. 5.6

Уравнение (5.41) служит для определения закона движения маятника, а уравнение (5.42) — для определения реакции нити.

Пусть в начальный момент ($t = 0$) нить отклонена от вертикали на угол $\varphi = \varphi_0$ и отпущена с начальной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Определим реакцию в зависимости от угла φ , а также и закон движения точки $\varphi = \varphi(t)$.

Согласно уравнению (5.42) для определения R_n в зависимости от угла φ нужно выразить величину $\dot{\varphi}^2$ через этот угол.

Представив $\dot{\varphi}$ в уравнении (5.41) в виде

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi},$$

получим

$$\frac{1}{2} l d\dot{\varphi}^2 = -g \sin \varphi d\varphi.$$

Вспоминая, что при $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, можем записать так:

$$\frac{1}{2} l \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\dot{\varphi}^2 = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi,$$

откуда

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0) + l\dot{\varphi}_0^2. \quad (5.43)$$

*) Этот результат можно получить короче, используя теорему об изменении кинетической энергии (см. § 5.6).

Подставляя этот результат в уравнение (5.42), получим

$$R_n = ml\dot{\varphi}_0^2 + mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

Пусть $v_0 = l\dot{\varphi}_0$ — начальная скорость точки; тогда

$$R_n = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0). \quad (5.44)$$

В частности, формула (5.44) позволяет найти угол $\varphi = \varphi_1$, при котором для заданных начальных условий связь перестает быть удерживающей (нить сомнется). Это произойдет, если $R_n = 0$:

$$\frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \varphi_1 - 2 \cos \varphi_0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{3} \left(2 \cos \varphi_0 - \frac{v_0^2}{gl} \right).$$

Если потребовать, чтобы связь была удерживающей вплоть до значения $\varphi_1 = \pi$, то начальная скорость должна равняться

$$v_0 = \sqrt{(3 + 2 \cos \varphi_0)gl};$$

при этом маятник будет совершать круговое движение. В частности, при $\varphi_0 = 0$ получим

$$v_0 = \sqrt{5gl}.$$

Если начальная скорость равна нулю, то $\dot{\varphi}_0 = 0$ и формула (5.43) примет вид

$$l\ddot{\varphi}^2 = 2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (5.45)$$

Следовательно, во все время движения должны выполняться неравенства $\cos \varphi \geq \cos \varphi_0$ и $\varphi \leq \varphi_0$.

Перейдем к определению закона движения маятника. Вводя обозначение $k^2 = g/l$, перепишем уравнение (5.41) в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Рассмотрим сначала случай малых отклонений, когда можно принять $\sin \varphi \approx \varphi$. В этом случае дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$$

совпадает по форме с дифференциальным уравнением свободных линейных колебаний. Следовательно, угол φ меняется по гармоническому закону

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt.$$

Период малых колебаний маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (5.46)$$

т. е. при малых углах отклонения период не зависит от начального отклонения φ_0 (колебания маятника *изохронны*).

Теперь найдем период колебаний маятника при любых углах отклонения φ . Рассмотрим случай, когда колебания начинаются вследствие начального отклонения φ_0 , причем начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ равна нулю.

Из уравнения (5.43) следует

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

При возрастании угла φ здесь должен быть взят знак «плюс», а при обратном движении — знак «минус».

При указанных начальных условиях движение начинается от значения $\varphi = \varphi_0$ в сторону уменьшения угла φ . В течение первого полупериода скорость отрицательна и в последнем выражении должен быть взят знак «минус». Если длительность полупериода обозначить через t_1 , то из выражения для скорости следует равенство

$$\int_0^{t_1} dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}};$$

отсюда находим

$$t_1 = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}.$$

При обратном движении, т. е. при изменении угла φ от значения $-\varphi_0$ до значения φ_0 , скорость $\dot{\varphi} > 0$ и, значит,

$$\int_0^{t_2} dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}},$$

где t_2 — время движения.

Отсюда

$$t_2 = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}.$$

Период колебаний T равен

$$T = t_1 + t_2 = 2 \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Входящий сюда интеграл не относится к числу элементарных. Преобразуем его следующим образом. Так как

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 (\varphi/2),$$

то

$$T = \frac{2}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) / \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}.$$

едем переменную ψ :

$$\sin \psi = \frac{\sin (\varphi/2)}{\sin (\varphi_0/2)}.$$

гда

$$d\varphi = \frac{2 \sin (\varphi_0/2) \cos \psi d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 (\varphi_0/2) \sin^2 \psi}}$$

следовательно,

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 (\varphi_0/2) \sin^2 \psi}}. \quad (5.47)$$

интеграл

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 (\varphi_0/2) \sin^2 \psi}}$$

зывается *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Значения этого интеграла зависят только от начального угла φ_0 и могут быть найдены в таблицах специальных функций.

Приближенное значение K при достаточно малых значениях φ_0 можно найти тем разложением подынтегрального выражения в ряд

$$\left(1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi + \dots$$

Ограничиваясь двумя написанными членами, получим

$$K \approx \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi\right) d\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

следовательно,

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Если можно принять $\sin (\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2$, то

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right). \quad (5.48)$$

Формулы (5.46) и (5.48) для периода колебаний различаются множителем $+ \varphi_0^2/16$. Значение этой поправки зависит от начального угла φ_0 и приведено следующей таблице:

10°	20°	40°	60°	90°
1,0019	1,0076	1,0304	1,0684	1,1539

Рассмотрим задачу о движении точки по шероховатой кривой.

Задача 5.3. Лыжник спускается с горы, причем его траекторию можно принять за окружность радиуса r (рис. 5.7). Коэффициент трения скольжения равен f . Определить скорость лыжника в точке B , если в начальной точке A его скорость равнялась нулю.

Так как в данном примере нормальная реакция $R_n > 0$ и $v_t = v$, то уравнения (5.38) будут иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg \cos \varphi - f R_n, \quad \frac{mv^2}{r} = -mg \sin \varphi + R_n. \quad (5.49)$$

Для исключения реакции умножим второе уравнение на f и сложим с первым уравнением:

$$m \frac{dv}{dt} + f \frac{mv^2}{r} = mg (\cos \varphi - f \sin \varphi).$$

Учитывая, что $v = r\dot{\varphi}$, имеем

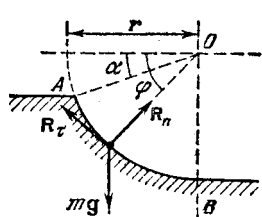


Рис. 5.7

но так как

$$r \frac{d\dot{\varphi}}{dt} + r\dot{\varphi}^2 = g (\cos \varphi - f \sin \varphi),$$

то

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\varphi}^2)}{d\varphi},$$

$$\frac{d(\dot{\varphi}^2)}{d\varphi} + 2f\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r} (\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (5.50)$$

Уравнение (5.50) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\dot{\varphi}^2$.

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} + 2f\dot{\varphi}^2 = 0$$

имеет вид

$$\dot{\varphi}_1^2 = C e^{-2f\varphi}, \quad (5.51)$$

где C — постоянная интегрирования.

Частное решение уравнения (5.50) будем разыскивать в виде

$$\dot{\varphi}_2^2 = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (5.52)$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Для их определения, подставим выражение (5.52) в дифференциальное уравнение (5.50); тогда получим

$$(2fA + B) \cos \varphi + (2fB - A) \sin \varphi = \frac{2g}{r} \cos \varphi - \frac{2g}{r} f \sin \varphi.$$

Для тождественного удовлетворения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в обеих частях равенства были соответственно равны друг другу. Это позволяет получить два уравнения относительно неизвестных A и B :

$$2A + B = \frac{2g}{r}, \quad -A + 2fB = -\frac{2gf}{r}.$$

Отсюда

$$A = \frac{6gf}{r(1+4f^2)}, \quad B = \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{6gf}{r(1+4f^2)} \cos \varphi + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)} \sin \varphi. \quad (5.53)$$

Складывая решения (5.51) и (5.53), получим общее решение дифференциального уравнения (5.50):

$$\dot{\varphi}^2 = Ce^{-2f\varphi} + \frac{6gf}{r(1+4f^2)} \cos \varphi + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)} \sin \varphi. \quad (5.54)$$

По условию задачи $\dot{\varphi} = 0$ при $\varphi = \alpha$, следовательно,

$$Ce^{-2f\alpha} + \frac{6gf}{r(1+4f^2)} \cos \alpha + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)} \sin \alpha = 0.$$

Отсюда находим постоянную

$$C = -\frac{2g}{r(1+4f^2)} e^{2f\alpha} [3f \cos \alpha + (1-2f^2) \sin \alpha].$$

Подставляя полученное выражение в формулу (5.54) и учитывая, что $v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2$, окончательно получаем следующую зависимость v^2 от угла φ :

$$v^2 = -\frac{2gr}{1+4f^2} e^{2f(\alpha-\varphi)} [3f \cos \alpha + (1-2f^2) \sin \alpha] + \frac{2gr}{1+4f^2} [3f \cos \varphi + (1-2f^2) \sin \varphi]. \quad (5.55)$$

Нормальная составляющая реакции R_n равна

$$R_n = \frac{mv^2}{r} + mg \sin \varphi = -\frac{2mg}{1+4f^2} e^{-2f(\varphi-\alpha)} [3f \cos \alpha + (1-2f^2) \sin \alpha] + \frac{2mg}{1+4f^2} [3f \cos \varphi + (1-2f^2) \sin \varphi] + mg \sin \varphi. \quad (5.56)$$

В последний момент рассматриваемого интервала движения, т. е. при $\varphi = \pi/2$, получим

$$v^2 = -\frac{2gr}{1+4f^2} e^{-2f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} [3f \cos \alpha + (1-2f^2) \sin \alpha] + \frac{2gr}{1+4f^2} (1-2f^2), \quad (5.57)$$

$$R_n = -\frac{2mg}{1+4f^2} e^{-2f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} [3f \cos \alpha + (1-2f^2) \sin \alpha] + \frac{2mg}{1+4f^2} (1-2f^2) + mg. \quad (5.58)$$

Если трением пренебречь и принять $f = 0$, то по формулам (5.57) и (5.58) найдем

$$v^2 = 2gr(1 - \sin \alpha), \quad R_n = mg(3 - 2 \sin \alpha).$$

§ 5.6. Теорема об изменении кинетической энергии для несвободного движения

Пользуясь принципом освобожденности, запишем соотношение 3.40) для случая несвободного движения в виде

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.59)$$

где $\mathbf{R}$ — реакция связи.

Результат (5.59) формулируется следующим образом: *элементарное изменение кинетической энергии при несвободном движении равно элементарной работе как активных сил, так и реакции связи.*

Но при наличии идеальной стационарной связи работа реакции на перемещении точки равна нулю, и теорема об изменении кинетической энергии для несвободного движения имеет тот же вид, что и для свободного движения.

Если же связь идеальная, но нестационарная, то вектор перемещения $d\mathbf{r}$ может быть не перпендикулярен к реакции $\mathbf{R}$. В этом случае реакция направлена перпендикулярно к вектору относительной скорости. Поэтому при нестационарных связях работу реакции следует учитывать.

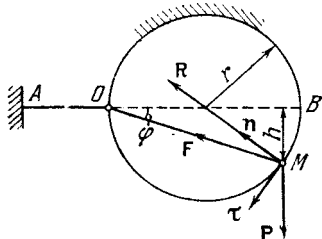


Рис. 5.8

Задача 5.4. Тяжелое кольцо M массы m может скользить без трения по дуге окружности радиуса r , расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA , проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закрепленная в точке A .

Дано, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо M находится в точке O , а коэффициент жесткости нити равен c (рис. 5.8).

В начальный момент кольцо находится в точке B и имеет скорость, равную нулю. Определить давление N , производимое кольцом на окружность. На кольцо действуют сила $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, сила натяжения нити $\mathbf{F}$ и реакция $\mathbf{R}$. Выразим модуль силы F через угол φ (см. рис. 5.8). По условию задачи $F = c \cdot OM$ (OM — удлинение упругой нити). Так как $OM = 2r \cos \varphi$, то

$$F = 2cr \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$F_n = 2cr \cos^2 \varphi, \quad P_n = -P \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi \right) = -P \sin 2\varphi.$$

Второе уравнение системы (5.36) в данном случае имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = P_n + F_n + R_n,$$

т. е.

$$\frac{mv^2}{r} = -P \sin 2\varphi + 2cr \cos^2 \varphi + R_n. \quad (5.60)$$

Используем теорему об изменении кинетической энергии для нахождения скорости v , принимая во внимание, что начальная скорость кольца $v_0 = 0$:

$$\frac{mv^2}{2} = A_P + A_F + A_R, \quad (5.61)$$

где A_P , A_F , A_R — соответственно работа сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$. По условию задачи связь стационарная и идеальная, следовательно, $A_R = 0$. Для определения A_P заметим, что $h = r \sin 2\varphi$. Значит,

$$A_P = Ph = Pr \sin 2\varphi. \quad (5.62)$$

Далее находим

$$A_F = \frac{c\lambda_n^2}{2} - \frac{c\lambda_k^2}{2},$$

где λ_n и λ_k — удлинения нити при положении кольца в точках B и M .

По условию задачи длина нити в нерастянутом положении равна OA , следовательно, $\lambda_n = 2r$, $\lambda_k = OM = 2r \cos \varphi$. Поэтому

$$A_F = 2cr^2 (1 - \cos^2 \varphi) = 2cr^2 \sin^2 \varphi. \quad (5.63)$$

С помощью выражений (5.62) и (5.63) преобразуем соотношение (5.61) к виду

$$\frac{mv^2}{2} = Pr \sin 2\varphi + 2cr^2 \sin^2 \varphi.$$

Подставляя найденное значение mv^2 в выражение (5.60), найдем нормальную реакцию R_n :

$$R_n = 3P \sin 2\varphi + cr (1 - 3 \cos 2\varphi)$$

и, следовательно, так как $R = -N$,

$$N_n = -2mg - cr - 3 (mg + cr) \cos 2\varphi.$$

§ 5.7. Метод кинетостатики для точки (принцип Даламбера)

Наряду с рассмотренными методами изучения несвободного движения точки удобным для решения первой задачи динамики несвободной точки является метод кинетостатики. Особенно удобен этот способ, когда требуется определить реакцию связи при заданных законе движения точки и активных силах.

Содержание этого метода заключается в следующем. Перепишем уравнение (5.3) в виде

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + (-m\mathbf{w}) = 0. \quad (5.64)$$

Введя обозначение

$$-m\mathbf{w} = \mathbf{J}, \quad (5.65)$$

получим

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0. \quad (5.66)$$

Вектор $\mathbf{J}$, равный по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленный противоположно вектору ускорения, называется силой инерции.

Равенство (5.66) представляет собой уравнение движения материальной точки, записанное в форме условия равновесия сил. В этом и заключается существо метода кинетостатики.

На основании уравнения (5.66) можно утверждать, что в каждый момент движения сумма активной силы, реакции связей и силы инерции равна нулю. При этом следует иметь в виду, что к материальной точке приложены только силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$, т. е. активная сила и реакция. Сила же инерции к точке не приложена. Поэтому на уравнение (5.66) нельзя смотреть как на условие равновесия активной силы, реакции и силы инерции.

Метод кинетостатики является лишь формальным приемом сведения уравнения динамики к уравнению статики, однако при решении практических задач такой прием может обладать рядом достоинств.

Реакция связи в соответствии с уравнением (5.66) равна

$$R = -(F + J).$$

§ 5.8. Задачи на применение метода кинетостатики

Задача 5.5. Самолет, двигаясь в вертикальной плоскости, выходит из пикирующего полета на горизонтальный полет по окружности радиуса r (рис. 5.9). Скорость самолета в момент выхода на горизонтальный полет максимальна и равна v . Определить, каким должен быть радиус r , чтобы реакция связи, действующая на летчика, была в n раз больше нормального веса летчика (число n называется перегрузкой).

На летчика, находящегося в самолете, действует сила притяжения к Земле Q и реакция R . Нормальное ускорение самолета (и летчика) равно v^2/r и направлено к центру окружности. Сила инерции, равная $Qv^2/(gr)$, направлена по радиусу окружности в сторону, противоположную нормальному ускорению.

Запишем уравнение (5.66) в проекции на вертикаль в точке выхода самолета:

$$R - Q - \frac{Qv^2}{gr} = 0.$$

По условию задачи $R = nQ$, следовательно,

$$nQ - Q - \frac{Qv^2}{gr} = 0.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{v^2}{g(n-1)}.$$

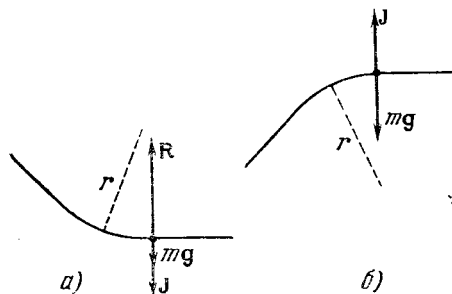


Рис. 5.9

Если, например, $v = 900 \text{ км/ч} = 250 \text{ м/с}$, $n = 5$, то

$$r = \frac{250^2}{9,81 \cdot (5-1)} \approx 1600 \text{ м}.$$

В этом случае давление тела летчика на сиденье в пять раз больше его нормального веса, и летчик будет чувствовать себя так, как если бы его вес возрос в пять раз.

Любопытен другой частный случай, относящийся к условиям, имитирующим ощущение невесомости. Для этого нужно, чтобы реакция сиденья равнялась нулю; при этом давление летчика на сиденье также равно нулю. Здесь следует принять $n = 0$ и тогда по полученной выше формуле найдем

$$r = -v^2/g.$$

Знак «минус» означает, что траектория полета должна иметь выпуклость сверху, как это показано на рис. 5.9, б.

Задача 5.6. Летчик на самолете выполняет правильный вираж со скоростью v . Угол крена равен γ . Определить радиус виража r .

Правильным виражом называется полет самолета без скольжения по дуге окружности в горизонтальной плоскости с неизменным углом крена.

Будем рассматривать самолет как материальную точку, к которой приложены следующие силы: сила притяжения к Земле P , подъемная сила F , сила тяги Φ и сила лобового сопротивления Q (рис. 5.10). Согласно (5.66) будем иметь

$$P + F + \Phi + Q + J = 0. \quad (5.67)$$

Ускорение центра тяжести самолета $\omega_n = v^2/r$, а модуль силы инерции $J = Pv^2/(gr)$.

В проекциях на оси координат уравнение (5.67) дает

$$-\frac{Pv^2}{gr} + F \sin \gamma = 0, \quad -P + F \cos \gamma = 0, \quad \Phi - Q = 0. \quad (5.68)$$

Из последнего уравнения следует, что при выполнении правильного выража $D = Q$, т. е. сила тяги уравновешивается силой лобового сопротивления. Из

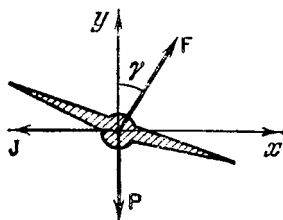


Рис. 5.10

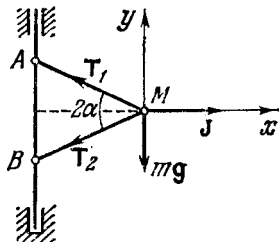


Рис. 5.11

второго уравнения можно найти, что сила притяжения к Земле уравновешивается вертикальной составляющей подъемной силы:

$$P = F \cos \gamma.$$

Из первого уравнения определяется радиус выража

$$r = \frac{Pv^2}{gF \sin \gamma} = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \gamma}.$$

Если будет нарушено какое-нибудь из равенств (5.68), то правильное выражение танет неосуществимым (возникает скольжение, а также снижение или подъем самолета). Следует иметь в виду, что данному углу крена γ соответствует определенная скорость полета (она определяет подъемную силу).

Задача 5.7. Шарнирно-стержневая система (рис. 5.11) вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω . Стержни MA и MB считать невесомыми (имеющими длину l каждый). Определить усилия в стержнях, если в точке M находится сосредоточенная масса m и угол $\angle AMB = 2\alpha$.

Ускорение массы m равно $\omega^2 l \cos \alpha$ и направлено по горизонтали к оси вращения. Соответственно сила инерции равна $J = m\omega^2 l \cos \alpha$ и направлена по горизонтали от оси вращения. Обозначая через T_1 и T_2 усилия в стержнях, напишем уравнение (5.66):

$$mg + T_1 + T_2 + J = 0.$$

В проекциях на оси x и y получим

$$-T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha + m\omega^2 l \cos \alpha = 0,$$

$$-mg + T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha = 0.$$

Решив эту систему, найдем

$$T_1 = \frac{m\omega^2 l}{2} + \frac{mg}{2 \sin \alpha}, \quad T_2 = \frac{m\omega^2 l}{2} - \frac{mg}{2 \sin \alpha}.$$

Заметим, что при малых значениях угловой скорости ω усилие T_2 отрицательно, т. е. нижний стержень сжат (силой тяжести). При $\omega = \sqrt{g/(l \sin \alpha)}$ усилие T_2 равно нулю, а при больших значениях ω оно положительно.

§ 5.9. Явление невесомости

В этом параграфе рассматривается явление, которое по установившейся традиции, хотя и не вполне точно, называется *невесомостью*.

Предположим, что платформа A движется по вертикали с заданным ускорением w , причем на платформе установлены пружинные весы, на которых лежит груз C . Стрелка весов фиксирует силу, с которой

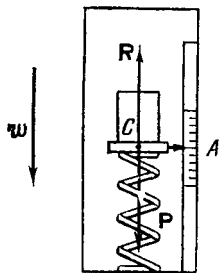


Рис. 5.12

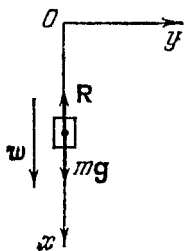


Рис. 5.13

груз давит на весы (рис. 5.12). Когда платформа находится в покое (или движется равномерно), стрелка весов устанавливается против деления шкалы, соответствующего силе тяжести груза C . В дальнейшем это показание пружинных весов будем называть весом груза. Выясним, какое давление оказывает груз на весы, если платформа движется с ускорением w .

На груз действуют две силы: сила тяжести mg и реакция R (рис. 5.13) со стороны чашки весов. Уравнение движения груза имеет вид

$$R + mg = mw, \quad (5.69)$$

или, в проекции на вертикальную ось x (положительное направление — вниз),

$$mw = mg - R.$$

Следовательно, реакция равна

$$R = m(g - w). \quad (5.70)$$

Ей равна по модулю направленная вниз сила давления R' , с которой тело действует на весы.

Понятно, что деформация пружины под действием силы R' окажется меньше, чем в состоянии покоя. Стрелка весов остановится против деления шкалы, на котором мы прочтем новый «вес» груза; он окажется равным $mg - mw$. Его отношение к весу mg составляет $n = 1 - w/g$ (n — коэффициент перегрузки). Конечно, сила притяжения тела к Земле не изменилась, так как гравитационное поле Земли не зависит от того, движется ли груз или находится в покое. Изменились лишь силы взаимодействия между грузом и чашкой весов.

Продолжим опыт далее и будем увеличивать ускорение ω . При этом реакция, как это видно из (5.70), уменьшается. Наконец, при $\omega = g$ она станет равной нулю и стрелка весов установится на нулевом делении шкалы. Взаимодействие между грузом и чашкой весов исчезает. Говорят, что наступила «невесомость».

Если ускорение ω превзойдет значение g , то груз оторвется от весов и будет свободно падать. Платформа, опускающаяся с большим ускорением, будет удаляться от падающего груза. Если же груз связан с весами, то платформа будет увлекать его вниз, причем перегрузка станет отрицательной и сила действия груза на весы окажется направленной вверх.

Вернемся к состоянию невесомости, когда перегрузка равна нулю. Это состояние приводит к непривычным ощущениям у человека, находящегося в лифте, в космическом корабле или самолете. Он действительно перестает чувствовать вес своего тела.

Для того чтобы объяснить смысл этого явления, разберемся в причине ощущения веса (или весомости), к которому привыкает человек в обычных земных условиях.

В обычных условиях между отдельными частями человеческого тела существуют силы взаимодействия. Рассмотрим, например, силы, действующие на голень стоящего на полу человека (рис. 5.14).



Рис. 5.14

На голень, кроме силы тяжести P , действует реакция N верхней части тела, приложенная в коленном суставе, и реакция пола R (речь идет о весьма схематичном представлении действительных сил).

Силы P , N и R уравновешены. Аналогичная картина распределения усилий может быть изображена и для всех других мысленно выделенных частей тела.

Таким образом, массовые силы (силы тяжести) и поверхностные силы (реакция пола), приложенные к сложной системе материальных точек — человеческому телу, вызывают появление многочисленных внутренних сил.

Именно появление этих внутренних сил (натяжение мышц, реакции суставов, давление на нервные окончания вестибулярного аппарата и т. п.) вызывает у человека *ощущение веса*. Человек привыкает к ощущению всей этой совокупности сил и в земных условиях не чувствует ее.

Предположим теперь, что человек опускается вниз с ускорением g . Как было установлено выше, при этом исчезает реакция со стороны опоры, т. е. $R = 0$.

Следовательно, уравнение движения голени примет вид

$$P + N = \frac{P}{g} g. \quad (5.71)$$

Отсюда получим $N = 0$. Рассматривая уравнения движения других мысленно выделенных частей человеческого тела, придем к ана-

логичному результату: *исчезают внутренние силы взаимодействия между отдельными частями тела, что вызывает необычные ощущения, не имеющие места в земных условиях.* Так, у человека, находящегося в состоянии невесомости, возникает прилив крови к голове, и обычно требуется несколько дней, чтобы летчик-космонавт привык к этому явлению и сравнительно безболезненно переносил его.

Оттолкнувшись от опоры, человек приобретает дополнительную скорость и движется до тех пор, пока не натолкнется на преграду.

Конечно, внутренние силы могут возникнуть и в таких условиях. Однако их происхождение на этот раз не связано с тяготением. Человек может, например, взять в руки эспандер и растягивать его обеими руками. При этом обязательно возникнут внутренние силы — силы натяжения многочисленных мышц, которые будут возрастать по мере растяжения пружины эспандера.

На каплю воды (рис. 5.15) продолжают действовать силы поверхностного молекулярного натяжения, и они не дадут ей разрушиться.

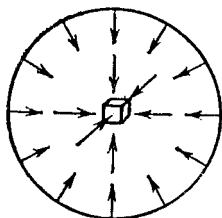


Рис. 5.15

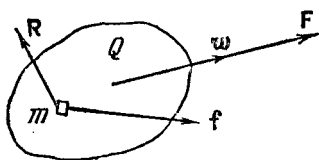


Рис. 5.16

Эти внутренние силы вызовут появление давления в капле, т. е. опять возникнут силы взаимодействия между отдельными материальными точками механической системы.

Перейдем теперь к выяснению более общих условий, при которых возможно появление невесомости. Представим себе, что тело Q (рис. 5.16) движется поступательно с ускорением w относительно инерциальной системы координат в поле массовых сил, т. е. сил, действующих на все точки тела. Обозначим через F равнодействующую этих массовых сил, действующих на точки тела.

Выделим в теле Q произвольный объем массы m . На этот объем будет действовать две силы: внешняя сила f и равнодействующая всех внутренних сил R .

Будем считать, что *тело Q находится в невесомости, если равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к любому элементу, выделенному в теле, равна нулю.*

Найдем, каким условиям должны удовлетворять силы f , чтобы тело находилось в состоянии невесомости.

Напишем уравнения движения для всего тела и для выделенной части тела Q массы m . Обозначим массу всего тела через M :

$$Mw = F, \quad mw = f + R. \quad (5.72)$$

Используя условие невесомости $R = 0$, из (5.72) получим

$$\frac{F}{M} = \frac{f}{m}. \quad (5.73)$$

Условие (5.73) должно выполняться для любой массы m , выделенной в теле. Это условие является также и достаточным. Используя (5.73), получаем из уравнения (5.72)

$$R = mw - f = m \left(\frac{F}{M} - \frac{f}{m} \right) = 0.$$

Равенство (5.73) имеет простой смысл.

Для обеспечения невесомости необходимо и достаточно, чтобы внешние массовые силы, приложенные к выделенным элементам тела, были пропорциональны массам этих элементов, а их направление для всех элементов было одинаковым.

Этими замечательными качествами как раз и обладают *силы гравитации*. Они пропорциональны массам тех тел, на которые действуют, и если тела несоизмеримо малы по сравнению с размерами Земли, то направления сил можно считать для всех точек одинаковыми.

Таким образом, *тело будет находиться в состоянии невесомости, если равнодействующая всех внутренних сил, обусловленных наличием сил гравитации, приложенных к любому элементу, выделенному в теле, равна нулю.*

Напомним, что равнодействующая внутренних сил, обусловленных наличием других причин (не силами гравитации), может быть при этом и не равна нулю.

При полете стабилизированного космического аппарата с выключенным двигателем и вне пределов атмосферы его экипаж находится в условиях, близких к невесомости. Условие (5.73), если пренебречь размерами тел, для него практически выполняется, так как единственные активные силы, действующие на аппарат и его экипаж, — гравитационные. Разумеется, это условие соблюдается только при поступательном движении аппарата (иначе ускорения всех точек нельзя считать одинаковыми и условие (5.73) оказывается несправедливым).

Предположим теперь, что включен реактивный двигатель, развивающий силу тяги Φ (рис. 5.17). Тогда к космическому кораблю, кроме силы тяготения F , приложена еще сила Φ . В то же время активные силы, действующие на тело P , не изменились. Нарушено условие невесомости (5.73).

При включении двигателей все тела, не закрепленные в кабине, переместятся в сторону, противоположную вектору тяги. Опять возникнет ощущение «весомости», хотя при этом сила тяготения может и не действовать.

Такое же явление возникает и при торможении аппарата в атмосфере. Сила сопротивления S (рис. 5.18) действует только на

аппарат и приложена к его поверхности. К человеку, находящемуся в кабине, она не приложена, поэтому нарушается условие невесомости — космонавт отбрасывает в сторону, противоположную S , т. е. в направлении вектора скорости v (рис. 5.18).

Следует отметить, что на участке торможения реакция R может достигать значительной величины. Ее можно определить, исходя из обычного уравнения движения (5.72), если только пренебречь силой тяготения f , которая мала по сравнению с R . Из (5.72) имеем

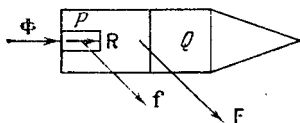


Рис. 5.17

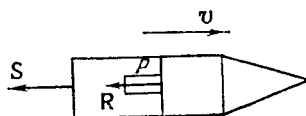


Рис. 5.18

$R = mw$. Отношение R к весу mg (перегрузка) здесь окажется равным $n = mw/(mg) = w/g$. Перегрузки нередко достигают значений порядка $8 \div 10$.

В предыдущей главе было показано, что при маневре самолета в вертикальной плоскости может быть достигнута нулевая перегрузка или невесомость. Для этого должен быть осуществлен маневр типа «горки» с радиусом кривизны траектории в верхней точке, определяемым по формуле

$$\rho = v^2/g. \quad (5.74)$$

Например, при $v = 720 \text{ км/ч} = 200 \text{ м/с}$ радиус кривизны должен быть равен $4,08 \text{ км}$.

В окрестности этой точки условие невесомости строго не будет соблюдаться, тем не менее состояние человека окажется близким к невесомости. Такой имитацией явления невесомости пользуются при тренировках летчиков-космонавтов.

Совершенно аналогичное явление может наступить и в земных условиях — при движении автомобиля по мосту. В средней точке моста при соответствующей скорости $v = \sqrt{g\rho}$, определяемой в зависимости от кривизны пролета по формуле (5.74), наступит мгновенное состояние невесомости.

Состояние, довольно близкое к невесомости, испытывает парашютист при свободном падении с большой высоты с нераскрытым парашютом. Пока сопротивление атмосферы мало (в начальный период и на большой высоте), ускорение падения близко к g и поэтому состояние парашютиста мало отличается от невесомости.

Более длительное состояние невесомости можно получить при помощи так называемого «баллистического броска» самолета. Для этого самолет должен выдерживать строго скорость и траекторию полета тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте.

Глава VI

**ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ****§ 6.1. Переносная и кориолисова силы инерции**

В предыдущих главах мы опирались на основное уравнение динамики точки (второй закон Ньютона), которое справедливо только в инерциальных системах отсчета. Напомним, что инерциальной называется такая система отсчета, в которой справедлив принцип инерции (первый закон Ньютона). Во многих случаях задачи динамики сводятся к исследованию движения в той или иной неинерциальной системе. В сущности, неинерциальной является и привычная для нас система отсчета, связанная с Землей. Впрочем, только весьма тонкие опыты (например, наблюдения за отклонением падающих тел к востоку, за вращением плоскости качания маятника) могут обнаружить неинерциальность геоцентрической системы отсчета. В большинстве приложений систему координат, жестко связанную с Землей, можно считать инерциальной.

Значительно заметнее проявляется неинерциальность систем отсчета, связанных с ускоренно движущимися техническими объектами — от ускоренно поднимающегося лифта до искусственного спутника или космического корабля, совершающего взлет с Земли. Если связать систему отсчета с кораблем, автомобилем или самолетом, движущимися по криволинейным путям или тем более с ротором быстроходной турбины, то неинерциальность окажется столь значительной, что основное уравнение динамики окажется неверным. Значит, окажутся неверными и многочисленные следствия из этого уравнения, доказанные в предыдущих главах.

Настоящая глава посвящена изучению движения материальной точки в неинерциальных системах отсчета. Ниже будет дан метод составления уравнений движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета. В этом, собственно, и состоит основная задача, которую предстоит решить.

Главная идея, которая положена в основу вывода соответствующих динамических уравнений, связана с задачей чисто кинематического характера, которую мы рассматривали в кинематике: по заданному относительному движению точки и при известном движении подвижной системы координат определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки. Мы воспользуемся этими результатами для того, чтобы научиться составлять уравнения движения материальной точки в неинерциальных системах отсчета.

Предположим, что известны силы, которые действуют на материальную точку, а также задано движение подвижной системы координат относительно некоторой инерциальной системы (в дальнейшем будем называть ее неподвижной системой).

Поставим своей задачей найти относительное движение точки, т. е. движение в неинерциальной системе отсчета.

Напомним, что задать движение подвижной системы координат можно при помощи трех координат ее начала (рис. 6.1): $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ и трех углов Эйлера: ψ , θ , φ .

В неподвижной системе справедливо основное уравнение динамики

$$mw = F + R. \quad (6.1)$$

Здесь, как и выше, F — равнодействующая всех активных сил, R — равнодействующая реакций связей, m — масса материальной точки, w — ее ускорение.

Используем теперь теорему Кориолиса (том I, § 13.3) и выразим абсолютное ускорение через относительное, переносное и кориолисово:

$$w = w_r + w_e + w_c. \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1), получим

$$mw_r + mw_e + mw_c = F + R.$$

Переносим часть членов в правую часть, придем к векторному уравнению

$$mw_r = F + R + (-mw_e) + (-mw_c). \quad (6.3)$$

Отсюда ясно, что произведение массы материальной точки на ее относительное ускорение не равно сумме равнодействующей всех активных сил, действующих на нее, и равнодействующей реакций связей.

Последние два вектора в правой части уравнения (6.3) должен ввести наблюдатель, находящийся в неинерциальной системе отсчета, для того, чтобы в этой системе отсчета основное уравнение динамики сохранило форму второго закона Ньютона.

Векторы $-mw_e$ и $-mw_c$ называются «силами инерции». Первый называется *переносной силой инерции*, второй — *кориолисовой силой инерции*. Будем в дальнейшем пользоваться обозначениями

$$J_e = -mw_e, \quad J_c = -mw_c = -2m(\omega \times v_r), \quad (6.4)$$

где ω — угловая скорость переносного движения.

Таким образом, уравнение (6.3) приобретает привычную форму основного уравнения динамики (второго закона Ньютона):

$$mw_r = F + R + J_e + J_c. \quad (6.5)$$

Мы получили следующее правило:

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе координат в форме второго закона Ньютона, необходимо к действующим на точку актив-

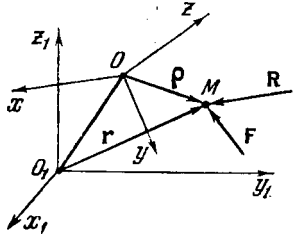


Рис. 6.1

чим силам и реакциям связей присоединить переносную и кориолисову силы инерции.

В отличие от обычных сил, например силы тяготения, модуль и направление которых зависят только от характера взаимодействия тел и не зависят от выбора неинерциальной системы отсчета, переносная и кориолисова силы инерции определяются выбором неинерциальной системы координат.

В общей теории относительности согласно принципу эквивалентности, выдвинутому А. Эйнштейном, природа сил тяготения и массовых сил инерции в относительном движении тождественна.

Остановимся на способах определения сил инерции и напомним правила вычисления соответствующих ускорений.

Для того чтобы найти переносное ускорение, необходимо знать движение подвижной системы координат. Формула для определения переносного ускорения имеет вид (том I, § 13.3)

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (6.6)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловая скорость и угловое ускорение подвижной системы координат, $\mathbf{w}_0$ — ускорение ее начала и $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки в подвижной системе координат (см. рис. 6.1).

Во всех случаях вычисления переносного ускорения и переносной силы инерции полезно представлять переносное ускорение как абсолютное ускорение точки, закрепленной в подвижной системе координат.

Для определения кориолисова ускорения каждый раз необходимо перемножать два вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ (рис. 6.2), так как

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

При составлении уравнений движения материальной точки относительно поступательно движущихся систем отсчета следует иметь в виду, что кориолисовы силы инерции отсутствуют ($\boldsymbol{\omega} = 0$), а переносные силы инерции не зависят от положения, занимаемого точкой в подвижной системе отсчета.

Задача 6.1. Точка M неподвижна в неподвижной системе отсчета x_1Oy_1 (рис. 6.3) и находится на расстоянии OM от ее начала. Система координат xOy вращается равномерно против хода часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Составить уравнение движения точки M в подвижной (вращающейся) системе координат xOy .

Так как точка M неподвижна, то ее абсолютная скорость равна нулю. Переносная скорость $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OM}$. Таким образом,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = 0, \quad \mathbf{v}_r = -\mathbf{v}_e = -\boldsymbol{\omega} \times \overline{OM}.$$

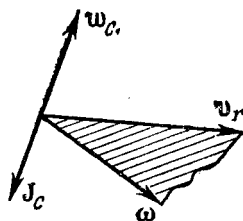


Рис. 6.2

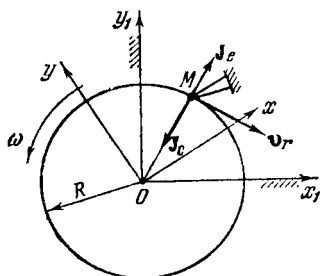


Рис. 6.3

Следовательно, в относительном движении точка движется по окружности с центром в O , но в направлении, противоположном вращению подвижной системы координат. Для наблюдателя она будет двигаться по ходу часовой стрелки. В соответствии с этим изобразим вектор относительно скорости (см. рис. 6.3) $\mathbf{v}_r$.

Переносное ускорение найдем, закрепив мысленно точку в подвижной системе координат. Тогда точка будет вынуждена участвовать во вращательном движении подвижной системы. Поскольку вращение равномерное, то вращательное ускорение равно нулю, и остается только осеостремительное ускорение, равное по величине $\omega_e = \omega^2 R$. Оно направлено к точке O .

Переносная сила инерции $\mathbf{J}_e = -m\omega_e$ направлена в противоположную сторону (от центра); ее часто называют *центробежной силой инерции*. Модуль этой силы $J_e = m\omega^2 R$.

Перейдем теперь к определению кориолисовой силы инерции. Вектор угловой скорости вращения системы xOy направлен перпендикулярно к плоскости рисунка на читателя. Следовательно, векторное произведение $2\omega \times \mathbf{v}_r$ направлено в ту же сторону, что и переносная сила инерции. Однако кориолисова сила инерции противоположна по направлению ω_e и поэтому направлена к центру O . Модуль кориолисовой силы инерции определяется из равенства

$$J_c = 2m |\omega \times \mathbf{v}_r| = 2m\omega v_r \sin(\pi/2) = 2m\omega v_r = 2m\omega^2 R.$$

Таким образом, кориолисова сила инерции оказалась противоположной переносной силе инерции. Равнодействующая этих сил направлена к центру и равна по величине $m\omega^2 R$. Уравнение относительного движения принимает вид $m\mathbf{w}_r = -m\omega^2 \mathbf{R}$, где $\mathbf{R} = \overline{OM}$.

Задача 6.2. Трубка, изогнутая по окружности радиуса R , равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси AB (рис. 6.4).

Внутри трубки находится материальная точка M массы m . Пренебрегая трением, составить дифференциальное уравнение движения материальной точки M в трубке и определить характер этого движения, если в начальный момент точка M , находясь на одной горизонтали с центром трубки, была отпущена без начальной скорости.

Свяжем с трубкой координатные оси $Oxyz$, выбрав начало координат O на оси вращения AB трубки в ее центре. Ось x проведем горизонтально так, чтобы она пересекла трубку, ось y построим перпендикулярно к трубке (на рис. 6.4 ось y не показана — она направлена на читателя), а ось z совместим с осью вращения. Положение точки M будем определять углом φ (см. рис. 6.4).

Выбранная система координат $Oxyz$ является неинерциальной системой отсчета, поэтому движение точки M относительно трубки следует написать в виде уравнения (6.5). Так как на точку действуют сила тяжести mg и нормальная реакция трубки N , то уравнение движения будет

$$m\mathbf{w}_r = mg + N + J_e + J_c.$$

При равномерном вращении трубки переносное ускорение ω_e точки M состоит только из одной осеостремительной составляющей, модуль которой равен $R\omega^2 \sin \varphi$. Следовательно, переносная сила инерции J_e , численно равная $mR\omega^2 \sin \varphi$, направлена перпендикулярно к оси вращения от нее (см. рис. 6.4). Так как относительная скорость $\mathbf{v}_r = R\dot{\varphi} \tau$, то кориолисово ускорение

$$\omega_c = 2R\dot{\varphi} (\omega \times \tau)$$

направлено параллельно оси y . Следовательно, и кориолисова сила инерции

$$J_c = -2mR\dot{\varphi} (\omega \times \tau)$$

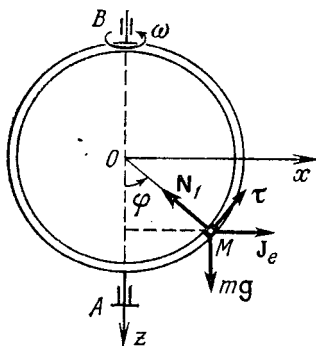


Рис. 6.4

направлена параллельно оси y в сторону, противоположную направлению w_c . Нормальную реакцию N разложим на две составляющие: одну N_1 направим по главной нормали к относительной траектории от M к O , а вторую N_2 — перпендикулярно плоскости трубки (на рис. 6.4 силы J_c и N_2 не показаны).

Уравнение движения теперь можно записать в виде

$$mw_r = mg + N_1 + N_2 + J_e + J_c.$$

Запишем это уравнение движения в проекциях на направление τ , учитывая, что проекция относительного ускорения точки M на касательную τ равна $R\ddot{\varphi}$, а проекции на τ векторов N_1 , N_2 , J_c равны нулю:

$$mR\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi + mR\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

или, после деления на mR ,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi + \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (6.7)$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения точки M внутри вращающейся трубки.

Заметив, что

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (\dot{\varphi}^2),$$

получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (\dot{\varphi}^2) = -\frac{g}{R} \sin \varphi + \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

После интегрирования имеем

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R} \cos \varphi + \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \varphi + C.$$

По условию задачи $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$. Значит, $C = -\omega^2/2$ и

$$\dot{\varphi}^2 = \left(2 \frac{g}{R} - \omega^2 \cos \varphi \right) \cos \varphi.$$

Значения угла φ , при которых скорость точки M обращается в нуль, получим из условия

$$\left(2 \frac{g}{R} - \omega^2 \cos \varphi \right) \cos \varphi = 0. \quad (6.8)$$

Рассмотрим два случая.

1. Угловая скорость вращения трубки ω мала и удовлетворяет условию $\omega^2 < 2g/R$.

В этом случае $2g/(R\omega^2) > 1$ и только второй множитель может обратиться в нуль: $\cos \varphi = 0$. Отсюда

$$\varphi_1 = \pi/2, \quad \varphi_3 = -\pi/2$$

(индекс «два» временно пропускаем). Корень φ_1 соответствует начальному положению точки M .

Из выражения (6.7) найдем

$$\ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_1} = -g/R < 0, \quad \ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_3} = g/R > 0.$$

Это означает, что при $\omega^2 < 2g/R$ точка M будет совершать во вращающейся трубке колебания от одной до другой горизонтали.

2. Угловая скорость трубки удовлетворяет условию $\omega^2 > 2g/R$.

В этом случае уравнение (6.8) имеет три корня:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{2g}{R\omega^2}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}.$$

Согласно уравнению (6.7) будем иметь

$$\ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_1} = -\frac{g}{R}, \quad \ddot{\varphi}_{\varphi=\varphi_2} = \frac{g}{R} \sin \varphi_2 > 0.$$

Следовательно, при $\omega^2 > 2g/R$ точка M совершает во вращающейся трубке колебания только в первой четверти от $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \arccos \frac{2g}{R\omega^2}$.

Задача 6.3. Балка AC равномерно вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси AB . Одновременно по балке движется с постоянной относительной скоростью и ползун M массы m (рис. 6.5). Определить изгибающий момент относительно оси вращения, действующий на балку.

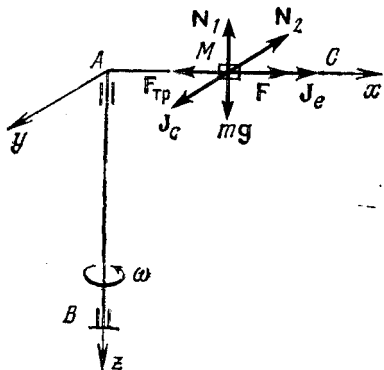


Рис. 6.5

Построим систему координат $Axyz$, жестко связанную с балкой: ось x направим по балке, ось y — горизонтально, перпендикулярно оси x , ось z — по вертикальной оси вращения вниз.

На ползун действуют движущая сила F , сила тяжести mg , сила трения $F_{тр}$, нормальная реакция N балки AC . Эту нормальную реакцию балки разложим на вертикальную N_1 и горизонтальную N_2 составляющие.

Основное уравнение динамики относительного движения (6.5) в нашем случае имеет вид

$$m\mathbf{w}_r = mg + F + F_{тр} + N_1 + N_2 + J_c + J_c.$$

По условию задачи ползун движется равномерно по прямой балке, следовательно, $w_r = 0$,

$$mg + F + F_{тр} + N_1 + N_2 + J_c + J_c = 0.$$

В горизонтальной плоскости балка действует на ползун с силой N_2 . По третьему закону Ньютона ползун действует на балку с силой $-N_2 = J_c$. Эта сила, равная кориолисовой силе инерции J_c , передается на балку, в результате чего создается изгибающий момент $M_z^{изг}$ относительно вертикальной оси z , модуль которого равен $J_c x$, где x — расстояние от оси вращения до ползуна (см. рис. 6.5). Модуль кориолисова ускорения равен $2\omega u$, следовательно, модуль изгибающего момента относительно оси вращения будет

$$M_z^{изг} = 2m\omega u x = 2m\omega u (x_0 + ut),$$

где x_0 — начальное расстояние ползуна от оси вращения.

§ 6.2. Условия относительного покоя

Из основного уравнения (6.5), в частности, вытекают условия относительного покоя. В этом случае относительная скорость и относительное ускорение точки равны нулю ($\mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{w}_r = 0$), следовательно, и кориолисова сила инерции обращается в нуль (так как $\mathbf{v}_r = 0$). Уравнение относительного покоя приобретает вид

$$F + R + J_c = 0. \quad (6.9)$$

Если выполняется условие равновесия (6.9), то отсюда вовсе не следует, что после придания материальной точке начальной

скорости точка будет двигаться равномерно и прямолинейно, как это имеет место в инерциальных системах. Дело в том, что при сообщении точке относительной скорости, *во-первых*, появляется кориолисова сила инерции $J_c = -2m(\omega \times v_r) \neq 0$ и, *во-вторых*, может измениться переносное ускорение (оно зависит от положения точки в подвижной системе отсчета) и, следовательно, изменится переносная сила инерции.

Из уравнения (6.5) можно вывести еще одно следствие. Найдем такие системы координат, в которых выполняется первый закон Ньютона. Для этого достаточно потребовать, чтобы при отсутствии сил точка двигалась равномерно и прямолинейно. Из (6.5) следует, что

$$J_e + J_c = 0. \quad (6.10)$$

Отсюда ясно, что условие (6.10) будет выполняться, если переносная сила инерции в любой точке равна нулю:

$$J_e = -mw_e = 0.$$

Действительно, в этом случае подвижная система отсчета должна двигаться поступательно равномерно и прямолинейно, но тогда ее угловая скорость равна нулю и кориолисова сила инерции также обращается в нуль. Уравнение (6.10) выполняется.

Другими словами, для того чтобы подвижная система координат была инерциальной, достаточно, чтобы ее начало двигалось с постоянной скоростью, а угловая скорость системы все время равнялась нулю: $w_0 = 0$, $\omega = 0$.

В этом случае всегда равны нулю обе силы инерции и основное уравнение (6.5) приобретает вид

$$mw_r = F + R.$$

Следовательно, в этом случае соблюдается и второй закон Ньютона.

Таким образом, если существует хотя бы одна система отсчета, в которой выполняются законы Ньютона, то существует бесчисленное множество таких систем. Все они движутся друг относительно друга поступательно равномерно и прямолинейно.

§ 6.3. Применение уравнений относительного движения и покоя

1. Вращающийся космический аппарат. Создание искусственного поля тяготения. Космонавты недалекого будущего, находясь в продолжительном межпланетном полете, будут испытывать известные трудности физиологического характера, в частности, из-за явления невесомости. Имеются проекты космических кораблей, в которых предполагается использовать вращение вокруг центра масс всего аппарата или его кольцевой кабины для создания искусственного поля тяготения (рис. 6.6).

Определим, с какой угловой скоростью должна вращаться кольцевая кабина, наружный радиус которой R , чтобы имитировать силу земного тяготения. Предполагаем, что аппарат вращается с угловой скоростью ω относительно оси z некоторой инерциальной системы координат и летит с выключенными двигателями.

Тогда во вращающейся кабине на человека, находящегося в относительном покое, действует сила реакции опоры N . Кроме того, необходимо согласно уравнению (6.9) приложить переносную силу инерции J_e . Получим уравнение равновесия

$$N + J_e = 0. \quad (6.11)$$

Здесь J_e — центробежная сила инерции. Если пренебречь размерами человека по сравнению с радиусом R , то

$$J_e = m\omega^2 R. \quad (6.12)$$

Реакция опоры должна быть направлена к оси вращения.

Отсюда ясно, что человека будет прижимать к наружной боковой стенке корабля. Эта стенка станет

для него «полом». На основании выражений (6.11) и (6.12) реакция равна $N = m\omega^2 R$. Потребуем, чтобы эта реакция была равна весу mg в земных условиях: $mg = m\omega^2 R$. Отсюда найдем угловую скорость вращения

$$\omega = \sqrt{g/R}.$$

Пусть, например, наружный радиус кольца $R = 20$ м; тогда $\omega = \sqrt{9,81/20} \approx 0,7$ рад/с, $n = 0,7/(2\pi) \approx 0,11$ об/с. Таким образом, один полный оборот будет совершаться примерно за девять секунд.

2. Измерение ускорений движущихся тел. Для управления движением ракеты на активном участке, самолета, подводной лодки и т. п. необходимо знать положение и скорость какой-либо точки аппарата, а также угловые координаты аппарата. По вектору ускорения некоторой точки аппарата можно путем интегрирования найти скорость, а затем и координаты этой точки.

Рассмотрим принцип действия простейшего измерителя ускорений — акселерометра (рис. 6.7). Допустим, что аппарат поднимается вертикально вверх. Тогда на груз M , укрепленный на пружине, ось которой (ось чувствительности) совпадает с направлением движения аппарата, действуют две силы: сила тяжести P и сила упругости пружины F .

Если аппарат поднимается равномерно, то эти силы взаимно уравновешиваются и стрелка акселерометра устанавливается на делении mg , указывая вес груза M .

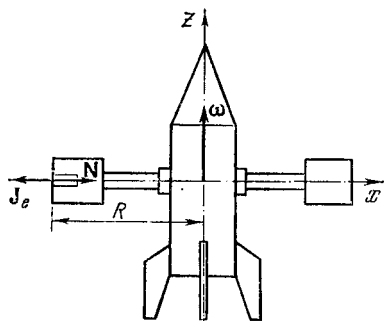


Рис. 6.6

При ускоренном движении, когда ускорение направлено вверх, в уравнение относительного покоя необходимо включить еще переносную силу инерции $\mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}$. Тогда уравнение равновесия согласно (6.9) примет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{F} + \mathbf{J}_e = 0.$$

В проекции на вертикаль z_1 это дает

$$-P + F + (-mw) = 0, \quad F = m(\omega + g).$$

Стрелка установится против соответствующего деления, измеряя силу F . Величину $\omega + g$ называют иногда *кажущимся ускорением*. Шкалу можно градуировать не в масштабе сил, а в масштабе ускорений, так как кажущееся ускорение ω_k пропорционально силе, действующей на пружину:

$$\omega_k = \omega + g = \frac{F}{m}. \quad (6.13)$$

Отсюда ясно, что при непрерывном измерении ω_k *) можно определить из (6.13) ускорение аппарата относительно Земли

$$\omega = \omega_k - g. \quad (6.14)$$

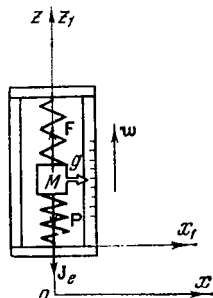


Рис. 6.7

Теперь, чтобы получить текущее значение скорости, нужно проинтегрировать сигнал ω , начиная с момента начала движения:

$$v(t) = \int_0^t [\omega_k(t) - g] dt.$$

Эта операция может выполняться электронным прибором. С помощью второго такого прибора интегрируется скорость и определяется координата z точки крепления акселерометра:

$$z = \int_0^t v(t) dt.$$

Для получения трех координат аппарата, очевидно, необходимо иметь три акселерометра. Их можно расположить по трем взаимно перпендикулярным осям. Измеряя кажущееся ускорение по каждой из осей, определяют затем проекции скорости и координаты движущегося аппарата.

Следует, однако, заметить, что при повороте тела на ось чувствительности акселерометра проектируется только часть ускорения g .

*) Колебаниями массы M пренебрежем.

Для определения проекций этого вектора необходимо знать угловые координаты (например, углы Эйлера) аппарата. Такую информацию могут дать другие бортовые приборы — гироскопы.

3. Размыв берегов рек. Замечено, что в северном полушарии и правые берега рек обрывистые, а левые пологие. Это явление может быть объяснено следующим образом (правило Бэра).

На некоторый объем воды, заключенный между двумя сечениями реки, текущей с юга на север (рис. 6.8), действуют три силы: сила тяжести P , реакция дна Q , реакция берега F . Для записи уравнения динамики в неинерциальной геоцентрической системе координат, которая равномерно вращается с угловой скоростью ω (один оборот в сутки), необходимо ввести в уравнение переносную и кориолисову силы инерции. Тогда согласно (6.5) получим уравнение движения

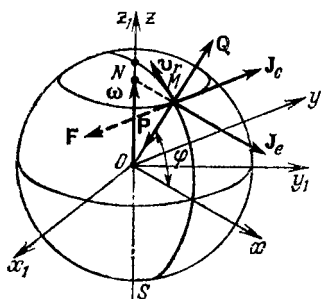


Рис. 6.8

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \quad (6.15)$$

Переносное ускорение направлено к оси вращения Земли. Следовательно, переносная сила инерции направлена в противоположную сторону. Кориолисово ускорение находится по правилу векторного произведения $2\omega \times \mathbf{v}_r$ и поэтому направлено по параллели на запад. Кориолисова сила инерции направлена в противоположную сторону — на восток.

Если спроектировать (6.15) на направленную на запад касательную к параллели, то получим

$$F - J_c = 0. \quad (6.16)$$

Здесь мы воспользовались тем, что относительное ускорение расположено в плоскости меридиана. Оно направлено при равномерном течении к центру Земли.

Из (6.16) получим (см. рис. 6.8)

$$F = 2m\omega v_r \sin \varphi, \quad (6.17)$$

где φ — геоцентрическая широта места (угол между радиусом OM и экваториальной плоскостью).

Итак, реакция берега направлена налево, если смотреть по течению реки. Значит, сила давления воды на берег по третьему закону Ньютона должна быть направлена противоположно, т. е. она действует на правый берег реки.

Заметим, что это правило справедливо для всех рек, текущих в северном полушарии. Это объясняется тем, что в северном полушарии при любом движении точки по поверхности Земли горизонтальная составляющая кориолисова ускорения всегда направлена влево от относительной скорости (см. том I, задачу 13.7).

Пренебрегая малой величиной γ по сравнению с геоцентрической широтой ψ , из первого уравнения получим

$$T \approx F - J_e \cos \psi = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2 \psi = m(g_0 - \omega^2 \rho \cos \psi), \quad (6.19)$$

где ρ — радиус географической параллели.

Силу, равную по модулю и направленную противоположно натяжению T , называют *силой тяжести* и обозначают через mg . Из этого определения следует, что *сила тяжести равна геоцентрической сумме силы притяжения F и силы инерции переносного движения, вызванной вращением Земли*.

Из равенства (6.19) можно найти ускорение силы тяжести на поверхности Земли

$$g = g_0 \left(1 - \frac{\omega^2 \rho}{g_0} \cos \psi \right).$$

Таким образом, g — переменная величина, зависящая от широты места. Наименьшее значение она имеет на экваторе:

$$g = g_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \right) = 9,82 - \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right)^2 6370 \cdot 10^5 = 9,78 \text{ м/с}^2.$$

Из второго уравнения можно найти угол отклонения γ отвесной линии от радиуса Земли, т. е. разность между географической и геоцентрической широтами:

$$\sin \gamma \approx \gamma \approx \frac{\omega^2 R \sin 2\psi}{2g_0}.$$

Например, на широте Ленинграда ($\psi = 60^\circ$) $\gamma = \omega^2 R \sqrt{3}/(4g_0) = \sqrt{3}/1160 \approx 5'$. Максимальное отклонение наблюдается на широте $\psi = 45^\circ$ ($\gamma \approx 6'$).

Переносной силой инерции, вызванной вращением Земли, объясняется также и сжатие Земли. Земля имеет форму геоида, т. е. тела, ограниченного поверхностью, в каждой точке которой потенциальная энергия силы тяжести (равнодействующая силы притяжения и силы инерции переносного движения Земли при ее вращении вокруг своей оси) имеет постоянную величину. Такой поверхностью будет поверхность океанов и морей в равновесном положении. Поверхность геоида заменяют обычно эллипсоидом вращения, сжатие которого по данным измерений равно

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,3}.$$

Как правило, сжатием Земли пренебрегают и считают, что сила тяжести mg направлена вдоль радиуса к центру Земли.

5. **Маятник Фуко.** В 1851 году Фуко продемонстрировал в Пантеоне опыт с маятником, подвешенным на длинной нити. Плоскость качания маятника медленно вращалась в направлении, противоположном вращению Земли.

Для объяснения эффекта Фуко воспользуемся уравнениями относительного движения в системе координат, связанной с Землей. Направим ось z по линии отвеса в данной точке Земли вверх, ось x — перпендикулярно к оси z на восток и ось y — по меридиану на север.

Проекции угловой скорости Земли на оси прямоугольной системы координат выражаются через географическую широту места φ (рис. 6.10):

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \cos \varphi, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi.$$

Уравнение движения маятника имеет вид

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \quad (6.20)$$

Здесь $\mathbf{T}$ — реакция нити, $\mathbf{F}$ — сила притяжения Земли, $\mathbf{J}_c$ — кориолисова сила инерции, $\mathbf{J}_e$ — переносная сила инерции.

Выше было показано, что сила притяжения $\mathbf{F}$, складываясь с переносной силой инерции $\mathbf{J}_e$, дает силу тяжести mg , направленную параллельно линии отвеса, т. е. параллельно оси z .

Введем цилиндрическую систему координат (рис. 6.11) и будем определять положение маятника при помощи трех координат: ρ , θ и z (см. также т. I, § 9.10). В положении равновесия маятник находится в начале координат.

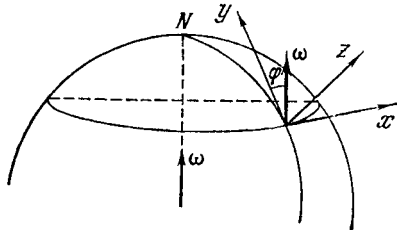


Рис. 6.10

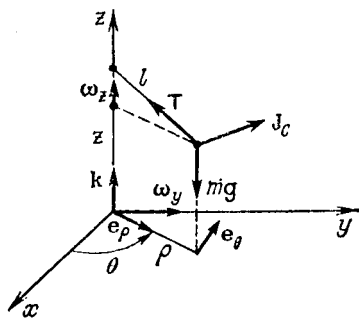


Рис. 6.11

Спроектируем на оси $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{k}$ угловую скорость вращения Земли

$$\omega_\rho = \omega \cos \varphi \sin \theta, \quad \omega_\theta = \omega \cos \varphi \cos \theta, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi.$$

Проекции линейной скорости будут

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho \dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Поэтому кориолисова сила инерции принимает вид

$$\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \omega_\rho & \omega_\theta & \omega_z \\ v_\rho & v_\theta & v_z \end{vmatrix}. \quad (6.21)$$

Реакция нити $\mathbf{T}$ имеет проекции на оси цилиндрической системы, определяемые равенствами

$$T_\rho = -T \frac{\rho}{l}, \quad T_\theta = 0, \quad T_z = T \frac{l-z}{l}. \quad (6.22)$$

Запишем теперь уравнение (6.20) в проекциях на оси e_ρ , e_θ , k . При этом воспользуемся тем, что сумма $F + J_e = mg$ направлена по оси z и, следовательно, проекции ее на e_ρ и e_θ равны нулю. Используя (6.21), получим

$$\begin{aligned} m\omega_\rho &= 2m\omega\dot{\theta}\sin\varphi - 2m\dot{\omega}\cos\varphi\cos\theta - T\frac{\rho}{l}, \\ m\omega_\theta &= 2m\dot{\omega}\cos\varphi\sin\theta - 2m\omega\dot{\rho}\sin\varphi, \\ m\omega_z &= -mg + 2m\omega\dot{\rho}\cos\varphi\cos\theta - 2m\omega\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta + T\frac{l-z}{l}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Заметим, что $z = l - \sqrt{l^2 - \rho^2} = l(1 - \sqrt{1 - \rho^2/l^2})$, а проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат будут

$$\omega_\rho = \ddot{\rho} - \dot{\theta}^2\rho, \quad \omega_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}, \quad \omega_z = \ddot{z}.$$

Уравнения (6.23) содержат три неизвестные функции ρ , θ , T (z выражается через ρ). Интегрирование этой системы в общем виде оказывается довольно сложным. Поэтому мы ограничимся приближенным интегрированием. При отклонениях маятника от вертикали, малых по сравнению с его длиной ($\rho \ll l$), можно считать $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$.

Тогда из второго уравнения получим $\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = -2\omega\dot{\rho}\sin\varphi$, или $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta} + \omega\rho^2\sin\varphi) = 0$. Отсюда следует первый интеграл (интеграл площадей)

$$\rho^2\dot{\theta} + \omega\rho^2\sin\varphi = c.$$

Предположим, что в какой-нибудь момент времени маятник проходил через начало координат; тогда $\rho = 0$ и $c = 0$. Следовательно,

$$\dot{\theta} + \omega\sin\varphi = 0, \quad \dot{\theta} = -\omega\sin\varphi.$$

Отсюда видно, что плоскость качания маятника вращается в сторону, противоположную вращению Земли, но с меньшей угловой скоростью.

6. Отклонение падающих тел к востоку. При падении материальной точки вблизи поверхности Земли на нее действует сила тяготения $F = mg_0$. Присоединяя к ней переносную и кориолисову силы инерции, напишем дифференциальное уравнение относительного движения для свободной материальной точки

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c.$$

Сумму переносной силы инерции и силы тяготения можно заметить силой тяжести $\mathbf{F} + \mathbf{J}_e = mg$, и тогда

$$m\mathbf{w}_r = mg + \mathbf{J}_c.$$

Вектор скорости свободно падающего тела близок к вертикали места. Поэтому кориолисова сила инерции $\mathbf{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ почти

перпендикулярна к плоскости меридиана (рис. 6.12) и направлена на восток. Спроектируем последнее уравнение на ось z , направленную по вертикали вверх, ось x , направленную на восток, и ось y , направленную на север:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2m\omega(\dot{z}\cos\varphi - \omega\dot{y}\sin\varphi), \\ m\ddot{y} &= -2m\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ m\ddot{z} &= -mg + 2m\dot{x}\omega\cos\varphi. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Здесь φ — географическая широта места, g — ускорение силы тяжести на широте φ .

Интегрирование системы проведем сначала для $\omega = 0$. Полагая, что в начальный момент времени $\dot{x}_0(0) = \dot{y}_0(0) = \dot{z}_0(0) = 0$, получим

$$\dot{x}_0(t) \equiv 0, \quad \dot{y}_0(t) \equiv 0, \quad \dot{z}_0(t) = -gt.$$

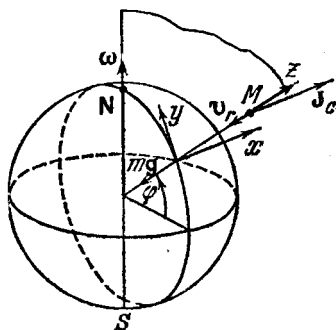


Рис. 6.12

Найдем теперь поправки к этому приближенному решению, полагая $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$, $z = z_0 + z_1$. После подстановки в (6.24) получим

$$\ddot{x}_1 = 2\omega g t \cos\varphi, \quad \ddot{y}_1 = 0, \quad \ddot{z}_1 = 0.$$

Отсюда при нулевых начальных условиях имеем

$$\dot{x}_1 = \omega g t^2 \cos\varphi, \quad x_1 = \frac{\omega g t^3}{3} \cos\varphi, \quad y_1 \equiv 0, \quad z_1 \equiv 0. \quad (6.25)$$

При падении с высоты h время падения связано с t равенством $h = gt^2/2$, $t = (2h/g)^{1/2}$. Полное отклонение на восток получим, подставляя в (6.25) время t :

$$x = \frac{1}{3} \omega g \cos\varphi \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}.$$

§ 6.4. Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении

Все общие теоремы динамики точки сохраняют свою форму и в относительном движении. Не надо только забывать присоединять к разряду действующих на точку сил переносную и кориолисову силы инерции. Некоторое исключение составляет теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении. Покажем, что при ее использовании нет необходимости учитывать кориолисову силу инерции.

Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J}_e - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r). \quad (6.26)$$

Умножим левую и правую части (6.26) скалярно на относительную скорость

$$m\mathbf{v}_r \cdot \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_r + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_r + \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{v}_r - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{v}_r.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как вектор $\mathbf{v}_r$ перпендикулярен к векторному произведению $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$.

Отсюда получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_r^2}{2} \right) = N, \quad (6.27)$$

где N — мощность активных сил, сил реакции и переносной силы инерции. Знак относительного дифференцирования теперь опущен, так как дифференцируется скалярная функция времени.

Обозначив кинетическую энергию относительного движения через T_r , т. е. $T_r = mv_r^2/2$, перепишем (6.27):

$$\frac{dT_r}{dt} = N. \quad (6.28)$$

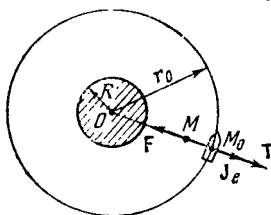


Рис. 6.13

Интегрируя по времени (6.28) от некоторого начального момента времени t_0 до текущего t , получим

$$T_r^{(1)} - T_r^{(0)} = \int_{t_0}^t N dt.$$

Но интеграл, стоящий справа, — работа всех сил при перемещении точки из начального положения в конечное. Таким образом,

$$T_r^{(1)} - T_r^{(0)} = A_{01} = A_{01}^F + A_{01}^R + A_{01}^J.$$

Изменение кинетической энергии в относительном движении равно сумме работ всех действующих сил и переносной силы инерции. В некоторых случаях переносные силы инерции могут быть консервативны (поле однородных сил инерции, поле центробежных сил).

Доставка груза на стационарный спутник. Спутник, движущийся по круговой экваториальной орбите в направлении вращения Земли с периодом, равным одним суткам, называется *стационарным* (рис. 6.13). Такой спутник «висит» над экваториальной точкой Земли. Он может быть использован для решения задач глобальной связи, а также удобен в качестве межпланетной станции.

Ранее в § 4.7 был найден радиус орбиты стационарного спутника. Оказалось, что $r_0 \approx 42\,000$ км. Если теперь из r_0 вычесть радиус Земли, то получим высоту орбиты над поверхностью Земли $H = r_0 - R = 42\,000 - 6371 = 35\,629$ км.

Решим следующую задачу.

Задача 6.4. Какую работу необходимо затратить, чтобы доставить груз с поверхности Земли на стационарный спутник, полагая, что движение ракеты с грузом происходит в экваториальной плоскости?

Свяжем с Землей и спутником вращающуюся систему координат. К грузу следует приложить силу тяготения $\mathbf{F}$, силу инерции $\mathbf{J}_e$, переносного ускорения и силу

тяги T . Будем считать, что в начальный и конечный моменты относительная скорость равна нулю. Тогда на основании теоремы об изменении кинетической энергии в относительном движении можно записать

$$A_{12}^F + A_{12}^J + A_{12}^T = 0,$$

где A_{12}^F — работа силы тяготения, она отрицательна, и A_{12}^J — работа центробежной силы инерции — положительная величина. Отсюда работа силы тяги

$$A_{12}^T = -A_{12}^F - A_{12}^J.$$

Для гравитационных сил потенциальная энергия была вычислена ранее (§ 3.5):

$$P_F = -mgR^2/r.$$

Найдем потенциальную энергию центробежной силы инерции. В условиях задачи (спутник «висит» над Землей, ракета движется в экваториальной плоскости) имеем $J_e = m\omega^2 r$. Эти силы центральные, поэтому их поле консервативно.

Примем в качестве фиксированной точки для вычисления потенциальной энергии центр Земли, тогда, по определению потенциальной энергии,

$$П_J(r) = A_{MO} = \int_r^0 m\omega^2 r \, dr = - \int_0^r m\omega^2 r \, dr = - \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Отсюда работа силы тяги окажется равной

$$\begin{aligned} A_{12}^T &= \left(\frac{mgR^2}{r} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \right)_{r=R} - \left(\frac{mgR^2}{r_0} + \frac{m\omega^2 r_0^2}{2} \right) = \\ &= mRg \left(1 + \frac{\omega^2 R}{2g} \right) - \frac{3mgR^2}{2r_0} = mgR \left(1 + \frac{\omega^2 R}{2g} - \frac{3R}{2r_0} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\omega^2 R/(2g) \approx 1/_{580}$, $3R/(2r_0) \approx 0,226$; следовательно, $A_{12}^T = 0,776mgR$.

Для подъема одного килограмма массы груза потребуется затратить работу $A_{12}^T = 0,776 \cdot 6371 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 49,4 \cdot 10^6$ Дж.

Глава VII

МАТЕРИАЛЬНАЯ СИСТЕМА

§ 7.1. Центр масс

В первой части курса динамики мы изучали законы движения одной материальной точки, находящейся под действием приложенных к ней сил. В практике чаще встречаются более сложные случаи, когда движение одной материальной точки или одного тела нельзя изучать изолированно от движения других материальных точек (тел). Так, например, движение Луны относительно Земли существенным образом зависит от движения Земли относительно Солнца, вращение коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания зависит от движения его поршней и т. п. Эти и многочисленные другие примеры заставляют нас перейти от изучения движения одной материальной точки к изучению движения материальных систем.

В механике под *материальной системой* понимают *совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны*. Твердое тело рассматривается как неизменяемая материальная система с распределенной по объему массой. Эта модель представляет, конечно, некоторую идеализацию твердого тела, так как при этом не учитываются расстояния между молекулами или кристаллами тела. Однако эти расстояния настолько малы по сравнению с размерами самого тела, что предположение о сплошном распределении массы не вносит сколько-нибудь заметных погрешностей в вычисления.

Массой M материальной системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k, \quad (7.1)$$

где m_k — масса материальной точки с номером k , а n — число всех точек системы.

Центром масс или центром инерции материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор $\mathbf{r}$ которой определяется равенством

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k, \quad (7.2)$$

е. точка с декартовыми координатами

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (7.3)$$

В этих формулах $\mathbf{r}_k$ и x_k, y_k, z_k — соответственно радиус-вектор координаты k -й материальной точки.

При непрерывном распределении массы суммы, стоящие в правых частях формул (7.2) и (7.3), переходят в соответствующие интегралы.

Легко видеть, что центр масс твердого тела, находящегося в однородном поле силы тяжести, совпадает с его центром тяжести. Действительно, умножим числитель и знаменатель правой части формулы (7.2) на модуль ускорения силы тяжести g :

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{Mg} \sum_{k=1}^n m_k g \mathbf{r}_k.$$

Учитывая, что произведение Mg равно весу P тела, а $m_k g$ — весу p_k k -й материальной точки, получим

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n p_k \mathbf{r}_k,$$

то совпадает с выражением для радиуса-вектора центра тяжести твердого тела (том I, глава VIII).

В динамике следует говорить о центре масс материальной системы, а не о центре тяжести. При определении центра масс материальной системы можно пользоваться методами, установленными в статике для определения центра тяжести (метод симметрии, метод расчленения, метод отрицательных масс и т. п.). Необходимо отметить, что положение центра масс твердого тела не меняется относительно точек тела. Если же система состоит из перемещающихся друг относительно друга материальных точек, то положение центра масс системы относительно ее точек может изменяться.

§ 7.2. Внешние и внутренние силы

В курсе статики мы делили все силы, приложенные к твердому телу или к системе тел, на активные силы и реакции связей, понимая под первыми силы, не зависящие от связей. Там же было показано, что силы можно разделить и на две другие группы, а именно на внешние и внутренние.

Напомним еще раз определения внешних и внутренних сил. Силы, действующие на точки системы, называются *внешними*, если они вызваны действием тел, не входящих в систему. Силы, вызванные взаимодействием точек, входящих в систему, называются *внутренними*. Обозначаются внешние силы верхним индексом « e », а внутренние — верхним индексом « i » (от начальных букв французских слов *extérieur* — внешний и *intérieur* — внутренний):

$\mathbf{F}^e$ — внешняя сила, $\mathbf{F}^i$ — внутренняя сила.

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим силы, приложенные к движущемуся прямолинейно по горизонтальной дороге автомобилю (рис. 7.1). Прежде всего на автомобиль действует сила тяжести G . Эта сила внешняя, так как она вызвана действием Земли — тела, не входящего в рассматриваемую материальную систему (автомобиль). Она одновременно является и активной, так как не зависит от связей. К активным внешним силам относится также аэродинамическая сила сопротивления воздуха F_C ; эта сила непосредственно не зависит от связей и вызвана сопротивлением окружающей среды. Применим теперь принцип освобожденности и заменим действие связи (дороги) ее реакциями N_1 , N_2 , F_1 , F_2 . Первые две силы пред-

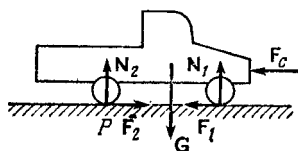


Рис. 7.1

ставляют равнодействующие нормальных составляющих реакций дороги к передним и задним колесам, а силы F_1 и F_2 — равнодействующие сил трения, вызванных вращением ведомых и ведущих колес (см. раздел Статика, стр. 95). Силы N_1 , N_2 , F_1 и F_2 — внешние, так как они обусловлены действием дороги, которая в систему не входит. Таким образом, к автомобилю приложены шесть внешних сил: G , F_C , N_1 , N_2 , F_1 , F_2 .

Сила давления газов на поршни двигателя, силы давления поршней на шатуны и шатунов на кривошпинны коленчатого вала, силы трения на осях колес и т. п. — это все внутренние силы системы.



Рис. 7.2

Отметим, что в некоторых случаях внешние силы появляются за счет действия внутренних сил. Так, например, внешняя сила трения скольжения F_2 между задними колесами автомобиля и дорогой (см. рис. 7.1) не может возникнуть без внутренних сил, передающих вращающий момент на ведущие колеса. Точно так же внешние силы трения F_1 и F_2 между подошвами ботинок и полом не могут возникнуть без внутренних мускульных усилий человека (на рис. 7.2 показаны две внешние силы, действующие на идущего вправо человека).

Если выключить двигатель автомобиля или если человек не будет создавать мускульных усилий, то соответствующие внешние силы трения обратятся в нуль.

Рассмотрим еще один пример. Если пренебречь силами притяжения звезд, то нашу Солнечную систему можно рассматривать как изолированную механическую систему, на которую не действуют никакие внешние силы. Силы притяжения между отдельными телами всей Солнечной системы являются активными внутренними силами.

§ 7.3. Свойства внутренних сил

Из третьего закона Ньютона следует, что внутренние силы входят парно, причем, если точка B действует на точку A с силой F'_{12} , а точка A действует на точку B с силой F'_{21} , то эти силы равны по

сдвинуто и направлены по одной прямой в противоположные стороны (см. 7.3):

$$\mathbf{F}_2^i = -\mathbf{F}_1^i. \quad (7.4)$$

Из этого следуют два свойства внутренних сил системы.

Первое свойство. *Геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^i = 0, \quad (7.5)$$

где $\mathbf{F}_k^i$ — равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке номером k .

Второе свойство. *Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства (главный момент внутренних сил) равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i = 0. \quad (7.6)$$

Для системы, состоящей из двух точек A и B с силами взаимодействия $\mathbf{F}_1^i$ и $\mathbf{F}_2^i$ (см. 7.3), это свойство очевидно. Действительно, так как $\mathbf{F}_2^i = -\mathbf{F}_1^i$, а плечи относительно точки O у обеих сил равны, то моменты этих сил численно равны, но направлены в противоположные стороны. Доказательство первого и второго свойств для любого количества внутренних сил следует теперь из того, что они входят в систему попарно.

Равенство нулю главного вектора и главного момента внутренних сил материальной системы не означает, что эти силы уравновешены. Это объясняется тем, что внутренние силы приложены к разным материальным точкам, которые в общем случае могут перемещаться друг относительно друга. Хорошим примером, иллюстрирующим сделанное замечание, может служить Солнечная система, планеты которой и их спутники совершают весьма сложные движения под действием одних внутренних сил.

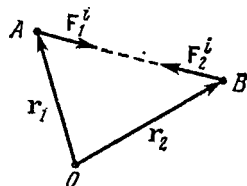


Рис. 7.3

§ 7.4. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Применим принцип освобожденности и заменим связи их реакциями. Обозначим через $\mathbf{F}_k^e$ и $\mathbf{F}_k^i$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к k -й материальной точке. Тогда каждую точку можно рассматривать как свободную, движущуюся под дей-

ствием сил $\mathbf{F}_k^e$ и $\mathbf{F}_k^i$. Применим к каждой точке второй закон Ньютона:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_1^i, \dots, m_n \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = \mathbf{F}_n^e + \mathbf{F}_n^i, \quad (7.7)$$

или, в проекциях на неподвижные оси декартовых координат,

$$m_k \ddot{x}_k = X_k^e + X_k^i, \quad m_k \ddot{y}_k = Y_k^e + Y_k^i, \quad m_k \ddot{z}_k = Z_k^e + Z_k^i \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Векторные уравнения (7.7) или эквивалентные им скалярные уравнения (7.8) представляют дифференциальные уравнения материальных точек всей системы. Число дифференциальных уравнений в векторной форме равно n , а число дифференциальных уравнений в координатной форме равно $3n$. Следовательно, общее решение зависит от $6n$ произвольных скалярных постоянных. Конечно, если все точки движутся параллельно одной плоскости или одной прямой, то число дифференциальных уравнений (7.8) в первом случае будет равно $2n$, а во втором n .

Проиллюстрируем методы составления дифференциальных уравнений (7.8) на элементарном примере.

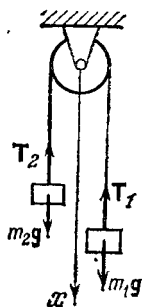


Рис. 7.4

Задача 7.1. Два тела массы m_1 и m_2 связаны между собой тросом, перекинутым через блок (рис. 7.4). Пренебрегая силами трения, а также массой троса и блока, определить закон движения грузов и натяжения троса.

Система состоит из двух материальных точек (оба тела перемещаются поступательно), движущихся параллельно одной прямой. Следовательно, мы будем иметь два дифференциальных уравнения движения в проекциях на ось x . Предположим, что правый груз движется с ускорением $\ddot{x}_1$ вниз; тогда левый груз будет двигаться вверх с ускорением $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Мысленно освободимся от связи (троса) и заменим ее реакциями T_1 и T_2 . Считая теперь оба тела свободными, составим дифференциальные уравнения движения в проекции на ось x :

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1, \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T_2.$$

Учтем теперь, что $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ и $T_1 = T_2 = T$ (так как силами трения, а также массой троса и блока пренебрегаем; строго последнее равенство будет доказано в примере § 19.1); тогда получим

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T, \quad -m_2 \ddot{x}_1 = m_2 g - T.$$

Решая эти уравнения относительно ускорения $\ddot{x}_1$ и натяжения T троса, найдем

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Из этого решения видно, что правый груз движется равноускоренно вниз, если $m_1 > m_2$ и вверх, если $m_1 < m_2$. При $m_1 = m_2$ оба груза находятся в покое или движутся равномерно (это зависит от начальных условий). Отметим, что натяжение троса при $m_1 \neq m_2$ не равно силе тяжести соответствующего груза.

§ 7.5. Задача двух тел

В качестве второго примера на составление дифференциальных уравнений движения материальной системы рассмотрим следующую задачу. Две свободные материальные точки M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 соответственно движутся под действием сил ньютоновского тяготения. Определить закон движения системы.

В небесной механике и теории движения искусственных спутников Земли эта задача является одной из основных (она называется задачей двух тел). В главе IV решалась аналогичная задача в предположении, что тело, обладающее большей массой, неподвижно (теория движения больших планет — это Солнце, в теории движения искусственных спутников — небесное тело, вокруг которого движется искусственный спутник).

Введем инерциальную систему отсчета $Oxyz$ и обозначим через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиус-векторы соответствующих точек, а через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M_2 относительно M_1 . Из

рис. 7.5 видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (7.9)$$

По закону всемирного тяготения имеем

$$F_1 = F_2 = f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (7.10)$$

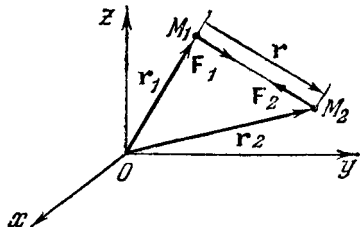


Рис. 7.5

где f — гравитационная постоянная.

Направление силы F_1 определяется единичным вектором $\mathbf{r}/r$, силы F_2 — единичным вектором $-\mathbf{r}/r$ (обе силы направлены по одной прямой в противоположные стороны).

Дифференциальные уравнения движения в векторной форме (7.7) для рассматриваемой системы будут таковы:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7.11)$$

где вектор $\mathbf{r}$ определен равенством (7.9), а $r = |\mathbf{r}|$. Умножим первое уравнение (7.11) на m_2 , а второе на m_1 и после этого вычтем почленно второе уравнение первое:

$$m_1 m_2 \left(\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \right) = -f \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

и, сокращая на m_1 и преобразовывая левую часть,

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -f \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Учтем теперь равенство (7.9):

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (7.12)$$

Из этого уравнения видно, что материальная точка M_2 движется относительно точки M_1 как относительно неподвижного центра масса которого равна не m_1 , а $M = m_1 + m_2$. Следовательно, пренебрежение движением точки большей массы вносит в расчет погрешность, относительное значение которой определяется равенством

$$\varepsilon = \frac{M - m_1}{m_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Если m_2 — масса искусственного спутника, а m_1 — масса Земли, то относительную погрешность ε можно только вычислить, но не измерить (так как мы не располагаем столь чувствительными приборами). Если же m_2 — масса планеты, а m_1 — масса Солнца, то погрешность для Земли равна 0,000003, а для Юпитера (самой большой планеты Солнечной системы) — 0,001.

Перейдем теперь к исследованию движения двух тел относительно их центра масс. Для этого прежде всего покажем, что центр масс S рассматриваемой системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Действительно, сложив почленно оба уравнения (7.11), получим

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 0,$$

или, интегрируя,

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = M\mathbf{A}, \quad (7.13)$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный постоянный вектор (скалярный множитель $M = m_1 + m_2$ введен для удобства).

Воспользуемся формулой (7.2) и найдем радиус-вектор центра масс системы

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2).$$

Дифференцируя по времени, получим скорость $\mathbf{v}_C$ центра масс S :

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right).$$

Сравнивая с первым интегралом уравнения (7.13), найдем

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{A}.$$

Пусть при $t = 0$ $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{0C}$. Тогда последнее равенство примет вид

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{0C},$$

т. е. центр масс находится в покое (если в начальный момент $\mathbf{v}_C = 0$) или движется равномерно и прямолинейно (если в начальный момент $\mathbf{v}_C \neq 0$ *).

*) Установленное здесь свойство центра масс в задаче двух тел является частным случаем теоремы о движении центра масс материальной системы см. § 8.4 следующей главы.

Очевидно, что центр масс C рассматриваемых точек M_1 и M_2 находится на прямой, соединяющей эти точки (рис. 7.6). Будем теперь откладывать радиусы-векторы r_1 и r_2 точек M_1 и M_2 от точки C . Тогда дифференциальные уравнения движения (7.11) примут вид

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{r_1}{r_1}, \quad m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{r_2}{r_2}. \quad (7.14)$$

Центр масс делит расстояние между точками M_1 и M_2 на части, обратно пропорциональные массам:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

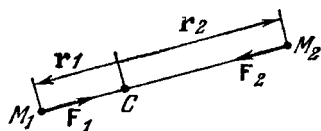


Рис. 7.6

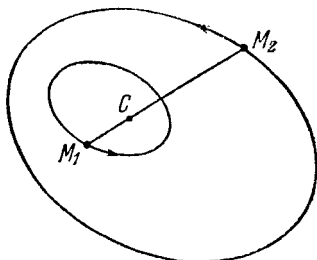


Рис. 7.7

Составим из этой пропорции две производные пропорции:

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \frac{r_1 + r_2}{r_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}.$$

Отсюда

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1, \quad r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2.$$

Внесем эти равенства в дифференциальные уравнения движения (7.14):

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -f \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 m_2}{r_1^3} \frac{r_1}{r_1}, \quad m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -f \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 m_2}{r_2^3} \frac{r_2}{r_2}. \quad (7.15)$$

Из этих уравнений видно, что движение каждой точки относительно их центра масс происходит как движение вокруг неподвижного притягивающего центра с массой $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ для первой точки и $\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ — для второй. При соответствующих начальных условиях обе точки движутся по эллипсам, имеющим общий фокус C , совпадающий с центром масс системы (рис. 7.7). В частности, траектория планеты представляет эллипс, фокус которого совпадает не с центром Солнца, а с центром масс системы Солнце — планета (влиянием других небесных тел пренебрегаем). Эта точка отстоит от центра Солнца на небольшом расстоянии, которым в первом приближении можно пренебречь.

§ 7.6. Общие замечания

На первый взгляд может показаться, что изучение движения материальной системы можно свести к составлению и анализу дифференциальных уравнений (7.7) или (7.8). В принципе эта точка зрения справедлива, но практически реализовать такой путь исследования удастся только для систем, состоящих из небольшого числа материальных точек (свободных или имеющих сравнительно простые связи, как это имело место в рассмотренных примерах). Сложность использования дифференциальных уравнений движения (7.7) или (7.8) состоит прежде всего в том, что, как правило, мы не знаем аналитического выражения внутренних сил и реакций связей.

В теоретической механике разработаны методы, которые позволяют обойти основные трудности, возникающие при использовании дифференциальных уравнений движения материальной системы в форме (7.7) и (7.8). С этой целью прежде всего вводятся некоторые векторные и скалярные величины, характеризующие в какой-то степени движение всей материальной системы (так называемые *меры движения*). К ним относятся вектор количества и вектор момента количеств движения, а также кинетическая энергия материальной системы. Зная характер изменения этих величин, можно составить частичное, а иногда и полное представление о движении материальной системы.

Глава VIII

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 8.1. Количество движения материальной системы

В конце предыдущей главы было отмечено, что о движении материальной системы можно составить частичное, а иногда и полное представление по характеру изменения некоторых векторных или скалярных величин, называемых мерами движения. В качестве первой такой меры мы рассмотрим вектор количества движения материальной системы.

Количеством движения материальной точки называется, как известно, векторная величина, равная произведению массы точки m на ее скорость v , т. е. вектор mv . *Количеством движения материальной системы называется вектор Q , равный сумме количеств движения (главный вектор количеств движения) точек, входящих в систему:*

$$Q = \sum_{k=1}^n m_k v_k. \quad (8.1)$$

Так как $v_k = \dot{r}_k$, где r_k — радиус-вектор k -й точки, проведенный из начала инерциальной системы отсчета, то равенство

3.1) можно преобразовать следующим образом (массы точек потоняны):

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k.$$

Пользуясь выражением (7.2), сумму, стоящую под знаком производной, заменим произведением $M\mathbf{r}_C$, где M — масса всей системы, $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{r}_C), \quad \text{или} \quad \mathbf{Q} = M \frac{d\mathbf{r}_C}{dt}.$$

Производная $d\mathbf{r}_C/dt$ есть скорость $\mathbf{v}_C$ центра масс системы. Окончательно имеем

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C, \quad (8.2)$$

т. е. количество движения материальной системы равно массе всей системы, умноженной на скорость ее центра инерции.

Равенство (8.2) можно прочесть также следующим образом: количество движения материальной системы равно количеству движения ее центра масс, если сосредоточить в нем массу всей системы.

Задача 8.1. Однородный полый цилиндр массы $m = 20$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 2$ м/с (конечно, это скорость центра цилиндра; рис. 8.1). Определить количество движения цилиндра.

Количество движения отдельных точек цилиндра имеют различные направления. Их главный вектор $\mathbf{Q}$ (количество движения всего цилиндра) совпадает по направлению со скоростью центра масс C цилиндра, а его модуль определяется равенством $Q = mv_C = 40$ кг·м/с = 40 Н·с.

Вектор количества движения $\mathbf{Q}$ может быть задан своими проекциями, выражения для которых непосредственно следуют из формул 3.1) и (8.2) и теоремы о проекции суммы векторов:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = Mv_{Cx}, \\ Q_y &= \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = Mv_{Cy}, \\ Q_z &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = Mv_{Cz}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Кроме инерциальной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, построим поступательно перемещающуюся систему координат $Cx_2y_2z_2$, начало которой совпадает с центром масс C (рис. 8.2). Теперь движение каждой

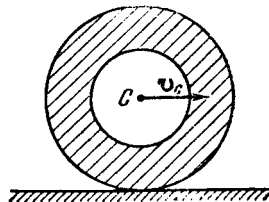


Рис. 8.1

материальной точки можно рассматривать как сложное движение: переносное вместе с осями $Cx_2y_2z_2$ и движение относительно этих осей. Поэтому количество движения можно представить как сумму количеств переносного и относительного движения

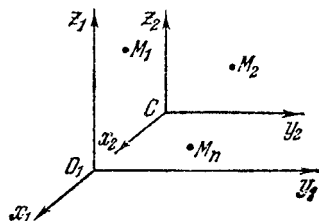


Рис. 8.2

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^e + \mathbf{Q}^r.$$

Так как в относительном движении $\mathbf{v}_{Cr} = 0$ (центр масс системы C совпадает с началом координат подвижной системы отсчета $Cx_2y_2z_2$), то согласно формуле (8.2) $\mathbf{Q}^r = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^e.$$

Таким образом, количество движения материальной системы характеризует ее поступательное движение вместе с центром масс.

§ 8.2. Теорема об изменении количества движения материальной системы

Теорема. Производная по времени вектора количества движения системы материальных точек равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.

Для доказательства теоремы перепишем дифференциальные уравнения движения (7.7) материальной системы в следующей форме:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_1^i, \dots, m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \mathbf{F}_n^e + \mathbf{F}_n^i \quad (8.4)$$

и сложим почленно все уравнения:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^i.$$

Первая сумма, стоящая в правой части равенства, равна главному вектору $\mathbf{F}^e$ всех внешних сил, а последняя сумма по первому свойству внутренних сил равна нулю (см. формулу (7.5)). После преобразований левой части получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{F}^e,$$

или, учитывая равенство (8.1),

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}^e, \quad (8.5)$$

что доказывает теорему.

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат векторное равенство (8.5) эквивалентно трем скалярным:

$$\frac{dQ_x}{dt} = X^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = Y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = Z^e. \quad (8.6)$$

Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

1. *Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения материальной системы (они могут оказать косвенное влияние через внешние силы; см. окончание § 7.2).*

2. *Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор количества движения материальной системы остается постоянным по величине и направлению.*

Действительно, по условию $F^e = 0$. Тогда из равенства (8.5) будем иметь

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$Q = Q_0 = \text{const}, \quad (8.7)$$

где Q_0 — начальное значение вектора Q .

3. *Если проекция главного вектора всех внешних сил, приложенных к системе, на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция количества движения материальной системы на эту ось остается постоянной.*

Пусть проекция главного вектора всех внешних сил на ось x равна нулю: $X^e = 0$. Тогда из первого равенства (8.6) будем иметь

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$Q_x = Q_{0x} = \text{const}, \quad (8.8)$$

где Q_{0x} — начальное значение проекции Q_x .

Первые интегралы (8.7) и (8.8), определяющие второе и третье следствия, называются законами сохранения количества движения материальной системы.

Пользуясь введенным ранее понятием импульса силы, преобразуем равенство (8.5). Для этого умножим обе части на dt и проинтегрируем в пределах от t_0 до t :

$$\int_{t_0}^t dQ = \int_{t_0}^t F^e dt,$$

или

$$Q(t) - Q(t_0) = \int_{t_0}^t F^e dt.$$

Обозначим количество движения материальной системы в момент времени t через Q , а в момент t_0 — через Q_0 , и воспользуемся выражением (3.3) для импульса силы. Тогда окончательно получим

$$Q - Q_0 = S^e, \quad (8.9)$$

где $S^e = \sum S_k^e$ — главный вектор импульсов всех внешних сил.

Таким образом, приходим к теореме об изменении количества движения материальной системы в интегральной форме (теорема импульсов): *изменение количества движения материальной системы за промежуток времени $[t_0, t]$ равно главному вектору импульсов всех внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.*

Векторное уравнение (8.9) эквивалентно трем скалярным равенствам в проекциях на оси инерциальной системы координат:

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e, \quad Q_y - Q_{0y} = S_y^e, \quad Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \quad (8.10)$$

В этих формулах S_x^e , S_y^e и S_z^e — проекции главного вектора импульсов всех внешних сил на оси координат, а Q_x , Q_y , Q_z и Q_{0x} , Q_{0y} , Q_{0z} — значения проекций количества движения материальной системы в момент времени t и t_0 .

Теорема импульсов широко применяется в теории удара.

§ 8.3. Теорема о движении центра масс

Внесем в равенство (8.5) выражение для количества движения материальной системы (8.2):

$$\frac{d}{dt} (Mv_C) = F^e$$

или, учитывая, что масса системы постоянна, получим

$$M \frac{dv_C}{dt} = F^e. \quad (8.11)$$

Это равенство по виду совпадает со вторым законом Ньютона, записанным для точки с массой M и ускорением $w_C = dv_C/dt$, к которой приложена сила F^e . Равенство (8.11) представляет математическую запись теоремы о движении центра масс: *центр масс материальной системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Напомним, что F^e — главный вектор всех внешних сил, приложенных к системе.

Векторное равенство (8.11) эквивалентно трем скалярным:

$$M \frac{dv_{Cx}}{dt} = X^e, \quad M \frac{dv_{Cy}}{dt} = Y^e, \quad M \frac{dv_{Cz}}{dt} = Z^e. \quad (8.12)$$

Здесь предполагается, что оси декартовых координат неподвижны.

Необходимо помнить, что центр масс представляет геометрическую точку (см. рис. 8.1). Кроме того, внешние силы фактически приложены не к центру масс, а к точкам системы. Вместе с тем эта геометрическая точка при движении системы перемещается по закону, определенному приведенной теоремой.

Из этой теоремы вытекают несколько следствий.

1. *Одними внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы.* Внутренние силы могут оказывать косвенное влияние на движение центра масс только через внешние силы.

2. *Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс материальной системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Действительно, если $F^e = 0$, то из равенства (8.11) будем иметь

$$M \frac{dv_C}{dt} = 0.$$

Сокращая на M и интегрируя, получим

$$v_C = v_{0C} = \text{const}, \quad (8.13)$$

где v_{0C} — начальная скорость центра масс.

3. *Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось не изменяется.*

В самом деле, если $X^e = 0$, то из первого уравнения (8.12) найдем

$$M \frac{dv_{Cx}}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$v_{Cx} = \text{const}. \quad (8.14)$$

4. *Пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс (она может вызвать только вращение тела).*

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие закон движения центра масс.

Пример 1. Движение с помощью сил трения. На человека, стоящего на горизонтальном полу, действуют две внешние силы: сила тяжести G и нормальная реакция пола N . Для движения в горизонтальном направлении (перемещения центра масс человека) этих сил недостаточно. В начале движения при перемещении одной ноги вперед за счет мускульных усилий вторая нога стремится перевернуться назад, так как центр масс человека должен остаться в покое. В результате этого между подошвой второй ноги и полом возникает сила трения, направленная вперед (см. рис. 7.2). Эта сила трения является движущей для человека. Если пол будет абсолютно гладким, то одними мускульными усилиями человек не сможет перемещаться.

Точно так же движение автомобиля по горизонтальной дороге осуществляется с помощью внешних сил трения скольжения, которые возникают между полотном дороги и ведущими колесами автомобиля (см. рис. 7.1). Эти внешние силы трения возникают за счет внутренних сил, создающих вращающий момент на оси ведущих колес, и наличия шероховатой связи (дороги). Если полотно дороги достаточно гладкое (например, при гололеде), то даже при большом вращающем моменте, создаваемом внутренними силами, автомобиль не сможет начать движение.

Спортсмен, опускаясь на парашюте, может управлять движением центра масс своего тела, в частности, при известном опыте он может приземлиться в заданном круге. Осуществляется это управление за счет изменения внешних сил сопротивления воздуха. Это достигается подтягиванием с помощью мускульных усилий (внутренних сил) строп парашюта.

Пример 2. *Движение тел Солнечной системы в неподвижной системе координат.* Пренебрегая притяжением далеких звезд, нашу Солнечную систему можно считать изолированной, т. е. считать, что на тела Солнечной системы действуют только внутренние силы. По второму следствию теоремы о движении центра масс центр масс Солнечной системы, расположенный вблизи центра Солнца, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Наблюдения показывают, что он перемещается со скоростью 20 км/с к некоторой точке небесной сферы, расположенной вблизи звезды Веги и называемой *апексом*. Таким образом, движение планет Солнечной системы является сложным: их траектории относительно системы

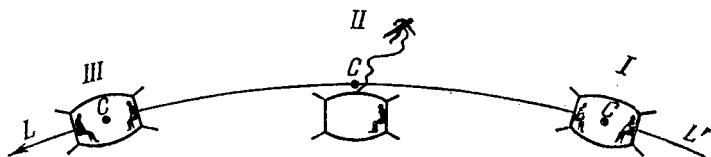


Рис. 8.3

отсчета, связанной с центром масс Солнечной системы, — эллипсы (если пренебречь силами взаимного тяготения планет), а траектории относительно далеких звезд — пространственные эллиптические спирали.

Пример 3. *Движение искусственного спутника Земли при выходе из его кабины космонавта.* Пусть центр масс C всей системы (искусственного спутника Земли вместе с находящимися в нем космонавтами) движется под действием сил тяготения Земли по некоторой траектории LL' (рис. 8.3, положение I). При выходе космонавта из кабины спутника их общий центр масс будет перемещаться с той же скоростью и по той же траектории (так как внешние силы не изменились), но спутник и космонавт разойдутся по

зные стороны от нее (см. рис. 8.3, положение *II*). Когда космонавт обратится в кабину спутника, последний перейдет на прежнюю орбиту (положение *III*). Конечно, эти явления будут происходить только в том случае, если космонавт не пользуется микроактивными двигателями.

§ 8.4. Теорема Эйлера

Дифференциальная форма теоремы об изменении количества движения материальной системы имеет важные и интересные приложения в механике сплошной среды. Рассмотрим одно, самое простое, и очень интересное приложение *).

Пусть некоторая сплошная среда (жидкость, газ) движется внутри трубы переменного сечения. Выделим часть трубы объемом w (рис. 8.4). Будем считать, что этот объем ограничен боковой поверхностью трубы и двумя ее поперечными сечениями σ_1 и σ_2 , причем σ_1 и σ_2 означают одновременно и площади поперечных сечений (см. рис. 8.4). Обозначим через v_1 , v_2 и v средние скорости частиц среды, протекающих соответственно через сечения σ_1 , σ_2 и некоторое среднее сечение σ . Тогда в единицу времени через сечение σ_1 будет протекать масса жидкости, равная $\rho_1 \sigma_1 v_1$, а через сечения σ_2 и σ — массы $\rho_2 \sigma_2 v_2$ и $\rho \sigma v$, где ρ_1 , ρ_2 и ρ — плотность среды в соответствующих сечениях.

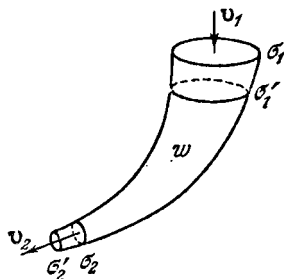


Рис. 8.4

Будем считать, что движение среды установившееся. Это означает, что скорости отдельных частиц среды и ее плотность в каждом сечении не изменяются с течением времени t . В этом предположении (но является основным) через каждое сечение в единицу времени будут протекать равные количества массы среды, т. е.

$$M_c = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2 = \rho \sigma v, \quad (8.15)$$

где через M_c обозначена *секундная масса* — масса среды, протекающей через любое сечение трубы в единицу времени. Размерность секундной массы в системе СИ равна $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$, а в технической системе — $\text{кгс} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}$.

Перейдем теперь к вычислению изменения количества движения среды, заполняющей объем w . Пусть в момент времени t рассматриваемая среда занимала объем w , заключенный между сечениями σ_1 и σ_2 , а в момент времени $t + dt$ эта же масса среды занимает объем, ограниченный сечениями σ'_1 и σ'_2 (см. рис. 8.4). Тогда изменение

*) Доказательство будет вестись в упрощающих предположениях (см., например, Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1983, 1984; Лойтманский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1978.

количества движения рассматриваемой массы среды произойдет только за счет потери количества движения в объеме между сечениями σ_1 и σ'_1 и возрастания количества движения в объеме между сечениями σ_2 и σ'_2 .

Так как при установившемся движении в единицу времени через сечения σ_1 и σ_2 проходят одинаковые массы, равные M_c , то за время dt через эти сечения пройдут массы $M_c dt$. Их количества движения будут $M_c dt v_1$ и $M_c dt v_2$, а изменение количества движения dQ рассматриваемой массы среды за то же время определится равенством

$$dQ = M_c dt v_2 - M_c dt v_1.$$

Отсюда

$$\frac{dQ}{dt} = M_c v_2 - M_c v_1. \quad (8.16)$$

В этом равенстве произведения $M_c v_1$ и $M_c v_2$ называются *секундными количествами движения* среды в сечениях σ_1 и σ_2 .

Внешние силы, действующие на среду, можно разбить на две категории:

1) силы *массовые*, или *объемные*, т. е. такие, которые действуют на каждую частицу рассматриваемой среды независимо от того, находятся ли эти частицы внутри выделенного объема или на его поверхности;

2) силы *поверхностные* — силы, действующие только на частицы, лежащие на поверхности объема.

К массовым силам относятся прежде всего силы тяжести. Поверхностные силы — это силы давления стенок на среду, силы трения выделенного объема среды о стенки и т. п.

Обозначим через $F_{об}$ главный вектор всех внешних объемных сил, а через $F_{пов}$ — главный вектор всех внешних поверхностных сил. Тогда, применяя к рассматриваемой массе среды теорему об изменении количества движения материальной системы в ее дифференциальной форме (8.5), получим

$$\frac{dQ}{dt} = F_{об} + F_{пов},$$

или, пользуясь соотношением (8.16) и перенося все члены в одну сторону,

$$F_{об} + F_{пов} + M_c v_1 - M_c v_2 = 0. \quad (8.17)$$

Это равенство представляет математическую запись теоремы Эйлера, которую можно прочитать следующим образом: *сумма главных векторов объемных и поверхностных сил, а также секундных количеств движения среды, протекающей через два поперечных сечения трубы, равна нулю, если векторы секундных количеств движения направить внутрь выделенного сечениями объема.*

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат векторное равенство (8.17) дает

$$\begin{aligned} X_{об} + X_{пов} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} &= 0, \\ Y_{об} + Y_{пов} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} &= 0, \\ Z_{об} + Z_{пов} + M_c v_{1z} - M_c v_{2z} &= 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

§ 8.5. Задачи

Задача 8.2. На корме находящейся в покое баржи установлен автомобиль. некоторый момент времени автомобиль начал перемещаться по палубе, направляясь к носу баржи. Пренебрегая сопротивлением воды движению баржи, определить ее скорость v в зависимости от скорости автомобиля u относительно баржи (если сил сопротивления будет дан в следующей задаче 8.3). Масса баржи равна m_1 , а масса автомобиля m_2 .

Рассмотрим систему, состоящую из баржи и автомобиля. В условиях задачи внешними силами, действующими на систему, будут вертикальные силы тяжести $m_1 g$, $m_2 g$ и архимедова сила G (рис. 8.5). Проекция их сил на горизонтальную ось x равна нулю, и, следовательно, проекция количества движения всей системы на эту ось сохраняет постоянное значение, равноеначальному:

$$Q_x = Q_{x0} = \text{const.}$$

Количество движения баржи равно $m_1 v$, а количество движения автомобиля $m_2 (u + v)$ (при вычислении нужно иметь в виду, что количество движения определяется для абсолютных скоростей). Считая, что баржа движется в сторону, противоположную автомобилю (рис. 8.5), найдем проекцию количества движения всей системы на ось x :

$$Q_x = -m_1 v + m_2 (u + v). \quad (8.19)$$

Будем отсчитывать время с начала движения автомобиля. Тогда при $t = 0$ $v = 0$, $u = 0$. Внося эти значения для u и v в выражение для Q_x , получим $Q_{x0} = 0$.

Учитывая, что проекция на ось x количества движения системы не меняется, имеем

$$-m_1 v + m_2 (u + v) = 0.$$

Отсюда найдем скорость движения баржи v как функцию скорости автомобиля

$$v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u. \quad (8.20)$$

Так как полученное выражение для скорости v положительно, то сделанное предположение о том, что баржа движется в сторону, противоположную движению автомобиля, является верным.

Из формулы (8.20) видно, что в условиях задачи (отсутствие сил сопротивления) скорость баржи v прямо пропорциональна относительной скорости автомобиля u . Иными словами, в момент остановки автомобиля остановится и баржа. При отсутствии сопротивления эта остановка баржи должна произойти в результате динамического эффекта, вызванного взаимодействием внутренних сил между баржей и автомобилем. Заметим, что за все время движения количество движения системы не меняется, а происходит перераспределение скоростей тел, входящих в систему.

В заключение этого примера отметим, что сделанное предположение об отсутствии сил сопротивления движению несущего тела (баржи) является, конечно, иде-

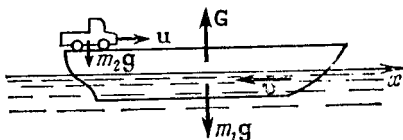


Рис. 8.5

ализированным и на практике, за исключением аналогичной ситуации в космосе (см. § 9.8), оно не оправдано. Поэтому формула (8.20) справедлива только при сделанных предположениях и в реальных земных условиях она дает весьма приближенное решение, которым не всегда можно пользоваться. В частности, вывод, что баржа остановится одновременно с прекращением движения автомобиля, не подтверждается наблюдениями — после остановки автомобиля баржа, изменив предварительно направление движения на противоположное, будет продолжать движение в сторону перемещения автомобиля. Это явление, вызываемое взаимодействием внутренних сил системы с внешними силами сопротивления, будет разобрано в следующей задаче.

Задача 8.3. В условиях предыдущей задачи определить скорость движения баржи, считая, что при ее движении возникает сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости, а автомобиль перемещается относительно баржи по

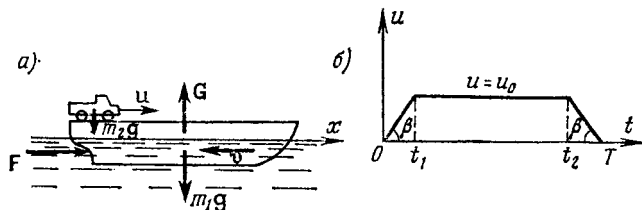


Рис. 8.6

закону, график которого изображен на рис. 8.6, б (в начальном промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ автомобиль движется равноускоренно, затем в промежутке $t_1 \leq t \leq t_2$ равномерно и, наконец, на третьем этапе $t_2 \leq t \leq T$ равнозамедленно).

В отличие от предыдущей задачи, теперь, кроме внешних вертикальных сил тяжести m_1g , m_2g и архимедовой силы G , приложенных к системе, на баржу действует еще одна внешняя сила — сила сопротивления $F = \alpha v$, где α — коэффициент пропорциональности. Эта сила направлена в сторону, противоположную скорости баржи v (рис. 8.6, а). Проекция количества движения системы на ось x была определена в предыдущей задаче — см. формулу (8.19):

$$Q_x = -(m_1 + m_2)v + m_2u.$$

Внося это выражение для Q_x в первое уравнение (8.6) и учитывая значение силы сопротивления F , получим

$$-(m_1 + m_2) \frac{dv}{dt} + m_2 \frac{du}{dt} = \alpha v,$$

или

$$\frac{dv}{dt} + kv = f(t). \quad (8.21)$$

В этом уравнении коэффициент k и функция $f(t)$ определены равенствами

$$k = \frac{\alpha}{m_1 + m_2}, \quad f(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{du}{dt}.$$

Учитывая, что автомобиль движется относительно баржи сначала равноускоренно ($\dot{u} = \text{const} > 0$), затем равномерно ($\dot{u} = 0$) и, наконец, равнозамедленно ($\dot{u} = \text{const} < 0$), получим

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ -a, & t_2 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \quad (8.22)$$

положительное число a пропорционально ускорению автомобиля на первом интервале $0 \leq t \leq t_1$ времени его движения:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{du}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_0}{t_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{tg} \beta \quad (8.23)$$

значение u_0 и угла β видно на рис. 8.6, б). Для простоты мы считаем, что время торможения автомобиля t_1 равно времени его торможения $T - t_2$:

$$t_1 = T - t_2. \quad (8.24)$$

тому на третьем этапе $f(t) = -a$.

Для первого промежутка времени $0 \leq t \leq t_1$ уравнение движения (8.21) согласно (8.22) примет вид

$$\frac{dv}{dt} + kv = a. \quad (8.25)$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами решается очень легко, и его общее решение можно записать в следующей форме:

$$v = C_1 e^{-kt} + a/k \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (8.26)$$

для удобства полезно самостоятельно получить это решение).

Произвольную постоянную интегрирования C_1 найдем из начальных условий: в начале движения при $t = 0$ скорость баржи $v = 0$. Подставим эти значения для t в общее решение (8.26): $0 = C_1 + a/k$. Отсюда $C_1 = -a/k$. Внося это значение C_1 в (8.26), получим скорость баржи на первом интервале времени

$$v = \frac{a}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad (8.27)$$

В конце этого промежутка времени скорость баржи будет

$$v_1 = \frac{a}{k} (1 - e^{-kt_1}). \quad (8.28)$$

На участке равномерного движения автомобиля дифференциальное уравнение (8.21) на основании равенства (8.22) примет вид

$$\frac{dv}{dt} + kv = 0.$$

Общее решение этого уравнения запишем в следующей форме *):

$$v = C_2 e^{-k(t-t_1)} \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \quad (8.29)$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем из условия: при $t = t_1$ $v = v_1$. После подстановки получим $C_2 = v_1$. Следовательно, на втором интервале времени скорость баржи изменяется по закону

$$v = v_1 e^{-k(t-t_1)} \quad (t_1 \leq t \leq t_2), \quad (8.30)$$

v_1 определено равенством (8.28).

В конце этого периода скорость баржи будет

$$v_2 = v_1 e^{-k(t_2-t_1)}. \quad (8.31)$$

*) Эта форма решения совпадает по существу с решением (8.26) уравнения (8.21) при $a = 0$. Действительно, решение (8.29) можно записать так: $v = C_2 e^{kt_1} e^{-kt} = C e^{-kt}$, что совпадает с (8.26) при $a = 0$ ($C = C_2 e^{kt_1}$ — новая постоянная).

На третьем интервале времени (участок торможения автомобиля) дифференциальное уравнение (8.21) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} + kv = -a \quad (t_2 \leq t \leq T).$$

Его общее решение запишем в следующей форме:

$$v = C_3 e^{-k(t-t_2)} - \frac{a}{k} \quad (t_2 \leq t \leq T).$$

Произвольную постоянную C_3 найдем из условия: при $t = t_2$ $v = v_2$. После постановки получим $C_3 = v_2 + a/k$. Следовательно, на третьем интервале времени скорость баржи изменяется по закону

$$v = \left(v_2 + \frac{a}{k} \right) e^{-k(t-t_2)} - \frac{a}{k} \quad (t_2 \leq t \leq T). \quad (8.32)$$

Скорость баржи в конце этого периода (при остановке автомобиля) будет

$$v_3 = \left(v_2 + \frac{a}{k} \right) e^{-k(T-t_2)} - \frac{a}{k}.$$

Внесем в это равенство значение v_2 из (8.31), затем учтем значение v_1 из (8.21) и примем во внимание равенство (8.24). После элементарных преобразований получим

$$v_3 = -v_1 (1 - e^{-kt_2}). \quad (8.33)$$

Из этого выражения видно, что $v_3 < 0$. Это означает, что на участке торможения автомобиля баржа изменяет направление движения на противоположное и начинает двигаться в сторону движения автомобиля, причем в момент остановки автомобиля баржа не останавливается, а продолжает движение. Момент времени t_3 , когда баржа изменяет направление движения, можно найти из равенства (8.32), положив в нем $t = t_3$ и $v = 0$:

$$0 = \left(v_2 + \frac{a}{k} \right) e^{-k(t_3-t_2)} - \frac{a}{k}.$$

Отсюда $t_3 = t_2 + \frac{1}{k} \ln \frac{kv_2 + a}{a}$.

Перейдем к определению закона изменения скорости баржи после остановки автомобиля ($t \geq T$). Уравнение (8.21) при $t \geq T$ принимает вид

$$\frac{dv}{dt} + kv = 0 \quad (t \geq T).$$

В общем решении этого уравнения

$$v = C_4 e^{-k(t-T)} \quad (t \geq T)$$

произвольную постоянную интегрирования C_4 найдем из условия: при $t = T$ $v = v_3$. Следовательно, $C_4 = v_3$, и скорость баржи будет изменяться по закону

$$v = v_3 e^{-k(t-T)} \quad (t \geq T). \quad (8.34)$$

На рис. 8.7 по равенствам (8.27), (8.30), (8.32) и (8.34) построен график закон изменения скорости баржи $v = v(t)$ (на графике учтено, что за положительное и направление движения баржи принято направление, противоположное направлению движения автомобиля).

Рассмотрим теперь случай, когда промежуток времени $t_1 = T - t_2$ очень мал и его практически можно считать равным нулю (автомобиль за пренебрежимо малый промежуток времени набирает скорость $u = u_0$ и так же быстро останавливается (рис. 8.8, а).

Воспользуемся равенством (8.28) и подставим в него значение a из (8.23):

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_0}{k} \frac{1 - e^{-kt_1}}{t_1}.$$

При $t_1 \rightarrow 0$ имеется неопределенность вида $0 : 0$. Для раскрытия ее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_0}{k} \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-kt_1})'_{t_1}}{(t_1)'_{t_1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0.$$

Таким образом, при $t_1 \rightarrow 0$ будем иметь

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0. \quad (8.35)$$

После набора автомобилем этой скорости баржа будет двигаться по закону (8.30), если положить в нем $t_1 = 0$:

$$v = v_1 e^{-kt} \quad (0 < t < T). \quad (8.36)$$

Скорость баржи перед началом торможения автомобиля определяется равенством

$$v_2 = v_1 e^{-kT}. \quad (8.37)$$

Скорость движения баржи в конце торможения автомобиля найдем из равенства (8.33) $t_2 = T$:

$$v_3 = -v_1 (1 - e^{-kT}) = v_2 - v_1,$$

v_1 и v_2 определены равенством (8.35) и (8.37).

График скорости баржи при $t_1 = T - t_2 \rightarrow 0$ дан на рис. 8.8, б.

Явления, описанные в этом примере, читатель может наблюдать самостоятельно; переходе человека с кормы лодки к ее носовой части (или наоборот) лодка начала двигаться в сторону кормы, а затем при остановке человека движение и будет происходить в обратном направлении.

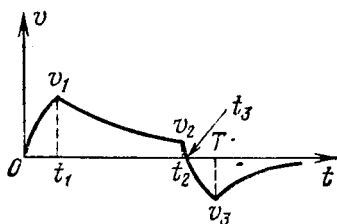


Рис. 8.7

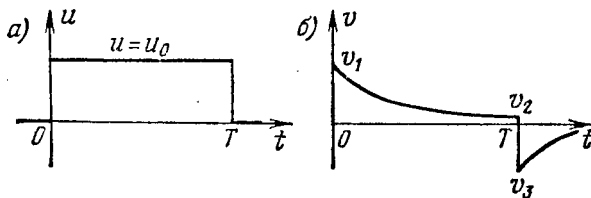


Рис. 8.8

В заключение этого примера отметим, что качественная сторона закона изменения скорости движения не зависит от сделанных предположений ($T - t_2 = t_1$, av). Читатель может убедиться в этом самостоятельно, разобрав для примера случай, когда сила сопротивления воды пропорциональна не первой, а второй степени скорости движения баржи ($F = \mu v^2$, где μ — коэффициент пропорциональности). **Задача 8.4.** Груз массы $m_1 = 3000$ кг скользит вниз по наклонной эстакаде, одно лежащей на земле. Масса эстакады $m_2 = 2000$ кг, коэффициент трения движения между грузом и эстакадой $f = 0,2$, угол наклона $\alpha = 30^\circ$. При каких условиях эстакада остается неподвижной?

Эстакада будет находиться в покое до тех пор, пока сила трения F между землей и эстакадой не достигнет своего предельного значения, равного $f_0 N$, где f_0 — коэф-

коэффициент трения покоя, а N — сила нормального давления. Для определения силы трения F и нормального давления N рассмотрим систему, состоящую из груза и эстакады. На эту систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести груза m_1g , сила тяжести эстакады m_2g , нормальная реакция земли N и сила трения между землей и эстакадой F (рис. 8.9, а).

Обозначим скорость движения груза через v . Очевидно, что скорость v направлена параллельно наклонной плоскости, и поэтому проекции количества движения груза, а следовательно, и всей системы (количество движения эстакады равно нулю, так как она находится в покое) на координатные оси x и y будут (рис. 8.9, а)

$$Q_x = m_1 v \cos \alpha, \quad Q_y = -m_1 v \sin \alpha.$$

Применим теперь теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме и равенства (8.6). Пользуясь выражениями для Q_x и Q_y с помощью рис. 8.9, а получим

$$m_1 \frac{dv}{dt} \cos \alpha = F,$$

$$-m_1 \frac{dv}{dt} \sin \alpha = -m_2g - m_1g + N.$$

Отсюда найдем силу нормального давления

$$N = m_2g + m_1g - m_1 \frac{dv}{dt} \sin \alpha.$$

Эстакада будет находиться в покое, если сила трения F не превышает своего предельного значения $f_0 N$, т. е. при $F < f_0 N$.

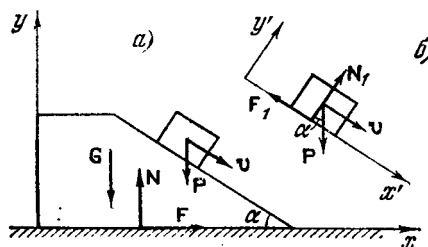


Рис. 8.9

Из полученных соотношений найдем

$$m_1 \frac{dv}{dt} \cos \alpha < f_0 \left(m_2g + m_1g - m_1 \frac{dv}{dt} \sin \alpha \right),$$

или

$$f_0 > \frac{m_1 \frac{dv}{dt} \cos \alpha}{m_2g + m_1g - m_1 \frac{dv}{dt} \sin \alpha}.$$

Для полного решения задачи необходимо определить ускорение dv/dt . Для этого рассмотрим движение одного груза (рис. 8.9, б). На груз действуют сила тяжести m_1g , нормальная составляющая реакции наклонной плоскости N_1 и сила трения F_1 , по модулю равная fN_1 . Составим дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси x' и y' :

$$m_1 \frac{dv}{dt} = m_1g \sin \alpha - F_1, \quad 0 = N_1 - m_1g \cos \alpha.$$

Из второго уравнения найдем $N_1 = m_1g \cos \alpha$, следовательно, $F_1 = fN_1 = fm_1g \cos \alpha$. Внесем это выражение для F в первое уравнение и определим из него ускорение груза:

$$\frac{dv}{dt} = (\sin \alpha - f \cos \alpha) g.$$

После подстановки в неравенство, определяющее f_0 , получим

$$f_0 > \frac{m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha}{m_2 + m_1 \cos \alpha (\cos \alpha + f \sin \alpha)}.$$

Этому условию должен удовлетворять f_0 — коэффициент трения покоя между землей и эстакадой, чтобы последняя не пришла в движение. В условиях примера ($m_2 = 2000$ кг, $m_1 = 3000$ кг, $f = 0,2$ и $\alpha = 30^\circ$) найдем $f_0 > 0,19$.

В главе XVI мы решим эту задачу другим методом.

Задача 8.5. Электромотор прикреплен с помощью четырех болтов к горизонтальному основанию. В результате затяжки каждый болт создает вертикальную силу давления $P_1 = 12,5$ Н. Коэффициент трения покоя между мотором и основанием $f_0 = 0,2$. Определить величину бокового давления на болты, если ротор электромотора, имея небольшой эксцентриситет $e = 0,5$ мм, равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ л/рад/с ($n = 1500$ об/мин). Сила тяжести статора $G_1 = 100$ Н, сила тяжести ротора $G = 50$ Н (рис. 8.10).

При вращении ротора центр тяжести его (точка C) будет описывать окружность, радиус которой равен эксцентриситету e . В результате этого корпус электромотора будет стремиться совершать горизонтальные колебания. Этому стремлению препятствуют болты и сила трения между электромотором и основанием (фундаментом).

Обозначим через $F_{\text{тр}}$ силу трения между основанием и статором мотора, через F_1 — суммарную горизонтальную составляющую силы давления болтов на статор мотора и через F — равнодействующую сил $F_{\text{тр}}$ и F_1 . Так как последние направлены всегда в одну сторону, то

$$F = F_{\text{тр}} + F_1.$$

Нужно иметь в виду следующее: если сила трения $F_{\text{тр}}$ по модулю меньше своего предельного значения $f_0 N$, где N — значение нормального давления, то корпус мотора будет удерживаться в покое только за счет сил трения. В этом случае $F_1 = 0$ и $F = F_{\text{тр}}$. Как только сила трения достигнет своего предельного значения, в работу вступят болты, причем модуль силы F_1 можно будет определить из последнего равенства

$$F_1 = F - F_{\text{тр}} = F - f_0 N.$$

Таким образом, имеем

$$F_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } F \leq f_0 N, \\ F - f_0 N, & \text{если } F \geq f_0 N. \end{cases} \quad (8.38)$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из статора и ротора. Количество движения статора равно нулю (он неподвижен), а количество движения ротора равно $(G/g) v_C$, где v_C — скорость его центра тяжести C . Модуль скорости точки C равен $e\omega$, а проекции вектора v_C на оси x и y будут (рис. 8.10)

$$v_{Cx} = e\omega \cos \omega t, \quad v_{Cy} = -e\omega \sin \omega t.$$

Следовательно, проекции количества движения всей системы равны

$$Q_x = \frac{G}{g} e\omega \cos \omega t, \quad Q_y = -\frac{G}{g} e\omega \sin \omega t.$$

Внешними силами для системы будут: сила тяжести статора G_1 , сила тяжести ротора G , четыре силы P_1 затяжки болтов (их равнодействующую обозначим через P), нормальная составляющая реакции основания N , сила трения $F_{\text{тр}}$ и боковые составляющие давления болтов F_1 ($F = F_{\text{тр}} + F_1$). Воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы в дифференциальной форме и применим уравнения (8.6). Пользуясь полученными выражениями для Q_x и Q_y , с помощью

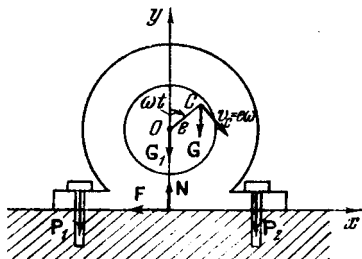


Рис. 8.10

рис. 8.10 получим (рассматриваем первый полуоборот, в течение которого сила F будет направлена влево)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G}{g} \epsilon \omega \cos \omega t \right) = -F, \quad \frac{d}{dt} \left(-\frac{G}{g} \epsilon \omega \sin \omega t \right) = N - P - G_1 - G,$$

или, выполняя дифференцирование и умножая первое уравнение на -1 ,

$$\frac{G}{g} \epsilon \omega^2 \sin \omega t = F, \quad -\frac{G}{g} \epsilon \omega^2 \cos \omega t = N - P - G_1 - G.$$

Найдем из второго уравнения силу нормального давления

$$N = P + G_1 + G - \frac{G}{g} \epsilon \omega^2 \cos \omega t.$$

Будем считать, что N всегда положительно, и введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\omega t) = F - f_0 N = \frac{G}{g} \epsilon \omega^2 \sin \omega t - f_0 \left(P + G_1 + G - \frac{G}{g} \epsilon \omega^2 \cos \omega t \right).$$

Отметим, что входящая в это выражение предельная сила трения покоя $f_0 N$ является величиной переменной (так как N изменяется).

Учитывая соотношение (8.38), найдем ($0 \leq \omega t \leq \pi$)

$$F_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \Phi(\omega t) \leq 0, \\ \Phi(\omega, t), & \text{если } \Phi(\omega t) \geq 0. \end{cases} \quad (8.39)$$

Преобразуем функцию $\Phi(\omega t)$:

$$\Phi(\omega t) = \frac{G}{g} \epsilon \omega^2 (\sin \omega t + f_0 \cos \omega t) - f_0 (P + G_1 + G).$$

Его используем равенством

$$f_0 = \operatorname{tg} \varphi,$$

в котором φ — угол трения. Функцию $\Phi(\omega t)$ можно привести теперь к виду

$$\Phi(\omega t) = \frac{G}{g} \frac{\epsilon \omega^2}{\cos \varphi} \sin(\omega t + \varphi) - f_0 (P + G_1 + G). \quad (8.40)$$

Максимальное значение функции $\Phi(\omega t)$ достигается при $\sin(\omega t + \varphi) = 1$:

$$\Phi_{\max} = \frac{G}{g} \frac{\epsilon \omega^2}{\cos \varphi} - f_0 (P + G_1 + G).$$

Если это выражение неположительно, то при любом значении угла ωt функция $\Phi(\omega t) \leq 0$. В этом случае сила трения не превосходит своего предельного значения и болты не оказывают давления на мотор ($F_1 = 0$). Это имеет место при условии

$$\epsilon \omega^2 \leq \frac{g}{G} (P + G_1 + G) \sin \varphi. \quad (8.41)$$

Если же неравенство (8.41) будет иметь обратный смысл, то при некотором $\omega t = \omega t_1$ функция $\Phi(\omega t)$ обратится в нуль. Угол поворота ωt_1 легко находится из уравнения $\Phi(\omega t_1) = 0$, или, после очевидных преобразований,

$$\sin(\omega t_1 + \varphi) = \frac{g}{G \epsilon \omega^2} (P + G_1 + G) \sin \varphi. \quad (8.42)$$

С момента времени $t = t_1$ функция $\Phi(\omega t)$ начнет возрастать и сделается положительной (t_1 — наименьший корень уравнения (8.42)). С этого же момента болты начнут оказывать давление на мотор, равное $F_1 = \Phi(\omega t)$.

При угле ωt_2 , определяемом уравнением

$$\omega t_2 + \varphi = \pi - (\omega t_1 + \varphi), \quad (8.43)$$

функция $\Phi(\omega t)$ опять делается равной нулю, давление болтов прекратится, и мотор снова будет удерживаться одной силой трения. При $\omega t > \pi$ характер распределения сил будет повторяться в обратном порядке.

В данном примере

$$e\omega^2 = 0,0005 (50\pi)^2 = 1,25\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

$$\frac{g}{G} (G_1 + G + P) = 39,2 \text{ м/с}^2, \quad f_0 = \operatorname{tg} \varphi = 0,2,$$

$$\sin \varphi \approx 0,196, \quad \varphi \approx 0,198 (11^\circ).$$

Условие (8.41) не выполняется и, следовательно, одной силы трения недостаточно для удержания в горизонтальном положении мотора. Значение угла ωt_1 найдем из уравнения (8.42):

$$\sin(\omega t_1 + \varphi) = \frac{39,2}{1,25\pi^2} \cdot 0,196 \approx 0,64,$$

$$\omega t_1 + \varphi = 0,695 (40^\circ), \quad \omega t_1 \approx 0,497 (29^\circ).$$

Таким образом, при $0 \leq \omega t \leq \omega t_1$ мотор удерживается одной силой трения. Начиная с момента времени t_1 , в работу вступают болты, действие которых прекращается в момент времени t_2 ; угол ωt_2 определяется равенством (8.43):

$$\omega t_2 = \pi - \omega t_1 - 2\varphi = 2,247 (129^\circ).$$

В промежутке $\omega t_1 < \omega t < \omega t_2$ суммарная сила давления болтов найдется из равенств (8.39) и (8.40):

$$F_1 = 63 \sin(\omega t + \varphi) - 40.$$

При $\omega t \geq \omega t_2$ сила F_1 снова обращается в нуль. График проекции силы F_1 на ось x изображен на рис. 8.11.

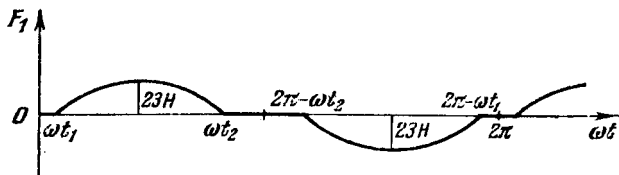


Рис. 8.11

Максимальное давление, приходящееся на один болт (сила давления мотора на болты равна по модулю F_1 и направлена в сторону, противоположную F_1), равно 5,75 Н, а при отсутствии трения ($f_0 = 0$) оно составляет 15,75 Н. Следовательно, сила трения снимает в данной системе две трети всей нагрузки на болты и существенно облегчает условия их работы.

При большом эксцентриситете сила давления F_1 , меняющая свое направление с каждым полуоборотом ротора (в нашем примере 3000 раз в минуту), может достигнуть величины, при которой болты будут сломаны.

Если увеличить затяжку болтов, т. е. увеличить силу P , то можно создать такое нормальное давление N , при котором мотор будет удерживаться в горизонтальном положении одной силой трения и болты не будут испытывать горизонтальных давлений. Критическое значение для силы P найдем из неравенства (8.41):

$$P \geq \left(\frac{e\omega^2}{g \sin \varphi} - 1 \right) G - G_1.$$

В рассматриваемом примере будем иметь $P \geq 170$ Н. Следовательно, каждый болт нужно затянуть с силой 42,5 Н (напомним, что P — суммарная сила затяжки всех четырех болтов), т. е. затяжку болтов нужно увеличить в 3,4 раза.

Задача 8.6. Горизонтальный участок трубопровода земснаряда имеет изогнутое под углом 90° колено. Определить динамическое давление P пульпы на изогнутую часть трубопровода, если его диаметр равен 60 см, удельный вес пульпы $\gamma = 12 \text{ кН/м}^3$ и скорость ее течения $v = 6 \text{ м/с}$.

Рассмотрим изогнутую часть трубопровода и обозначим через σ_1 и σ_2 площади поперечных сечений его в начале и конце изгиба, а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — векторы соответствующих скоростей пульпы (рис. 8.12, а). Ось x направим вдоль оси симметрии изогнутой части трубопровода, а ось y — перпендикулярно к ней. По условию

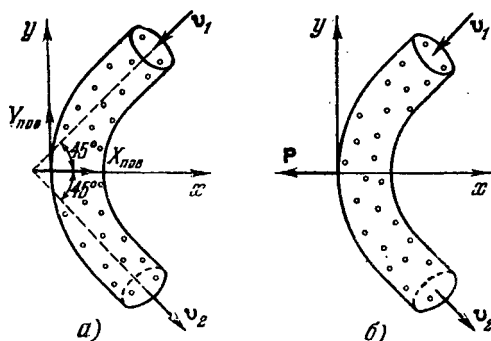


Рис. 8.12

задачи модули $v_1 = v_2 = v$, а векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ составляют с осью x углы, равные 45° . Силы тяжести направлены вертикально, и их проекции на оси x и y равны нулю (на рис. 8.12, а показан вид сверху). Обозначим через $X_{пов}$ и $Y_{пов}$ проекции главного вектора сил давления стенок трубопровода на пульпу и составим первые два уравнения (8.18):

$$\begin{aligned} X_{пов} - M_{cv} \cos 45^\circ - \\ - M_{cv} \cos 45^\circ &= 0, \\ Y_{пов} - M_{cv} \sin 45^\circ + \\ + M_{cv} \sin 45^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$X_{пов} = M_{cv} \sqrt{2}, \quad Y_{пов} = 0.$$

Таким образом, главный вектор поверхностных сил направлен по оси x (это очевидно из соображений симметрии). Сила добавочного динамического давления P на трубопровод равна по модулю $X_{пов}$ и направлена в противоположную сторону (рис. 8.12, б):

$$P = \sqrt{2} M_{cv}. \quad (8.44)$$

По определению имеем (см. формулу (8.15)) $M_c = \rho \sigma v$. Плотность пульпы ρ связана с ее удельным весом равенством $\rho = \gamma/g$, а площадь поперечного сечения трубопровода $\sigma = \pi d^2/4$.

Внося выражения для M_c , ρ и σ в равенство (8.44), получим

$$P = \frac{\sqrt{2}\gamma}{4g} \pi d^2 v^2.$$

После подстановки численных значений $\gamma = 12 \text{ кН/м}^3$, $d = 0,6 \text{ м}$, $v = 6 \text{ м/с}$, найдем динамическое давление пульпы на трубопровод: $P = 17,7 \text{ кН}$.

Глава IX

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 9.1. Момент количеств движения материальной системы

В предыдущей главе было показано, что, исследуя вектор количества движения материальной системы, можно составить представление о ее поступательном движении. Вращательное движение материальной системы характеризуется другой векторной величиной, а именно — моментом количеств движения. В этой главе мы

рассмотрим способы вычисления этой величины и ее связи с другими динамическими характеристиками системы, с помощью которых можно составить частичное, а иногда и полное описание вращательных движений материальной системы.

Момент количества движения K_O одной материальной точки определяется равенством $K_O = r \times mv$. Моментом количеств движения K_O материальной системы относительно центра O называется сумма моментов (главный момент) количеств движения всех материальных точек, входящих в систему, относительно того же центра:

$$K_O = \sum_{k=1}^n K_{Ok} = \sum_{k=1}^n r_k \times m_k v_k. \quad (9.1)$$

В этом равенстве r_k — радиус-вектор материальной точки M_k с началом в центре O , m_k и v_k — масса и скорость этой точки. Если материальная система представляет непрерывно распределенную материальную среду, заполняющую некоторый объем, то сумма, конечно, переходит в соответствующий интеграл.

Как всякий вектор, момент количеств движения K_O может быть задан своими проекциями. В частности, равенство (9.1) в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}), \\ K_y &= \sum_{k=1}^n m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}), \\ K_z &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}), \end{aligned} \quad (9.2)$$

где x_k , y_k , z_k — координаты точки M_k .

По этим формулам можно определить проекции K_x , K_y , K_z (моменты количеств движения материальной системы относительно координатных осей), а следовательно, и сам вектор K_O .

Момент количеств движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. В этом примере нас интересует не момент количеств движения K_O твердого тела как вектор, а только одна его проекция K_z на ось вращения z тела.

Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси z (рис. 9.1). Выделим в теле элемент объема M с массой dm и будем рассматривать его как материальную точку. При вращении тела вокруг неподвижной оси элемент объема M будет двигаться по окружности с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию h_z от точки M до оси вращения. Проекция скорости v элемента объема M на касательную к окружности равна ωh_z , а проекция количества движения на ту же ось будет $v_\tau dm =$

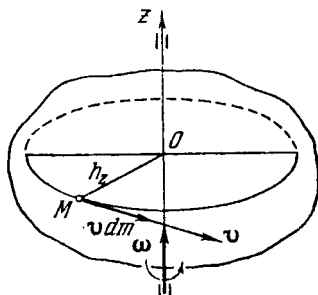


Рис. 9.1

$= \omega_z h_z dm$. Так как плечо вектора $v dm$ относительно оси вращения равно h_z , то момент количества движения элемента объема M относительно оси z равен $v_\tau dm h_z = \omega_z h_z^2 dm$. Для всего тела будем иметь

$$K_z = \int \omega_z h_z^2 dm,$$

где интегрирование распространено на массу всего тела.

Проекция угловой скорости ω_z одинакова для всех точек тела, и, следовательно, ее можно вынести за знак интеграла:

$$K_z = \omega_z \int h_z^2 dm.$$

Получившийся интеграл зависит только от характера распределения массы в теле и не зависит от его кинематического состояния. Он называется *моментом инерции тела относительно оси z* и обозначается символом I_z (в § 9.5 будет показано, что момент инерции тела представляет меру его инерции во вращательном движении):

$$I_z = \int h_z^2 dm. \quad (9.3)$$

В этих обозначениях будем иметь

$$K_z = I_z \omega_z, \quad (9.4)$$

т. е. *момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на проекцию угловой скорости тела на ту же ось.*

§ 9.2. Краткие сведения о моментах инерции

Теории моментов инерции будет посвящена специальная глава XII. Здесь же мы весьма кратко остановимся на основных определениях и сообщим некоторые формулы, не останавливаясь на их выводах.

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы m этой точки на квадрат ее расстояния h до оси, т. е. величина mh^2 . Моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма моментов инерции всех точек системы относительно той же оси.

Так, например, момент инерции материальной системы относительно оси z равен

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2,$$

где h_{kz} — расстояние от точки с номером k до оси z .

При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл (9.3).

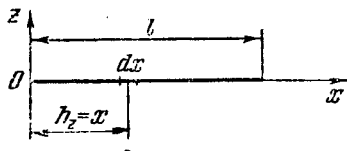
По определению момент инерции представляет существенно положительную величину. В нуль момент инерции может обратиться только в одном частном случае, когда все точки системы расположены на оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Размерность момента инерции в системе СИ равна $\text{кг} \cdot \text{м}^2$, а в технической системе — $\text{кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$.

Для примера определим момент инерции однородного тонкого стержня массы M и длины l относительно оси z , проходящей перпендикулярно к стержню через его конец (рис. 9.2).

Направим ось x вдоль стержня и выделим на нем элемент длины dx . Расстояние h_z от этого элемента до оси z равно x , масса единицы длины стержня равна M/l , а масса выделенного элемента $dm = (M/l) dx$. Внесем эти значения для h_z и dm в выражение (9.3) и учтем, что переменная интегрирования x изменяется от 0 до l . Тогда

$$I_z = \int h_z^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx,$$



или, интегрируя,

$$I_z = 1/3 M l^2. \quad (9.5) \quad \text{Рис. 9.2}$$

Таково значение момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец.

Момент инерции I_{Cz} однородного тонкого стержня длины l и массы M относительно оси z , проходящей перпендикулярно к стержню через его центр тяжести C , будет равен

$$I_{Cz} = 1/12 M l^2. \quad (9.6)$$

Не останавливаясь на выводе (см. § 12.3), заметим, что момент инерции однородного кругового цилиндра массы M и радиуса R относительно оси z цилиндра (рис. 9.3) определяется формулой

$$I_z = 1/2 M R^2. \quad (9.7)$$

Это выражение для момента инерции не зависит от высоты цилиндра H и поэтому оно справедливо и для однородного кругового диска.

Очень часто вводят *радиус инерции тела* относительно оси, понимая под ним расстояние ρ от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу M всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной оси равнялся моменту инерции тела относительно той же оси. По определению имеем

$$I = M \rho^2. \quad (9.8)$$

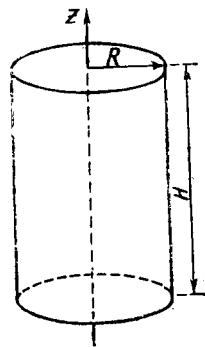


Рис. 9.3

Здесь M — масса материальной системы, I — ее момент инерции относительно данной оси, ρ — радиус инерции системы относительно этой же оси.

§ 9.3. Теорема об изменении момента количества движения материальной системы

Рассмотрим материальную систему, состоящую из n материальных точек. Мысленно освободимся от связей, заменим их действие реакциями и разобьем все силы (включая реакции связей) на внеш-

2. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то момент количества движе-

ия материальной системы относительно того же центра не изменяется по модулю и направлению.

Действительно, если $M_O^e = 0$, то равенство (9.9) принимает вид

$$\frac{dK_O}{dt} = 0;$$

отсюда

$$K_O = K_O^0 = \text{const}, \quad (9.11)$$

где K_O^0 — начальное значение вектора K_O .

3. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси (например, оси x) равен нулю, то момент количеств движения материальной системы относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

Если $M_x^e = 0$, то согласно первому равенству (9.10) будем иметь

$$\frac{dK_x}{dt} = 0;$$

отсюда

$$K_x = K_x^0 = \text{const}. \quad (9.12)$$

Первые интегралы (9.11) и (9.12), определяющие второе и третье следствия, называются законами сохранения момента количеств движения материальной системы.

§ 9.4. Примеры и задачи

Теорема об изменении момента количеств движения материальной системы имеет очень интересные и практически важные приложения. В этом параграфе мы рассмотрим примеры и задачи, иллюстрирующие применение теоремы и ее следствия, причем некоторые из них имеют самостоятельное значение.

1. **Плоскость Лапласа.** Солнечная система является изолированной (если пренебречь влиянием других звезд), и ее движение определяется только внутренними силами притяжения. Так как внешние силы отсутствуют, то на основании второго следствия момент количеств движения K_O всей Солнечной системы сохраняет постоянное направление относительно далеких «неподвижных» звезд. Поэтому сохраняет неизменное положение и плоскость π , перпендикулярная к вектору K_O (рис. 9.4). Эта плоскость (ее называют *плоскостью Лапласа*) имеет большое значение в астрономии, так как относительно нее ориентируют орбиты планет.

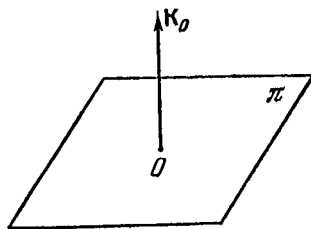


Рис. 9.4

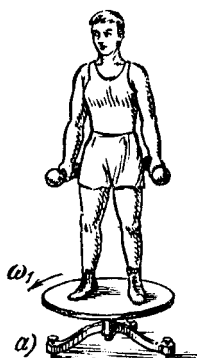
2. **Скамейка Н. Е. Жуковского.** Для демонстрации теоремы об изменении момента количеств движения материальной системы и ее следствия Н. Е. Жуковский построил прибор, состоящий из горизонтальной платформы, которая может вращаться вокруг вертикальной оси с пренебрежимо малым трением. Мы опишем в опыте, хорошо иллюстрирующих теорему.

а) В примере 1 § 8.3 было показано, что при отсутствии внешних сил человек, не может изменить положения своего центра тяжести. Покажем, что, находясь в аналогичных условиях, человек может повернуться. Предположим, что человек стоит на скамейке Н. Е. Жуковского и держит над головой колесо или какой-нибудь другой предмет, который может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 9.5).

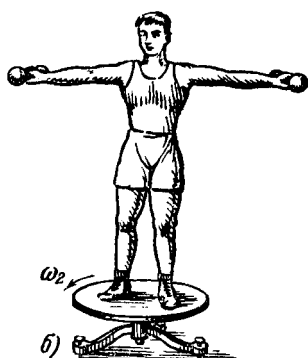
Будем считать, что вся система, состоящая из человека, платформы и колеса, сначала находилась в покое; затем внутренними силами колесо раскручивается (это можно сделать, например, второй рукой). Так как моменты всех внешних сил относительно вертикальной оси вращения равны нулю (силы тяжести параллельны



Рис. 9.5



а)



б)

Рис. 9.6

оси вращения, а линии действия реакций опор платформы пересекают ее), то момент количеств движения K_z всей системы относительно этой оси должен сохранять постоянное значение, равноеначальному:

$$K_z = K_z^1 + K_z^2 = 0, \quad (9.13)$$

где K_z^1 и K_z^2 — моменты количеств движения относительно оси z колеса и человека с платформой.

Равенство (9.13) должно сохраняться все время. Поэтому, если одно из слагаемых, например K_z^1 , положительно, то второе слагаемое отрицательно. Это означает, что при вращении колеса в одном направлении человек вместе с платформой будет вращаться в обратном направлении. Если, повернув колесо на некоторый угол, затем прекратить его вращение, то платформа с человеком, повернувшись в обратном направлении на некоторый другой угол, также прекратит свое вращение.

В § 9.8 будет показано, как используется этот метод космонавтами для поворота и ориентации при свободном полете в космосе.

б) Второй опыт, хорошо демонстрируемый на скамейке Жуковского, состоит в следующем. Человек стоит на платформе, держа в руках гантели. Его раскручивают, после чего вращение происходит по инерции. Моменты внешних сил, действующих на систему «человек—платформа», относительно вертикальной оси вращения равны нулю. Поэтому момент количеств движения K_z системы относительно этой оси сохраняет постоянное значение. Предположим, что человек, держа руки с гантелями по швам, вращается с угловой скоростью ω_1 (рис. 9.6, а). Обозначим момент инерции всей системы в этом положении через I_1 . Тогда согласно формуле (9.4) будем иметь $K_z = I_1 \omega_1$. Если человек, расставив руки с гантелями,

дет держать их на уровне плеч (рис. 9.6, б), то момент инерции всей системы относительно оси вращения z увеличится (увеличатся расстояния от гантелей до оси z). Обозначим новый момент инерции через I_2 и новую угловую скорость через ω_2 . Согласно той же формуле (9.4) в новом положении $K_z = I_2 \omega_2$. Так как момент количества движения K_z относительно оси вращения не изменяется, то

$$I_2 \omega_2 = I_1 \omega_1.$$

Из этого равенства следует, что $\omega_2 < \omega_1$ (ибо $I_2 > I_1$). Таким образом, человек, поднимая руки до уровня плеч, уменьшает свою угловую скорость, а при опускании рук увеличивает ее.

Задача 9.1. Тележка D поворотного подъемного крана движется с постоянной по модулю скоростью u относительно стрелы BC крана. Мотор, вращающий кран, задает относительно оси вращения AB крана постоянный момент $M_{вп}$. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния s тележки D до оси AB , если масса тележки вместе с грузом равна m , а момент инерции крана (без тележки и груза) относительно оси вращения AB равен I . Вращение крана начинается в момент времени, когда тележка находилась на расстоянии s_0 от оси AB (рис. 9.7).

Рассмотрим систему, состоящую из вращающейся части крана и тележки с грузом. Для решения задачи применим теорему об изменении момента количества движения системы относительно неподвижной оси вращения крана. В третьем уравнении (9.10):

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \quad (9.14)$$

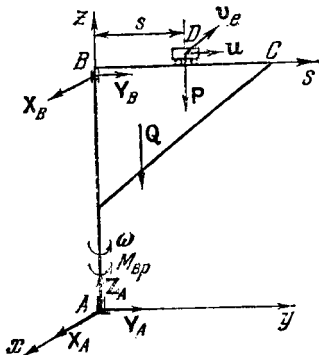


Рис. 9.7

На рассматриваемую систему действуют следующие внешние силы и моменты: сила тяжести тележки с грузом $P = mg$, сила тяжести крана Q , вращающий момент $M_{вп}$ и реакции опор A и B крана (на рис. 9.7 показаны их составляющие). Моменты относительно оси z сил тяжести P и Q и реакций опор A и B равны нулю (силы P и Q параллельны оси z , а линии действия реакций пересекают ее). Поэтому

$$M_z^e = M_{вп}. \quad (9.15)$$

Перейдем теперь к определению момента количества движения K_z системы относительно оси вращения крана. Система состоит из двух движущихся тел: вращающегося крана и тележки с грузом (тележка и груз движутся одинаково, и их можно рассматривать как одно тело). Следовательно,

$$K_z = K_z^K + K_z^T, \quad (9.16)$$

где K_z^K и K_z^T — моменты количества движения относительно оси z крана и тележки соответственно.

Кран представляет собой твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Поэтому согласно формуле (9.4) $K_z^K = I \omega_z$.

Тележка участвует в сложном движении. Ее относительная скорость равна u , модуль переносной скорости v_e равен ωs , где s — расстояние от тележки до оси вращения (размерами тележки пренебрегаем). Абсолютная скорость тележки

$$v = u + v_e,$$

количество ее движения

$$mv = mu + mv_e.$$

Следовательно,

$$K_z^T = K_{zr}^T + K_{ze}^T,$$

где K_{zr}^T и K_{ze}^T — моменты количеств относительного и переносного движений тележки относительно оси z .

Так как вектор $m\mathbf{v}$ пересекает ось z , то $K_{zr}^T = 0$. Вектор количества переносного движения $m\mathbf{v}_e$ находится в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к оси z . Поэтому

$$K_z^T = K_{ze}^T = mv_e s,$$

или, учитывая, что $v_e = \omega_z s$,

$$K_z^T = m\omega_z s^2.$$

Внося найденные значения для K_z^H и K_z^T в (9.16), найдем

$$K_z = I\omega_z + m\omega_z s^2 = (I + ms^2)\omega_z. \quad (9.17)$$

Подставив выражения (9.15) и (9.17) в равенство (9.14), получим дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы

$$\frac{d}{dt} [(I + ms^2)\omega_z] = M_{вп}. \quad (9.18)$$

В этом уравнении величина s является переменной, причем $\dot{s} = u_s$, где u_s — проекция относительной скорости и тележки на ось стрелы BC ($u_s = u$, если тележка удаляется от оси вращения крана, и $u_s = -u$ в противном случае).

Так как по условию задачи u — величина постоянная, то

$$s - s_0 = u_s t.$$

Интегрируя уравнение (9.18), получим

$$(I + ms^2)\omega_z = M_{вп}t + C. \quad (9.19)$$

В начальный момент ($t = 0$) по условию задачи $\omega = 0$. Поэтому из формулы (9.19) следует, что $C = 0$. Заменим в равенстве (9.19) время t через расстояние s и найдем ω_z :

$$\omega_z = \frac{M_{вп}(s - s_0)}{u_s(I + ms^2)}. \quad (9.20)$$

Угловая скорость может быть выражена также как функция времени:

$$\omega_z = \frac{M_{вп}t}{I + m(s_0 + u_s t)^2}. \quad (9.21)$$

В частности, при неподвижной тележке $u_s = 0$

$$\omega_z = \frac{M_{вп}t}{I + ms_0^2}.$$

Из соотношений (9.20) и (9.21) видно, что знак ω_z совпадает со знаком $M_{вп}$. Это означает, что направление вращения крана всегда совпадает с направлением вращающего момента $M_{вп}$ — факт физически очевидный.

§ 9.5. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z .

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси обеспечивается специальными приспособлениями (подшипниками и подпятниками). Выводимся мысленно от связей и, заменив их соответствующими реакциями, будем в дальнейшем считать вращающееся тело свободным. Обозначим через I_z момент инерции этого тела относительно оси вращения и через ω_z — проекцию его угловой скорости на эту ось. Тогда момент количества движения K_z твердого тела относительно оси вращения будет равен (см. формулу (9.4))

$$K_z = I_z \omega_z.$$

Внося это выражение в третье равенство (9.10), получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^e. \quad (9.22)$$

При вычислении главного момента всех внешних сил, приложенных к твердому телу, относительно оси вращения нужно учитывать, что реакции идеальных (без трения) опор в уравнение (9.22) не войдут, так как линии их действия пересекают ось вращения и, следовательно, их моменты относительно этой оси равны нулю. Если же опоры создают моменты трения, то последние необходимо учитывать.

Сравним дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с дифференциальным уравнением прямолинейного поступательного движения твердого тела

$$M \frac{dv_z}{dt} = F_z^e. \quad (9.23)$$

Сравнивая уравнения (9.22) и (9.23), видим, что между ними можно провести глубокую аналогию: линейной скорости v поступательного движения тела соответствует его угловая скорость ω при вращении вокруг неподвижной оси (в уравнениях рассматриваются соответствующие проекции скоростей); силам, вызывающим поступательное движение тела, соответствуют моменты сил, вызывающих его вращение; массе тела в уравнении (9.23) соответствует момент инерции в уравнении (9.22). Так как масса тела представляет меру его инерции в поступательном движении, то из сделанного сопоставления следует, что *момент инерции тела представляет меру его инерции во вращательном движении*.

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (9.22) полезно сопоставить с формулировкой вто-

рого закона Ньютона: произведение массы точки на ее ускорение равно сумме всех сил, приложенных к точке. Аналогично можно прочитать и уравнение (9.22): *произведение момента инерции тела на его угловое ускорение равно сумме моментов всех сил, приложенных к телу.*

Задача 9.2. К ротору электромотора приложен вращающий момент $M_{\text{вр}}$ изменяющийся по закону $M_{\text{вр}} = M_0 - \kappa\omega$, где M_0 и κ — некоторые положительные постоянные, характеризующие двигатель (постоянная κ называется *крутизной* характеристики мотора), а ω — угловая скорость ротора. Определить закон изменения угловой скорости ω в период разгона ротора, если его момент инерции относительно оси вращения равен I .

Совместим положительное направление оси вращения z с направлением вращающего момента $M_{\text{вр}}$. Тогда $M_z = M_{\text{вр}} = M_0 - \kappa\omega$ и $\omega_z = \omega$ (направление вектора угловой скорости в период разгона ротора совпадает, конечно, с направлением вращающего момента).

Силы трения учтены постоянными M_0 и κ , поэтому сумма моментов всех внешних сил, приложенных к ротору, будет равна $M_{\text{вр}} = M_0 - \kappa\omega$. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела (9.22) в данном случае принимает вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_0 - \kappa\omega. \quad (9.24)$$

Для определения закона изменения угловой скорости ω от времени нужно решить это дифференциальное уравнение. Для этого разделим переменные

$$\frac{I d\omega}{M_0 - \kappa\omega} = dt$$

и проинтегрируем обе части равенства

$$-\frac{I}{\kappa} \ln(M_0 - \kappa\omega) = t + C.$$

В начале разгона при $t = 0$ $\omega = 0$. Подставляя это условие в полученный первый интеграл, найдем постоянную интегрирования

$$C = -\frac{I}{\kappa} \ln M_0.$$

Внесем это значение для C в последнее равенство

$$-\frac{I}{\kappa} \ln(M_0 - \kappa\omega) = t - \frac{I}{\kappa} \ln M_0.$$

Группируя члены с логарифмами, получим

$$\ln \frac{M_0 - \kappa\omega}{M_0} = -\frac{\kappa}{I} t. \quad (9.25)$$

Отсюда

$$1 - \frac{\kappa}{M_0} \omega = e^{-\frac{\kappa}{I} t}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{M_0}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{I} t} \right). \quad (9.26)$$

Это равенство и определяет закон изменения угловой скорости. С ростом времени t второй член в скобках стремится к нулю. Поэтому угловая скорость ротора, монотонно увеличиваясь, стремится к своему предельному значению, соответствующему установившемуся режиму:

$$\omega_{уст} = M_0/k. \quad (9.27)$$

Процесс разгона двигателя называется *переходным процессом* (его график показан на рис. 9.8). Переходной процесс считается для большинства электродвигателей законченным, когда угловая скорость ω достигнет 0,95 своего предельного значения. Продолжительность $t_{пер}$ переходного процесса легко определить, пользуясь формулой (9.25). Имеем

$$t = -\frac{I}{k} \ln \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{уст}} \right). \quad (9.28)$$

при $\omega/\omega_{уст} = 0,95$ время $t = t_{пер}$. Следовательно,

$$t_{пер} = \frac{I}{k} \ln 20 \approx \frac{3I}{k}.$$

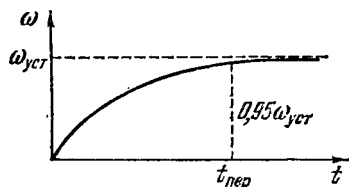


Рис. 9.8

Момент инерции ротора I и крутизну характеристики двигателя k подбирают так, чтобы время переходного процесса находилось в заданных пределах для электроприводов большинства механизмов ($t_{пер}$ не превышает 2—3 с).

§ 9.6. Момент количества движения системы, участвующей в сложном движении

Во многих случаях движение материальной системы относительно нерциальных осей рационально представить как сложное и разложить его на простейшие движения. При этом очень часто удается простить вычисление момента количества движения.

Введем подвижные координатные оси $Sx_2y_2z_2$, перемещающиеся поступательно относительно инерциальных осей $O_1x_1y_1z_1$; начало отсчета подвижных осей совместим с центром масс C материальной системы (рис. 9.9). Будем рассматривать движение материальной системы как относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$, так и относительно поступательно перемещающихся осей $Sx_2y_2z_2$. Пусть M_k — одна из точек материальной системы. Введем обозначения: m_k — масса точки M_k , r_k — ее радиус-вектор, проведенный из начала O_1 неподвижных осей, ρ_k — радиус-вектор той же точки, проведенный из начала C подвижных осей, r_c — радиус-вектор начала подвижных осей (т. е. центра масс) в системе $O_1x_1y_1z_1$. Очевидно, что

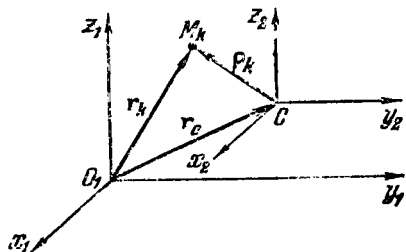


Рис. 9.9

$$r_k = r_c + \rho_k. \quad (9.29)$$

Из кинематики известно, что скорость v_k точки M_k относительно неподвижных осей складывается из переносной v_{ek} и относительной v_{rk} скоростей:

$$v_k = v_{ek} + v_{rk}.$$

Учитывая, что подвижные оси перемещаются поступательно, будем иметь

$$v_{ek} = v_C, \quad v_{rk} = \frac{d\rho_k}{dt}.$$

Следовательно,

$$v_k = v_C + v_{rk}. \quad (9.30)$$

Момент количеств абсолютного движения K_{O_1} материальной системы относительно неподвижного центра O_1 равен

$$K_{O_1} = \sum_{k=1}^n r_k \times m_k v_k. \quad (9.31)$$

Аналогичным образом определяется момент количеств относительного движения K'_C материальной системы относительно начала C подвижных осей $Sx_2y_2z_2$ (абсолютная скорость v_k заменяется относительной скоростью v_{rk} , абсолютный радиус-вектор r_k точки M_k — ее радиусом-вектором ρ_k в подвижной системе координат):

$$K'_C = \sum_{k=1}^n \rho_k \times m_k v_{rk}. \quad (9.32)$$

Установим два тождества, которым должны удовлетворять радиусы-векторы ρ_k и относительные скорости v_{rk} . Положение центра масс системы в осях $Sx_2y_2z_2$ определяется равенством (см. формулу (7.2))

$$\rho_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \rho_k.$$

Так как начало подвижной системы координат совпадает с центром масс, то $\rho_C = 0$; следовательно,

$$\sum_{k=1}^n m_k \rho_k = 0. \quad (9.33)$$

Дифференцируя это соотношение по времени и принимая во внимание, что $d\rho_k/dt = v_{rk}$, получим

$$\sum_{k=1}^n m_k v_{rk} = 0. \quad (9.34)$$

Таким образом, движение любой материальной системы в поступательно перемещающихся осях, начало которых совпадает с центром масс системы, удовлетворяет тождествам (9.33) и (9.34)

Преобразуем теперь выражение для момента количеств абсолютного движения K_{O_1} . Для этого внесем в формулу (9.31) значения r_k и v_k из равенств (9.29) и (9.30):

$$K_{O_1} = \sum_{k=1}^n (r_C + \rho_k) \times m_k (v_C + v_{rk}).$$

Раскроем в правой части скобки и разобьем все выражение на четыре суммы:

$$K_{O_1} = \sum_{k=1}^n r_C \times m_k v_C + \sum_{k=1}^n \rho_k \times m_k v_C + \sum_{k=1}^n r_C \times m_k v_{rk} + \sum_{k=1}^n \rho_k \times m_k v_{rk}.$$

Учтем следующие обстоятельства; а) множители r_C и v_C не зависят от индекса суммирования k , и их можно вынести за знак суммы; б) скалярный множитель m_k можно отнести к любому векторному множителю; в) последняя сумма в правой части в соответствии с (9.32) равна K'_C . На этом основании выражение для K_{O_1} можно представить в виде

$$K_{O_1} = r_C \times \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) v_C + \left(\sum_{k=1}^n m_k \rho_k \right) \times v_C + r_C \times \sum_{k=1}^n m_k v_{rk} + K'_C.$$

Согласно тождествам (9.33) и (9.34) второе и третье слагаемые равны нулю, а $\sum_{k=1}^n m_k = M$, где M — масса всей системы. Следовательно,

$$K_{O_1} = r_C \times M v_C + K'_C, \quad (9.35)$$

или

$$K_{O_1} = M_{O_1} (M v_C) + K'_C. \quad (9.36)$$

Это равенство можно прочитать следующим образом: *момент количеств абсолютного движения K_{O_1} относительно неподвижного центра O_1 равен сумме момента относительно того же центра количества движения центра масс системы, в предположении, что в нем сосредоточена вся ее масса, и момента относительно центра масс количеств относительного движения системы, причем последнее движение рассматривается по отношению к поступательно перемещающимся координатным осям, начало которых совпадает с центром масс системы.*

В проекциях на неподвижные оси координат векторное равенство (9.36) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= M_{x_1} (M v_C) + K'_{Cx_1}, \\ K_{y_1} &= M_{y_1} (M v_C) + K'_{Cy_1}, \\ K_{z_1} &= M_{z_1} (M v_C) + K'_{Cz_1}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Задача 9.3. Эпициклический механизм состоит из неподвижной шестерни *I*, кривошипа O_1C и сателлита *II* (рис. 9.10). Кривошип O_1C массы m_1 вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр O_1 шестерни *I* радиусом R . Считая сателлит *II* однородным диском массы m_2 и радиуса r , а кривошип однородным тонким стержнем длины $l = R + r$, определить момент количества движения механизма относительно неподвижной оси вращения кривошипа.

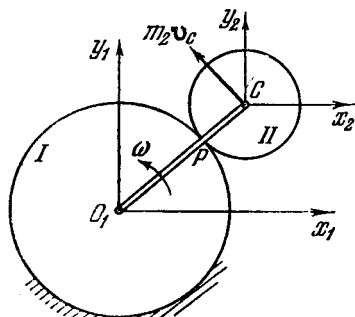


Рис. 9.10

Кривошип представляет твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси O_1z_1 . На основании формулы (9.4) имеем

$$K_{z_1}^{KP} = I_{z_1}^{KP} \omega,$$

где $\omega = \omega_z$ — проекция угловой скорости кривошипа на ось z_1 , а $I_{z_1}^{KP}$ — его момент инерции относительно той же оси. Для однородного тонкого стержня согласно формуле (9.5)

$$I_{z_1}^{KP} = \frac{1}{3} m_1 l^2 = \frac{1}{3} m_1 (R + r)^2.$$

Следовательно,

$$K_{z_1}^{KP} = \frac{1}{3} m_1 (R + r)^2 \omega.$$

Подвижная шестерня участвует в сложном движении. Поэтому для вычисления момента количества движения сателлита относительно оси O_1z_1 воспользуемся третьей формулой (9.37):

$$K_{z_1}^{II} = M_{z_1} (m_2 v_C) + K_{Cz_1}^r.$$

Построим в центре тяжести *C* шестерни *II* вектор количества движения $m_2 v_C$ (см. рис. 9.10). Плечо вектора $m_2 v_C$ относительно оси O_1z_1 равно $l = R + r$. Следовательно,

$$M_{z_1} (m_2 v_C) = m_2 v_C (R + r).$$

Движение шестерни *II* относительно осей $Cx_2y_2z_2$ представляет вращение вокруг оси Cz_2 . Поэтому согласно формуле (9.4)

$$K_{Cz_2}^r = I_{z_2}^{II} \omega_{II}.$$

В этом равенстве $I_{z_2}^{II} = \frac{1}{2} m_2 r^2$ — момент инерции относительно оси Cz_2 шестерни *II* (см. формулу (9.7)) и ω_{II} — ее угловая скорость.

Внося $M_{z_1} (m_2 v_C)$ и $K_{Cz_2}^r$ в выражение для $K_{z_1}^{II}$, получим

$$K_{z_1}^{II} = m_2 (R + r) v_C + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_{II}.$$

Для полного решения задачи нам осталось вычислить модуль скорости v_C центра тяжести C шестерни II и ее угловую скорость ω_{II} .

Точка C принадлежит одновременно и кривошпилю O_1C . Поэтому $v_C = \omega (R + r)$. Мгновенный центр скоростей P шестерни II совпадает с точкой касания обеих шестерней. Скорость точки C , как точки шестерни II , определяется равенством $v_C = \omega_{II} R$. Сравнивая оба выражения для скорости точки C , найдем $\omega_{II} = \frac{R+r}{r} \omega$.

Подставим значения v_C и ω_{II} в выражение для $K_{z_1}^{II}$ и сгруппируем члены:

$$K_{z_1}^{II} = m_2 (R + r) (R + \frac{3}{2}r) \omega.$$

Теперь найдем момент количеств движения K_{z_1} всего механизма относительно оси O_1z_1 :

$$K_{z_1} = (R + r) [\frac{1}{3}m_1 (R + r) + m_2 (R + \frac{3}{2}r)] \omega.$$

Это выражение можно записать в форме (9.4):

$$K_{z_1} = I_{\text{пр}}^* \omega, \quad (9.38)$$

где величина

$$I_{\text{пр}}^* = (R + r) [\frac{1}{3}m_1 (R + r) + m_2 (R + \frac{3}{2}r)] \quad (9.39)$$

называется *приведенным* к оси O_1z_1 моментом инерции механизма.

Заметим, что приведение момента инерции механизма к одной и той же оси можно производить различными методами. В данном примере это приведение выполнено при вычислении момента количеств движения системы.

§ 9.7. Теорема об изменении момента количеств относительного движения материальной системы

Доказанная в § 9.3 теорема относилась к абсолютному движению, т. е. к движению материальной системы относительно инерциальных осей. Кроме того, предполагалось, что точка, относительно которой вычислялся момент количеств движения, неподвижна. Эти ограничения вносят известные неудобства при изучении вращательных движений тел, не имеющих неподвижных точек (самолеты, корабли, ракеты, приборы, установленные на них и т. п.). В этом параграфе мы рассмотрим, какой вид принимает теорема об изменении момента количеств движения для относительного движения.

Будем изучать движение материальной системы относительно подвижных осей $O_2x_2y_2z_2$, перемещающихся поступательно относительно инерциальных осей $O_1x_1y_1z_1$. Напомним, что все теоремы динамики, доказанные для материальной точки, движущейся в инерциальной системе отсчета, остаются справедливыми для ее относительного движения, если только к силам, действующим на точку, присоединить переносную и кориолисову силы инерции (см. главу VI).

Подвижные оси $O_2x_2y_2z_2$ перемещаются по условию поступательно. Поэтому ускорения Кориолиса w_{kc} и соответствующие силы инерции, $m_k w_{kc}$, равны нулю. Кроме того, при поступательном

движении подвижных осей $O_2x_2y_2z_2$ переносные ускорения всех точек одинаковы и равны ускорению w_{O_2} :

$$w_{ke} = w_{O_2}.$$

Следовательно, переносная сила инерции k -й точки определяется равенством

$$J_{ke} = -m_k w_{ke} = -m_k w_{O_2}, \quad (9.40)$$

где m_k — масса точки.

На рис. 9.11 показаны координатные оси $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, ускорение полюса w_{O_2} и k -я точка материальной системы, к которой

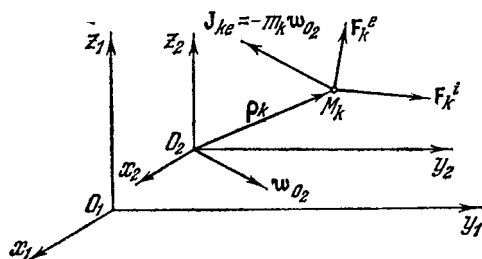


Рис. 9.11

к которой присоединена переносная сила инерции $-m_k w_{O_2}$.

Теперь координатные оси $O_2x_2y_2z_2$ можно считать неподвижными. В применении к теореме об изменении момента количества движения это означает, что в равенстве (9.9) момент количества абсолютного движения K_{O_1} ,

вычисленный относительно неподвижной точки, нужно заменить на момент количества относительного движения K'_{O_2} , вычисленный относительно начала O_2 подвижных осей $O_2x_2y_2z_2$, и к моментам внешних сил нужно присоединить моменты переносных сил инерции всех точек системы:

$$\frac{dK'_{O_2}}{dt} = M_{O_2}^e + \sum_{k=1}^n M_{O_2}(J_{ke}). \quad (9.41)$$

Согласно (9.40) имеем (см. рис. 9.11)

$$\sum_{k=1}^n M_{O_2}(J_{ke}) = \sum_{k=1}^n \rho_k \times (-m_k w_{O_2}).$$

Скалярный множитель m_k отнесем к вектору ρ_k , а общий множитель $-w_{O_2}$ вынесем за знак суммы:

$$\sum_{k=1}^n M_{O_2}(J_{ke}) = \sum_{k=1}^n m_k \rho_k \times (-w_{O_2}).$$

В соответствии с формулой (7.2) сумма, стоящая перед $(-w_{O_2})$, равна $M\rho_C$, где M — масса всей системы, а ρ_C — радиус-вектор центра масс в подвижной системе координат. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n M_{O_2}(J_{ke}) = M\rho_C \times (-w_{O_2}) = \rho_C \times (-Mw_{O_2}).$$

Произведение $-Mw_{O_2}$ назовем переносной силой инерции центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса M всей системы. (При поступательном движении осей $O_2x_2y_2z_2$ переносное ускорение центра масс C равно ускорению полюса w_{O_2} .) Будем считать, что сила инерции $-Mw_{O_2}$ приложена в центре масс. Тогда произведение $\rho_C \times (-Mw_{O_2})$ представляет собой момент силы $-Mw_{O_2}$ относительно подвижного центра O_2 :

$$M_{O_2}(-Mw_{O_2}) = \rho_C \times (-Mw_{O_2}). \quad (9.42)$$

Учитывая введенные обозначения, равенству (9.41) можно придать следующий вид:

$$\frac{dK_{O_2}^r}{dt} = M_{O_2}^e + M_{O_2}(-Mw_{O_2}). \quad (9.43)$$

Это уравнение представляет математическую запись в векторной форме теоремы об изменении момента количеств относительного движения. В проекциях на поступательно перемещающиеся оси x_2, y_2, z_2 оно дает следующие три скалярных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dK_{x_2}^r}{dt} &= M_{x_2}^e + M_{x_2}(-Mw_{O_2}), \\ \frac{dK_{y_2}^r}{dt} &= M_{y_2}^e + M_{y_2}(-Mw_{O_2}), \\ \frac{dK_{z_2}^r}{dt} &= M_{z_2}^e + M_{z_2}(-Mw_{O_2}). \end{aligned} \quad (9.44)$$

В частном, но весьма важном случае, когда начало O_2 поступательно перемещающихся осей совмещено с центром масс C материальной системы, уравнение (9.43) существенно упрощается. Действительно, в этом случае $\rho_C = 0$,

$$M_{O_2}(-Mw_{O_2}) = \rho_C \times (-Mw_{O_2}) = 0$$

и уравнение (9.13) принимает вид

$$\frac{dK_C^r}{dt} = M_C^e. \quad (9.45)$$

В проекциях на поступательно перемещающиеся оси x_2, y_2, z_2 будем иметь

$$\frac{dK_{x_2}^r}{dt} = M_{x_2}^e, \quad \frac{dK_{y_2}^r}{dt} = M_{y_2}^e, \quad \frac{dK_{z_2}^r}{dt} = M_{z_2}^e. \quad (9.46)$$

Сравним уравнение (9.9) с уравнениями (9.43) и (9.45). В первом из них при вычислении момента количеств движения K_O , учитываются абсолютные скорости точек материальной системы и за центр выбирается неподвижная точка. В уравнениях (9.43) и (9.45) при вычислении момента количеств движения $K_{O_2}^r$, учитываются скорости точек материальной системы относительно поступательно

перемещающихся осей $O_2x_2y_2z_2$ (или $Sx_2y_2z_2$) и за центр выбирается начало подвижной системы координат.

В правой части уравнения (9.43) к моментам внешних сил нужно присоединить момент относительно подвижного центра переносной силы инерции — Mw_{O_2} .

Отметим, что если за полюс выбрать центр масс, то теорема об изменении момента количеств относительного движения (уравнение (9.45)) по своей форме полностью совпадает с аналогичной теоремой об изменении момента количеств абсолютного движения (уравнение (9.9)).

Остановимся подробнее на уравнении (9.45). Так как оно по своей форме в точности совпадает с уравнением (9.9), то *движение материальной системы относительно ее центра масс происходит так же, как если бы последний был неподвижен*. Все следствия теоремы моментов количеств движения относительно неподвижной точки остаются справедливыми и для момента количеств движения относительно центра масс. В частности, если сумма моментов всех внешних сил относительно центра масс равна нулю, то момент количеств движения K'_C сохраняет постоянную величину и направление; если сумма моментов всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс и перемещающейся поступательно, равна нулю, то момент количеств движения относительно этой оси сохраняет свое первоначальное значение.

§ 9.8. Примеры и задачи

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих доказанные теоремы.

Пример 1. Поворот космонавта. Предположим, что космонавт вышел из космического корабля и совершает свободный полет. Будем считать, что космонавт отделился от корабля без вращения и что силы тяготения небесных тел (например, Земли), действующие на космонавта, сводятся к одной равнодействующей F , проходящей через его центр масс C . Тогда момент сил тяготения относительно центра масс C будет равен нулю и, следовательно, момент количеств движения относительно точки C сохраняет постоянную величину и направление. Возникает вопрос: может ли космонавт без применения реактивных микродвигателей повернуться в нужном направлении?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним первый опыт на скамейке Жуковского, в котором поворот человека достигался поворотом колеса (или руки). Так как движение материальной системы относительно центра масс происходит по тем же законам, что и относительно неподвижной точки, то любая прямая, проходящая через центр масс космонавта и перемещающаяся поступательно, играет ту же роль, что и ось скамейки Жуковского. Поэтому поворотом руки космонавт может повернуть свое тело в противоположном направлении.

Пример 2. *Изменение угловой скорости спортсмена.* Рассмотрим вращение спортсмена, совершающего прыжок с вышки в воду. Во время прыжка на спортсмена действует одна внешняя сила (сопротивлением воздуха пренебрегаем) — сила тяжести. Эта сила приложена к центру масс C спортсмена и, следовательно, она не создает момента относительно точки C . Поэтому момент количества движения K'_{Cz} спортсмена относительно горизонтальной оси z , проходящей через его центр масс перпендикулярно к плоскости движения, остается без изменения:

$$K'_{Cz} = \text{const.}$$

Движение спортсмена относительно поступательно перемещающейся оси z представляет собой вращение вокруг этой оси. Тогда согласно формуле (9.4)

$$K'_{Cz} = I_{Cz}\omega,$$

где I_{Cz} — момент инерции относительно горизонтальной оси z , а ω — угловая скорость спортсмена (направление оси z выберем так, чтобы $\omega = \omega_z$).

В начале прыжка спортсмен, отталкиваясь от трамплина, сообщает телу угловую скорость ω_1 , имея момент инерции $I_{Cz} = I_1$. Затем в процессе прыжка он группируется (складывается), уменьшая тем самым момент инерции $I_{Cz} = I_2$. Учитывая, что $K'_{Cz} = \text{const}$, получим

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1.$$

Так как $I_2 < I_1$, то $\omega_2 > \omega_1$, т. е. в середине прыжка, когда спортсмен группируется, его угловая скорость увеличивается.

Перед входом в воду спортсмен снова выпрямляется, увеличивая момент инерции I и уменьшая тем самым свою угловую скорость.

Весь процесс изменения угловой скорости спортсмена за счет изменения его момента инерции совпадает со вторым опытом на скамейке Жуковского (см. § 9.4). Роль оси скамейки играет горизонтальная ось z , проходящая через центр масс спортсмена.

Пример 3. *Методы стабилизации вращения космического аппарата.* В силу различных случайных причин космический аппарат при отделении от последней ступени ракеты получает небольшую угловую скорость Ω_0 . Для выполнения различных работ (фотографирования Земли и небесных тел, изменения орбиты, стыковки с другим космическим аппаратом, торможения перед посадкой и т. п.) космический аппарат необходимо надлежащим образом ориентировать, для чего прежде всего необходимо прекратить его вращение.

Рассмотрим два метода, с помощью которых можно остановить вращательное движение аппарата.

а) Первый метод основан на введении реактивного момента M_p . Предположим, что космический аппарат вращается вокруг оси Cz_2 , проходящей через его центр масс и перемещающейся поступательно относительно инерциальных осей координат. Два параллельно расположенных сопла реактивного микродвигателя устанавливаются на некотором расстоянии друг от друга (на рис. 9.12 ось Cz_2 направлена на читателя, а сопла A и B находятся в плоскости рисунка). При отделении продуктов сгорания создается момент M_p (см. главу XI), управляя которым можно сначала остановить вращение космического аппарата, а затем повернуть его таким образом, чтобы

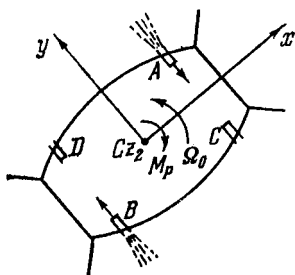


Рис. 9.12

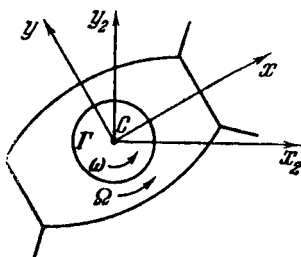


Рис. 9.13

ось Cx , жестко связанная с ним, приняла нужное направление (например, была бы направлена по вектору скорости центра масс или на какое-нибудь небесное тело).

Так как вращение космического аппарата может происходить вокруг любой оси, то он должен иметь три пары таких реактивных двигателей, расположенных в трех взаимно перпендикулярных плоскостях.

б) Второй метод основан на применении вращающихся масс. Пусть по-прежнему космический аппарат вращается с угловой скоростью Ω вокруг поступательно перемещающейся оси Cz_2 , проходящей через центр масс аппарата C . Будем считать, что силы притяжения, действующие на космический аппарат, приводятся к одной равнодействующей F , проходящей через точку C . Тогда момент внешних сил (сил притяжения) относительно центра C будет равен нулю.

Поместим внутри космического аппарата небольшой маховичок Γ . Для простоты будем считать, что жестко связанная с аппаратом ось вращения маховичка Γ совмещена с осью Cz_2 (рис. 9.13).

Рассмотрим систему, состоящую из маховичка Γ и космического аппарата (без маховичка). Так как сумма моментов всех внешних сил, относительно поступательно перемещающейся оси Cz_2 равна нулю, то момент количеств движения всей системы относительно этой оси сохраняет постоянное значение. Поэтому, если заставить вращаться маховичок Γ в ту же сторону, что и космический аппарат, вращение последнего начнет тормозиться.

Остановимся на этом явлении несколько подробнее.

Система состоит из двух тел, вращающихся вокруг поступательно перемещающейся оси Cz_2 . Момент количеств движения всей системы K'_{Cz_2} относительно оси Cz_2 будет равен сумме моментов количеств движения относительно этой же оси космического аппарата и маховичка Γ . В соответствии с формулой (9.4) будем иметь

$$K'_{Cz_2} = I_0 \Omega + I (\Omega + \omega),$$

где I_0 и I — моменты инерции относительно оси Cz_2 космического аппарата (без маховичка Γ) и маховичка Γ соответственно, Ω — угловая скорость космического аппарата относительно системы осей $Cx_2y_2z_2$, перемещающихся поступательно в инерциальной системе отсчета, и ω — угловая скорость маховичка Γ относительно космического аппарата; при этом предполагаем, что оба тела вращаются в одну сторону, $\Omega_{z_2} = \Omega$ и $\omega_{z_2} = \omega$.

Так как $K'_{Cz_2} = \text{const}$, то

$$I_0 \Omega + I (\Omega + \omega) = I_0 \Omega_0 + I (\Omega_0 + \omega_0). \quad (9.47)$$

Здесь Ω_0 и ω_0 — начальные значения Ω и ω .

Будем отсчитывать время с момента запуска маховичка. Тогда $\omega_0 = 0$. Решим теперь полученное уравнение относительно Ω :

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{I}{I_0 + I} \omega. \quad (9.48)$$

Положив $\Omega = 0$, найдем

$$\omega = -\frac{I_0 + I}{I} \Omega_0. \quad (9.49)$$

Таким образом, для того чтобы остановить вращение космического аппарата ($\Omega = 0$), маховичку Γ необходимо сообщить угловую скорость ω , определяемую равенством (9.49), причем вращение маховичка должно происходить в ту же сторону, что и вращение космического аппарата (знаки ω и Ω_0 одинаковы). Отметим, что торможение космического корабля происходит не за счет сил трения, а путем использования динамического эффекта, при котором осуществляется перераспределение угловых скоростей тел, входящих в систему. Конечно, так же как и в первом методе, на космическом аппарате нужно установить три маховичка, оси вращения которых должны быть взаимно перпендикулярны.

Первый способ стабилизации, в отличие от второго, требует одновременной затраты энергии. В этом состоит основное его преимущество.

Покажем, что с помощью маховичков космический аппарат можно повернуть на заданный угол.

Предположим, что до запуска маховичка Γ космический аппарат не вращался ($\Omega_0 = 0$). Тогда равенство (9.47) примет вид ($\omega_0 = 0$)

$$(I_0 + I) \Omega + I \omega = 0,$$

или

$$(I_0 + I) \frac{d\psi}{dt} + I \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Здесь ψ — угол поворота космического аппарата, отсчитываемый в поступательно перемещающейся системе отсчета Cx_2y_2 , а φ — угол поворота маховичка относительно аппарата.

Интегрируя последнее равенство, получим

$$(I_0 + I) (\psi - \psi_0) + I (\varphi - \varphi_0) = 0,$$

где ψ_0 и φ_0 — начальные значения углов ψ и φ . Отсюда

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{I_0 + I}{I} (\psi - \psi_0),$$

т. е. для того, чтобы повернуть космический аппарат на угол $\psi - \psi_0$, нужно повернуть маховичок в противоположную сторону на угол $\frac{I_0 + I}{I} (\psi - \psi_0)$.

Задача 9.4. Для поворота космического аппарата используется электродвигатель-маховик, уравнение вращения которого на движущемся аппарате имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{T} \omega = u, \quad (9.50)$$

где ω — относительная угловая скорость ротора электродвигателя (маховика), T — его постоянная времени *), u — управляющее воздействие, принимающее значения $\pm u_0$.

Определить продолжительность разгона t_1 , когда $u = u_0$, и торможения t_2 ($u = -u_0$) маховика, если первоначально невращающийся космический аппарат при неподвижном маховике требуется повернуть на заданный угол ψ и остановить. Ось вращения маховика проходит через центр масс космического аппарата; движение считать плоским. Моменты инерции маховика и аппарата относительно общей оси вращения соответственно равны I и I_0 .

Интегрируя уравнение (9.50) при $u = u_0 = \text{const}$ (период разгона) и начальных условиях: $\omega = 0$ при $t = 0$, получим (см. решение уравнения (8.25))

$$\omega = T u_0 (1 - e^{-t/T}) \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad (9.51)$$

В конце разгона угловая скорость маховика ω_1 будет равна

$$\omega_1 = T u_0 (1 - e^{-t_1/T}). \quad (9.52)$$

Интегрируя уравнение (9.50) при $u = -u_0$ (период торможения) и учитывая, что $\omega = \omega_1$ при $t = t_1$, получим (см. решение (8.32))

$$\omega = -T u_0 + (\omega_1 + T u_0) e^{-(t-t_1)/T} \quad (t_1 \leq t \leq t_1 + t_2). \quad (9.53)$$

В конце торможения маховик останавливается. Внося в равенство (9.53) $\omega = 0$, $t = t_1 + t_2$, найдем

$$e^{-t_2/T} = \frac{T u_0}{\omega_1 + T u_0}. \quad (9.54)$$

В условиях задачи космический аппарат и маховик должны вращаться в разные стороны, поэтому из уравнения моментов будем иметь

$$I_0 \Omega + I (\Omega - \omega) = 0;$$

при этом учтено, что в начальный момент $\Omega = \omega = 0$ (Ω — угловая скорость космического аппарата). Полагая $\Omega = d\psi/dt$, найдем

$$\frac{I_0 + I}{I} \frac{d\psi}{dt} = \omega$$

или

$$\frac{I_0 + I}{I} \psi = \int_0^{t_1+t_2} \omega dt, \quad (9.55)$$

где ψ — заданный угол поворота аппарата.

*) Постоянный параметр T имеет размерность времени t . В теории автоматического регулирования и теории управления такие параметры называются постоянными времени.

Разобьем промежуток интегрирования $(0, t_1 + t_2)$ на два промежутка: $(0, t_1)$ и $(t_1, t_1 + t_2)$. В первом промежутке ω определяется равенством (9.51), а во втором — равенством (9.53). Следовательно, равенство (9.55) принимает вид

$$\frac{I_0 + I}{I} \psi = \int_0^{t_1} T u_0 (1 - e^{-t/T}) dt + \int_{t_1}^{t_1+t_2} [-T u_0 + (\omega_1 + T u_0) e^{-(t-t_1)/T}] dt,$$

или, после интегрирования,

$$\frac{I_0 + I}{I} \psi = T u_0 [t_1 + T (e^{-t_1/T} - 1)] - T u_0 t_2 - T (\omega_1 + T u_0) (e^{-t_2/T} - 1).$$

Пользуясь (9.52) и (9.54), найдем из последнего равенства

$$t_1 = \tau + t_2, \quad (9.56)$$

где

$$\tau = \frac{I_0 + I}{I T u_0} \psi. \quad (9.57)$$

Внесем значение t_1 из (9.56) в равенство (9.52) и полученное значение для ω_1 подставим в (9.54). Тогда после сокращения на $T u_0$ получим

$$e^{-t_2/T} = \frac{1}{2 - e^{-(t_2 + \tau)/T}};$$

отсюда

$$e^{-\tau/T} e^{-2t_2/T} - 2e^{-t_2/T} + 1 = 0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно $e^{-t_2/T}$. Имеем

$$e^{-t_2/T} = e^{\tau/T} (1 - \sqrt{1 - e^{-\tau/T}})$$

(перед радикалом взят знак «минус», так как $e^{-t_2/T} < 1$).

Последнее равенство преобразуем к следующему виду:

$$e^{t_2/T} = \frac{e^{-\tau/T}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}},$$

или, умножая и деля на сопряженное выражение,

$$e^{t_2/T} = 1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}.$$

Логарифмируя это равенство, найдем t_2 , затем из (9.56) получим t_1 :

$$t_1 = \tau + T \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}), \quad t_2 = T \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}). \quad (9.58)$$

Эти равенства определяют время, в течение которого электродвигатель-маховик должен работать в режиме разгона ($u = u_0$) и режиме торможения ($u = -u_0$) для того, чтобы повернуть космический аппарат на заданный угол ψ .

Глава X

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 10.1. Кинетическая энергия материальной системы и способы ее вычисления

Как известно, кинетической энергией одной материальной точки называется половина произведения массы m точки на квадрат ее скорости. *Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий всех точек, входящих в систему.* Обозначается кинетическая энергия символом T . По определению имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2. \quad (10.1)$$

Стоящие в этом выражении скорости v_k точек материальной системы определяются относительно инерциальной системы отсчета.

Во многих случаях движение материальной системы относительно инерциальных осей целесообразно представить как сложное и разложить его на простейшие движения. При этом очень часто удается упростить вычисление кинетической энергии системы.

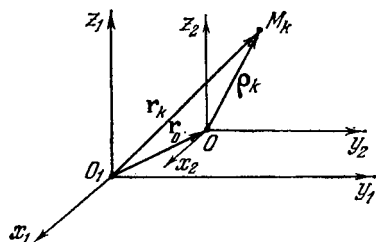


Рис. 10.1

Введем подвижные координатные оси $Ox_2y_2z_2$, перемещающиеся поступательно относительно инерциальных осей $O_1x_1y_1z_1$. Будем рассматривать движение материальной системы как относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$, так и относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_2y_2z_2$. Пусть M_k — одна из точек

материальной системы массы m_k . Введем обозначения: r_k — радиус-вектор точки M_k , проведенный из начала O_1 неподвижных осей, ρ_k — радиус-вектор той же точки, проведенный из начала O подвижных осей, r_0 — радиус-вектор начала подвижных осей в системе $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 10.1).

В соответствии с формулой (9.30)

$$v_k = v_0 + v_{kr}, \quad (10.2)$$

где v_k — скорость точки M_k , v_0 — скорость начала O подвижных осей, v_{kr} — скорость точки M_k относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_2y_2z_2$.

Под кинетической энергией относительного движения будем понимать выражение

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2, \quad (10.3)$$

получающееся из (10.1) заменой абсолютной скорости $\mathbf{v}_k$ точки M_k ее относительной скоростью $\mathbf{v}_{kr}$.

Учтем теперь, что скалярный квадрат любого вектора равен квадрату его модуля, т. е. $\mathbf{a}^2 = a^2$. Поэтому выражение (10.1) для кинетической энергии можно записать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^2,$$

или, пользуясь равенством (10.2),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{kr})^2.$$

Возведем скобку в квадрат и разобьем сумму на три части:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{v}_O^2 + 2\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{kr} + \mathbf{v}_{kr}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_O^2 + \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{kr} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{kr}^2. \end{aligned}$$

Последняя сумма равна кинетической энергии T_r относительного движения; в первой и второй суммах множители v_O^2 и $\mathbf{v}_O$ не зависят от индекса суммирования и их можно вынести за знаки сумм:

$$T = \frac{1}{2} v_O^2 \sum_{k=1}^n m_k + \mathbf{v}_O \cdot \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_{kr} + T_r.$$

Выражение $\sum_{k=1}^n m_k$ равно массе всей системы M , а $\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_{kr} = M \mathbf{v}_{Cr}$, где $\mathbf{v}_{Cr}$ — скорость центра масс C относительно поступательно перемещающихся осей $Ox_2y_2z_2$. Докажем последнее утверждение.

В соответствии с формулой (7.2) имеем

$$\rho_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \rho_k,$$

где ρ_C — относительный радиус-вектор центра масс.

Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{d\rho_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\rho_k}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_{Cr} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_{kr},$$

что и доказывает справедливость сделанного замечания.

На этом основании последнее выражение для кинетической энергии можно привести к следующему виду:

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + M \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{Cr} + T_r. \quad (10.4)$$

Если начало подвижных осей O совпадает с центром масс C системы, то $v_O = v_C$ и $v_{Cr} = 0$. В этом случае последнее равенство упрощается:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_{Cr}. \quad (10.5)$$

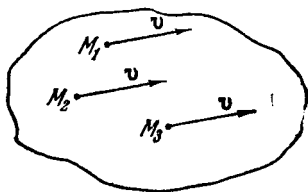
Словами его можно прочитать следующим образом (*теорема Кенига*): кинетическая энергия материальной системы в ее абсолютном движении складывается из кинетической энергии ($\frac{1}{2} M v_C^2$) центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии T_{Cr} системы в ее движении относительно поступательно перемещающихся в инерциальном пространстве вместе с центром масс осей $Sx_2y_2z_2$.

В следующем параграфе мы рассмотрим, как используются полученные формулы для определения кинетической энергии материальной системы.

§ 10.2. Кинетическая энергия твердого тела

Очень часто материальная система представляет твердое тело или совокупность твердых тел. В связи с этим нужно уметь определять кинетическую энергию твердого тела при различных видах его движения.

Так как твердое тело рассматривается как непрерывно распределенная масса, то все суммы, входящие в выражения для кинетической энергии материальной системы, переходят в интегралы, а масса m_h отдельной точки заменяется дифференциалом dm . Поэтому для твердого тела формула (10.1) примет вид



$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm, \quad (10.6)$$

Рис. 10.2

где интегрирование производится по массе всего тела.

1. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно. При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек одинаковы (рис. 10.2). Вынося v^2 в формуле (10.6) за знак интеграла, получим

$$T = \frac{1}{2} v^2 \int dm,$$

или, учитывая, что $\int dm = M$, где M — масса всего тела,

$$T = \frac{1}{2} M v^2. \quad (10.7)$$

Таким образом, *кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.*

Формула (10.7) применима также для случая, когда скорости всех точек материальной системы равны между собой по модулю. Например, по такой формуле можно вычислить кинетическую энергию ремня, участвующего в передаче вращения от одного шкива к другому.

2. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Модуль скорости любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен ωh_z , где ω — модуль угловой скорости твердого тела, а h_z — расстояние от точки до оси вращения z (рис. 10.3). Подставляя в формулу (10.6) значение скорости точки $v = \omega h_z$, получим

$$T = \frac{1}{2} \int \omega^2 h_z^2 dm,$$

или, вынося за знак интеграла ω^2 (угловая скорость одинакова для всех точек тела и от переменной интегрирования не зависит),

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int h_z^2 dm.$$

Полученный интеграл согласно формуле (9.3) представляет момент инерции тела I_z относительно оси вращения. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (10.8)$$

т. е. кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

3. Кинетическая энергия твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. При сферическом движении твердого тела модуль скорости любой его точки M определяется равенством (рис. 10.4)

$$v = \omega h_\omega,$$

где ω — угловая скорость тела, а h_ω — расстояние от точки M тела до его мгновенной оси вращения. Сравнивая с предыдущим случаем, когда $v = \omega h_z$, получим выражение для кинетической энергии твердого тела при его сферическом движении

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \quad (10.9)$$

где I_ω — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

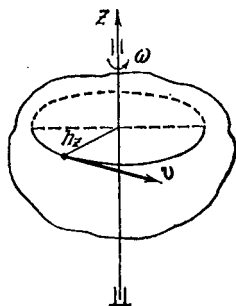


Рис. 10.3

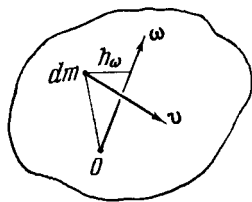


Рис. 10.4

Заметим, что, несмотря на внешнее сходство формул (10.8) и (10.9), между ними имеется и существенное различие. Положение оси вращения z неизменно относительно тела, поэтому момент инерции I_z в формуле (10.8) с течением времени не меняется. Положение мгновенной оси вращения в общем случае меняется относительно тела, вследствие чего момент инерции в формуле (10.9) есть величина переменная.

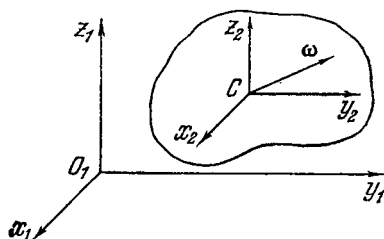


Рис. 10.5

которой совместим с центром масс C тела, и воспользуемся теоремой Канига (формула (10.5)):

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_{Cr}.$$

Движение тела относительно поступательно перемещающихся осей $Cx_2y_2z_2$ представляет собой вращение с угловой скоростью ω (рис. 10.5). Поэтому кинетическая энергия относительного движения определится формулой (10.9):

$$T_{Cr} = \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2,$$

где $I_{C\omega}$ — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс C и совпадающей с вектором угловой скорости ω .

Подставляя значение T_{Cr} в выражение для T , получим

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2. \quad (10.10)$$

Это равенство представляет математическую запись теоремы Канига для свободного твердого тела, которую можно прочесть следующим образом: *кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии в его движении относительно центра масс.*

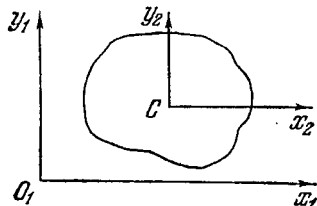


Рис. 10.6

В общем случае момент инерции $I_{C\omega}$ представляет переменную величину.

5. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении. При плоском движении твердого тела вектор угловой скорости ω всегда перпендикулярен к плоскости движения, совпадая с поступательно перемещающейся координатной осью Cz_2 (на рис. 10.6 оси O_1z_1 и Cz_2 не показаны).

Кин

ческа

Заменив в моменте инерции $I_{C\omega}$ формулы (10.10) нижний индекс $C\omega$ на Cz_2 , получим выражение для кинетической энергии твердого тела в случае плоского движения:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz_2} \omega^2. \quad (10.11)$$

Ось Cz_2 не меняет своего положения относительно тела, и, следовательно, момент инерции I_{Cz_2} не меняется с течением времени. Это обстоятельство существенно упрощает все вычисления.

Прежде чем перейти к примерам, сделаем два замечания.

а) При вычислении кинетической энергии твердого тела, движущегося произвольным образом или участвующего в плоском движении, формулы (10.10) и (10.11) не всегда являются самыми простыми. Иногда удобнее пользоваться более общей формулой (10.4) (см. пример в конце параграфа).

б) Если материальная система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия T будет равна сумме кинетических энергий T_i всех тел, входящих в систему (это непосредственно вытекает из определения):

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n. \quad (10.12)$$

Рассмотрим примеры на вычисление кинетической энергии материальной системы.

Задача 10.1. Каток К массы m_1 лежит на горизонтальной плоскости. Каток обмотан тросом, перекинутым через блок Б радиуса r . К свободному концу троса прикреплен груз Г массы m_3 . При опускании груза со скоростью v трос, разматываясь, приводит в качение без скольжения каток К (рис. 10.7). Определить кинетическую энергию системы, если момент инерции блока Б относительно оси вращения равен I_2 ; каток считать однородным круглым цилиндром, массой троса пренебречь.

Система состоит из трех тел: катка К, блока Б и груза Г. Поэтому ее кинетическая энергия T будет равна

$$T = T_K + T_B + T_G,$$

где T_K , T_B и T_G — кинетические энергии катка, блока и груза соответственно.

Груз Г движется поступательно. Его кинетическая энергия T_G согласно формуле (10.7) будет равна

$$T_G = \frac{1}{2} m_3 v^2.$$

Блок Б вращается вокруг неподвижной оси. Согласно формуле (10.8) его кинетическая энергия $T_B = \frac{1}{2} I_2 \omega_B^2$, где ω_B — угловая скорость блока.

Скорость точки касания блока с тросом равна скорости v груза Г. Следовательно, $v = r \omega_B$. Отсюда $\omega_B = v/r$ и

$$T_B = \frac{1}{2} I_2 \frac{v^2}{r^2}.$$

Каток К участвует в плоском движении. Кинетическую энергию T_K катка найдем по теореме Кенига (см. формулу (10.11)):

$$T_K = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz_2} \omega_K^2.$$

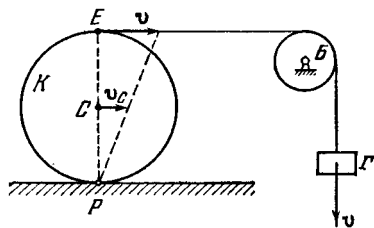


Рис. 10.7

где v_C — скорость центра C катка, ω_K — угловая скорость катка, I_{Cz_2} — его момент инерции относительно оси Cz_2 (на рис. 10.7 ось Cz_2 направлена на читателя).

Скорость верхней точки E катка K равна v . Точка P касания катка с горизонтальной плоскостью является мгновенным центром скоростей. Поэтому $v_C = v/2$. Угловую скорость ω_K найдем из равенства $v_C = R\omega_K$, где R — радиус катка. Отсюда

$$\omega_K = v_C/R = v/(2R).$$

Момент инерции катка относительно его оси Cz_2 определяется формулой (9.7): $I_{Cz_2} = \frac{1}{2}m_1R^2$.

Внося значения v_C , ω_K и I_{Cz_2} в выражение для T_K , после очевидных преобразований получим

$$T_K = \frac{3}{16}m_1v^2.$$

Теперь находим кинетическую энергию T всей системы:

$$T = \frac{3}{16}m_1v^2 + \frac{1}{2}I_2 \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}m_3v^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2}M_{\text{пр}}v^2, \quad (10.13)$$

где величина

$$M_{\text{пр}} = \frac{3}{8}m_1 + \frac{I_2}{r^2} + m_3 \quad (10.14)$$

называется *приведенной массой системы*.

Рассмотрим задачу на применение формулы (10.4).

Задача 10.2. Твердое тело массы M вращается вокруг горизонтальной оси Oz_2 (ось Oz_2 перпендикулярна к плоскости рис. 10.8); момент инерции тела относительно оси вращения Oz_2 равен I . Определить кинетическую энергию тела, если ось под-

веса Oz_2 перемещается горизонтально со скоростью v_O (эта скорость может быть переменной).

Построим неподвижные оси Ox_1y_1 и подвижные оси Ox_2y_2 . Движение тела относительно осей Ox_2y_2 представляет вращение вокруг оси Oz_2 . Обозначив через φ угол между осью x_2 и прямой OC , где C — центр тяжести тела, найдем кинетическую энергию в относительном движении

$$T_r = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2.$$

Модуль скорости точки C относительно осей Ox_2y_2 равен $h\dot{\varphi}$ (считаем $\varphi > 0$);

направление скорости v_{Cr} показано на рис. 10.8. Скалярное произведение векторов v_O и v_{Cr} будет $v_O \cdot v_{Cr} = v_O h \dot{\varphi} \cos \varphi$. Пользуясь формулой (10.4), найдем кинетическую энергию тела

$$T = \frac{1}{2}Mv_O^2 + Mv_O h \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2. \quad (10.15)$$

Применение теоремы Кенига потребовало бы больших выкладок, так как нужно было бы определить абсолютную скорость точки C и перейти от момента инерции относительно оси Cz к заданному моменту инерции относительно оси Oz_2 .

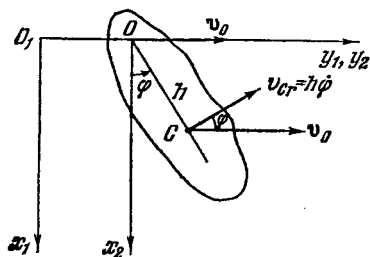


Рис. 10.8

§ 10.3. Работа сил, приложенных к материальной системе

В дальнейшем нам нужно будет вычислять суммарную работу внешних и внутренних сил, приложенных к материальной системе. При этом возникает ряд особенностей, на которых полезно остановиться подробнее.

Предположим, что при своем движении материальная система перешла из одного положения, которое она занимала в момент времени t_0 , в другое положение, соответствующее моменту времени t . Обозначим через A полную работу, которую совершают при этом перемещении системы все приложенные к ней силы, причем работы внешних и внутренних сил будем обозначать соответственно через A^e и A^i , так что

$$A = A^e + A^i. \quad (10.16)$$

Если через A_k^e и A_k^i обозначить работу, которую совершают внешние и внутренние силы, приложенные к k -й точке системы, при переходе ее из первого положения во второе, то по определению будем иметь

$$A^e = \sum_{k=1}^n A_k^e, \quad A^i = \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

1. Работа сил тяжести. Если материальная система находится в однородном поле тяжести, то на каждую ее точку M_k массой m_k действует внешняя сила $F_k^e = m_k g$, элементарная работа $d'A_k^e$ которой равна $m_k g \cdot d\mathbf{r}_k$. Направим ось z вертикально вверх.

Тогда проекции силы F_k^e будут равны 0, 0, $-m_k g$ и

$$d'A_k^e = m_k g \cdot d\mathbf{r}_k = -m_k g dz_k.$$

Найдем теперь сумму элементарных работ всех сил тяжести, приложенных к системе:

$$\sum_{k=1}^n d'A_k^e = - \sum_{k=1}^n m_k g dz_k = -g d \sum_{k=1}^n m_k z_k$$

или, учитывая третье равенство (7.3), будем иметь

$$\sum_{k=1}^n d'A_k^e = -gM dz_C,$$

где M — масса всей системы, а z_C — аппликата ее центра тяжести.

Полная работа сил тяжести при переходе системы из первого положения во второе определится равенством

$$A^e = -Mg \int_{z_{0g}}^{z_C} dz_C = -Mg(z_C - z_{0g}),$$

или

$$A^e = Mg(z_{0c} - z_c) = P(z_{0c} - z_c). \quad (10.17)$$

В этом равенстве z_c и z_{0c} — значения аппликаты центра тяжести системы в ее конечном и начальном положениях, а P — вес всей системы.

Таким образом, полная работа сил тяжести системы равна весу всей системы, умноженному на вертикальное перемещение ее центра тяжести.

2. Работа внутренних сил твердого тела. Докажем, что сумма работ всех внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю.

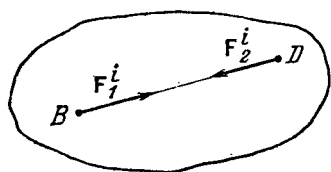


Рис. 10.9

Пусть F_1^i и F_2^i — внутренние силы взаимодействия точек B и D твердого тела (рис. 10.9). По третьему закону Ньютона они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$F_2^i = -F_1^i. \quad (10.18)$$

Составим сумму мощностей этих сил:

$$N^i = F_1^i \cdot v_B + F_2^i \cdot v_D = F_1^i \cdot v_B - F_1^i \cdot v_D = F_1^i \cdot (v_B - v_D),$$

где v_B и v_D — скорости точек B и D соответственно.

Примем точку D за полюс. Тогда согласно известной формуле кинематики

$$v_B = v_D + \omega \times \overline{DB},$$

где ω — угловая скорость тела. Внося это значение для скорости точки B в последнее равенство, получим

$$N^i = F_1^i \cdot (\omega \times \overline{DB}).$$

Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов F_1^i и $\omega \times \overline{DB}$ равно нулю (так как вектор $\omega \times \overline{DB}$ перпендикулярен к вектору $\overline{DB}$, коллинеарному с силой F_1^i). Поэтому

$$N^i = \sum_{j=1}^n N_j^i = 0,$$

причем полную мощность можно распространить, конечно, на все внутренние силы твердого тела (они входят попарно).

Так как сумма мощностей внутренних сил твердого тела равна нулю, то будет равна нулю и сумма работ этих сил:

$$A^i = \sum_{j=1}^n A_j^i = 0, \quad (10.19)$$

что доказывает сделанное утверждение.

Аналогично можно доказать (мы не будем останавливаться на этом), что сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити равна нулю.

3. Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Пусть сила F^e приложена к некоторой точке тела, отстоящей от неподвижной оси вращения z на расстоянии h . Точка приложения силы описывает при движении тела окружность радиуса h . Разложим силу F^e по осям естественного трехгранника и обозначим ее составляющие через F_τ^e , F_n^e и F_b^e (рис. 10.10). Работа составляющих сил F_n^e и F_b^e равна нулю, так как эти силы перпендикулярны к перемещению точки их приложения. Следовательно, работа силы F^e равна работе ее касательной составляющей F_τ^e . Для элементарной работы будем иметь

$$d'A^e = F_\tau^e ds = F_\tau^e h d\varphi,$$

где $ds = h d\varphi$ — дифференциал дуговой координаты точки приложения силы, а $d\varphi$ — дифференциал угла поворота тела.

Учитывая, что произведение $F_\tau^e h$ равно моменту силы F^e относительно оси вращения тела, получим

$$d'A^e = M_z^e d\varphi, \quad (10.20)$$

т. е. *элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна моменту этой силы относительно оси вращения, умноженному на дифференциал угла поворота тела.*

Работа силы F^e на конечном угле поворота определится равенством

$$A^e = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^e d\varphi, \quad (10.21)$$

где φ_0 и φ — начальное и конечное значения угла φ , определяющего положение тела (если момент M_z^e зависит не только от угла поворота φ , но также от угловой скорости ω и времени t , то нужно перейти к новой переменной интегрирования).

Если момент внешней силы не изменяется во время движения тела, т. е. $M_z^e = \text{const}$, то

$$A^e = M_z^e (\varphi - \varphi_0). \quad (10.22)$$

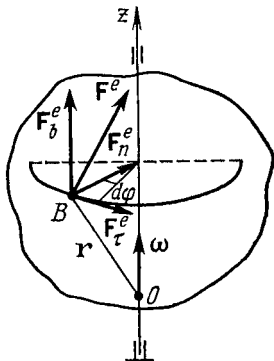


Рис. 10.10

Деля обе части равенства (10.20) на dt , получим выражение для мощности силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси:

$$N^e = M_2^e \omega_2. \quad (10.23)$$

4. Работа потенциальных сил. Понятие потенциальных, или консервативных, сил, действующих на систему материальных точек, вводится как естественное обобщение понятия потенциальной силы для одной материальной точки.

Позиционные силы, зависящие только от положения системы, называются *потенциальными*, если работа их на перемещении системы из начального положения в конечное положение не зависит от пути, по которому происходит это перемещение.

Потенциальная энергия определяется как работа всех сил при переходе системы из данного положения в положение, условно принимаемое за нулевое (положение, при котором $\Pi = 0$):

$$\Pi = A_{MM_0}, \quad (10.24)$$

где M и M_0 символически обозначают положения системы в данном и нулевом положениях.

Так же как и для одной точки, легко показать, что *работа потенциальных сил* при перемещении системы из одного положения в другое определяется равенством

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (10.25)$$

где Π_1 и Π_2 — значения потенциальной энергии системы в ее начальном и конечном положениях.

Потенциальная энергия зависит от координат материальных точек, составляющих систему, т. е.

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

Предполагается, что функция Π однозначна и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Легко показывается, что частные производные от потенциальной энергии, взятые с обратным знаком, равны соответствующим проекциям сил:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (10.26)$$

Часто можно найти потенциальную энергию отдельных сил, входящих в систему. В этом случае потенциальная энергия системы будет равна сумме потенциальных энергий:

$$\Pi = \sum_{j=1}^n \Pi_j. \quad (10.27)$$

Наконец, во многих случаях полезно разделить потенциальную энергию на энергию внутренних и внешних сил. Общая потенциальная энергия будет равна их сумме:

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^i. \quad (10.28)$$

Так же как и для одной точки, рационально иногда пользоваться *силовой функцией* U , которая отличается от потенциальной энергии только знаком:

$$U = -\Pi.$$

5. Работа внутренних сил трения скольжения сочлененных тел. В различных устройствах между движущимися телами возникают силы трения скольжения. Эти силы приложены к обоим трущимся телам. Вычислим полную работу внутренних сил трения сочлененных тел.

Предположим, что тело B движется поступательно со скоростью v , а тело C скользит по нему с относительной скоростью u (рис. 10.11). Между этими телами возникают силы трения $F_{\text{тр}}^i$ и $F_{\text{тр}}^e$, работу которых нужно определить.

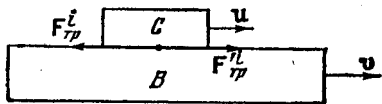


Рис. 10.11

При указанном на рис. 10.11 направлении относительной скорости u сила трения $F_{\text{тр}}^i$ будет приложена к телу C , а сила трения $F_{\text{тр}}^e$ — к телу B . Конечно,

$$F_{\text{тр}}^e = -F_{\text{тр}}^i. \quad (10.29)$$

Мощность $N_{\text{тр}}^i$ этих сил будет равна

$$N_{\text{тр}}^i = N^i + N^e = F_{\text{тр}}^i \cdot (u + v) + F_{\text{тр}}^e \cdot v;$$

при этом учтено, что абсолютная скорость тела C равна $u + v$ (направление скорости v тела B не имеет значения).

Принимая во внимание равенство (10.29), получим

$$N_{\text{тр}}^i = F_{\text{тр}}^i \cdot (u + v) - F_{\text{тр}}^i \cdot v = F_{\text{тр}}^i \cdot u.$$

Сила трения $F_{\text{тр}}^i$, приложенная к телу C , направлена всегда в сторону, противоположную относительной скорости u . Следовательно, угол между векторами $F_{\text{тр}}^i$ и u равен 180° и их скалярное произведение будет равно $-F_{\text{тр}}^i u$. Таким образом,

$$N_{\text{тр}}^i = -F_{\text{тр}}^i u, \quad (10.30)$$

т. е. полная мощность внутренних сил трения скольжения двух сочлененных тел равна взятому со знаком минус произведению модуля силы трения на модуль относительной скорости.

Из равенства (10.30) найдем сумму элементарных работ $d'A_{\text{тр}}^i$ внутренних сил трения ($d'A = N dt$ и $u = dx_r/dt$):

$$d'A_{\text{тр}}^i = -F_{\text{тр}}^i dx_r, \quad (10.31)$$

где dx_r — элементарное относительное перемещение.

Аналогично доказывается, что для вращающихся сочлененных тел (рис. 10.12) полная мощность и элементарная работа всех внутренних сил трения определяются равенствами

$$N_{\text{тр}}^i = -M_{\text{тр}}\omega_r, \quad (10.32)$$

$$d'A_{\text{тр}}^i = -M_{\text{тр}}d\varphi_r, \quad (10.33)$$

где $M_{\text{тр}}$ — модуль момента сил трения относительно оси вращения, ω_r — модуль относительной угловой скорости и $d\varphi_r$ — элементарное относительное угловое перемещение тела S .

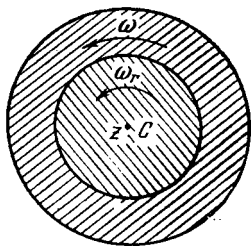


Рис. 10.12

§ 10.4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Рассмотрев методы вычисления работы сил, приложенных к материальной системе, и ее кинетической энергии, перейдем к установлению зависимостей, связывающих эти величины. Для этого освободимся мысленно от связей, заменив их соответствующими реакциями. Обозначим через F_k^e и F_k^i равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к материальной точке M_k системы. Рассмотрим два момента времени: начальный t_0 и текущий (или конечный) t . Пусть модуль скорости точки M_k в момент времени t_0 равняется v_{0k} , а в момент времени t — v_k . Тогда для каждой точки материальной системы будет справедлива теорема об изменении кинетической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} = A_1^e + A_1^i, \quad \dots, \quad \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_{0n}^2}{2} = A_n^e + A_n^i,$$

где A_k^e и A_k^i — работа сил F_k^e и F_k^i на действительном перемещении точки M_k .

Складывая почленно все равенства, получим

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_{0k}^2 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i,$$

или, учитывая выражение для кинетической энергии (10.1),

$$T - T_0 = A^e + A^i, \quad (10.34)$$

где T_0 — начальное значение кинетической энергии, а A^e и A^i — работа всех внешних и внутренних сил системы.

Равенство (10.34) представляет математическую запись теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы: *изменение кинетической энергии материальной системы при переходе ее из начального в текущее (конечное) положение равно сумме работ на этом перемещении всех внешних и внутренних сил, приложенных к точкам системы.*

Продифференцируем равенство (10.34) по времени:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA^e}{dt} + \frac{dA^i}{dt}.$$

Учитывая, что производная от работы по времени равна мощности N_k силы F_k , получим

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i. \quad (10.35)$$

Это уравнение представляет собой аналитическую запись теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: *полная производная кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе.*

Необходимо подчеркнуть, что в правую часть равенства (10.34) входит работа (в равенство (10.35) — мощность) всех внутренних и внешних сил, приложенных к системе.

Рассмотрим несколько простых примеров.

При движении автомобиля, оснащенного двигателем внутреннего сгорания, движущей силой является сила трения F_2 между ведущими колесами и полотном шоссе (см. рис. 7.1). Без этой силы движение автомобиля осуществить нельзя (см. пример 1 § 8.3). Однако сила трения F_2 при отсутствии проскальзывания колес работу не производит (так как эта сила приложена в мгновенном центре скоростей P ведущего колеса, элементарное перемещение dr_P которого равно нулю). Полезную работу при перемещении автомобиля производят внутренние силы давления газов, образовавшиеся при сгорании горючей смеси.

Точно так же при движении человека по горизонтальному полу или при его подъеме по лестнице движущими силами являются силы трения между полом и подошвами ног человека или реакции ступеней лестницы. Однако полезную работу производят не эти внешние силы, а внутренние мускульные усилия человека.

Прежде чем перейти к задачам, отметим два класса сил, которые не нужно учитывать при применении теоремы об изменении кинетической энергии системы (так как их работа равна нулю):

- 1) реакции связей без трения;
- 2) внутренние силы абсолютно твердого тела и абсолютно гибкой и нерастяжимой нити (см. п. 2 § 10.3).

§ 10.5. Задачи

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме определяют:

скорости точек материальной системы (в тех случаях, когда, зная перемещение системы, можно вычислить работу всех приложенных к ней сил);

работу одной из сил, приложенных к системе (когда по условию задачи скорости точек материальной системы известны или их можно определить другими методами).

Дифференциальная форма теоремы об изменении кинетической энергии системы применяется для составления дифференциальных уравнений движения, а также для определения ускорений (линейных или угловых).

Мы начнем с задачи, иллюстрирующей метод определения скоростей.

Задача 10.3. В системе, рассмотренной в § 10.2, груз Γ под действием силы тяжести опускается из состояния покоя вниз. Определить скорость v груза Γ при опускании его на высоту h . Трением качения катка и трением на оси блока пренебречь.

Рассмотрим внешние силы, действующие на систему. На груз Γ действует сила тяжести m_3g , на блок B действуют сила тяжести m_2g и реакция опоры (на рис. 10.13 показаны ее составляющие X и Y), на каток K действуют сила тяжести m_1g и реакция горизонтальной плоскости, которая разложена на нормальную составляющую N и силу трения F (без силы трения F каток не катился бы, а скользил). Внутренние силы учитывать не нужно, так как согласно § 10.3 сумма их работ равна нулю.

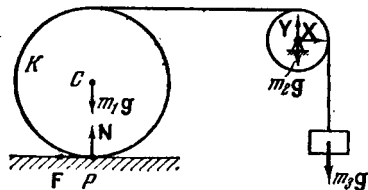


Рис. 10.13

Применим теорему о конечном изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T - T_0 = A^e.$$

Воспользуемся выражением (10.13) для кинетической энергии рассматриваемой системы:

$$T = \frac{1}{2} M_{\text{пр}} v^2,$$

где приведенная масса определяется равенством (10.14):

$$M_{\text{пр}} = \frac{3}{8} m_1 + \frac{I_2}{r^2} + m_3.$$

Движение начинается из состояния покоя, поэтому $T_0 = 0$. Перейдем к вычислению работ сил, приложенных к системе. Работа сил m_2g , X и Y равна нулю, так как точка их приложения неподвижна. Работа силы тяжести m_1g катка K равна нулю, так как эта сила перпендикулярна к перемещению точки ее приложения C . Работа нормальной реакции N и силы трения F равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенном центре скоростей P катка K , элементарное перемещение которого $dr_P = 0$. Таким образом, осталась одна сила тяжести m_3g груза Γ , работа которой равна m_3gh . Итак,

$$A^e = m_3gh.$$

Внося выражения для T и A^e в уравнение энергии и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$\frac{1}{2} M_{\text{пп}} v^2 = m_3 g h.$$

Отсюда находим скорость груза в зависимости от высоты h :

$$v = \sqrt{2 m_3 g h / M_{\text{пп}}}.$$

Простота решения задачи объясняется прежде всего тем, что все элементы, входящие в уравнение (10.34) (работа сил и кинетическая энергия системы), вычисляются без интегрирования дифференциальных уравнений.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда с помощью теоремы о конечном изменении кинетической энергии материальной системы вычисляется работа сил.

Задача 10.4. Космический аппарат вращается вокруг оси Cz_2 , проходящей через его центр масс и перемещающейся поступательно относительно инерциальной системы координат. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы с помощью вращающегося маховичка Γ прекратить вращение космического аппарата (см. рис. 9.13). Угловая скорость вращения космического аппарата до запуска маховичка равнялась Ω_0 , его момент инерции (без маховичка) относительно оси вращения Cz_2 равен I_0 ; маховик вращается относительно оси Cz_2 , его момент инерции относительно этой оси равен I (см. § 9.8).

Маховичок Γ вращается под действием внутренних сил для системы «космический аппарат — маховичок». Характер этих сил нам неизвестен, поэтому вычислить их работу непосредственно мы не можем. Так как работа сил входит в уравнение (10.34), которое при $A^e = 0$ принимает вид $T - T_0 = A^i$, то будет естественно воспользоваться им для определения искомой величины.

Внутренние силы, под действием которых вращается маховичок Γ , не изменяют движение центра масс S системы, поэтому при вычислении кинетической энергии достаточно учесть только ее вращательное движение.

Система состоит из двух тел, вращающихся вокруг оси Cz_2 . Ее кинетическая энергия T определяется равенством

$$T = \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 + \frac{1}{2} I (\Omega + \omega)^2.$$

Здесь первое слагаемое — кинетическая энергия аппарата, второе — кинетическая энергия маховичка, Ω — угловая скорость аппарата относительно инерциальной системы координат, ω — угловая скорость маховичка относительно аппарата.

В начальный момент до запуска маховичка $\Omega = \Omega_0$ и $\omega = 0$. Поэтому $T_0 = \frac{1}{2} (I_0 + I) \Omega_0^2$. В момент прекращения вращения космического аппарата $\Omega = 0$. Следовательно, для этого момента времени $T = \frac{1}{2} I \omega^2$. Внося эти выражения в $T - T_0 = A^i$, получим

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} (I_0 + I) \Omega_0^2 = A^i,$$

где A^i — искомая работа внутренних сил системы.

Для полного решения задачи необходимо знать модуль угловой скорости ω , которую нужно сообщить маховичку, чтобы остановить вращение космического аппарата. Для этого достаточно воспользоваться теоремой об изменении момента количества движения относительно оси Cz_2 . Такая задача решалась нами в § 9.8. Воспользуемся полученной там формулой (9.49):

$$\omega = \frac{I_0 + I}{I} \Omega_0.$$

После подстановки значения ω и элементарных преобразований найдем

$$A^i = \frac{1}{2} \frac{I_0}{I} (I_0 + I) \Omega_0^2.$$

Такую работу должны совершить внутренние силы системы, приводящие во вращательное движение маховичок, чтобы прекратить вращение космического аппарата (конечно, здесь учтена только полезная работа).

Отметим, что применение теоремы об изменении кинетической энергии позволило вычислить работу внутренних сил, несмотря на то, что нам не известна их аналитическая структура.

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу на составление дифференциального уравнения движения материальной системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Задача 10.5. Груз Γ массы m поднимается с помощью электрической лебедки (рис. 10.14). Барабан B приводится во вращение электромотором, который создает вращающий момент $M_{вр}$, изменяющийся по закону $M_{вр} = M_0 - k\omega$, где M_0 и k — положительные постоянные, характеризующие двигатель, а ω — угловая скорость барабана.

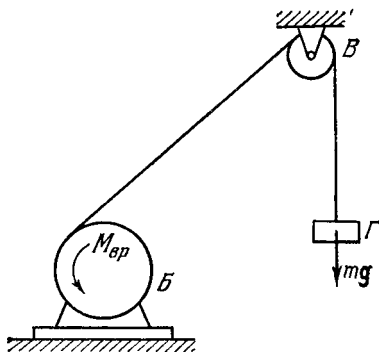


Рис. 10.14

Моменты инерции блока B и барабана B относительно их осей вращения соответственно равны I_2 и I_1 ; радиус блока равен r , радиус барабана R . Определить закон движения груза и натяжение троса. В начальный момент система находилась в покое; массой троса пренебречь.

Для того чтобы определить характер движения груза, нужно прежде всего составить дифференциальное уравнение движения всей системы. Конечно, для этого можно расчленив систему, мысленно разрезав трос, ввести силы натяжения троса и затем составить три дифференциальных уравнения движения: одно для вращения барабана, второе для вращения блока и третье для прямоли-

нейного движения груза. Все уравнения нужно решать совместно, причем прежде всего необходимо исключить силы натяжения троса. Такой метод решения задачи требует хотя и не сложных, но утомительных преобразований.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i$$

представляет большие удобства, так как в это уравнение не войдут силы натяжения троса (сумма работ, а следовательно, и мощностей реакций троса и других внутренних сил равна нулю).

Воспользуемся этим уравнением. Кинетическая энергия рассматриваемой системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1 , T_2 и T_3 — кинетические энергии барабана, блока и груза соответственно.

Барабан B и блок B вращаются вокруг неподвижных осей, поэтому согласно формуле (10.8) $T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, $T_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_B^2$, где ω_B — угловая скорость блока. Очевидно, что $\omega_B = (R/r)\omega$, следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{R^2}{r^2} \omega^2.$$

Груз Γ движется прямолинейно и поступательно со скоростью $v = R\omega$, его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$.

Подставляя значения T_1 , T_2 и T_3 в выражение для кинетической энергии системы, получим

$$T = \frac{1}{2}I_{\text{пр}}\omega^2,$$

где приведенный к оси вращения барабана момент инерции системы определяется равенством

$$I_{\text{пр}} = I_1 + \frac{R^2}{r^2} I_2 + mR^2.$$

Перейдем к вычислению мощностей. Мощность сил тяжести барабана и блока, а также реакций их опор равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Мощность N_1 силы тяжести $P = mg$ груза Γ будет

$$N_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = Pv \cos 180^\circ = -Pv = -PR\omega.$$

Мощность N_2 сил, создающих вращающий момент $M_{\text{вр}}$, вычислим по формуле (10.23):

$$N_2 = M_{\text{вр}}\omega = (M_0 - \kappa\omega)\omega.$$

Таким образом,

$$N^e = (M_0 - PR - \kappa\omega)\omega.$$

Подставляя значения T и N^e в уравнение $dT/dt = N^e + N^i$ и учитывая, что в данном примере $N^i = 0$, получим

$$I_{\text{пр}}\omega \frac{d\omega}{dt} = (M_0 - PR - \kappa\omega)\omega,$$

или, сокращая на ω ,

$$I_{\text{пр}} \frac{d\omega}{dt} = M_0 - PR - \kappa\omega.$$

Это дифференциальное уравнение движения системы отличается от рассмотренного ранее уравнения (9.24) только значением входящих в него постоянных. Поэтому воспользуемся решением (9.26) уравнения (9.24), сделав в нем соответствующие замены:

$$\omega = \frac{M_0 - PR}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{I_{\text{пр}}} t} \right).$$

Груз Γ будет подниматься со скоростью

$$v = \omega R = R \frac{M_0 - PR}{\kappa} \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{I_{\text{пр}}} t} \right).$$

По прошествии некоторого промежутка времени член $e^{-\frac{\kappa}{I_{\text{пр}}} t}$ делается ничтожно малым и движение груза будет происходить практически с постоянной скоростью

$$v_{\text{уст}} = R \frac{M_0 - PR}{\kappa} = R \frac{M_0 - mgR}{\kappa}.$$

Перейдем к вычислению сил натяжения троса на участке груз—блок. Мысленно разрежем трос и заменим его действие реакцией S_1 . Теперь груз Γ движется

под действием силы тяжести P и натяжения троса S_1 (рис. 10.15, а). Груз движется вверх с ускорением $\omega = dv/dt$. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось y , направленную вертикально вверх. Имеем

$$\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} = S_1 - P.$$

Отсюда

$$S_1 = P \left(1 + \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} \right).$$

Вычислим производную скорости по времени

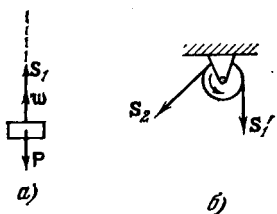


Рис. 10.15

Для вычисления силы натяжения троса на участке барабан—блок мысленно разрежем трос в двух местах (на участке барабан—блок и на участке блок—груз), заменив его реакциями S'_1 и S_2 (рис. 10.15, б). Составим дифференциальное уравнение вращения блока вокруг неподвижной оси

$$I_2 \frac{d\omega_B}{dt} = S_2 r - S'_1 r.$$

Учитывая, что $S'_1 = S_1$, получим

$$S_2 = S_1 + \frac{I_2}{r} \frac{d\omega_B}{dt}.$$

Имеем

$$\omega_B = \frac{R}{r} \omega, \quad \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{R}{r} \frac{d\omega}{dt} = \frac{R}{r} \frac{M_0 - PR}{I_{пр}} e^{-\frac{\kappa}{I_{пр}} t}.$$

Пользуясь выражением для S_1 , найдем натяжение троса на участке барабан—блок

$$S_2 = P + R \left(\frac{P}{g} + \frac{I_2}{r^2} \right) \frac{M_0 - PR}{I_{пр}} e^{-\frac{\kappa}{I_{пр}} t}.$$

С течением времени множитель $e^{-\frac{\kappa}{I_{пр}} t}$ станет достаточно малым и в установившемся режиме $S_1 = S_2 = P$.

§ 10.6. Закон сохранения полной механической энергии материальной системы

Из теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы вытекает закон сохранения полной механической энергии.

Предположим, что все силы (внешние и внутренние), действующие на систему, консервативны. Пусть система под действием этих сил

перешла из начального в некоторое текущее положение. Обозначим значение кинетической энергии системы в начальном положении через T_0 , а в рассматриваемом через T . Применим к этой системе теорему о конечном изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = A^c + A^i = A.$$

Так как по условию силы, действующие на систему, консервативны, то будет справедливо равенство (10.25):

$$A = \Pi_0 - \Pi,$$

где Π_0 и Π — значения потенциальной энергии в начальном и текущем положениях.

Тогда будем иметь первый интеграл

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

или

$$T + \Pi = h, \quad (10.36)$$

где постоянная

$$h = T_0 + \Pi_0$$

равна начальному значению полной механической энергии (напомним, что полной механической энергией называется сумма потенциальной и кинетической энергий).

Уравнение (10.36) называется *интегралом энергии* и оно выражает закон сохранения полной механической энергии системы: *если система движется под действием одних консервативных сил, то сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняет постоянное значение*. Интеграл энергии (10.36) и некоторые его обобщения имеют большое значение в теории устойчивости движения *).

Рассмотрим пример на применение интеграла энергии.

Задача 10.6. Однородный тонкий стержень AB длиной l движется в вертикальной плоскости, скользя своим концом A по гладкой горизонтальной прямой (рис. 10.16). Определить угловую скорость движения стержня, если в начальный момент она равнялась φ_0 и стержень составлял с горизонтом угол φ_0 .

Освободимся мысленно от связи (гладкой горизонтальной плоскости) и заменим ее реакцией N_A . Теперь можно считать стержень свободным, находящимся под действием двух вертикально направленных сил: силы тяжести стержня Mg и реакции N_A . Работа реакции N_A равна нулю, а сила тяжести Mg — консервативная сила. Поэтому будет справедлив интеграл энергии (10.36):

$$T + \Pi = h.$$

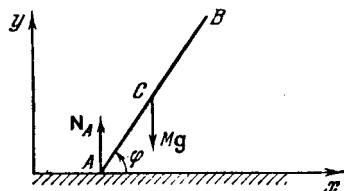


Рис. 10.16

*) См., например, Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения, — 1-е изд. — М.: Наука, 1971. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

Выбрав за нулевое положение горизонтальную плоскость, по которой движется точка A стержня, найдем потенциальную энергию силы тяжести Mg

$$\Pi = Mgy_G,$$

где y_G — ордината центра тяжести стержня.

Имеем (см. рис. 10.16) $y_G = \frac{1}{2} l \sin \varphi$, следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2} Mgl \sin \varphi.$$

Кинетическую энергию стержня найдем, пользуясь теоремой Кенига для плоского движения твердого тела (см. формулу (10.11)):

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \dot{\varphi}^2.$$

Здесь v_C — скорость центра масс C стержня, а I_{Cz} — его момент инерции относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости движения.

Согласно формуле (9.6) $I_{Cz} = \frac{1}{12} Ml^2$. Кроме того, $v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$, где x_C — абсцисса центра масс стержня. Так как $y_C = (l/2) \sin \varphi$, то $\dot{y}_C = (l/2) \cos \varphi \dot{\varphi}$. Внося эти значения для I_{Cz} , v_C^2 и $\dot{y}_C$ в выражение для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}_C^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \right) + \frac{1}{24} Ml^2 \dot{\varphi}^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{Ml^2}{24} (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2.$$

Учитывая полученные выражения для T и Π , найдем интеграл энергии для рассматриваемой системы

$$\frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{Ml^2}{24} (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} Mgl \sin \varphi = h,$$

где h — постоянная энергии, которую можно найти из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_{0C};$$

здесь $\dot{x}_{0C}$ — начальное значение проекции скорости центра масс стержня на ось x (эта величина по условию задачи не задана).

Внося начальные условия в интеграл энергии, получим

$$h = \frac{1}{2} M \dot{x}_{0C}^2 + \frac{Ml^2}{24} (1 + 3 \cos^2 \varphi_0) \dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2} Mgl \sin \varphi_0.$$

После подстановки найденного значения h в интеграл энергии, приведем последний к виду

$$\dot{x}_C^2 + \frac{l^2}{12} (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + gl \sin \varphi = \dot{x}_{0C}^2 + \frac{l^2}{12} (1 + 3 \cos^2 \varphi_0) \dot{\varphi}_0^2 + gl \sin \varphi_0.$$

Покажем, что проекция $\dot{x}_C$ скорости v_C центра масс C стержня остается постоянной во время движения. Действительно, сумма проекций всех внешних сил на неподвижную ось x равна нулю. Поэтому согласно третьему следствию теоремы о движении центра масс (см. формулу (8.14))

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const},$$

т. е.

$$\dot{x}_C = \dot{x}_{0C}.$$

Тогда последнее выражение для интеграла энергии упрощается и принимает вид

$$\frac{l}{12} (1 + 3 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi = \frac{l}{12} (1 + 3 \cos^2 \varphi_0) \dot{\varphi}_0^2 + g \sin \varphi_0.$$

Отсюда найдем угловую скорость стержня

$$|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{(1 + 3 \cos^2 \varphi_0) l \dot{\varphi}_0^2 + 12g (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}{l (1 + 3 \cos^2 \varphi)}}.$$

В момент падения на горизонтальную плоскость ($\varphi = 0$) угловая скорость стержня будет

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 3 \cos^2 \varphi_0) \dot{\varphi}_0^2 + 12 \frac{g}{l} \sin \varphi_0}.$$

Любопытно отметить, что угловая скорость стержня не зависит от начальной скорости его центра масс (если бы горизонтальная плоскость была бы не абсолютно гладкой, то это было бы несправедливо).

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание.

Интеграл энергии в форме (10.36) имеет место для систем, движение которых определяется только консервативными силами. Если, помимо консервативных сил, система подвержена действию сил сопротивления, то происходит убывание полной механической энергии; если же материальная система соединена с источником энергии (например, двигателем), то полная механическая энергия возрастает.

§ 10.7. Теорема об изменении кинетической энергии относительного движения

Если движение материальной системы рассматривается в системе координат $Oxyz$, перемещающейся по данному закону относительно инерциальной системы отсчета, то в правую часть уравнения энергии (10.34) необходимо ввести работу переносных и кориолисовых сил инерции, а в левую часть должна входить кинетическая энергия относительного движения системы. Тогда вместо уравнения (10.34) получим

$$T_r - T_{r0} = A^e + A^i + \sum_{k=1}^n A_{ke} + \sum_{k=1}^n A_{kc},$$

где A_{ke} и A_{kc} — работа переносных и кориолисовых сил инерции. Но в соответствии с результатами § 6.4 работа кориолисовых сил инерции равна нулю. Поэтому уравнение энергии примет вид

$$T_r - T_{r0} = A^e + A^i + \sum_{k=1}^n A_{ke}. \quad (10.37)$$

Если подвижные оси координат перемещаются поступательно относительно инерциальной системы отсчета, то последнюю сумму в (10.37) можно упростить. Действительно, в этом случае переносные ускорения всех точек будут одинаковы и равны ускорению начала

подвижных осей O , т. е. $\mathbf{w}_{ke} = \mathbf{w}_0$. Имеем (для поступательно движущихся осей $d\rho = d\rho$)

$$\sum_{k=1}^n d'A_{ke} = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{ke} \cdot d\rho_k = - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{w}_{ke} \cdot d\rho_k = - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{w}_0 \cdot d\rho_k.$$

Так как ускорение $\mathbf{w}_0$ полюса O от индекса суммирования не зависит, то его можно вынести за знак суммы:

$$\sum_{k=1}^n d'A_{ke} = - \left(\sum_{k=1}^n m_k d\rho_k \right) \cdot \mathbf{w}_0.$$

Из формулы (7.2) следует $\sum m_k d\rho_k = M d\rho_C$, где M — масса всей системы, а ρ_C — радиус-вектор ее центра масс в подвижной системе координат. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n d'A_{ke} = -M \mathbf{w}_0 d\rho_C.$$

При переходе системы из начального положения в текущее положение сумма работ переносных сил инерции будет равна

$$\sum_{k=1}^n A_{ke} = \sum_{k=1}^n \int d'A_{ke} = \int (-M \mathbf{w}_0 d\rho_C) = A(-M \mathbf{w}_0),$$

где символом $A(-M \mathbf{w}_0)$ обозначена работа переносной силы инерции центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы.

Уравнение (10.37) можно записать теперь в следующей форме:

$$T_r - T_{r0} = A^e + A^i + A(-M \mathbf{w}_0). \quad (10.38)$$

В этом равенстве кинетическая энергия и работа всех сил, включая переносную силу инерции центра масс, вычисляются для движения системы относительно подвижных осей $Oxyz$, перемещающихся поступательно относительно инерциальной системы отсчета.

В дифференциальной форме уравнение (10.38) принимает вид

$$\frac{dT_r}{dt} = N^e + N^i - M \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v}_{rC}, \quad (10.39)$$

где $\mathbf{v}_{rC}$ — относительная скорость центра масс.

Если $\mathbf{w}_0 = \text{const}$, т. е. ускорение полюса постоянно по модулю и направлению; то сила инерции переносного ускорения центра масс будет консервативна с потенциальной энергией

$$\Pi^* = -M \mathbf{w}_0 \cdot \rho_C. \quad (10.40)$$

Если, кроме того, силы, приложенные к системе, тоже потенциальны, то будем иметь интеграл энергии

$$T_r + \Pi + \Pi^* = h, \quad (10.41)$$

где Π — потенциальная энергия всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе.

Задача 10.7. К потолку железнодорожного вагона подвешен физический маятник (твердое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, вокруг которой оно колеблется под действием силы тяжести). В начальный момент маятник удерживался в положении, при котором прямая OC была горизонтальна (см. рис. 10.17; O_2 — с вращения, C — центр масс маятника). Затем маятник был отпущен без начальной скорости. Определить угловую скорость маятника в момент прохождения его центра масс через вертикаль, если масса маятника равна M , его момент инерции относительно оси вращения равен I , а железнодорожный вагон движется прямолинейно с постоянным ускорением w и $OC = l$.

Пусть ось z укреплена на движущемся вагоне (на рис. 10.17 вагон не показан). Направим подвижную ось y горизонтально в сторону ускорения вагона w , а подвижную ось x вертикально вниз. Мысленно будем считать вагон неподвижным, введя одновременно переносную силу инерции центра масс маятника — Mw . Кинетическая энергия T_r относительного движения маятника вычисляется по формуле (10.8) как кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг оси z :

$$T_r = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2.$$

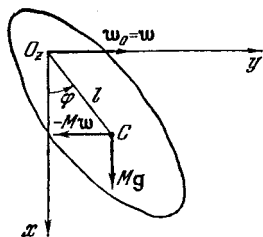


Рис. 10.17

В начальный момент прямая OC была горизонтальна, в конечный момент — вертикальна. Работа силы тяжести Mg на заданном перемещении будет равна Mgl , а работа силы инерции $\pm Mw l$ (знак «+», если в начальный момент центр масс C находился на положительной части оси y , и знак «—» в противоположном случае). Поэтому ($T_{r0} = 0$)

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = Mgl \pm Mw l;$$

отсюда найдем угловую скорость маятника в момент прохождения им вертикали

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2Ml(g \pm w)/I}.$$

Для рассматриваемой системы имеет место интеграл энергии (10.41). Примем положение маятника, при котором прямая OC горизонтальна и ордината точки C положительна, за нулевое. Тогда при перемещении маятника из данного положения в нулевое работа сил Mg и $-Mw$ будет

$$A_g = \Pi_g = -Mgl \cos \varphi, \quad A_w = \Pi_w = -Mw l (1 - \sin \varphi).$$

Следовательно, интеграл энергии (10.41) примет вид

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - Mgl \cos \varphi - Mw l (1 - \sin \varphi) = h_1,$$

или

$$\frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - Ml (g \cos \varphi - w \sin \varphi) = h,$$

где $h = h_1 + Mw l$.

Глава XI

ДИНАМИКА ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

§ 11.1. Понятие тела переменной массы

В теоретической механике, как правило, рассматривается движение материальных систем и твердых тел, масса которых предполагается постоянной. Однако можно привести большое количество примеров, когда при движении тела его масса вследствие присоеди-

нения или отделения от него материальных частиц значительно изменяется. Например, на активном участке движения ракеты от нее отделяются продукты сгорания топлива, составляющего значительную часть исходной массы заправленной ракеты на старте. Решение задачи о движении ракеты как о движении тела постоянной массы в этом случае будет неверным.

В связи с этим возникает проблема разработки методов решения задач на движение тел с переменной массой, т. е. задач механики тела переменной массы *).

Перейдем теперь к определению понятия «тела переменной массы». Будем считать массу материальных точек, из которых состоит тело, постоянной. Исходя из этого, *под телом переменной массы будем понимать тело, масса которого изменяется вследствие процесса отделения от него или присоединения к нему материальных точек*. Это значит, что точки, изменяющие массу тела, не возникают и не исчезают, а лишь вводятся в рассмотрение или исключаются из него.

Введенное определение тела переменной массы позволяет рассматривать механику тела переменной массы как один из разделов механики системы материальных точек, так как все исследования движения такого тела можно выполнить методами классической механики.

В дальнейшем рассматривается только тот случай, когда весьма малы как масса каждой отделяющейся или присоединяющейся точки, так и время между последовательными отделениями или присоединениями точек. Это предположение делает возможным такую предельную идеализацию процесса изменения массы, при которой последняя может быть принята непрерывной и дифференцируемой функцией времени.

Хотя при мгновенном изменении массы тела на величину массы отделяющейся или присоединяющейся частицы скорость тела меняется скачкообразно, величина этого изменения также будет убывать с убыванием массы этой точки и в пределе скорость тела можно считать также непрерывной и дифференцируемой функцией времени.

Пусть масса тела в начальный момент времени $t = 0$ равна m_0 . Обозначим через $m_1(t)$ массу отделившихся частиц к моменту времени t и через $m_2(t)$ — массу присоединившихся к телу частиц к этому же моменту времени t . При непрерывном присоединении и отделении частиц от тела функции $m_1(t)$ и $m_2(t)$ будут возрастающими положительными и при $t = 0$ $m_1(0) = 0$, $m_2(0) = 0$.

Таким образом, массу тела в момент времени t можно определить по формуле

$$m = m_0 - m_1(t) + m_2(t). \quad (11.1)$$

Если $m_1(t) = 0$, то происходит только процесс присоединения частиц; если $m_2(t) = 0$ — только процесс отделения.

*) В настоящее время вместо термина «тело переменной массы» часто пользуются термином «тело переменного состава».

§ 11.2. Уравнение движения точки переменной массы

Рассмотрим простейший случай, когда тело движется поступательно и, следовательно, его можно принять за материальную точку. Предположим также, что происходит процесс только отделения.

Пусть масса тела в момент времени t равна m , а скорость равна v . Количество движения тела в этот момент времени равно

$$Q = mv. \quad (11.2)$$

Так как рассматривается случай отделения частиц, то масса тела будет уменьшаться. Следовательно, изменение массы за промежутки времени Δt определится равенством

$$\Delta m = m(t + \Delta t) - m(t) \leq 0.$$

Предположим, что к моменту времени $t + \Delta t$ отделившаяся от тела частица массы $|\Delta m|$ приобрела скорость u' . Скорость же тела переменной массы к моменту времени $t + \Delta t$ обозначим через $v + \Delta v$.

Количество движения тела и отделившейся частицы в момент времени $t + \Delta t$ будет

$$\begin{aligned} Q(t + \Delta t) &= (m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m|u' = \\ &= (m + \Delta m)(v + \Delta v) - \Delta mu'. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Согласно теореме об изменении количества движения имеем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = F^e,$$

где F^e — равнодействующая всех сил, приложенных к телу. Перепишем это выражение, используя формулы (11.2) и (11.3):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[m \frac{\Delta v}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t} (u' - v) + \frac{\Delta m \Delta v}{\Delta t} \right] = F^e.$$

Отсюда получаем

$$mw - \frac{dm}{dt} (u - v) = F^e,$$

или

$$mw = F^e + \Phi, \quad (11.4)$$

где $w = dv/dt$ — ускорение точки, $\Phi = (dm/dt) v_{1r}$, $v_{1r} = u - v$ — относительная скорость отделившейся частицы, u — скорость отделившейся частицы в момент времени t .

Вектор

$$\Phi = \frac{dm}{dt} v_{1r} \quad (11.5)$$

называется *реактивной силой*.

Уравнение (11.4) получено, независимо друг от друга, различными авторами. Обычно это уравнение называют *уравнением Мещер-*

ского, так как его работа *) оказала наибольшее влияние на развитие механики тела переменной массы. Более подробно уравнение Мещерского будет рассмотрено в § 11.5.

§ 11.3. Количество движения тела переменной массы

Рассмотрим общий случай и не будем считать тело переменной массы материальной точкой. Кроме того, будем считать, что частицы не только отделяются, но и присоединяются к телу.

Переменная масса тела в момент времени t определяется равенством (11.1).

Согласно формуле (8.2) количество движения любой системы материальных точек постоянной массы, а следовательно, и твердого тела вычисляется по формуле

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_c, \quad (11.6)$$

где m — масса материальной системы, а $\mathbf{v}_c$ — скорость центра масс этой системы.

Рассмотрим теперь тело переменной массы. Благодаря процессу присоединения и отделения частиц в теле происходит перераспределение масс и поэтому центр масс тела может не оставаться в какой-либо фиксированной точке тела. Он будет совершать сложное движение: будет двигаться со всем телом (переносное движение) и будет перемещаться по отношению к телу (относительное движение). Так, например, по мере выгорания топлива центр масс ракеты перемещается относительно ее корпуса.

Итак, абсолютную скорость центра масс можно представить формулой

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{ec} + \mathbf{v}_{rc}, \quad (11.7)$$

где $\mathbf{v}_{ec}$ — переносная скорость центра масс тела, т. е. скорость той точки тела, с которой в данный момент t совпадает центр масс, а $\mathbf{v}_{rc}$ — скорость центра масс по отношению к телу, т. е. по отношению к системе координат, жестко связанной с телом.

Рассмотрим наряду с телом переменной массы тело постоянной массы и предположим, что в момент времени t массы точек, их расположение и скорости для обоих тел одинаковы. Тогда количество движения определится равенством

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k,$$

где n — число точек, составляющих тело, m_k — масса k -й точки, а $\mathbf{v}_k$ — ее скорость. Так как, по предположению, массы и скорости точек обоих тел одинаковы, то количества движения этих тел также будут равны.

*) Мещерский И. В. Динамика тела переменной массы. — С.-Петербург, 1897.

Поэтому количество движения тела переменной массы будет определяться формулой (8.2), но вместо скорости v_c следует поставить v_{ec} , так как для тела переменной массы это и есть скорость той точки тела, с которой совпадает в данный момент времени центр масс тела. Следовательно, количество движения тела переменной массы будет равно

$$Q = mv_{ec}.$$

Эта формула, конечно, верна и для тела постоянной массы, так как для этого случая $v_c = v_{ec}$.

Если тело движется поступательно, то $v_{ec} = v$, где v — скорость тела, и, следовательно, количество движения определится формулой

$$Q = mv. \quad (11.8)$$

§ 11.4. Теорема об изменении количества движения тела переменной массы

Для системы материальных точек постоянной массы теорема об изменении количества движения (см. формулу (8.5)) имеет вид

$$\frac{dQ_0}{dt} = F^e, \quad (11.9)$$

где Q_0 — количество движения, F^e — главный вектор всех внешних сил. Эту формулу можно записать в виде

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_0(t + \Delta t) - Q_0(t)}{\Delta t} = F^e. \quad (11.10)$$

Рассмотрим теперь тело переменной массы. Предположим, что в процессе движения этого тела к нему присоединяются и одновременно отделяются от него частицы. Одновременно с этим телом рассмотрим систему постоянной массы, причем предположим, что в момент времени t обе эти системы совпадают, т. е. массы и скорости точек этих систем одинаковы.

Следовательно, количества движения тел переменной и постоянной масс в момент времени t будут равны

$$Q(t) = Q_0(t), \quad (11.11)$$

где $Q(t)$ — количество движения тела переменной массы.

Пусть к моменту времени $t + \Delta t$ от тела отделятся частицы с общей массой, равной Δm_1 , и присоединятся частицы с общей массой, равной Δm_2 . Тогда в момент времени $t + \Delta t$ масса тела будет равна

$$m(t + \Delta t) = m(t) - \Delta m_1 + \Delta m_2. \quad (11.12)$$

Если обозначить через $Q_1(t + \Delta t)$ количество движения в момент времени $t + \Delta t$ всех частиц, отделившихся за время Δt , а через $Q_2(t + \Delta t)$ — количество движения в момент времени $t + \Delta t$ всех

частиц, присоединившихся за время Δt , то количество движения системы постоянной массы в момент времени $t + \Delta t$ будет равно

$$Q_0(t + \Delta t) = Q(t + \Delta t) + Q_1(t + \Delta t) - Q_2(t + \Delta t), \quad (11.13)$$

где $Q(t + \Delta t)$ — количество движения тела переменной массы в момент времени $t + \Delta t$.

Обозначим через u'_1 скорость в момент времени $t + \Delta t$ центра масс отделившихся частиц, а через u'_2 — скорость в тот же момент времени центра масс присоединившихся частиц; тогда на основании формулы (11.8) получим

$$Q_1(t + \Delta t) = \Delta m_1 u'_1, \quad Q_2(t + \Delta t) = \Delta m_2 u'_2.$$

Используя эти выражения, перепишем равенство (11.13) в виде

$$Q_0(t + \Delta t) = Q(t + \Delta t) + \Delta m_1 u'_1 - \Delta m_2 u'_2.$$

Подставляя теперь это выражение в формулу (11.10) и учитывая равенство (11.11), получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t) + \Delta m_1 u'_1 - \Delta m_2 u'_2}{\Delta t} = F^e,$$

или

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = F^e - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_1}{\Delta t} u'_1 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_2}{\Delta t} u'_2,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dt} = F^e - \frac{dm_1}{dt} u_1 + \frac{dm_2}{dt} u_2, \quad (11.14)$$

где u_1 и u_2 — скорости центров масс соответственно отделяющихся и присоединяющихся частиц в момент времени t .

Соотношение (11.14) и представляет собой математическую запись теоремы об изменении количества движения тела переменной массы.

Для случая только одного отделения частиц тела

$$m = m_0 - m_1(t)$$

и, следовательно,

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_1}{dt}, \quad \frac{dm_2}{dt} = 0.$$

Тогда уравнение (11.14) примет вид

$$\frac{dQ}{dt} = F^e + \frac{dm}{dt} u_1. \quad (11.15)$$

Для случая только присоединения частиц

$$m = m_0 + m_2(t) \quad \text{и} \quad \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt}, \quad \frac{dm_1}{dt} = 0,$$

а уравнение (11.14) будет

$$\frac{dQ}{dt} = F^e + \frac{dm}{dt} u_2. \quad (11.16)$$

Для случая равенства секундного расхода и секундного прироста масс

$$-m_1(t) + m_2(t) = 0, \quad \frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$$

и

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}_e + \frac{dm_2}{dt} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \quad (11.17)$$

В заключение этого параграфа отметим, что вывод теоремы об изменении количества движения тела переменной массы нами получен в предположении, что отделившиеся частицы сразу же после отделения прекращают свое взаимодействие с точками тела переменной массы, а влияние присоединившихся частиц начинается только с момента их присоединения к телу.

§ 11.5. Уравнение Мещерского

Пусть тело переменной массы движется поступательно, тогда согласно формуле (11.8) имеем

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}. \quad (11.18)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Так как согласно соотношению (11.1)

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt},$$

а $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$, то

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m\mathbf{w} - \frac{dm_1}{dt} \mathbf{v} + \frac{dm_2}{dt} \mathbf{v}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.14), будем иметь

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e - \frac{dm_1}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2}{dt} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}). \quad (11.19)$$

Это уравнение получено И. В. Мещерским и носит его имя. Вектор

$$\Phi = -\frac{dm_1}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2}{dt} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) \quad (11.20)$$

называется *реактивной силой*.

В дальнейшем будем рассматривать только случай отделения частиц, имеющий наибольший технический интерес. Для него уравнение (11.19) сводится к виду

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e - \frac{dm_1}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}).$$

Так как $\mathbf{v}_{ir} = \mathbf{u}_i - \mathbf{v}$ есть относительная скорость отделяющихся частиц, а

$$\frac{dm_i}{dt} = - \frac{dm}{dt},$$

то предыдущее уравнение движения можно записать следующим образом:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}^e + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_{ir} = \mathbf{F}^e + \Phi, \quad (11.21)$$

где Φ определяется формулой (11.5). Так как при отделении частиц $dm/dt < 0$, то реактивная сила Φ направлена в сторону, противоположную направлению скорости $\mathbf{v}_{ir}$.

§ 11.6. Задача Циолковского

Рассмотрим движение ракеты, запущенной с поверхности Земли вертикально вверх (рис. 11.1). Будем предполагать, что ракета движется поступательно. Движение ракеты будем рассматривать в системе координат с началом в точке пуска, ось x которой направлена вертикально вверх.

В проекции на ось x уравнение (11.21) будет

$$m\ddot{x} = F_x^e - \frac{dm}{dt} v_{ir}, \quad (11.22)$$

так как $\mathbf{v}_{ir}$ направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси x . Здесь F_x^e представляет собой результирующую силу земного притяжения и силу аэродинамического сопротивления атмосферы. Реактивная сила

$$\Phi_x = - \frac{dm}{dt} v_{ir}$$

будет направлена в сторону положительного направления оси x , так как $dm/dt < 0$.

Как уже было сказано, при доказательстве теоремы об изменении количества движения предполагалось, что отделившиеся частицы между собой и телом не взаимодействуют. Но в действительности в отбрасываемой газовой струе частицы взаимодействуют друг с другом и с ракетой.

Кроме того, на ракету действует сила атмосферного давления, зависящая от высоты x над поверхностью Земли. Эта сила не входит в состав силы аэродинамического сопротивления и не зависит от скорости ракеты v .

Пусть s — площадь выходного сечения сопла, p — давление в газовом потоке на срезе сопла, а $p(x)$ — статическое атмосферное давление. Тогда сила, обусловленная давлением газового потока и статическим давлением атмосферы, будет

$$s [p - p(x)].$$

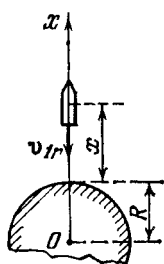


Рис. 11.1

Прибавляя эту силу к реактивной силе, получим тягу двигателя

$$p_x = - \frac{dm}{dt} v_{1r} + s[p - p(x)].$$

При движении в пустоте $p(x) = 0$ и тяга будет

$$p_x = - \frac{dm}{dt} v_{1r} + sp.$$

Это соотношение записывают в виде

$$p_x = - \frac{dm}{dt} v_e,$$

де

$$v_e = v_{1r} + \frac{sp}{q}, \quad q = - \frac{dm}{dt} > 0.$$

Величина v_e называется *эффективной скоростью истечения* ($v_e > v_{1r}$).

Таким образом, при решении задачи о движении ракеты нужно вместо уравнения (11.22) взять следующее:

$$m\ddot{x} = F_x^e - \frac{dm}{dt} v_{1r} + s[p - p(x)].$$

Решение этого уравнения в общем виде представляет значительные трудности из-за сложности закона изменения аэродинамического сопротивления, входящего в F_x^e , и находится за рамками курса теоретической механики.

При отсутствии атмосферы это уравнение примет вид

$$m\ddot{x} = F_x^e - \frac{dm}{dt} v_e, \quad (11.23)$$

де F_x^e представляет собой силу тяготения.

Если пренебречь силой притяжения Земли и сопротивлением атмосферы, то уравнение (11.23) упрощается:

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} v_e.$$

Поставленную таким образом задачу впервые решил К. Э. Циолковский.

Предположим, что масса ракеты $m = m(t)$ является непрерывной функцией времени, а эффективная скорость истечения постоянна ($v_e = \text{const}$). Отметим, что $m(0) = m_0$ — стартовая масса ракеты.

Перепишем уравнение движения ракеты в виде

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v(t) = -v_e \ln m + C,$$

де C — произвольная постоянная интегрирования.

По условию, при $t = 0$ $v(0) = 0$; тогда $0 = -v_e \ln m_0 + C$ и, следовательно,

$$C = v_e \ln m_0.$$

Итак, скорость ракеты в момент времени t равна

$$v(t) = v_e \ln \frac{m_0}{m(t)}.$$

Эта формула называется *формулой Циолковского*.

Пусть к моменту времени $t = t_k$ произошло полное сгорание топлива в ракете. Скорость ракеты в этот момент времени будет

$$v(t_k) = v_e \ln \frac{m_0}{m_k},$$

где $m_k = m(t_k)$ — масса ракеты без топлива. Введем в рассмотрение число Циолковского $z = m_0/m_k$, тогда формула для скорости ракеты в момент сгорания всего топлива примет вид

$$v = v_e \ln z. \quad (11.24)$$

Эта формула также называется *формулой Циолковского*.

Из рассмотрения формулы (11.24) следует, что скорость ракеты в момент, когда весь запас топлива будет израсходован, пропорциональна эффективной скорости истечения газов и натуральному логарифму от числа Циолковского.

Формула Циолковского (11.24) указывает на два возможных пути увеличения скорости ракеты к моменту сгорания топлива. Первый путь — это увеличение эффективной скорости истечения газов, второй путь — увеличение числа Циолковского.

В настоящее время для используемых в ракетах химических топлив эффективная скорость истечения газов $v_e \approx 2500$ м/с и несколько выше. Получение химических топлив, позволяющих получить более высокую эффективную скорость истечения газов, связано с большими трудностями. Увеличение числа z также представляет трудную техническую задачу.

Найдем, каким должно быть z , чтобы ракета к моменту сгорания топлива при $v_e = 2400$ м/с получила первую космическую скорость (≈ 8000 м/с).

При рассмотрении этой задачи, запуская ракету с Земли, нужно иметь в виду, что вследствие земного тяготения, сопротивления атмосферы, затрат на осуществление программного движения ракеты фактическая скорость ракеты после сгорания топлива будет меньше скорости, даваемой формулой (11.24). По некоторым данным потери в скорости составляют 10—15 %. Поэтому определение числа z проведем, исходя из необходимости получения скорости $v = 9000$ м/с.

Согласно формуле (11.24) найдем

$$z = e^{v/v_e} = e^{3.75} \approx 42.5.$$

Это значит, что $m_0 = 42.5 m_k$, т. е. стартовая масса ракеты должна быть в 42,5 раза больше массы ракеты без топлива. Иначе

говоря, вес топлива должен составлять примерно 98 % от стартового веса ракеты. Для современных ракет число Циолковского значительно меньше 42,5.

Как следует из приведенного расчета, получение космических скоростей с помощью одноступенчатой ракеты в настоящее время вряд ли возможно. Для этих целей используются многоступенчатые ракеты.

§ 11.7. Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты

На рис. 11.2 приведена примерная схема многоступенчатой ракеты. Многоступенчатая ракета состоит из нескольких ступеней и полезного груза. После израсходования топлива в ступени она отделяется от остальной конструкции.

Введем понятие *субракеты*. Под субракетой понимается совокупность работающей ступени, всех неработающих ступеней и полезного груза, причем для данной субракеты все неработающие ступени и полезный груз являются «полезным грузом», т. е. каждая субракета рассматривается как одноступенчатая ракета. На рис. 11.2 указана нумерация ступеней и субракет.

Применяя формулу Циолковского (11.24) к каждой субракете, получим:

после полной отработки первой ступени скорость второй субракеты

$$v_1 = v_e^{(1)} \ln z_1,$$

где $v_e^{(1)}$ — эффективная скорость истечения в первой ступени, z_1 — число Циолковского для первой субракеты;

после отработки второй ступени скорость третьей субракеты

$$v_2 = v_1 + v_e^{(2)} \ln z_2 = v_e^{(1)} \ln z_1 + v_e^{(2)} \ln z_2,$$

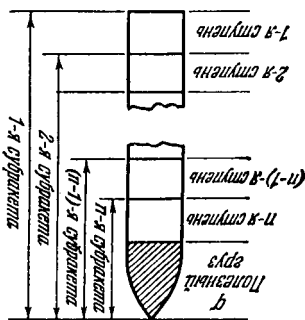


Рис. 11.2

где $v_e^{(2)}$ — эффективная скорость истечения во второй ступени, z_2 — число Циолковского для второй субракеты;

наконец, после отработки n -й ступени скорость полезного груза

$$v = v_e^{(1)} \ln z_1 + v_e^{(2)} \ln z_2 + \dots + v_e^{(n)} \ln z_n, \quad (11.25)$$

где $v_e^{(n)}$ — эффективная скорость истечения из n -й ступени, z_n — число Циолковского для n -й субракеты.

Если приближенно считать, что для всех ступеней относительная скорость истечения одинакова:

$$v_e^{(1)} = v_e^{(2)} = \dots = v_e^{(n)} = v_e,$$

то согласно формуле (11.22) будем иметь

$$v = v_e \ln (z_1 z_2 \dots z_n) = v_e \ln Z, \quad (11.26)$$

где

$$Z = z_1 z_2 \dots z_n. \quad (11.27)$$

Для упрощения выкладок положим, что у всех субракет числа Циолковского также одинаковы: $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, тогда формула (11.26) примет вид

$$v = n v_e \ln z. \quad (11.28)$$

Отсюда видно, что конечная скорость полезного груза пропорциональна числу ступеней (конечно, при условии, что $v_e^{(i)}$ и z_i одинаковы).

Найдем число z , которое должна иметь каждая ракета для достижения полезным грузом скорости $v = 9000$ м/с ($v_e = 2400$ м/с).

При $n = 1$ (одноступенчатая ракета) $z = e^{\frac{9000}{2400}} \approx 42,5$,

при $n = 2$ (двухступенчатая ракета) $z = e^{\frac{9000}{2 \cdot 2400}} \approx 6,48$,

при $n = 3$ (трехступенчатая ракета) $z = e^{\frac{9000}{3 \cdot 2400}} \approx 3,49$.

Из этих данных видно, что при реальных числах Циолковского космических скоростей можно достигнуть, применяя только многоступенчатые ракеты.

§ 11.8. Задачи

Задача 11.1. Ракета движется в однородном поле сил тяжести вертикально вверх с постоянным ускорением w (см. рис. 11.1). Сопротивлением атмосферы пренебрегаем. Эффективную скорость истечения газов v_e считаем постоянной. Определить: 1) закон изменения массы ракеты; 2) время T , за которое масса ракеты уменьшится вдвое. Определить также закон изменения массы при отсутствии поля тяготения.

В рассматриваемой задаче $F_x^e = -mg$ (g — ускорение силы тяжести), поэтому уравнение (11.23) примет вид

$$m w = - \frac{dm}{dt} v_e - mg.$$

Разделяя в этом уравнении переменные, получим

$$\frac{dm}{m} = - \frac{w + g}{v_e} dt.$$

Интегрируя и принимая во внимание, что стартовая масса ракеты $m(0) = m_0$, будем иметь

$$\ln m - \ln m_0 = - \frac{w + g}{v_e} t,$$

откуда

$$m = m_0 e^{- \frac{w + g}{v_e} t}.$$

Для момента времени T по условию задачи

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\frac{w+g}{v_e} T}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{v_e}{w+g} \ln 2.$$

Если ракета движется вне поля тяготения, то $g = 0$ и

$$m = m_0 e^{-\frac{w}{v_e} t}.$$

Задача 11.2. Ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести. Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Изменение массы ракеты происходит по закону

$$m = m_0 e^{-\alpha t}$$

(α и m_0 — постоянные величины).

К моменту времени $t = t_K$ топливо сгорает. Определить при каком значении α ракета достигает максимальной высоты подъема *).

Уравнение движения ракеты (11.23) для рассматриваемого случая имеет вид

$$m_0 e^{-\alpha t} \ddot{x} = -m_0 e^{-\alpha t} g + \alpha m_0 e^{-\alpha t} v_e, \quad \text{или} \quad \ddot{x} = -g + \alpha v_e = (k-1)g,$$

где $k = \alpha v_e / g$. Интегрируя, получим

$$\dot{x} = (k-1)gt + v_0, \quad (11.29)$$

где v_0 — начальная скорость ракеты. Считая, что при $t = 0$ $x = 0$, найдем

$$x = (k-1) \frac{gt^2}{2} + v_0 t. \quad (11.30)$$

Полученное выражение описывает движение ракеты при работающем двигателе.

Пусть масса ракеты после сгорания топлива равна m_K ; тогда момент времени сгорания t_K найдется из условия

$$m_K = m_0 e^{-\alpha t_K},$$

откуда

$$t_K = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_K} = \frac{\mu}{\alpha},$$

где $\mu = \ln z$ (z — число Циолковского).

Скорость ракеты в момент времени $t = t_K$ определится из формулы (11.29):

$$\dot{x}_1 = (k-1)gt_K + v_0 = (k-1) \frac{g\mu}{\alpha} + v_0.$$

К этому моменту времени высота подъема ракеты согласно уравнению (11.30) будет равна

$$x_1 = (k-1) \frac{g\mu^2}{2\alpha^2} + v_0 \frac{\mu}{\alpha}.$$

*) Космодемьянский А. А. Экстремальные задачи для точки переменной массы. — ДАН СССР, 1946, т. 53, № 1, с. 17—19.

Начиная с момента времени $t = t_k$, ракета будет двигаться только под действием силы притяжения Земли. Высота, на которую поднимется ракета после момента времени $t = t_k$, равна

$$x_2 = \frac{\dot{x}_1^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[(k-1) g \frac{\mu}{\alpha} + v_0 \right]^2.$$

Таким образом, полная высота подъема ракеты будет

$$H = x_1 + x_2 = (k-1) g \frac{\mu^2}{2\alpha^2} + v_0 \frac{\mu}{\alpha} + \frac{1}{2g} \left[(k-1) g \frac{\mu}{\alpha} + v_0 \right]^2.$$

Найдем теперь максимальную высоту подъема, считая H функцией α . Применяя обычный способ отыскания максимума функции, т. е. находя производную от H по α и приравнявая ее нулю, мы определим значение α , при котором достигается максимальная высота подъема. Эта максимальная высота равна

$$H_{\max} = \frac{(v_{el} + v_0)^2}{2g}$$

и достигается при $\alpha = \infty$, т. е. при мгновенном сгорании топлива. Мгновенное сгорание топлива влечет за собой бесконечно большое ускорение ракеты в начале движения, и, следовательно, полученное условие максимального подъема ракеты ($\alpha = \infty$) практически невыполнимо и недопустимо.

При постепенном сгорании топлива ускорение ракеты будет конечным, но при этом неизбежен проигрыш в достигаемой высоте. Коэффициент $k = \alpha v_e / g$ называется коэффициентом перегрузки (давление любого груза в ракете на свою опору точно в k раз превосходит величину силы притяжения груза к Земле *).

Зададимся каким-либо фиксированным значением коэффициента перегрузки k . Тогда $\alpha = kg/v_e$. При этом значении α и при $v_0 = 0$ высота подъема ракеты будет

$$H = (k-1) \frac{\mu^2 v_e^2}{2gk}.$$

При $v_0 = 0$

$$H_{\max} = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g}.$$

Следовательно,

$$H = H_{\max} \frac{k-1}{k}.$$

Из этой формулы (формулы Космодемьянского) следует, что уменьшение коэффициента перегрузки влечет за собой уменьшение максимальной высоты подъема ракеты. При $k = 4$ она будет на 25 % меньше, чем $H_{\max}$.

Задача 11.3. Ракета движется вертикально вверх с постоянной скоростью v_0 (см. рис. 11.1). Эффективная скорость истечения газов постоянна. Сила притяжения к Земле обратно пропорциональна квадрату расстояния от ракеты до центра Земли. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Определить закон изменения массы ракеты.

Так как для рассматриваемой задачи

$$F_x^e = - \frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \quad \omega = 0,$$

то уравнение (11.23) будет иметь вид

$$\frac{dm}{dt} v_e - \frac{mgR^2}{(R+x)^2} = 0. \quad (11.31)$$

*) Пусть груз, находящийся в ракете, имеет массу m_i ; тогда на основании принципа Даламбера имеем $-m_i g (k-1) - m_i g + R = 0$, где R — реакция, действующая на груз. Следовательно, $R = km_i g$.

По условию задачи скорость ракеты v_0 постоянна, т. е. $dx/dt = v_0 = \text{const}$, откуда

$$x = v_0 t + C.$$

При $t = 0$ $x = 0$, следовательно, $C = 0$ и $x = v_0 t$. Подставляя это выражение в соотношение (11.31), получим

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = - \frac{gR^2}{v_e (R + v_0 t)^2}.$$

Интегрирование дает

$$\ln m = \frac{gR^2}{v_0 v_e (R + v_0 t)} + C_1.$$

Так как при $t = 0$ $m(0) = m_0$, то

$$C_1 = \ln m_0 - \frac{gR}{v_0 v_e}.$$

Подставляя это значение C_1 в предыдущее равенство, найдем после очевидных преобразований закон изменения массы ракеты

$$m = m_0 e^{-\frac{gRt}{v_e (R + v_0 t)}}.$$

Задача 11.4. Ракета движется в поле земного тяготения вертикально вверх так, что ее масса изменяется по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$, где α и m_0 — постоянные величины. Эффективная скорость истечения газов постоянна. Начальная скорость равна нулю ($v_0 = 0$). Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить скорость ракеты как функцию x , где x — высота подъема ракеты над поверхностью Земли (см. рис. 11.1).

По условию $F_x^e = -mgR^2/(R+x)^2$; уравнение движения ракеты (11.23) имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{mgR^2}{(R+x)^2} - \frac{dm}{dt} v_e.$$

Так как $m = m_0 e^{-\alpha t}$, то после подстановки получим

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{gR^2}{(R+x)^2} + \alpha v_e.$$

Принимая во внимание, что $dx = v dt$, и умножая обе части полученного уравнения на $v dt$, будем иметь

$$v dv = - \frac{gR^2}{(R+x)^2} dx + \alpha v_e dx.$$

Интегрируя уравнение

$$\int_0^v v dv = - \int_0^x \frac{gR^2}{(R+x)^2} dx + \alpha v_e \int_0^x dx,$$

получим

$$\frac{v^2}{2} = gR^2 \left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R} \right) + \alpha v_e x;$$

отсюда найдем закон изменения скорости ракеты от высоты x ее подъема

$$v = \sqrt{2gR^2 \left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R} \right) + 2\alpha v_e x}, \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{2(\alpha v_e R - gR^2)}{R(R+x)}} x.$$

Глава XII

ГЕОМЕТРИЯ МАСС

§ 12.1. Введение

Динамика твердого тела является важным разделом теоретической механики, что объясняется прежде всего теми приложениями, которые она имеет в самых различных вопросах техники. Так, например, конструирование и расчет станков, железнодорожного и автомобильного транспорта, управление полетом самолетов и космических аппаратов, борьба с качкой судна, конструирование и расчет гироскопических приборов, сохраняющих заданную ориентацию или автономно определяющих нужное направление (гироскопические компасы, гировертикали), и т. п. основаны на динамике твердого тела.

Движение тел существенным образом зависит от характера распределения масс. В этом мы уже убедились на ряде примеров. Так, спортсмен при прыжке в воду, группируясь (т. е. меняя распределение масс), увеличивает свою угловую скорость (см. пример на стр. 199); время установления угловой скорости ротора электромотора зависит от момента инерции ротора (см. пример на стр. 191); скорость вращения маховичка, которую необходимо сообщить ему для прекращения вращательного движения космического аппарата, зависит от соотношения моментов инерции (см. пример на стр. 200—201) и т. д. Поэтому изучение динамики твердого тела начинается, как правило, с вводной главы, посвященной геометрии масс. Из самого названия видно, что в этой главе изучается не движение твердого тела, а только характер распределения его массы.

§ 12.2. Основные определения

Как уже отмечалось, в теоретической механике считается, что масса твердого тела распределена непрерывно (см. стр. 154).

Возьмем в теле некоторую точку и выделим небольшой объем Δv с массой Δm так, чтобы выбранная точка находилась внутри этого объема. Отношение $\gamma_{cp} = \Delta m / \Delta v$ называется *средней плотностью объема Δv тела*, а предел этого отношения

$$\gamma = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad (12.1)$$

— *плотностью тела в данной точке* (предполагается, что при $\Delta v \rightarrow 0$ выбранная точка остается все время внутри объема Δv).

Если тело неоднородно, то его плотность меняется от точки к точке. Отнесем тело к системе координат $Oxyz$. Тогда для неоднородного тела плотность γ будет функцией координат

$$\gamma = \gamma(x, y, z).$$

Масса неоднородного тела вычисляется по формуле

$$M = \int \gamma dv = \iiint \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Плотность однородного тела одинакова во всех его точках, причем

$$\gamma = M/V = \text{const}, \quad (12.2)$$

где M — масса тела, а V — его объем.

В § 9.2 было дано определение момента инерции относительно оси: *моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма произведений масс точек системы на квадраты расстояний от точек до оси*. При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл.

Возьмем в теле элемент с массой $dm = \gamma dv$ и координатами x, y, z . Квадраты расстояний от этого элемента до координатных осей x, y, z будут соответственно равны (рис. 12.1)

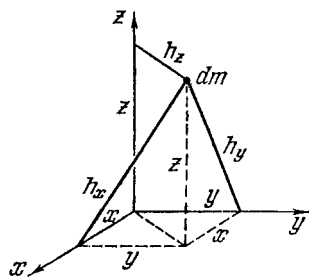


Рис. 12.1

$$h_x^2 = y^2 + z^2, \quad h_y^2 = z^2 + x^2, \quad h_z^2 = x^2 + y^2.$$

Следовательно, моменты инерции тела относительно координатных осей определяются равенствами

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm. \quad (12.3)$$

В этих формулах под символом $\int F(x, y, z) dm$ подразумевается интеграл, распространенный по массе всего тела. Такое условное обозначение вводится для простоты записи. Конечно, при непосредственном вычислении интеграла нужно перейти к тройным интегралам по объему, причем дифференциал массы $dm = \gamma dv = \gamma dx dy dz$. В дальнейшем будет показано, что в некоторых случаях тройной интеграл можно заменить двойным или даже обычным определенным интегралом.

Одновременно с осевыми моментами инерции введем *полярный момент* I_O , определив его как сумму произведений масс точек материальной системы на квадраты их расстояний до данного полюса O . Если за полюс взять начало координат O , то квадрат расстояния от элемента dm до точки O будет равен $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и, следова-

тельно, полярный момент инерции твердого тела можно вычислить по формуле

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm. \quad (12.4)$$

По самому определению полярный момент инерции зависит только от выбора полюса и не зависит от направления координатных осей.

Сравнивая равенства (12.3) и (12.4), легко установить формулу

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0. \quad (12.5)$$

Отметим два свойства моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей.

1. Момент инерции относительно любой из осей всегда меньше суммы моментов инерции относительно двух других осей, но больше их разности.

Действительно, например,

$$I_x + I_y - I_z = 2 \int z^2 dm > 0, \quad I_x - I_y - I_z = -2 \int x^2 dm < 0;$$

отсюда

$$I_z < I_x + I_y, \quad I_z > I_x - I_y. \quad (12.6)$$

Этому свойству можно дать простое геометрическое толкование: из трех отрезков, длины которых пропорциональны моментам инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, всегда можно построить треугольник.

2. Сумма моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей не зависит от направления этих осей.

Это свойство вытекает из равенства (12.5).

Из первого свойства следует, что моменты инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей нельзя задать произвольно — они должны удовлетворять соотношениям (12.6).

Напомним, что *радиусом инерции* тела относительно данной оси называется расстояние ρ от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу M всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной оси равнялся моменту инерции I тела относительно той же оси:

$$I = M\rho^2. \quad (12.7)$$

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, так как они представляют сумму положительных чисел. В нуль осевой момент инерции может обратиться только в одном частном случае, когда все материальные точки системы расположены на оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Для полной характеристики распределения массы тела относительно данной системы координат, кроме осевых моментов инерции I_x , I_y и I_z , вводят еще центробежные моменты инерции. Для одной материальной точки центробежным моментом инерции I_{xy} называется произведение ее координат x и y на массу точки m , т. е. величина xym (аналогично определяются центробежные моменты инерции I_{yz} и I_{zx}). Центробежными моментами инерции твердого тела называются величины, определенные равенствами

$$I_{xy} = \int xy dm, \quad I_{yz} = \int yz dm, \quad I_{zx} = \int zx dm. \quad (12.8)$$

Как видно из (12.8), центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов:

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{yz} = I_{zy}, \quad I_{zx} = I_{xz}.$$

Центробежные моменты нельзя задавать произвольно. Действительно, из неравенства

$$\int (x - y)^2 dm \geq 0$$

следует

$$\int (x^2 + y^2) dm \geq 2 \int xy dm,$$

или, пользуясь формулами (12.3) и (12.8),

$$I_{xy} \leq 1/2 I_z, \quad I_{yz} \leq 1/2 I_x, \quad I_{zx} \leq 1/2 I_y$$

(два других неравенства получаются аналогично).

Центробежные моменты инерции зависят не только от направления координатных осей, но и от выбора начала координат. В связи с этим часто говорят о центробежных моментах инерции в данной точке, понимая под этим, что начало координат совпадает с данной точкой.

В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут иметь любой знак и обращаться в нуль. *Главной осью инерции тела называется ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие индекс этой оси, равны нулю.* Например, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, то ось z — главная ось инерции тела. *Главной центральной осью инерции называется главная ось инерции, проходящая через центр масс тела.*

Отметим два частных случая, когда можно сразу определить характер оси.

1. Если тело имеет плоскость материальной симметрии*), то для всех ее точек ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью инерции.

2. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции и называется *осью динамической симметрии*.

Докажем для примера второе свойство (первое доказывается аналогично). Возьмем на оси материальной симметрии произвольную точку O и построим систему координат с началом в этой точке, направив ось z по оси симметрии, а оси x и y перпендикулярно к оси z произвольным образом. В силу материальной симметрии относительно оси z каждой точке A тела с координатами (x_A, y_A, z_A) и массой dm будет соответствовать другая точка B такой же массы и с координатами

*) Под материальной симметрией понимается не только геометрическая симметрия, но и симметричное распределение плотности.

натами $(-x_A, -y_A, z_A)$ (рис. 12.2). При составлении интегральных сумм для центробежных моментов инерции I_{xz} и I_{yz} будем иметь

$$xz \, dm + (-x) z \, dm = 0,$$

$$yz \, dm + (-y) z \, dm = 0.$$

Следовательно,

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0,$$

т. е. ось z — главная центральная ось инерции (она будет центральной, так как центр масс тела находится на оси симметрии).

Осевые и центробежные моменты инерции часто обозначаются первыми буквами латинского алфавита:

$$\begin{aligned} I_x &= A, & I_y &= B, & I_z &= C, & I_{yz} &= D, \\ I_{zx} &= E, & I_{xy} &= F. \end{aligned} \quad (12.9)$$

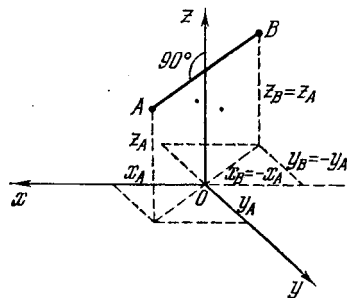


Рис. 12.2

Матрица, составленная из осевых I_x, I_y, I_z и взятых с обратным знаком центробежных моментов инерции $-I_{xy}, -I_{yz}, -I_{zx}$, называется *тензором инерции* в данной точке *):

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}. \quad (12.10)$$

В силу симметрии центробежных моментов инерции этот тензор имеет шесть составляющих. Тензор инерции характеризует распределение масс тела относительно данной точки.

Размерность всех моментов инерции (осевых, полярных и центробежных) в международной системе СИ равна $\text{кг} \cdot \text{м}^2$, а в технической — $\text{кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$.

§ 12.3. Примеры вычисления моментов инерции

Приведем несколько примеров на вычисление моментов инерции.

1. Моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда. Вычислим моменты инерции относительно осей Cx, Cy, Cz , проведенных через центр масс параллельно ребрам; масса параллелепипеда M , длины ребер $2a, 2b, 2c$ (рис. 12.3).

Воспользуемся первой формулой (12.3):

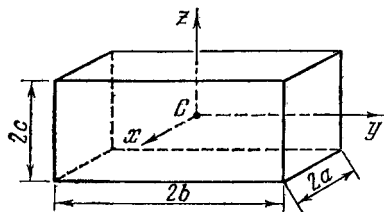


Рис. 12.3

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \, dm.$$

*) Для того чтобы матрица была тензором, необходимо, чтобы ее элементы (в данном случае моменты инерции) удовлетворяли некоторым условиям инвариантности

относительно преобразования поворота осей координат. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данного курса. Заметим только, что моменты инерции удовлетворяют этим условиям.

Заменяем дифференциал массы dm на $\gamma dv = \gamma dx dy dz$, где $\gamma = M/V = M/(8abc)$, и перейдем к тройному интегралу

$$I_x = \iiint \gamma (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{M}{8abc} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Этот интеграл можно представить следующим образом:

$$I_x = \frac{M}{8abc} \left[\int_{-a}^a dx \int_{-c}^c dz \int_{-b}^b y^2 dy + \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c z^2 dz \right],$$

или, интегрируя,

$$I_x = \frac{M}{8abc} \left[2a2c2 \frac{b^3}{3} + 2a2b2 \frac{c^3}{3} \right] = \frac{M}{3} (b^2 + c^2).$$

Таким образом, моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда относительно центральных осей определяются равенствами (I_y и I_z получены круговой перестановкой букв)

$$I_x = \frac{M}{3} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{M}{3} (c^2 + a^2), \quad I_z = \frac{M}{3} (a^2 + b^2). \quad (12.11)$$

Из этих формул следует, что момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к некоторой грани, равен одной трети массы тела, умноженной на квадрат половины гипотенузы рассматриваемой грани.

Центробежные моменты инерции равны нулю, так как координатные плоскости являются плоскостями материальной симметрии.

Очень часто выбором соответствующего элемента можно сразу свести вычисление момента инерции к обычному интегралу.

Проиллюстрируем это на следующих примерах.

2. Момент инерции однородного цилиндра относительно его оси. Пусть радиус цилиндра равен R , а его масса M . Построим цилиндрическую трубку радиуса ρ ($\rho < R$) и толщиной $d\rho$ (рис. 12.4). За элемент массы dm возьмем массу этой трубки. Такой выбор элемента массы объясняется тем, что расстояния от всех его точек до оси цилиндра одинаковы и равны ρ .

Объем трубки с точностью до членов высшего порядка равен

$$dv = 2\pi\rho H d\rho,$$

а ее масса

$$dm = \gamma dv = \gamma 2\pi\rho H d\rho.$$

В этих равенствах H — высота цилиндра, а γ — его плотность. Объем всего цилиндра $V = \pi R^2 H$. Следовательно,

$$\gamma = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}, \quad dm = \frac{2M\rho d\rho}{R^2}.$$

Умножим элемент массы на квадрат его расстояния до оси цилиндра ρ^2 . Тогда

$$I = \int \rho^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho.$$

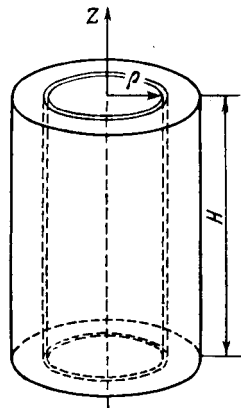


Рис. 12.4

Вычислив интеграл, найдем момент инерции однородного круглого цилиндра относительно его оси:

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \quad (12.12)$$

3. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Построим прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с центром шара O . В силу симметрии все три осевых момента инерции, I_x , I_y и I_z , равны между собой:

$$I_x = I_y = I_z = I,$$

где I — их общее значение.

Из формулы (12.5) найдем $3I = 2I_O$; отсюда

$$I = \frac{2}{3}I_O. \quad (12.13)$$

Таким образом, задача свелась к вычислению полярного момента инерции шара относительно его центра.

За элемент массы возьмем массу шарового слоя радиусом ρ и толщиной $d\rho$. Выбор такого элемента массы объясняется тем, что расстояния от всех точек шарового слоя до его центра O равны ρ .

Объем слоя $dv = 4\pi\rho^2 d\rho$, а его масса $dm = \gamma dv$, где

$$\gamma = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Здесь M — масса шара, γ — его плотность, R — радиус. Полярный момент инерции шарового слоя относительно его центра O равен $\rho^2 dm$, следовательно,

$$I_O = \int \rho^2 dm = \int_0^R \rho^2 \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} 4\pi\rho^2 d\rho = 3 \frac{M}{R^3} \int_0^R \rho^4 d\rho,$$

или

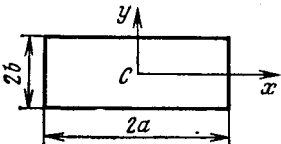
$$I_O = \frac{3}{5}MR^2.$$

Зная полярный момент, найдем из равенства (12.13) момент инерции I однородного шара относительно оси, проходящей через его центр:

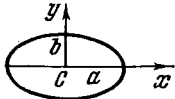
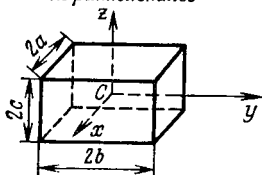
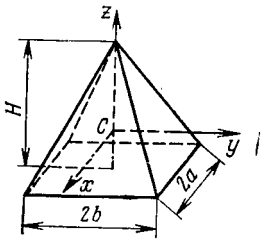
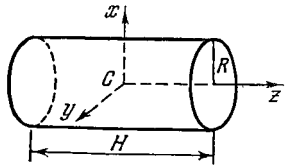
$$I = \frac{2}{5}MR^2.$$

Ниже приведена таблица 3 моментов инерции простейших однородных тел.

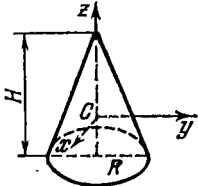
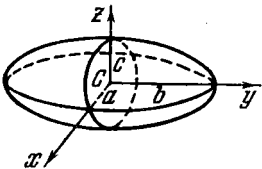
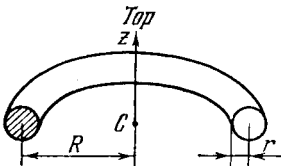
Т а б л и ц а 3

Тело	Момент инерции
Отрезок прямой 	$I_x = \frac{1}{12} M l^2, \quad I_{x'} = \frac{1}{3} M l^2$
Площадь прямоугольника 	$I_x = \frac{1}{3} M b^2, \quad I_y = \frac{1}{3} M a^2,$ $I_{cz} = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$

Продолжение табл. 3

Тело	Момент инерции
<i>Площадь эллипса</i> 	$I_x = \frac{1}{4} M b^2, \quad I_y = \frac{1}{4} M a^2,$ $I_z = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2)$
<i>Прямоугольный параллелепипед</i> 	$I_x = \frac{1}{3} M (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{3} M (a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$
<i>Прямоугольная пирамида</i> 	$I_x = \frac{M}{20} \left(\frac{3}{4} H^2 + 4b^2 \right),$ $I_y = \frac{M}{20} \left(\frac{3}{4} H^2 + 4a^2 \right),$ $I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$
<i>Прямой круглый цилиндр</i> 	$I_x = I_y = \frac{1}{4} M \left(\frac{1}{3} H^2 + R^2 \right),$ $I_z = \frac{1}{2} M R^2$

Продолжение табл. 3

Тело	Момент инерции
<i>Прямой круглый конус</i> 	$I_x = I_y = \frac{3}{20} M \left(\frac{1}{4} H^2 + R^2 \right),$ $I_z = \frac{3}{10} M R^2$
<i>Эллипсоид</i> 	$I_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{M}{5} (a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$
	$I_z = M \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$

§ 12.4. Моменты инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса—Штейнера)

Существует простая связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Эта связь устанавливается теоремой Гюйгенса—Штейнера: *момент инерции I тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции I_C тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Действительно, пусть оси I и II параллельны, причем ось I проходит через центр масс C тела. Возьмем начало координат в точке C ,

совместим ось z с осью I , а ось y направим так, чтобы она пересекала ось II (рис. 12.5). Выделим в теле произвольный элемент массой dm и опустим из него перпендикуляры на оси I и II , обозначив их соответственно через ρ и ρ_1 . Согласно определению моментов инерции будем иметь

$$I_C = \int \rho^2 dm, \quad I = \int \rho_1^2 dm.$$

По теореме косинусов найдем $\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \alpha$, или, учитывая, что $\rho \cos \alpha = y$, где y — ордината элемента,

$$\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2dy.$$

Подставим это выражение для ρ_1^2 в формулу, определяющую момент инерции I :

$$I = \int (\rho^2 + d^2 - 2yd) dm = \int \rho^2 dm + d^2 \int dm - 2d \int y dm.$$

Первый интеграл равен I_C , второй — массе тела M , а третий — нулю (согласно формуле (7.3) $\int y dm = My_C = 0$, так как начало координат совпадает с центром масс). Следовательно,

$$I = I_C + Md^2, \quad (12.14)$$

что доказывает теорему.

Формула (12.14) широко используется в практических расчетах при определении моментов инерции тел относительно осей, не проходящих через центр масс. Кроме того, применяя метод разбienia, с помощью этой формулы можно определить осевые моменты инерции тел сложной формы. Поясним это примером.

Задача 12.1. Маятник, изображенный на рис. 12.6, состоит из тонкого однородного стержня длиной l и массой m_1 и круглого однородного диска радиусом R и массой m_2 . Определить момент инерции I_z маятника относительно оси его вращения Oz (ось Oz направлена перпендикулярно к плоскости рисунка).

Маятник состоит из двух тел: стержня и диска. Поэтому

$$I_z = I_z^{\text{CT}} + I_z^{\text{Д}},$$

где I_z^{CT} и $I_z^{\text{Д}}$ — моменты инерции относительно оси Oz соответствующих тел.

Момент инерции стержня $I_z^{\text{CT}} = \frac{1}{3}m_1 l^2$, а момент инерции диска найдем по формуле (12.14): $I_z^{\text{Д}} = I_C^{\text{Д}} + m_2 d^2$, где $I_C^{\text{Д}} = \frac{1}{2}m_2 R^2$ — момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси Oz , а $d = l + R$ — расстояние от центра диска до оси Oz . Имеем

$$I_z^{\text{Д}} = \frac{1}{2}m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2.$$

Пользуясь выражениями для моментов инерции стержня и диска, найдем момент инерции маятника относительно оси Oz :

$$I_z = \frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2 [\frac{1}{2}R^2 + (l + R)^2].$$

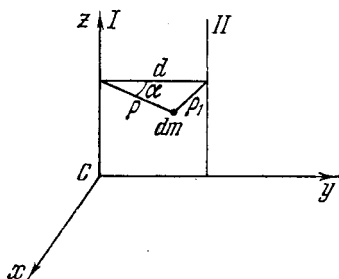


Рис. 12.5

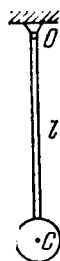


Рис. 12.6

Установим формулы для центробежных моментов инерции, аналогичные формуле (12.14). Для этого построим две системы координат со взаимно параллельными сторонами: $Ox_1y_1z_1$ и $Oxyz$, где C — центр масс тела (рис. 12.7). Обозначим через a, b и c координаты точки C в системе $Ox_1y_1z_1$. Тогда формулы

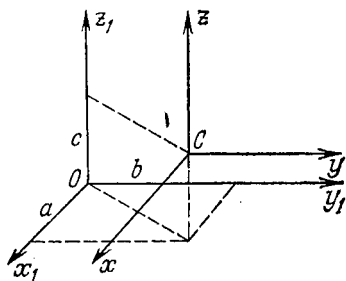


Рис. 12.7

перехода от одной системы координат к другой системе будут

$$x_1 = a + x, \quad y_1 = b + y, \quad z_1 = c + z.$$

По определению центробежных моментов инерции имеем

$$\begin{aligned} I_{x_1y_1} &= \int x_1y_1 \, dm = \\ &= \int (a + x)(b + y) \, dm, \end{aligned}$$

или, раскрывая скобки, группируя члены и вынося постоянные множители за знак интеграла,

$$I_{x_1y_1} = ab \int dm + a \int y \, dm + b \int x \, dm + \int xy \, dm.$$

Первый интеграл равен массе тела M , два средних интеграла равны нулю (так как они соответственно равны My_C и Mx_C), а последний интеграл равен I_{xy} . Таким образом, имеем (две другие формулы получены аналогично)

$$I_{x_1y_1} = Mab + I_{xy}, \quad I_{y_1z_1} = Mbc + I_{yz}, \quad I_{x_1z_1} = Mac + I_{xz}. \quad (12.15)$$

§ 12.5. Момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через данную точку

Возьмем в теле точку O и примем ее за начало системы координат $Oxyz$. Проведем через точку O произвольную прямую OL , составляющую с осями x, y, z углы α, β и γ соответственно. Требуется определить момент инерции I тела относительно оси OL , считая, что известны его осевые I_x, I_y, I_z и центробежные I_{xy}, I_{yz} и I_{zx} моменты инерции.

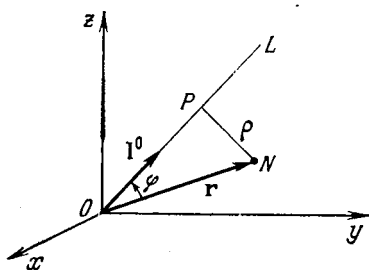


Рис. 12.8

Для решения задачи возьмем в теле произвольную точку N массой dm и с координатами x, y, z и опустим из нее перпендикуляр NP на прямую OL (рис. 12.8). Момент инерции тела относительно оси OL определяется равенством

$$I = \int \rho^2 \, dm,$$

где ρ — длина отрезка NP .

Из треугольника ONP найдем

$$\rho = r \sin \alpha = |l_0 \times r|,$$

где l_0 — единичный вектор оси L .

Имеем

$$l_0 \times r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ = (z \cos \beta - y \cos \gamma) \mathbf{i} + (x \cos \gamma - z \cos \alpha) \mathbf{j} + (y \cos \alpha - x \cos \beta) \mathbf{k}.$$

Отсюда

$$\rho^2 = |l_0 \times r|^2 = (z \cos \beta - y \cos \gamma)^2 + \\ + (x \cos \gamma - z \cos \alpha)^2 + (y \cos \alpha - x \cos \beta)^2,$$

или, раскрывая скобки и группируя члены,

$$\rho^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

Подставим это значение для ρ^2 в выражение для момента инерции I , разобьем интеграл на сумму интегралов и вынесем в каждом из них $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ за знаки интегралов. Тогда получим

$$I = \cos^2 \alpha \int (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int (z^2 + x^2) dm + \cos^2 \gamma \int (x^2 + y^2) dm - \\ - 2 \cos \alpha \cos \beta \int xy dm - 2 \cos \beta \cos \gamma \int yz dm - 2 \cos \gamma \cos \alpha \int zx dm.$$

С помощью соотношений (12.3) и (12.8) найдем

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (12.16)$$

Формула (12.16) является искомой. Пользуясь ею, можно найти момент инерции I относительно оси OL , зная осевые и центробежные моменты инерции. Если координатные оси являются главными относительно своего начала, то центробежные моменты будут равны нулю и формула (12.16) примет более простой вид:

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (12.17)$$

Задача 12.2. Дана однородная прямоугольная пластинка с массой M и сторонами $2a$ и $2b$. Требуется определить момент инерции I относительно диагонали.

Построим систему координат $Sxyz$ с началом в центре масс пластинки. Ось x направим параллельно стороне $2a$, ось y — параллельно стороне $2b$, а ось z — перпендикулярно к плоскости пластинки (на рис. 12.9 ось z не показана — она направлена на читателя).

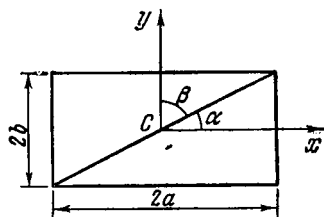


Рис. 12.9

Координатные оси являются главными центральными осями инерции, так как тело симметрично относительно этих осей. Имеем (рис. 12.9)

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \gamma = 90^\circ, \quad \cos \gamma = 0.$$

Пользуясь таблицей моментов инерции, найдем

$$I_x = \frac{1}{3}Mb^2, \quad I_y = \frac{1}{3}Ma^2, \quad I_z = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2).$$

Внося эти значения в формулу (12.17), получим момент инерции однородной пластинки относительно ее диагонали:

$$I = \frac{1}{3}Mb^2 \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{3}Ma^2 \frac{b^2}{a^2 + b^2},$$

или, после упрощения,

$$I = \frac{2}{3}M \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

§ 12.6. Эллипсоид инерции

Возьмем в теле точку O и проведем через нее ось OL . Пусть момент инерции тела относительно этой оси равен I . При изменении направления оси OL будет изменяться момент инерции I . Простое и вместе с тем очень наглядное представление об изменении момента инерции в зависимости от изменения положения оси, проходящей через данную точку O , дает следующее геометрическое построение.

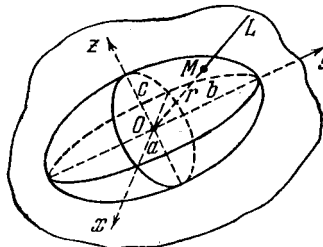


Рис. 12.10

Отложим на прямой OL отрезок OM (рис. 12.10), длину которого в соответствующем масштабе определим равенством

$$OM = r = \frac{1}{\sqrt{I}}. \quad (12.18)$$

Построим систему координат $Ox_1y_1z_1$ (на рис. 12.10 оси x_1 , y_1 и z_1 не показаны). Обозначим координаты точки M в этой координатной системе через x_1 , y_1 и z_1 . Так как точка M принадлежит прямой OL , то будем иметь

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{r} = x_1 \sqrt{I}, \quad \cos \beta = \frac{y_1}{r} = y_1 \sqrt{I}, \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{r} = z_1 \sqrt{I},$$

где α , β и γ — углы, определяющие направление оси OL .

Внесем эти выражения для направляющих косинусов прямой OL в формулу (12.16) и сократим полученное выражение на I :

$$I_{x_1}x_1^2 + I_{y_1}y_1^2 + I_{z_1}z_1^2 - 2I_{x_1y_1}x_1y_1 - 2I_{y_1z_1}y_1z_1 - 2I_{z_1x_1}z_1x_1 = 1. \quad (12.19)$$

Этому уравнению второго порядка удовлетворяют координаты точки M на прямой OL . Следовательно, оно определяет поверхность, которую описывает точка M при изменении направления прямой OL .

Расстояние от начала координат O до точки M , принадлежащей поверхности (12.19), определяется равенством (12.18). Так как момент инерции I тела относительно любой оси всегда положителен и в нуль не обращается, то все точки поверхности (12.19) находятся на конечном расстоянии от начала координат (случай бесконечно тонкого стержня из рассмотрения временно исключается). Из всех поверхностей второго порядка этому условию удовлетворяет только эллипсоид. Поэтому построенная указанным образом поверхность называется *эллипсоидом инерции*.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение эллипсоида может быть упрощено, если за координатные оси взять три взаимно перпендикулярных направления главных диаметров поверхности. В таких осях уравнение эллипсоида не содержит членов произведениями координат и имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (12.20)$$

На рис. 12.10 показаны эллипсоид инерции, построенный для точки O , и координатная система $Oxyz$, в которой уравнение эллипсоида инерции имеет вид (12.20).

Из формы уравнения видно, что в этих осях все центробежные моменты равны нулю. Следовательно, для каждой точки существуют *три главные оси инерции*.

Сравнивая уравнение эллипсоида в канонической форме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

с уравнением эллипсоида инерции (12.20), отнесенного к главным осям инерции, найдем

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_z}}. \quad (12.21)$$

Из этих равенств следует, что большему главному моменту инерции соответствует меньшая ось эллипсоида инерции.

Если среди моментов инерции тела относительно главных осей в данной точке нет равных, то эллипсоид инерции называется *трехосным*. При двух равных моментах инерции (например, $I_x = I_y$) эллипсоид инерции превращается в *эллипсоид вращения*. Если же $I_x = I_y = I_z$, то эллипсоид инерции вырождается в сферу; соответствующие точки называются *шаровыми*.

Так как между моментами инерции I_x , I_y и I_z должны существовать соотношения (12.6):

$$I_x + I_y > I_z, \quad I_y + I_z > I_x, \quad I_z + I_x > I_y,$$

то не всякий эллипсоид может служить эллипсоидом инерции. Для бесконечно тонкого стержня эллипсоид инерции вырождается в бесконечный круговой цилиндр.

В заключение этого параграфа отметим, что для эллипсоида вращения любая ось, лежащая в экваториальной плоскости (плоскости

равных полуосей эллипсоида) и проходящая через данную точку, является главной осью инерции. Это следует из того, что за главный диаметр эллипсоида вращения можно взять любой диаметр, лежащий в экваториальной плоскости. Этот же результат можно получить и из формулы (12.17).

§ 12.7. Свойства главных осей инерции

В предыдущем параграфе было показано, что в каждой точке можно построить главные оси инерции, т. е. оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю.

Пусть некоторая ось, например ось z , является главной для точки O . Поставим следующий вопрос. Существуют ли на этой оси точки, для которых ось Oz также будет главной осью инерции? Для решения этой задачи построим в точке O главные оси инерции $Oxyz$. По определению главных осей будем иметь

$$\begin{aligned} I_{xy} = \int xy \, dm = 0, \quad I_{yz} = \int yz \, dm = 0, \\ I_{zx} = \int zx \, dm = 0. \end{aligned} \quad (12.22)$$

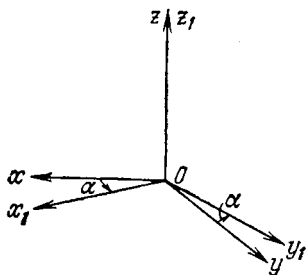


Рис. 12.11

Покажем прежде всего, что при повороте вокруг оси z осей x и y ось z останется главной осью инерции. Действительно, построим систему координат $Ox_1y_1z_1$, в которой ось z_1 совпадает с осью z , а оси x_1 и y_1 составляют с осями x и y угол α соответственно (рис. 12.11). Возьмем в теле произвольную точку. Между ее координатами x, y, z и x_1, y_1, z_1 существует очевидная связь:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z_1 = z.$$

Вычислим центробежный момент инерции $I_{x_1z_1}$. Имеем

$$\begin{aligned} I_{x_1z_1} = \int x_1 z_1 \, dm &= \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha) z \, dm = \\ &= \cos \alpha \int xz \, dm + \sin \alpha \int yz \, dm. \end{aligned}$$

Так как оси x, y и z — главные оси инерции и для них справедливы равенства (12.22), то $I_{x_1z_1} = 0$. Аналогично показывается, что $I_{y_1z_1} = 0$. Таким образом, при повороте вокруг главной оси инерции z двух других осей x и y ось z остается главной осью инерции.

Перейдем теперь к рассмотрению основного вопроса. Если данная ось, например ось z , является главной осью инерции для точки O , то существует ли на этой оси другая точка, для которой ось z является главной осью инерции? Для ответа на этот вопрос выберем на оси z точку O_1 и построим систему координат $O_1x_1y_1z_1$, в которой ось z_1

совпадает с осью z , а оси x_1 и y_1 параллельны осям x и y соответственно (рис. 12.12). Формулы перехода имеют вид

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - h,$$

где $h = OO_1$.

Имеем

$$I_{x_1 z_1} = \int x_1 z_1 dm = \int x(z - h) dm = \int xz dm - h \int x dm,$$

$$I_{y_1 z_1} = \int y_1 z_1 dm = \int y(z - h) dm = \int yz dm - h \int y dm,$$

откуда с учетом равенств (12.22) и (7.3) получим для центробежных моментов инерции

$$I_{x_1 z_1} = -Mhx_C, \quad I_{y_1 z_1} = -Mhy_C, \quad (12.23)$$

где M — масса тела, а x_C и y_C — координаты центра инерции тела в системе $Oxyz$.

Для того чтобы ось z (z_1) была главной осью инерции для точки O_1 , необходимо и достаточно, чтобы оба центробежных момента инерции $I_{x_1 z_1}$ и $I_{y_1 z_1}$ равнялись нулю. Но согласно формулам (12.23) это возможно только при $x_C = 0$ и $y_C = 0$, т. е. если центр масс тела находится на оси z и, следовательно, ось z является главной центральной осью инерции. Таким образом, главная центральная ось инерции является главной центральной осью инерции для всех своих точек, а нецентральная главная ось инерции является главной осью инерции только для одной своей точки.

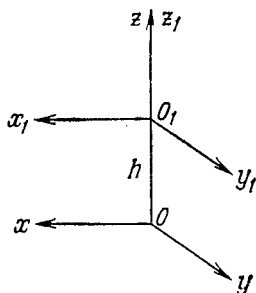


Рис. 12.12

§ 12.8. Вычисление моментов инерции относительно произвольных осей

При вычислении моментов инерции обычно стремятся воспользоваться таблицами моментов инерции и теоремой Гюйгенса — Штейнера. Однако очень часто ось, относительно которой необходимо определить момент инерции, не параллельна ни одной из главных центральных осей инерции и не проходит через центр масс. В этих случаях наиболее рационально комбинировать формулу (12.17) с теоремой Гюйгенса — Штейнера и данными таблиц.

Пусть для тела известны главные центральные моменты инерции I_x , I_y и I_z . Предположим далее, что дана прямая LL' , относительно которой требуется вычислить момент инерции I тела.

Проведем через центр масс тела прямую ll' , параллельную LL' . Так как прямая LL' задана, то должны быть известны углы α , β , γ между этой прямой (или, что то же самое, прямой ll') и главными осями инерции x , y и z (рис. 12.13). Вычислим по формуле (12.17) момент инерции I_1 тела относительно оси ll' :

$$I_1 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (12.24)$$

Тогда по теореме Гюйгенса—Штейнера момент инерции относительно оси LL' будет равен

$$I = I_1 + Md^2, \quad (12.25)$$

где M — масса тела, а d — расстояние между осями LL' и ll' .

Углы α , β и γ , а также расстояние d необходимо определить из условия задания прямой LL' . Конечно, не представляет труда найти эти величины, если заданы уравнения прямой LL' , но обычно их значительно проще определить из условий задачи.

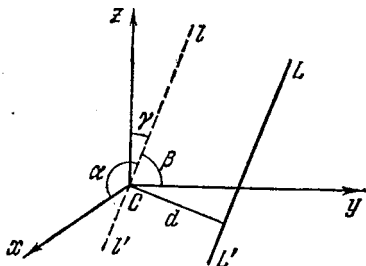


Рис. 12.13

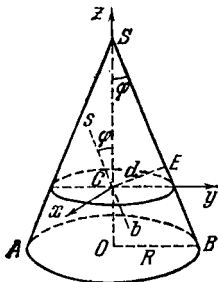


Рис. 12.14

Задача 12.3. Требуется определить момент инерции I прямого кругового конуса относительно образующей SB (рис. 12.14); радиус основания конуса равен R , высота равна H .

Построим систему координат $Sxyz$. Центр масс C конуса находится на его высоте OS , причем $OC = \frac{1}{4} OS = \frac{1}{4} H$. Ось z направим по оси конуса, ось y — параллельно основанию так, чтобы она пересекла образующую SB , ось x — перпендикулярно к плоскости yz . Координатные плоскости yz и xz являются плоскостями симметрии, поэтому оси x , y и z — главные центральные оси инерции конуса. Построим прямую sb , параллельную образующей SB ; углы между прямой sb и осями x , y , z соответственно равны: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \varphi$, $\gamma = \varphi$, где φ — угол полураствора конуса. Внося эти значения углов α , β и γ в формулу (12.14), получим

$$I_1 = I_y \sin^2 \varphi + J_z \cos^2 \varphi.$$

По таблице моментов инерции найдем

$$I_y = \frac{3}{20} M \left(\frac{1}{4} H^2 + R^2 \right), \quad J_z = \frac{3}{10} MR^2.$$

Из рис. 12.14 определяем

$$\sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для I_1 , получим

$$I_1 = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{H^2 + R^2} \left(\frac{9}{4} H^2 + R^2 \right).$$

Расстояние d от центра масс C конуса до образующей найдем из треугольника CES ;

$$d = CS \sin \varphi = \frac{3}{4} H \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

Теперь с помощью формулы (12.25) легко находим момент инерции I конуса относительно его образующей:

$$I = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{H^2 + R^2} (6H^2 + R^2).$$

§ 12.9. Вычисление тензора инерции

При решении различных задач динамики, в частности, при определении динамических реакций опор твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, необходимо знать не только осевые, но и центробежные моменты инерции относительно вполне определенных координатных осей; короче говоря, необходимо знать тензор инерции I в произвольно выбранной координатной системе (см. формулу (12.10)). Конечно, при вычислении составляющих тензора инерции можно пользоваться основными формулами (12.3) и (12.8). Однако в тех случаях, когда известны моменты инерции тела относительно главных центральных осей, задача может быть существенно упрощена.

Пусть тензор инерции I тела требуется определить для прямоугольной системы координат $Oxyz$. Будем считать, что нам известно положение центра масс C тела, т. е. известны координаты x_C, y_C, z_C в системе $Oxyz$, направления главных центральных осей инерции x', y', z' и соответствующие моменты инерции $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ — см. рис. 12.15 (в отличие от ранее применявшихся обозначений, главные центральные оси обозначены штрихами).

Построим вспомогательную систему координат $Cx''y''z''$, оси которой параллельны соответствующим осям системы $Oxyz$. Тогда направления главных центральных осей $Cx'y'z'$ будут определяться таблицей направляющих косинусов:

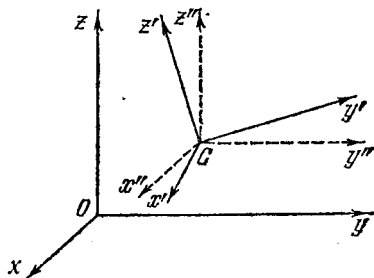


Рис. 12.15

	x'	y'	z'
x, x''	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y, y''	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z, z''	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(12.26)

В этой таблице α_{ij} — косинусы углов между соответствующими осями; так, например, $\alpha_{32} = \cos(\widehat{z, y'}) = \cos(\widehat{z'', y'})$.

Моменты инерции I_x, I_y и I_z относительно осей x, y и z можно вычислить по формуле (12.25). По формуле (12.24) имеем

$$I_{1x} = \alpha_{11}^2 I_{x'} + \alpha_{12}^2 I_{y'} + \alpha_{13}^2 I_{z'}.$$

Квадрат расстояния между осями x и x'' равен, очевидно, расстоянию от точки C до оси x , т. е. $y_C^2 + z_C^2$. Поэтому согласно формуле (12.25) будем иметь (две другие формулы получаются аналогично)

$$\begin{aligned} I_x &= M(y_C^2 + z_C^2) + \alpha_{11}^2 I_{x'} + \alpha_{12}^2 I_{y'} + \alpha_{13}^2 I_{z'}, \\ I_y &= M(z_C^2 + x_C^2) + \alpha_{21}^2 I_{x'} + \alpha_{22}^2 I_{y'} + \alpha_{23}^2 I_{z'}, \\ I_z &= M(x_C^2 + y_C^2) + \alpha_{31}^2 I_{x'} + \alpha_{32}^2 I_{y'} + \alpha_{33}^2 I_{z'}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Перейдем к вычислению центробежных моментов инерции тела относительно осей x, y, z . Рассмотрим произвольную точку N тела. Пусть ее координаты в системе $Sx'y'z'$ будут x', y' и z' , а в системе $Oxyz$ — x, y, z . Эти координаты связаны формулами преобразования

$$\begin{aligned}x &= x_C + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\y &= y_C + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\z &= z_C + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'.\end{aligned}$$

Так как оси x', y', z' являются главными центральными осями инерции тела, то все центробежные моменты инерции относительно этих осей и все статические моменты равны нулю:

$$\begin{aligned}I_{x'y'} &= \int x'y' dm = 0, & I_{y'z'} &= \int y'z' dm = 0, & I_{z'x'} &= \int z'x' dm = 0, \\& \int x' dm = 0, & \int y' dm &= 0, & \int z' dm &= 0.\end{aligned}\tag{12.28}$$

По определению центробежных моментов инерции имеем

$$I_{xy} = \int xy dm.$$

Подставим сюда значения x и y из формул преобразования, раскроем скобки и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned}I_{xy} &= x_C y_C \int dm + (\alpha_{21}x_C + \alpha_{11}y_C) \int x' dm + \\&+ (\alpha_{22}x_C + \alpha_{12}y_C) \int y' dm + (\alpha_{23}x_C + \alpha_{13}y_C) \int z' dm + \\&+ \alpha_{11}\alpha_{21} \int x'^2 dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int y'^2 dm + \alpha_{13}\alpha_{23} \int z'^2 dm + \\&+ (\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) \int x'y' dm + \\&+ (\alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}) \int x'z' dm + (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{22}) \int y'z' dm,\end{aligned}$$

или, учитывая равенства (12.28),

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int x'^2 dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int y'^2 dm + \alpha_{13}\alpha_{23} \int z'^2 dm.$$

Так как оси x и y взаимно перпендикулярны, то

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0;$$

отсюда

$$\alpha_{13}\alpha_{23} = -(\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}).$$

Подставим это выражение в последнее равенство для I_{xy} :

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int x'^2 dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int y'^2 dm - (\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}) \int z'^2 dm,$$

или, группируя члены,

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \int (x'^2 - z'^2) dm + \alpha_{12}\alpha_{22} \int (y'^2 - z'^2) dm.$$

Добавляя и вычитая в первом интеграле y'^2 , а во втором x'^2 , будем иметь

$$I_{xy} = Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} \left[\int (x'^2 + y'^2) dm - \int (z'^2 + y'^2) dm \right] + \\ + \alpha_{12}\alpha_{22} \left[\int (y'^2 + x'^2) dm - \int (z'^2 + x'^2) dm \right].$$

Пользуясь выражениями (12.3) для осевых моментов инерции, найдем (две другие формулы получены аналогичным методом)

$$\begin{aligned} I_{xy} &= Mx_C y_C + \alpha_{11}\alpha_{21} (I_{z'} - I_{x'}) + \alpha_{12}\alpha_{22} (I_{z'} - I_{y'}), \\ I_{yz} &= My_C z_C + \alpha_{21}\alpha_{31} (I_{z'} - I_{x'}) + \alpha_{22}\alpha_{32} (I_{z'} - I_{y'}), \\ I_{zx} &= Mz_C x_C + \alpha_{11}\alpha_{31} (I_{z'} - I_{x'}) + \alpha_{12}\alpha_{32} (I_{z'} - I_{y'}). \end{aligned} \quad (12.29)$$

Формулы (12.27) и (12.29) дают решение поставленной задачи об определении тензора инерции I в произвольной системе координат $Oxyz$.

§ 12.10. Задачи на вычисление моментов инерции

Задача об определении тензора инерции сводится к определению осевых и центробежных моментов инерции. Если направления главных центральных осей инерции нам не известны, то приходится прибегать к основным формулам (12.3) и (12.8). Но в тех случаях, когда известен тензор инерции для главных центральных осей инерции, его составляющие для произвольных осей определяются формулами (12.27) и (12.29).

Задача 12.4. Однородный диск D радиусом r и массой M насажен на вал, установленный в подшипниках A и B (рис. 12.16). При сборке были допущены погрешности, в результате которых ось вала пересекает плоскость диска в точке O , не совпадающей с центром C диска; кроме того, ось вала не перпендикулярна к плоскости диска и составляет с ней угол $90^\circ - \alpha$. Определить момент инерции диска относительно оси вращения AB и его центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} (положение осей Ox и Oy будет указано в дальнейшем).

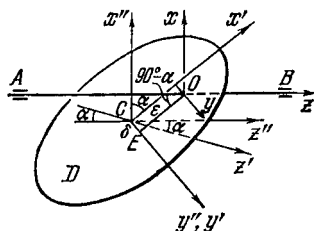


Рис. 12.16

Пусть прямая OE представляет проекцию оси вращения AB на плоскость диска. Опустим из центра C диска на прямую OE перпендикуляр и примем его за ось Cy' ; ось Cx' построим в плоскости диска перпендикулярно к оси Cy' ; ось Cz' перпендикулярна к плоскости диска. Очевидно, что оси Cx' , Cy' и Cz' — главные центральные оси инерции диска. Через точку C проведем ось Cz'' , параллельную оси вращения z , ось Cy'' совместим с осью Cy' , а ось Cx'' проведем перпендикулярно к осям Cy'' и Cz'' . При таком построении угол между осями x' и x'' равен α . Оси Ox и Oy параллельны осям Cx'' и Cy'' .

Таблица направляющих косинусов имеет вид

	x'	y'	z'
x, x''	$\cos \alpha$	0	$-\sin \alpha$
y, y''	0	1	0
z, z''	$\sin \alpha$	0	$\cos \alpha$

Обозначим координаты точки O в осях $Cx'y'z'$, связанных с диском, через $\epsilon, \delta, 0$ (см. рис. 12.16). Тогда координаты центра C диска в системе $Oxyz$ будут

$$x_C = -\epsilon \cos \alpha, \quad y_C = -\delta, \quad z_C = -\epsilon \sin \alpha.$$

Из таблицы моментов инерции найдем (§ 12.3)

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}Mr^2, \quad I_{z'} = \frac{1}{2}Mr^2.$$

Воспользуемся далее третьей формулой (12.27)

$$I_z = M(x_C^2 + y_C^2) + \alpha_{31}^2 I_{x'} + \alpha_{32}^2 I_{y'} + \alpha_{33}^2 I_{z'}.$$

В нашем случае согласно таблице направляющих косинусов $\alpha_{31} = \sin \alpha$, $\alpha_{32} = 0$, $\alpha_{33} = \cos \alpha$. Пользуясь соответствующими выражениями, получим

$$I_z = M(\epsilon^2 \cos^2 \alpha + \delta^2) + \frac{1}{4}Mr^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}Mr^2 \cos^2 \alpha,$$

или, группируя члены,

$$I_z = M[\delta^2 + (\epsilon^2 + \frac{1}{2}r^2) \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}r^2 \sin^2 \alpha]. \quad (12.30)$$

Теперь с помощью формул (12.29) найдем после очевидных преобразований центробежные моменты

$$I_{xz} = \frac{1}{2}M\epsilon \sin 2\alpha + \frac{1}{8}Mr^2 \sin 2\alpha, \quad I_{yz} = M\delta\epsilon \sin \alpha. \quad (12.31)$$

При правильной сборке будем иметь $\epsilon = \delta = 0$, $\alpha = 0$. Следовательно, $I_z = \frac{1}{2}Mr^2$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$, что очевидно.

Задача 12.5. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы KF длиной L и массой m_1 , противовеса D массой m_2 и груза E массой m_3 . Стрела составляет с вертикальной осью вращения угол α . Определить момент инерции I_z крана относительно оси вращения z и центробежные моменты, считая противовес D и груз E точечными массами, а стрелу — однородной тонкой балкой. Оси координат и геометрические размеры показаны на рис. 12.17; оси x и x' перпендикулярны к плоскости рисунка.

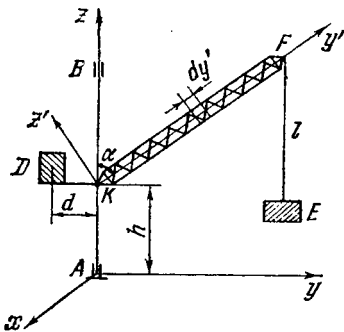


Рис. 12.17

Система состоит из трех тел: стрелы KF , противовеса D и груза E . Поэтому

$$I_z = I_z^{KF} + I_z^D + I_z^E.$$

Для точечных масс имеем

$$I_z^D = m_2 d^2, \quad I_z^E = m_3 L^2 \sin^2 \alpha.$$

Момент инерции I_z^{KF} стрелы KF относительно оси вращения крана вычислим по формуле (12.17):

$$I_z^{KF} = I_{x'}^{KF} \cos^2(\widehat{x', z}) + I_{y'}^{KF} \cos^2(\widehat{y', z}) + I_{z'}^{KF} \cos^2(\widehat{z', z}).$$

В нашем случае $(\widehat{x', z}) = 90^\circ$ и $\cos(\widehat{x', z}) = 0$, $I_{y'}^{KF} = 0$ (по условию задачи стрела KF представляет собой тонкую балку), $\cos(\widehat{z', z}) = \sin \alpha$ и $I_{z'}^{KF} = \frac{1}{3}m_1 L^2$. Следовательно, момент инерции I_z всего крана относительно оси вращения z будет

$$I_z = m_2 d^2 + L^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{m_1}{3} + m_3 \right). \quad (12.32)$$

Центробежные моменты инерции I_{xy} и I_{xz} равны нулю, так как вся система находится в плоскости yz . Учитывая, что система состоит из трех тел, будем иметь

$$I_{yz} = I_{yz}^{KF} + I_{yz}^D + I_{yz}^E.$$

Для точечных масс D и E

$$I_{yz}^D = -m_2 dh, \quad I_{yz}^E = m_3 L \sin \alpha (h - l + L \cos \alpha).$$

Центробежный момент инерции I_{yz}^{KF} стрелы KF найдем путем непосредственного интегрирования. Для этого выделим элемент dy' с массой $dm = (m_1/L) dy'$. Координаты этого элемента —

$$y = y' \cos \alpha, \quad z = y' \cos \alpha + h,$$

где y' — расстояние вдоль стрелы от точки K до элемента dy' . Имеем

$$I_{yz}^{KF} = \int yz dm = \frac{m_1}{L} \int_0^L (h + y' \cos \alpha) y' \sin \alpha dy' = m_1 L \sin \alpha \left(\frac{h}{2} + \frac{L}{3} \cos \alpha \right).$$

Для всей системы будем иметь

$$I_{yz} = L \sin \alpha \left[\frac{m_1 L}{3} \cos \alpha + m_3 (L \cos \alpha - l) \right] + h \left(m_3 L \sin \alpha + \frac{m_1 L}{2} \sin \alpha - m_2 d \right).$$

Если центр масс лежит на оси вращения, то

$$m_3 L \sin \alpha + \frac{m_1 L}{2} \sin \alpha - m_2 d = 0,$$

и выражение для центробежного момента упрощается:

$$I_{yz} = L \sin \alpha \left[\frac{m_1 L}{3} \cos \alpha + m_3 (L \cos \alpha - l) \right]. \quad (12.33)$$

Задача 12.6. Определить тензор инерции однородной тонкой пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника, для осей координат, связанных с его катетами; длины катетов равны a и b (рис. 12.18).

Так как плоскость пластинки совпадает с плоскостью xy , то для всех точек $z = 0$; формулы (12.3) и (12.8) принимают вид

$$I_x = \int y^2 dm, \quad I_y = \int x^2 dm, \quad I_z = I_x + I_y,$$

$$I_{xy} = \int xy dm, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0.$$

Пусть γ — поверхностная плотность пластинки. Тогда ее масса M будет равна

$$M = 1/2 \gamma ab.$$

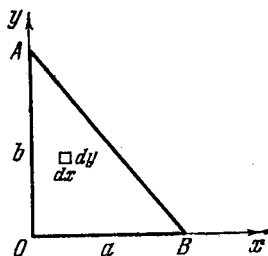


Рис. 12.18

В качестве элемента пластинки возьмем прямоугольник со сторонами dx и dy ; его масса $dm = \gamma dx dy$.

Уравнение гипотенузы можно записать как уравнение прямой линии в отрезках, отсекаемых на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Отсюда найдем

$$y = \frac{b}{a} (a - x).$$

Пусть x будет внешней переменной интегрирования, а y — внутренней. Тогда пределы интегрирования по x будут 0 и a , а пределы интегрирования по y суть 0 и $\frac{b}{a}(a-x)$. Имеем

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dm = \gamma \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} y^2 dy = \frac{\gamma}{3} \int_0^a y^3 \bigg|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx = \\ &= \frac{\gamma b^3}{3a^3} \int_0^a (a-x)^3 dx = -\frac{\gamma b^3}{3a^3} \frac{(a-x)^4}{4} \bigg|_0^a = \frac{\gamma}{12} ab^3. \end{aligned}$$

Так как $\gamma = 2M/(ab)$, то

$$I_x = \frac{1}{6} Mb^2, \quad I_y = \frac{1}{6} Ma^2, \quad I_z = \frac{1}{6} M(a^2 + b^2) \quad (12.34)$$

(I_y получено надлежащей заменой букв).

Перейдем к вычислению центробежного момента инерции

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy dm = \gamma \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} xy dy = \frac{\gamma}{2} \int_0^a xy^2 \bigg|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx = \\ &= \frac{\gamma b^2}{2a^2} \int_0^a x(a-x)^2 dx = \frac{\gamma b^2}{2a^3} \int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3) dx = \\ &= \frac{\gamma}{2a^2} \left(a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} ax^3 + \frac{x^4}{4} \right) \bigg|_0^a = \frac{\gamma}{24} a^2 b^2. \end{aligned}$$

Подставляя значение γ , найдем

$$I_{xy} = \frac{M}{12} ab. \quad (12.35)$$

Тензор инерции имеет такой вид:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{M}{6} b^2 & -\frac{M}{12} ab & 0 \\ -\frac{M}{12} ab & \frac{M}{6} a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{6} (a^2 + b^2) \end{pmatrix}.$$

Глава XIII

ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 13.1. Основные задачи динамики твердого тела

В статике нами были рассмотрены условия равновесия систем сил, приложенных к абсолютно твердому телу, и условия, при которых твердое тело находится в покое. Задание движения твердого тела и определение скоростей и ускорений точек твердого тела

было рассмотрено в кинематике. При изучении динамики твердого тела встают более сложные задачи. Эти задачи делятся на две основные группы. К одной группе относятся задачи, в которых по заданному движению твердого тела требуется определить систему сил, под действием которых происходит это движение. К другой группе относятся задачи, в которых по заданным силам, действующим на твердое тело, требуется при определенных начальных условиях найти закон движения тела, а для несвободного тела найти также реакции связей.

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, следовательно, для определения положения в пространстве требуется шесть независимых между собой параметров. В качестве таких параметров чаще всего выбирают координаты центра масс твердого тела и углы Эйлера или какую-либо другую систему углов, наиболее удобных в рассматриваемой конкретной задаче.

Пусть твердое тело движется по отношению к неподвижной (инерциальной) системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 13.1). Предположим, что система координат $Sx_2y_2z_2$, имеющая начало в центре масс тела, движется поступательно, а система координат $Sxyz$ жестко связана с твердым телом.

Очевидно, что координаты центра масс (x_{1c} , y_{1c} , z_{1c}) и углы Эйлера θ , ψ , φ , которые составляет система координатных осей $Sxyz$ с осями системы $Sx_2y_2z_2$, полностью определяют положение твердого тела.

Для того чтобы решать сформулированные задачи динамики твердого тела, следует найти уравнения, связывающие эти параметры с силами, действующими на твердое тело. Этих уравнений должно быть шесть, так как число независимых параметров равно шести.

Для получения этих уравнений воспользуемся теоремой о движении центра масс (§ 8.3) и теоремой об изменении момента количества движения в относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно и имеющей начало в центре масс твердого тела (§ 9.7).

Согласно теореме о движении центра масс:

$$M\mathbf{w}_C = \mathbf{F}^e$$

имеем

$$M\ddot{x}_{1c} = F_{x_1}^e, \quad M\ddot{y}_{1c} = F_{y_1}^e, \quad M\ddot{z}_{1c} = F_{z_1}^e, \quad (13.1)$$

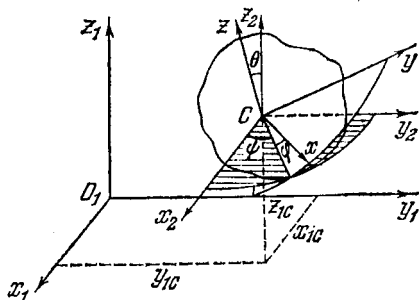


Рис. 13.1

где x_{ic}, y_{ic}, z_{ic} — координаты центра масс в неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, а $F_{x_i}^e, F_{y_i}^e, F_{z_i}^e$ — проекции главного вектора всех внешних сил на те же оси.

Используя теперь теорему об изменении момента количества движения в относительном движении (§ 9.7):

$$\frac{dK_C}{dt} = M_C^e, \quad (13.2)$$

аналогично можно получить три соотношения, связывающие углы Эйлера с моментами сил относительно координатных осей. Вывод этих соотношений будет приведен в главе XIV.

Эти соотношения и уравнения (13.1) и дают возможность решать сформулированные выше задачи динамики твердого тела.

§ 13.2. Количество движения, момент количества движения и кинетическая энергия твердого тела

Для составления дифференциальных уравнений движения твердого тела при различных случаях его движения нам придется, как уже говорилось, пользоваться общими теоремами динамики системы. Поэтому в этом параграфе приводятся выражения для количества движения, момента количества движения и кинетической энергии твердого тела для различных случаев его движения.

Количество движения твердого тела выражается в соответствии с формулой (8.2) следующим равенством:

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C, \quad (13.3)$$

где M — масса тела, $\mathbf{v}_C$ — скорость центра масс.

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его центра масс определяется формулой

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, а $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс, проведенный из неподвижной точки тела.

Проекции вектора количества движения на оси координат, имеющих начало в неподвижной точке тела, найдем из соотношения

$$\mathbf{Q} = M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) = M \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_G & y_G & z_G \end{vmatrix},$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости, x_G, y_G, z_G — координаты центра масс, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы координатных осей. Проекции вектора количества движения будут равны

$$Q_x = M(\omega_y z_G - \omega_z y_G), \quad Q_y = M(\omega_z x_G - \omega_x z_G), \quad Q_z = M(\omega_x y_G - \omega_y x_G). \quad (13.4)$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси вектор его угловой скорости направлен по оси вращения. Если теперь ввести систему координат с началом в какой-либо точке оси вращения, а ось z совместить с осью вращения, то вектор угловой скорости представится в виде

$$\omega = \omega_z k = \dot{\varphi} k,$$

где φ — угол поворота тела.

Формулы (13.4) в этом случае будут иметь вид

$$Q_x = -M y_C \dot{\varphi}, \quad Q_y = M x_C \dot{\varphi}, \quad Q_z = 0. \quad (13.5)$$

Момент количеств движения системы относительно начала координат определяется формулой (9.1):

$$K = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор k -й точки системы, m_k и $\mathbf{v}_k$ — ее масса и скорость.

Проекции момента количеств движения на координатные оси имеют следующий вид (9.2):

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k v_{hz} - z_k v_{hy}), \\ K_y &= \sum_{k=1}^n m_k (z_k v_{hx} - x_k v_{hz}), \\ K_z &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его любой точки находится по формуле

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r},$$

где ω — угловая скорость.

Выражения для проекций скорости $\mathbf{v}$ имеют вид

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \quad (13.7)$$

где x, y, z — координаты рассматриваемой точки.

Подставляя эти формулы в первое равенство (13.6) и переходя для твердого тела от суммы к интегралу, получим

$$\begin{aligned} K_x &= \int [y (\omega_x y - \omega_y x) - z (\omega_z x - \omega_x z)] dm = \\ &= \int [\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz] dm. \end{aligned}$$

Так как ω_x , ω_y и ω_z не зависят от переменных интегрирования, то

$$K_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm.$$

В этом равенстве $I_x = \int (y^2 + z^2) dm$ — момент инерции твердого тела относительно оси x , $I_{xy} = \int xy dm$ и $I_{xz} = \int xz dm$ — центробежные моменты инерции. Прделав аналогичные выкладки с выражениями для K_y и K_z , получим

$$\begin{aligned} K_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, & K_y &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_z &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Если оси координат, имеющие начало в неподвижной точке O тела, будут главными осями инерции тела, то $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ и формулы (13.8) примут вид

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z. \quad (13.9)$$

Формулы (13.9) определяют проекции момента количеств движения абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, на оси координат, жестко связанные с телом. Из формул (13.8) и (13.9) видно, что в общем случае проекции вектора ω и проекции вектора K не пропорциональны между собой, следовательно, направления векторов K и ω не совпадают.

При движении тела вокруг неподвижной оси при условии, что ось z направлена по оси вращения тела, имеем

$$K_x = -I_{xz} \omega_z = -I_{xz} \dot{\varphi}, \quad K_y = -I_{yz} \omega_z = -I_{yz} \dot{\varphi}, \quad K_z = I_z \omega_z = I_z \dot{\varphi}. \quad (13.10)$$

Перейдем теперь к нахождению кинетической энергии абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Кинетическая энергия твердого тела определяется формулой (10.6):

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm,$$

или (так как $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$)

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости точки твердого тела $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, получим

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot (\omega \times \mathbf{r}) dm.$$

Вспоминая свойства скалярно-векторного произведения

$$\mathbf{v} \cdot (\omega \times \mathbf{r}) = \omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

будем иметь

$$T = \frac{1}{2} \int \omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm = \frac{1}{2} \omega \cdot \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm,$$

но так как $\mathbf{K} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm$ есть момент количеств движения, то

$$T = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{K}. \quad (13.11)$$

Используя формулы (13.8), перепишем выражение (13.11) в виде *)

$$T = \frac{1}{2} (\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z) = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{xz} \omega_x \omega_z - 2I_{yz} \omega_y \omega_z). \quad (13.12)$$

Если оси координат x , y и z совпадают с главными осями инерции, то $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ и

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \quad (13.13)$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси, например оси z , имеем $\omega_x = \omega_y = 0$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2. \quad (13.14)$$

Примечание. Из формулы (13.12) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_x} = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z = K_x,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_y} = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z = K_y, \quad (13.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_z} = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z = K_z,$$

т. е. частная производная от кинетической энергии твердого тела, имеющего неподвижную точку, по проекции угловой скорости на какую-либо ось, равна моменту количеств движения относительно этой оси.

§ 13.3. Поступательное движение твердого тела

Рассмотрим сначала решение первой задачи динамики. Пусть тело движется поступательно и координаты центра масс тела являются известными функциями времени. Это значит, что относительно поступательно движущейся системы координат $Cx_2y_2z_2$ тело

*) Формулу (13.12) можно получить и другим путем. Представив выражение для кинетической энергии в виде $T = \frac{1}{2} \int (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dm$ и подставляя сюда выражения для v_x , v_y и v_z из (13.7), получим формулу (13.12).

находится в покое. Следовательно, угловая скорость и момент количеств движения тела относительно центра масс равны нулю и в соответствии с (13.2) $M_C^e = 0$. Таким образом, для осуществления поступательного движения необходимо, чтобы главный момент всех внешних сил относительно центра масс был равен нулю.

Отметим, что условие $M_C^e = 0$ не является достаточным для поступательного движения тела, так как при этом тело может совершать движение относительно центра масс. Характер этого движения будет рассмотрен подробно в главе XIV.

Легко показать (мы не будем останавливаться на этом), что если главный момент всех внешних сил относительно центра масс и начальная угловая скорость тела равны нулю, то тело будет двигаться поступательно (необходимое и достаточное условие поступательного движения).

Так как координаты центра масс (x_{ic}, y_{ic}, z_{ic}) являются известными функциями времени, то, вычисляя вторые производные ($\ddot{x}_{ic}, \ddot{y}_{ic}, \ddot{z}_{ic}$) и используя соотношения (13.1), получим проекции главного вектора всех внешних сил ($F_{x_1}^e, F_{y_1}^e, F_{z_1}^e$).

При решении второй задачи динамики, если заданы $F_{x_1}^e, F_{y_1}^e$ и $F_{z_1}^e$, соотношения (13.1) будут представлять собой уже дифференциальные уравнения движения, и решение их при определенных начальных условиях определит движение центра масс.

Если заранее известно, что тело движется поступательно, то на уравнения (13.1) можно смотреть как на дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

§ 13.4. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и уравнения для определения реакций подшипников

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, является примером несвободного твердого тела. Следовательно, при изучении его движения необходимо применить принцип освобожденности, т. е. действие связей (в данном случае подшипников) следует заменить реакциями этих связей и рассматривать твердое тело как свободное.

Введем две системы координат с началом в какой-либо точке O оси вращения (рис. 13.2): неподвижную $Ox_1y_1z_1$, где ось z_1 совпадает с осью вращения тела, и подвижную $Oxyz$, жестко связанную с твердым телом (ось z совпадает с осью вращения тела). Положение тела будем определять углом φ между плоскостями x_1Oz_1 и xOz .

Отметим, что направления реакций подшипников заранее не известны. Пусть X_A, Y_A, Z_A — проекции реакции R_A ; $X_B, Y_B,$

Z_B — проекции реакции R_B на оси *подвижной* системы координат $Oxyz$; тогда можно записать

$$R_A = X_A i + Y_A j + Z_A k, \quad R_B = X_B i + Y_B j + Z_B k, \quad (13.16)$$

где i, j, k — единичные векторы осей $Oxyz$.

Для нахождения закона движения тела и реакций подшипников воспользуемся теоремами об изменении количества движения и момента количества движения системы:

$$\frac{dQ}{dt} = F^e + R_A + R_B, \quad (13.17)$$

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O^e + M_O(R_A) + M_O(R_B). \quad (13.18)$$

Чтобы получить уравнения для определения движения и реакций подшипников, необходимо векторные уравнения (13.17) и (13.18) записать в проекциях на оси координат.

Так как координаты центра масс x_C, y_C и центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} в подвижной системе координат будут постоянными, то векторные уравнения (13.17) и (13.18) целесообразнее проектировать на оси подвижной системы координат.

Итак, определяем векторы Q и K_O в подвижной системе координат:

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k, \quad (13.19)$$

$$K_O = K_x i + K_y j + K_z k. \quad (13.20)$$

Из курса кинематики известно, что если какой-либо вектор a задан в подвижной системе координат, то абсолютная производная от этого вектора

$$\frac{da}{dt} = \frac{\bar{da}}{dt} + \omega \times a, \quad (13.21)$$

где ω — угловая скорость подвижной системы координат; $\frac{\bar{da}}{dt} = \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k$ — относительная производная.

Поскольку векторы Q и K_O определены в подвижной системе координат, то согласно формуле (13.21) имеем

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\bar{dQ}}{dt} + \omega \times Q, \quad \frac{dK_O}{dt} = \frac{\bar{dK_O}}{dt} + \omega \times K_O, \quad (13.22)$$

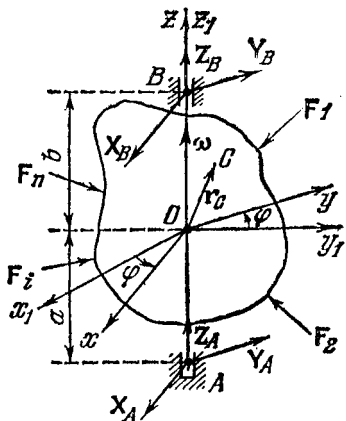


Рис. 13.2

где ω — угловая скорость твердого тела (система $Oxyz$ с ним жестко связана), причем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dQ_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dQ_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dQ_z}{dt} \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \frac{dK_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dK_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dK_z}{dt} \mathbf{k}. \quad (13.23)$$

Уравнения (13.17) и (13.18) с учетом (13.22) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \omega \times \mathbf{Q} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B, \quad (13.24)$$

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \omega \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^e + \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_A) + \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_B).$$

Пусть координаты подшипников A и B соответственно будут $0, 0, z_A$ и $0, 0, z_B$ (на рис. 13.2 приведен случай, когда $z_A = -a$, $z_B = b$); тогда

$$\mathbf{r}_A = z_A \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_B = z_B \mathbf{k}.$$

Моменты реакций подшипников определяются по формулам

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}_A) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{R}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & z_A \\ X_A & Y_A & Z_A \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_B) = \mathbf{r}_B \times \mathbf{R}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & z_B \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix},$$

откуда

$$M_x(\mathbf{R}_A) = -z_A Y_A, \quad M_y(\mathbf{R}_A) = z_A X_A, \quad M_z(\mathbf{R}_A) = 0, \quad (13.25)$$

$$M_x(\mathbf{R}_B) = -z_B Y_B, \quad M_y(\mathbf{R}_B) = z_B X_B, \quad M_z(\mathbf{R}_B) = 0.$$

Учитывая, что $\omega = \dot{\phi} \mathbf{k}$, а также соотношения (13.19), (13.20) и (13.25), запишем уравнения (13.17) и (13.18) в проекциях на оси подвижной системы координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} - \dot{\phi} Q_y = F_x^e + X_A + X_B,$$

$$\frac{dQ_y}{dt} + \dot{\phi} Q_x = F_y^e + Y_A + Y_B,$$

$$0 = F_z^e + Z_A + Z_B,$$

$$\frac{dK_x}{dt} - \dot{\phi} K_y = M_x^e - z_A Y_A - z_B Y_B,$$

$$\frac{dK_y}{dt} + \dot{\phi} K_x = M_y^e + z_A X_A + z_B X_B,$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e.$$

В соответствии с (13.5) и (13.10) получим

$$\begin{aligned}
 -My_C\ddot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 &= F_x^e + X_A + X_B, \\
 Mx_C\ddot{\varphi} - My_C\dot{\varphi}^2 &= F_y^e + Y_A + Y_B, \\
 0 &= F_z^e + Z_A + Z_B; \\
 -I_{xz}\ddot{\varphi} + I_{yz}\dot{\varphi}^2 &= M_x^e - z_A Y_A - z_B Y_B, \\
 -I_{yz}\ddot{\varphi} - I_{xz}\dot{\varphi}^2 &= M_y^e + z_A X_A + z_B X_B, \\
 I_z\ddot{\varphi} &= M_z^e.
 \end{aligned} \tag{13.26}$$

Последнее уравнение системы (13.26) реакций не содержит и было уже получено раньше (§ 9.5). Оно позволяет по заданному закону вращения тела $\varphi(t)$ определить момент главного вектора внешних сил M_z^e относительно оси z или по заданному моменту M_z^e при заданных начальных условиях определить закон движения тела.

Первые пять уравнений служат для определения реакций. Продольные реакции Z_A и Z_B входят только в третье уравнение и от характера движения не зависят, т. е. будут такими же, как и при неподвижном теле. Мы можем определить только их сумму. Если предположить, что продольная реакция в подшипнике B равна нулю, то реакция $Z_A = -F_z^e$.

§ 13.5. Добавочные динамические реакции.

Статическая и динамическая уравновешенность тела

Поперечные составляющие реакций, определяемые из первого, второго, четвертого и пятого уравнений (13.26), обуславливаются характером приложенных сил, законом движения тела, а также расположением оси вращения относительно тела.

Предположим, что ось вращения тела является главной центральной осью инерции, т. е. $x_C = y_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Тогда уравнения для определения поперечных реакций подшипников (13.26) примут вид

$$\begin{aligned}
 0 &= F_x^e + X_A^{\text{ст}} + X_B^{\text{ст}}, \\
 0 &= F_y^e + Y_A^{\text{ст}} + Y_B^{\text{ст}}, \\
 0 &= M_x^e - z_A Y_A^{\text{ст}} - z_B Y_B^{\text{ст}}, \\
 0 &= M_y^e + z_A X_A^{\text{ст}} + z_B X_B^{\text{ст}}.
 \end{aligned} \tag{13.27}$$

Реакции, определяемые из этих уравнений, обуславливаются действующими на тело активными силами. При этом следует иметь в виду, что силы, действующие на тело, могут зависеть от закона движения тела (например, силы сопротивления, зависящие от скорости вращения).

Уравнения (13.27) имеют такой же вид, как и уравнения статики для неподвижного тела; поэтому реакции X_A^{ct} , X_B^{ct} , Y_A^{ct} , Y_B^{ct} условно называют «статическими» реакциями. Употребляя этот термин, следует помнить, что реакции, определяемые из уравнений (13.27) при движении тела, могут отличаться от чисто статических реакций, определяемых по уравнениям (13.27) для неподвижного тела, так как силы, действующие на вращающееся тело, как было уже сказано выше, могут зависеть от характера движения тела.

Возвращаясь к рассмотрению уравнений (13.26), представим реакции X_A , X_B , Y_A , Y_B в виде суммы реакций, определяемых уравнениями (13.27) и реакциями X_A^d , X_B^d , Y_A^d , Y_B^d , обусловленными как характером распределения масс в теле, так и характером движения тела, которые назовем *добавочными динамическими реакциями*:

$$\begin{aligned} X_A &= X_A^d + X_A^{ct}, & X_B &= X_B^d + X_B^{ct}, \\ Y_A &= Y_A^d + Y_A^{ct}, & Y_B &= Y_B^d + Y_B^{ct}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Тогда в соответствии с уравнениями (13.27) и соотношениями (13.28) получим из (13.26) уравнения для определения добавочных динамических реакций

$$\begin{aligned} -My_G\ddot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 &= X_A^d + X_B^d, \\ Mx_C\ddot{\varphi} - My_G\dot{\varphi}^2 &= Y_A^d + Y_B^d, \\ -I_{xz}\ddot{\varphi} + I_{yz}\dot{\varphi}^2 &= -z_A Y_A^d - z_B Y_B^d, \\ -I_{yz}\ddot{\varphi} - I_{xz}\dot{\varphi}^2 &= z_A X_A^d + z_B X_B^d. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Выясним теперь, при каких условиях добавочные динамические реакции равны нулю. В этом случае уравнения (13.29) будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_C\dot{\varphi}^2 + y_G\ddot{\varphi} &= 0, & x_C\ddot{\varphi} - y_G\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ I_{xz}\ddot{\varphi} - I_{yz}\dot{\varphi}^2 &= 0, & I_{xz}\dot{\varphi}^2 + I_{yz}\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Эта система однородных линейных алгебраических уравнений относительно x_C , y_G , I_{xz} , I_{yz} распадается на две независимые системы уравнений с одинаковым определителем, не равным нулю

$$\begin{vmatrix} \ddot{\varphi} & -\dot{\varphi}^2 \\ \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \end{vmatrix} = \ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4 \neq 0,$$

так как для вращающегося тела угловая скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ одновременно в нуль не обращаются.

Следовательно, единственным решением уравнений (13.30) является

$$x_C = y_C = 0, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0. \quad (13.31)$$

Если же теперь принять, что условия (13.31) выполнены, то уравнения (13.29) примут вид

$$\begin{aligned} X_A^A + X_B^A &= 0, & Y_A^A + Y_B^A &= 0, \\ z_A X_A^A + z_B X_B^A &= 0, & z_A Y_A^A + z_B Y_B^A &= 0, \end{aligned}$$

единственным решением которых является $X_A^A = X_B^A = Y_A^A = Y_B^A = 0$, так как $z_B - z_A \neq 0$.

Остановимся на условиях (13.31) несколько подробнее. Условие $x_C = 0, y_C = 0$ означает, что центр масс тела находится на оси вращения. Если оно выполнено, то говорят, что тело *статически уравновешено*. Как видно из приведенного анализа, для уничтожения динамических реакций одной статической уравновешенности тела недостаточно. Необходимо, кроме того, чтобы центробежные моменты инерции относительно оси вращения равнялись нулю ($I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$). Таким образом, для того чтобы при вращении тела вокруг неподвижной оси не возникали добавочные динамические реакции, необходимо и достаточно, чтобы ось вращения была главной центральной осью инерции.

Как будет показано в следующем параграфе, динамические реакции иногда во много раз превосходят статические реакции. Поэтому во всех случаях, когда это возможно, стремятся уменьшить или полностью уничтожить их. В особо важных случаях это достигается специальной балансировкой.

§ 13.6. Задачи

Задача 13.1. Центр тяжести махового колеса, масса которого $m = 300$ кг, находится на расстоянии 1 мм от горизонтальной оси вала; расстояния подшипников от колеса равны между собой. Найти реакции подшипников, если вал вращается равномерно, делая $n = 1200$ об/мин. Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения.

Возьмем начало координат в точке O пересечения оси вращения с маховиком. Ось x подвижной системы координат направим по прямой, проходящей через точку C . Оси z и z_1 направим по оси вращения (рис. 13.3). Очевидно, что при таком выборе подвижной системы координат $x_C = -1$ мм, $y_C = 0$.

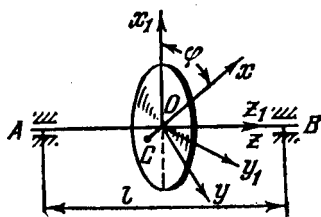


Рис. 13.3

Так как маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения, то центробежные моменты инерции равны нулю, т. е. $I_{xz} = 0, I_{yz} = 0$. Для рассматриваемой задачи

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi \text{ рад/с.}$$

Поскольку маховик находится в середине между подшипниками, то $z_A = -l/2$, $z_B = l/2$, где l — расстояние между подшипниками.

Статические реакции равны:

$$X_{1A} = \frac{mg}{2} = 1470 \text{ Н}, \quad X_{1B} = \frac{mg}{2} = 1470 \text{ Н}.$$

Для определения добавочных динамических реакций воспользуемся уравнениями (13.29). Для данной задачи они имеют следующий вид:

$$-mx_c \ddot{\varphi}^2 = X_A^d + X_B^d, \quad 0 = Y_A^d + Y_B^d, \quad 0 = \frac{l}{2} Y_A^d - \frac{l}{2} Y_B^d,$$

$$0 = -\frac{l}{2} X_A^d + \frac{l}{2} X_B^d.$$

Решая эти уравнения, получим

$$X_B^d = X_A^d = -\frac{m}{2} x_c \ddot{\varphi}^2 = -2352 \text{ Н}, \quad Y_A^d = Y_B^d = 0.$$

Таким образом, добавочные динамические реакции в 1,6 раза превосходят статические; направления их линий действия вращаются вместе с маховиком, оставаясь все время параллельными линии OC .

Задача 13.2. Вычислить добавочные динамические реакции в подшипниках A и B при вращении вокруг оси AB однородного тонкого кругового диска CD , предполагая, что ось AB (рис. 13.4) проходит через центр диска, но вследствие неправильного рассверливания втулка составляет с перпендикуляром к плоскости диска $\angle AOE = \alpha = 0,02$ рад. Дано: масса диска $M = 3,27$ кг, радиус его $r = 20$ см, число оборотов $n = 30\,000$ об/мин, расстояния $AO = 50$ см, $OB = 30$ см. Ось AB считать абсолютно твердой и положить $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$.

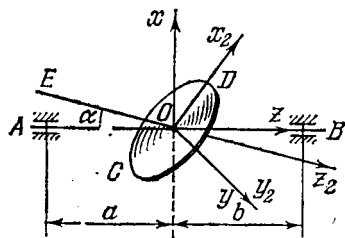


Рис. 13.4

Начало подвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с диском, выберем в центре диска O (см. рис. 13.4). Из условия задачи следует $x_C = 0$, $y_C = 0$, $z_A = -a = -50$ см, $z_B = b = 30$ см.

Статические реакции равны 12,05 Н и 20 Н. Момент инерции I_z диска и его центробежные моменты I_{xz} и I_{yz} были получены в задаче 12.4 § 12.10. По формулам (12.30) и (12.31) для нашего случая ($\epsilon = \delta = 0$) найдем

$$I_z = \frac{1}{2} Mr^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} Mr^2 \sin^2 \alpha, \quad I_{xz} = \frac{1}{8} Mr^2 \sin 2\alpha, \quad I_{yz} = 0.$$

Так как угол α мал, то, ограничиваясь членами первого порядка малости относительно α , получим

$$I_z = \frac{1}{2} Mr^2, \quad I_{xz} = \frac{1}{4} Mr^2 \alpha, \quad I_{yz} = 0.$$

Имеем далее $n = 30\,000$ об/мин,

$$\dot{\varphi} = \frac{\pi n}{30} = 1000 \pi \text{ рад/с}.$$

Уравнения (13.29) примут вид ($\dot{\varphi} = \text{const}$ и $\ddot{\varphi} = 0$)

$$0 = X_A^d + X_B^d, \quad 0 = Y_A^d + Y_B^d, \quad 0 = aY_A^d - bY_B^d, \quad -\frac{1}{4} Mr^2 \alpha \dot{\varphi}^2 = -aX_A^d + bX_B^d,$$

откуда получим

$$X_A^d = -X_B^d = \frac{Mr^2 \alpha \dot{\varphi}^2}{4(a+b)}, \quad Y_A^d = Y_B^d = 0,$$

или

$$X_A^d = -X_B^d = \frac{Mr^2 \alpha \pi^2 \cdot 10^6}{4(a+b)} \approx 8000 \text{ Н.}$$

Реакции опор свелись к паре сил; модуль каждой реакции в 250 раз превосходит силу тяжести самого диска и в 400 раз максимальную статическую реакцию.

Задача 13.3. С какой угловой скоростью должна равномерно вращаться вокруг катета $AB = l$ однородная пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD , чтобы полное боковое давление на нижнюю опору равнялось нулю? Расстояние между опорами считать равным длине катета AB .

Начало подвижной системы координат возьмем в точке B . Ось z направим по вертикали вверх, а ось y проведем в плоскости пластинки. Следовательно, в этом случае $z_A = -l$, $z_B = 0$.

Из рис. 13.5 следует, что $x_C = 0$, $y_C = l/3$.

Найдем сначала поперечные статические реакции. Уравнения для их определения имеют вид

$$X_A^{ст} + X_B^{ст} = 0, \quad Y_A^{ст} + Y_B^{ст} = 0,$$

$$Y_A^{ст} l - Mg \frac{l}{3} = 0, \quad -X_A^{ст} l = 0,$$

где M — масса пластинки.

Из этих уравнений следует

$$X_A^{ст} = X_B^{ст} = 0, \quad Y_A^{ст} = -Y_B^{ст} = Mg/3.$$

Так как по условию задачи $\ddot{\varphi} = 0$, то уравнения (13.29) запишутся следующим образом:

$$0 = X_A^d + X_B^d, \quad -\frac{Ml}{3} \dot{\varphi}^2 = Y_A^d + Y_B^d, \quad I_{yz} \dot{\varphi}^2 = l Y_A^d, \quad -I_{xz} \dot{\varphi}^2 = -l X_A^d.$$

Центробежные моменты инерции были найдены в задаче 12.6 § 12.10. При равных катетах и выбранном направлении осей из формулы (12.35) найдем $I_{xy} = -Ml^2/12$, $I_{xz} = 0$. Поскольку $I_{xz} = 0$, то будем иметь

$$X_A^d = X_B^d = 0.$$

Реакции Y_A^d и Y_B^d определяются из уравнений

$$-\frac{Ml}{3} \dot{\varphi}^2 = Y_A^d + Y_B^d, \quad -\frac{Ml^2}{12} \dot{\varphi}^2 = l Y_A^d,$$

откуда

$$Y_A^d = -\frac{Ml}{12} \dot{\varphi}^2, \quad Y_B^d = -\frac{3Ml}{12} \dot{\varphi}^2.$$

В задаче требуется определить угловую скорость $\dot{\varphi}$, при которой полная реакция

$$Y_A = Y_A^{ст} + Y_A^d = 0.$$

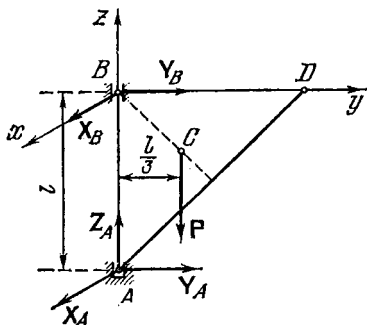


Рис. 13.5

Эту угловую скорость найдем из соотношения

$$\frac{Mg}{3} - \frac{Ml}{12} \dot{\varphi}^2 = 0,$$

откуда $\dot{\varphi} = 2\sqrt{g/l}$.

Задача 13.4. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы KF длины L , противовеса D и груза E (рис. 13.6). При включении постоянного по модулю тормозящего момента кран, вращающийся до этого с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \pi/20$ рад/с, останавливается через две секунды. Считая стрелу KF крана однородной тонкой балкой, а противовес D и груз E точечными массами, определить динамические реакции опор A и B крана в конце его торможения. Длина стрелы $L = 30$ м, расстояние между опорами крана $H = 3$ м, длина свисающей части троса $l = 18$ м, масса стрелы $m_1 = 8000$ кг, масса груза $m_3 = 10\,000$ кг, угол $\alpha = 45^\circ$; центр тяжести всей системы находится на оси вращения крана (предполагается, что груз E находится все время в плоскости крана).

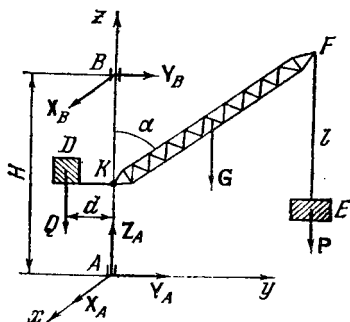


Рис. 13.6

Начало подвижной системы координат возьмем в опоре A , ось z направим по оси вращения вертикально вверх, ось y проведем в плоскости крана. Тогда $a = 0$, $b = H$.

По условию центр тяжести всей системы лежит на оси вращения. Поэтому $x_C = 0$, $y_C = 0$. Так как система плоская, то $I_{xz} = 0$.

Кроме того, в конце вращения крана $\dot{\varphi} = 0$.

Добавочные динамические реакции опор вращающегося крана найдем из уравнений (13.29), которые в нашем случае примут вид

$$0 = X_A^A + X_B^A, \quad 0 = Y_A^A + Y_B^A, \quad 0 = -HY_B^A, \quad -I_{yz}\ddot{\varphi} = HX_B^A.$$

Отсюда находим

$$X_A^A = -X_B^A = \frac{I_{yz}}{H}\ddot{\varphi}, \quad Y_A^A = Y_B^A = 0.$$

Угловая скорость вращения крана в начале торможения была $\dot{\varphi} = \frac{\pi}{20}$ рад/с.

При постоянном по модулю тормозящем моменте $\ddot{\varphi} = \text{const}$. Так как время торможения $t = 2$ с, то $\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}/t = -\pi/40$ рад/с².

Центробежный момент инерции I_{yz} для рассматриваемой системы был найден в задаче 12.5 § 12.10. Для статически уравновешенного крана имеем (см. формулу (12.33))

$$I_{yz} = L \sin \alpha \left[\frac{m_1 L}{3} \cos \alpha + m_3 (L \cos \alpha - l) \right].$$

Подставляя числовое значение величин, входящих в полученные формулы, найдем $I_{yz} = 18 \cdot 10^5$ кг·м², $X_A^A = -X_B^A = -47$ кН.

Таким образом, в конце торможения добавочные динамические реакции опор вращающегося крана образуют пару сил, лежащую в плоскости, перпендикулярной к плоскости крана. В менее благоприятных условиях (например при меньшем времени торможения или меньшей длине l свисающего троса, добавочные динамические давления резко возрастают.

§ 13.7. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести. Рассмотрим случай, когда ось вращения горизонтальна. Проведем через центр тяжести C тела плоскость, перпендикулярную к оси вращения. Точка пересечения O этой плоскости с осью вращения называется *точкой подвеса*. Примем эту точку за начало координат. Ось z направим по оси вращения, оси x и y расположим в плоскости, проходящей через центр тяжести и точку подвеса, перпендикулярно к оси вращения (рис. 13.7). Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг оси z согласно § 9.5 запишется следующим образом:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e,$$

где φ — угол между неподвижной осью x и линией OC (см. рис. 13.7).

Так как в этом случае

$$M_z^e = -Mga \sin \varphi,$$

где M — масса тела, a — расстояние от точки O до центра тяжести ($a = OC$), то дифференциальное уравнение движения тела примет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \sin \varphi = 0.$$

Рассмотрим случай малых колебаний, для которых можно принять $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \varphi = 0, \quad (13.32)$$

а его общее решение имеет вид

$$\varphi = A \sin \left(\sqrt{\frac{Mga}{I_z}} t + \varepsilon \right).$$

Отсюда следует, что угол φ изменяется по гармоническому закону с периодом колебаний, равным

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}}. \quad (13.33)$$

Сравнивая дифференциальное уравнение движения математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (13.34)$$

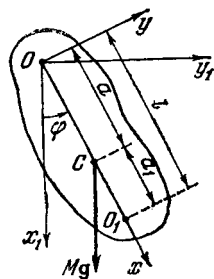


Рис. 13.7

с уравнением движения физического маятника, можно утверждать, что математический маятник, имеющий длину

$$l = \frac{I_z}{Ma}, \quad (13.35)$$

будет двигаться так же, как и физический маятник.

Величина l , определяемая формулой (13.35), называется *приведенной длиной физического маятника*.

Представляя по теореме Гюйгенса—Штейнера (§ 12.4) момент инерции тела относительно оси z в виде $I_z = I_C + Ma^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно оси z , получим для приведенной длины физического маятника выражение

$$l = \frac{I_C}{Ma} + a. \quad (13.36)$$

Откладывая эту величину от точки подвеса в направлении центра тяжести, получим точку O_1 (см. рис. 13.7), которая называется *центром качания*. Расстояние от центра тяжести до центра качания равно

$$a_1 = \frac{I_C}{Ma}. \quad (13.37)$$

Покажем, что точка подвеса и центр качания обладают *свойством взаимности (теорема Гюйгенса)*.

Пусть ось вращения проходит через центр качания; тогда для новой приведенной длины согласно формуле (13.36) получим

$$l_1 = \frac{I_C}{Ma_1} + a_1.$$

На основании равенства (13.37) имеем $a = I_C/(Ma_1)$, следовательно,

$$l_1 = a + a_1 = l.$$

Таким образом, если старый центр качания сделать новой точкой подвеса, то старая точка подвеса станет новым центром качания, что и доказывает свойство взаимности.

§ 13.8. Экспериментальное определение моментов инерции

Рассмотрим два способа экспериментального определения момента инерции неоднородных твердых тел или тел сложной конфигурации: способ качания с использованием теории физического маятника и способ крутильных колебаний.

Способ качания проиллюстрируем на следующем примере. Пусть требуется найти момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через центр тяжести C шатуна параллельно осям его проушин.

Для определения момента инерции шатуна относительно оси, проходящей через точку A параллельно оси проушины, шатун подвешивают на призму A (рис. 13.8, а) и, отклонив его на малый угол от положения равновесия, измеряют период колебания шатуна. Зная период колебания, по формуле (13.33) определяют момент инерции шатуна относительно оси качания:

$$I_A = \frac{MgaT^2}{4\pi^2},$$

где a — расстояние центра тяжести шатуна от оси качания, M — масса шатуна.

Затем по теореме Гюйгенса—Штейнера вычисляют момент инерции относительно центральной оси:

$$\begin{aligned} I_G &= I_A - Ma^2 = \\ &= Ma \left(\frac{T^2 g}{4\pi^2} - a \right). \end{aligned} \quad (13.38)$$

Для определения величины a шатун подвешивают на нити в точке B и определяют реакцию R давления шатуна на штырь динамометра D (рис. 13.8, б). Затем из формулы

$$Rl - Mg(a - r) = 0,$$

где r — радиус проушины, находят величину

$$a = \frac{Rl + Mgr}{Mg}.$$

Подставив значения величины a в формулу (13.38), вычисляют I_G .

В рассмотренной схеме эксперимента наибольшую ошибку дает определение величины a , поэтому применяют иную схему эксперимента.

Если требуется найти момент инерции тела относительно произвольной оси (рис. 13.9), то способом качания сначала определяют период колебаний тела относительно оси, на которую жестко нажаты два цилиндра, с известными моментами инерции. Затем определяют период колебаний исследуемого тела относительно той же оси без цилиндров. Тогда, если период колебания

тела совместно с цилиндрами равен $T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2I_0}{Mga}}$, а период

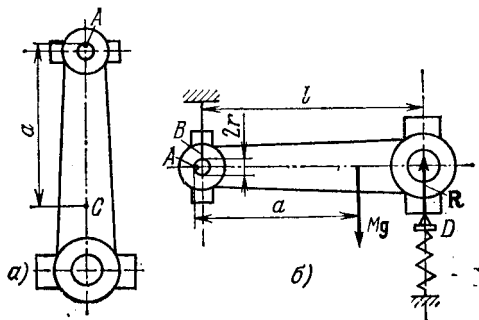


Рис. 13.8

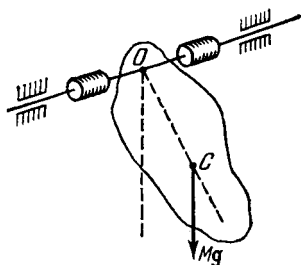


Рис. 13.9

колебаний тела без цилиндров $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mga}}$, то, исключив величину a , получим

$$I_0 = \frac{2I'_0 T^2}{T'^2 - T^2},$$

где I'_0 — момент инерции цилиндра относительно его оси.

Рассмотрим теперь способ крутильных колебаний.

При определении момента инерции тела способом крутильных колебаний тело подвешивают на упругом стержне или струне так, чтобы центр масс тела лежал на продолжении оси стержня (рис. 13.10). Закрутив стержень, жестко связанный с телом, на малый угол φ , измеряют период колебания системы. Так как при малом угле закручивания момент упругих сил пропорционален углу закручивания, то дифференциальное уравнение крутильных колебаний системы имеет вид

$$I_C \ddot{\varphi} = -k\varphi,$$

где k — постоянный коэффициент, характеризующий упругие свойства стержня (струны).

Период колебаний, очевидно, будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{I_C/k}. \quad (13.39)$$

Затем на тот же стержень подвешивают тело (например, диск), момент инерции которого относительно оси OC известен и равен I'_C , и измеряют период колебаний T' в этом случае. Этот период колебаний определяется формулой, аналогичной формуле (13.39):

$$T' = 2\pi \sqrt{I'_C/k}. \quad (13.40)$$

Исключая из равенств (13.39) и (13.40) неизвестный коэффициент k , получим формулу для определения момента инерции

$$I_C = I'_C \left(\frac{T}{T'} \right)^2.$$

§ 13.9. Плоское движение абсолютно твердого тела

Свободное твердое тело будет совершать плоское движение, если в нем существует плоское сечение, относительно которого масса тела распределена симметрично; силы, действующие на тело, расположены в плоскости этого сечения, а начальные скорости всех точек тела расположены в плоскостях, параллельных плоскости сечения. Движение тела может быть плоским также и в силу наложенных на него связей, но это уже будет несвободное движение.

В кинематике было установлено, что положение твердого тела, совершающего плоское движение, определяется тремя параметрами. За эти параметры выберем координаты центра масс тела и угол поворота тела относительно оси, перпендикулярной к рассматриваемому плоскому сечению тела.

Пусть система координат Sx_2y_2 , имеющая начало в центре масс тела, движется поступательно относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$. Положение тела будет полностью определено, если известны координаты центра масс тела (x_{1c} , y_{1c}) и угол φ между осью x_2 и осью x системы координат Sxy , жестко связанной с телом и имеющей начало в центре масс тела (рис. 13.11).

В соответствии с теоремой о движении центра масс из уравнений (13.1) получаем зависимости, связывающие координаты центра масс тела и проекции главного вектора всех внешних сил (F_x^e , F_y^e), приложенных к твердому телу:

$$M\ddot{x}_{1c} = F_{x_1}^e, \quad M\ddot{y}_{1c} = F_{y_1}^e, \quad (13.41)$$

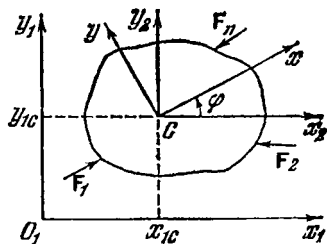


Рис. 13.11

где M — масса тела.

Используя теперь теорему об изменении момента количества движения в относительном движении (13.2), получим зависимость между углом φ поворота тела и силами, действующими на тело.

Так как в системе координат Sx_2y_2 твердое тело совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости движения тела, то момент количества движения тела относительно этой оси в соответствии с равенством (13.10) будет равен $K_C = I_C\dot{\varphi}$. Следовательно, на основании теоремы (§ 9.7) имеем

$$I_C\ddot{\varphi} = M_C^e, \quad (13.42)$$

где I_C — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения тела и проходящей через центр масс тела, а M_C^e — главный момент всех внешних сил относительно той же самой оси. Уравнения (13.41) и (13.42) позволяют решать задачи динамики плоского движения твердого тела.

Если движение твердого тела задано, т. е. координаты центра масс (x_{1c} , y_{1c}) и угол φ являются известными функциями времени, то в результате подстановки вторых производных от этих функций $\ddot{x}_{1c}$, $\ddot{y}_{1c}$, $\ddot{\varphi}$ в уравнения (13.41) и (13.42) находятся силы, под действием которых происходит движение тела.

Если же заданы силы, т. е. известны $F_{x_1}^e$, $F_{y_1}^e$ и M_C^e , то уравнения (13.41) и (13.42):

$$M\ddot{x}_{1c} = F_{x_1}^e, \quad M\ddot{y}_{1c} = F_{y_1}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = M_C^e \quad (13.43)$$

будут представлять уже систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих плоское движение твердого тела *). После решения этих уравнений и определения постоянных интегрирования получим закон плоского движения свободного твердого тела

$$x_{1C} = x_{1C}(t), \quad y_{1C} = y_{1C}(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Если тело совершает несвободное движение, то в число действующих сил следует включить реакции связей. Уравнения движения тела в этом случае будут

$$M\ddot{x}_{1C} = F_{x_1}^e + R_{x_1}, \quad M\ddot{y}_{1C} = F_{y_1}^e + R_{y_1}, \quad I_C\ddot{\varphi} = M_C^e + M_C^R, \quad (13.44)$$

где R_{x_1} и R_{y_1} — суммы проекций всех реакций соответственно на оси x_1 и y_1 , а M_C^R — сумма моментов всех реакций относительно центра масс. В этих уравнениях $F_{x_1}^e$, $F_{y_1}^e$ и M_C^e относятся к внешним активным силам. К уравнениям (13.44) следует еще добавить уравнения связи.

Заметим, что иногда вместо одного из дифференциальных уравнений (13.44) бывает целесообразно применить теорему об изменении кинетической энергии.

§ 13.10. Задачи

Задача 13.5. Однородный стержень длины $2l$ и массы M за один из своих концов подвешен на нити длины a , массой которой можно пренебречь, к неподвижной точке O . Стержень вместе с нитью отклонили влево от вертикали на угол α и отпустили без начальной скорости (рис. 13.12). В момент, когда стержень, пройдя положение равновесия, составлял с вертикалью угол β ($\beta < \alpha$), нить оборвалась. Определить закон движения стержня после обрыва нити.

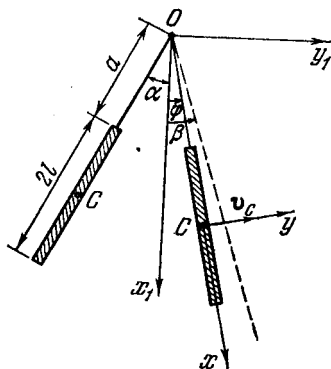


Рис. 13.12

Найдем сначала угловую скорость стержня, координаты и проекции скорости центра масс стержня на неподвижные координатные оси Ox_1y_1 в момент обрыва нити. В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии имеем

$$I_O \omega^2 / 2 = Mg(a + l)(\cos \beta - \cos \alpha),$$

где

$$I_O = I_C + M(a + l)^2 \quad (I_C = Ml^2/3)$$

— момент инерции стержня относительно точки O , I_C — момент инерции стержня относительно его центра масс.

Следовательно, угловая скорость стержня в момент обрыва нити равна

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2Mg(a + l)(\cos \beta - \cos \alpha)}{I_C + M(a + l)^2}}.$$

*) Если траектория центра масс задана, то вместо первых двух уравнений системы (13.43) иногда целесообразно взять уравнения в проекциях на касательную и нормаль к траектории центра масс.

Координаты центра масс стержня в момент обрыва нити будут

$$x_{1C} = (a + l) \cos \beta, \quad y_{1C} = (a + l) \sin \beta,$$

проекции его скорости на оси координат

$$\dot{x}_{1C} = -(a + l) \omega \sin \beta, \quad \dot{y}_{1C} = (a + l) \omega \cos \beta.$$

Угол между стержнем и осью x_1 в момент обрыва равен $\varphi = \beta$.

Дифференциальные уравнения движения стержня после обрыва нити имеют вид (единственная внешняя сила — сила тяжести Mg — приложена в точке C)

$$M\ddot{x}_{1C} = Mg, \quad M\ddot{y}_{1C} = 0, \quad I_C \ddot{\varphi} = 0,$$

, следовательно, общее решение этих уравнений будет

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1C} &= gt + C_1, & \dot{y}_{1C} &= C_2, & \dot{\varphi} &= C_3, \\ x_{1C} &= \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_4, & y_{1C} &= C_2t + C_5, & \varphi &= C_3t + C_6. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные интегрирования определим из начальных условий: при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_{1C} &= (a + l) \cos \beta, & y_{1C} &= (a + l) \sin \beta, \\ \dot{x}_{1C} &= -(a + l) \omega \sin \beta, & \dot{y}_{1C} &= (a + l) \omega \cos \beta, \\ \varphi &= \beta, & \dot{\varphi} &= \omega. \end{aligned}$$

Значения произвольных постоянных будут

$$\begin{aligned} C_1 &= -(a + l) \omega \sin \beta, & C_2 &= (a + l) \omega \cos \beta, & C_3 &= \omega, \\ C_4 &= (a + l) \cos \beta, & C_5 &= (a + l) \sin \beta, & C_6 &= \beta. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в общее решение, получим закон движения стержня после обрыва нити

$$x_{1C} = \frac{gt^2}{2} - (a + l)(\omega t \sin \beta - \cos \beta),$$

$$y_{1C} = (a + l)(\omega t \cos \beta + \sin \beta), \quad \varphi = \omega t + \beta.$$

Задача 13.6. Концы B невесомого стержня AB соединены шарнирно с неподвижной опорой. К другому концу стержня прикреплен тяжелый однородный диск радиуса r . В начальный момент стержень занимал вертикальное положение. Получив ничтожно малую скорость, стержень начинает вращаться вокруг шарнира.

Определить угловую скорость диска и угол между вертикалью и стержнем в момент, когда составляющая реакции шарнира, направленная вдоль стержня, равна нулю.

Центр масс диска движется по окружности радиуса $l + r$ центром в точке B , следовательно, уравнение движения центра масс диска в проекции на нормаль к его траектории будет иметь вид (рис. 13.13)

$$\frac{Mv^2}{r + l} = Mg \cos \varphi + R_n,$$

где M — масса диска, v — скорость центра масс, R_n — нормальная реакция, направленная от точки B вдоль стержня. Из этой формулы следует, что

$$R_n = \frac{Mv^2}{r + l} - Mg \cos \varphi.$$

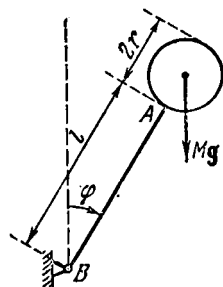


Рис. 13.13

Для определения скорости v в любой момент времени воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии.

Так как стержень вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку B , то

$$\frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}^2 = Mg(l+r)(1 - \cos \varphi),$$

где I_B — момент инерции диска относительно точки B , равный

$$I_B = \frac{Mr^2}{2} + M(r+l)^2 = \frac{M}{2}(r+l)^2 \left[2 + \left(\frac{r}{r+l} \right)^2 \right].$$

Следовательно,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2(r+l)Mg(1 - \cos \varphi)}{I_B}.$$

Принимая во внимание, что $v^2 = (l+r)^2 \dot{\varphi}^2$, имеем

$$R_n = \frac{Mg}{n} [4 - (4+n) \cos \varphi],$$

где $n = 2 + \left(\frac{r}{r+l} \right)^2$.

Пусть в момент, когда $R_n = 0$, угол $\varphi = \alpha$, тогда $4 - (4+n) \cos \alpha = 0$. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{4}{4+n},$$

а угловая скорость в момент, когда $R_n = 0$, будет

$$\dot{\varphi} = 2 \sqrt{\frac{g}{(4+n)(l+r)}}.$$

Задача 13.7. Однородный стержень длины l и массы M одним концом укреплен при помощи идеального шарнира в точке A , другой конец стержня удерживается нитью BC , образующей со стержнем угол 90° (рис. 13.14). Стержень составляет с горизонтом угол α . Определить, насколько изменится давление стержня на шарнир A в момент внезапного обрыва нити BC .

Для определения реакции в шарнире A и натяжения нити составим уравнения статики (см. рис. 13.14):

$$\begin{aligned} X_{1A}^{\text{ст}} - R_B \sin \alpha &= 0, & Y_{1A}^{\text{ст}} + R_B \cos \alpha - Mg &= 0, \\ -\frac{Mgl}{2} \cos \alpha + R_B l &= 0, \end{aligned}$$

Рис. 13.14

откуда

$$Y_{1A}^{\text{ст}} = \frac{Mg}{2} (1 + \sin^2 \alpha), \quad X_{1A}^{\text{ст}} = \frac{Mg}{4} \sin 2\alpha, \quad R_B = \frac{Mg}{2} \cos \alpha.$$

Если нить оборвется, то стержень начнет совершать вращательное движение вокруг шарнира A .

Дифференциальные уравнения движения можно записать в виде *)

$$M\ddot{x}_{1C} = X_{1A}, \quad M\ddot{y}_{1C} = Y_{1A} - Mg, \quad I_A \ddot{\varphi} = -\frac{Mgl}{2} \cos \varphi. \quad (13.45)$$

*) Здесь используется то обстоятельство, что точка A неподвижна.

Из очевидных зависимостей

$$x_{1G} = \frac{l}{2} \cos \varphi, \quad y_{1G} = \frac{l}{2} \sin \varphi$$

найдем

$$\ddot{x}_{1G} = -\frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad \ddot{y}_{1G} = \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Так как в момент разрыва нити $\varphi = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$, то

$$\ddot{x}_{1G} = -\frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \alpha, \quad \ddot{y}_{1G} = \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \alpha. \quad (13.46)$$

Теперь из уравнений (13.45) с учетом выражений (13.46) для этого момента времени получим

$$X_{1A} = \frac{3Mg}{8} \sin 2\alpha, \quad Y_{1A} = Mg - \frac{3Mg}{4} \cos^2 \alpha.$$

Изменение реакций будет равно

$$X_{1A} - X_{1A}^{\text{ст}} = \frac{Mg}{8} \sin 2\alpha, \quad Y_{1A} - Y_{1A}^{\text{ст}} = -\frac{Mg}{4} \cos^2 \alpha.$$

Задача 13.8. Однородное тело массы M , имеющее форму полуцилиндра радиуса R , поставлено на горизонтальную шероховатую плоскость и выведено из состояния равновесия, после чего представлено самому себе. Определить период малых колебаний, которые будет совершать тело, если известно, что проскальзывать по плоскости оно не может. Трение качения отсутствует (рис. 13.15).

Составим дифференциальные уравнения движения тела, учитывая, что на него действуют три внешние силы: сила тяжести $P = Mg$, сила трения скольжения F_T и нормальная составляющая реакции в точке касания N . Выбрав начало координат в точке O касания тела и плоскости в тот момент, когда тело находится в равновесном состоянии, и направив оси координат, как показано на рис. 13.15, получим на основании формул (13.43) следующие три дифференциальных уравнения движения:

$$M\ddot{x}_{1G} = -F_T, \quad M\ddot{y}_{1G} = -Mg + N, \quad I_G \ddot{\varphi} = F_T(R - a \cos \varphi) - Na \sin \varphi,$$

где I_G — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно к плоскости тела, a — расстояние DC .

Исключая F_T и N из третьего уравнения при помощи первого и второго, получим

$$I_G \ddot{\varphi} = -(R - a \cos \varphi) M\ddot{x}_{1G} - a \sin \varphi (M\ddot{y}_{1G} + Mg). \quad (13.47)$$

Но так как диск перекачивается без скольжения, то

$$\dot{x}_{1G} = R\dot{\varphi} - a \sin \varphi, \quad \dot{y}_{1G} = R - a \cos \varphi.$$

Рассматривая случай малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$), находим

$$\ddot{x}_{1G} = (R - a) \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y}_{1G} = R - a, \quad \ddot{x}_{1C} = (R - a) \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y}_{1C} = 0.$$

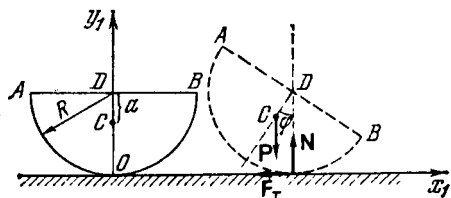


Рис. 13.15

Подставляя последние значения в уравнение (13.47), в котором также полагаем $\cos \varphi \approx 1$ и $\sin \varphi \approx \varphi$, получаем

$$I_C \ddot{\varphi} = -M(R-a)^2 \ddot{\varphi} - Mga\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_C + (R-a)^2 M} \varphi = 0.$$

Отсюда находим период малых колебаний диска

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + (R-a)^2 M}{Mga}}.$$

Вычислим теперь величины a и I_C .

Величина a , определяющая положение центра тяжести однородного полудиска, была определена ранее (том I, глава VIII). Она равна $a = 4R/(3\pi)$.

Определим момент инерции полукруглого диска относительно оси, проходящей через точку D . Согласно определению момента инерции относительно оси он равен половине момента инерции круглого диска с массой $2M$ относительно той же оси. Так как последний равен MR^2 , то интересующий нас момент инерции $I_D = \frac{1}{2}MR^2$. Воспользовавшись затем теоремой Гюйгенса—Штейнера, имеем

$$I_D = I_C + Ma^2.$$

Следовательно,

$$I_C = I_D - Ma^2 = \frac{1}{2}MR^2 - Ma^2.$$

Используя найденные значения a и I_C , получим окончательное выражение периода малых колебаний полукруглого диска

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{9\pi}{8} - 2 \right)}.$$

Заметим, что период T не зависит от массы диска и определяется лишь его радиусом.

Глава XIV

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

§ 14.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

Целью этого параграфа является установление зависимостей между параметрами, определяющими положение тела (например, углами Эйлера), и силами, приложенными к телу. Эти зависимости дадут возможность решать основные задачи динамики для тела, имеющего одну неподвижную точку.

Для получения этих зависимостей воспользуемся теоремой об изменении момента количеств движения (§ 9.3):

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e, \quad (14.1)$$

где $\mathbf{K}_O$ — момент количеств движения тела относительно неподвижной точки O тела, $\mathbf{M}_O^e$ — главный момент всех внешних сил относительно той же точки.

Пусть неподвижная система координат $Ox_1y_1z_1$ имеет начало в закрепленной точке тела. Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $Oxyz$ с началом в той же точке O (рис. 14.1).

При движении тела его моменты инерции и центробежные моменты инерции в неподвижной системе координат будут переменными величинами, так как тело при своем движении изменяет свое положение относительно осей этой системы. В подвижной же системе координат, жестко связанной с телом, моменты инерции и центробежные моменты инерции являются величинами постоянными.

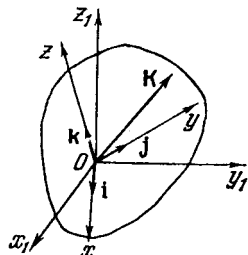


Рис. 14.1

Учитывая это обстоятельство, будем считать вектор момента количеств движения тела $\mathbf{K}_O$ определенным в подвижной системе координат, жестко связанной с телом. Тогда в соответствии с зависимостью (13.21) уравнение (14.1) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^e, \quad (14.2)$$

где

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \frac{dK_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dK_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dK_z}{dt} \mathbf{k}, \quad (14.3)$$

K_x, K_y, K_z — проекции вектора $\mathbf{K}_O$ на оси системы координат $Oxyz$; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы осей x, y, z ; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела.

Имея в виду формулу (14.3), а также известное равенство

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \mathbf{j}(\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \mathbf{k}(\omega_x K_y - \omega_y K_x), \quad (14.4)$$

перепишем уравнение (14.2) в проекциях на оси подвижной системы координат:

$$\begin{aligned}\frac{dK_x}{dt} + (\omega_y K_z - \omega_z K_y) &= M_x^e, \\ \frac{dK_y}{dt} + (\omega_z K_x - \omega_x K_z) &= M_y^e, \\ \frac{dK_z}{dt} + (\omega_x K_y - \omega_y K_x) &= M_z^e,\end{aligned}\tag{14.5}$$

где ω_x , ω_y и ω_z — проекции угловой скорости тела на оси подвижной системы координат, M_x^e , M_y^e и M_z^e — главные моменты всех внешних сил относительно тех же осей (см. § 9.3).

Если подвижную систему координат $Oxyz$ выбрать таким образом, чтобы координатные оси x , y и z были главными осями инерции для точки O , то все центробежные моменты инерции будут равны нулю и согласно (13.9)

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z.\tag{14.6}$$

Уравнения (14.5) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x^e, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= M_y^e, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z^e.\end{aligned}\tag{14.7}$$

Уравнения (14.7) называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Присоединяя к ним кинематические уравнения Эйлера (том 1, § 14.3)

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},\end{aligned}\tag{14.8}$$

получаем полную систему уравнений, необходимую для решения задач динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

Если задается закон движения тела, т. е. задаются углы Эйлера как функции времени, то уравнения (14.7) и (14.8) позволяют определить силы, под действием которых происходит заданное движение.

Если же задаются действующие на тело силы, т. е. можно считать известными проекции главного момента всех внешних сил M_x^e , M_y^e , M_z^e , то уравнения (14.7) и (14.8) представляют собой си-

стему шести дифференциальных уравнений первого порядка для определения углов Эйлера как функций времени.

Иногда при решении конкретных задач бывает выгодно вводить подвижную систему координат, не связанную жестко с телом. Пусть такая система координат $Ox_2y_2z_2$ имеет также начало в неподвижной точке тела. В этой системе координат уравнения (14.5) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{dK_{x_2}}{dt} + (\omega_{y_2}K_{z_2} - \omega_{z_2}K_{y_2}) &= M_{x_2}^e, \\ \frac{dK_{y_2}}{dt} + (\omega_{z_2}K_{x_2} - \omega_{x_2}K_{z_2}) &= M_{y_2}^e, \\ \frac{dK_{z_2}}{dt} + (\omega_{x_2}K_{y_2} - \omega_{y_2}K_{x_2}) &= M_{z_2}^e,\end{aligned}\tag{14.9}$$

где ω_{x_2} , ω_{y_2} , ω_{z_2} — проекции угловой скорости подвижной системы координат на собственные оси.

Интегрирование дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, представляет значительные математические трудности. Мы рассмотрим лишь наиболее простые случаи, а именно случай вращения динамически симметричного тела вокруг неподвижной точки по инерции (*случай Эйлера*) и случай движения под действием силы тяжести, когда тело имеет относительно неподвижной точки ось динамической симметрии, а центр тяжести лежит на этой оси (*случай Лагранжа*).

§ 14.2. Движение твердого симметричного тела, имеющего одну неподвижную точку, по инерции (случай Эйлера)

В этом параграфе будет рассмотрен наиболее простой случай движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, а именно случай движения по инерции.

Если главный момент всех сил, приложенных к твердому телу, относительно неподвижной точки равен нулю, т. е. $M_O^e = 0$ ($M_x^e = M_y^e = M_z^e = 0$), то динамические уравнения Эйлера (14.7) примут вид

$$\begin{aligned}I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= 0, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= 0, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= 0.\end{aligned}\tag{14.10}$$

Умножая первое из этих уравнений на $I_x\omega_x$, второе — на $I_y\omega_y$, третье — на $I_z\omega_z$ и складывая затем уравнения между собой, получим

$$I_x^2\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + I_y^2\omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + I_z^2\omega_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2) = 0;$$

отсюда

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = K_O^2 = \text{const.} \quad (14.11)$$

Это уравнение представляет собой первый интеграл уравнений движения (14.10) и означает, что модуль момента количеств движения сохраняет постоянную величину во все время движения. Конечно, этот интеграл можно получить и непосредственно из теоремы об изменении момента количеств движения. Так как $M^e = 0$, то

$$\frac{dK_O}{dt} = 0$$

и, следовательно, $K_O = \text{const.}$ Учитывая равенства (13.9) $K_x = I_x\omega_x$, $K_y = I_y\omega_y$, $K_z = I_z\omega_z$, найдем

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = K_O^2 = \text{const.}$$

Умножая теперь уравнения (14.10) соответственно на ω_x , ω_y и ω_z и проделывая аналогичные выкладки, получим еще один первый интеграл

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2h = \text{const.},$$

где h — постоянная энергин.

Механический смысл этого интеграла состоит в том, что кинетическая энергия тела во все время движения остается постоянной величиной. Найденный первый интеграл можно также получить из закона сохранения полной механической энергии $T + \Pi = h$ ($\Pi = 0$, так как тело движется по инерции).

Определение углов Эйлера даже в этом простом случае является довольно сложной математической задачей. Поэтому обратимся к частному случаю, когда

$$I_x = I_y \neq I_z,$$

т. е. рассмотрим тело, у которого ось z представляет собой ось динамической симметрии.

Уравнения (14.10) при этом будут

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= 0, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= 0, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Из третьего уравнения следует, что

$$\omega_z = \omega_{z0} = \text{const.} \quad (14.13)$$

Имея в виду, что момент количества движения K_O твердого тела имеет постоянный модуль и направление, неподвижную ось z_1 направим по вектору K_O (рис. 14.2). При таком выборе направления оси z_1 проекции вектора K_O на оси подвижной системы координат $Oxyz$ будут равны

$$\begin{aligned} K_x &= K_O \sin \theta \sin \varphi, & K_y &= K_O \sin \theta \cos \varphi, \\ K_z &= K_O \cos \theta. \end{aligned} \quad (14.14)$$

С другой стороны,

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z. \quad (14.15)$$

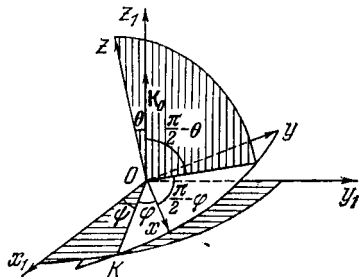


Рис. 14.2

Сравнивая выражения для K_z в формулах (14.14) и (14.15) и учитывая равенство (14.13), найдем $K_O \cos \theta = I_z \omega_{z0}$, откуда

$$\cos \theta = \cos \theta_0 = I_z \omega_{z0} / K_O = \text{const.}$$

Таким образом, угол нутации θ является постоянной величиной:

$$\theta = \theta_0. \quad (14.16)$$

Кинематические уравнения Эйлера (14.8) теперь принимают вид

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad \omega_{z0} = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \quad (14.17)$$

Из соотношений (14.14) и (14.15) находим ($I_x = I_y$)

$$K_O \sin \theta \sin \varphi = I_x \omega_x, \quad K_O \sin \theta \cos \varphi = I_x \omega_y,$$

или, учтя формулы (14.16) и (14.17),

$$K_O \sin \theta_0 \sin \varphi = I_x \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad K_O \sin \theta_0 \cos \varphi = I_x \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi.$$

Откуда

$$K_O = I_x \dot{\psi}, \quad \text{или} \quad \dot{\psi} = \frac{K_O}{I_x} = n = \text{const.} \quad (14.18)$$

Таким образом,

$$\psi = nt + \psi_0,$$

где ψ_0 — значение угла ψ в момент времени $t = 0$. Из третьей формулы уравнений (14.17) имеем

$$\dot{\varphi} = \omega_{z0} - n \cos \theta_0 = n_1 = \text{const} \quad (14.19)$$

и, следовательно,

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0,$$

где φ_0 — начальное значение угла φ .

Итак, решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, в рассматриваемом случае будет

$$\theta = \theta_0, \quad \psi = nt + \psi_0, \quad \varphi = n_1 t + \varphi_0. \quad (14.20)$$

Произвольные постоянные θ_0 , ψ_0 , φ_0 , n и n_1 , входящие в решение (14.20), связаны между собой соотношением (14.19), т. е.

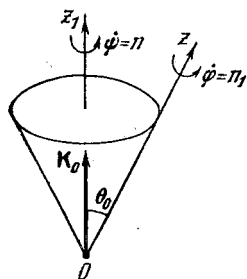
$$\omega_{z0} - n \cos \theta_0 = n_1.$$

Это значит, что решение (14.20) содержит в выбранной системе координат только четыре независимые между собой произвольные постоянные интегрирования. Однако направление вектора момента количества движения, с которым мы связали систему координат $Ox_1y_1z_1$,

постоянно и определяется в произвольной координатной системе двумя независимыми произвольными постоянными.

Поэтому решение (14.20) является общим решением уравнений (14.12). Движение, описываемое уравнениями (14.20), называется *регулярной прецессией*. При этом движении ось симметрии тела z описывает круговой конус с углом раствора $2\theta_0$, равномерно вращаясь вокруг постоянного направления вектора момента количества движения K_0 с угловой скоростью $\dot{\psi} = n$; одновременно само тело равномерно вращается вокруг оси симметрии z с угловой скоростью $\dot{\varphi} = n_1$. На рис. 14.3 показаны неподвижная ось z_1 (с ней совпадает вектор K_0), ось симметрии тела z и направления вращений.

Рис. 14.3



§ 14.3. Геометрическая интерпретация Пуансо

При отсутствии динамической симметрии решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции описывается эллиптическими функциями. Мы проведем лишь качественный анализ, данный Пуансо. В соответствии с формулой (12.20) уравнение эллипсоида инерции, построенного для точки O в подвижных осях $Oxuz$ (точка O — неподвижная точка тела), жестко связанных с телом, имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (14.21)$$

Пусть точка P с координатами x, y, z будет точкой пересечения мгновенной оси вращения тела с эллипсоидом инерции (рис. 14.4). Обозначая через ρ радиус-вектор точки P , проводимый из неподвижного полюса O , будем иметь

$$\rho = xi + yj + zk,$$

где i, j, k — единичные векторы осей системы координат $Oxyz$.

Так как вектор угловой скорости ω направлен по мгновенной оси вращения, то $\rho/\rho = \omega/\omega$; отсюда

$$\omega = \frac{\omega}{\rho} \rho$$

и

$$\omega_x = \frac{\omega}{\rho} x, \quad \omega_y = \frac{\omega}{\rho} y, \quad \omega_z = \frac{\omega}{\rho} z. \quad (14.22)$$

Рассматриваемое движение тела происходит по инерции, поэтому кинетическая энергия тела является постоянной величиной и на основании формулы (13.11)

$$2T = K_O \cdot \omega = K_x \omega_x + K_y \omega_y + K_z \omega_z = 2h. \quad (14.23)$$

Подставляя сюда выражения (14.6) и (14.22), получим

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} (I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2) = 2h.$$

Так как координаты x, y, z точки P должны удовлетворять уравнению эллипсоида инерции (14.21), то

$$\omega = \rho \sqrt{2h}, \quad (14.24)$$

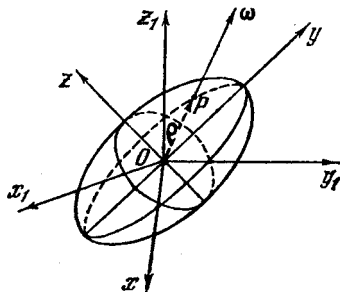


Рис. 14.4

т. е. длина радиуса-вектора ρ точки P пропорциональна величине угловой скорости тела.

Отметим, что из формулы (14.23) вытекает

$$\omega_k = \frac{2h}{K_O}, \quad (14.25)$$

т. е. проекция угловой скорости тела на направление момента количеств движения в рассматриваемом случае является постоянной величиной.

Проведем теперь через точку P касательную плоскость к эллипсоиду инерции. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$I_x x x' + I_y y y' + I_z z z' = 1, \quad (14.26)$$

где x', y', z' — текущие координаты касательной плоскости, а x, y, z — координаты точки P .

Используя формулы (14.6) и (14.22), запишем вектор K_O в виде

$$K_O = I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z k,$$

или

$$K_O = \frac{\omega}{\rho} (I_x xi + I_y yj + I_z zk).$$

Тогда, вводя радиус-вектор текущей точки касательной плоскости

$$r = x' i + y' j + z' k.$$

представим уравнение (14.26) в виде

$$\frac{\rho}{\omega} K_O \cdot r = 1. \quad (14.27)$$

Уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору момента количества движения и находящейся на постоянном расстоянии от неподвижной точки тела, как известно из аналитической геометрии, имеет вид

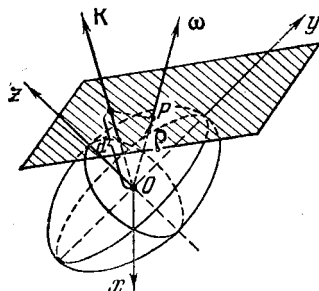


Рис. 14.5

$$\frac{K_O}{K} \cdot r = d, \quad (14.28)$$

где r — радиус-вектор текущей точки плоскости, а d — расстояние от начала координат.

Эта плоскость будет касаться эллипсоида инерции в точке P , если выполняется равенство $\omega/\rho = = K_O d$, вытекающее из соотношений (14.27) и (14.28). Отсюда, принимая во внимание (14.24), получим

$$d = \sqrt{2I}/K_O = \text{const}. \quad (14.29)$$

Следовательно, касательная плоскость, проведенная в точке P к эллипсоиду инерции, перпендикулярна к вектору момента количества движения и находится на постоянном расстоянии d , определяемом формулой (14.29), от неподвижной точки тела. Отсюда следует, что эта плоскость будет неподвижной по отношению к неподвижной системе координат, так как вектор K_O является постоянным вектором. Эллипсоид инерции касается этой плоскости в точке P , находящейся на мгновенной оси вращения; поэтому скорость точки касания равна нулю.

Таким образом, движение по инерции твердого тела, имеющего одну неподвижную точку можно представить как качение без скольжения эллипсоида по инерции по неподвижной плоскости, перпендикулярной к моменту количества движения и находящейся на постоянном расстоянии от центра эллипсоида (рис. 14.5).

§ 14.4. Устойчивость вращения твердого тела вокруг главных осей инерции

Предположим, что твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, вращается по инерции с постоянной угловой скоростью Ω вокруг некоторой оси, совпадающей с одной из главных осей инерции. Не нарушая общности, будем считать, что ось вращения совпадает с главной осью инерции z . Тогда

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \Omega = \text{const}.$$

Эти значения проекций угловых скоростей можно рассматривать как решение динамических уравнений Эйлера (14.10).

Вясним, будет ли такое вращение тела устойчивым, т. е. изменится ли оно, если сообщить телу произвольное, но достаточно малое изменение вектора угловой скорости (например, небольшим ударом по телу), или это движение в основном сохранится, вызвав только очень малые колебания оси вращения z .

Итак, пусть вектор угловой скорости Ω тела, вращающегося равномерно вокруг оси z , получил небольшое возмущение, в резуль-

тате которого проекции угловой скорости изменили свои значения и сделались равными

$$\omega_x = \omega_1, \quad \omega_y = \omega_2, \quad \omega_z = \Omega + \omega_3,$$

причем в начальный момент возмущения ω_1 , ω_2 и ω_3 малы по сравнению с Ω . Внесем эти значения ω_x , ω_y и ω_z в уравнения Эйлера (14.10) и сгруппируем члены:

$$I_x \frac{d\omega_1}{dt} + (I_z - I_y) \Omega \omega_2 + (I_z - I_y) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$I_y \frac{d\omega_2}{dt} + (I_x - I_z) \Omega \omega_1 + (I_x - I_z) \omega_1 \omega_3 = 0,$$

$$I_z \frac{d\omega_3}{dt} + (I_y - I_x) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Предположим, что во все время движения ω_1 , ω_2 и ω_3 остаются малыми по сравнению с Ω . Пренебрегая тогда их произведениями (члены второго порядка малости), получим

$$I_x \frac{d\omega_1}{dt} + (I_z - I_y) \Omega \omega_2 = 0,$$

$$I_y \frac{d\omega_2}{dt} + (I_x - I_z) \Omega \omega_1 = 0,$$

$$I_z \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

Из третьего уравнения следует, что $\omega_3 = \omega_{30}$, а первые два уравнения легко приводятся к виду

$$\frac{d^2 \omega_1}{dt^2} + \frac{\Omega^2}{I_x I_y} (I_x - I_z) (I_y - I_z) \omega_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 \omega_2}{dt^2} + \frac{\Omega^2}{I_x I_y} (I_x - I_z) (I_y - I_z) \omega_2 = 0.$$

Если $(I_x - I_z) (I_y - I_z) > 0$, то $\omega_1 = \omega_x$ и $\omega_2 = \omega_y$ выражаются через тригонометрические функции и во все время движения остаются малыми величинами (так как их начальные значения были малы).

Если же $(I_x - I_z) (I_y - I_z) < 0$, то $\omega_1 = \omega_x$ и $\omega_2 = \omega_y$ выражаются через показательные функции и с течением времени принимают сколь угодно большие значения.

Следовательно, условие устойчивости вращения тела по инерции вокруг главной оси инерции z сводится к неравенству

$$(I_x - I_z) (I_y - I_z) > 0,$$

т. е.

$$I_x > I_z, \quad I_y > I_z, \quad \text{или} \quad I_x < I_z, \quad I_y < I_z. \quad (14.30)$$

Таким образом, вращение вокруг главной оси инерции устойчиво, если момент инерции относительно этой оси является наиболь-

шим или наименьшим из трех главных моментов инерции. Заметим, что проведенный анализ математически недостаточно строг, так как точные уравнения заменялись приближенными, но можно показать (мы не будем останавливаться на этом), что полученные результаты остаются верными и при строгом рассмотрении.

§ 14.5. Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием силы тяжести (случай Лагранжа)

Второй практически важный случай движения твердого тела с одной неподвижной точкой (случай Лагранжа) соответствует следующим условиям:

1) эллипсоид инерции для неподвижной точки тела является эллипсоидом вращения ($I_x = I_y$);

2) центр тяжести тела лежит на оси z , которая является осью симметрии эллипсоида инерции и называется осью динамической симметрии тела.

Введем две системы координат с общим началом в неподвижной точке O тела. Оси подвижной системы $Oxyz$ напомним по главным осям инерции тела, а неподвижную систему координат выберем так, чтобы ось z_1 была направлена вверх (рис. 14.6).

В этом случае Лагранжа можно указать три первых интеграла движения. Во-первых, имеет место интеграл энергии

$$T + \Pi = h. \quad (14.31)$$

Так как кинетическая энергия тела с одной неподвижной точкой равна

$$T = \frac{1}{2} I_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2,$$

то, используя равенство (14.8) можно записать

$$T = \frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2.$$

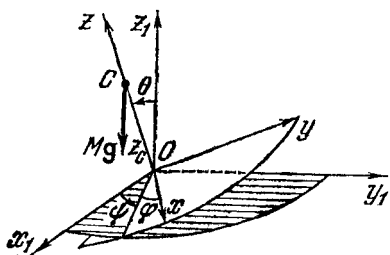


Рис. 14.6

Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = Mgz_{1C} = Mgz_C \cos \theta.$$

Таким образом, интеграл энергии (14.31) записывается в виде

$$\frac{1}{2} I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 + Mgz_C \cos \theta = h. \quad (14.32)$$

Во-вторых, интеграл момента количеств движения относительно оси z_1 (сила Mg параллельна оси z_1):

$$K_{z_1} = c_1.$$

Проекция момента количеств движения на ось z_1 равна сумме проекций на эту ось составляющих момента количеств движения по осям подвижной системы координат $Oxyz$, т. е.

$$K_{z_1} = K_x \sin \theta \sin \phi + K_y \sin \theta \cos \phi + K_z \cos \theta.$$

Так как $K_x = I_x \omega_x$, $K_y = I_y \omega_y$ и $K_z = I_z \omega_z$, а ω_x , ω_y и ω_z определяются по формулам (14.8), то будем иметь

$$K_{z_1} = I_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_z (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \cos \theta$$

и, следовательно,

$$I_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_z (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \cos \theta = c_1. \quad (14.33)$$

В-третьих, интеграл момента количеств движения относительно оси z (линия действия силы Mg пересекает ось z):

$$K_z = c_2,$$

т. е.

$$I_z \omega_z = I_z (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = c_2. \quad (14.34)$$

Интегралы (14.32)—(14.34) могут быть получены и непосредственно из динамических уравнений Эйлера *).

Используя интегралы (14.33) и (14.34), исключим из интеграла энергии (14.32) $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$. Из формулы (14.34) найдем

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = c_2 / I_z. \quad (14.35)$$

Формулу (14.33) перепишем в виде

$$\dot{\psi} = \frac{c_1 - I_z (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \cos \theta}{I_x \sin^2 \theta}. \quad (14.36)$$

Подставляя теперь выражения (14.35) и (14.36) в интеграл энергии, будем иметь

$$\frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{(c_1 - c_2 \cos \theta)^2}{2 I_x \sin^2 \theta} + Mg z_C \cos \theta = c_3,$$

где $c_3 = h - \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{I_z}$.

Полученное уравнение перепишем в виде

$$I_x^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = -(c_1 - c_2 \cos \theta)^2 - 2Mgz_C I_x \sin^2 \theta \cos \theta + 2c_3 I_x \sin^2 \theta.$$

Оно представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно θ . Для его исследования введем замену $u = \cos \theta$; тогда $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta$ и, следовательно,

$$I_x^2 \dot{u}^2 = -(c_1 - c_2 u)^2 - 2Mgz_C I_x (u - u^3) + 2c_3 I_x (1 - u^2).$$

Вводя обозначение

$$f(u) = -(c_1 - c_2 u)^2 - 2Mgz_C I_x (u - u^3) + 2I_x c_3 (1 - u^2), \quad (14.37)$$

будем иметь

$$I_x^2 \dot{u}^2 = f(u), \quad (14.38)$$

откуда

$$t = \pm I_x \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \quad (14.39)$$

Время t выражается через u эллиптическим интегралом, а следовательно, u будет эллиптической функцией t . Зная u как функцию t , мы тем самым определяем угол нутации θ как функцию времени t . Используя уравнения (14.35) и (14.36), определяем затем $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ как функции времени. Таким образом, поставленная задача приводится к квадратурам.

Мы не будем проводить операции интегрирования, а постараемся выяснить характер движения, исходя из свойств функции $f(u)$. Согласно равенству (14.38) функция $f(u) \geq 0$. Поэтому в некоторой области значений u , заключенных между -1 и $+1$ (так как $u = \cos \theta$), функция $f(u)$ должна быть положительна. Учитывая также, что

$$\begin{aligned} f(-\infty) &= -\infty, & f(-1) &= -(c_1 + c_2)^2 < 0, \\ f(+1) &= -(c_1 - c_2)^2 < 0, & f(+\infty) &= +\infty, \end{aligned}$$

*) С у с л о в Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1944.

мы заключаем, что кубическое уравнение $f(u) = 0$ имеет три вещественных корня, u_1, u_2, u_3 ($u_1 < u_2 < u_3$), а график функции $f(u)$ имеет вид, изображенный на рис. 14.7. Таким образом, для действительного движения u заключено между u_1 и u_3 .

Так как $u = \cos \theta$, то угол нутации θ при движении тела будет изменяться в пределах

$$\theta_2 < \theta < \theta_1, \quad (14.40)$$

где $\theta_1 = \arccos u_1$, $\theta_2 = \arccos u_3$.

Для наглядного представления о характере движения тела построим сферу единичного радиуса с центром в неподвижной точке тела. Отложим на оси z единичный вектор, конец которого назовем *апексом*. Очевидно, что апекс будет все время находиться на поверхности построенной нами сферы. В силу условия (14.40) апекс все время будет находиться в полосе между двумя параллелями, соответствующими углам θ_1 и θ_2 (рис. 14.8). Вид траектории апекса в этой полосе зависит от скорости прецессии $\dot{\psi}$.

Приведем без доказательства три возможных случая движения апекса.

1. Скорость прецессии $\dot{\psi}$ сохраняет знак и не обращается в нуль. В этом случае траекторией апекса будет волнистая кривая, касающаяся граничных параллелей (рис. 14.8, а).

2. Скорость прецессии $\dot{\psi}$ сохраняет знак, но обращается в нуль. Очевидно, что $\dot{\psi}$ может быть равной нулю лишь при $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$ (доказывается, что только при $\theta = \theta_2$), иначе $\dot{\psi}$ изменила бы знак во время движения. Траекторией апекса будет кривая с точками возврата (сферическая циклоида). Вид траектории показан на рис. 14.8, б.

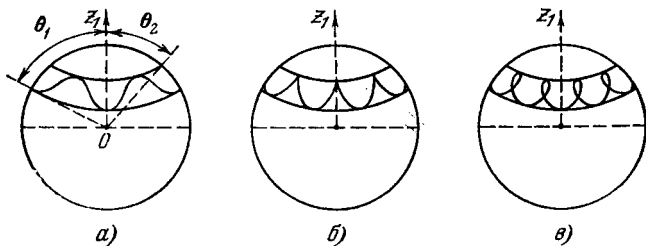


Рис. 14.8

3. Скорость прецессии $\dot{\psi}$ меняет знак во время движения. В этом случае траекторией апекса будет кривая с петлями (рис. 14.8, в).

Рассмотрим случай, когда движение будет *регулярной прецессией* ($\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\dot{\psi} = \text{const}$ и $\dot{\theta} = \text{const}$). Это будет иметь место при $u_1 = u_2 = u_0$ (т. е. корни уравнения $f(u) = 0$ кратны), или

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_0,$$

и

$$\dot{\psi} = \frac{c_1 - c_2 \cos \theta_0}{I_x \sin^2 \theta_0} = n = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \frac{c_2}{I_z} - n \cos \theta_0 = n_1 = \text{const}.$$

Уравнение $f(u) = 0$ будет иметь кратные корни, если одновременно $f'(u_0) = 0$, или

$$c_2(c_1 - c_2 u_0) - I_x M g z_C (1 - 3u_0^2) - 2I_x c_3 u_0 = 0. \quad (14.41)$$

Этому уравнению должны удовлетворять начальные условия, чтобы осуществлялось регулярное прецессионное движение.

Условие (14.41) можно упростить. Действительно, при регулярной прецессии $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\dot{\psi} = n = \text{const}$, $\dot{\varphi} = n_1 = \text{const}$. Следовательно, при $t = 0$ будем иметь

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\psi} = n, \quad \dot{\varphi} = n_1.$$

Тогда произвольные постоянные c_1 , c_2 и c_3 будут

$$c_1 = I_x n (1 - u_0^2) + I_z (n u_0 + n_1) u_0,$$

$$c_2 = I_z (n u_0 + n_1),$$

$$c_3 = \frac{(c_1 - c_2 u_0)^2}{2 I_x (1 - u_0^2)} + M g z_C u_0 = \frac{1}{2} I_x n^2 (1 - u_0^2) + M g z_C u_0.$$

Подставляя эти значения для c_1 , c_2 и c_3 в уравнение (14.41), получим

$$I_x I_z (n u_0 + n_1) n (1 - u_0^2) - I_x M g z_C (1 - u_0^2) - I_x^2 n^2 u_0 (1 - u_0^2) = 0.$$

После деления на $I_x (1 - u_0^2)$ и замены $u_0 = \cos \theta_0$ будем иметь

$$(I_x - I_z) n^2 \cos \theta_0 - I_z n n_1 + M g z_C = 0. \quad (14.42)$$

Это уравнение представляет собой условие существования регулярной прецессии в случае Лагранжа.

Отметим, что при движении по инерции при $I_x = I_y \neq I_z$ тело всегда совершает регулярную прецессию, а в случае Лагранжа только при начальных условиях, удовлетворяющих условию (14.42). При движении по инерции ось прецессии совпадает с неизменным направлением вектора момента количества движения, а в случае Лагранжа ось прецессии вертикальна.

§ 14.6. Главный вектор и главный момент сил тяготения

С развитием космической техники возникли новые задачи механики, в частности большое значение приобрело исследование движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) относительно его центра масс. Это движение может быть вызвано различными силами. Учитывая характер настоящего руководства, мы ограничимся постановкой задачи и исследованием некоторых частных случаев движения ИСЗ относительно центра масс под действием центрального поля сил тяготения, создаваемого Землей, в следующих предположениях *):

1. Размеры ИСЗ конечны, но они малы по сравнению с расстоянием R от центра Земли O до центра масс спутника. Иначе говоря, если l — максимальный линейный размер спутника, то отношение $l/R \ll 1$:

$$l/R \ll 1. \quad (14.43)$$

2. Предполагается, что равнодействующая сила F , с которой Земля действует на материальную точку массы m , находящуюся вне Земли, определяется законом всемирного тяготения

$$F = -\mu \frac{m}{r^3} r, \quad (14.44)$$

*) Более подробное изложение этого вопроса, свободное от некоторых сделанных ниже предположений, можно найти, например, в монографии: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. Там же дано исследование влияния других факторов (аэродинамических сил, магнитного поля Земли, светового давления и т. п.) на движение ИСЗ относительно центра масс.

где $\mu = fM$ — гравитационный параметр Земли (M — ее масса, f — гравитационная постоянная), $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра Земли O к материальной точке. Таким образом, предполагается, что Земля создает обычное ньютоновское поле сил притяжения.

3. Не учитывается движение Земли относительно Солнца, т. е. предполагается, что Земля неподвижна.

Построим две системы подвижных координатных осей: первая система $Ox_0y_0z_0$ с началом в центре Земли O и осью Oz_0 , проходящей через центр масс C спутника; вторая система $Cx_1y_1z_1$ с началом в центре масс спутника и осями x_1, y_1, z_1 , параллельными осям x_0, y_0, z_0 (оси Oz_0 и Cz_1 совпадают — см. рис. 14.9). Выделим в ИСЗ точку массы dm , положение которой относительно координатной системы $Cx_1y_1z_1$ будем определять радиусом-вектором ρ или координатами x_1, y_1, z_1 . На основании (14.43) будем считать отношения $x_1/R, y_1/R$ и z_1/R членами первого порядка малости. Проведем теперь из центра Земли радиусы-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ (см. рис. 14.9).

Имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho. \quad (14.45)$$

Сила dF , с которой Земля действует на выбранную точку, определяется формулой (14.44):

$$dF = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} dm. \quad (14.46)$$

Рис. 14.9

Отсюда, пользуясь равенством (14.45), найдем проекции силы dF на оси x_1, y_1, z_1

$$dF_{x_1} = -\mu \frac{x_1}{r^3} dm, \quad dF_{y_1} = -\mu \frac{y_1}{r^3} dm, \quad dF_{z_1} = -\mu \frac{R + z_1}{r^3} dm. \quad (14.47)$$

Возводя обе части равенства (14.45) в скалярный квадрат, получим

$$r^2 = R^2 + 2\mathbf{R} \cdot \rho + \rho^2 = R^2 + 2Rz_1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(1 + 2 \frac{z_1}{R} + \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{R^2} \right)^{-1/2}, \quad (14.48)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 + 2 \frac{z_1}{R} + \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{R^2} \right)^{-3/2}. \quad (14.49)$$

Разложим левую часть равенства (14.49) в ряд бинома Ньютона и ограничимся членами первого порядка малости *). Имеем

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 - 3 \frac{z_1}{R} \right). \quad (14.50)$$

Внеси это выражение для $1/r^3$ в равенства (14.47), получим с принятой точностью

$$dF_{x_1} = -\mu \frac{x_1}{R^3} dm, \quad dF_{y_1} = -\mu \frac{y_1}{R^3} dm, \quad dF_{z_1} = -\frac{\mu}{R^3} dm + 2\mu \frac{z_1}{R^4} dm. \quad (14.51)$$

*) Ряд бинома Ньютона $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ сходится абсолютно и равномерно для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < 1$.

Интегрируя эти равенства по массе всего спутника и учитывая соотношения

$$\int x_1 dm = 0, \quad \int y_1 dm = 0, \quad \int z_1 dm = 0 \quad (14.52)$$

(начало координат совпадает с центром масс спутника C), найдем проекции главного вектора F сил притяжения Земли

$$F_{x_1} = 0, \quad F_{y_1} = 0, \quad F_{z_1} = -\mu \frac{m}{R^3}, \quad (14.53)$$

где m — масса спутника.

Из этих выражений видно, что с принятой точностью размеры ИСЗ не влияют на главный вектор сил притяжения Земли и, следовательно, центр масс спутника движется по эллипсу, один из фокусов которого совпадает с центром Земли O (см. главу IV). Заметим, что такая постановка задачи (она называется ограниченной) применяется не только при изучении движения ИСЗ относительно центра масс, но и в классических задачах о прецессии оси Земли и либрации Луны.

В дальнейшем будем считать, что координатная плоскость Sx_1z_1 (следовательно, и плоскость Ox_0z_0) совмещена с плоскостью π орбиты центра масс спутника. Тогда оси y_1 и y_0 будут все время перпендикулярны к неподвижной плоскости орбиты, а ось x_1 будет совпадать с ее трансверсалью (см. рис. 14.9). Построенная таким образом координатная система $Sx_1y_1z_1$ называется *орбитальной* системой.

Перейдем теперь к вычислению главного момента сил тяготения Земли относительно центра масс C . Найдем сначала момент dM_C^e силы dF , приложенной к выбранной точке с массой dm . Имеем

$$dM_C^e = \rho \times dF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ dF_{x_1} & dF_{y_1} & dF_{z_1} \end{vmatrix}.$$

Отсюда найдем моменты относительно осей x_1 , y_1 , z_1 :

$$dM_{x_1}^e = y_1 dF_{z_1} - z_1 dF_{y_1}, \quad dM_{y_1}^e = z_1 dF_{x_1} - x_1 dF_{z_1}, \quad dM_{z_1}^e = x_1 dF_{y_1} - y_1 dF_{x_1},$$

или, пользуясь равенствами (14.51),

$$\begin{aligned} dM_{x_1}^e &= 3 \frac{\mu}{R^3} y_1 z_1 dm - \frac{\mu}{R^2} y_1 dm, \\ dM_{y_1}^e &= -3 \frac{\mu}{R^3} x_1 z_1 dm + \frac{\mu}{R^2} x_1 dm, \\ dM_{z_1}^e &= 0. \end{aligned} \quad (14.54)$$

Интегрируя эти равенства по массе всего спутника и учитывая (14.52), получим значения моментов сил тяготения относительно орбитальных осей x_1 , y_1 , z_1 :

$$M_{x_1}^e = 3 \frac{\mu}{R^3} I_{y_1 z_1}, \quad M_{y_1}^e = -3 \frac{\mu}{R^3} I_{x_1 z_1}, \quad M_{z_1}^e = 0, \quad (14.55)$$

где $I_{y_1 z_1}$ и $I_{x_1 z_1}$ — соответствующие центробежные моменты инерции.

Так как спутник вращается относительно орбитальных осей, то центробежные моменты инерции $I_{x_1 z_1}$ и $I_{y_1 z_1}$ являются переменными величинами. Для того чтобы перейти к постоянным моментам инерции, введем еще одну систему координат $Sx_0y_0z_0$, в которой оси, жестко связанные со спутником, направлены по главным центральным осям инерции спутника (рис. 14.10). Положение новой координатной системы

Сх₁у₁z₁ будем определять таблицей направляющих косинусов:

	x	y	z
x_1	α_1	α_2	α_3
y_1	β_1	β_2	β_3
z_1	γ_1	γ_2	γ_3

Из девяти величин $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ($k = 1, 2, 3$) независимых только три, так как направляющие косинусы удовлетворяют трем условиям единичности и трем условиям ортогональности:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 &= 0.\end{aligned}\quad (14.56)$$

Таблица косинусов представляет ортогональную матрицу Λ , равную обратной матрице Λ^{-1} . Поэтому каждый элемент этой матрицы равен своему алгебраическому дополнению, в частности,

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \quad (14.57)$$

Обозначим моменты инерции спутника относительно осей x, y, z через I_x, I_y, I_z соответственно. Тогда, пользуясь формулами (12.29) и учитывая принятые здесь

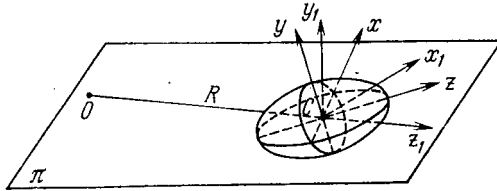


Рис. 14.10

обозначения, получим при $x_C = y_C = z_C = 0$

$$\begin{aligned}I_{x_1 z_1} &= \alpha_1 \gamma_1 (I_z - I_x) + \alpha_2 \gamma_2 (I_z - I_y), \\ I_{y_1 z_1} &= \beta_1 \gamma_1 (I_z - I_x) + \beta_2 \gamma_2 (I_z - I_y).\end{aligned}\quad (14.58)$$

Момент относительно оси x вычислим по формуле

$$M_x^e = M_{x_1}^e \alpha_1 + M_{y_1}^e \beta_1 + M_{z_1}^e \gamma_1.$$

Внесем в это равенство значения $M_{x_1}^e, M_{y_1}^e$ и $M_{z_1}^e$ из (14.55), а затем воспользуемся формулами (14.58). Тогда после очевидных преобразований получим

$$M_x^e = 3 \frac{\mu}{R^3} (I_z - I_y) \gamma_2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1),$$

или, пользуясь последней формулой (14.57),

$$\begin{aligned} M_x^e &= 3 \frac{\mu}{R^3} (I_z - I_y) \gamma_2 \gamma_3, & M_y^e &= 3 \frac{\mu}{R^3} (I_x - I_z) \gamma_3 \gamma_1, \\ M_z^e &= 3 \frac{\mu}{R^3} (I_y - I_x) \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned} \quad (14.59)$$

(две другие формулы получены аналогичным методом).

Формулы (14.59), определяющие проекции главного момента сил тяготения, действующих на ИСЗ, содержат не переменные, а постоянные моменты инерции; кроме того, они симметричны. Этим они выгодно отличаются от формул (14.55).

§ 14.7. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ относительно центра масс

Обозначим через Ω абсолютную угловую скорость ИСЗ (скорость относительно осей $S\xi\eta\zeta$, имеющих начало в центре масс спутника и перемещающихся поступательно относительно инерциальной системы отсчета, — эти оси на рис. 14.9 не показаны). Пусть $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — проекции этого вектора на оси x, y, z соответственно. Воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера (14.7), внося в них значения моментов M_x^e, M_y^e и M_z^e из равенств (14.59) и заменив одновременно вектор ω на Ω . Тогда получим *)

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\Omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \Omega_y \Omega_z &= 3 \frac{\mu}{R^3} (I_z - I_y) \gamma_2 \gamma_3, \\ I_y \frac{d\Omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \Omega_z \Omega_x &= 3 \frac{\mu}{R^3} (I_x - I_z) \gamma_3 \gamma_1, \\ I_z \frac{d\Omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \Omega_x \Omega_y &= 3 \frac{\mu}{R^3} (I_y - I_x) \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned} \quad (14.60)$$

Эти три уравнения содержат шесть неизвестных функций: $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Поэтому их нужно дополнить уравнениями, определяющими закон изменения направляющих косинусов. Для этого обозначим через ω угловую скорость вращения орбитальной системы координат и через i_1, j_1, k_1 — орты ее осей. Так как плоскости Ox_0z_0 и Cx_1z_1 неподвижны, то орбитальная система вращается вокруг неподвижной оси Oy_0 . Поэтому

$$\omega = \omega j_1. \quad (14.61)$$

Воспользуемся формулами (том I, глава XIII)

$$\frac{di_1}{dt} = \omega \times i_1, \quad \frac{dj_1}{dt} = \omega \times j_1, \quad \frac{dk_1}{dt} = \omega \times k_1,$$

или, пользуясь (14.61) и формулами

$$\begin{aligned} i_1 \times j_1 &= k_1, & j_1 \times k_1 &= i_1, & k_1 \times i_1 &= j_1, \\ \frac{di_1}{dt} &= -\omega k_1, & \frac{dj_1}{dt} &= 0, & \frac{dk_1}{dt} &= \omega i_1. \end{aligned} \quad (14.62)$$

*) Уравнения Эйлера (14.7) выведены для случая, когда тело имеет одну неподвижную точку. Так как теоремы об изменении момента количества движения относительно центра масс и неподвижной точки имеют одну и ту же форму, то динамические уравнения Эйлера (14.7) применимы и в данном случае (см. формулы (9.9) и (9.45)).

Для того чтобы спроектировать эти равенства на подвижные координатные оси $Sx_1y_1z_1$, скрепленные с ИСЗ, нужно выразить абсолютные производные, стоящие в левых частях равенств (14.62), через локальные производные. Имеем

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}_1 = -\omega \mathbf{k}_1.$$

Проектируя обе части этого равенства на оси x, y, z и учитывая, что проекции координатных ортов равны соответствующим направляющим косинусам, найдем (две вторые группы уравнений получены из (14.62) аналогичным методом)

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_2\Omega_z - \alpha_3\Omega_y - \omega\gamma_1, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_2\Omega_z - \beta_3\Omega_y, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2\Omega_z - \gamma_3\Omega_y + \omega\alpha_1, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \alpha_3\Omega_x - \alpha_1\Omega_z - \omega\gamma_2, & \frac{d\beta_2}{dt} &= \beta_3\Omega_x - \beta_1\Omega_z, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3\Omega_x - \gamma_1\Omega_z + \omega\alpha_2, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \alpha_1\Omega_y - \alpha_2\Omega_x - \omega\gamma_3, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \beta_1\Omega_y - \beta_2\Omega_x, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1\Omega_y - \gamma_2\Omega_x + \omega\alpha_3. \end{aligned} \quad (14.63)$$

Эти девять кинематических уравнений (они называются *обобщенными уравнениями Пуассона*) вместе с тремя динамическими уравнениями Эйлера (14.60) составляют полную систему дифференциальных уравнений движения ИСЗ относительно центра масс. В этих уравнениях I_x, I_y, I_z и μ — известные постоянные величины, R и ω — в общем случае известные функции времени, определяемые из кеплерова движения центра масс спутника, $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ($k = 1, 2, 3$) — искомые функции времени. Не останавливаясь на методах решения этих уравнений (в общем виде они решаются только для частных случаев), заметим, что шесть первых интегралов нам известны — это равенства (14.56).

§ 14.8. Относительное равновесие ИСЗ

Большое практическое и теоретическое значение имеют условия относительного равновесия ИСЗ, т. е. условия, при выполнении которых спутник не будет перемещаться относительно орбитальной системы координат $Sx_1y_1z_1$. Мы будем решать эту задачу в предположении, что центр масс ИСЗ движется по окружности радиуса R . Как известно, в этом случае угловая скорость ω вращения орбитальной системы $Sx_1y_1z_1$ определяется равенством

$$\omega^2 = \frac{\mu}{R^3} = \text{const.} \quad (14.64)$$

При равновесии ИСЗ относительно осей x_1, y_1, z_1 все направляющие косинусы α_k, β_k и γ_k будут постоянными числами; при этом девять обобщенных уравнений Пуассона обращаются в тождества (читатель без труда может проверить это самостоятельно). Кроме того, при относительном покое абсолютная угловая скорость спутника Ω будет равна угловой скорости ω вращения орбитальной системы $Sx_1y_1z_1$, т. е. $\Omega = \omega$, или, учитывая равенство (14.61),

$$\Omega = \omega \mathbf{j}_1 = \omega \mathbf{j}. \quad (14.65)$$

В проекциях на оси x, y, z , жестко связанные с ИСЗ, будем иметь

$$\Omega_x = \omega\beta_1, \quad \Omega_y = \omega\beta_2, \quad \Omega_z = \omega\beta_3,$$

причем все эти величины в силу сделанных предположений постоянны и, следовательно, их производные по времени равны нулю.

Внесем эти значения проекций угловой скорости и значение μ/R^3 из равенства (14.64) в уравнения (14.60) и сократим их на ω^2 . Тогда получим

$$\begin{aligned} (I_z - I_y) \beta_2 \beta_3 &= 3 (I_z - I_y) \gamma_2 \gamma_3, \\ (I_x - I_z) \beta_3 \beta_1 &= 3 (I_x - I_z) \gamma_3 \gamma_1, \\ (I_y - I_x) \beta_1 \beta_2 &= 3 (I_y - I_x) \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned} \quad (14.66)$$

Будем считать, что среди моментов инерции I_x , I_y , I_z нет равных. Для определенности положим

$$I_y > I_x > I_z. \quad (14.67)$$

Тогда, сокращая уравнения (14.66) на не равные нулю множители, получим

$$\beta_2\beta_3 = 3\gamma_2\gamma_3, \quad \beta_3\beta_1 = 3\gamma_3\gamma_1, \quad \beta_1\beta_2 = 3\gamma_1\gamma_2. \quad (14.68)$$

Покажем, что среди корней этих уравнений имеются нулевые корни. Действительно, предположим, что все корни уравнений (14.68) отличны от нуля. Тогда, перемножая почленно эти уравнения, найдем $\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 = 27\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2$, или

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = \pm 3\sqrt{3}\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Деля почленно это равенство на уравнения (14.68), получим

$$\beta_1 = \pm \sqrt{3}\gamma_1, \quad \beta_2 = \pm \sqrt{3}\gamma_2, \quad \beta_3 = \pm \sqrt{3}\gamma_3.$$

Умножив первое уравнение на β_1 , второе на β_2 и третье на β_3 , а затем почленно сложив, будем иметь

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \pm \sqrt{3}(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3).$$

Это равенство невозможно, так как согласно (14.56) его левая часть равна единице, а правая — нулю. Это доказывает, что среди корней уравнений (14.68) имеются нулевые. Пусть $\beta_3 = \gamma_2 = 0$. Тогда первое уравнение (14.68) превратится в тождество, а второе и третье примут вид $\gamma_3\gamma_1 = 0$, $\beta_1\beta_2 = 0$. Отсюда $\gamma_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_3 = \beta_2 = 1$ (так как сумма квадратов одноименных косинусов равна единице). Из полученного решения и равенств (14.56) следует, что $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$.

Таким образом, таблица направляющих косинусов в относительном равновесии ИСЗ имеет вид *)

	x	y	z
x_1	1	0	0
y_1	0	1	0
z_1	0	0	1

Эта таблица показывает, что в сделанных предположениях относительное равновесие ИСЗ возможно только в том случае, если его главные центральные оси инерции x , y , z совпадают с координатными осями орбитальной системы $Cx_1y_1z_1$. Иначе говоря, в относительном равновесном положении одна ось эллипсоида инерции ИСЗ будет все время направлена к центру Земли, вторая ось будет перпендикулярна плоскости орбиты и третья ось будет лежать в плоскости орбиты, перпендикулярно прямой ОС.

Остановимся очень кратко на вопросе устойчивости положения относительного равновесия. В конце § 20.2 будет показано, что если к центру Земли будет направлена большая ось эллипсоида инерции ИСЗ (ей соответствует наименьший момент инерции), то это положение ИСЗ будет устойчиво **). (Здесь мы пользуемся

*) Заметим, что другие решения уравнений (14.68) не дают принципиально новых результатов и они будут совпадать с данным решением при соответствующей замене обозначений осей x_1 , y_1 , z_1 .

**) См. также цитированную на стр. 301 книгу В. В. Белецкого или книгу: Руняев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.

интуитивным представлением об устойчивости движения, которое было изложено в § 14.4. Строгое определение устойчивости равновесия будет дано в главе XX, § 20.2.) В следующем параграфе мы дадим аналитическое доказательство этого утверждения для плоскопараллельного движения ИСЗ, а сейчас ограничимся рассмотрением одного примера.

Пусть спутник состоит из двух точечных масс, соединенных невесомым стержнем длины $2l$ (спутник типа гантели). Согласно формулам (14.51) на каждую точку будет действовать сила, проекции которой определяются равенствами

$$F_{x_1} = -\mu \frac{x_1}{R^3} m, \quad F_{y_1} = -\mu \frac{y_1}{R^3} m, \quad F_{z_1} = -\frac{\mu}{R^2} m + 2\mu \frac{z_1}{R^3} m,$$

где m — масса каждой точки.

В выражении для F_{z_1} первое слагаемое не влияет на вращательное движение спутника (при вычислении моментов оно выпадает — см. формулы (14.54) и (14.55)). Поэтому в дальнейшем будем учитывать только второе слагаемое в F_{z_1} . Составим

дифференциальные уравнения силовых линий (см. (3.53))

$$\frac{dx_1}{-\mu \frac{x_1}{R^3} m} = \frac{dy_1}{-\mu \frac{y_1}{R^3} m} = \frac{dz_1}{2\mu \frac{z_1}{R^3} m},$$

или, упрощая,

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{y_1} = -\frac{dz_1}{2z_1}.$$

Отсюда

$$z_1 = C_1/x_1^2, \quad z_1 = C_2/y_1^2,$$

Рис. 14.11

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

На плоскости x_1z_1 силовые линии и их направления имеют вид, показанный на рис. 14.11 (аналогичная картина имеет место на плоскости y_1z_1). Из рисунка видно, что если спутник-гантель находится в плоскости орбиты (плоскости x_1z_1), то каждая точечная масса будет стремиться к оси z_1 , т. е. к радиусу-вектору центра масс спутника. Легко видеть, что если в начальный момент ось тела (стержень спутника-гантели) близка к направлению оси z_1 , то при малом возмущении движение будет иметь колебательный характер (то же явление будет происходить в плоскости y_1z_1). Таким образом, если в начальный момент времени ось спутника-гантели будет направлена к Земле, то это равновесное положение будет устойчиво.

Обратим внимание теперь на то, что для гантели $I_x = I_y = ml^2$, $I_z = 0$ (ось z направлена по оси спутника-гантели), т. е. момент инерции относительно оси наименьший. Это объясняет для данного спутника устойчивость относительно равновесного положения, при котором ось спутника с наименьшим моментом инерции направлена к центру Земли.

§ 14.9. Плоское движение ИСЗ по круговой орбите

Рассмотрим плоское движение ИСЗ относительно центра масс, предполагая, что ось Sy все время перпендикулярна плоскости орбиты. В этом случае $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_2 = \gamma_2 = 0$. Введем угол θ между осями z_1 и z (рис. 14.12). Тогда будем иметь

$$\gamma_1 = \cos(z_1, x) = -\sin \theta, \quad \gamma_3 = \cos(z_1, z) = \cos \theta.$$

Обозначим через Ω_r угловую скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат $Sx_1y_1z_1$; очевидно, что в плоском движении $\Omega_r = \dot{\theta} j_1$. Абсолютная угловая скорость Ω спутника определяется равенством $\Omega = \omega + \Omega_r$ или, учитывая значения Ω_r и ω (см. формулу (14.65)), получим

$$\Omega = (\omega + \dot{\theta}) j_1.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае плоского движения спутника проекции его угловой скорости на оси x , y , z жестко связанные с ним, будут равны

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \omega + \dot{\theta}, \quad \Omega_z = 0.$$

Внесем полученные значения для γ_k ($k = 1, 2, 3$) и Ω_x , Ω_y , Ω_z в уравнение (14.60), считая, что центр масс спутника движется по круговой орбите (в этом случае величина ω , определяемая формулой (14.64), является постоянной). Из трех уравнений (14.60) первое и третье уравнения обратятся в тождества, а второе уравнение примет вид

$$I_y \ddot{\theta} + 3\omega^2 (I_x - I_z) \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (14.69)$$

Будем считать, что $I_x > I_z$. Тогда это уравнение приводится к дифференциальному уравнению движения математического маятника для угла 2θ . Действительно, положив $\psi = 2\theta$, преобразуем уравнение (14.69) к виду

$$\ddot{\psi} + k^2 \sin \psi = 0, \quad (14.70)$$

где

$$k^2 = 3\omega^2 \frac{I_x - I_z}{I_y}. \quad (14.71)$$

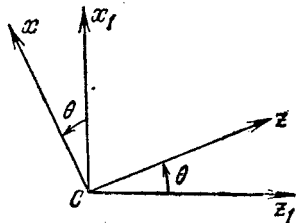


Рис. 14.12

Дифференциальное уравнение (14.70) совпадает по форме с дифференциальным уравнением движения математического маятника. Поэтому все выводы, относящиеся к математическому маятнику, справедливы и для ИСЗ, совершающего плоскопараллельное движение. В частности, отсюда следует, что равновесное положение ИСЗ, при котором большая ось эллипсоида инерции направлена к центру Земли, является устойчивым положением относительного равновесия. Точно так же, как и математический маятник, ИСЗ может при определенных условиях совершать круговые движения. Наконец, период малых колебаний ИСЗ около устойчивого положения относительного равновесия определяется формулой $T = 2\pi/k$, или, если принять во внимание равенство (14.71),

$$T = \sqrt{\frac{I_y}{3(I_x - I_z)}} \cdot T^*,$$

где $T^* = 2\pi/\omega$ — период обращения спутника вокруг Земли.

Глава XV

ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ

§ 15.1. Введение

В современной технике под *гироскопом* *) понимают *твердое симметричное тело, которое может вращаться вокруг оси симметрии с угловой скоростью, значительно превышающей скорость вращения самой оси симметрии*.

*) Слово «гироскоп», буквально означающее «указатель вращения», образовано французским физиком Фуко из двух греческих слов: γίρως (гирос) — вращение и σκοπεῖν (скопейн) — смотреть, наблюдать. Этими словами Фуко назвал изобретенный им в 1852 г. прибор для демонстрации суточного вращения Земли см. § 15.4).

Примером гироскопа может служить волчок, имеющий неподвижную точку O (рис. 15.1).

Наиболее простым гироскопическим прибором является гироскоп в кардановом подвесе (рис. 15.2). Ротор вращается вокруг своей оси симметрии AA' , причем ось вращения установлена в подшипниках, укрепленных во внутреннем кольце, которое может вращаться вокруг оси BR' . Вращение внутреннего кольца происходит в подшипниках, укрепленных в наружном кольце. Наконец, наружное кольцо может вращаться вокруг оси CC' в неподвижно

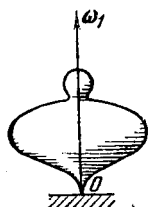


Рис. 15.1

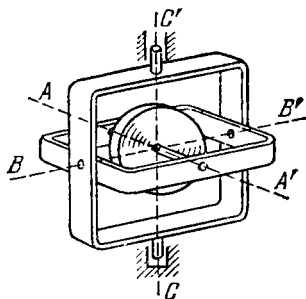


Рис. 15.2

укрепленных подшипниках. Таким образом, ротор может совершать три независимых друг от друга вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке — центре ротора, которая при движении гироскопа остается неподвижной. Заметим, что точка пересечения осей карданова подвеса или неподвижная точка называется *точкой подвеса гироскопа*.

Приведенные примеры гироскопов — волчок и гироскоп в кардановом подвесе — представляют примеры *гироскопов с тремя степенями свободы*, так как для описания их движения необходимо иметь три независимых между собой параметра. Если же, например, у гироскопа в кардановом подвесе закрепить наружное кольцо, то ротор гироскопа будет иметь возможность вращаться только вокруг своей оси симметрии и оси внутреннего кольца, т. е. будет иметь две степени свободы. Такой гироскоп называется *гироскопом с двумя степенями свободы*.

Гироскоп обладает рядом замечательных свойств, позволяющих широко использовать его в технике. Так, на всех морских и океанских судах установлены гироскопические компасы, работающие значительно точнее и устойчивее магнитных компасов; широко применяются гироскопы для получения на движущемся объекте (корабле, самолете, ракете) вертикали места, знание которой необходимо, в частности, для определения текущих координат объекта; с помощью гироскопов стабилизируются орудийные платформы на корабле; гироскопы используются для измерения с высокой степенью точности угловых и линейных скоростей и ускорений;

они применяются при прокладке туннелей, бурении скважин и т. п. Подробное описание гироскопических устройств и их теории читатель может найти в специальных руководствах *), здесь же мы дадим только краткое изложение основных свойств гироскопа, являющихся теоретической базой современного гироскопического приборостроения.

§ 15.2. Основное допущение элементарной (прецессионной) теории гироскопа

Пусть гироскоп совершает быстрое вращение вокруг своей оси материальной симметрии с угловой скоростью ω_1 , а эта ось в свою очередь вращается с угловой скоростью ω_2 . На основании теоремы о сложении вращений тела абсолютная угловая скорость гироскопа ω равна геометрической сумме угловых скоростей ω_1 и ω_2 , т. е.

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Построим систему координат $Oxyz$, совместив ось z с осью симметрии гироскопа (рис. 15.3, а). Тогда оси этой системы координат будут главными осями инерции; следовательно, проекции момента количества движения на оси x , y , z определяются равенствами

$$K_x = I_x \omega_{2x}, \quad K_y = I_y \omega_{2y}, \quad K_z = I_z (\omega_1 + \omega_{2z}),$$

где I_x , I_y и I_z — соответствующие моменты инерции гироскопа, причем $I_x = I_y$ (так как ось z — ось симметрии).

Таким образом, мы можем назвать три непараллельных направления: *направление угловой скорости собственного вращения ω_1 , направление абсолютной угловой скорости ω и направление вектора момента количества движения K (кинетического момента) тела **).*

Для современных гироскопов угловая скорость ω_1 собственного вращения достигает 6000 рад/с (порядка 60 000 об/мин) и даже более, в то время как угловая скорость ω_2 оси гироскопа не превышает обычно 0,01 рад/с.

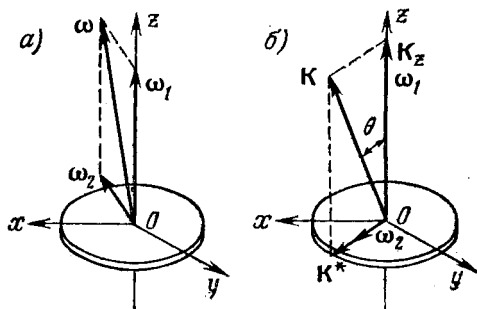


Рис. 15.3

*) См., например, Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов. — М.: Наука, 1972; Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963; Ройтенберг Я. Л. Гироскопы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975; Магнус К. Гироскоп: теория и применение. Перевод с немецкого. — М.: Мир, 1974.

**) Если нет специальной оговорки, то предполагается, что кинетический момент K вычисляется относительно точки подвеса гироскопа.

Найдем угол между кинетическим моментом $\mathbf{K}$ и осью симметрии z . Для этого рассмотрим наиболее неблагоприятный случай, когда вектор угловой скорости вращения оси гироскопа $\boldsymbol{\omega}_2$ перпендикулярен оси z , т. е. лежит в плоскости Oxy , и, следовательно, $\omega_{2z} = 0$. Найдем составляющую K^* вектора $\mathbf{K}$, расположенную в плоскости Oxy . Имеем

$$\mathbf{K}^* = K_x + K_y = I_x \omega_{2x} + I_y \omega_{2y},$$

или, учитывая, что для гироскопа $I_x = I_y$,

$$\mathbf{K}^* = I_x (\omega_{2x} + \omega_{2y}) = I_x \omega_2,$$

т. е. составляющая $\mathbf{K}^*$ вектора $\mathbf{K}$ совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{\omega}_2$ (рис. 15.3, б).

Согласно последнему равенству и рис. 15.3, б угол θ между вектором $\mathbf{K}$ и осью z определится из равенства

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{K^*}{K_z} = \frac{I_x \omega_2}{I_z \omega_1}.$$

Обычно для гироскопов $I_x/I_z \approx 0,6$. Если, кроме того, принять, что $\omega_1 \geq 3000$ рад/с, а $\omega_2 \leq 0,01$ рад/с, то получим следующую оценку: $\operatorname{tg} \theta \leq 0,6 \frac{0,01}{3000} = 0,000002$. Отсюда $\theta \leq 0,4''$. Очевидно, что эта величина пренебрежимо мала. Поэтому, не внося большой погрешности, можно считать, что вектор кинетического момента $\mathbf{K}$ совпадает с осью динамической симметрии гироскопа, т. е. можно положить

$$\mathbf{K} = I_z \boldsymbol{\omega}_1 = I_z \omega_1 \mathbf{k}, \quad (15.1)$$

где $\mathbf{k}$ — орт оси симметрии гироскопа.

*Теория, построенная на этом основном допущении, называется элементарной или прецессионной теорией гироскопа *).*

§ 15.3. Теорема Резаля

Для изучения движения гироскопа удобно пользоваться теоремой Резаля, которая представляет по существу кинематическую интерпретацию теоремы об изменении момента количества движения материальной системы. Согласно последней имеем

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^e, \quad (15.2)$$

где $\mathbf{M}^e$ — главный момент всех внешних сил, приложенных к системе, относительно неподвижной точки.

*) Более строгое обоснование прецессионной теории гироскопов и рассмотрение условий, при выполнении которых она дает приемлемые для практики результаты, приводятся в книге: Меркин Д. Р. Гироскопические системы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1974.

Производная от $\mathbf{K}$ по времени представляет собой «скорость» $\mathbf{u}$ конца этого вектора *), т. е. $d\mathbf{K}/dt = \mathbf{u}$ и, следовательно, равенство (15.2) можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}^e. \quad (15.3)$$

Полученная формула представляет собой теорему Резаля *«скорость конца вектора момента количества движения (кинетического момента) равна главному моменту всех внешних сил»*.

Теорема Резаля имеет общий характер, но особенно удобно пользоваться ею в теории гироскопов. Это объясняется тем, что согласно равенству (15.1) величина и направление вектора кинетического момента нам известна — модуль вектора $\mathbf{K}$ равен $I_2\omega_1$, а направлен он по оси динамической симметрии гироскопа. Поэтому с помощью зависимости (15.3) мы можем получить закон движения оси симметрии гироскопа по заданному моменту внешних сил или, зная закон движения оси гироскопа, определить момент сил, под действием которых происходит это движение.

§ 15.4. Основное свойство свободного (астатического) гироскопа

Рассмотрим гироскоп с тремя степенями свободы. Если сумма моментов всех внешних сил, приложенных к гироскопу, относительно неподвижной точки равна нулю, то гироскоп называется *свободным* (иногда его называют *астатическим* или *уравновешенным*). Из этого определения видно, что центр тяжести свободного гироскопа должен совпадать с точкой подвеса его. Если пренебречь массой рамок и трением в осях, то уравновешенный гироскоп, установленный в кардановом подвесе, будет свободным.

Предположим вначале, что гироскоп не вращается, т. е. находится в покое. Если ударом (толчком) сообщить оси такого невращающегося гироскопа небольшую угловую скорость, то очевидно, что в дальнейшем ось гироскопа будет равномерно вращаться с той угловой скоростью, которую сообщили ей при ударе. Совершенно иначе будет вести себя ось гироскопа, если до удара гироскоп вращался с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. В этом случае ось свободного быстро вращающегося гироскопа останется практически неподвижной. Действительно, для свободного гироскопа $\mathbf{M}^e = 0$ и, следовательно, согласно формуле (15.2)

$$\mathbf{K} = \text{const},$$

или, учитывая, что в рамках элементарной теории гироскопа справедливо соотношение (15.1),

$$I_2\omega_1\mathbf{k} = \text{const}.$$

*) Слово «скорость» взято нами в кавычки, так как размерность вектора $\mathbf{u}$ не совпадает с размерностью обычной скорости (размерность вектора $\mathbf{K}$ не равна размерности длины). В дальнейшем, помня условность этого слова, мы опускаем кавычки.

Из этого равенства следует, что вектор k , определяющий направление оси гироскопа, *сохраняет в инерциальной системе отсчета неизменное направление*.

Подойдем теперь на свободный гироскоп кратковременной силой, возникающей при ударе. Так как скорость u согласно формуле Резаля (15.3) не будет равна нулю только в промежутке времени действия этой кратковременной силы, то ось гироскопа практически (в рамках прецессионной теории) не изменит своего направления. Более полный анализ (см. § 14.2) показывает, что удар вызывает в свободном гироскопе колебания его оси очень малой амплитуды, но большой частоты *). Эти колебания (они называются *нutationными*) не учитываются в прецессионной теории гироскопов.

Доказанное свойство, являющееся основным для свободного гироскопа, формулируется следующим образом: *ось быстро вращающегося свободного гироскопа устойчиво сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета; удары или толчки могут вызвать вибрацию оси гироскопа очень малой амплитуды, но не отклонение ее от первоначального положения*.

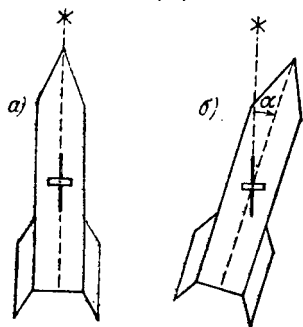


Рис. 15.4

Из этого свойства следует, что при установке на Земле свободного гироскопа ось последнего будет сохранять неизменное направление относительно далеких звезд. Следовательно, относительно Земли ось свободного гироскопа будет поворачиваться в сторону, противоположную вращению Земли. В 1852 г. этот опыт показал Л. Фуко (вслед за маятником, носящим теперь его имя), дав тем самым второе экспериментальное доказательство

вращения Земли. Этот же опыт дал основание Л. Фуко назвать построенный им прибор гироскопом (см. примечание на стр. 309).

Свойство свободного гироскопа используется и в технике. Так, если установить быстро вращающийся свободный гироскоп на движущемся объекте (самолете, ракете, торпедe) и придать его оси требуемое направление, например, на звезду или цель, то ось такого гироскопа будет устойчиво сохранять заданное направление при любом движении объекта. Это неизменное направление оси гироскопа может быть использовано для управления и коррекции движения объекта, ориентации его и т. п.

Проиллюстрируем сказанное. Пусть на ракете установлен свободный гироскоп, ось которого совпадала в начальный момент с осью ракеты и была направлена на звезду (рис. 15.4, а). Предположим

*) См., например, книгу, ссылка на которую приведена в примечании на стр. 312.

далее, что ось ракеты должна сохранять заданное ей в начальный момент направление, но в силу случайных причин отклонилась от него на некоторый угол α . Так как ось установленного на ракете свободного гироскопа сохраняет первоначальное направление, то возникновение угла рассогласования между осями ракеты и гироскопа (рис. 15.4, б) немедленно зафиксируют чувствительные элементы, которые подадут полученный сигнал на устройство, управляющее вращательным движением ракеты (см. стр. 199). В результате ракета повернется в обратную сторону и ось ее займет первоначальное направление. Очевидно, что вся эта система может быть использована не только для стабилизации заданного направления оси ракеты, но и для поворота ее *).

§ 15.5. Закон прецессии оси гироскопа

До сих пор мы рассматривали свободный гироскоп, т. е. гироскоп, на который не действуют никакие внешние силы или, точнее, для которого сумма моментов всех внешних сил относительно точки подвеса равна нулю. Рассмотрим теперь гироскоп, к которому приложена внешняя сила, создающая момент относительно точки подвеса.

Пусть к гироскопу приложена сила P , как это показано на рис. 15.5. Если гироскоп не вращается, то под действием силы P ось гироскопа будет перемещаться в сторону действия силы. Если же скорость собственного вращения гироскопа достаточно велика, то действие силы P вызовет совершенно другое движение оси гироскопа. Действительно, момент M^e силы P относительно неподвижной точки будет направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через линию действия силы и точку O , т. е. перпендикулярно плоскости рисунка, на читателя. Согласно теореме Релая конец вектора K приобретает скорость

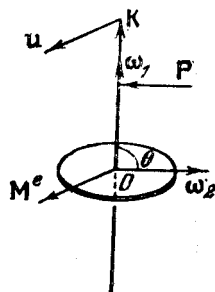


Рис. 15.5

$$u = M^e.$$

Это означает, что ось гироскопа начнет движение в направлении момента M^e перпендикулярно к линии действия силы.

Такая же картина будет наблюдаться и у гироскопа в кардановом подвесе, если к внутреннему кольцу приложить силу F (рис. 15.6). Момент этой силы F направлен по оси внутреннего

*) Описанная схема использования свободного гироскопа носит принципиальный характер и в практических условиях она может быть реализована для сравнительно короткого промежутка времени. Это связано с тем, что построить свободный гироскоп очень трудно, так как полностью не устранимые силы сопротивления создают моменты, уводящие в течение времени ось гироскопа от первоначального направления.

кольца, и, следовательно, ось гироскопа начнет совершать вращение вокруг оси наружного кольца.

Движение оси гироскопа под действием приложенной силы называют *прецессией*, а угловую скорость вращательного движения оси — *угловой скоростью прецессии оси гироскопа*.

Найдем модуль угловой скорости прецессии ω_2 . Согласно формуле $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ для скорости точки твердого тела в его вращательном движении скорость $\mathbf{u}$ конца вектора $\mathbf{K}$ определяется равенством

$$\mathbf{u} = \omega_2 \times \mathbf{K}.$$

Учитывая, что $\mathbf{u} = \mathbf{M}^e$ и $\mathbf{K} = I_z \omega_1$, найдем

$$\mathbf{M}^e = \omega_2 \times I_z \omega_1. \quad (15.4)$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{M^e}{I_z \omega_1 \sin \theta}, \quad (15.5)$$

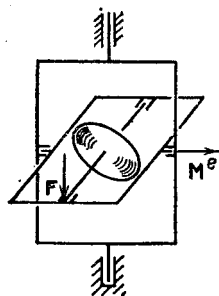


Рис. 15.6

где θ — угол между осью гироскопа z и вектором угловой скорости прецессии ω_2 (на рис. 15.5 угол $\theta = \pi/2$, но в общем случае он отличен от прямого).

Из всего сказанного следует, что под действием внешних сил ось быстро вращающегося трехстепенного гироскопа начинает прецессировать. Скорость $\mathbf{u}$ конца вектора кинетического момента $\mathbf{K}$, направленного по оси симметрии гироскопа, равна по модулю и совпадает по направлению с главным моментом относительно точки подвеса внешних сил. Угловая скорость прецессии, определяемая равенствами (15.4) и (15.5), пропорциональна главному моменту внешних сил M^e и обратно пропорциональна кинетическому моменту $I_z \omega_1$ гироскопа и синусу угла между осью гироскопа z и вектором угловой скорости прецессии ω_2 . Это свойство гироскопа называют *законом прецессии оси гироскопа*.

Закон прецессии лежит в основе устройства различных приборов; этим же законом объясняются некоторые явления, на первый взгляд кажущиеся парадоксальными. Приводимые ниже примеры дают представление о применимости закона прецессии.

Пример 1. Гироскопический измеритель скорости подъема ракеты. Для определения скорости подъема ракеты применяется прибор, состоящий из гироскопа, помещенного в кожух (на рис. 15.7 гироскоп *) показан пунктиром); кожух вместе с гироскопом может вращаться вокруг горизонтальной оси O , укрепленной на валике OA , который в свою очередь может вращаться вокруг вертикальной оси ξ . Таким образом, гироскоп имеет три степени свободы: соб-

*) В технических устройствах гироскопом служит обычно ротор электродвигателя, помещенный в закрытый кожух, в котором укреплен статор.

ственное вращение вокруг горизонтальной оси симметрии гироскопа z , вращение вместе с кожухом вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, и вращение всей системы вокруг вертикальной оси ζ . Кинетический момент K гироскопа направлен, как всегда, по оси z .

Предположим, что ракета поднимается вертикально вверх с ускорением w . Тогда, применяя принцип Даламбера, можно считать ракету неподвижной, если к силе тяжести гироскопа mg присоединить силу инерции $J = -mw$. Обе силы mg и J направлены в одну сторону и они создают относительно точки O момент M^e , перпендикулярный плоскости $Oz\zeta$; модуль его определяется равенством

$$M^e = ma(g + w),$$

где a — расстояние от центра масс гироскопа C до точки O (см. рис. 15.7). По теореме Резаля скорость u конца кинетического момента гироскопа K будет равна M^e , а по закону прецессии угловая скорость вращения оси гироскопа ω_2 равна M^e/K , или

$$\omega_2 = \frac{ma}{I_2\omega_1}(g + w),$$

где I_2 — момент инерции гироскопа, а ω_1 — его угловая скорость собственного вращения.

Обозначим через ψ угол поворота оси гироскопа z относительно оси ζ ; тогда $\omega_a = d\psi/dt$. Внося это значение для ω_2 в последнее равенство и учитывая, что $w = dv/dt$, где v — искомая скорость подъема ракеты, получим

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{ma}{I_2\omega_1} \left(g + \frac{dv}{dt} \right).$$

Интегрируя и принимая во внимание, что при $t = 0$ $v = 0$ (на старте ракеты ее скорость равна нулю), найдем

$$\psi = \frac{ma}{I_2\omega_1} (gt + v).$$

Отсюда

$$v = \frac{I_2\omega_1}{ma} \psi - gt.$$

Из этого равенства видно, что, зная угол поворота оси гироскопа и время подъема ракеты, можно определить ее скорость.

Наличие члена $-gt$ создает некоторые неудобства. Поэтому для непосредственного измерения скорости v подъема ракеты устанавливается дифференциальный механизм (см. рис. 15.7), нижней

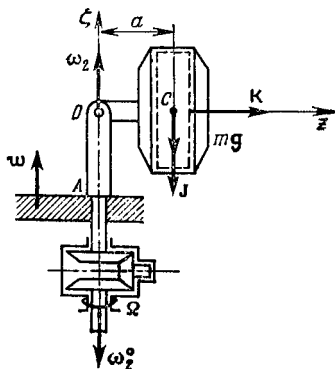


Рис. 15.7

шестеренке которого сообщается с помощью специального часового механизма угловая скорость $\omega_2^0 = mga/(I_z \omega_1)$, где ω_2^0 — угловая скорость прецессии оси гироскопа z при неподвижной ракете. Очевидно, что угловая скорость Ω вращения корпуса дифференциала определится равенством

$$\Omega = 1/2 (\omega_2 - \omega_2^0),$$

или, если учесть значения ω_2 и ω_2^0 ,

$$\Omega = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{ma}{2I_z \omega_1} \frac{dv}{dt},$$

где ψ_1 — угол поворота корпуса дифференциала.

Интегрируя это равенство при прежних начальных условиях, найдем

$$\psi_1 = \frac{ma}{2I_z \omega_1} v.$$

Отсюда

$$v = \frac{2I_z \omega_1}{ma} \psi_1.$$

Таким образом, вертикальная скорость подъема ракеты определяется по углу поворота корпуса дифференциала.

Пример 2. Прецессия артиллерийского снаряда. При стрельбе из гладкоствольных орудий продолговатыми снарядами было обнаружено, что во время полета снаряды кувыркаются и при падении

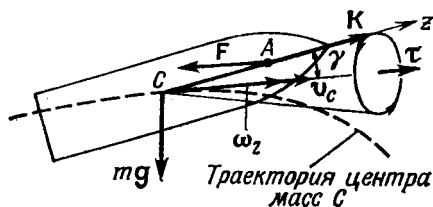


Рис. 15.8

ударяются, как правило, не головкой, где расположен взрыватель, а каким-либо другим местом. Для того чтобы снаряд в полете не кувыркался и при падении ударялся головкой, внутреннюю часть ствола орудия начали делать нарезной, в результате чего снаряд, вылетая из ствола орудия, стал приобретать большую ско-

рость собственного вращения вокруг оси симметрии. Это обеспечило устойчивость оси снаряда, кувыркание его прекратилось, и при падении он начал ударяться головкой. Рассмотрим это на первый взгляд далеко не очевидное явление более подробно.

Предположим, что быстро вращающийся вокруг своей оси симметрии снаряд занимает в некоторый момент времени положение, изображенное на рис. 15.8. Так как теорема об изменении момента количества движения материальной системы относительно центра масс C имеет ту же форму, что и относительно неподвижной точки (см. формулы (9.9) и (9.45)), то при изучении вращательного движения снаряда его можно рассматривать как трехстепенной гироскоп.

скоп с неподвижной точкой C . На снаряд действуют сила тяжести mg и силы сопротивления воздуха. В простейшем случае можно считать, что последние приводятся к одной силе F , направленной в сторону, противоположную скорости v_C центра масс снаряда C , причем точка A приложения силы F находится на оси снаряда на расстоянии a от C (см. рис. 15.8). Сила тяжести mg не создает, очевидно, момента относительно точки C , а момент силы сопротивления F относительно этой точки определяется равенством

$$M^e = Fa \sin \gamma,$$

где γ — угол между осью симметрии снаряда z и силой F , или, что то же самое, вектором τ , направленным по касательной к траектории центра масс снаряда. В сделанных предположениях момент M^e направлен перпендикулярно плоскости стрельбы (в условиях рисунка — на читателя).

По теореме Резаля скорость u конца вектора кинетического момента снаряда K равна M^e , а по закону прецессии численное значение угловой скорости вращения оси снаряда ω_2 , направленной все время по τ , определяется равенством

$$\omega_2 = \frac{M^e}{K \sin \gamma},$$

где $K = I_z \omega_1$ — кинетический момент снаряда (I_z — момент инерции снаряда относительно оси симметрии z , а ω_1 — угловая скорость собственного вращения его).

Пользуясь выражением для M^e и K , окончательно найдем

$$\omega_2 = \frac{Fa}{I_z \omega_1}.$$

Так как вектор угловой скорости ω_2 направлен по τ , то ось снаряда z будет описывать в естественном трехграннике траектории точки C конус с небольшим углом раствора, равным 2γ (см. рис. 15.8). Ось этого конуса совпадает все время с касательной к траектории центра масс, и, следовательно, снаряд, летя без кувыркания, ударяется о цель своей головкой.

Пример 3. Прецессия оси волчка. Рассмотрим быстро вращающийся волчок, ось которого отклонилась от вертикали на угол γ (рис. 15.9). Сила тяжести mg , приложенная к центру тяжести волчка C , направлена вертикально вниз. Эта сила создает момент относительно точки опоры волчка, перпендикулярный плоскости, проходящей через ось волчка z и вертикаль Oz . Реакция опоры N проходит через точку O , и, следовательно, ее момент относительно этой точки равен нулю. Сравнивая волчок с артиллерийским снарядом, мы видим, что между ними имеется полная аналогия. Действи-

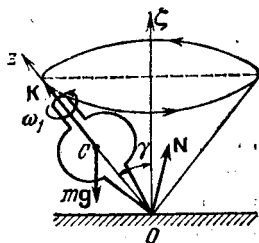


Рис. 15.9

тельно, точка C , вектор τ , сила F и сила mg снаряда (см. рис. 15.8) соответствуют точке O , вертикали Oz , силе mg и реакции N (см. рис. 15.9). Поэтому ось волчка будет описывать вокруг вертикали Oz круговой конус с углом раствора 2γ , причем угловая скорость прецессии определится равенством

$$\omega_2 = \frac{mga}{I_z \omega_1},$$

где a — расстояние от точки опоры O до центра тяжести волчка, I_z — его момент инерции относительно оси симметрии z , ω_1 — угловая скорость собственного вращения волчка.

§ 15.6. Момент гироскопической реакции

Рассмотрим теперь случай, когда движение оси гироскопа задано и требуется определить возникающие при этом силы. Будем считать, что гироскоп вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 вокруг своей оси симметрии, а эта ось в свою очередь вращается (прецессирует) с угловой скоростью ω_2 . Так, например, ротор, показанный на рис. 15.10, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, подшипники которой закреплены в рамке, вращающейся с угловой скоростью ω_2 вокруг вертикальной оси.

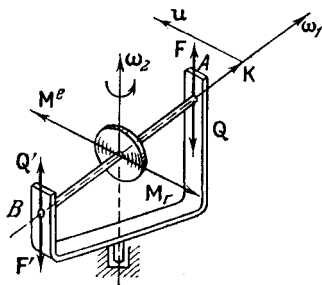


Рис. 15.10

Момент внешних сил M^e , под действием которых ось гироскопа прецессирует с угловой скоростью ω_2 , определяется равенством (15.4). Этот момент создается силами Q и Q' , приложенными к валу гироскопа со стороны подшипников A и B .

На основании третьего закона Ньютона можно утверждать, что на подшипники A и B со стороны гироскопа будут действовать силы F и F' , равные по модулю и противоположно направленные силам Q и Q' .

Главный момент этих сил относительно неподвижной точки равен по величине и противоположен по направлению моменту M^e . Такой момент называется *моментом гироскопической реакции* или просто *гироскопическим моментом*.

Гироскопический момент M_r равен

$$M_r = -M^e = I_z (\omega_1 \times \omega_2).$$

Отсюда найдем модуль момента гироскопической реакции

$$M_r = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta, \quad (15.6)$$

где θ — угол между осью симметрии гироскопа и осью прецессии *).

*) Можно показать, что гироскопический момент M_r равен главному моменту кориолисовых сил инерции.

Пара сил F , F' , момент которых относительно точки O равен гироскопическому моменту, стремится совместить ось гироскопа с осью прецессии.

Отметим, что тело, на которое действует гироскопический момент, может под действием этого момента совершать движение. Например, пусть наружная рамка гироскопа в кардановом подвесе жестко укреплена на каком-либо основании (рис. 15.11). Пусть угловая скорость ротора равна ω_1 и направлена так, как указано на рис. 15.11. Сообщим теперь основанию угловую скорость ω_2 . Пара сил F , F' , момент которых относительно неподвижной точки равен возникшему гироскопическому моменту M_g , будет поворачивать внутреннее кольцо в направлении, указанном на рис. 15.11 стрелкой, т. е.

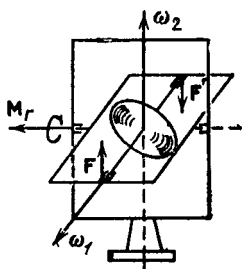


Рис. 15.11

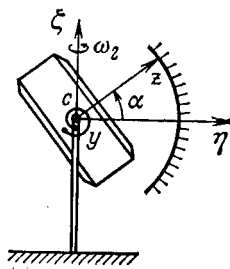


Рис. 15.12

в направлении кратчайшего пути совмещения вектора ω_1 (оси гироскопа) с вектором ω_2 (угловой скоростью вынужденной прецессии).

Это дает возможность сформулировать следующее правило (*правило Грюэ—Жуковского*): при сообщении оси гироскопа принудительной прецессии ось гироскопа стремится кратчайшим путем установиться параллельно оси принудительной прецессии таким образом, чтобы направления векторов ω_1 и ω_2 совпали.

Изложенное свойство гироскопа широко используется в технике. Приводимое ниже описание одного прибора дает об этом ясное представление.

Пример 4. Гироскопический измеритель угловой скорости (*гиротаксометр*). Рассмотрим простейшую схему гиротаксометра с двумя степенями свободы (рис. 15.12). Гироскоп вместе с кожухом может вращаться вокруг оси y , ось симметрии гироскопа z удерживается в положении равновесия пружиной (на рис. 15.12 показана спиральная пружина). Предположим, что корпус прибора вместе с основанием, на котором он установлен, вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг оси ξ . В результате возникает гироскопический момент, стремящийся совместить ось гироскопа z с осью вынужденной прецессии ξ . Модуль этого момента определится разностью (см. формулу (15.6) и рис. 15.12)

$$M_g = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = I_z \omega_1 \omega_2 \cos \alpha,$$

или, для малых углов,

$$M_r = I_z \omega_1 \omega_2.$$

При повороте оси гироскопа z на угол α пружина создает момент, равный $c\alpha$ (c — коэффициент жесткости пружины), уравновешивающий момент гироскопической реакции. Таким образом, будем иметь $c\alpha = I_z \omega_1 \omega_2$; отсюда

$$\omega_2 = \frac{c}{I_z \omega_1} \alpha.$$

Шкалу прибора размечают в единицах угловой скорости, и стрелка указывает сразу искомое значение.

Вернемся к рассмотрению сил, возникающих при вынужденной прецессии оси гироскопа.

При сообщении оси собственного вращения гироскопа или оси какой-либо быстро вращающейся части машины принудительной прецессии возникают гироскопические давления на подшипники, в которых укреплена ось.

Пусть ротор (маховик) вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси AB , закрепленной в подшипниках A и B (рис. 15.13).

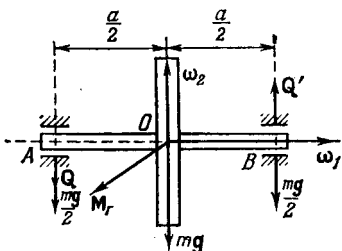


Рис. 15.13

Если масса ротора m , то статические давления на подшипники будут равны $mg/2$ для случая, когда ротор находится в равных расстояниях от подшипников (см. рис. 15.13). Если

теперь сообщить ротору принудительную прецессию вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_2 , то появится гироскопический момент

$$M_r = I_z (\omega_1 \times \omega_2),$$

где I_z — момент инерции ротора относительно собственной оси вращения.

Гироскопический момент, приложенный к оси, согласно правилу Грюэ—Жуковского будет стремиться повернуть ось так, чтобы векторы ω_1 и ω , стали параллельными. Но этому препятствуют подшипники A и B . Сила Q , приложенная к подшипнику A , и Q' , приложенная к подшипнику B , образуют пару сил, момент которой равен гироскопическому моменту.

Так как векторы ω_1 и ω_2 в рассматриваемом случае взаимно перпендикулярны, то модуль гироскопического момента равен

$$M_r = I_z \omega_1 \omega_2.$$

Направлен гироскопический момент перпендикулярно к плоскости рисунка, на нас. Момент пары сил (Q, Q') по модулю равен Qa , следовательно, $Qa = I_z \omega_1 \omega_2$, откуда

$$Q = Q' = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{a}. \quad (15.7)$$

Силы Q и Q' и представляют собой гироскопические давления на подшипники.

В рассматриваемом случае в подшипнике B статическое давление и гироскопическое давление имеют различные направления, а в подшипнике A — одинаковое направление.

Задача 15.1. Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, находящейся на корабле, подвергающемся гармонической килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с, считая, что ось ротора турбины параллельна продольной оси корабля. Ротор, имея массу 200 кг и радиус инерции 0,8 м, делает 18 000 об/мин; расстояние между подшипниками равно 1 м.

Рассмотрим рис. 15.14. При килевой качке изменяется угол дифферента корабля. Закон этого изменения имеет вид

$$\theta = D \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

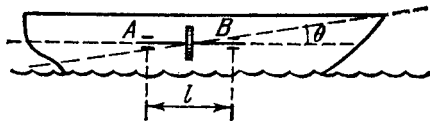


Рис. 15.14

где по условию задачи $D = 9^\circ = \pi/20$, $T = 15$ с.

Принудительная прецессия ротора происходит вокруг оси, перпендикулярной к диаметральной плоскости корабля, т. е. к плоскости симметрии корабля, проходящей через его киль.

Угловая скорость принудительной прецессии равна

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi D}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Максимальное значение этой угловой скорости

$$\omega_2 = \dot{\theta}_{\max} = \frac{2\pi D}{T}.$$

Так как ось вращения ротора и ось принудительной прецессии взаимно перпендикулярны, то максимальное значение гироскопического момента будет $M_G = I\omega_1\omega_2$, где $I = 200 \cdot 0,8^2 \approx 128$ кг·м² — момент инерции ротора, а

$$\omega_1 = \frac{2\pi \cdot 18\,000}{60} = 600\pi \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi^2}{20 \cdot 15} \approx \frac{1}{15} \text{ рад/с}.$$

Согласно формуле (15.7) максимальные давления на подшипники равны:

$$Q = Q' = \frac{I\omega_1\omega_2}{l} \approx \frac{128 \cdot 600\pi}{15} \approx 16,08 \text{ кН}.$$

Гироскопический момент направлен по вертикали вверх или вниз в зависимости от знака θ . Силы Q и Q' , приложенные к подшипникам, расположены в горизонтальной плоскости перпендикулярно диаметральной плоскости корабля. Эти силы, превосходящие в данном примере статические давления в 16 раз, периодически (каждые 7,5 с) меняют свое направление на противоположное, способствуя тем самым преждевременному износу подшипников.

§ 15.7. Уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе

Изложенная в предыдущих параграфах элементарная теория гироскопов основана на пренебрежении нутационными колебаниями оси гироскопа. Рассмотрим теперь более общую теорию.

Сначала выведем дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе (см. рис. 15.2) с учетом массы наружной и внутренней рамок.

Пусть неподвижная система координат $Ox_1y_1z_1$ имеет начало в неподвижной точке O . Ось z_1 направим по оси вращения наружного кольца (рис. 15.15). Начало подвижной системы координат $Oxyz$ возьмем также в точке O и свяжем эту систему координат с внутренним кольцом. Ось x направим по оси вращения ротора, ось y — по оси вращения внутреннего кольца, а ось z — перпендикулярно осям x и y , таким образом, чтобы система $Oxyz$ образовала правую систему координат. Отметим, что линией пересечения подвижной плоскости Oxy и неподвижной Ox_1y_1 является ось y .

Положение ротора можно определить следующими тремя углами: углом φ поворота ротора вокруг оси x , углом ϑ , т. е. углом между неподвижной осью z_1 и осью z (углом поворота внутреннего кольца вокруг оси y) и, наконец, углом ψ — углом поворота наружного кольца вокруг оси z_1 . Угловая скорость $\dot{\varphi} \mathbf{i}$ направлена по оси x , угловая скорость $\dot{\vartheta} \mathbf{j}$ — по оси y , и угловая скорость $\dot{\psi} \mathbf{k}_1$ — по оси z_1 (рис. 15.16).

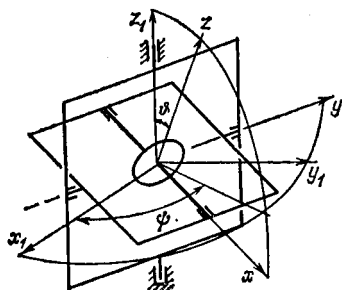


Рис. 15.15

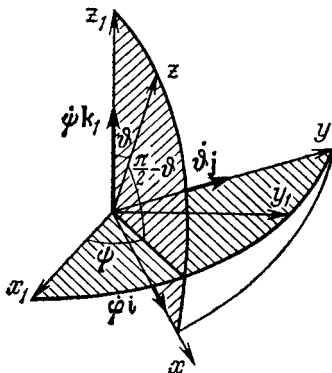


Рис. 15.16

Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей $Oxyz$, а векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ — единичные векторы осей $Ox_1y_1z_1$.

Найдем теперь проекции угловой скорости внутреннего кольца и ротора на оси подвижной системы координат. Для внутреннего кольца, которое совершает вращение вокруг осей z_1 и y , имеем

$$\omega_x = \dot{\psi} \cos(\pi/2 + \vartheta) = -\dot{\psi} \sin \vartheta, \quad \omega_y = \dot{\vartheta}, \quad \omega_z = \dot{\psi} \cos \vartheta. \quad (15.8)$$

Обозначая p , q и r проекции угловой скорости ротора на оси x , y и z , получим

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad q = \dot{\vartheta}, \quad r = \dot{\psi} \cos \vartheta. \quad (15.9)$$

Проекция скорости наружного кольца на ось z_1 равна

$$\omega_{z_1}^* = \dot{\psi}.$$

Мы не будем вводить систему координат, жестко связанную с ротором, так как ротор представляет собой симметричное тело относительно оси x и поэтому любая ось в плоскости yz для ротора будет главной осью инерции. Однако для вывода уравнений движения ротора можно воспользоваться формулами (14.9). Будем только помнить, что введенная при выводе формул (14.9) система координат $Ox_2y_2z_2$ в рассматриваемом случае является системой координат $Oxyz$. Проекции момента количества движения ротора на оси x , y и z согласно формулам (13.9) и (15.9) будут

$$K_x = I_x p = I_x (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \vartheta), \quad K_y = I_y q = I_y \dot{\vartheta}, \quad K_z = I_z r = I_y \dot{\psi} \cos \vartheta, \quad (15.10)$$

где I_x — момент инерции ротора относительно его оси вращения, $I_y = I_z \neq I_x$ — экваториальные моменты инерции ротора.

Для внутреннего кольца проекции момента количеств движения имеют такой вид:

$$K'_x = I'_x \dot{\omega}_x = -I'_x \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad K'_y = I'_y \dot{\omega}_y = I'_y \dot{\vartheta}, \quad K'_z = I'_z \dot{\omega}_z = I'_z \dot{\psi} \cos \vartheta, \quad (15.11)$$

где I'_x , I'_y , I'_z — моменты инерции внутреннего кольца соответственно относительно осей x , y и z . Наружное кольцо вращается только вокруг оси z_1 , и для него имеем

$$K''_{z_1} = I''_{z_1} \dot{\psi}, \quad (15.12)$$

где I''_{z_1} — момент инерции наружного кольца относительно ее оси вращения.

Перейдем к составлению уравнений движения ротора вокруг оси x *). На основании первой формулы (14.9) имеем

$$\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = M_x^e.$$

Используя соотношения (15.8) и (15.10), получим

$$I_x \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \vartheta) + \dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \vartheta (I_z - I_y) = M_x^e,$$

где M_x^e — момент всех внешних сил, приложенных к ротору, относительно оси x .

Так как $I_z = I_y$, то

$$I_x \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \vartheta) = M_x^e. \quad (15.13)$$

Вокруг оси y вращаются как ротор, так и внутреннее кольцо. Для ротора согласно второму уравнению (14.9)

$$\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = M_y^e, \quad (15.14)$$

где M_y^e — момент всех сил, действующих на ротор, относительно оси y .

Для внутреннего кольца

$$\frac{dK'_y}{dt} + \omega_z K'_x - \omega_x K'_z = M_y^e, \quad (15.15)$$

где M_y^e — момент всех сил, действующих на кольцо, относительно оси y .

Складывая почленно уравнения (15.14) и (15.15), получаем

$$\frac{d}{dt} (K_y + K'_y) + \omega_z (K_x + K'_x) - \omega_x (K_z + K'_z) = M_y^e,$$

где $M_y^e = M_y^e + M_y^e$ — момент всех внешних сил, действующих на ротор и внутреннее кольцо, относительно оси y .

Используя соотношения (15.8), (15.10) и (15.11), имеем

$$(I_y + I'_y) \ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \cos \vartheta (I_x \dot{\varphi} - I'_x \dot{\psi} \sin \vartheta) + \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (I_y + I'_y) = M_y^e,$$

или

$$(I_y + I'_y) \ddot{\vartheta} + I_x \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \vartheta - (I'_x - I_y - I'_z) \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = M_y^e. \quad (15.16)$$

*) Н и к о л а и Е. Н. Теория гироскопов. — М.: Гостехиздат, 1948.

Перейдем теперь к составлению уравнения движения относительно оси z_1 . Во вращении вокруг оси z_1 участвуют ротор, внутреннее и наружное кольца. Так как ось z_1 неподвижна, то для ротора будем иметь

$$\frac{dK_{z_1}}{dt} = M_{z_1}^p,$$

где $K_{z_1} = K_z \cos \vartheta - K_x \sin \vartheta$ — проекция момента количеств движения ротора на ось z_1 ; $M_{z_1}^p$ — сумма моментов всех сил, действующих на ротор, относительно оси z_1 .

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} (K_z \cos \vartheta - K_x \sin \vartheta) = M_{z_1}^p. \quad (15.17)$$

Для внутреннего кольца уравнение движения относительно оси z_1 имеет вид

$$\frac{dK'_{z_1}}{dt} = M_{z_1}^{B.K}, \quad (15.18)$$

где

$$K'_{z_1} = K'_z \cos \vartheta - K'_x \sin \vartheta \quad (15.19)$$

— проекция момента количеств движения внутреннего кольца на ось z_1 ; $M_{z_1}^{B.K}$ — момент всех сил, действующих на внутреннее кольцо, относительно оси z_1 .

Для наружного кольца имеем

$$\frac{dK''_{z_1}}{dt} = M_{z_1}^{H.K}, \quad (15.20)$$

где $M_{z_1}^{H.K}$ — момент всех сил, действующих на наружное кольцо, относительно оси z_1 .

Складывая почленно уравнения (15.17), (15.18) и (15.20) и учитывая равенства (15.12) и (15.19), получим

$$\frac{d}{dt} [(K_z + K'_z) \cos \vartheta - (K_x + K'_x) \sin \vartheta + I''_{z_1} \dot{\vartheta}] = M_{z_1}^e,$$

где $M_{z_1}^e$ — момент всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему (ротор, внутреннее и наружное кольца), относительно оси z_1 ; I''_{z_1} — момент инерции наружного кольца.

Принимая во внимание равенства (15.10) и (15.11), перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{d}{dt} [(I_y + I_z) \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta - (I_x p - I'_x \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \vartheta + I''_{z_1} \dot{\vartheta}] = M_{z_1}^e,$$

или

$$\begin{aligned} [(I_y + I'_z) \cos^2 \vartheta + I'_x \sin^2 \vartheta + I''_{z_1}] \ddot{\vartheta} - I_x p \dot{\vartheta} \sin \vartheta - I_x p \dot{\vartheta} \cos \vartheta - \\ - 2(I_y + I'_z - I'_x) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta = M_{z_1}^e. \end{aligned}$$

Учитывая уравнение (15.13), найдем

$$\begin{aligned} [(I_y + I'_z) \cos^2 \vartheta + I'_x \sin^2 \vartheta + I''_{z_1}] \ddot{\vartheta} - I_x p \dot{\vartheta} \cos \vartheta - \\ - 2(I_y + I'_z - I'_x) \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta = M_{z_1}^e + M_x^e \sin \vartheta. \quad (15.21) \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе имеют вид

$$\begin{aligned} I_x \dot{\rho} &= M_x^e, \\ (I_y + I_y') \ddot{\theta} + I_x \rho \dot{\psi} \cos \vartheta - (I_x' - I_y - I_z') \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= M_y^e, \\ [(I_y + I_z') \cos^2 \vartheta + I_x \sin^2 \vartheta + I_z''] \ddot{\psi} - I_x \rho \dot{\vartheta} \cos \vartheta - \\ - 2(I_y + I_z' - I_x') \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta &= M_z^e + M_z^e \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Решение этих уравнений представляет собой большие математические трудности.

Предположим, что $M_x^e = 0$; это значит, что полезный момент, вращающий ротор вокруг его оси, уравновешивается моментом сил трения. Тогда

$$\rho = \dot{\psi} \sin \vartheta = \omega = \text{const.}$$

Для современных гироскопов угловая скорость $\dot{\psi}$ собственного вращения ротора значительно больше угловых скоростей рамок, следовательно, можно принять $\omega \approx \dot{\psi}$. Кроме того, предположим, что угол ϑ во все время движения остается малым, и примем $\sin \vartheta = \vartheta$, $\cos \vartheta = 1$. Также пренебрегаем всеми членами, содержащими произведения угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ и их квадраты. Уравнения (15.22) при этом примут вид

$$A \ddot{\theta} + I_x \omega \dot{\psi} = M_y^e, \quad B \ddot{\psi} - I_x \omega \dot{\vartheta} = M_{z_1}^e, \quad (15.23)$$

где $A = I_y + I_y'$, $B = I_y + I_z' + I_{z_1}''$.

Уравнения (15.23) называют *техническими уравнениями гироскопа*. Введем величину $H = I_x \omega$, часто называемую *кинетическим моментом гироскопа*. Тогда уравнения (15.23) примут вид

$$A \ddot{\theta} + H \dot{\psi} = M_y^e, \quad B \ddot{\psi} - H \dot{\vartheta} = M_{z_1}^e. \quad (15.24)$$

§ 15.8. Частные случаи движения гироскопа в кардановом подвесе

Рассмотрим сначала случай, когда $M_y^e = 0$, $M_{z_1}^e = 0$. Уравнения (15.24) при этом будут

$$A \ddot{\theta} + H \dot{\psi} = 0, \quad B \ddot{\psi} - H \dot{\vartheta} = 0. \quad (15.25)$$

Исключая из этих уравнений $\dot{\psi}$ и $\ddot{\psi}$, получим

$$\ddot{\vartheta} + \frac{H^2}{AB} \vartheta = 0.$$

Характеристическое уравнение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\alpha^2 + \frac{H^2}{AB} \alpha = 0,$$

откуда находим корни характеристического уравнения

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = i \sqrt{\frac{H^2}{AB}}, \quad \alpha_3 = -i \sqrt{\frac{H^2}{AB}}.$$

Общее решение уравнения запишется следующим образом:

$$\vartheta = C_1 + C_2 \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

где C_1 , C_2 и C_3 — постоянные интегрирования.

Так как согласно уравнениям (15.25)

$$\dot{\psi} = -\frac{A}{H} \ddot{\vartheta}, \quad \dot{\vartheta} = -C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}} \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\ddot{\vartheta} = -C_2 \frac{H^2}{AB} \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} - C_3 \frac{H^2}{AB} \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

то

$$\dot{\psi} = \frac{H}{B} \left(C_2 \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right),$$

откуда, интегрируя, получим

$$\psi = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(C_2 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} - C_3 \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right) + C_4,$$

где C_4 — постоянная интегрирования. Пусть при $t = 0$ (начальный момент) $\vartheta = 0$, $\psi = 0$, $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0$, $\psi = \psi_0$. Тогда уравнения для определения постоянных интегрирования будут иметь вид

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}} = \dot{\vartheta}_0, \quad -\sqrt{\frac{A}{B}} C_3 + C_4 = 0, \quad \frac{H}{B} C_2 = \dot{\psi}_0,$$

следовательно,

$$C_1 = -\frac{B}{H} \dot{\psi}_0, \quad C_2 = \frac{B}{H} \dot{\psi}_0, \quad C_3 = \frac{\sqrt{AB}}{H} \dot{\vartheta}_0, \quad C_4 = \frac{A}{H} \dot{\vartheta}_0.$$

Внося эти значения для C_1 , C_2 , C_3 и C_4 в общее решение, получим частное решение

$$\vartheta = -\frac{B}{H} \dot{\psi}_0 \left(1 - \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right) + \frac{\sqrt{AB}}{H} \dot{\vartheta}_0 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\psi = \frac{\sqrt{AB}}{H} \dot{\psi}_0 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + \frac{A}{H} \dot{\vartheta}_0 \left(1 - \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right).$$

Из этого решения следует, что ось гироскопа будет совершать колебательное движение около положения $\vartheta = -\frac{B}{H} \dot{\psi}_0$, $\psi = \frac{A}{H} \dot{\vartheta}_0$. Частота $k = \frac{H}{\sqrt{AB}}$ называется *частотой нутации*. Период нутационных колебаний $T = 2\pi \sqrt{AB/H^2}$. Если $\psi_0 = 0$, то

$$\vartheta = \frac{\sqrt{AB}}{H} \dot{\vartheta}_0 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}}, \quad \psi = \frac{A}{H} \dot{\vartheta}_0 \left(1 - \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right).$$

Таким образом, сообщение кольцам гироскопа угловых скоростей приводит их, а следовательно, и ось гироскопа в колебательное движение.

Рассмотрим еще случай, когда к внутреннему кольцу гироскопа приложена постоянная сила P (рис. 15.17). В этом случае $M_y^e = aP$, $M_{z_1}^e = 0$ и уравнения движения принимают вид

$$A\ddot{\vartheta} + H\dot{\psi} = aP, \quad B\ddot{\psi} - H\dot{\vartheta} = 0. \quad (15.26)$$

Общее решение этих уравнений складывается из общего решения однородных уравнений (15.25) и какого-либо частного решения уравнений (15.26). Частное решение будем искать в виде

$$\vartheta_1 = M_1 t, \quad \psi_1 = M_2 t.$$

Подставляя эти решения в уравнения (15.26), получим

$$HM_2 = aP, \quad -HM_1 = 0,$$

откуда

$$M_1 = 0, \quad M_2 = aP/H.$$

Таким образом,

$$\vartheta = C_1 + C_2 \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\psi = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(C_2 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} - C_3 \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right) + C_4 + \frac{aP}{H} t.$$

Пусть начальные условия будут: при $t = 0$

$$\vartheta = 0, \quad \psi = 0, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0.$$

Так как

$$\dot{\vartheta} = -C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}} \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + C_1 \frac{H}{\sqrt{AB}} \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right) + \frac{aP}{H},$$

то уравнения для определения постоянных интегрирования имеют вид

$$0 = C_1 + C_2, \quad \dot{\vartheta}_0 = C_3 \frac{H}{\sqrt{AB}},$$

$$0 = -\sqrt{\frac{A}{B}} C_3 + C_4, \quad \dot{\psi}_0 = \sqrt{\frac{A}{B}} C_2 \frac{H}{\sqrt{AB}} + \frac{aP}{H},$$

откуда

$$C_1 = -\frac{B}{H} \dot{\psi}_0 + \frac{BaP}{H^2}, \quad C_2 = \frac{B}{H} \dot{\psi}_0 - \frac{BaP}{H^2}, \quad C_3 = \frac{\sqrt{AB}}{H} \dot{\vartheta}_0, \quad C_4 = \frac{A}{H} \dot{\psi}_0,$$

и, следовательно,

$$\vartheta = -\frac{B}{H} \left(\dot{\psi}_0 - \frac{aP}{H} \right) \left(1 - \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right) + \frac{\sqrt{AB}}{H} \dot{\vartheta}_0 \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}},$$

$$\psi = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(\frac{B}{H} \dot{\psi}_0 - \frac{aPB}{H^2} \right) \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + \frac{A}{H} \dot{\psi}_0 \left(1 - \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right) + \frac{aP}{H} t.$$

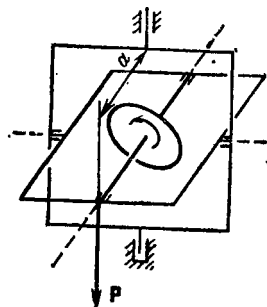


Рис. 15.17

Пусть $\dot{\vartheta}_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = 0$; тогда

$$\vartheta = \frac{aPB}{H^2} \left(1 - \cos \frac{Ht}{\sqrt{AB}} \right), \quad \psi = -\frac{\sqrt{AB}}{H^2} aP \sin \frac{Ht}{\sqrt{AB}} + \frac{aP}{H} t. \quad (15.27)$$

Из уравнений (15.27) следует, что внутреннее кольцо будет совершать нутационные колебания около положения $\vartheta^* = aPB/H^2$, а на равномерное вращение наружного кольца с угловой скоростью aP/H накладываются нутационные колебания.

Очевидно, что чем больше H — кинетический момент гироскопа, тем будут меньше амплитуды нутационных колебаний. При больших H нутационные колебания являются колебаниями очень высокой частоты с пренебрежимо малой амплитудой. В связи с этим во многих случаях нутационными колебаниями пренебрегают и считают, что

$$\vartheta = 0, \quad \psi = \frac{aP}{H} t.$$

Поэтому говорят, что ось гироскопа совершает чисто прецессионное движение с угловой скоростью $\psi = aP/H$ (§ 15.5).

Глава XVI

МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

§ 16.1. Метод кинетостатики

Так же как и для одной материальной точки (см. § 5.7), дифференциальным уравнениям движения материальной системы можно придать форму уравнений статики. Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно при определении динамических реакций опор твердого тела.

Рассмотрим материальную точку M_k системы. Обозначим массу этой точки через m_k , ее ускорение — через $\mathbf{w}_k$ и равнодействующие всех активных сил, приложенных к точке, и реакций связей соответственно — через $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{R}_k$. Тогда основному уравнению динамики (второму закону Ньютона), написанному для каждой точки системы

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

можно придать вид уравнения статики

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{J}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (16.1)$$

где сила инерции $\mathbf{J}_k$ определена равенством (см. § 5.7)

$$\mathbf{J}_k = -m_k \mathbf{w}_k. \quad (16.2)$$

Складывая почленно все уравнения (16.1), получим

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = 0.$$

Первая сумма $\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$ равна главному вектору $\mathbf{F}$ всех активных сил, приложенных к системе, вторая сумма $\sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k$ — главному вектору $\mathbf{R}$ реакций связей и последняя сумма $\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k$ — главному вектору $\mathbf{J}$ сил инерции. Таким образом, можем написать

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0, \quad (16.3)$$

т. е. в каждый момент времени сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю.

Выберем произвольный полюс O и проведем из него к точке M_k радиус-вектор $\mathbf{r}_k$. Умножая каждое из уравнений (16.1) векторно на соответствующий $\mathbf{r}_k$ слева и складывая все произведения, получим

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = 0.$$

Первая сумма равна главному моменту $\mathbf{M}_O$ всех активных сил, приложенных к системе, вторая сумма — главному моменту $\mathbf{M}_O^R$ всех реакций связей системы, а последняя — главному моменту $\mathbf{M}_O^J$ сил инерции, причем все моменты должны быть вычислены относительно выбранного полюса O .

Следовательно, будем иметь

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^J = 0, \quad (16.4)$$

т. е. в каждый момент времени сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю.

При вычислении главных векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$ и главных моментов $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{M}_O^R$ активных сил и реакций связей нужно учитывать только внешние силы, так как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю.

Двум векторным уравнениям (16.3) и (16.4) соответствуют шесть уравнений в проекциях на оси декартовых координат:

$$\begin{aligned} F_x + R_x + J_x = 0, \quad F_y + R_y + J_y = 0, \quad F_z + R_z + J_z = 0, \\ M_x + M_x^R + M_x^J = 0, \quad M_y + M_y^R + M_y^J = 0, \quad M_z + M_z^R + M_z^J = 0. \end{aligned} \quad (16.5)$$

За оси координат можно выбрать любую систему декартовых осей, как неподвижных, так и перемещающихся произвольным образом в пространстве, следует только каждый раз определять соответствующие проекции главного вектора $\mathbf{J}$ и главного момента $\mathbf{M}_O^J$ сил инерции.

Движение твердого тела вполне определяется этими шестью уравнениями кинетостатики, точно так же как равновесие твердого тела вполне определяется соответствующими шестью уравнениями (три уравнения проекций и три уравнения моментов). Если рассматривается система, состоящая из нескольких тел, то можно составить соответствующие уравнения кинетостатики для каждого тела в отдельности.

Из всего сказанного следует, что применение метода кинетостатики для твердого тела требует прежде всего умения вычислять главный вектор и главный момент его сил инерции. Зная их проекции на выбранные оси координат, следует составить уравнения кинетостатики (они отличаются от уравнений равновесия твердого тела только тем, что к активным силам и реакциям связей присоединены силы инерции) и затем определить неизвестные величины.

Покажем теперь, что уравнения (16.3) и (16.4) представляют математическую запись теоремы об изменении количества движения и теоремы об изменении момента количества движения материальной системы соответственно.

В самом деле, главный вектор всех сил инерции равен

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{w}_k = - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k,$$

так как $\mathbf{w}_k = \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}$. Но сумма $\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k = M\mathbf{v}_C$ есть количество движения $\mathbf{Q}$ материальной системы. Следовательно,

$$\mathbf{J} = - \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -M\mathbf{w}_C, \quad (16.6)$$

т. е. *главный вектор всех сил инерции точек материальной системы равен производной по времени от количества движения материальной системы, умноженной на -1 .*

Главный момент всех сил инерции равен

$$\mathbf{M}_O^J = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = - \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{w}_k.$$

Так как $\mathbf{w}_k = \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}$, а $\mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k)$, то

$$\mathbf{M}_O^J = - \frac{d\mathbf{K}_O}{dt}, \quad (16.7)$$

где $\mathbf{K}_O = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k$ — момент количества движения материальной системы.

Таким образом, *главный момент всех сил инерции равен производной по времени от момента количества движения материальной системы, умноженной на —1.*

Заменяя в уравнении (16.3) главный вектор сил инерции выражением (16.6), а в уравнении (16.4) главный момент сил инерции выражением (16.7), получим соответственно теоремы об изменении количества движения и момента количества движения материальной системы.

§ 16.2. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела

На основании выражения (16.6) главный вектор сил инерции твердого тела может быть найден по формуле

$$\mathbf{J} = -M\mathbf{w}_C, \quad (16.8)$$

т. е. *главный вектор сил инерции твердого тела равен силе инерции его центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всего тела* (этот вывод справедлив для любой материальной системы).

Перейдем к вычислению главного момента сил инерции твердого тела.

Рассмотрим сначала случай, когда тело движется произвольным образом. Выбирая за полюс центр масс C тела, на основании формулы (16.7), имеем

$$\mathbf{M}_C' = -\frac{d\mathbf{K}_C}{dt}.$$

Пусть система координат $Sxyz$ жестко связана с телом. Тогда в соответствии с формулой (14.2) можно записать

$$\mathbf{M}_C^J = -\frac{d\mathbf{K}_C}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_C \quad (16.9)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} M_{Cx}^J &= -\frac{dK_{Cx}}{dt} - (\omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy}), \\ M_{Cy}^J &= -\frac{dK_{Cy}}{dt} - (\omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz}), \\ M_{Cz}^J &= -\frac{dK_{Cz}}{dt} - (\omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx}). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Подставляя в эти выражения значения проекций момента количества движения, вычисленных для неподвижной точки (13.8):

$$\begin{aligned} K_{Cx} &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Cy} &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_{Cz} &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
 M'_{Cx} &= -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - \\
 &\quad - I_{yz} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\
 M'_{Cy} &= -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - \\
 &\quad - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\
 M'_{Cz} &= -I_z \varepsilon_z + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - \\
 &\quad - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y.
 \end{aligned} \quad (16.11)$$

Эти формулы определяют главный момент сил инерции твердого тела в общем случае его движения. Если тело имеет неподвижную точку, то за полюс следует выбрать эту точку.

Из формул (16.11) легко получаются все частные случаи.

Случай плоского движения твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии. Если ось z перпендикулярна к плоскости материальной симметрии, совпадающей с плоскостью движения, то

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Теперь из формул (16.11) найдем, что

$$M'_{Cx} = M'_{Cy} = 0, \quad M'_{Cz} = -I_{Cz} \varepsilon_z. \quad (16.12)$$

Случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Выберем в качестве полюса произвольную точку на оси вращения, ось z совместим с осью вращения, а оси x и y скрепим с вращающимся телом. Векторы ε и ω направлены по оси вращения z , и, следовательно, их проекции на оси x и y равны нулю:

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.$$

Подставив эти значения в формулы (16.11) и принимая во внимание, что $\omega_z = \pm \omega$, получим проекции главного момента сил инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$M'_x = I_{xz} \varepsilon_z - I_{yz} \omega^2, \quad M'_y = I_{yz} \varepsilon_z + I_{xz} \omega^2, \quad M'_z = -I_z \varepsilon_z. \quad (16.13)$$

§ 16.3. Определение добавочных динамических реакций опор движущегося тела

При движении несвободного твердого тела реакции связей R_k складываются из статических $R_k^{\text{ст}}$ и добавочных динамических $R_k^{\text{д}}$ составляющих:

$$R_k = R_k^{\text{ст}} + R_k^{\text{д}}.$$

Аналогичным равенствам удовлетворяют главные векторы и главные моменты реакций связей

$$R = R^{\text{ст}} + R^{\text{д}}, \quad M_O^R = M_O^{\text{ст}} + M_O^{\text{д}}. \quad (16.14)$$

Как уже отмечалось (см. § 13.5), статические реакции удовлетворяют следующим шести уравнениям:

$$\begin{aligned} F_x + R_x^{\text{ст}} = 0, \quad F_y + R_y^{\text{ст}} = 0, \quad F_z + R_z^{\text{ст}} = 0, \\ M_x + M_x^{\text{Рст}} = 0, \quad M_y + M_y^{\text{Рст}} = 0, \quad M_z + M_z^{\text{Рст}} = 0. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Подставим в уравнения кинестатики (16.5) значения проекций главного вектора $\mathbf{R}$ и главного момента $\mathbf{M}_O^R$ реакций связей, определенных равенствами (16.14):

$$\begin{aligned} F_x + R_x^{\text{ст}} + R_x^{\text{д}} + J_x &= 0, \\ F_y + R_y^{\text{ст}} + R_y^{\text{д}} + J_y &= 0, \\ F_z + R_z^{\text{ст}} + R_z^{\text{д}} + J_z &= 0, \\ M_x + M_x^{\text{Рст}} + M_x^{\text{Рд}} + M_x^J &= 0, \\ M_y + M_y^{\text{Рст}} + M_y^{\text{Рд}} + M_y^J &= 0, \\ M_z + M_z^{\text{Рст}} + M_z^{\text{Рд}} + M_z^J &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая равенства (16.15), которым удовлетворяют статические реакции, получим уравнения для определения добавочных динамических реакций опор движущегося твердого тела:

$$\begin{aligned} R_x^{\text{д}} + J_x = 0, \quad R_y^{\text{д}} + J_y = 0, \quad R_z^{\text{д}} + J_z = 0, \\ M_x^{\text{Рд}} + M_x^J = 0, \quad M_y^{\text{Рд}} + M_y^J = 0, \quad M_z^{\text{Рд}} + M_z^J = 0. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Отметим, что при составлении этих уравнений не нужно учитывать активные силы. Наконец, заметим также, что в частных случаях число уравнений может уменьшиться; например, при плоскопараллельном движении твердого тела их число будет равно трем.

§ 16.4. Задачи на определение добавочных динамических реакций

Добавочные динамические реакции можно определить различными методами, в частности, можно для этих целей использовать общие теоремы динамики (см. § 13.4). Одним из наиболее простых методов определения добавочных динамических реакций является метод кинестатики. Мы проиллюстрируем его на нескольких задачах.

Задача 16.1. Две материальные точки M_1 и M_2 , массы m каждая, прикреплены с помощью горизонтальных стержней к вертикальной оси AB (рис. 16.1). Пренебрегая массой стержней и оси AB , определить дополнительные динамические реакции опор A и B вала, если вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω . Длина стержней равна a , расстояние между ними равно h , расстояние между опорами H .

При равномерном вращении всей системы ускорения точек M_1 и M_2 будут направлены к оси вращения и численно равны $a\omega^2$. Силы инерции J_1 и J_2 направлены в противоположные стороны (см. рис. 16.1); модули этих сил равны между собою:

$$J_1 = J_2 = m\omega^2.$$

Из рисунка видно, что силы инерции J_1 и J_2 составляют пару сил с моментом, численно равным $m\omega^2 h$. Так как пара сил может быть уравновешена только другой парой сил, то добавочные динамические реакции R_A^H и R_B^H опор A и B составляют пару сил, момент которой равен $R_A^H H$. Из равенства модулей моментов пар

$$R_A^H H = m\omega^2 h$$

найдем добавочные динамические реакции

$$R_A^H = R_B^H = \frac{h}{H} m\omega^2.$$

Задача 16.2. Груз массы m_1 скользит вниз по наклонной эстакаде, свободно лежащей на земле. Масса эстакады m_2 , коэффициент трения скольжения между

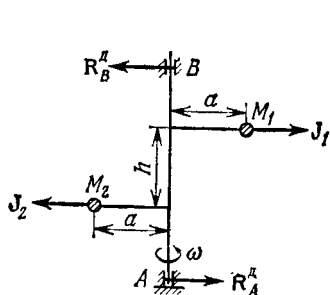


Рис. 16.1

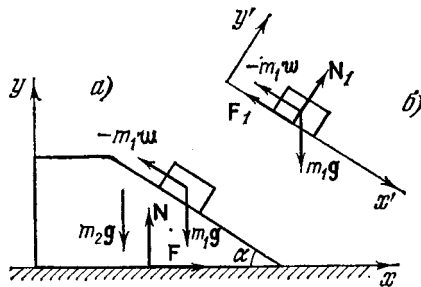


Рис. 16.2

грузом и эстакадой f , угол наклона равен α (рис. 16.2, а). При каких условиях эстакада не начнет движение?

В главе VIII эта задача была решена с помощью теоремы об изменении количества движения материальной системы. Решим теперь эту же задачу, используя метод кинестатики. Для этого рассмотрим сначала отдельно движение груза (рис. 16.2, б). Так как груз скользит вниз по наклонной плоскости, то сила инерции $m_1 w$, где w — ускорение груза, направлена вверх. Применяя к грузу уравнения статики, найдем

$$m_1 g \sin \alpha - F_f - m_1 w = 0, \quad N_f - m_1 g \cos \alpha = 0.$$

Из второго уравнения найдем нормальное давление N_f , а затем из первого уравнения найдем силу инерции груза (напомним, что $F_f = f N_f$)

$$N_f = m_1 g \cos \alpha, \quad m_1 w = m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из груза и эстакады (см. рис. 16.2, а). Внешними силами для этой системы будут: сила тяжести $m_1 g$ груза, сила тяжести $m_2 g$ эстакады, сила нормального давления земли N и сила трения F между землей и эстакадой. Присоединим к этим силам силу инерции $m_1 w$ груза и составим два уравнения статики:

$$F - m_1 w \cos \alpha = 0, \quad N - m_2 g - m_1 g + m_1 w \sin \alpha = 0.$$

Отсюда найдем силу трения F и нормальное давление N :

$$F = m_1 w \cos \alpha, \quad N = m_2 g + m_1 g - m_1 w \sin \alpha,$$

или, учитывая найденное ранее значение силы инерции $m_1 w$,

$$F = m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha,$$

$$N = m_2 g + m_1 g - m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \sin \alpha = m_2 g + m_1 g (\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \alpha.$$

Эстакада будет находиться в покое, если сила трения F меньше своего предельного значения, равного $f_0 N$:

$$m_1 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha < f_0 [m_2 g + m_1 g \cos \alpha (\cos \alpha + f \sin \alpha)].$$

Отсюда найдем условие, которому должен удовлетворять коэффициент трения покоя f_0 , чтобы при движущемся грузе эстакада оставалась в покое:

$$f_0 > \frac{m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha}{m_2 + m_1 (\cos \alpha + f \sin \alpha) \cos \alpha}.$$

Сравнивая решение этой задачи методом кинестатики с решением, в котором использовалась теорема об изменении количества движения материальной системы (стр. 176), мы видим, что оба метода приводят практически к одинаковым уравнениям.

Задача 16.3. Электромотор, установленный на горизонтальной балке, поднимает с помощью троса груз массы m . Радиус барабана, укрепленного на оси мотора, равен r , а момент инерции барабана вместе с ротором равен I . Пренебрегая весом троса, определить динамические реакции опор A и B балки, если груз поднимается с ускорением w . Линейные размеры указаны на рис. 16.3. Предполагается, что плоскость рисунка является плоскостью материальной симметрии движущихся частей.

Груз поднимается с ускорением w . Его сила инерции, равная по модулю mw , направлена вниз. Угловое ускорение вращающихся частей направлено по ходу часовой стрелки, следовательно, главный момент сил инерции направлен согласно формуле (16.12) против хода часовой стрелки и равен по модулю $I\varepsilon$ (на рис. 16.3 знак минус у силы инерции груза и у момента сил инерции барабана не показан, так как их направления указаны на рисунке). Главный вектор сил инерции барабана равен нулю, ибо его центр масс неподвижен. Вводим динамические реакции опор. Активные силы не учитываем и, считая условно барабан и груз неподвижными, составляем уравнения равновесия для сил инерции и добавочных динамических реакций. Мы составим два уравнения моментов (главный момент сил инерции можно рассматривать как момент некоторой пары) и одно уравнение для проекции сил. Имеем

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0, & I\varepsilon + R_B^A b - mwa &= 0, \\ \sum M_{iB} &= 0, & I\varepsilon - Y_A^A b + mw(b-a) &= 0, \\ \sum F_{ix} &= 0, & X_A^A &= 0. \end{aligned} \quad (16.17)$$

Учитывая, что $\varepsilon = w/r$, легко теперь найдем

$$X_A^A = 0, \quad Y_A^A = \left[\frac{I}{r} + m(b-a) \right] \frac{w}{b}, \quad R_B^A = \left(ma - \frac{I}{r} \right) \frac{w}{b}. \quad (16.18)$$

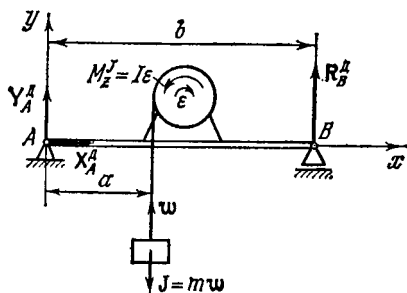


Рис. 16.3

Задача 16.4. В одной из конструкций лесовалочной машины конец A дерева AB перемещается с помощью захвата E с постоянной скоростью v_0 по горизонтальной направляющей, причем ствол дерева, поперечными размерами которого пренебрегаем, все время опирается на каток K . Масса дерева m , его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно к стволу, равен I , расстояние $AC = l$, превышение катка K над горизонтальной

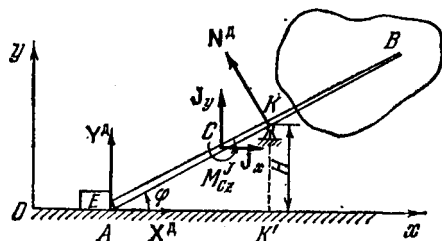


Рис. 16.4

направляющей равно H (рис. 16.4). Определить добавочные динамические составляющие реакции катка K и захвата E в зависимости от угла φ .

Воспользуемся методом кинестатики. Отбросим активные силы (вес дерева) и введем добавочные динамические реакции опор (см. рис. 16.4). Так как движение является плоскопараллельным, то главный момент сил инерции будет определяться равенством (16.12):

$$M_{Cz}^J = -I_{Cz}\ddot{\epsilon}_z.$$

Главный вектор сил инерции согласно формуле (16.8) равен $\mathbf{J} = -m\mathbf{w}_C$, его проекции на оси x и y будут

$$J_x = -m\ddot{x}_C, \quad J_y = -m\ddot{y}_C.$$

Предположим, что ϵ_z , $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ известны (мы найдем их несколько позднее). Примем центр масс C за центр приведения сил инерции и изобразим на рисунке составляющие их главного вектора J_x , J_y и главный момент M_{Cz}^J (предполагается, что J_x , J_y и M_{Cz}^J положительны). Считая в соответствии с методом кинестатики, что силы инерции и добавочные динамические реакции уравновешены, составим три уравнения равновесия этих сил:

$$\begin{aligned} J_x + X^A - N^A \sin \varphi &= 0, \\ J_y + Y^A + N^A \cos \varphi &= 0, \\ M_{Cz}^J + J_y l \cos \varphi - J_x l \sin \varphi + N^A \frac{H}{\sin \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Из этих уравнений найдем динамические составляющие реакций

$$\begin{aligned} N^A &= \frac{\sin \varphi}{H} (J_x l \sin \varphi - J_y l \cos \varphi - M_{Cz}^J), \\ X^A &= N^A \sin \varphi - J_x, \quad Y^A = - (N^A \cos \varphi + J_y). \end{aligned} \quad (16.20)$$

Для полного решения задачи нам осталось найти $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ и $\epsilon = \ddot{\varphi}$, после чего сразу определяются J_x , J_y и M_{Cz}^J . По условию задачи точка A перемещается равномерно по оси x со скоростью v_0 . Совместим начало координат O с начальным положением точки A . Тогда $OA = v_0 t$, $AK' = b - v_0 t$, где $b = OK' = \text{const}$.

Имеем

$$\tan \varphi = \frac{H}{b - v_0 t}.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = \frac{H v_0}{(b - v_0 t)^2}.$$

Отсюда найдем угловую скорость ($b - v_0 t = H \operatorname{ctg} \varphi$)

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{H} \sin^2 \varphi. \quad (16.21)$$

Дифференцируя по времени еще один раз, найдем угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{v_0}{H} \sin 2\varphi \dot{\varphi},$$

или, пользуясь равенством (16.21),

$$\varepsilon = \frac{v_0^2}{H^2} \sin 2\varphi \sin^2 \varphi. \quad (16.22)$$

Координаты центра масс определяются формулами (см. рис. 16.4)

$$x_C = v_0 t + l \cos \varphi, \quad y_C = l \sin \varphi.$$

Дифференцируя два раза по времени, получим

$$\ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad \ddot{y}_C = l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Подставляя сюда значения $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ из равенств (16.21) и (16.22), после элементарных преобразований будем иметь

$$\ddot{x}_C = -3 \frac{v_0^2}{H^2} l \sin^4 \varphi \cos \varphi, \quad \ddot{y}_C = -\frac{v_0^2}{H^2} l (1 - 3 \cos^2 \varphi) \sin^3 \varphi.$$

Теперь находим

$$J_x = -m \ddot{x}_C = 3m \frac{v_0^2}{H^2} l \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

$$J_y = -m \ddot{y}_C = m \frac{v_0^2}{H^2} l (1 - 3 \cos^2 \varphi) \sin^3 \varphi,$$

$$M_{Cz}^J = -l\varepsilon = -l \frac{v_0^2}{H^2} \sin 2\varphi \sin^2 \varphi.$$

Подставляя эти выражения для J_x , J_y и M_{Cz}^J в равенства (16.20), определим добавочные динамические реакции N^A , X^A и Y^A

$$N^A = 2 \left(ml^2 + l \right) \frac{v_0^2}{H^3} \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

$$X^A = \frac{v_0^2}{H^2} \left[2 \left(ml^2 + l \right) \frac{\sin \varphi}{H} - 3ml \right] \sin^4 \varphi \cos \varphi,$$

$$Y^A = -\frac{v_0^2}{H^2} \left[2 \left(ml^2 + l \right) \frac{\cos^3 \varphi}{H} + ml (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right] \sin^3 \varphi.$$

Г л а в а XVII

ТЕОРИЯ УДАРА

§ 17.1. Основные определения

Во многих случаях можно наблюдать явление, называемое *ударом*, когда за очень малый промежуток времени τ скорости точек тел изменяются на конечную величину. Так, например, если мяч падает на горизонтальный пол, имея в начале соприкосновения с полом скорость v , и отскакивает от пола со скоростью V , то изме-

нение скорости $V - v$ представляет конечную величину, а весь процесс удара происходит за ничтожно малое время τ .

Чтобы за очень малый промежуток времени τ скорости точек тела изменились на конечную величину, силы, действующие на тело, должны быть очень велики. Действительно, пусть под действием силы F материальная точка массы m за очень короткий промежуток времени τ изменила скорость на конечную величину $V - v$, где v и V — скорости точки до и после удара соответственно. Применим к материальной точке второй закон Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad (17.1)$$

или

$$m dv = F dt.$$

Интегрируя это равенство от нуля до τ , получим

$$m(V - v) = \int_0^{\tau} F dt. \quad (17.2)$$

Пользуясь теоремой о среднем, найдем

$$m(V - v) = F_{\text{ср}} \tau,$$

где $F_{\text{ср}}$ — среднее значение силы F за время ее действия. Отсюда

$$F_{\text{ср}} = \frac{m |V - v|}{\tau}.$$

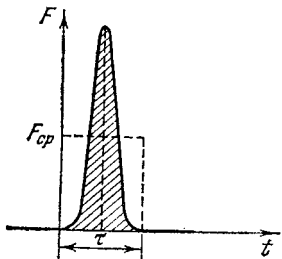


Рис. 17.1

Так как числитель правой части этого равенства представляет конечную величину, а знаменатель очень мал, то даже среднее значение силы F очень велико. В дальнейшем силу, действующую в течение очень короткого промежутка времени, модуль которой достигает большого значения, будем называть *ударной силой*.

Как правило, мы не знаем закона изменения ударной силы F , но примерный график ее модуля можно построить. До удара и после него сила F равна нулю, а в промежутке $(0, \tau)$ ее модуль достигает очень большой величины. Очевидно, что график модуля силы F должен иметь вид, изображенный на рис. 17.1; на этом же рисунке показано среднее значение $F_{\text{ср}}$.

Для того чтобы примерно оценить модуль силы F , рассмотрим простейший пример. Предположим, что камень массы $m = 1$ кг падает вертикально вниз с высоты $H = 10$ м на панель, причем после падения он не отскакивает. Считая, что продолжительность удара $\tau = 0,001$ с, найдем среднее значение силы $F_{\text{ср}}$.

В условиях задачи скорость камня в начале удара $v = \sqrt{2gH} \approx 14,1$ м/с (сопротивлением воздуха пренебрегаем), а скорость

после удара V равна нулю. Пользуясь последней формулой, получим

$$F_{\text{ср}} = m \frac{v}{\tau} \approx 1 \cdot \frac{14,1}{0,001} \approx 14,1 \text{ кН.}$$

Это только среднее значение силы F ; если считать, что максимальное значение силы F вдвое больше среднего значения (см. рис. 17.1), то получим $F_{\text{max}} = 28,2 \text{ кН}$. Эти числа наглядно показывают, почему иногда при ударе происходит разрушение тел.

Вернемся к равенству (17.2), правая часть которого равна импульсу S силы F :

$$S = \int_0^{\tau} F dt. \quad (17.3)$$

Теперь равенство (17.2) принимает вид

$$m(V - v) = S. \quad (17.4)$$

Вектор S называется *ударным импульсом* (или *импульсом удара*). Очевидно, что численно ударный импульс равен площади заштрихованной фигуры рис. 17.1.

В теории удара материальной точки вместо уравнения (17.1) пользуются уравнением (17.4), в котором импульс удара S представляет собой конечный вектор.

Так как продолжительность удара τ очень мала, то в теоретической механике пренебрегают всеми величинами, имеющими порядок τ . Иначе говоря, в теоретической механике принята следующая идеализация удара: *при конечном ударном импульсе удар происходит мгновенно*.

Найдем перемещение точки за время удара. Для этого рассмотрим ударный импульс в момент времени t , где $0 < t < \tau$. Имеем

$$S(t) = \int_0^t F(t) dt.$$

Обозначив скорость точки в момент времени t через $V(t)$, получим из равенства (17.4)

$$V(t) = v + \frac{1}{m} S(t).$$

Так как $V(t) = dr/dt$, то, интегрируя последнее равенство от 0 до τ , получим

$$r_2 - r_1 = \left(v + \frac{1}{m} S_{\text{ср}} \right) \tau,$$

где r_1 и r_2 — радиусы-векторы точки в начале и конце удара, а $S_{\text{ср}}$ — среднее значение импульса $S(t)$ в промежутке $[0, \tau]$.

Правая часть этого равенства имеет порядок τ , и ею можно пренебречь, положив $r_2 - r_1 = 0$. Таким образом, в рамках сделанной идеализации перемещение точки за время удара равно нулю.

Если на точку действуют ударная сила $F(t)$ и обычная медленно меняющаяся во времени сила $P(t)$, то их общий импульс S_1 за время τ будет равен

$$S_1 = \int_0^{\tau} F(t) dt + \int_0^{\tau} P(t) dt.$$

Первое слагаемое равно ударному импульсу S ; применяя ко второму слагаемому теорему о среднем, получим

$$S_1 = S + P_{\text{ср}}\tau.$$

Так как второе слагаемое имеет порядок τ , то им можно пренебречь. На этом основании при исследовании процессов, происходящих при ударе, медленно меняющиеся, ограниченные по модулю силы не учитываются.

Все сказанное можно отнести не только к ударным силам, возникающим при контакте тел, но и к любым другим силам, характер изменения которых во времени изображен на рис. 17.1. Такие силы возникают при взрыве в полости, при распространении упругих волн в сплошной среде и при так называемых разрывах в газе.

§ 17.2. Коэффициент восстановления

При соударении двух тел в точке контакта возникают ударные силы, приложенные к каждому из тел. Они имеют одинаковые модули и противоположно направлены. Пренебрегая трением, будем считать, что ударные силы и их импульсы S_1 и S_2 направлены по общей нормали к поверхности соударяющихся тел (рис. 17.2). Как

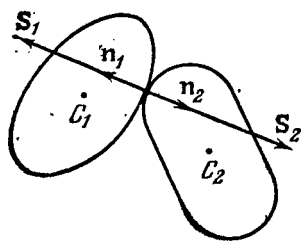


Рис. 17.2

показывают наблюдения, гипотеза об абсолютной твердости тел является недостаточной для объяснения процесса удара и необходимо учитывать физические свойства тел. Сам процесс удара можно разбить на две фазы. В течение первой фазы происходит сближение тел по линии общей нормали, в результате чего проекция на нормаль *относительной скорости* точки контакта тел уменьшается до нуля. Вслед за этим начинается вторая фаза удара:

тела, восстанавливая свою форму, начинают удаляться друг от друга, нормальная составляющая относительной скорости точки соприкосновения, переменяв знак, возрастает по абсолютной величине, но не достигает, как правило, своего значения в начале удара.

Полное исследование процесса удара требует подробного рассмотрения физических свойств тел, что выходит за рамки теоретической механики. Однако, как показывают опыты, в первом приближении можно принять следующую гипотезу (*гипотеза Ньютона*): *отношение модуля нормальной составляющей относительной скорости*

точки контакта тел после удара к его значению до удара есть некоторая физическая постоянная, характеризующая физические свойства соударяющихся тел, но не зависящая от их массы и относительной скорости. Эта физическая постоянная называется *коэффициентом восстановления*. Обозначая коэффициент восстановления через ϵ и учитывая, что полного восстановления скорости, как правило, не происходит, будем иметь

$$0 \leq \epsilon \leq 1. \quad (17.5)$$

В предельном случае, когда $\epsilon = 1$, удар называется *абсолютно упругим*; во втором предельном случае, когда $\epsilon = 0$, удар называется *абсолютно неупругим*. В остальных случаях ($0 < \epsilon < 1$) удар называется *не вполне упругим* или просто упругим. Заметим, что при абсолютно неупругом ударе двух тел нормальная составляющая относительной скорости точки соприкосновения после удара равна нулю. Для таких тел весь процесс удара заключается только в первой фазе; после максимального сближения тел восстановления их формы в точке контакта не происходит и оба тела движутся в дальнейшем совместно (в частности, оба тела могут остановиться) или одно тело скользит по поверхности другого.

Перед тем как перейти к дальнейшему, напомним еще раз, что гипотезу Ньютона об ударе и все выводы, которые из нее получаются, можно применять только в качестве первого приближения к реальным процессам, происходящим в телах при ударе. Это приближение оказывается достаточно хорошим, если при ударе наблюдается только местная деформация тел вблизи точки контакта. Если же при ударе происходит деформация всего тела, то гипотезу Ньютона применять нельзя *).

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор общей нормали к поверхностям тел в точке контакта, направленный внутрь второго тела. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — скорости точек контакта первого и второго тел в начале удара, а $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ — соответствующие величины в конце удара. Тогда, по определению коэффициента восстановления, будем иметь

$$\left| \frac{(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}} \right| = \epsilon, \quad (17.6)$$

или, учитывая, что относительная скорость при ударе изменяет направление,

$$(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) \cdot \mathbf{n} = -\epsilon (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}. \quad (17.7)$$

Наконец, если ввести два единичных вектора $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$), направленные внутрь первого и второго тел соответственно,

*) Подробное рассмотрение процессов, происходящих в твердых телах при ударе, и анализ различных гипотез даны в книге: П а н о в к о Я. Г. Введение в теорию механического удара. — М.: Наука, 1977.

то последней формуле можно придать следующую симметричную форму:

$$U_2 \cdot n_2 + U_1 \cdot n_1 = -\varepsilon (u_2 \cdot n_2 + u_1 \cdot n_1). \quad (17.8)$$

Этими формулами мы воспользуемся в дальнейшем.

Коэффициент восстановления может быть измерен следующим образом (рис. 17.3). Представим себе, что одно из соударяемых тел выполнено в виде плиты и неподвижно закреплено в горизонтальном положении, другое тело — шарик. Шарик поднят на высоту h_1 над плитой и отпущен без начальной скорости. Скорость его в момент соприкосновения с плитой вычисляется по известной формуле $v = \sqrt{2gh_1}$. Измерив высоту h_2 , на которую поднимается шарик после отскакивания, можно найти его скорость в конце удара $V = \sqrt{2gh_2}$.

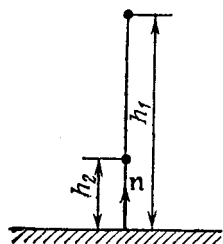


Рис. 17.3

Таким образом, коэффициент восстановления оказывается равным

$$\varepsilon = V/v = \sqrt{h_2/h_1} \leq 1.$$

Значения коэффициентов восстановления для различных пар соударяемых материалов приводятся в справочниках. Так, например, при соударении стекла со стеклом $\varepsilon = 15/16$, стали со сталью $\varepsilon = 5/9$, дерева с деревом $\varepsilon = 1/2$.

§ 17.3. Удар материальной точки об идеально гладкую поверхность

Материальная точка после удара о неподвижную поверхность (рис. 17.4) изменяет свою скорость. Со стороны поверхности на точку во время контакта действует ударная реакция. Полагаем, что поверхность идеально гладкая, так что реакция и ударный импульс S направлены по нормали к поверхности.

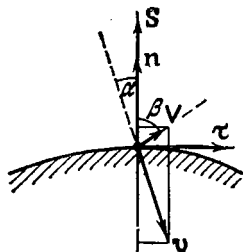


Рис. 17.4

Воспользуемся теперь теоремой об изменении количества движения при ударе (формулой (17.4)):

$$mV - mv = Sn. \quad (17.9)$$

Проектируя это уравнение на оси τ и n , получим (см. рис. 17.4)

$$V_\tau - v_\tau = 0, \quad V_n - v_n = \frac{1}{m} S. \quad (17.10)$$

Таким образом, касательная составляющая скорости v_τ сохраняет свой модуль и направление. Нормальная составляющая всегда изменяет направление, модуль же ее меняется в зависимости от значения ударного импульса S .

Пусть известны коэффициент восстановления ϵ , модуль скорости точки до удара v и угол α , составленный вектором скорости $\mathbf{v}$ с нормалью к поверхности (см. рис. 17.4). Требуется определить угол отражения β , скорость точки после удара V и ударный импульс S .

Исходя из определения коэффициента восстановления, найдем $V_n = \epsilon |v_n|$, или $V_n = -\epsilon v_n$. Из уравнений (17.10), как мы уже отмечали, следует сохранение касательной составляющей скорости после удара, т. е. $V_\tau = v_\tau$.

Заметим, что

$$|v_n| = v \cos \alpha, \quad v_\tau = v \sin \alpha, \quad V_n = V \cos \beta, \quad V_\tau = V \sin \beta. \quad (17.11)$$

Поэтому

$$V \sin \beta = v \sin \alpha, \quad V = v \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (17.12)$$

Подставим теперь значение V в формулу для V_n и используем связь нормальных проекций скорости после удара и до удара с коэффициентом восстановления ϵ :

$$\epsilon = \left| \frac{V_n}{v_n} \right| = \frac{V \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Теперь без труда определяется угол β :

$$\operatorname{ctg} \beta = \epsilon \operatorname{ctg} \alpha, \quad \beta = \operatorname{arcctg} (\epsilon \operatorname{ctg} \alpha). \quad (17.13)$$

Для вычисления модуля скорости после удара воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}}.$$

Из равенства (17.12) получим

$$V = v \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = v \sin \alpha \sqrt{1 + \epsilon^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad (17.14)$$

Из формул (17.13) и (17.14) следует: а) для абсолютно упругого удара ($\epsilon = 1$) $\beta = \alpha$, $V = v$; б) для абсолютно неупругого удара ($\epsilon = 0$) $\beta = \pi/2$, $V = v_\tau = v \sin \alpha$. Таким образом, при абсолютно неупругом ударе материальная точка «рикошетирует» от неподвижной поверхности, сохраняя лишь касательную составляющую скорости.

При любом не вполне упругом ударе ($\epsilon \leq 1$) модуль скорости отражения всегда меньше модуля скорости падения и угол отражения больше угла падения. В самом деле,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha, \quad \beta > \alpha,$$

$$V = v \sqrt{\sin^2 \alpha + \epsilon^2 \cos^2 \alpha}, \quad V < v.$$

Определим ударный импульс. Для этого подставим в равенство (17.10) $V_n = -\epsilon v_n$, $v_n = -v \cos \alpha$ и найдем S :

$$S = m (V_n - v_n) = m (1 + \epsilon) v \cos \alpha. \quad (17.15)$$

Из этого соотношения видно, что максимальное значение ударного импульса при заданных коэффициенте восстановления и модуле начальной скорости v достигается при прямом ударе ($\alpha = 0$). При абсолютно упругом ударе ($\varepsilon = 1$) импульс удваивается по сравнению с импульсом при абсолютно неупругом ударе ($\varepsilon = 0$).

§ 17.4. Потеря кинетической энергии при ударе материальной точки о неподвижную поверхность

Изменение кинетической энергии при ударе определяется как разность значений кинетической энергии в конце и в начале удара:

$$T_2 - T_1 = \frac{m}{2} (V^2 - v^2).$$

Но из равенств $V_\tau = v_\tau$ и $V_n = \varepsilon |v_n|$ следует, что

$$V^2 = V_n^2 + V_\tau^2 = \varepsilon^2 v_n^2 + v_\tau^2, \quad v^2 = v_n^2 + v_\tau^2.$$

Подставляя значения квадратов скоростей в разность значений кинетической энергии, получим

$$T_2 - T_1 = -\frac{m}{2} (1 - \varepsilon^2) v_n^2. \quad (17.16)$$

Таким образом, при абсолютно упругом ударе ($\varepsilon = 1$) кинетическая энергия материальной точки не изменяется, а при $\varepsilon < 1$ происходит потеря кинетической энергии. Наибольшая потеря будет при абсолютно неупругом ударе, когда $\varepsilon = 0$. Уменьшение кинетической энергии при $\varepsilon < 1$ обусловлено переходом механической энергии в другие формы энергии, в частности в тепловую.

Формулу (17.16) можно преобразовать к другому виду. Для этого заметим, что из равенства касательных составляющих скоростей $V_\tau = v_\tau$ следует

$$|V - v| = V_n + |v_n| = \varepsilon |v_n| + |v_n| = (1 + \varepsilon) |v_n|.$$

Отсюда

$$|v_n| = \frac{|V - v|}{1 + \varepsilon}$$

и, следовательно,

$$T_2 - T_1 = -\frac{m}{2} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} (V - v)^2. \quad (17.17)$$

Разность $V - v$ называется «потерянной» скоростью.

При абсолютно неупругом ударе ($\varepsilon = 0$) из (17.17) получим

$$T_2 - T_1 = -\frac{m}{2} (V - v)^2,$$

т. е. *потеря кинетической энергии равна кинетической энергии потерянной скорости*. В общем случае потеря кинетической энергии составляет $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ -ю долю кинетической энергии потерянной скорости (*теорема Карно*).

§ 17.5. Теорема об изменении количества движения и теорема об изменении момента количеств движения материальной системы при ударе

Воспользуемся интегральной формой теоремы об изменении количества движения материальной системы (§ 8.2) и перепишем равенство (8.9) в форме

$$\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \mathbf{S}^e. \quad (17.18)$$

Здесь $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ — количество движения системы в начальный и конечный моменты времени, $\mathbf{S}^e$ — главный вектор импульсов всех внешних сил.

Применим равенство (17.18) к ударным силам и выразим количество движения через скорость центра масс. Получим

$$M(\mathbf{V}_C - \mathbf{v}_C) = \mathbf{S}^e, \quad (17.19)$$

где $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{V}_C$ — скорости центра масс в начале и в конце удара, $\mathbf{S}^e$ — главный вектор импульсов всех внешних ударных сил (импульсы неударных сил при ударе, как уже отмечалось ранее, не учитываются).

Так как при ударе перемещения всех точек, к которым были приложены ударные силы, равны нулю (см. § 17.1), то *центр масс системы при ударе не меняет своего положения, скорость же центра масс меняется мгновенно*.

Перейдем к определению изменения момента количеств движения системы при ударе. Сначала в качестве полюса выберем неподвижную точку O .

Для одной материальной точки теорема импульсов (17.3) дает

$$m_k \mathbf{V}_k - m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{S}_k^e + \mathbf{S}_k^i. \quad (17.20)$$

Здесь $\mathbf{S}_k^e$ — импульс внешних ударных сил, $\mathbf{S}_k^i$ — импульс внутренних ударных сил, действующих на точку.

Умножая каждое из равенств (17.20) векторно на $\mathbf{r}_k$ и складывая все равенства, получим

$$\mathbf{K}_{O2} - \mathbf{K}_{O1} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{S}_k^e. \quad (17.21)$$

Сумма моментов импульсов внутренних сил в правую часть (17.21) не вошла, так как она равна нулю.

Доказательство этого свойства проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано для главного момента внутрен-

них сил в § 7.3. Если обозначить сумму моментов импульсов всех ударных сил через L_0^e , то будем иметь

$$K_{02} - K_{01} = L_0^e.$$

Изменение момента количества движения системы относительно неподвижного полюса при ударе равно сумме моментов импульсов всех внешних ударных сил относительно того же полюса.

Если в качестве полюса выбрать центр масс C системы, то формула (17.21) примет вид

$$K_{C2} - K_{C1} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{S}_k^e, \quad (17.22)$$

где K_{C2} и K_{C1} — моменты количества относительного движения материальной системы в конце и начале удара (см. § 9.7), а $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор точки приложения ударного импульса, проведенный из центра масс C системы. Уравнение (17.22) следует из того, что теоремы об изменении момента количества движения относительно неподвижного полюса и центра масс имеют одинаковую математическую форму.

Запишем уравнения (17.21) и (17.22) в проекциях на оси координат. Для твердого тела в качестве осей координат удобнее выбрать оси, жестко связанные с телом; начало координатной системы следует выбрать либо в неподвижной точке O тела (если такая точка существует), либо в его центре масс C . Следует отметить, что при ударе все точки системы, в частности твердого тела, не перемещаются. Поэтому можно выбрать любую систему координатных осей, жестко связанных с телом, и заменить векторные уравнения (17.21) или (17.22) тремя скалярными уравнениями (см. § 13.2):

$$\begin{aligned} I_x(\Omega_x - \omega_x) - I_{xy}(\Omega_y - \omega_y) - I_{xz}(\Omega_z - \omega_z) &= L_x^e, \\ -I_{yx}(\Omega_x - \omega_x) + I_y(\Omega_y - \omega_y) - I_{yz}(\Omega_z - \omega_z) &= L_y^e, \\ -I_{zx}(\Omega_x - \omega_x) - I_{zy}(\Omega_y - \omega_y) + I_z(\Omega_z - \omega_z) &= L_z^e. \end{aligned} \quad (17.23)$$

В этих уравнениях ω_x , ω_y , ω_z и Ω_x , Ω_y , Ω_z — проекции вектора угловой скорости тела в начале и конце удара, I_x , I_y , I_z , I_{xy} , I_{xz} , I_{yz} — соответствующие моменты инерции тела, L_x^e , L_y^e , L_z^e — проекции главного момента импульсов внешних ударных сил.

Если за оси координат приняты главные оси инерции тела, то уравнения (17.23) примут такой вид:

$$I_x(\Omega_x - \omega_x) = L_x^e, \quad I_y(\Omega_y - \omega_y) = L_y^e, \quad I_z(\Omega_z - \omega_z) = L_z^e. \quad (17.24)$$

Для плоского движения твердого тела, когда ось z проходит через центр масс C перпендикулярно к плоскости движения, и

для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, уравнения (17.23) упрощаются ($\omega_x = \omega_y = 0$):

$$-I_{xz}(\Omega_z - \omega_z) = L_x^e, \quad -I_{yz}(\Omega_z - \omega_z) = L_y^e, \quad I_z(\Omega_z - \omega_z) = L_z^e. \quad (17.25)$$

Наконец, если тело имеет плоскость материальной симметрии, параллельно которой происходит движение, и все ударные силы лежат в этой плоскости, то из трех уравнений остается только одно:

$$I_z(\Omega_z - \omega_z) = L_z^e. \quad (17.26)$$

§ 17.6. Удар, действующий на тело, закрепленное в двух точках

На тело, закрепленное в точке B шарнирно (рис. 17.5) и в точке A при помощи подпятника, действует ударный импульс S . Во время удара в точках A и B возникают реакции, имеющие также характер ударных сил. При значительных ударных воздействиях реакции могут достигать значений, опасных с точки зрения прочности подпятников и оси.

Возникает задача определения ударных импульсов реакций при заданных динамических характеристиках тела (масса, моменты инерции) и при известном ударном импульсе, действующем на тело.

Пусть S — ударный импульс, действующий в точке M на тело. Совместим плоскость yAz с плоскостью, проходящей через центр масс C тела. Теорема об изменении количества движения при ударе и теорема об изменении момента количества движения примут для нашего случая следующий вид:

$$M(v_{C2} - v_{C1}) = S + S_A + S_B, \quad (17.27)$$

$$K_{A2} - K_{A1} = r_M \times S + r_B \times S_B, \quad (17.28)$$

где S_A и S_B — импульсы реакций, r_M — радиус-вектор точки M .

Заметим, что скорость центра масс параллельна оси x :

$$v_C = \omega \times r_C = -\omega_z y_C i$$

и, следовательно, векторное уравнение (17.27) в проекциях на оси координат приводит к трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} S_x + S_{Ax} + S_{Bx} &= My_C(\omega_z - \Omega_z), \\ S_y + S_{Ay} + S_{By} &= 0, \\ S_{Az} + S_z &= 0. \end{aligned} \quad (17.29)$$

Здесь S_{Ax} , S_{Ay} , S_{Az} , S_{Bx} , S_{By} — проекции ударных импульсов на соответствующие оси координат.

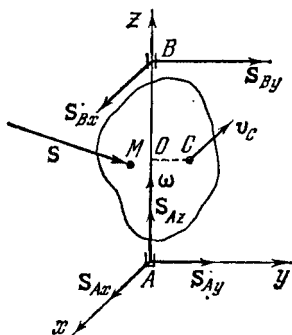


Рис. 17.5

Теперь перейдем к составлению второй группы уравнений, вытекающей из векторного равенства (17.28). В проекциях на оси координат эти уравнения в общем виде совпадают с уравнениями (17.25). Для того чтобы воспользоваться этими уравнениями, вычислим прежде всего момент ударного импульса (импульсы реакций вычисляются непосредственно). Имеем

$$\mathbf{r}_M \times \mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_M & y_M & z_M \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = \\ = (y_M S_z - z_M S_y) \mathbf{i} + (z_M S_x - x_M S_z) \mathbf{j} + (x_M S_y - y_M S_x) \mathbf{k},$$

где x_M , y_M и z_M — координаты точки M приложения импульса $\mathbf{S}$.

Уравнения (17.25) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} -I_{xz}(\Omega_z - \omega_z) &= y_M S_z - z_M S_y - z_B S_{By}, \\ -I_{yz}(\Omega_z - \omega_z) &= z_M S_x - x_M S_z + z_B S_{Bx}, \\ I_z(\Omega_z - \omega_z) &= x_M S_y - y_M S_x. \end{aligned} \quad (17.30)$$

Из последнего уравнения определяется приращение угловой скорости вращения за время удара:

$$\Omega_z - \omega_z = \frac{1}{I_z} (x_M S_y - y_M S_x). \quad (17.31)$$

Для определения неизвестных импульсов ударных сил остается подставить $\Omega_z - \omega_z$ в уравнения (17.29) и (17.30) и решить систему пяти уравнений с пятью неизвестными: S_{Az} , S_{Ay} , S_{Ax} , S_{Bx} , S_{By} .

§ 17.7. Условия отсутствия ударных реакций. Центр удара

Сначала найдем условия, которые необходимы для того, чтобы при ударе не возникали ударные импульсы реакции. Примем, что ударные импульсы в точках A и B равны нулю, и найдем те ограничения, которые эти условия накладывают на остальные величины, входящие в уравнения (17.29) и (17.30). При этом будем считать, что $\Omega_z - \omega_z \neq 0$. Из уравнений (17.29) и (17.30) получим

$$\begin{aligned} S_x &= -My_C(\Omega_z - \omega_z), \\ S_y &= 0, \\ S_z &= 0, \\ y_M S_z - z_M S_y &= -I_{xz}(\Omega_z - \omega_z), \\ z_M S_x - x_M S_z &= -I_{yz}(\Omega_z - \omega_z), \\ x_M S_y - y_M S_x &= I_z(\Omega_z - \omega_z). \end{aligned} \quad (17.32)$$

Из второго и третьего уравнений следует, что внешний ударный импульс должен иметь направление, параллельное оси x , т. е. он

должен быть перпендикулярен к плоскости, проведенной через ось вращения и центр масс тела.

Для удобства дальнейших рассуждений введем новую систему координат $Ox_1y_1z_1$ с осями, параллельными исходным осям, и с началом в точке O (рис. 17.6), находящейся на оси вращения тела z , причем $\overline{AO} = z_M k$. В новой системе координат $z_{1M} = 0$. Импульс S , по доказанному, должен лежать в координатной плоскости x_1Oy_1 и быть параллельным оси x_1 (см. рис. 17.6).

В новой системе координат уравнения (17.32) сохраняют свой вид. Полагая в них $S_y = S_z = 0$, а также $z_{1M} = 0$, используем сначала четвертое и пятое уравнения. Имея в виду условие $\Omega_z - \omega_z \neq 0$, получим

$$I_{x_1z_1} = 0, \quad I_{y_1z_1} = 0,$$

т. е. ось вращения должна быть главной осью инерции для точки O .

Из первого и последнего уравнений находим

$$y_M = \frac{I_z}{My_C}. \quad (17.33)$$

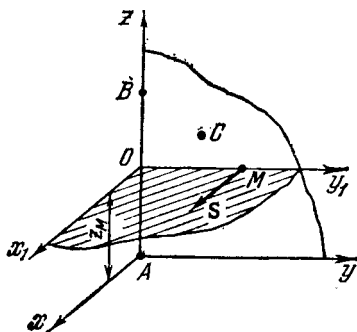


Рис. 17.6

Здесь мы воспользовались тем, что $y_{1M} = y_M$, $y_{1C} = y_C$, $I_{z_1} = I_z$. Значит, линия действия импульса S должна отстоять от оси вращения на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника (см. § 13.7).

Таким образом, если удар не передается на опоры, то должны выполняться следующие условия: 1) линия действия ударного импульса должна быть перпендикулярна к плоскости, содержащей центр масс тела и ось вращения; 2) плоскость, содержащая ударный импульс и перпендикулярная к оси вращения, должна пересекаться с этой осью в точке, для которой ось вращения является главной осью инерции; 3) линия действия ударного импульса должна отстоять от оси вращения на расстоянии, определяемом равенством (17.33).

Легко видеть, что перечисленные условия являются также достаточными. При их выполнении система (17.32) удовлетворяется при любых S_x , а тогда из системы уравнений (17.29) и (17.30) вытекает, что ударные импульсы реакций опор S_A и S_B обращаются в нуль.

Точка M в плоскости yAz (см. рис. 17.6), в которой приложен ударный импульс S , удовлетворяющий всем указанным условиям, называется *центром удара*.

Следует отметить, что центр удара может и не существовать. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда ни для одной из точек на оси вращения сама ось вращения не является главной осью инерции.

§ 17.8. Удар двух тел

Пусть два тела с идеально гладкими поверхностями соударяются в точке E (рис. 17.7). Будем считать, что нам известны угловые скорости ω_1 и ω_2 тел, а также скорости v_1 и v_2 их центров масс C_1 и C_2 в начале удара. Считая известными коэффициент восстановления ϵ и динамические характеристики тел (их массы и моменты инерции), требуется определить угловые скорости Ω_1 , Ω_2 тел и скорости V_1 и V_2 их центров масс в конце удара.

Построим в точках E_1 и E_2 (при ударе они совпадают) единичные векторы n_1 и n_2 внутренних нормалей к поверхностям тел. Применяя к каждому телу теорему о движении центра масс, получим

$$M_1 (V_1 - v_1) = S n_1, \quad M_2 (V_2 - v_2) = S n_2, \quad (17.34)$$

где $S = S_1 = S_2$.

Применим теперь к каждому телу теорему об изменении момента количества движения (формула (17.22)):

$$\Delta K_{C_1}^r = (r_1 \times n_1) S, \quad \Delta K_{C_2}^r = (r_2 \times n_2) S. \quad (17.35)$$

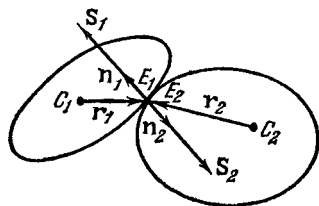


Рис. 17.7

Построим в каждом теле системы координат $C_1 x_1 y_1 z_1$ и $C_2 x_2 y_2 z_2$, направив оси по главным осям инерции (на рис. 17.7 оси не показаны). Тогда два векторных уравнения (17.35) будут эквивалентны следующим шести скалярным уравнениям:

$$A_1 \Delta \omega_{1x} = S \lambda_{1x}, \quad B_1 \Delta \omega_{1y} = S \lambda_{1y}, \quad C_1 \Delta \omega_{1z} = S \lambda_{1z}, \quad (17.36)$$

$$A_2 \Delta \omega_{2x} = S \lambda_{2x}, \quad B_2 \Delta \omega_{2y} = S \lambda_{2y}, \quad C_2 \Delta \omega_{2z} = S \lambda_{2z}. \quad (17.37)$$

В этих уравнениях A_i , B_i , C_i — моменты инерции соответствующих тел, λ_{ix} , λ_{iy} , λ_{iz} — проекции векторов $r_i \times n_i$, а $\Delta \omega_{ix}$, $\Delta \omega_{iy}$, $\Delta \omega_{iz}$ — проекции векторов $\Delta \omega_i = \Omega_i - \omega_i$ ($i = 1, 2$). Для каждого тела проекции берутся на оси системы $C_i x_i y_i z_i$, связанные с соответствующим телом (индексы осей в равенствах (17.36) и (17.37) опущены).

Уравнениям (17.34) также соответствуют шесть скалярных уравнений. Таким образом, мы имеем двенадцать скалярных уравнений, содержащих тринадцать неизвестных величин: проекции векторов $\Delta v_1 = V_1 - v_1$, $\Delta v_2 = V_2 - v_2$, $\Delta \omega_1$, $\Delta \omega_2$ и модуль импульса S . Еще одно уравнение дает гипотеза Ньютона (17.8):

$$U_2 \cdot n_2 + U_1 \cdot n_1 = -\epsilon (u_2 \cdot n_2 + u_1 \cdot n_1). \quad (17.38)$$

Здесь u_1 , u_2 — скорости точек контакта до удара, U_1 , U_2 — скорости соответствующих точек после удара.

Пользуясь известной формулой кинематики, найдем скорость точки E_1 , принадлежащей первому телу, в конце и начале удара

$$U_1 = V_1 + \Omega_1 \times r_1, \quad u_1 = v_1 + \omega_1 \times r_1.$$

Отсюда следует, что

$$U_1 - u_1 = (V - v_1) + \Delta \omega_1 \times r_1.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на n_1 и учтем, что

$$(\Delta \omega_1 \times r_1) \cdot n_1 = (r_1 \times n_1) \cdot \Delta \omega_1,$$

$$(U_1 - u_1) \cdot n_1 = (V_1 - v_1) \cdot n_1 + (r_1 \times n_1) \cdot \Delta \omega_1.$$

Умножая теперь первое уравнение (17.34) скалярно на n_1 и учитывая, что $|n_1| = 1$, получим

$$(V_1 - v_1) \cdot n_1 = \frac{S}{M_1}.$$

Теперь предыдущее равенство можно записать так:

$$(U_1 - u_1) \cdot n_1 = \frac{S}{M_1} + \lambda_{1x} \Delta \omega_{1x} + \lambda_{1y} \Delta \omega_{1y} + \lambda_{1z} \Delta \omega_{1z},$$

или, пользуясь уравнениями (17.36),

$$(U_1 - u_1) \cdot n_1 = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{\lambda_{1x}^2}{A_1} + \frac{\lambda_{1y}^2}{B_1} + \frac{\lambda_{1z}^2}{C_1} \right) S.$$

Аналогично для второго тела

$$(U_2 - u_2) \cdot n_2 = \left(\frac{1}{M_2} + \frac{\lambda_{2x}^2}{A_2} + \frac{\lambda_{2y}^2}{B_2} + \frac{\lambda_{2z}^2}{C_2} \right) S.$$

Складывая почленно оба равенства, получим

$$U_2 \cdot n_2 + U_1 \cdot n_1 - (u_2 \cdot n_2 + u_1 \cdot n_1) = GS,$$

где

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{\lambda_{1x}^2}{A_1} + \frac{\lambda_{1y}^2}{B_1} + \frac{\lambda_{1z}^2}{C_1} + \frac{\lambda_{2x}^2}{A_2} + \frac{\lambda_{2y}^2}{B_2} + \frac{\lambda_{2z}^2}{C_2}. \quad (17.39)$$

Массы тел и их моменты инерции заданы, а числа λ_{1x} , λ_{1y} , λ_{1z} представляют собой кратчайшие расстояния между линией действия импульсов $S n_1$, $S n_2$ и соответствующими осями координат. Эти расстояния вычисляются подобно тому, как в статике определяются плечи сил относительно осей.

Для того чтобы, например, вычислить $|\lambda_{1x}|$, необходимо линию действия импульса спроектировать на координатную плоскость $y_1 z_1$ и найти плечо проекции импульса относительно точки C_1 .

В случае плоского удара, когда все линии, изображенные на рис. 17.7, лежат в одной плоскости, а ось z_1 направлена перпендикулярно к плоскости чертежа, $|\lambda_{1z}|$ представляет собой отрезок перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на линию действия импульса S .

Таким образом, G можно считать величиной известной. Пользуясь равенствами (17.38) и (17.39), найдем импульс

$$S = - \frac{1 + \varepsilon}{G} (u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2). \quad (17.40)$$

Величину, стоящую в скобке, можно выразить через угловые скорости тел и скорости их центров масс до удара:

$$u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 = (v_1 + \omega_1 \times r_1) \cdot n_1 + (v_2 + \omega_2 \times r_2) \cdot n_2 = v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + \\ + \omega_{1x} \lambda_{1x} + \omega_{1y} \lambda_{1y} + \omega_{1z} \lambda_{1z} + \omega_{2x} \lambda_{2x} + \omega_{2y} \lambda_{2y} + \omega_{2z} \lambda_{2z}.$$

Заметим, что $-(u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2) = u_{1r}$ представляет собой положительную величину, равную проекции относительной скорости точки контакта первого тела относительно точки контакта второго тела на нормаль n_2 (см. рис. 17.7).

Отсюда следует, что

$$S = \frac{1 + \varepsilon}{G} u_{1r}$$

— известная величина и можно, воспользовавшись формулами (17.34) — (17.37) найти искомые величины после удара:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 + \frac{S}{M_1} \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{S}{M_2} \mathbf{n}_2, \quad (17.41)$$

$$\Omega_{ix} = \omega_{ix} + S \frac{\lambda_{ix}}{A_i}, \quad \Omega_{iy} = \omega_{iy} + S \frac{\lambda_{iy}}{B_i}, \quad \Omega_{iz} = \omega_{iz} + S \frac{\lambda_{iz}}{C_i}.$$

§ 17.9. Частные случаи удара двух тел

1. Центральные удар. Удар называется центральным, если центры масс соударяющихся тел находятся на общей нормали, проведенной в точке контакта (или на линии действия импульсов). Примером такого удара может служить удар двух однородных гладких шаров.

По определению центрального удара $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i = 0$. Следовательно, все λ равны нулю и формула (17.39) принимает вид

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}. \quad (17.42)$$

Из уравнений (17.35) находим, что $\Delta K_{C_i}^r = 0$. Тогда $\Delta \omega_i = 0$, т. е. при центральном ударе угловые скорости тел не изменяются. Скорости же центров масс изменяются согласно уравнениям (17.41). Найдем величину ударного импульса S .

Для этого определим сначала u_{1r} :

$$u_{1r} = -(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) = -(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2).$$

Введем углы α и β (рис. 17.8), составляемые векторами скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ центров масс до удара с линией центров. Тогда

$$u_{1r} = v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta.$$

Отсюда

$$S = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (1 + \epsilon) (v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta).$$

Рис. 17.8

Подставляя это выражение в равенства (17.41), найдем скорости центров масс тел после удара

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 + \frac{M_2 (1 + \epsilon)}{M_1 + M_2} (v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta) \mathbf{n}_1,$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{M_1 (1 + \epsilon)}{M_1 + M_2} (v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta) \mathbf{n}_2.$$

2. Плоский удар двух тел. Будем считать, что оба тела имеют плоскости материальной симметрии, которые перемещаются в общей неподвижной плоскости. Пусть, кроме того, ударные импульсы расположены в той же плоскости (это всегда выполняется при цилиндрической структуре тел). При выполнении этих условий удар называется *плоским*.

В сделанных предположениях векторы $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i$, ω_i и Ω_i перпендикулярны к плоскости движения. Имеем

$$\Delta \omega_{ix} = \Delta \omega_{iy} = 0, \quad \lambda_{ix} = \lambda_{iy} = 0, \quad \lambda_{iz}^2 = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i|^2 = h_i^2, \quad (17.43)$$

где h_i — расстояния от центров масс C_i тел до линии действия импульсов (плечи импульсов).

Формула для вычисления параметра G принимает вид

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{h_1^2}{C_1} + \frac{h_2^2}{C_2}. \quad (17.44)$$

Остальные величины определяются по общим формулам, но из шести уравнений (17.36) и (17.37) остаются только два:

$$C_1 (\Omega_{1z} - \omega_{1z}) = Sh_1, \quad C_2 (\Omega_{2z} - \omega_{2z}) = Sh_2, \quad (17.45)$$

причем h_1 и h_2 нужно вычислять, учитывая знак моментов.

§ 17.10. Задачи

Задача 17.1. Два шара с массами m_1 и m_2 движутся поступательно по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 17.9). В момент удара линия центров составляет угол $\pi/4$ с направлениями движения шаров до удара. Считая шары идеально гладкими и коэффициент восстановления равным ϵ , найти скорости шаров после удара.

Направим координатные оси параллельно прямым, по которым движутся центры шаров до удара (см. рис. 17.9). Пусть скорость первого шара $\mathbf{v}_1$ направлена по оси x . В соответствии с теоремой о сохранении количества движения системы при ударе имеем

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2.$$

Здесь $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — скорости шаров после удара.

В проекциях на оси координат это векторное равенство дает первые два уравнения для определения скоростей тела после удара:

$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x},$$

$$m_2 v_2 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}.$$

Для получения третьего уравнения воспользуемся формулой (17.8), переписав ее в виде

$$\epsilon = - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1} = - \frac{u_{2n_2} + u_{1n_1}}{v_{2n_2} + v_{1n_1}}.$$

Так как

$$u_{1n_1} = -u_{1x} \frac{\sqrt{2}}{2} + u_{1y} \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_{2n_2} = u_{2x} \frac{\sqrt{2}}{2} - u_{2y} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$v_{1n_1} = -v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v_{2n_2} = -v_2 \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то

$$\epsilon = \frac{u_{2x} - u_{2y} - u_{1x} + u_{1y}}{v_1 + v_2}.$$

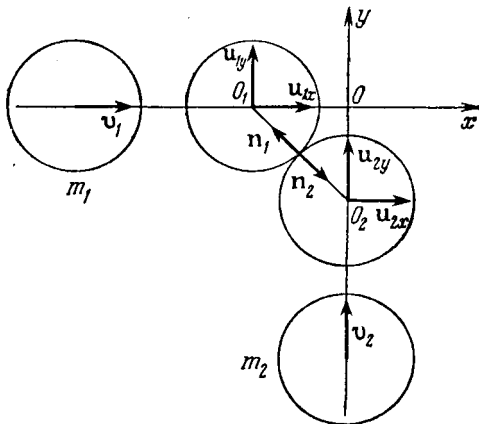


Рис. 17.9

Отсюда получим третье уравнение

$$-u_{1x} + u_{1y} + u_{2x} - u_{2y} = \varepsilon (v_1 + v_2).$$

Наконец, четвертое уравнение можно составить, используя условие идеальной гладкости шаров. Так как ударный импульс в этом случае направлен по общей нормали к поверхностям шаров, то проекция количества движения на касательную для каждого шара при ударе не изменяется. Таким образом,

$$v_{1\tau} = u_{1\tau}, \quad v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = u_{1x} \frac{\sqrt{2}}{2} + u_{1y} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

или

$$v_i = u_{ix} + u_{iy}.$$

Это — четвертое уравнение. Присоединяя к нему предыдущие три уравнения, получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} . Решение системы имеет такой вид:

$$u_{1x} = \frac{(1 + 2k - \varepsilon) v_1 - (1 + \varepsilon) v_2}{2(1 + k)}, \quad u_{1y} = \frac{1 + \varepsilon}{2(1 + k)} (v_1 + v_2),$$

$$u_{2x} = \frac{k(1 + \varepsilon)}{2(1 + k)} (v_1 + v_2), \quad u_{2y} = -\frac{-k(1 + \varepsilon) v_1 + [2 + k(1 - \varepsilon)] v_2}{2(1 + k)}.$$

Здесь через k обозначено отношение масс шаров $m_1/m_2 = k$. Применим эти формулы к частному случаю абсолютно упругого соударения шаров одинаковой массы. Примем также равными и скорости шаров.

Подставляя в формулы $k = \varepsilon = 1$, $v_1 = v_2 = v$, получим

$$u_{1x} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v = 0, \quad u_{1y} = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v = v,$$

$$u_{2x} = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v = v, \quad u_{2y} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v = 0.$$

Таким образом, при ударе происходит обмен скоростями. Первый шар после удара приобретает скорость, которую имел второй шар до удара, а второй шар приобретает скорость первого.

Задача 17.2. Элементарная частица M массы m сталкивается с ядром элемента в точке O (рис. 17.10). Начальная скорость частицы v_0 . После столкновения частица и два осколка ядра движутся в среде C , где оставляют следы OA_1 , OA_2 , OA_3 . По длине свободного пробега частицы M в среде (отрезку OA_1) определяют скорость v_1 частицы после столкновения. Масса ядра m_0 также известна. Определить отношение масс осколков ядра, зная углы отклонения α , β , γ от начального направления Oy следов всех трех частиц после удара. Кроме того, известно, что $v_2 > v_3$. Удар считать абсолютно упругим.

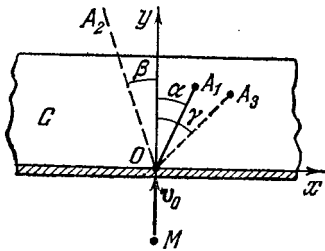


Рис. 17.10

Обозначим через m_2 и m_3 массы частиц со следами OA_2 и OA_3 соответственно: $m_2 + m_3 = m_0$.

Из теоремы о сохранении количества движения системы за время удара следует, что

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = m v_0.$$

Спроектируем на оси x и y это векторное уравнение:

$$-m_2 v_2 \sin \beta + m_3 v_3 \sin \gamma + m v_1 \sin \alpha = 0, \quad (17.46)$$

$$m_2 v_2 \cos \beta + m_3 v_3 \cos \gamma + m v_1 \cos \alpha = m v_0.$$

Кроме того, так как удар абсолютно упругий, то кинетическая энергия системы за время удара сохраняется (теорема Карно):

$$\frac{m v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2}. \quad (17.47)$$

Из (17.46) найдем v_2 и v_3 :

$$v_2 = \frac{m [v_0 \sin \gamma - v_1 \sin (\gamma - \alpha)]}{m_2 \sin (\beta + \gamma)}, \quad v_3 = \frac{m [v_0 \sin \beta - v_1 \sin (\alpha + \beta)]}{m_3 \sin (\beta + \gamma)}. \quad (17.48)$$

Поделив первое уравнение на второе и используя условие $v_2 > v_3$, получим

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{m_3}{m_2} \frac{a}{b} > 1, \quad (17.49)$$

где введены обозначения

$$a = v_0 \sin \gamma - v_1 \sin (\gamma - \alpha), \quad b = v_0 \sin \beta - v_1 \sin (\alpha + \beta).$$

Подставив значения v_2 и v_3 из равенств (17.48) в уравнение (17.47), получим

$$\frac{a^2}{m_2} + \frac{b^2}{m_3} = \frac{v_0^2 - v_1^2}{m} \sin^2 (\beta + \gamma). \quad (17.50)$$

Нам необходимо найти отношение $k = m_3/m_2$. Помножим обе части (17.50) на $m_2 + m_3 = m_0$:

$$a^2 \left(1 + \frac{m_3}{m_2}\right) + b^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) = \frac{m_0}{m} (v_0^2 - v_1^2) \sin^2 (\beta + \gamma),$$

или

$$a^2 (1 + k) + b^2 \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{m_0}{m} (v_0^2 - v_1^2) \sin^2 (\beta + \gamma),$$

откуда получим квадратное уравнение для определения k

$$a^2 k^2 - ck + b^2 = 0, \quad (17.51)$$

где использовано обозначение

$$c = \frac{m_0}{m} (v_0^2 - v_1^2) \sin^2 (\beta + \gamma) - a^2 - b^2.$$

Решим уравнение (17.51):

$$k_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}. \quad (17.52)$$

Из двух корней следует выбрать тот, который удовлетворяет неравенству (17.49): $k > b/a$. Используя соотношение (17.52), получим

$$\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b^2}}{2a^2} > \frac{b}{a}, \quad c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b^2} > 2ba,$$

откуда

$$\sqrt{c - 2ab} \pm \sqrt{c + 2ab} > 0.$$

Следовательно, пригоден только знак «плюс».

Теперь окончательно имеем

$$k = \frac{m_3}{m_2} = \frac{1}{2a^2} (c + \sqrt{c^2 - 4a^2b^2}).$$

Аналогично можно показать, что при $v_2/v_3 < 1$ в (17.49) нужно взять знак «минус».

Задача 17.3. При стыковке двух космических кораблей, схематично изображенных на рис. 17.11, возникает удар. До стыковки движение кораблей было плоским и поступательным, а их скорости v_1 и v_2 , направленные вдоль осей симметрии, образовывали между собой угол β . Линия действия ударного импульса составляет с осью первого корабля угол α . Расстояния от центров масс до точки контакта равны l_1 и l_2 . Массы кораблей M_1 и M_2 , а моменты инерции относительно центральных осей, перпендикулярных к плоскости движения и проходящих через центры масс C_1 и C_2 . Коэффициент восстановления равен e .

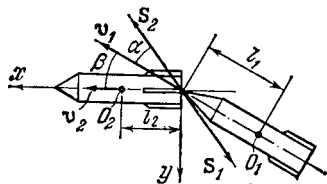


Рис. 17.11

Определить ударный импульс, скорости центров масс и угловые скорости кораблей после удара.

Пользуясь формулой (17.44), найдем параметр G :

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{h_1^2}{C_1} + \frac{h_2^2}{C_2}.$$

Здесь h_1 и h_2 — плечи импульсов, т. е. расстояния от точек O_1 и O_2 до линий действия S_1 и S_2 . Из рис. 17.11 находим $h_1 = l_1 \sin \alpha$, $h_2 = l_2 \sin (\alpha + \beta)$. Следовательно,

$$G = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} + \frac{l_1^2 \sin^2 \alpha}{C_1} + \frac{l_2^2 \sin^2 (\alpha + \beta)}{C_2}. \quad (17.53)$$

Найдем проекции скоростей точек контакта на соответствующие нормали; при этом учтем, что корабли до стыковки двигались поступательно и, следовательно, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$,

$$u_1 \cdot n_1 = -v_1 \cos \alpha, \quad u_2 \cdot n_2 = v_2 \cos (\alpha + \beta).$$

Внося найденные величины в формулу (17.40), найдем ударный импульс

$$S = \frac{1+e}{G} [v_1 \cos \alpha - v_2 \cos (\alpha + \beta)]. \quad (17.54)$$

Отсюда видим, что для стыковки необходимо выполнение условия $v_1 \cos \alpha \geq v_2 \cos (\alpha + \beta)$.

Перейдем к определению скоростей центров масс после удара. Проектируя векторные уравнения (17.41) на оси x и y , получим

$$V_{1x} = v_1 \cos \beta - \frac{S}{M_1} \cos (\alpha + \beta), \quad V_{2x} = v_2 + \frac{S}{M_2} \cos (\alpha + \beta),$$

$$V_{1y} = -v_1 \sin \beta + \frac{S}{M_1} \sin (\alpha + \beta), \quad V_{2y} = -\frac{S}{M_2} \sin (\alpha + \beta).$$

Из второй группы уравнений, учитывая, что до удара корабли двигались поступательно ($\omega_{1z} = \omega_{2z} = 0$), найдем угловые скорости после удара. При этом следует принять во внимание, что моменты импульсов относительно осей z_1 и z_2 положительны:

$$\Omega_{1z} = \frac{S h_1}{C_1}, \quad \Omega_{2z} = \frac{S h_2}{C_2},$$

или

$$\Omega_{1z} = \frac{S}{C_1} l_1 \sin \alpha, \quad \Omega_{2z} = \frac{S}{C_2} l_2 \sin (\alpha + \beta).$$

Если после сближения кораблей стыковка состоялась, то относительная скорость точки контакта после удара равна нулю. Следовательно, удар можно считать абсолютно неупругим и коэффициент восстановления $e = 0$.

Полагая в равенстве (17.54) $\varepsilon = 0$, найдем ударный импульс

$$S = \frac{1}{G} [v_1 \cos \alpha - v_2 \cos (\alpha + \beta)].$$

Если $\alpha = \beta = 0$, то удар будет центральным и в соответствии с общей теорией $\Omega_{1z} = \Omega_{2z} = 0$. Корабли после стыковки будут двигаться без вращения. При α и β , отличных от нуля (в реальных условиях небольшие отклонения от прямого центрального удара всегда возможны), корабли начнут вращаться вокруг точки контакта. Так как $\Omega_{1z} \neq \Omega_{2z}$, то замок, скрепляющий оба корабля, будет испытывать при этом дополнительный удар.

Задача 17.4. Храповик, изображенный на рис. 17.12, подвергается в точке A действию ударного импульса S . Плечи рычага $OB = l_1$ и $BA = l_2$ можно считать однородными стержнями с массами M_1 и M_2 соответственно. Угол между плечами рычага OBA равен $\pi/2 - \beta$. Требуется определить, при каком отношении плеч l_1/l_2 и каком направлении линии действия импульса S ударная нагрузка не будет передаваться на ось храповика.

Введем оси координат Oxy , как указано на чертеже. Координаты центра масс C храповика определяем, пользуясь тем, что точки C_1 и C_2 лежат в серединах стержней:

$$x_C = \frac{M_2 l_2 \cos \beta}{2M},$$

$$y_C = \frac{1}{M} \left[M_1 \frac{l_1}{2} + M_2 \left(l_1 - \frac{l_2}{2} \sin \beta \right) \right].$$

Здесь M — масса всего храповика.

Проведем прямую OC . Она составляет со стержнем OB угол α . Очевидно, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{y_C}{x_C} = \frac{l_1 (M_1 + 2M_2) - M_2 l_2 \sin \beta}{M_2 l_2 \cos \beta}.$$

Если ввести обозначения $l_1/l_2 = u$, $(M_1 + 2M_2)/M_2 = k$ ($k \geq 2$), то последнее равенство примет вид

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ku - \sin \beta}{\cos \beta}.$$

Величина u пока не известна. Ее надо найти, пользуясь основным соотношением, определяющим положение центра удара. Прежде всего заметим, что линия действия ударного импульса S согласно доказанному ранее должна быть перпендикулярна к линии OC . Следовательно, она образует с плечом OB угол $\pi/2 - \alpha$. Опустим из точки A перпендикуляр на OC и найдем точку O_1 — центр удара.

Длины отрезков $r_C = OC$ и $r_{O_1} = OO_1$ должны удовлетворять условию

$$Mr_C r_{O_1} = I_{O_2},$$

где I_{O_2} — момент инерции храповика относительно оси вращения. Найдем эти величины:

$$r_C = \frac{x_C}{\sin \alpha} = \frac{M_2 l_2 \cos \beta}{2M \sin \alpha},$$

$$r_{O_1} = OD \cos \alpha = (l_1 - l_2 \sin \beta + l_2 \cos \beta \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha.$$

Для осевого момента инерции получим выражение

$$\begin{aligned} I_{O_2} &= \frac{M_1 l_1^2}{3} + \frac{M_2 l_2^2}{12} + M_2 \left[\left(l_1 - \frac{1}{2} l_2 \sin \beta \right)^2 + \frac{l_2^2}{4} \cos^2 \beta \right] = \\ &= \frac{1}{3} [(M_1 + 3M_2) l_1^2 + M_2 l_2^2 - 3M_2 l_1 l_2 \sin \beta]. \end{aligned}$$

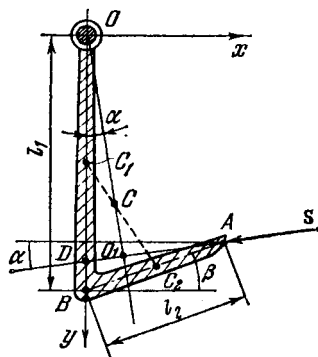


Рис. 17.12

Подставим в основное равенство найденные величины:

$$\frac{M_2 l_2 \cos \beta \cos \alpha}{2 \sin \alpha} (l_1 - l_2 \sin \beta + l_2 \cos \beta \operatorname{tg} \alpha) = \\ = \frac{1}{3} [(M_1 + 3M_2) l_1^2 + M_2 l_2^2 - 3M_2 l_1 l_2 \sin \beta].$$

Разделим обе части уравнения на $M_2 l_2^2$ и воспользуемся введенными ранее обозначениями:

$$3 [(u - \sin \beta) (ku - \sin \beta) + \cos^2 \beta] = 2 [(k + 1) u^2 - 3u \sin \beta + 1],$$

Задача свелась к решению квадратного уравнения

$$(k - 2) u^2 - 3u (k - 1) \sin \beta + 1 = 0.$$

Отсюда найдем отношение плеч

$$u_{1,2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)_{1,2} = \frac{1}{2(k-2)} [3(k-1) \sin \beta \pm \sqrt{9(k-1)^2 \sin^2 \beta - 4(k-2)}].$$

Оба корня пригодны, если дискриминант уравнения неотрицателен, т. е.

$$9(k-1)^2 \sin^2 \beta - 4(k-2) \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$|\sin \beta| \geq \frac{2\sqrt{k-2}}{3(k-1)}.$$

Заметим, что всегда $k = 2 + M_1/M_2$ и поэтому правая часть неравенства — действительное число. Убедимся теперь в том, что это число не может быть больше единицы. Для этого найдем экстремум функции

$$f(k) = \frac{2\sqrt{k-2}}{3(k-1)}, \quad f'(k) = \frac{2}{3} \left(\frac{k-1}{2\sqrt{k-2}} - \sqrt{k-2} \right) \frac{1}{(k-1)^2} = 0.$$

Отсюда получим $k - 1 - 2(k - 2) = 0$, $k = 3$. Нетрудно проверить, что при $k = 3$ имеет место максимум, следовательно,

$$\max_{k \geq 2} (k) = 1/3.$$

Таким образом, при любом соотношении масс можно подобрать такой угол $\pi/2 - \beta$ между плечами храповика, что при $\angle OBA = \pi/2 - \beta$ обеспечивается безударная работа оси храповика.

Интересно, что при отрицательных углах β (угол между плечами тупой) невозможно обеспечить безударную работу храповика. Это видно из формулы для u . Величина l_1/l_2 становится отрицательной, что невозможно.

Линия действия ударной силы определяется углом α . Теперь мы его можем вычислить:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ku}{\cos \beta} - \operatorname{tg} \beta = \\ = \frac{k}{2(k-1) \cos \beta} [3(k-1) \sin \beta \pm \sqrt{9(k-1)^2 \sin^2 \beta - 4(k-2)}] - \operatorname{tg} \beta.$$

Глава XVIII

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 18.1. Введение

Общие теоремы динамики и полученные из них следствия дают наглядные и вместе с тем мощные средства исследования движения материальной системы. Умело пользуясь ими, можно сразу получить ответ на поставленные вопросы либо составить дифференциальные уравнения, решение которых определяет движение системы.

Однако применение общих теорем связано с известными трудностями. Прежде всего, практически невозможно строго классифицировать задачи и указать, в каком случае какая теорема приведет быстрее всего к цели.

Кроме того, при составлении дифференциальных уравнений движения материальной системы с помощью общих теорем динамики приходится часто расчленять систему, увеличивать число уравнений, наконец, вводить неизвестные величины (реакции связей), определение которых не всегда требуется по условию задачи. Поясним сказанное примером.

Предположим, что требуется определить закон движения двух грузов, связанных между собой нерастяжимой гибкой нитью, перекинутой через блок. При решении этой задачи в § 7.4 мы расчленили систему, вводили две реакции связей (натяжения нитей), которые затем исключали из полученных уравнений движения. Конечно, эту задачу можно решить, не вводя реакции связей, например, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, однако в более сложных случаях найти простейший путь к решению задачи не всегда бывает достаточно легко.

Аналитическая механика дает общие методы, с помощью которых можно составить дифференциальные уравнения движения, не вводя реакции идеальных связей. Методы аналитической механики оказались плодотворными не только в теоретических исследованиях, но и в практических инженерных расчетах.

§ 18.2. Связи

Изложение аналитической механики мы начнем с более подробного рассмотрения связей. В главе V уже рассматривались связи применительно к динамике несвободного движения одной ма-

териальной точки. Обобщим эти понятия на систему материальных точек.

Система материальных точек называется свободной, если ее точки могут занимать любые положения, а их скорости могут принимать произвольные значения. В противном случае система называется *несвободной*. Значит, для несвободной системы должны быть указаны ограничения, накладываемые на координаты или скорости (или и на координаты и скорости) отдельных точек. Эти ограничения называются *связями*. Они могут быть записаны в виде уравнений или неравенств. Конструктивно связи реализуются в виде шарниров, поверхностей, направляющих, стержней, нитей и т. п.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Две материальные точки соединены жестким, невесомым и нерастяжимым стержнем длины l . Уравнение связи будет

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2,$$

где $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ — координаты точек.

Пример 2. Две материальные точки соединены абсолютно гибкой, нерастяжимой и невесомой нитью длины l . В этом случае связь запишется в форме неравенства:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leq l^2.$$

Если нить натянута, то имеет место знак равенства, в противном случае — знак «меньше».

Прежде чем перейти к рассмотрению других примеров остановимся на связях твердого тела. Твердое тело, как система материальных точек, представляет несвободную систему. Уравнения связей между отдельными точками твердого тела выражают неизменность расстояний между ними. Число таких связей и, следовательно, уравнений связей бесконечно велико. Однако было показано (том I, глава X, § 10.1), что в самом общем случае положение твердого тела вполне определяется шестью независимыми параметрами, в качестве которых можно выбрать, например, три координаты полюса и три угла Эйлера (том I, глава XII, § 12.4). Поэтому, рассматривая связи несвободного твердого тела, целесообразно говорить не о связях между отдельными его точками, а о связях, ограничивающих движение тела как одного целого объекта. Соответственно этому для несвободного твердого тела следует составлять уравнения или неравенства для параметров, определяющих положение тела.

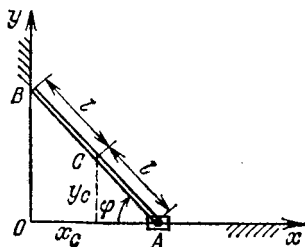


Рис. 18.1

Пример 3. Однородный стержень AB длины $2l$ движется так, что его конец A , шарнирно укрепленный в ползуне, перемещается по горизонтальной направляющей, а конец B опирается на вертикальную направляющую (рис. 18.1). Найдём связи, ограничивающие движение стержня.

Горизонтальную составляющую примем за ось x , а вертикальную — за ось y . Плоское движение тела определяется тремя параметрами: двумя координатами цен-

тра масс x_C и y_C и углом φ . Направляющие ограничивают это движение. Очевидно, что при любом положении стержня справедливы соотношения

$$y_C = l \sin \varphi, \quad x_C^2 + y_C^2 \geq l^2.$$

Если стержень опирается концом B на вертикальную направляющую, то во втором соотношении имеет место знак равенства, если же конец B отошел от направляющей, то будет знак «больше».

Связи, которые описываются уравнениями, называются удерживающими; связи, описание которых осуществляется с помощью неравенств, называются неудерживающими. В первом примере связь удерживающая, во втором — неудерживающая, в третьем примере одна связь удерживающая и одна — неудерживающая.

До сих пор мы рассматривали связи, уравнения (неравенства) которых не содержат время t явно. Такие связи называются *стационарными*. Если же связь зависит от времени явно, то она называется *нестационарной* связью.

Пример 4. Трос, наматываясь на барабан, поднимает груз, вследствие чего свисающая часть троса укорачивается по заданному закону $l = l(t)$.

Примем точку схода троса с барабана за начало координат, ось z направим вертикально вниз, оси x и y — горизонтально. При подъеме груз может раскачиваться. Очевидно, что его координаты должны удовлетворять условию

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2(t).$$

В этом примере мы имеем дело с неудерживающей нестационарной связью (так как время входит явно в условие связи).

Остановимся несколько подробнее на неудерживающих связях. До тех пор пока связь удерживает тело (нить или трос натянуты, стержень опирается на направляющую и т. п.), в условии связи стоит знак равенства и мы можем применять к системам с такими связями все выводы и уравнения, которые будут установлены для систем с удерживающими связями. Но, в отличие от последних, неудерживающие связи могут не удерживать тело (момент отделения тела определяется по обращению в нуль соответствующей реакции связи). Это следует всегда иметь в виду при исследовании систем с неудерживающими связями (см. § 19.4).

Перейдем к рассмотрению связей, зависящих от скоростей точек системы.

Пример 5. Конек AB движется по поверхности льда. Будем считать, что конек имеет выпуклое лезвие, которое касается льда в одной точке (рис. 18.2).

В плоскости xy конек может занимать произвольное положение, но скорость v точки касания C конька со льдом должна быть направлена вдоль конька. Иначе говоря, конек не может соскальзывать в направлении, перпендикулярном к его лезвию. Зададим положение конька тремя координатами: x_C , y_C и φ . Условие отсутствия соскальзывания принимает тогда вид

$$\dot{y}_C / \dot{x}_C = \operatorname{tg} \varphi,$$

или

$$\dot{x}_C \sin \varphi - \dot{y}_C \cos \varphi = 0.$$

Умножив это уравнение на dt , получим

$$dx_C \sin \varphi - dy_C \cos \varphi = 0. \quad (18.1)$$

Так как это уравнение (так же как и предыдущее) нельзя проинтегрировать, то связь (невозможность конька перемещаться в направлении, перпендикулярном к его лезвию) математически выражается уравнением, содержащим неинтегрируемым образом дифференциалы координат или их производные.

Пример 6. Шар движется по шероховатой плоскости без скольжения. Запишем все условия, налагаемые на движение шара. Прежде всего, центр шара O удовлетворяет условию (рис. 18.3)

$$z_1 \geq R, \quad (18.2)$$

где R — радиус шара, а z_1 — аппликата его центра O в неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$. Это обычная неудерживающая стационарная связь.

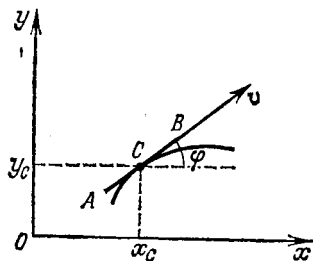


Рис. 18.2

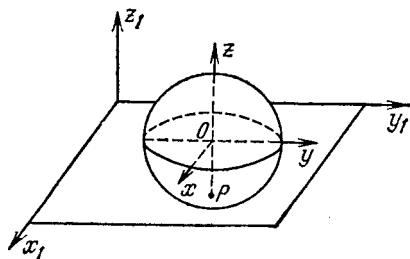


Рис. 18.3

Учтем теперь, что шар катится без скольжения. Скорость любой точки шара определяется равенством

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

где $\mathbf{v}_O$ — скорость центра шара, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость и $\boldsymbol{\rho}$ — относительный радиус-вектор точки. Для точки касания шара P скорость $\mathbf{v}_P = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_P = 0.$$

Спроектируем обе части этого равенства на поступательно перемещающиеся оси x , y , z :

$$v_{Ox} + \omega_y z_P - \omega_z y_P = 0, \quad v_{Oy} + \omega_z x_P - \omega_x z_P = 0, \quad v_{Oz} + \omega_x y_P - \omega_y x_P = 0. \quad (18.3)$$

Имеем (см. рис. 18.3)

$$v_{Ox} = \dot{x}_1, \quad v_{Oy} = \dot{y}_1, \quad v_{Oz} = 0, \quad x_P = 0, \quad y_P = 0, \quad z_P = -R,$$

где x_1 и y_1 — координаты центра шара O в неподвижной системе координат $x_1y_1z_1$.

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (том I, глава XIV, формулы (14.6)):

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},$$

где ψ , θ и φ — углы Эйлера.

После подстановки в уравнения (18.3) получим (третье уравнение обращается в тождество)

$$\dot{x}_1 - R(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) = 0,$$

$$\dot{y}_1 + R(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) = 0,$$

или, умножая на dt ,

$$\begin{aligned} dx_1 - R(d\psi \sin \theta \cos \varphi - d\theta \sin \varphi) &= 0, \\ dy_1 + R(d\psi \sin \theta \sin \varphi + d\theta \cos \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Так как эти уравнения нельзя проинтегрировать, то связь шара с плоскостью (отсутствие проскальзывания) математически выражается двумя уравнениями, содержащими неинтегрируемым образом дифференциалы или скорости параметров, определяющих положение шара.

Связи называются голономными, если их уравнения могут быть записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени или дифференциалов координат.

Связи называются неголономными, если их уравнения содержат неинтегрируемым образом производные от координат по времени или дифференциалы координат.

Все связи примеров 1—4 голономные, в примере 5 имеется одна неголономная связь (18.1), а в примере 6 одна связь (18.2)— голономная и две связи (18.4)— неголономные.

Голономная нестационарная и удерживающая связь в общем случае имеет следующий вид:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad (18.5)$$

а голономная стационарная и удерживающая связь

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (18.6)$$

В настоящем курсе мы будем изучать только системы с голономными связями. Системы с неголономными связями излагаются в специальных руководствах *).

§ 18.3. Виртуальные перемещения голономных систем

Понятие виртуальных перемещений лучше всего проиллюстрировать на примере одной удерживающей, нестационарной, голономной связи, наложенной на одну материальную точку. Другими словами, речь будет идти пока об одной материальной точке, движение которой ограничено связью

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (18.7)$$

Пусть в момент времени t точка занимает положение $M_0(x_0, y_0, z_0)$, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$. Зафиксируем время t и из данного положения M_0 мысленно дадим точке малое перемещение $d\mathbf{r}$. Обратим внимание на то, что это малое перемещение $d\mathbf{r}$ происходит

*) См., например, Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971; Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961; Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967.

не под действием приложенных к точке сил и вообще точка может не реализовать перемещение $\delta \mathbf{r}$ — это просто малое перемещение, которое мы мысленно даем точке из данного положения M_0 при фиксированном времени t .

Очевидно, что не всякое даже малое перемещение $\delta \mathbf{r}$ можно осуществить, не нарушив связь. Для того чтобы выяснить, какое и в каком смысле малое перемещение $\delta \mathbf{r}$ не нарушает связь, учтем, что после перемещения на $\delta \mathbf{r}$ точка займет новое положение, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}$. Координаты x' , y' , z' нового положения точки будут

$$x' = x_0 + \delta x, \quad y' = y_0 + \delta y, \quad z' = z_0 + \delta z, \quad (18.8)$$

где δx , δy , δz — проекции вектора $\delta \mathbf{r}$.

Внесем эти координаты точки в уравнение связи (18.7) и разложим полученное выражение в ряд по степеням δx , δy и δz . Имеем

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = f(x_0, y_0, z_0, t) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \delta z + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Так как первое слагаемое правой части равно нулю (координаты x_0 , y_0 , z_0 точки M_0 должны удовлетворять уравнению связи (18.7)), то последнее равенство примет вид

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \delta z + \dots \quad (18.9)$$

Виртуальным перемещением точки называется такое малое перемещение $\delta \mathbf{r}$, мысленно осуществляемое из данного положения при фиксированном времени t , которое с точностью до членов первого порядка малости включительно не нарушает связи. Из этого определения следует, что виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}$ (δx , δy , δz) должно удовлетворять уравнению, которое получается из (18.9), если приравнять правую часть нулю, отбросив одновременно все члены высшего порядка. Таким образом, проекции δx , δy , δz виртуального перемещения $\delta \mathbf{r}$ должны удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \delta z = 0. \quad (18.10)$$

Иначе говоря, проекции δx , δy , δz виртуального перемещения $\delta \mathbf{r}$ обращают в нуль первую вариацию уравнения связи при условии, что время не варьируется:

$$\delta f(x, y, z, t)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \delta z = 0.$$

Если ввести градиент функции (18.7) при фиксированном времени t в данной точке M_0

$$(\text{grad } f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \mathbf{k},$$

то левую часть уравнения (18.10) можно представить как скалярное произведение векторов $(\text{grad } f)_0$ и $\delta \mathbf{r}$

$$(\text{grad } f)_0 \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (18.11)$$

Теперь легко выяснить геометрический смысл виртуального перемещения $\delta \mathbf{r}$. При фиксированном времени t уравнение связи (18.7) определяет в пространстве некоторую поверхность. Как известно, градиент функции представляет собой вектор, направленный по нормали к поверхности в данной точке M_0 . Из уравнения (18.11) следует, что любой вектор виртуального перемещения $\delta \mathbf{r}$ перпендикулярен нормали к поверхности, т. е. лежит в касательной плоскости, проведенной к поверхности (18.7) при фиксированном времени t в данной точке M_0 (рис. 18.4, а).

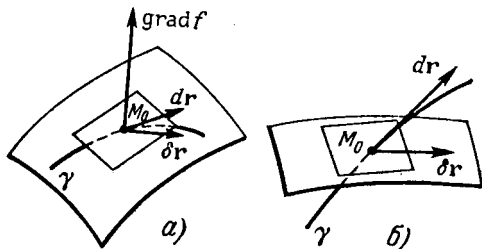


Рис. 18.4

Рассмотрим теперь действительное перемещение $d\mathbf{r}$ точки. Прежде всего отметим, что действительное перемещение $d\mathbf{r}$, в отличие от виртуального перемещения $\delta \mathbf{r}$, происходит под действием приложенных к точке сил за время dt . Это перемещение направлено всегда по касательной, проведенной к траектории точки (так как $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$). Рассмотрим два случая.

1. Связь стационарная. При стационарной связи поверхность уравнения связи $f(x, y, z) = 0$ не изменяется с течением времени и траектория γ точки M целиком лежит на этой поверхности. Касательная плоскость содержит в этом случае скорость $\mathbf{v}$ точки M (см. рис. 18.4, а), и, следовательно, мы можем всегда построить одно виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}$, которое будет совпадать с действительным перемещением $d\mathbf{r}$.

Этот вывод можно получить и из аналитических соображений. Проекции dx , dy , dz действительного перемещения $d\mathbf{r}$ должны удовлетворять условию

$$df(x, y, z)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz = 0.$$

Это условие будет совпадать с (18.10), если в последнем положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ и $\delta z = dz$.

Таким образом, при стационарных связях действительное перемещение $d\mathbf{r}$ совпадает с одним из виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}$.

2. Связь нестационарная. При нестационарной связи поверхность $f(x, y, z, t) = 0$, построенная при фиксированном времени t , не будет содержать траекторию γ точки M . Это следует хотя бы из того, что при действительном перемещении за время dt точка M перейдет на новую поверхность $f(x, y, z, t + dt) = 0$. Поэтому действительное перемещение $d\mathbf{r}$ не совпадает ни с одним из виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$ (рис. 18.4, б).

Дадим аналитическое доказательство этого утверждения. Проекции dx, dy, dz действительного перемещения $d\mathbf{r}$ при нестационарной связи должны удовлетворять условию

$$df(x, y, z, t)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt = 0.$$

Так как производная $(\partial f / \partial t)_0$ не равна нулю, то это условие не может совпадать с (18.10) при $\delta x = dx, \delta y = dy$ и $\delta z = dz$.

Все сказанное хорошо иллюстрируется простейшим примером.

Пример 1. Рассмотрим математический маятник постоянной длины l , движение которого происходит в плоскости xy (рис. 18.5, а). Уравнение связи (предполагается, что нить все время натянута) будет $x^2 + y^2 = l^2$, где $l = \text{const}$.

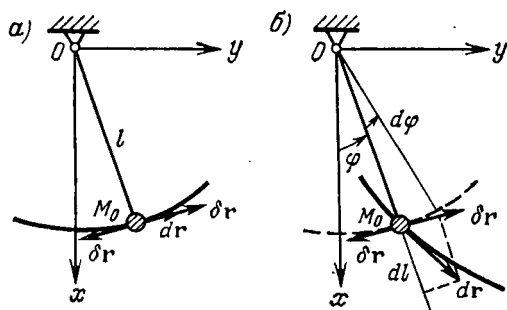


Рис. 18.5

Это обычная стационарная голономная связь. При плоском движении поверхность, определяемая уравнением связи, вырождается в линию — траекторию движения точки. В нашем случае точка M движется по окружности радиуса l . Из положения M_0 , которое занимает точка в данный момент времени, мысленно дадим малое перемещение $\delta\mathbf{r}$, направленное по касательной к окружности. Это и будет виртуальное пере-

мещение $\delta\mathbf{r}$ математического маятника. Очевидно, что, меняя модуль и направление вдоль касательной, мы можем осуществить бесчисленное множество виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$. Действительное перемещение $d\mathbf{r}$ будет направлено по касательной к траектории и оно будет совпадать с одним из виртуальных перемещений (см. рис. 18.5, а).

Рассмотрим теперь случай, когда длина маятника изменяется по заданному закону (для определенности будем считать, что она увеличивается). Тогда уравнение связи примет вид $x^2 + y^2 = l^2(t)$. Это — нестационарная голономная связь. Зафиксируем время t и через данное положение M_0 построим окружность, определяемую уравнением связи при $t = \text{const}$ (на рис. 18.5, б она показана пунктиром). Виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}$ направлены по касательной к этой окружности. Однако, в отличие от предыдущего случая, когда длина маятника не изменялась, при действительном движении за время dt изменится не только угол φ , но изменится длина маятника l . В результате действительное перемещение $d\mathbf{r}$ маятника не будет совпадать ни с одним из виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}$ (на рис. 18.5, б сплошной линией показан участок действительной траектории γ маятника при увеличивающейся его длине и возрастании угла φ).

Вернемся к общему случаю. Предположим, что на систему материальных точек наложено h голономных нестационарных удерживающих связей

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, h). \quad (18.12)$$

Виртуальным перемещением материальной системы называется такое мысленное малое перемещение $\delta r_1, \dots, \delta r_n$ отдельных ее точек из данного положения при фиксированном времени t , при котором справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_0 \delta x_k + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right)_0 \delta y_k + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right)_0 \delta z_k \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, h), \quad (18.13)$$

где $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ — проекции вектора δr_k .

Эти равенства можно интерпретировать на языке многомерной геометрии. Для этого введем в рассмотрение $3n$ -мерное пространство и изображающую точку M , положение которой определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ с проекциями $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$. Тогда левые части уравнений (18.13) можно записать в форме скалярных произведений

$$(\text{grad } f_i)_0 \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Здесь $(\text{grad } f_i)_0$ — вектор, направленный по нормали к поверхности $f_i = 0$ в данной точке M_0 при фиксированном времени t . Из этих равенств следует, что виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}$ изображающей точки M в $3n$ -мерном пространстве должно находиться в касательных плоскостях, проведенных к каждой поверхности (18.12) в данной точке M_0 при фиксированном времени t .

Пример 2. На материальную точку M наложены две связи: $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$. Найдём направление виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}$.

Вектор $\delta \mathbf{r}$ должен удовлетворять двум условиям:

$$\text{grad } f_1 \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \quad \text{grad } f_2 \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Из этих равенств следует, что вектор $\delta \mathbf{r}$ лежит одновременно в двух касательных плоскостях, проведенных к данной точке заданных поверхностей $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Следовательно, все виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}$ лежат на пересечении касательных плоскостей, т. е. на касательной, проведенной к линии пересечения данных поверхностей (рис. 18.6).

Пример 3. Рассмотрим плоский рычаг, шарнирно укрепленный в точке O (рис. 18.7). Любая точка рычага, например точка M , будет двигаться по окружности радиуса OM . Следовательно, виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_M$ точки M будет направлено по касательной к этой окружности, т. е. перпендикулярно вектору $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$. Таким образом, виртуальные перемещения точек рычага перпендикулярны к рычагу. Модули этих векторов не могут быть выбраны произвольно.

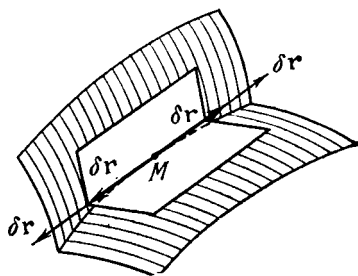


Рис. 18.6

Если в качестве независимого виртуального перемещения взять вектор $\delta \mathbf{r}_M$, то виртуальное перемещение, например, точки N (см. рис. 18.7) можно выразить через $\delta \mathbf{r}_M$.

Действительно, для точки N имеем $\mathbf{r}_N = -\frac{ON}{OM} \mathbf{r}_M$. Отсюда $\delta \mathbf{r}_N = -\frac{ON}{OM} \delta \mathbf{r}_M$.

Другими словами, модули виртуальных перемещений пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения. Распределение векторов виртуальных перемещений точек рычага показано на рис. 18.7.

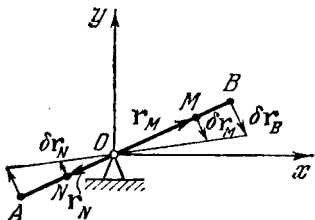


Рис. 18.7

В заключение этого параграфа введем понятие виртуальной работы сил, приложенных к системе.

Пусть система материальных точек занимает в некоторый момент времени t какое-то положение. Обозначим через $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ силы, приложенные к точкам системы. Из данного положения при фиксированном времени t сообщим системе виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_n$. Будем считать, что на этом перемещении силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, приложенные к системе, не изменяются. Составим сумму работ этих сил на виртуальном перемещении $\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2, \dots, \delta \mathbf{r}_n$

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k.$$

Эта сумма называется *виртуальной работой* заданных сил.

Наконец, отметим, что очень часто вместо термина «виртуальное перемещение» употребляют термин «возможное перемещение». По существу это одно и то же, так как латинское слово *virtualis* означает возможный. Однако, если пользоваться словами «возможные перемещения», то для нестационарных связей мы должны будем сказать: «действительное перемещение невозможно» (ибо действительное перемещение $d\mathbf{r}$ не совпадает ни с одним из возможных перемещений $\delta \mathbf{r}$). Так как на русском языке такая фраза звучит неестественно, то в отечественной научной и учебной литературе чаще пользуются латинским термином «виртуальное перемещение» вместо однозначного русского — «возможное перемещение».

§ 18.4. Идеальные связи

Введем еще одну классификацию связей.

Связи называются идеальными, если сумма работ всех реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

Обозначим через $\mathbf{R}_k$ равнодействующую всех реакций связей, приложенных к точке с номером k . Тогда условие идеальности связей будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (18.14)$$

Для одной материальной точки и одной связи $f(x, y, z) = 0$ условие (18.14) упрощается:

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0,$$

т. е. реакция $\mathbf{R}$ идеальной связи перпендикулярна к любому виртуальному перемещению $\delta \mathbf{r}$ точки и, следовательно, она направлена по нормали к поверхности связи $f(x, y, z) = 0$. Это означает, что при идеальной связи точка движется по поверхности без трения. Конечно, этот вывод остается справедливым и при движении точки по линии. Условие (18.14) является естественным обобщением понятия идеальности связи для одной точки на случай n материальных точек, подчиненных h связям.

Ввиду фундаментального значения понятия идеальности связей мы укажем на три, часто встречающиеся на практике, идеальные связи.

1. Связь — жесткая неизменяемая система. Такая связь реализуется в абсолютно твердом теле, жестких, недеформируемых стержнях и т. п. Для примера рассмотрим две материальные точки, связанные жестким невесомым и нерастяжимым стержнем. Покажем, что такая связь идеальная.

Реакции стержня на материальные точки направлены по стержню, и $\mathbf{R}_B = -\mathbf{R}_A$ (рис. 18.8).

Из условия нерастяжимости стержня имеем

$$(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2 = (AB)^2 \quad (AB = \text{const}).$$

Варьируя это уравнение связи, получим

$$(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \cdot (\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B) = 0,$$

т. е. векторы $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$ и $(\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B)$ взаимно перпендикулярны.

Найдем сумму работ реакций связей на виртуальном перемещении точек. По определению имеем

$$\mathbf{R}_A \cdot \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{R}_B \cdot \delta \mathbf{r}_B = \mathbf{R}_A \cdot \delta \mathbf{r}_A - \mathbf{R}_A \cdot \delta \mathbf{r}_B = \mathbf{R}_A \cdot (\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B) = 0.$$

Последнее произведение равно нулю, так как вектор $\mathbf{R}_A$, совпадающий по направлению с вектором $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$, перпендикулярен вектору $(\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B)$.

Таким образом, стержень, а следовательно, и внутренние связи абсолютно твердого тела представляют идеальные связи. Заметим, что в данном примере работа отдельных реакций на виртуальном перемещении не равна нулю, но их сумма равна нулю.

В заключение этого случая отметим одно свойство виртуальных перемещений точек твердого тела: проекции виртуальных перемещений точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой, т. е.

$$\text{пр}_{AB} \delta \mathbf{r}_A = \text{пр}_{AB} \delta \mathbf{r}_B. \quad (18.15)$$

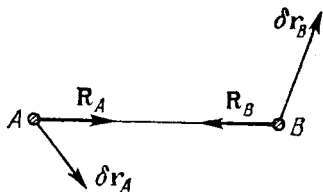


Рис. 18.8

Действительно, из ортогональности векторов $\overline{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ и $(\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B)$ следует, что $\text{пр}_{AB}(\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B) = 0$; это равносильно (18.15).

2. Связь — шарнир без трения. Пусть рычаг укреплен шарнирно в неподвижной точке (рис. 18.9). При отсутствии трения виртуальная работа реакции шарнира O будет $\delta A = \mathbf{R}_O \cdot \delta \mathbf{r}_O$. Но точка O неподвижна, следовательно, ее виртуальное перемещение

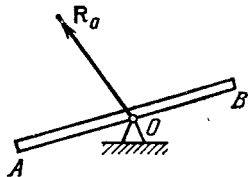


Рис. 18.9

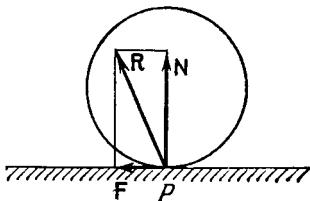


Рис. 18.10

$\delta \mathbf{r}_O$ равно нулю и $\delta A = 0$. Поэтому шарнир без трения представляет собой идеальную связь.

3. Связь при качении без скольжения. Пусть по абсолютно твердой поверхности катится без скольжения другое абсолютно твердое тело (рис. 18.10). Покажем, что такая связь идеальная. Действительно, так как оба тела абсолютно твердые, то трение качения отсутствует (см. том I, § 6.2) и виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_P$ точки P приложения реакции шероховатой поверхности равно нулю: $\delta \mathbf{r}_P = 0$. Отсюда следует, что работа $\delta A = = \mathbf{R} \delta \mathbf{r}_P$ реакции связи $\mathbf{R}$ на виртуальном перемещении тела равна нулю.

§ 18.5. Принцип виртуальных перемещений

В этом параграфе мы будем изучать условия равновесия системы материальных точек. Прежде всего следует отметить, что слово «равновесие» приложимо скорее к силам, чем к материальным телам, и, строго говоря, оно не равнозначно слову «покой». Действительно, если мы говорим, что все силы, приложенные к свободной материальной точке, уравновешены, то это означает только то, что сумма сил равна нулю. Но из этого, конечно, не следует еще, что точка находится в покое — она может также двигаться равномерно и прямолинейно.

Для того чтобы материальная точка находилась в покое, условия, налагаемые на силы, необходимо дополнить, очевидно, требованием равенства нулю начальной скорости точки, причем совокупность этих условий на основании закона инерции будет и достаточна.

Однако по сложившейся многовековой традиции в динамике слово «равновесие» применяется не только к силам, но и к системе материальных точек; при этом под словами «равновесие системы

материальных точек» понимается состояние покоя системы. При такой трактовке этих слов, учитывая сказанное ранее, можно сформулировать самые общие условия равновесия системы материальных точек, а именно: *для равновесия системы материальных точек необходимо и достаточно, чтобы суммы всех сил, действующих на каждую точку системы, и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю.* Если обозначить через F_k и R_k равнодействующие всех активных сил и реакций связей соответственно, приложенных к точке с номером k , то математически условие равновесия запишется следующим образом:

$$F_k + R_k = 0, \quad v_k(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (18.16)$$

Эти условия имеют один существенный недостаток — они требуют учета всех сил, включая, разумеется, и реакции связей, действующих на каждую точку системы. При такой общности эти условия, за редкими исключениями, не могут быть практически применены к исследованию равновесия материальной системы, но их можно использовать для доказательства других, более простых условий равновесия системы материальных точек.

В 1788 г. Лагранж, обобщая работы своих предшественников, сформулировал весьма удобный в приложениях принцип виртуальных перемещений, устанавливающий условия равновесия системы материальных точек с идеальными и стационарными связями. Многие годы это был именно принцип, т. е. положение, принимаемое без доказательства. В настоящее время предпочитают, пользуясь законами Ньютона и их следствиями, все условия этого принципа строго доказывать, иначе говоря, принцип стали рассматривать как теорему. Помня об анахронизме названия, мы сформулируем и приведем доказательство принципа виртуальных перемещений для частного случая, когда связи не только идеальные и стационарные, но и удерживающие *).

Теорема (принцип виртуальных перемещений). *Для того чтобы система материальных точек, подчиненная идеальным стационарным, голономным и удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении системы и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю.* Таким образом, нужно доказать, что для равновесия системы материальных точек необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = 0, \quad v_k(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (18.17)$$

*) Формулировку и доказательство принципа возможных перемещений для неудерживающих связей можно найти, например, в книге: С у с л о в Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.

Необходимость. Предположим, что система находится в равновесии. Следовательно, должны выполняться условия

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Из данного положения дадим системе виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_n$. Умножим каждое из уравнений равновесия на $\delta \mathbf{r}_k$ и сложим их почленно:

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

Так как связи идеальны, то последняя сумма равна нулю (см. (18.14)). Следовательно, при равновесии системы должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0,$$

доказывающее необходимость условий (18.17).

Достаточность. Для доказательства достаточности нужно показать, что при выполнении условий (18.17) система будет находиться в равновесии. Мы дадим два доказательства достаточности условий (18.17).

Первое доказательство основано на применении теоремы об изменении кинетической энергии. Предположим, что условия (18.17) выполнены, но, несмотря на это, система под действием приложенных к ней сил начала двигаться из состояния покоя. По условию теоремы все связи стационарны, поэтому действительное перемещение системы за время dt будет совпадать с одним из виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_n$.

На основании теоремы об изменении кинетической энергии сумма работ всех активных сил и реакций связей на этом перемещении будет положительна, так как при переходе из состояния покоя в движение система получит положительное приращение кинетической энергии. Итак,

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0.$$

По условию теоремы связи идеальны, поэтому вторая сумма равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0.$$

Несовместимость этого неравенства с принятым предположением (18.17) доказывает достаточность условий принципа виртуальных перемещений.

Второе доказательство основано на использовании условий (18.16). Установим предварительно, что если скорости всех точек равны нулю, то перемещения, пропорциональные ускорениям точек, являются виртуальными перемещениями системы. В самом деле, для действительного движения системы уравнения стационарных, голономных связей должны удовлетворяться тождественно по t :

$$f_i [x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t)] = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \dot{y}_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \dot{z}_k \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, h). \quad (18.18)$$

Дифференцируя второй раз, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \ddot{x}_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \ddot{y}_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \ddot{z}_k \right) + \\ + \sum_{k=1}^n \left(\dot{x}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \dot{y}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} + \dot{z}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Так как скорости всех точек в данный момент времени равны нулю, то последняя сумма исчезает ($\dot{x}_k = \dot{y}_k = \dot{z}_k = 0$) и проекции ускорений удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \ddot{x}_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \ddot{y}_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \ddot{z}_k \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, h). \quad (18.19)$$

Сравнивая эти уравнения с (18.13) убеждаемся в том, что если положить $\delta x_k = k_0 \ddot{x}_k$, $\delta y_k = k_0 \ddot{y}_k$, $\delta z_k = k_0 \ddot{z}_k$, или $\delta \mathbf{r}_k = k_0 \mathbf{w}_k$, то уравнения (18.13) будут удовлетворены, так как после сокращения на k_0 они просто перейдут в равенства (18.19).

Заметим, что доказанное утверждение имеет простой смысл: ускорения точек при равенстве нулю скоростей направлены по касательным к траекториям движения (это очевидно, так как при $v_k = 0$ нормальные ускорения $w_{kn} = v_k^2/\rho_k = 0$).

Теперь легко доказать достаточность условий (18.17). Запишем первое условие (18.17) вместе с условием идеальности связей (18.14):

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

После сложения получим

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

Предположим, что при выполнении условий (18.17) движение началось и точки приобрели ускорения $\mathbf{w}_k$. Возьмем в качестве виртуального перемещения систему векторов, пропорциональных ускорениям точек $\delta \mathbf{r}_k = k_0 \mathbf{w}_k$ (это можно сделать,

так как по условию связи стационарны и голономны и $\mathbf{v}_k(0) = 0$. Тогда последнее равенство примет вид

$$k_0 \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \mathbf{w}_k = 0,$$

или, учитывая, что для каждой точки справедлив второй закон Ньютона $m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k$,

$$k_0 \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{w}_k^2 = 0.$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если все $\mathbf{w}_k = 0$. Следовательно,

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Значит, условия равновесия (18.16) выполняются, что дает второе доказательство достаточности принципа виртуальных перемещений.

Принцип виртуальных перемещений широко применяется при различных технических расчетах. Прежде чем проиллюстрировать его на примерах, сделаем несколько замечаний общего характера.

1. Если есть неидеальные связи, то их реакции (например, силы трения) следует отнести к активным силам.

2. В тех случаях, когда требуется определить реакцию идеальной связи, нужно мысленно отбросить эту связь, а соответствующую реакцию рассматривать как активную силу.

3. В некоторых случаях вместо виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}_k$ рассматривают виртуальные скорости $\mathbf{v}_k^*$, пропорциональные $\delta \mathbf{r}_k$. Действительно, если положить $\delta \mathbf{r}_k = k_0 \mathbf{v}_k^*$, то в уравнениях (18.13) проекции $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ вектора $\delta \mathbf{r}_k$ заменятся просто на проекции $\dot{x}_k^*, \dot{y}_k^*, \dot{z}_k^*$ вектора $\mathbf{v}_k^*$. При движении системы со стационарными связями действительные скорости $\mathbf{v}_k$ будут совпадать с одной из систем виртуальных скоростей $\mathbf{v}_k^*$.

Задача 18.1. Кривошипно-ползунный механизм (рис. 18.11) состоит из кривошипа OA , шатуна AB и поршня, на который действует сила P . Известны длина кривошипа l , длина шатуна L , угол α между осью цилиндра и кривошипом OA . Пренебрегая трением и силами тяжести поршня, шатуна и кривошипа, определить момент пары сил M , приложенной к кривошипу OA , при котором механизм находится в равновесии.

Введем вспомогательный угол $\beta = \angle OBA$; тогда расстояние $OB = r$ можно вычислить по формуле

$$r = l \cos \alpha + L \cos \beta.$$

По теореме синусов имеем

$$\frac{\sin \beta}{l} = \frac{\sin \alpha}{L}, \quad \text{или} \quad \sin \beta = \frac{l}{L} \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$r = l \cos \alpha + L \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha},$$

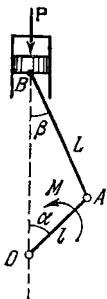


Рис. 18.11

где $\mu = l/L$. Варьируя полученное соотношение, найдем

$$\delta r = - \left(l \sin \alpha + L \frac{\mu^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}} \right) \delta \alpha.$$

Знак «минус» показывает, что при увеличении угла α расстояние r уменьшается. В соответствии с принципом виртуальных перемещений имеем

$$\delta A_P + \delta A_M = 0,$$

где δA_P и δA_M — работа на виртуальном перемещении системы силы P и пары сил с моментом M соответственно.

Работа пары сил равна произведению момента пары M на угол поворота кривошипа $\delta \alpha$. Следовательно,

$$\delta A_M = -M \delta \alpha.$$

Учитывая, что вектор δr при положительном $\delta \alpha$ направлен вниз и сила P также направлена вниз, получим

$$\delta A_P = P \cdot |\delta r| =$$

$$= Pl \sin \alpha \left(1 + \mu \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}} \right) \delta \alpha.$$

Применим теперь принцип виртуальных перемещений:

$$\left[Pl \sin \alpha \left(1 + \mu \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}} \right) - M \right] \delta \alpha = 0.$$

Так как $\delta \alpha$ можно выбрать произвольно, то квадратная скобка должна равняться нулю. Отсюда получаем значение искомого момента

$$M = Pl \sin \alpha \left(1 + \mu \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \alpha}} \right).$$

Задача 18.2. Консольная балка AE состоит из двух сочлененных шарниром D балок (рис. 18.12, а). На балку действуют вертикальная сила $P = 16$ кН, равномерно распределенная нагрузка $q = 4$ кН/м и пара сил с моментом $M = 6$ кН·м. Размеры показаны на чертеже. Определить реакции опор A , B и C .

Заменим действие равномерно распределенной нагрузки силами $Q_1 = 2q = 8$ кН и $Q_2 = 1 \cdot q = 4$ кН (рис. 18.12, б). Для определения реакции R_C освободим консоль DE от опоры C и заменим ее реакцией R_C , как указано на рис. 18.12, в. Сообщим теперь виртуальное перемещение точкам консоли DE . Так как консоль DE получила возможность поворачиваться вокруг шарнира D , то все виртуальные перемещения будут перпендикулярны к DC в исходном положении (см. пример 3 § 18.2 и рис. 18.7).

Используем теперь принцип виртуальных перемещений:

$$Q_1 \cdot \delta r_C + R_C \cdot \delta r_C = 0,$$

или

$$Q_1 \cdot |\delta r_C| - R_C \cdot |\delta r_C| = 0.$$

Отсюда $R_C = Q_1 = 8$ кН.

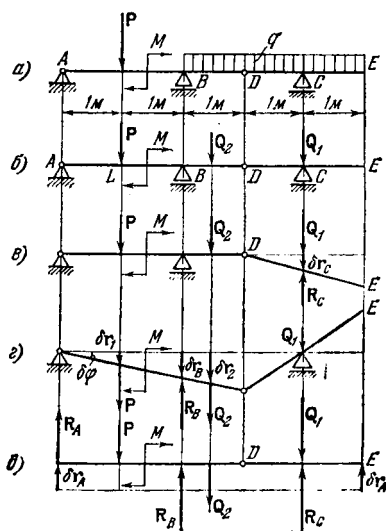


Рис. 18.12

Теперь освободим балку от опоры B (рис. 18.12, $а$), заменим ее реакцией R_B , дадим виртуальные перемещения точкам балки и подсчитаем работу на этом перемещении:

$$P \cdot \delta r_1 + R_B \cdot \delta r_B + Q_2 \cdot \delta r_2 + M \delta \varphi = 0,$$

или

$$P |\delta r_1| - R_B |\delta r_B| + Q_2 |\delta r_2| + M \delta \varphi = 0.$$

Здесь $\delta \varphi$ — угол поворота балки AD вокруг оси A . Из рис. 18.12, $а$ видно, что модули виртуальных перемещений пропорциональны расстояниям до оси вращения:

$$|\delta r_1| = 1 \cdot \delta \varphi, \quad |\delta r_B| = 2 \delta \varphi, \quad |\delta r_2| = 2,5 \delta \varphi.$$

Следовательно,

$$(P - 2R_B + 2,5Q_2 + M) \delta \varphi = 0;$$

$$\text{отсюда } R_B = \frac{P + 2,5Q_2 + M}{2} = 21 \text{ кН.}$$

Освободим теперь все опоры, заменим их реакциями и сообщим одинаковые виртуальные перемещения вверх всем точкам балки (рис. 18.12, $б$). Тогда, пользуясь принципом виртуальных перемещений, получим $(R_A + R_B + R_C - Q_1 - Q_2 - P) |\delta r_A| = 0$ и, следовательно, $R_A = Q_1 + Q_2 + P - R_B - R_C = -1 \text{ кН}$.

Задача 18.3. К шарнирам B и C четырехзвенника $ABCD$ приложены две силы, P и Q , перпендикулярные звеньям AB и CD соответственно. Считая силу P известной, определить силу Q при равновесии системы, если $\angle ABC = 90^\circ$, а $\angle BCD = 120^\circ$ (рис. 18.13). Массами стержней пренебречь.

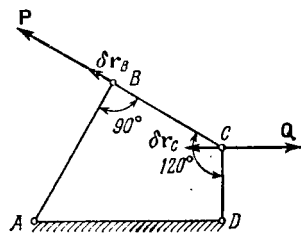


Рис. 18.13

Дадим системе виртуальное перемещение. Так как стержень AB может вращаться вокруг оси A , а стержень CD — вокруг оси D , то виртуальное перемещение δr_B точки B перпендикулярно AB , а виртуальное перемещение δr_C точки C перпендикулярно CD (см. рис. 18.13). Применяя принцип виртуальных перемещений, получим

$$P \cdot |\delta r_B| - Q \cdot |\delta r_C| = 0.$$

Учтем теперь, что проекции виртуальных перемещений двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (см. равенство (18.15)). Для точек B и C будем иметь

$$|\delta r_B| = |\delta r_C| \cos 30^\circ.$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получим

$$P |\delta r_C| \cos 30^\circ - Q |\delta r_C| = 0.$$

$$\text{Отсюда } Q = \frac{\sqrt{3}}{2} P.$$

Задача 18.4. К левой и правой частям трехшарнирной арки (рис. 18.14, $а$) приложены соответственно силы P_1 и P_2 . Определить вертикальную составляющую реакцию шарнира B . Размеры указаны на рисунке.

Применяя принцип освобожденности, заменим шарнир B шарниром, позволяющим точке B перемещаться по вертикали, и введем вертикальную составляющую реакции Y_B (рис. 18.14, $б$).

Виртуальное перемещение левой части арки осуществим поворотом вокруг неподвижной точки A . Виртуальное перемещение правой части арки можно осуществить путем вращения вокруг ее мгновенного центра скоростей. Поскольку

направления виртуальных скоростей совпадают с направлениями виртуальных перемещений, то мгновенный центр находится как точка пересечения перпендикуляров к направлениям виртуальных перемещений (на рис. 18.14, б точка C_1).

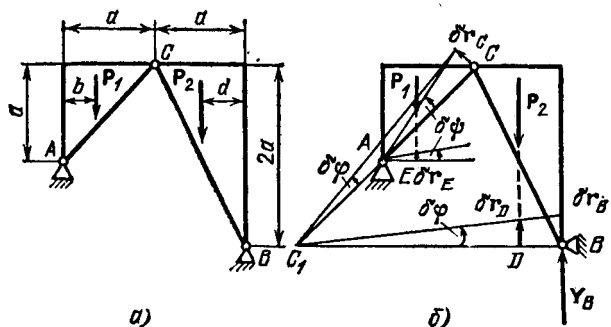


Рис. 18.14

Сообщим арке виртуальное перемещение, т. е. мысленно повернем левую часть на угол $\delta\varphi$ вокруг точки A , а правую — на $\delta\varphi$ вокруг точки C_1 .

Согласно принципу виртуальных перемещений

$$Y_B \cdot \delta r_B + P_2 \cdot \delta r_D + P_1 \cdot \delta r_E = 0,$$

но

$$|\delta r_B| = 3a \delta\varphi, \quad |\delta r_D| = (3a - d) \delta\varphi, \quad |\delta r_E| = b \delta\varphi$$

и

$$|\delta r_C| = a\sqrt{2} \delta\varphi = 2a\sqrt{2} \delta\varphi, \quad \text{т. е.} \quad \delta\varphi = 2 \delta\varphi;$$

следовательно,

$$[Y_B 3a - P_2 (3a - d) - 2bP_1] \delta\varphi = 0,$$

отсюда

$$Y_B = \frac{2bP_1 + (3a - d) P_2}{3a}.$$

Аналогично можно определить и другие составляющие реакций.

Читателю полезно решить последние три задачи с помощью обычных уравнений статики твердого тела и сравнить оба метода.

§ 18.6. Обобщенные координаты и обобщенные силы

При решении многих задач механики можно добиться существенного упрощения, если ввести в рассмотрение так называемые обобщенные координаты и соответствующие им обобщенные силы. Определению этих величин и посвящен этот параграф.

Рассмотрим материальную систему, состоящую из n материальных точек. В инерциальной системе отсчета $Oxyz$ положение каждой точки M_k определяется тремя координатами x_k, y_k, z_k , а положение всех точек — $3n$ декартовыми координатами.

Будем считать, что движение системы ограничено h голономными, идеальными и удерживающими связями

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, h). \quad (18.20)$$

Так как $3n$ координат x_k, y_k, z_k удовлетворяют h уравнениям связей, то они не являются независимыми. Очевидно, что *число независимых координат, определяющих положение системы, будет*

$$s = 3n - h. \quad (18.21)$$

В качестве независимых координат, определяющих положение системы, можно выбрать s из $3n$ декартовых координат, выразив остальные координаты с помощью уравнений связей. Однако такой способ выбора независимых координат не будет лучшим, так как он часто приводит к сложным зависимостям. Значительно удобнее ввести s каких-либо независимых параметров $q_1, \dots, q_s$ (они называются *обобщенными координатами*), однозначно определяющих положение системы. По существу, не употребляя этого термина, мы уже неоднократно пользовались обобщенными координатами. Так, например, положение математического маятника определялось углом отклонения его от вертикали ($q = \varphi$), положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, определялось тремя углами Эйлера ($q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$), а положение твердого тела, совершающего плоское движение, определялось двумя декартовыми координатами полюса и одним углом поворота тела ($q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = \varphi$).

В общем случае обобщенные координаты могут иметь различный геометрический и механический смысл. Ими могут быть линейные и угловые величины, а также параметры, имеющие размерность площади, объема; обобщенные координаты иногда содержат элементы силовых и иных физических характеристик системы.

Итак, пусть положение материальной системы определяется s независимыми обобщенными координатами *) $q_1, q_2, \dots, q_s$. Так как положение системы однозначно определяется обобщенными координатами, а каждая точка системы определяется ее радиусом-вектором $\mathbf{r}_k$, то последние можно выразить через обобщенные координаты и время:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (18.22)$$

Эти n векторных равенств эквивалентны $3n$ скалярным равенствам

$$x_k = x_k(q_1, \dots, q_s, t),$$

$$y_k = y_k(q_1, \dots, q_s, t), \quad (k = 1, \dots, n).$$

$$z_k = z_k(q_1, \dots, q_s, t)$$

*) Иногда вводят так называемые избыточные координаты. В этом случае число обобщенных координат будет больше числа $3n - h$. В настоящем курсе избыточные координаты не рассматриваются (см., например, Л о й ц я н с к и й Л. Г., Л у р ь е А. И. Курс теоретической механики, ч. II. — М.: Гостехиздат, 1955; Наука, 1983; Л у р ь е А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, § 1.4, 7.11, 7.12).

Конечно, при подстановке этих выражений для x_h, y_h, z_h в уравнения связей (18.20) последние должны обратиться в тождества.

Заметим, что если связи стационарны, то всегда можно выбрать такие обобщенные координаты, при которых равенства (18.22) не будут содержать время t явно. Обобщенные координаты удобны тем, что они, во-первых, независимы и, во-вторых, их введение освобождает нас от необходимости учитывать уравнения голономных связей. Последние удовлетворяются теперь автоматически по самому смыслу выбора обобщенных координат.

Если система голономна и число независимых координат, определяющих ее положение, равно s , то столько же будет и независимых вариаций координат, характеризующих виртуальное перемещение системы. *Число независимых вариаций координат, определяющих положение системы, называется числом степеней свободы системы.* Для голономной системы, на которую наложено h связей (18.20), число степеней свободы равно числу независимых координат, определяющих ее положение. Очевидно, что для голономной системы в качестве независимых вариаций координат лучше всего выбрать вариации независимых обобщенных координат $\delta q_1, \dots, \delta q_s$.

Для неголономной системы число степеней свободы не будет равно числу независимых координат, определяющих положение системы. Действительно, пусть, кроме h голономных связей, движение системы подчинено еще m неголономным или кинематическим связям, уравнения которых содержат неинтегрируемым образом производные координат по времени (или их дифференциалы и дифференциал времени dt). В большинстве случаев, встречающихся в практике, неголономные связи содержат производные координат или их дифференциалы линейно. В этом случае движение системы будет подчинено m линейным зависимостям вида

$$\alpha_{r1} dq_1 + \dots + \alpha_{rs} dq_s + \alpha_r dt = 0 \quad (r = 1, \dots, m), \quad (18.23)$$

где α_{rh} и α_r — некоторые функции $q_1, \dots, q_s$ и t . Заметим, что при стационарных неголономных связях $\alpha_r = 0$ и ни одна из функций α_{rh} не будет зависеть от времени t явно.

Условие неинтегрируемости уравнений неголономных связей (18.23) является существенным, так как в противном случае после интегрирования соответствующего уравнения получилась бы конечная зависимость между $q_1, \dots, q_s$ и t , т. е. голономная, не кинематическая связь. В этом случае координаты $q_1, \dots, q_s$ не были бы независимыми и их число можно было бы уменьшить. Таким образом, неголономные связи налагают ограничения на свободу движения системы и одновременно не позволяют уменьшить число параметров, определяющих положение системы.

В силу неголономных связей вариации обобщенных координат $\delta q_1, \dots, \delta q_s$, определяющих виртуальное перемещение системы, будут подчинены m условиям

$$\alpha_{r1} \delta q_1 + \dots + \alpha_{rs} \delta q_s = 0 \quad (r = 1, \dots, m),$$

которые получаются из (18.23) заменой dq_k на δq_k при $dt = 0$ (виртуальные перемещения осуществляются при фиксированном времени).

Из последних равенств следует, что число независимых вариаций координат $q_1, \dots, q_s$ будет меньше числа координат и равно $s - m$. Таким образом, *число степеней свободы неголономной системы равно $v = s - m$, где s — число независимых координат, определяющих положение системы, а m — число неголономных связей*. Заметим, что число неголономных связей называется *степенью неголономности*.

Для конька, движущегося по поверхности льда (пример 5 § 18.2, рис. 18.2), число независимых координат, определяющих его положение, равно трем ($s = 3$), степень неголономности равна единице ($m = 1$ — одна неголономная связь (18.1)), число степеней свободы равно двум ($v = 3 - 1 = 2$).

Для шара, катящегося без скольжения по плоскости (пример 6, рис. 18.3), число независимых координат, определяющих его положение, равно пяти ($s = 5$), степень неголономности равна двум ($m = 2$ — две неголономные связи (18.4)), число степеней свободы равно трем ($v = s - m = 3$).

Перейдем теперь к определению обобщенных сил. Вычислим работу δA всех активных сил на виртуальном перемещении системы (если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам):

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k. \quad (18.24)$$

Пользуясь равенством (18.22), выразим вариацию $\delta \mathbf{r}_k$ радиус-вектора $\mathbf{r}_k$ через вариации $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ обобщенных координат:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (18.25)$$

При вычислении $\delta \mathbf{r}_k$ необходимо иметь в виду, что виртуальное перемещение системы определяется при фиксированном времени t .

Проекции вектора $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$ на оси неподвижных декартовых координат равны, конечно, производным от соответствующих координат точки:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right)_x = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right)_y = \frac{\partial y_k}{\partial q_j}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right)_z = \frac{\partial z_k}{\partial q_j}. \quad (18.26)$$

Подставим $\delta \mathbf{r}_k$ из равенства (18.25) в формулу (18.24):

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

или, меняя порядок суммирования, получим

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Введем обозначения

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (18.27)$$

Тогда последнее равенство примет вид

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (18.28)$$

Множитель Q_j при вариации обобщенной координаты δq_j в выражении для виртуальной работы активных сил системы называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате q_j .

Обобщенная сила Q_j в общем случае не является силой в обычном понимании этого слова. Ее размерность зависит от размерности соответствующей ей обобщенной координаты q_j и определяется равенством $[Q_j] = [A]/[q_j]$, где $[A]$ — размерность работы.

Если обобщенная координата измеряется линейными величинами, то размерность обобщенной силы совпадает с размерностью силы; если же обобщенная координата представляет угол, то размерность обобщенной силы совпадает с размерностью момента, и т. д.

Рассмотрим способы вычисления обобщенных сил.

1. Обобщенные силы можно вычислить по формуле (18.27), которую удобнее представить в следующем виде (использовано равенство, выражающее скалярное произведение двух векторов через их проекции):

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \quad (18.29)$$

Здесь F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — проекции силы $\mathbf{F}_k$ на оси декартовой системы координат.

2. Для вычисления обобщенной силы, например Q_1 , дадим такое виртуальное перемещение, при котором все вариации обобщенных координат, кроме δq_1 , равны нулю:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0.$$

Вычислим на этом перемещении виртуальную работу δA_1 всех активных сил, приложенных к системе. На основании формулы (18.28) будем иметь

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1.$$

Множитель при вариации δq_1 равен первой обобщенной силе.

Аналогичным образом вычисляются остальные обобщенные силы.

3. Третий способ применим только для консервативных сил. Если силы консервативны, то будут справедливы равенства

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k},$$

где Π — потенциальная энергия системы.

Внося эти выражения для F_{kx} , F_{ky} и F_{kz} в формулу (18.29), получим

$$Q_j = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right),$$

или, учитывая, что потенциальная энергия Π зависит от обобщенных координат сложным образом через декартовы координаты x_k , y_k и z_k ,

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (18.30)$$

Таким образом, обобщенная сила консервативной системы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, взятой с обратным знаком.

Прежде чем перейти к примерам, еще раз напомним, что при вычислении обобщенных сил учитываются только активные силы, приложенные к системе. Реакции идеальных связей не учитываются (их работа равна нулю); если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам.

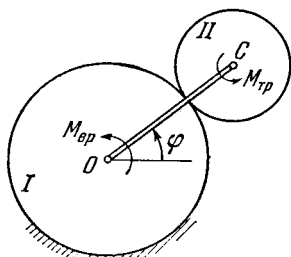


Рис. 18.15

Задача 18.5. В эпициклическом механизме кривошип OC вращается вокруг оси, проходящей через центр O неподвижной шестерни I радиуса R , и приводит в движение сателлит II радиуса r (рис. 18.15). К кривошипу приложен вращающий момент $M_{вр}$. Силы трения создают на оси C сателлита момент $M_{тр}$. Ввести обобщенную координату и определить соответствующую обобщенную силу, считая, что механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Положение движущихся частей механизма вполне определяется углом φ поворота кривошипа вокруг оси O . Поэтому эпициклический механизм имеет одну степень свободы. За обобщенную координату q примем угол φ .

На механизм действуют следующие силы: сила тяжести P и силы, создающие вращающий момент $M_{вр}$; к ним нужно присоединить силы трения на оси вращения C сателлита, момент которых равен $M_{тр}$ (реакции идеальных связей не учитываем). Приложенные к системе силы (за исключением силы тяжести) не консервативны, поэтому обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ , определим вторым способом.

Дадим кривошипу виртуальное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим работу всех перечисленных сил на этом перемещении:

$$\delta A = \delta A(P) + \delta A(M_{вр}) + \delta A(M_{тр}).$$

Виртуальная работа $\delta A (P)$ силы тяжести равна нулю (так как по условию механизм расположен в горизонтальной плоскости и, следовательно, перемещение точки приложения силы тяжести перпендикулярно самой силе).

Виртуальная работа вращающего момента $M_{вр}$ при повороте кривошипа на угол $\delta\varphi$ будет

$$\delta A (M_{вр}) = M_{вр} \delta\varphi.$$

Работа силы трения на оси вращения сателлита определяется равенством

$$\delta A (M_{тр}) = -M_{тр} \delta\varphi_r,$$

где $\delta\varphi_r$ — относительное угловое перемещение сателлита.

Очевидно, что между относительным угловым перемещением $\delta\varphi_r$ сателлита и угловым перемещением $\delta\varphi$ кривошипа имеется простая связь:

$$\delta\varphi_r = \frac{R}{r} \delta\varphi.$$

Подставляя это выражение для $\delta\varphi_r$ в предыдущее равенство, получим

$$\delta A (M_{тр}) = -\frac{R}{r} M_{тр} \delta\varphi.$$

Собирая все члены, найдем виртуальную работу δA сил, приложенных к эпиклическому механизму:

$$\delta A = \left(M_{вр} - \frac{R}{r} M_{тр} \right) \delta\varphi.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi$ обобщенной координаты φ равен обобщенной силе

$$Q_\varphi = M_{вр} - \frac{R}{r} M_{тр}. \quad (13.31)$$

Таково значение обобщенной силы, если за обобщенную координату принять угол поворота кривошипа. Заметим, что полученное выражение для обобщенной силы Q_φ справедливо как для постоянных, так и для переменных моментов $M_{вр}$ и $M_{тр}$.

Задача 18.6. Двойной математический маятник (рис. 18.16) состоит из двух невесомых стержней длины l_1 и l_2 , на концах которых укреплены материальные точки M_1 и M_2 массы m_1 и m_2 соответственно. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O , а второй — вокруг горизонтальной оси, связанной в первой точке. Ввести обобщенные координаты и вычислить обобщенные силы.

При такой конструкции вся система движется в вертикальной плоскости, которую мы примем за плоскость xu (ось z направим перпендикулярно к плоскости чертежа). Положение двойного математического маятника вполне определяется двумя углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали. Следовательно, система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты q_1 и q_2 примем углы φ_1 и φ_2 . Обобщенные силы вычислим тремя способами.

Первый способ. Найдем проекции сил $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$ и координаты точек их приложения

$$\begin{aligned} P_{1x} &= m_1 g, & P_{1y} &= 0, & P_{1z} &= 0, \\ P_{2x} &= m_2 g, & P_{2y} &= 0, & P_{2z} &= 0, \\ x_1 &= l_1 \cos \varphi_1, & x_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 &= l_1 \sin \varphi_1, & y_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \\ z_1 &= 0, & z_2 &= 0. \end{aligned}$$

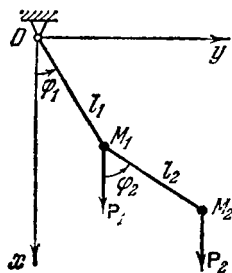


Рис. 18.16

Обобщенные силы найдем по формуле (18.29), написав ее в развернутом виде для каждой из величин Q_1 и Q_2 (q_1 и q_2 заменены на φ_1 и φ_2):

$$Q_1 = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1},$$

$$Q_2 = P_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} + P_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_2} + P_{1z} \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_2} + P_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} + P_{2y} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_2} + P_{2z} \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_2}.$$

Подставляя значения проекций сил и координат точек их приложения, получим

$$Q_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1,$$

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Второй способ. Вычислим сначала обобщенную силу Q_2 . Сообщим системе такое виртуальное перемещение, при котором угол φ_1 останется без изменения, а угол φ_2 получит приращение $\delta\varphi_2$ (рис. 18.17). При таком перемещении системы работу будет производить только одна сила P_2 (точка приложения силы P_1 осталась в прежнем положении).

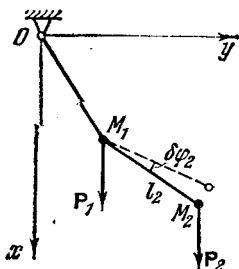


Рис. 18.17

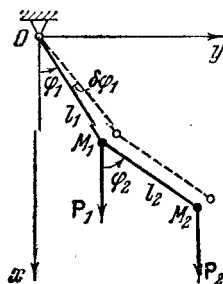


Рис. 18.18

Работу δA_2 силы P_2 на виртуальном перемещении $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$ вычислим как работу силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси M_1 . Момент силы P_2 относительно оси вращения второго стержня равен $-P_2 l_2 \sin \varphi_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2$. Поэтому

$$\delta A_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2 \delta\varphi_2.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi_2$ равен обобщенной силе

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Перейдем к вычислению обобщенной силы Q_1 . Для этого дадим системе виртуальное перемещение $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ (рис. 18.18). Работу силы P_1 вычислим по тому же правилу: момент силы P_1 относительно оси вращения первого стержня равен $-m_1 g l_1 \sin \varphi_1$. Следовательно, работа этой силы на виртуальном перемещении $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ равна $-m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \delta\varphi_1$.

Перемещения точек M_1 и M_2 одинаковы (так как при неизменном угле φ_2 второй стержень перемещается поступательно). Поэтому виртуальная работа силы P_2 получится из предыдущего выражения заменой m_1 на m_2 , т. е. равна $-m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \delta\varphi_1$.

Сумма работ сил P_1 и P_2 на этом виртуальном перемещении будет иметь вид

$$\delta A_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \delta\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin \varphi_1 \delta\varphi_1,$$

или

$$\delta A_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 \delta\varphi_1.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi_1$ равен обобщенной силе, соответствующей обобщенной координате φ_1 :

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1.$$

Третий способ. Активные силы P_1 и P_2 консервативны. Найдем потенциальную энергию Π , вычислив ее как работу сил P_1 и P_2 при перемещении системы из данного положения в горизонтальное:

$$\Pi = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2),$$

или

$$\Pi = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \quad (18.32)$$

Обобщенные силы Q_1 и Q_2 найдем теперь по формуле (18.30):

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Из самого определения видно, что обобщенные силы зависят не только от структуры системы и приложенных к ней активных сил, но также и от выбора обобщенных координат. Покажем это на примере двойного математического маятника.

Выберем в качестве обобщенных координат углы ψ_1 и ψ_2 , как это показано на рис. 18.19. Тогда потенциальная энергия системы определится равенством

$$\Pi = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \psi_1 - m_2 g l_2 \cos (\psi_1 + \psi_2).$$

Обобщенные силы вычислим по формуле (18.30):

$$Q_{\psi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_1}, \quad Q_{\psi_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_2}.$$

В результате дифференцирования получим

$$Q_{\psi_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \psi_1 - m_2 g l_2 \sin (\psi_1 + \psi_2).$$

$$Q_{\psi_2} = -m_2 g l_2 \sin (\psi_1 + \psi_2).$$

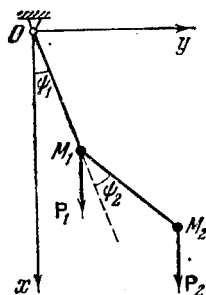


Рис. 18.19

Как и следовало ожидать, эти выражения для обобщенных сил отличаются от Q_1 и Q_2 .

Из рассмотренных примеров видно, что наиболее универсальным методом определения обобщенных сил является второй метод, основанный на вычислении элементарной работы, но он не всегда наиболее прост.

§ 18.7. Условия равновесия в обобщенных координатах

Согласно принципу виртуальных перемещений для равновесия материальной системы с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы при $v_k(0) = 0$ суммарная работа всех активных сил, приложенных к системе, на любом виртуальном перемещении равнялась нулю:

$$\delta A = 0.$$

Будем определять положение системы обобщенными координатами $q_1, \dots, q_s$. Тогда последнее уравнение согласно формуле (18.28) примет вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0. \quad (18.33)$$

Так как обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$ независимы и, следовательно, их вариации $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ при голономных связях произвольны, то из последнего уравнения следует, что все обобщенные силы $Q_1, \dots, Q_s$ равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_s = 0. \quad (18.34)$$

Действительно, докажем, например, что из равенства (18.33) следует $Q_s = 0$. Для этого возьмем такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_1 = \dots = \delta q_{s-1} = 0$, $\delta q_s \neq 0$. Подставляя эти значения для вариаций обобщенных координат в равенство (18.33), получим $Q_s \delta q_s = 0$. По условию $\delta q_s \neq 0$, следовательно, $Q_s = 0$. Аналогично устанавливаются остальные уравнения (18.34).

Уравнения (18.34) являются искомыми: для равновесия механической системы с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы системы равнялись нулю (начальные скорости всех точек считаем равными нулю).

Если силы, действующие на систему, консервативны, то согласно равенствам (18.30) уравнения (18.34) примут вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (18.35)$$

Рассмотрим пример.

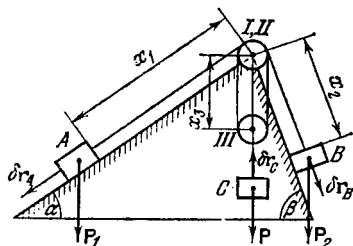


Рис. 18.20

Задача 18.7. Два груза A и B , находящиеся на гладких наклонных плоскостях, удерживают в равновесии груз C силы тяжести P при помощи троса, перекинутого через два соосных блока I и II и свободный блок III (рис. 18.20). Найти силы тяжести грузов P_1 и P_2 , если наклонные плоскости составляют с горизонтом углы α и β . Трением и массой блоков и троса пренебречь.

Нерастяжимый трос представляет собой голономную и стационарную связь, уравнение которой можно записать в виде

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = a. \quad (18.36)$$

Следовательно, система имеет две степени свободы. Примем x_1 и x_2 за обобщенные координаты. Варьируя уравнение связи (18.36), получим

$$\delta x_1 + \delta x_2 + 2\delta x_3 = 0;$$

отсюда

$$\delta x_3 = -1/2 (\delta x_1 + \delta x_2).$$

Сообщим грузам A и B виртуальные перемещения, указанные на чертеже, вычислим работу сил тяжести P_1 , P_2 и P на этом перемещении и в соответствии с принципом виртуальных перемещений приравняем ее нулю:

$$P_1 \cdot \delta r_A + P_2 \cdot \delta r_B + P \cdot \delta r_C = 0,$$

или

$$P_1 |\delta r_A| \sin \alpha + P_2 |\delta r_B| \sin \beta - P |\delta r_C| = 0.$$

Имеем

$$|\delta r_A| = \delta x_1, \quad |\delta r_B| = \delta x_2, \quad |\delta r_C| = |\delta x_3| = 1/2 (\delta x_1 + \delta x_2).$$

Подставляя в предыдущее равенство и группируя члены, получим

$$\left(P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2}\right) \delta x_1 + \left(P_2 \sin \beta - \frac{P}{2}\right) \delta x_2 = 0.$$

Так как δx_1 и δx_2 независимы, то остается приравнять нулю коэффициенты (обобщенные силы) при них:

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2} = 0, & P_1 &= \frac{P}{2 \sin \alpha}, \\ Q_2 &= P_2 \sin \beta - \frac{P}{2} = 0, & P_2 &= \frac{P}{2 \sin \beta}. \end{aligned} \quad (18.37)$$

Эту задачу можно решить, воспользовавшись консервативностью действующих на систему сил (сил тяжести).

Составим выражение для потенциальной энергии системы. Для этого вычислим работу, производимую силами тяжести при перемещении системы из данного положения в положение, когда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$:

$$\Pi = -P_1 x_1 \sin \alpha - P_2 x_2 \sin \beta + \left(\frac{a}{2} - x_3\right) P.$$

Заменяя x_3 из формулы (18.36), получим

$$\Pi = -P_1 x_1 \sin \alpha - P_2 x_2 \sin \beta + P \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Условия равновесия имеют вид (18.35):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -P_1 \sin \alpha + \frac{P}{2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -P_2 \sin \beta + \frac{P}{2} = 0.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (18.37).

Г л а в а XIX

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

§ 19.1. Общее уравнение динамики

Рассмотрим систему n материальных точек, движение которой ограничено h удерживающими идеальными и голономными связями. Воспользуемся принципом освобождаемости и заменим все связи их реакциями. Обозначим через F_h и R_h соответственно равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке M_h . Рассматривая точку M_h как свободную, движущуюся под действием сил F_h и R_h , применим к ней второй закон Ньютона:

$$m_h w_h = F_h + R_h,$$

или

$$F_k - m_k w_k + R_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (19.1)$$

Мысленно зафиксируем время t и дадим системе виртуальное перемещение δr_k ($k = 1, \dots, n$). Умножим каждое уравнение (19.1) скалярно на δr_k и сложим их:

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k w_k) \cdot \delta r_k + \sum_{k=1}^n R_k \cdot \delta r_k = 0.$$

По определению идеальных связей последняя сумма равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k w_k) \cdot \delta r_k = 0. \quad (19.2)$$

Это уравнение, называемое *общим уравнением динамики*, может быть прочитано следующим образом: при движении материальной системы с идеальными и удерживающими связями работа всех активных сил F_k и сил инерции $-m_k w_k$ на любом виртуальном перемещении системы равна нулю.

Если связи стационарны, то общее уравнение динамики представляет собой следствие принципа виртуальных перемещений и принципа Даламбера.

Аналогично принципу виртуальных перемещений, общее уравнение динамики (19.2) может быть непосредственно использовано для решения различных конкретных задач. Рассмотрим пример.

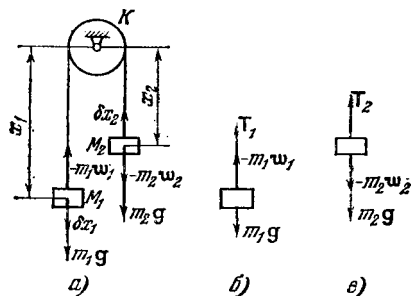


Рис. 19.1

Задача 19.1. Два тела M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 связаны между собой абсолютно гибкой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок K (рис. 19.1, а). Пренебрегая массой нити и блока, а также трением, определить закон движения грузов.

Для решения этой задачи с помощью общего уравнения динамики изобразим на рисунке все активные силы (силы тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$) и силы инерции. Предположим, что тело M_1 имеет ускорение w_1 , направленное вниз. Тогда сила инерции $-m_1 w_1$ первого груза будет направлена вверх. Так как нить нерастяжима, то уравнение связи имеет вид (см. рис. 19.1, а) $x_1 + x_2 = \text{const}$. Дифференцируя два раза по времени, получим $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$, или $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Это означает, что ускорение w_2 второго груза равно по модулю ускорению первого груза, но направлено в противоположную сторону, т. е. вверх. Тогда сила инерции второго груза будет направлена вниз (см. рис. 19.1, а), а ее модуль равен

$$m_2 w_2 = m_2 w_1 = m_2 w,$$

где w — общее значение модуля ускорений грузов.

Дадим системе виртуальное перемещение. Варьируя уравнение связей, получим $\delta x_1 + \delta x_2 = 0$; отсюда $\delta x_2 = -\delta x_1$.

Вычислим работу всех активных сил и сил инерции на этом виртуальном перемещении и приравняем ее нулю:

$$(m_1 g - m_1 \omega_1) \delta x_1 + (m_2 g + m_2 \omega_2) \delta x_2 = 0.$$

Принимая во внимание, что $\delta x_2 = -\delta x_1$ и $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, получим

$$m_1 (g - \omega) \delta x_1 - m_2 (g + \omega) \delta x_1 = 0.$$

Сокращая это уравнение на δx_1 и решая полученное уравнение относительно ω , найдем ускорение системы

$$\omega = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Применяя к каждому телу принцип Даламбера (рис. 19.1, б и в) и учитывая последнее равенство, легко получим, что натяжения нити в обеих ветвях одинаковы ($T_1 = T_2$). Это доказывает сделанное без доказательства соответствующее утверждение в задаче 7.1 (стр. 158).

§ 19.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Общее уравнение динамики (19.2) дает возможность составлять дифференциальные уравнения движения, не содержащие реакции идеальных связей. Для сравнительно простых систем непосредственное применение этого уравнения вполне оправдано, однако в более сложных случаях использование общего уравнения динамики приводит, как правило, к относительно сложным преобразованиям. Поэтому значительно удобнее пользоваться не общим уравнением динамики (19.2), а вытекающими из него уравнениями Лагранжа второго рода, в которых основные трудности преобразования преодолены в общем виде.

Для вывода этих уравнений воспользуемся общим уравнением динамики (19.2):

$$\sum_{k=1}^n \left(F_k - m_k \frac{dv_k}{dt} \right) \cdot \delta r_k = 0.$$

Подставим в это уравнение значение вариации δr_k радиуса-вектора из равенства (18.25):

$$\sum_{k=1}^n \left(F_k - m_k \frac{dv_k}{dt} \right) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Умножим это уравнение на -1 , изменим порядок суммирования и разобьем сумму на две части:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(m_k \frac{dv_k}{dt} - F_k \right) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \delta q_j &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n \left(m_k \frac{dv_k}{dt} - F_k \right) \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\sum_{k=1}^n m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь выражением для обобщенных сил (18.27), будем иметь

$$\sum_{j=1}^s \left[\sum_{k=1}^n m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (19.3)$$

Первый член, стоящий под знаком суммы, можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k v_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \right) - m_k v_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial r_k}{\partial q_j}, \quad (19.4)$$

в чем легко убедиться простой проверкой, применив правило дифференцирования произведения.

Найдем скорость v_k как производную радиуса-вектора r_k по времени, учтя при этом, что время t входит в выражение (18.22) не только явным образом, но и через обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$:

$$v_k = \frac{dr_k}{dt} = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial r_k}{\partial t}. \quad (19.5)$$

Производная обобщенной координаты по времени $\dot{q} = dq/dt$ называется *обобщенной скоростью*.

Дифференцируя обе части равенства (19.5) частным образом по обобщенной скорости, получим тождество

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_j}. \quad (19.6)$$

Составим теперь частную производную скорости v_k по обобщенной координате q_j , учитывая, что обобщенные координаты входят в правую часть равенства (19.5) через коэффициенты при обобщенных скоростях:

$$\frac{\partial v_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 r_k}{\partial t \partial q_j}.$$

Частная производная $\partial r_k / \partial q_j$ зависит от времени t явно и через обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$. Поэтому ее полная производная по времени равна

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_j \partial t}.$$

Сравнивая оба выражения и учитывая, что смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_j}. \quad (19.7)$$

Заменим в правой части равенства (19.4) частную производную $\frac{\partial r_k}{\partial q_j}$ ее выражением (19.6), а производную по времени $\frac{d}{dt} \frac{\partial r_k}{\partial q_j}$ ее выражением (19.7)

$$m_k \frac{dv_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k v_k \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_k v_k \cdot \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_j}.$$

Замечая, что

$$m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right), \quad m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right),$$

приведем последнее равенство к виду

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right).$$

Теперь уравнение (19.3) можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0,$$

или, разбивая сумму по k на две части и вынося знак производной за знак суммы,

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

По определению

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = T,$$

где T — кинетическая энергия системы. Поэтому общему уравнению динамики можно придать вид

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0.$$

Так как обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$ независимы и, следовательно, их вариации $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ при голономных связях произвольны, то из этого уравнения следует, что все скобки равны нулю (для доказательства достаточно повторить рассуждения, с помощью которых из равенства (18.33) были получены уравнения (18.34)):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (19.8)$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах, или, как принято их называть, *уравнения Лагранжа второго рода*; число уравнений равно числу степеней свободы *).

*) Уравнения (19.8) составлены для случая, когда число обобщенных координат равно числу степеней свободы. В тех случаях, когда имеются избыточные обобщенные координаты, форма уравнений Лагранжа усложняется (см. литературу, приведенную в примечании на стр. 380).

Эти уравнения представляют собой систему с обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат.

Если силы, действующие на материальную систему, потенциальные, то в соответствии с формулой (18.30) уравнения (19.8) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (19.9)$$

Если теперь ввести в рассмотрение функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и учесть, что $\partial \Pi / \partial \dot{q}_j \equiv 0$, то получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (19.10)$$

Уравнения (19.10) являются уравнениями Лагранжа второго рода для случая потенциальных сил.

§ 19.3. Задачи на составление уравнений Лагранжа второго рода

Прежде чем рассмотреть примеры на составление уравнений Лагранжа, сделаем несколько рекомендаций, вытекающих непосредственно из самой формы уравнений (19.8) и способа введения обобщенных координат.

Для составления уравнений Лагранжа второго рода нужно:

1) изобразить на чертеже все активные силы, действующие на систему; реакции идеальных связей изображать не следует; если имеются силы трения, то их следует присоединить к активным силам;

2) определить число степеней свободы и ввести обобщенные координаты;

3) вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты и скорости;

4) определить потенциальную энергию системы, если силы потенциальные;

5) найти обобщенные силы системы;

6) выполнить указанные в уравнениях Лагранжа (19.8) или (19.10) действия.

Задача 19.2. Тонкий однородный стержень длиной l имеет на концах ползуны A и B , которые скользят под действием силы тяжести стержня по направляющим OD и OE . Направляющие образуют прямой угол DOE , расположенный в вертикальной плоскости (рис. 19.2). Пренебрегая массой ползунов и силами трения, составить дифференциальное уравнение движения стержня и найти его угловую скорость, если направляющая OE горизонтальна.

Стержень имеет одну степень свободы, его положение будем определять одной обобщенной координатой — углом φ . На рис. 19.2 изображена только активная сила — сила тяжести mg ; реакции опор N_A и N_B изображать не следует, так как они не войдут в уравнение Лагранжа.

Кинетическую энергию T стержня вычислим по теореме Кёнига:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2,$$

где m — масса стержня, v_C — скорость его центра масс C , $I_C = \frac{1}{12} m l^2$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости движения.

Для вычисления скорости центра масс C найдем его координаты (см. рис. 19.2)

$$x_C = \frac{1}{2} l \sin \varphi, \quad y_C = \frac{1}{2} l \cos \varphi.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{x}_C = \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = -\frac{1}{2} l \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Отсюда

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \frac{1}{4} l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Внося значения для v_C^2 и I_C в выражение для кинетической энергии стержня, найдем

$$T = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \dot{\varphi}^2,$$

или

$$T = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Перейдем к вычислению обобщенной силы. Для этого найдем выражение потенциальной энергии системы, считая, что при горизонтальном положении стержня она принимает нулевое значение:

$$\Pi = \frac{1}{2} m g l \cos \varphi.$$

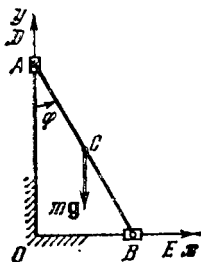


Рис. 19.2

Пользуясь формулой (18.30), определим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ :

$$Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m g l \sin \varphi.$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} \right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}.$$

Так как кинетическая энергия T от угла φ не зависит, то $\partial T / \partial \varphi = 0$. Внося полученные выражения в уравнение Лагранжа, получим

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} m g l \sin \varphi,$$

или,

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi. \quad (19.11)$$

Это — дифференциальное уравнение движения стержня, полученное вторым методом Лагранжа.

Найдем обобщенную скорость $\dot{\varphi}$. Для этого умножим обе части уравнения (19.11) на $d\varphi$:

$$\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{3g}{2l} \sin \varphi d\varphi.$$

Имеем

$$\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = d\dot{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = d\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right).$$

Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

$$d\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right) = -\frac{3g}{2l} d\cos \varphi.$$

Интегрируя и умножая обе части уравнения на 2, найдем

$$\dot{\varphi}^2 = -3\frac{g}{l} \cos \varphi + C.$$

Пусть стержень начинает движение из состояния покоя, составляя с вертикалью в начальный момент угол φ_0 . Тогда при $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = 0$ и, следовательно, $C = 3\frac{g}{l} \cos \varphi_0$. Подставляя это значение для C в последнее равенство, найдем угловую скорость стержня в функции угла φ :

$$\dot{\varphi}^2 = 3\frac{g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi). \quad (19.12)$$

Это соотношение можно получить более простым методом из закона сохранения полной механической энергии.

Задача 19.3. Определить закон изменения угловой скорости ω кривошипа OC эпициклического механизма, изображенного на рис. 19.3, если масса кривошипа равна m_1 , а масса сателлита m_2 . Кривошип считать однородным тонким стержнем, сателлит — однородным диском; вращающий момент $M_{вр} = M_0 - k\omega$, где M_0 и k — положительные постоянные и ω — угловая скорость кривошипа; момент трения $M_{тр}$ на оси сателлита считать постоянным; весь механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Система имеет одну степень свободы; за обобщенную координату возьмем угол φ поворота кривошипа. Система состоит из двух движущихся тел, поэтому ее кинетическая энергия

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 — кинетическая энергия кривошипа и T_2 — кинетическая энергия сателлита.

Так как кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси O , то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega^2.$$

В этом равенстве $I_1 = \frac{1}{3} m_1 (r + R)^2$ — момент инерции кривошипа относительно оси вращения, $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость кривошипа. Подставляя значение I_1 в выражение для T_1 , получим

$$T_1 = \frac{1}{6} m_1 (r + R)^2 \dot{\varphi}^2.$$

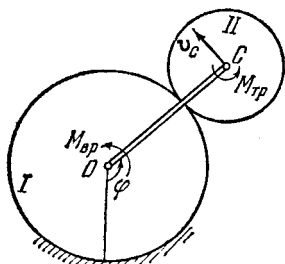


Рис. 19.3

Сателлит II движется плоскопараллельно, поэтому его кинетическую энергию T_2 найдем с помощью теоремы Кёнига:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2,$$

где v_C — скорость центра C масс сателлита, I_C — его момент инерции относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости движения, ω_2 — угловая скорость сателлита.

Имеем

$$v_C = (r + R) \dot{\varphi}, \quad I_C = \frac{1}{2} m_2 r^2, \quad \omega_2 = \frac{R+r}{r} \dot{\varphi} = \frac{R+r}{r} \dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (r + R)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \frac{(R+r)^2}{r^2} \dot{\varphi}^2,$$

или

$$T_2 = \frac{3}{4} m_2 (R + r)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Складывая полученные значения T_1 и T_2 , найдем кинетическую энергию T эпициклического механизма:

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \dot{\varphi}^2, \quad (19.13)$$

где приведенный момент инерции $I_{\text{пр}}$ системы равен *)

$$I_{\text{пр}} = (\frac{1}{3} m_1 + \frac{3}{2} m_2) (r + R)^2. \quad (19.14)$$

Обобщенная сила была определена в задаче 18.4 § 18.5 (см. формулу (18.31))

$$Q = M_{\text{вр}} - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} = M_0 - \kappa \omega - \frac{R}{r} M_{\text{тр}},$$

или

$$Q = M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} - \kappa \dot{\varphi}.$$

Воспользуемся теперь уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}} \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}} \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

После подстановки получаем дифференциальное уравнение движения эпициклического механизма

$$I_{\text{пр}} \ddot{\varphi} = M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} - \kappa \dot{\varphi}.$$

) В понятие «приведенная масса» или «приведенный момент инерции» можно вкладывать различный смысл. В данном примере приведенный момент инерции $I_{\text{пр}}$ эпициклического механизма получен при вычислении кинетической энергии. В примере § 9.6 приведенный момент инерции $I_{\text{пр}}^$ получен в результате вычисления момента количества движения системы. Сравнивая выражения (9.39) и (9.14), мы видим, что величина приведенного момента инерции зависит от метода его введения.

При постоянном моменте трения $M_{\text{тр}}$ это уравнение легко интегрируется (см. задачу 9.2). Считая, что движение началось из состояния покоя, получим

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{\kappa} \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{I_{\text{пр}}} t} \right).$$

С течением времени при $t \rightarrow \infty$ второй член в скобках стремится к нулю и, следовательно, угловая скорость ω кривошипа стремится к предельному значению

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{1}{\kappa} \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}} \right).$$

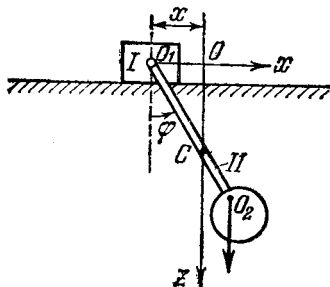


Рис. 19.4

Задача 19.4. Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из тела I , перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и маятника II , подвешенного к телу I (рис. 19.4). Масса тела I равна M_I , масса маятника M_2 , момент инерции маятника относительно оси подвеса I , расстояние от центра тяжести O_2 маятника до оси подвеса h . Составить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника и, считая угол отклонения маятника от вертикали малым, определить закон движения, если начальные скорости равны нулю.

Система имеет, очевидно, две степени свободы. За обобщенные координаты выберем абсциссу x тела I и угол φ отклонения маятника от вертикали. Кинетическая энергия T системы состоит из суммы кинетической энергии T_I и T_{II} тел I и II :

$$T = T_I + T_{II}.$$

Тело I движется поступательно, поэтому

$$T_I = \frac{1}{2} M_I \dot{x}^2.$$

Скорость точки подвеса маятника равна $\dot{x}$. Кинетическая энергия такого маятника была вычислена в § 10.2 (см. формулу (10.15)). В обозначениях данной задачи будем иметь

$$T_{II} = \frac{1}{2} M_2 \dot{x}^2 + M_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} (M_I + M_2) \dot{x}^2 + M_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -M_2 g h \cos \varphi.$$

Уравнения Лагранжа для данной системы имеют такой вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad L = T - \Pi.$$

Вычислим соответствующие величины:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_I + M_2) \dot{x} + M_2 h \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi} + M_2 h \dot{x} \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \ddot{\varphi} + M_2 h \ddot{x} \cos \varphi - M_2 h \dot{x} \sin \varphi \dot{\varphi} + M_2 h \dot{x} \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -M_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - M_2 g h \sin \varphi.$$

После подстановки и очевидных упрощений получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt} [(M_1 + M_2) \dot{x} + M_2 h \dot{\varphi} \cos \varphi] = 0, \quad I \ddot{\varphi} + M_2 h \ddot{x} \cos \varphi + M_2 h g \sin \varphi = 0.$$

Интегрируя первое уравнение, найдем

$$(M_1 + M_2) \dot{x} + M_2 h \dot{\varphi} \cos \varphi = C_1.$$

По предположению $\dot{x} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$. Следовательно, $C_1 = 0$ и последнее равенство принимает вид

$$(M_1 + M_2) \dot{x} + M_2 h \dot{\varphi} \cos \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} [(M_1 + M_2) x + M_2 h \sin \varphi] = 0.$$

Отсюда

$$(M_1 + M_2) x + M_2 h \sin \varphi = C_2.$$

Пусть при $t = 0$ маятник отклонен на угол φ_0 . Воспользуемся произвольностью выбора начала координат O и подберем его так, чтобы при $t = 0$

$$(M_1 + M_2) x_0 + M_2 h \sin \varphi_0 = 0.$$

Тогда $C_2 = 0$ и из последнего равенства найдем

$$(M_1 + M_2) x + M_2 h \sin \varphi = 0 \quad \text{или} \quad x = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} h \sin \varphi.$$

Эти равенства имеют простой механический смысл: центр тяжести S системы ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил движется по вертикали (при данном выборе начала координат эта вертикаль совпадает с осью z).

Перейдем ко второму дифференциальному уравнению, считая угол φ малым. Так как для малых углов $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, то будем иметь

$$x = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} h \varphi.$$

Дифференцируя два раза получим

$$\ddot{x} = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} h \ddot{\varphi}.$$

После подстановки во второе дифференциальное уравнение значений $\ddot{x}$, $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, найдем

$$\left(I - \frac{M_2^2}{M_1 + M_2} h^2 \right) \ddot{\varphi} + M_2 h g \varphi = 0.$$

Легко показать, что коэффициент при $\ddot{\varphi}$ всегда положителен. Действительно, согласно (12,14)

$$I = I_{O_1} + M_2 h^2,$$

где I_{O_1} — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно оси подвеса. Имеем

$$I - \frac{M_2^2}{M_1 + M_2} h^2 = I_{O_1} + M_2 h^2 - \frac{M_2^2}{M_1 + M_2} h^2 = I_{O_1} + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} h^2 > 0$$

(для математического маятника $h = l$ и $I_{O_1} = 0$, где l — длина маятника).

Поэтому угол φ изменяется по гармоническому закону (учтены начальные условия $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

где круговая частота k определяется равенством

$$k^2 = \frac{M_2 h g}{I_{O_2} + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} h^2}.$$

Центр тяжести маятника O_2 перемещается по эллипсу (читатель докажет без труда это самостоятельно), чем и объясняется название маятника.

Задача 19.5. Составить дифференциальные уравнения движения двойного математического маятника.

Двойной математической маятник (см. рис. 18.16) имеет две степени свободы. За обобщенные координаты возьмем углы φ_1 и φ_2 . Система состоит из двух материальных точек, поэтому ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

где m_1 и m_2 — массы точек, а v_1 и v_2 — их скорости.

Координаты x_1 , y_1 и x_2 , y_2 точек M_1 и M_2 найдем, пользуясь рис. 18.16:

$$x_1 = l_1 \cos \varphi_1, \quad x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2,$$

$$y_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \quad \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2,$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2.$$

Тогда

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2,$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

и кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (19.15)$$

Обобщенные силы были найдены в задаче 18.5 § 18.5:

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1, \quad Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2. \quad (19.16)$$

Перейдем к составлению уравнений Лагранжа, которые для данной задачи имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_2.$$

Составим сначала уравнение для φ_1 . Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 +$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2.$$

Подставим полученные выражения в уравнение Лагранжа для координаты φ_1 :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \\ - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) (\dot{\varphi}_2^2 - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) - \\ - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Для обеих частей уравнения на l_1 и приводя подобные члены, окончательно получим (мы выписали сразу второе уравнение, которое получается аналогичным методом)

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \\ - m_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2^2 + (m_1 + m_2) g \sin \varphi_1 = 0, \quad (19.18) \\ l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + g \sin \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений движения двойного математического маятника связано с большими трудностями, однако, если считать углы отклонения φ_1 и φ_2 малыми, то решение упрощается и может быть доведено до конца. Задачи такого рода мы будем рассматривать в главе XX.

§ 19.4. Особенности применения уравнений Лагранжа второго рода к системам с неидеальными и неудерживающими связями

Рассмотренные примеры хорошо иллюстрируют достоинства метода Лагранжа, состоящие в следующем.

Этот метод применим для широкого класса материальных систем; он экономичен в том смысле, что не требует введения дополнительных координат и реакций идеальных связей. Наконец, процедура применения метода Лагранжа одинакова во всех задачах, что имеет большое значение, так как не требует от исследователя подчас тонких рассуждений, в которых допустить ошибку значительно легче, чем в математических операциях.

Полезно отметить еще одно достоинство метода Лагранжа. По существу этот метод энергетический. Это обстоятельство дает возможность использовать метод Лагранжа в теоретической физике для анализа не только механических, но и других физических систем.

Необходимо остановиться и на некоторых особенностях метода Лагранжа, создающих подчас дополнительные трудности. Уравнения Лагранжа получены для систем с идеальными, удерживающими и голономными связями. Это не означает, что уравнения Лагранжа нельзя использовать для систем с неудерживающими или неидеальными связями. Но если для системы с удерживающими и идеальными связями уравнения Лагранжа полностью решают задачу об определении закона движения, то для системы с неудерживающими или неидеальными связями одних уравнений Лагранжа, составленных для независимых обобщенных координат, может оказаться недостаточно. Поясним сказанное на задаче 19.2 § 19.3, рассмотрев три случая.

1. С в я з и и д е а л ь н ы е и у д е р ж и в а ю щ и е. На концах стержня шарнирно укреплены перемещающиеся без трения

ползуны, удерживающие стержень на направляющих (см. рис. 19.2). Этот случай разобран на стр. 395. Так как связи идеальные, то их реакции учитывать не нужно (поэтому они не изображены на рис. 19.2). Кинетическая энергия T и обобщенная сила Q_1 определены равенствами

$$T = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad Q_1 = \frac{1}{2} m g l \sin \varphi. \quad (19.19)$$

Уравнение Лагранжа для этой задачи приводится к виду

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi. \quad (19.20)$$

Это уравнение, справедливое для всех φ , полностью решает задачу, так как для его интегрирования не нужно знать ничего, кроме начальных условий.

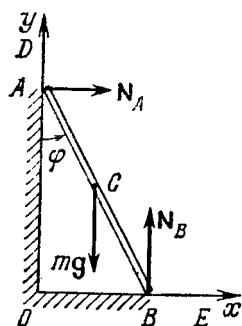


Рис. 19.5

2. Связи идеальные и не удерживающие. Стержень скользит без трения по сторонам прямого угла (рис. 19.5). До тех пор пока стержень опирается на обе стороны, связь не нарушена и движение стержня описывается тем же уравнением Лагранжа (19.20). Однако сразу пользоваться этим уравнением практически нельзя, так как неизвестно, произойдет или нет отрыв стержня от стенки. Поэтому прежде всего нужно определить возможность отрыва, затем, если отрыв действительно происходит, то нужно определить, при каком угле это произойдет.

Возможность отрыва определяется по обращению в нуль соответствующей нормальной реакции. Одного уравнения Лагранжа (19.20) для этих целей недостаточно, так как оно не содержит нормальных реакций *). Естественнo, что дополнительно к этому уравнению нужно составить еще уравнение, которое содержало бы реакцию N_A (отрыв может произойти, конечно, от вертикальной стенки). Это можно сделать различными методами, но в данном случае проще всего приводит к цели теорема о движении центра масс:

$$m \mathbf{w}_G = \mathbf{F}^e.$$

Проектируя это равенство на ось x и учитывая рис. 19.5, получим

$$m \ddot{x}_C = N_A. \quad (19.21)$$

Воспользуемся очевидным равенством, устанавливающим связь между координатами x_C и φ (см. рис. 19.5):

$$x_C = \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

*) Существуют методы, позволяющие определять реакции идеальных связей с помощью видоизмененных уравнений Лагранжа второго рода (см. Л у р ь е А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, § 7.12, 7.13). Эти методы сложны и в настоящем руководстве не изучаются.

Отсюда найдем

$$\dot{x}_G = \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{x}_G = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Пользуясь теперь уравнением Лагранжа (19.20) и вытекающим из него первым интегралом (19.12)

$$\dot{\varphi}^2 = 3 \frac{g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi),$$

выразим $\ddot{x}_G$, а затем N_A через угол φ (предполагается, что $\dot{\varphi} = 0$ при $t = 0$):

$$\ddot{x}_G = \frac{3}{4} g \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0),$$

$$N_A = \frac{3}{4} mg \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

Отсюда видно, что при угле φ_1 , определяемом равенством

$$\cos \varphi_1 = \frac{2}{3} \cos \varphi_0,$$

нормальная реакция обращается в нуль, т. е. происходит отрыв стержня от вертикальной стенки.

Таким образом, уравнение Лагранжа (19.20) определяет закон движения стержня не для всех φ , как это было в первом случае, а только для углов, удовлетворяющих неравенству

$$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1.$$

С момента отрыва от вертикальной стенки стержень будет иметь не одну, а две степени свободы (по предположению движение происходит в вертикальной плоскости), для определения движения его в новых условиях нужно составить уже два дифференциальных уравнения. В качестве упражнения предлагаем читателю определить угловую скорость и положение конца A стержня в момент его падения на горизонтальную плоскость.

3. С в я з и у д е р ж и в а ю щ и е и н е и д е а л ь н ы е. Учтем силу трения F_A в вертикальном ползуне A (для простоты выкладок трением в ползуне B пренебрегаем) (рис. 19.6). Будем считать, что сила трения пропорциональна нормальному давлению:

$$F_{yA} = f N_A,$$

где f — коэффициент трения (предполагается, что ползун A движется вниз, поэтому сила трения F_A направлена вверх).

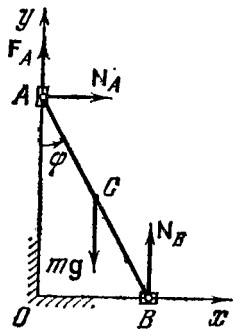


Рис. 19.6

Положение стержня по-прежнему определяется одной обобщенной координатой — углом φ , поэтому выражение для кинетической энергии стержня не изменится. Для составления уравнения Лагранжа нужно определить обобщенную силу Q , соответствующую углу φ , с учетом силы трения F_A . Дадим стержню AB виртуальное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим суммарную работу δA силы тяжести mg и силы трения F_A на этом перемещении (работа нормальных реакций N_A и N_B равна нулю):

$$\delta A = \delta A_i + F_{yA} \delta y_A,$$

где $\delta A_i = Q_i \delta\varphi = \frac{1}{2} mgl \sin \varphi \cdot \delta\varphi$ — работа силы тяжести mg (использовано значение для Q_1 , полученное в первом случае).

Имеем (см. рис. 19.6)

$$y_A = l \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$\delta y_A = -l \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Подставим в δA значения δA_i , δy_A , F_{yA} и сгруппируем члены:

$$\delta A = l (\frac{1}{2} mg - f N_A) \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Обобщенная сила равна коэффициенту при $\delta\varphi$:

$$Q = l (\frac{1}{2} mg - f N_A) \sin \varphi.$$

Составим теперь уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

учитывая, что $T = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2$. После подстановки и выполнения необходимых действий найдем

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = l (\frac{1}{2} mg - f N_A) \sin \varphi.$$

Это дифференциальное уравнение движения стержня содержит неизвестную величину N_A . Поэтому необходимо составить еще одно уравнение для определения нормальной реакции N_A . Для этого, так же как и в предыдущем случае, применим теорему о движении центра масс относительно оси x (см. равенство (19.21)):

$$m \ddot{x}_C = N_A.$$

Воспользуемся полученным ранее результатом

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Отсюда

$$N_A = \frac{ml}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Внесем это выражение для N_A в найденное уравнение Лагранжа:

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = \frac{l}{2} mg \sin \varphi - \frac{1}{2} ml^2 f (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \sin \varphi.$$

После очевидных преобразований получим

$$\left(1 + \frac{3}{4} f \sin 2\varphi\right) \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \left(\frac{g}{l} + f \dot{\varphi}^2 \sin \varphi\right) \sin \varphi.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано приближенными методами.

В заключение отметим, что общность способа составления уравнений Лагранжа, доведенная до математического алгоритма, приводит иногда к формальному анализу без ясного понимания взаимодействия сил. Поэтому в тех случаях, когда необходимо провести анализ сил, возникающих в системе при ее движении, целесообразно пользоваться общими теоремами динамики либо комбинировать эти теоремы с уравнениями Лагранжа, как это было сделано нами в этом параграфе при рассмотрении второго случая.

§ 19.5. Выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты

Для дальнейшего нам понадобится значение кинетической энергии T материальной системы, выраженной через обобщенные скорости и координаты.

Кинетическая энергия T материальной системы определяется равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2.$$

Воспользуемся тождеством $v_k^2 = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k$ и заменим вектор скорости $\mathbf{v}_k$ точки M_k его значением по формуле (19.5). Тогда выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Возведем скобку в квадрат и сгруппируем отдельно члены второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, члены первой степени относительно тех же величин и члены, не содержащие обобщенные скорости. Обозначив первую группу членов через T_2 , вторую через T_1 , а третью через T_0 , получим

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (19.22)$$

где

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \right)^2 \dot{q}_s^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2 \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_{s-1}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s \right], \\
 T_1 &= \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \dot{q}_s \right), \\
 T_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{19.23}$$

Введем обозначения

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}, \quad b_i = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}. \tag{19.24}$$

Тогда функции T_2 и T_1 можно будет записать в следующей форме:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{19.25}$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^s b_i \dot{q}_i, \tag{19.26}$$

причем из самого определения коэффициентов a_{ij} (они называются *коэффициентами инерции*) видно, что они симметричны относительно своих индексов:

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{19.27}$$

В этих выражениях коэффициенты a_{ij} и b_i зависят от обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_s$ и времени t , но не зависят от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$.

Равенства (19.22), (19.25) и (19.26) показывают, что в общем случае кинетическую энергию материальной системы можно представить суммой квадратичной T_2 , линейной T_1 и нулевой T_0 форм относительно обобщенных скоростей.

При стационарных связях для движения в инерциальных осях время t явно не входит в выражение радиуса-вектора $\mathbf{r}_j$. Все частные производные $\partial \mathbf{r}_k / \partial t$ будут равны нулю, и вместе с ними обратятся в нуль слагаемые T_1 и T_0 . Поэтому для этого случая кинетиче-

ская энергия системы представляет квадратичную форму обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (19.28)$$

коэффициенты которой явным образом не зависят от времени.

Напомним, что кинетическая энергия системы всегда положительна (как сумма произведений положительных величин $m_j v_j^2/2$) и в нуль она может обратиться только при условии, что система находится в покое. Поэтому *квадратичная форма (19.28) всегда определена положительна.*

§ 19.6. Обобщенный интеграл энергии

Как известно, если силы, действующие на материальную систему, потенциальные, то имеет место интеграл энергии — сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная (см. § 10.6):

$$T + \Pi = h.$$

При выводе этого интеграла предполагалось, что движение изучается относительно инерциальной системы отсчета, а связи стационарны. Если же в потенциальной системе связи зависят явным образом от времени t или движение изучается в неинерциальной системе отсчета, то в общем случае интеграла энергии не существует. Это объясняется тем, что при нестационарных связях движение материальной системы частично осуществляется за счет сил, изменяющих связи, которые при анализе движения не учитываются.

Мы покажем, что если кинетическая энергия T системы, определенная равенством (19.22), не зависит явным образом от времени t , то дифференциальные уравнения движения допускают обобщенный интеграл энергии.

Пусть силы, действующие на систему, потенциальны. Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Умножим каждое уравнение на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения:

$$\sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (19.29)$$

Потенциальная энергия Π зависит от времени t только через обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$. Поэтому

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Воспользуемся очевидным тождеством (его легко проверить непосредственно)

$$\sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j.$$

Кинетическая энергия T равна сумме трех однородных функций относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$ (см. формулу (19.22)):

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях будем иметь *)

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2 + T_1.$$

С учетом полученных выражений равенство (19.29) принимает следующий вид:

$$2 \frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j = - \frac{d\Pi}{dt}.$$

Кинетическая энергия T зависит от времени через обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$ и обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ (по условию от времени t она явно не зависит). Поэтому

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Таким образом, последнее равенство приводится к виду

$$2 \frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt},$$

или, снова пользуясь равенством (19.22),

$$2 \frac{dT_2}{dt} + \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_2}{dt} - \frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_0}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt}.$$

*) Напомним эту теорему: сумма произведений частных производных однородной функции на соответствующие переменные равна произведению самой функции на степень ее однородности.

Приводя подобные члены, получим

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0 + \Pi) = 0, \quad (19.30)$$

откуда

$$T_2 - T_0 + \Pi = h, \quad (19.31)$$

где h — постоянная интегрирования.

Равенство (19.31) и представляет *обобщенный интеграл энергии Якоби*.

Если связи стационарны и движение изучается относительно инерциальных осей, то $T_0 = 0$ и обобщенный интеграл энергии вырождается в обычный интеграл $T + \Pi = h$.

Проиллюстрируем общую теорию простым примером.

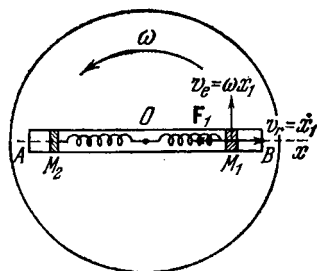


Рис. 19.7

Задача 19.6. На рис. 19.7 изображена схема центробежного регулятора. Два одинаковых тела M_1 и M_2 , массой m каждое, могут перемещаться в пазу AB . Одинаковые пружины жесткости c неподвижно укреплены на вертикальной оси вращения O регулятора, а вторыми концами прикреплены к телам M_1 и M_2 . Составить дифференциальные уравнения движения и показать, что при равномерном вращении регулятора они допускают обобщенный интеграл энергии.

Прежде всего заметим, что движения тел M_1 и M_2 независимы. Поэтому достаточно рассмотреть движение одного из них, например M_1 . Положение тела M_1 определяется координатой $x_1 = OM_1$. Тело участвует в сложном движении, его относительная скорость равна $\dot{x}_1$, а переносная $x_1\omega$. Поэтому абсолютная скорость v_1 будет определяться равенством

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \omega^2 x_1^2,$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2.$$

В рассматриваемом случае $T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2$, $T_1 = 0$ и $T_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2$. При постоянной угловой скорости ω кинетическая энергия не зависит явным образом от времени.

На тело M_1 действуют две активные потенциальные силы: сила тяжести mg и сила упругости пружины F_1 . Первую силу учитывать не нужно, так как по условию центробежный регулятор вращается в горизонтальной плоскости (ось вращения вертикальна). Потенциальная сила упругости равна

$$\Pi = \frac{1}{2}c(x_1 - l)^2,$$

где l — длина пружины в недеформированном состоянии.

Следовательно, рассматриваемая система удовлетворяет всем условиям существования обобщенного интеграла энергии (19), который в данном случае принимает вид (множитель $1/2$ включен в постоянную интегрирования h)

$$m\dot{x}_1^2 - m\omega^2 x_1^2 + c(x_1 - l)^2 = h.$$

Было бы грубой ошибкой считать, что здесь имеет место равенство $T + \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - l)^2 = h$. Физически несправедливость этого ра-

венства объясняется весьма просто — переносное движение тела M_1 осуществляется за счет неучитываемых нами сил, приводящих в равномерное вращение регулятор.

Составим теперь уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}.$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m \ddot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = m \omega^2 x_1, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c (x_1 - l).$$

Внося найденное в уравнение Лагранжа, получим

$$m \ddot{x}_1 - m \omega^2 x_1 = -c (x_1 - l), \text{ или } m \ddot{x}_1 = -c (x_1 - l) + m \omega^2 x_1.$$

Это дифференциальное уравнение движения тела M_1 во вращающемся пазу AB , справедливое как для постоянных, так и для переменных значений угловой скорости ω , можно получить, пользуясь обычным дифференциальным уравнением относительного движения, причем слагаемое $m \omega^2 x_1$ играет в этом случае роль переносной силы инерции (кориолисова сила инерции перпендикулярна к оси x , и ее проекция на эту ось равна нулю). Обобщенный интеграл энергии при $\omega = \text{const}$ получается из этого уравнения непосредственным интегрированием (обе части уравнения нужно умножить на dx_1 и воспользоваться тождеством $\dot{x}_1 dx_1 = d\dot{x}_1$).

Глава XX

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ И ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

§ 20.1. Определение положений равновесия

Теория колебаний, начав свое развитие с исследования движения математического маятника, превратилась в широко разветвленную самостоятельную дисциплину с весьма сложным математическим аппаратом. Теория колебаний быстро развивается, что объясняется значением ее в современной технике.

В настоящей главе мы рассмотрим простейшие вопросы колебаний механических систем, а именно — малые колебания систем с одной и двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия.

Рассмотрим вначале материальную систему с идеальными, стационарными и голономными связями, положение которой определяется s независимыми обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$. Для изучения колебаний около положения равновесия необходимо, очевидно, прежде всего найти те положения, в которых система может находиться в равновесии.

В § 18.7 было показано, что в положении равновесия все обобщенные силы системы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (20.1)$$

Для консервативной системы эти равенства принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (20.2)$$

Будем считать, что обобщенные силы зависят только от обобщенных координат. Тогда равенства (20.1) или (20.2) можно рассматривать как уравнения относительно $q_1, q_2, \dots, q_s$. Решая эти уравнения, найдем те положения, в которых система может находиться в равновесии. Если обобщенные силы зависят не только от обобщенных координат, но и от обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$, то при решении уравнений (20.1) все обобщенные скорости нужно приравнять к нулю.

Во многих случаях положения равновесия можно определить из элементарных соображений или с помощью обычных уравнений статики.

Задача 20.1. Определить возможные положения равновесия маятника со спиральной пружиной жесткости c (рис. 20.1), масса маятника m , расстояние от оси подвеса O до центра тяжести C равно l . При верхнем вертикальном положении маятника спиральная пружина находится в недеформированном состоянии. Массой пружины и трением горизонтально расположенного цилиндрического подшипника пренебречь.

Система имеет одну степень свободы; в качестве обобщенной координаты удобно принять угол φ .

Потенциальная энергия системы Π складывается из потенциальной энергии Π_1 силы тяжести и потенциальной энергии Π_2 спиральной пружины. За нулевое примем верхнее вертикальное положение маятника. Тогда при переходе маятника из данного положения в нулевое работа A_1 силы тяжести будет равна потенциальной энергии Π_1 . Имеем

$$\Pi_1 = A_1 = -mg \cdot DE = -mgl(1 - \cos \varphi).$$

Опыт показывает, что для закручивания спиральной пружины на не очень большой угол φ требуется приложить момент M , пропорциональный углу закручивания:

$$M = c\varphi.$$

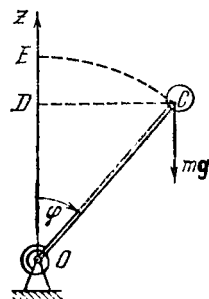


Рис. 20.1

Коэффициент c называется *коэффициентом жесткости на кручение*, его размерность равна размерности момента силы (угол φ измеряется, конечно, в радианах).

Момент, создаваемый пружиной, равен $-c\varphi$, и, следовательно, работа A_2 (потенциальная энергия Π_2) сил упругости такой пружины при переходе из данного положения в нулевое определится равенством

$$\Pi_2 = A_2 = -c \int_{\varphi}^0 \varphi d\varphi,$$

или

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}c\varphi^2, \quad (20.3)$$

т. е. *потенциальная энергия спиральной пружины, работающей на закручивание, равна половине коэффициента ее жесткости, умноженной на квадрат угловой деформации.*

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = mgl \cos \varphi + \frac{1}{2}c\varphi^2 - mgl.$$

Составим уравнение равновесия (20.2):

$$\partial\Pi/\partial\varphi = 0$$

или, подставляя значение потенциальной энергии Π , будем иметь

$$-mgl \sin \varphi + c\varphi = 0 \quad (20.4)$$

(это уравнение легко получить из условия равновесия рычага). Корни уравнения (20.4) определяют возможные положения равновесия маятника.

После того как составлено уравнение равновесия, задачу можно поставить двумя различными способами.

1. Как выбрать параметры системы, чтобы маятник мог находиться в заданном положении равновесия? Эта задача решается элементарно. Действительно, пусть требуется, чтобы в одном из возможных положений равновесия маятник составлял с вертикалью угол φ_0 . Подставляя это значение угла φ в уравнение (20.4), получим

$$c\varphi_0 - mgl \sin \varphi_0 = 0,$$

откуда

$$\frac{mgl}{c} = \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

В частности, если требуется, чтобы пружина удерживала маятник в горизонтальном положении ($\varphi_0 = \pi/2$), будем иметь

$$\frac{mgl}{c} = \frac{\pi}{2}. \quad (20.5)$$

При таком соотношении параметров (m , l , c) маятник может находиться в равновесии, занимая горизонтальное положение.

2. Задача может быть обращена, а именно: все параметры (m , l и c) заданы; требуется определить возможные положения равновесия маятника.

Как уже отмечалось, возможные положения равновесия определяются корнями уравнения равновесия (20.4). Представим это уравнение в виде

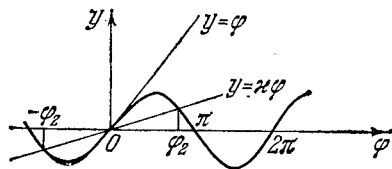


Рис. 20.2

$$\sin \varphi = \frac{c}{mgl} \varphi,$$

или

$$\sin \varphi = \kappa \varphi, \quad (20.6)$$

где новый параметр κ определен равенством

$$\kappa = \frac{c}{mgl}. \quad (20.7)$$

Один корень уравнения (20.6) очевиден: $\varphi_1 = 0$. Этому корню отвечает верхнее вертикальное положение равновесия маятника.

Для определения других возможных положений равновесия нужно найти остальные корни трансцендентного уравнения (20.6). Это можно осуществить различными методами, например табличным или графическим. Поясним второй способ. Составим два уравнения:

$$y = \sin \varphi, \quad y = \kappa \varphi$$

и построим их графики (рис. 20.2).

Очевидно, что второй корень φ_2 определяется абсциссой точки пересечения обоих графиков, причем каждому положительному корню φ_2 отвечает равный по модулю, но отрицательный корень $-\varphi_2$. Физически это означает, что положения равновесия маятника могут быть как слева, так и справа от вертикали. Кроме того, видно, что,

при $\kappa > 1$ ($c > mgl$) прямая $y = \kappa\varphi$ не пересекается с синусоидой $y = \sin \varphi$. В этом случае уравнение (20.6) имеет один тривиальный корень $\varphi_1 = 0$.

Легко показать (мы не будем останавливаться на подробностях), что при $\kappa = \cos \varphi_0 = (\sin \varphi_0)/\varphi_0$ прямая $y = \kappa\varphi$ коснется второй волны синусоиды. В этом случае $\kappa \approx 0,129$ и уравнение будет иметь три корня: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 \approx 2,286$ ($130^\circ 59'$) и $\varphi_3 = \varphi_0 \approx 7,725$ ($442^\circ 37'$), причем третий корень двойной. При $\kappa < 0,129$ прямая $y = \kappa\varphi$ может пересечь не только вторую, но и следующие волны синусоиды, т. е. маятник будет иметь больше трех положений равновесия. Мы будем считать, что $\kappa > 0,129$ *).

Таким образом, если $\kappa > 1$, то маятник имеет одно верхнее вертикальное положение равновесия ($\varphi_1 = 0$), при $0,129 < \kappa < 1$ маятник имеет два положения равновесия.

§ 20.2. Устойчивость положения равновесия.

Теорема Лагранжа — Дирихле. Критерий Сильвестра

Найдя положения, в которых система может, вообще говоря, находиться в равновесии, нужно определить затем, какие из этих положений практически реализуемы или, иначе говоря, какие из этих положений являются устойчивыми, а какие неустойчивыми. Поясним сказанное простым примером. Обычный физический маятник с горизонтальной осью вращения имеет два возможных положения равновесия — верхнее и нижнее. Очевидно, что верхнее положение равновесия маятника практически нельзя осуществить, так как оно неустойчиво, а нижнее положение устойчиво и оно легко реализуемо.

Вопрос об устойчивости положения равновесия является частным случаем задачи об устойчивости движения. Эта задача имеет в современной технике большое значение (двигатель должен устойчиво удерживать заданный режим работы, самолет, ракета, корабль должны устойчиво сохранять заданное направление движения и т. п.). Эти вопросы выходят за рамки настоящего курса, поэтому желающим ознакомиться с общей задачей устойчивости движения мы рекомендуем обратиться к специальным руководствам **). Здесь же мы ограничимся только основными определениями и изложением теоремы Лагранжа — Дирихле.

Не нарушая общности, будем считать, что в рассматриваемом положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю (для этого достаточно отсчет их вести от положения равновесия). Выведем систему из равновесного состояния, сообщив в начальный момент времени $t = t_0$ небольшие по модулю значения обобщенным координатам и их скоростям $q_{01}, \dots, q_{0s}; \dot{q}_{01}, \dots, \dot{q}_{0s}$ (эти величины называются *возмущениями*).

Обозначим значения обобщенных координат и их скоростей при дальнейшем движении системы через $q_1(t), \dots, q_s(t); \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t)$. Выберем теперь $2s$ произвольных сколь угодно малых положительных

*) При малых значениях параметра κ корни будут велики. Им соответствуют положения равновесия при угле закручивания, большем одного полного поворота маятника. При таких углах формула (20.3) может оказаться несправедливой.

**) Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950; Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Физматгиз, 1955; М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966; М е р к и н Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

ных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s; \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_s$. Если по этим числам можно найти другие $2s$ положительных чисел $\delta_1, \dots, \delta_s; \delta'_1, \dots, \delta'_s$ таких, что для всех возмущений, удовлетворяющих условиям

$$|q_{01}| \leq \delta_1, \dots, |q_{0s}| \leq \delta_s; |\dot{q}_{01}| \leq \delta'_1, \dots, |\dot{q}_{0s}| \leq \delta'_s,$$

и для всех $t \geq t_0$ будут выполняться неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon_1, \dots, |q_s(t)| \leq \varepsilon_s; |\dot{q}_1(t)| \leq \varepsilon'_1, \dots, |\dot{q}_s(t)| \leq \varepsilon'_s,$$

то рассматриваемое положение равновесия называется *устойчивым*, в противном случае — *неустойчивым*.

Если при устойчивом равновесии все обобщенные координаты и скорости с течением времени стремятся к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_k(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_k(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

то рассматриваемое положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*. (Эти определения устойчивости равновесия представляют следствия из общих определений устойчивости движения, принадлежащих А. М. Ляпунову.)

Достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы определяются следующей теоремой Лагранжа—Дирихле: *если в положении изолированного равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво*.

Доказательство этой теоремы может быть получено как простое следствие теоремы Ляпунова об устойчивости движения (см. литературу, цитируемую на стр. 413).

Согласно теореме Лагранжа—Дирихле для доказательства устойчивости равновесия консервативной системы достаточно убедиться в том, что потенциальная энергия имеет в рассматриваемом положении минимум. Для системы с одной степенью свободы определение минимума решается элементарно. Действительно, в этом случае производная второго порядка от потенциальной энергии по обобщенной координате, вычисленная в положении равновесия, должна быть положительна (предполагается, что она существует):

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 > 0. \quad (20.8)$$

Для консервативной системы, имеющей s степеней свободы, устойчивость рассматриваемого положения равновесия также определяется из условия минимума потенциальной энергии. В этом случае критерий минимума имеет более сложный вид. Установить его можно следующим образом.

Рассмотрим одно из положений равновесия системы. Не нарушая общности, будем считать, что в этом положении потенциальная энергия равна нулю:

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (20.9)$$

(это можно сделать, так как потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной постоянной).

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена по степеням $q_1, q_2, \dots, q_s$:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = & \Pi(0, 0, \dots, 0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \dots + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}\right)_0 q_s + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_s^2}\right)_0 q_s^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \dots \right. \\ & \left. \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_{s-1} \partial q_s}\right)_0 q_{s-1} q_s \right] + \dots \end{aligned}$$

Здесь точками после квадратной скобки обозначены члены высшего порядка относительно $q_1, q_2, \dots, q_s$.

Первое слагаемое равно нулю по условию (20.9). Все коэффициенты при $q_1, q_2, \dots, q_s$ в первой степени также равны нулю, так как в положении равновесия должны выполняться равенства (20.2). Коэффициенты при членах второй степени обозначим следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 = c_{ij}. \quad (20.10)$$

Эти коэффициенты, называемые *обобщенными коэффициентами жесткости*, вычисляются в положении равновесия при $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$, и, следовательно, все c_{ij} — постоянные числа, причем они симметричны:

$$c_{ij} = c_{ji}. \quad (20.11)$$

Учитывая сделанные замечания, получим следующее разложение потенциальной энергии в ряд по степеням $q_1, \dots, q_s$:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + \dots + c_{ss} q_s^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + \dots + 2c_{s-1, s} q_{s-1} q_s) + \dots, \quad (20.12)$$

или, сокращенно,

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j + \dots, \quad (20.13)$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Предположим, что квадратичная форма в (20.13) определено положительна. В этом случае вблизи положения равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$ квадратичная часть потенциальной энергии и полная потенциальная энергия будут положительны. Так как $\Pi(0) = 0$, то это означает, что потенциальная энергия будет иметь в этом положении минимум и, следовательно, положение равновесия устойчиво.

Вопрос о знаке любой квадратичной формы определяется следующей теоремой Сильвестра: *для того чтобы квадратичная форма*

была определено положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы были положительны. Доказательство этой теоремы можно найти в курсах линейной алгебры.

Матрица квадратичной формы (20.13) и ее главные диагональные миноры имеют вид

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2s} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & c_{s3} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}, \quad (20.14)$$

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}, \quad (20.15)$$

Таким образом, критерий определенной положительности квадратичной формы (20.13) будет

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_s > 0. \quad (20.16)$$

Теперь виден порядок применения теоремы Лагранжа—Дирихле: нужно разложить потенциальную энергию в ряд по степеням $q_1, \dots, q_s$, ограничиваясь членами второго порядка малости, определить обобщенные коэффициенты жесткости c_{ij} и составить определители (20.15). Если все $\Delta_i > 0$, то положение равновесия устойчиво.

Теорема Лагранжа—Дирихле дает только достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы, но она не дает никаких оснований судить о том, будет ли равновесие устойчиво или неустойчиво, если в этом положении потенциальная энергия не имеет минимума. Для одного частного случая ответ на этот вопрос дает следующая теорема Ляпунова: *равновесие консервативной системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии определяется членами второго порядка в ее разложении в ряд по степеням q .*

А. М. Ляпунову принадлежит еще одна теорема о неустойчивости положения равновесия. Обобщение этих теорем дал Н. Г. Четаев (эти теоремы, а также доказательство сформулированной теоремы Ляпунова можно найти в курсах по устойчивости движения).

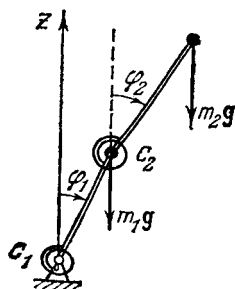


Рис. 20.3

Задача 20.2. Дан двойной маятник со спиральными пружинами, массы маятников m_1 и m_2 , их длины l_1 и l_2 (рис. 20.3). При верхнем вертикальном положении маятников спиральные пружины находятся в недеформированном состоянии. Требуется определить жесткости пружин c_1 и c_2 так, чтобы верхнее вертикальное положение маятников было устойчивым (силами сопротивления пренебречь).

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от верхнего вертикального положения. Потенциальная энергия системы Π складывается из потенциальной энергии Π_1 сил тяжести маятников и потенциальной энергии Π_2 спиральных пружин. Приняв вертикальное положение маятников за нулевое, вычислим Π_1 как работу сил тяжести при переходе системы из данного положения в нулевое:

$$\Pi_1 = m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) - m_1 g l_1 - m_2 g (l_1 + l_2).$$

Потенциальная энергия Π_2 спиральных пружин определится по формуле (20.3):

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

где $(\varphi_2 - \varphi_1)$ — угол закручивания второй пружины.

Потенциальная энергия системы будет равна

$$\begin{aligned} \Pi = (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2 + \\ + \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - (m_1 + m_2) g l_1 - m_2 g l_2. \end{aligned}$$

Обобщенные коэффициенты жесткости c_{ij} можно определить по формуле (20.10), но еще проще они определяются при непосредственном разложении потенциальной энергии в ряд по степеням φ_1 и φ_2 . Имеем

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} + \dots, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} + \dots$$

Тогда выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi = (m_1 + m_2) g l_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) + m_2 g l_2 \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \\ - (m_1 + m_2) g l_1 - m_2 g l_2 + \dots, \end{aligned}$$

или, группируя члены,

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1] \varphi_1^2 - c_2 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} (c_2 - m_2 g l_2) \varphi_2^2 + \dots$$

Сравнивая с общим выражением для потенциальной энергии (20.12), получим обобщенные коэффициенты жесткости

$$c_{11} = c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1, \quad c_{12} = c_{21} = -c_2, \quad c_{22} = c_2 - m_2 g l_2.$$

Критерий Сильвестра (20.16) для $s = 2$ сводится к неравенствам

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

или, раскрывая определитель, $c_{11} > 0$, $c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

Так как $c_{11} > 0$, то из второго неравенства следует, что $c_{22} > 0$. Поэтому эти условия можно заменить на следующие:

$$c_{22} > 0, \quad c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

После подстановки соответствующих значений получим

$$c_2 - m_2 g l_2 > 0, \quad [c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1] (c_2 - m_2 g l_2) - (-c_2)^2 > 0,$$

или

$$c_2 > m_2 g l_2, \quad c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1 > \frac{c_2^2}{c_2 - m_2 g l_2}.$$

Решая второе неравенство относительно c_1 , найдем

$$c_2 > m_2 g l_2, \quad c_1 > (m_1 + m_2) g l_1 + \frac{m_2 g l_2 c_2}{c_2 - m_2 g l_2}.$$

Таким образом, для устойчивости верхнего вертикального положения двойного маятника достаточно, чтобы жесткости пружин c_1 и c_2 удовлетворяли этим неравенствам. Если хотя бы у одного из неравенств изменить знак на противоположный, то верхнее вертикальное положение равновесия будет неустойчивым. Это следует из сформулированной теоремы Ляпунова (при невыполнении этих условий отсутствие минимума потенциальной энергии Π определяется членами второго порядка).

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос об устойчивости относительного равновесия ИСЗ, центр масс которого движется по круговой орбите (см. § 14.8). Так как устойчивость рассматривается относительно вращающейся орбитальной системы координат $Sx_1y_1z_1$ (см. рис. 14.9 и 14.10), то необходимо учесть не только потенциальную энергию сил тяготения Π_1 , но и потенциальную энергию центробежных сил инерции Π_2 . Таким образом, общая потенциальная энергия Π будет равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2.$$

Согласно формуле (3.59) потенциальная энергия силы тяготения Земли для одного элемента массы dm равна $-\mu dm/r$, где μ — гравитационный параметр Земли, а r — расстояние от центра Земли до элемента dm (см. (14.44)). Для всего ИСЗ потенциальная энергия гравитационного поля Земли определяется равенством

$$\Pi_1 = -\mu \int \frac{dm}{r},$$

где интегрирование распространено на массу всего ИСЗ.

Воспользуемся равенством (14.48) и разложим правую часть его в ряд по степеням малых отношений x_1/R , y_1/R и z_1/R . Ограничиваясь членами не выше второго порядка малости, получим после очевидных преобразований (см. стр. 302)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{z_1}{R} + \frac{1}{2R^2} (2z_1^2 - x_1^2 - y_1^2) \right] = \\ &= \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{z_1}{R} + \frac{1}{2R^2} [(z_1^2 + y_1^2) - 2(y_1^2 + x_1^2) + (z_1^2 + x_1^2)] \right\}. \end{aligned}$$

Подставим это выражение для $1/r$ в Π_1 и проинтегрируем по массе всего тела. Учитывая равенства (14.52) и (12.3), найдем

$$\Pi_1 = -\mu \frac{m}{R} - \frac{\mu}{2R^3} (I_{x_1} + I_{y_1} - 2I_{z_1}).$$

Здесь m — масса ИСЗ, I_{x_1} , I_{y_1} , I_{z_1} — его моменты инерции относительно орбитальных осей x_1 , y_1 и z_1 соответственно.

Для того чтобы перейти к постоянным моментам инерции, воспользуемся формулами (12.27), учтя при этом принятые в §§ 14.6—14.8 обозначения и то, что в нашем случае $x_c = y_c = z_c = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \alpha_1^2 + I_y \alpha_2^2 + I_z \alpha_3^2, \\ I_{y_1} &= I_y \beta_1^2 + I_x \beta_2^2 + I_z \beta_3^2, \\ I_{z_1} &= I_z \gamma_1^2 + I_y \gamma_2^2 + I_x \gamma_3^2. \end{aligned}$$

Внесем эти значения для переменных моментов инерции I_x , I_y , и I_z , в последнее выражение для Π . Тогда, используя формулы

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1 \quad (k = 1, 2, 3),$$

получим

$$\Pi = -\frac{\mu m}{R} + \frac{3\mu}{2R^3} (I_x \gamma_1^2 + I_y \gamma_2^2 + I_z \gamma_3^2) - \frac{\mu}{2R^3} (I_x + I_y + I_z).$$

Отметим, что для круговой орбиты первое и последнее слагаемые постоянны и, следовательно, их можно отбросить.

Перейдем к вычислению потенциальной энергии центробежных сил инерции. При движении центра масс ИСЗ по круговой орбите центробежная сила, действующая на элемент массы dm , определяется равенством $\omega^2 dm \mathbf{r}^*$, где ω — угловая скорость вращения радиуса-вектора $\mathbf{R}$ центра инерции ИСЗ, а $\mathbf{r}^*$ — вектор, проведенный от оси Oy_0 до элемента dm параллельно плоскости орбиты (на рис. 14.9 вектор $\mathbf{r}^*$ не показан). Очевидно, что проекции вектора $\mathbf{r}^*$ на орбитальные оси координат x_1 , y_1 , z_1 равны x_1 , 0 , $R + z_1$ соответственно. Поэтому потенциальная энергия центробежной силы элемента dm будет равна (см. формулы (3.50) и (3.25))

$$-\omega^2 dm \int [x_1 dx_1 + (R + z_1) dz_1] = -\omega^2 [1/2 (x_1^2 + z_1^2) + Rz_1] dm,$$

а для всего ИСЗ

$$\Pi_2 = -\omega^2 \int [1/2 (x_1^2 + z_1^2) + Rz_1] dm.$$

Учитывая равенства (14.52) и (12.3), получим

$$\Pi_2 = -\frac{\omega^2}{2} I_{y_1},$$

или, снова переходя к осям x , y , z ,

$$\Pi_2 = -\frac{\omega^2}{2} (I_x \beta_1^2 + I_y \beta_2^2 + I_z \beta_3^2).$$

При круговой орбите $\mu/R^3 = \omega^2 = \text{const}$ (см. формулу (14.64)). Поэтому с точностью до несущественных для нас постоянных членов в Π_1 общая потенциальная энергия ИСЗ в относительном движении будет равна

$$\Pi = \frac{\omega^2}{2} [3(I_x \gamma_1^2 + I_y \gamma_2^2 + I_z \gamma_3^2) - (I_x \beta_1^2 + I_y \beta_2^2 + I_z \beta_3^2)].$$

Учитывая соотношения

$$\beta_2^2 = 1 - \beta_1^2 - \beta_3^2, \quad \gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2,$$

представим потенциальную энергию в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\omega^2}{2} \{ & 3[(I_x - I_z) \gamma_1^2 + (I_y - I_z) \gamma_2^2] - \\ & - [(I_x - I_y) \beta_1^2 + (I_z - I_y) \beta_3^2] \} + \text{const}. \end{aligned}$$

Положение ИСЗ относительно орбитальной системы координат $S_{x_1y_1z_1}$ определяется тремя независимыми параметрами. Пусть это будут $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2$. В соответствии с результатами § 14.8 мы будем рассматривать устойчивость относительно равновесия ИСЗ, когда большая ось эллипсоида инерции направлена к центру Земли. В этом положении относительного равновесия $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, а остальные направляющие косинусы равны нулю (см. § 14.8). Поэтому при небольших отклонениях от рассматриваемого положения равновесия направляющие косинусы $\beta_1, \beta_3, \gamma_1$ и γ_2 будут малыми по модулю величинами. На этом основании из соотношения ортогональности

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \beta_1\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_3^2} + \beta_3\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} = 0$$

с точностью до величин высшего порядка найдем, что $\beta_3 = -\gamma_2$. Внесем это значение для β_3 в потенциальную энергию, сгруппируем члены и снова отбросим несущественную постоянную. Тогда получим

$$\Pi = \frac{\omega^2}{2} [3(I_x - I_z)\gamma_1^2 + 4(I_y - I_z)\gamma_2^2 + (I_y - I_x)\beta_1^2].$$

Отсюда видно, что при $I_y > I_x > I_z$ (условие (14.67)) в положении относительного равновесия ($\gamma_1 = \gamma_2 = \beta_1 = 0$) потенциальная энергия имеет минимум. На основании теоремы Лагранжа—Дирихле заключаем, что положение относительного равновесия ИСЗ, при котором большая ось эллипсоида инерции направлена к центру Земли, устойчиво.

Отметим, что Луна имеет указанное выше распределение масс ($I_y > I_x > I_z$) и ее большая ось эллипсоида инерции с точностью до устойчивых колебаний (либраций) направлена все время к центру Земли. Этим объясняется причина, по которой мы видим только одну сторону Луны.

§ 20.3. Малые колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим произвольную потенциальную систему с голономными и стационарными связями, имеющую одну степень свободы. Положение системы будем определять обобщенной координатой q , отсчитываемой от положения устойчивого равновесия. Предположим, что система отклонена на небольшую величину от положения равновесия и ей сообщена небольшая начальная скорость. Тогда вследствие устойчивости положения равновесия система будет совершать движение вблизи этого положения равновесия, т. е. обобщенная координата q и ее скорость $\dot{q}$ будут все время малы по модулю. Это обстоятельство дает возможность применить приближенный метод исследования движения, основанный на том, что нелинейные в общем

случае дифференциальные уравнения движения упрощаются и заменяются на приближенные линейные уравнения. Для этого, очевидно, достаточно выражения для кинетической и потенциальной энергий разложить в ряды по степеням q и $\dot{q}$, сохранив в них члены не выше второго порядка малости.

Для системы со стационарными связями, имеющей одну степень свободы, кинетическая энергия согласно формуле (19.25) имеет вид

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad (20.17)$$

где обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ является в общем случае функцией обобщенной координаты q .

Так как кинетическая энергия T при $\dot{q} \neq 0$ всегда положительна, то коэффициент $a(q)$ также положителен и не обращается в нуль ни при каких значениях q , в частности, $a(0) = a > 0$. Разложим $a(q)$ в ряд Маклорена по степеням q :

$$a(q) = a(0) + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \dots$$

и подставим это выражение в равенство (20.17):

$$T = \frac{1}{2} \left[a + \left(\frac{da}{dq}\right)_0 q + \dots \right] \dot{q}^2.$$

Для того чтобы сохранить члены не выше второго порядка малости относительно q и $\dot{q}$, отбросим все слагаемые в квадратной скобке, начиная со второго:

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2. \quad (20.18)$$

Это приближенное выражение для кинетической энергии отличается от точного значения (20.17) тем, что обобщенный коэффициент инерции $a(q)$ заменяется на его значение a в положении равновесия.

Разложение потенциальной энергии было уже получено (см. формулу (20.13)). Для системы с одной степенью свободы с принятой точностью будем иметь

$$П = \frac{1}{2}cq^2. \quad (20.19)$$

Приближенные выражения для кинетической и потенциальной энергий представляют квадратичные формы с постоянными положительными коэффициентами. Для кинетической энергии это следует из того, что она всегда положительна и в нуль обращается только при $\dot{q} = 0$, а положительность коэффициента c в выражении для потенциальной энергии следует из того, что рассматриваемое положение равновесия устойчиво (см. примечание к формуле (20.13)).

Составим уравнения движения, учитывая, что силы потенциальные:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Пользуясь выражениями (20.18) и (20.19), составляем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и, принимая во внимание, что $a = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -cq.$$

Уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$a\ddot{q} + cq = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (20.20)$$

где

$$k^2 = c/a. \quad (20.21)$$

Заметим, что число k вещественно, так как коэффициенты a и c положительны.

Уравнение (20.20) называется *дифференциальным уравнением малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия*. Для получения этого уравнения не обязательно прибегать к уравнениям Лагранжа второго рода — можно пользоваться любыми другими методами, например, общими теоремами динамики. Важно, чтобы в результате получилось линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Однако изложенный здесь метод является общим, одинаково пригодным как для простых, так и для сложных систем с несколькими степенями свободы.

С уравнением (20.20) мы уже встречались при изучении прямолинейных колебаний материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы. Его общее решение можно представить в следующих двух эквивалентных формах:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

или

$$q = A \sin(kt + \epsilon). \quad (20.22)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 или A и ϵ определяются из начальных условий. Круговая частота k вычисляется по формуле (20.21), а период незатухающих колебаний

$$T = 2\pi/k = 2\pi \sqrt{a/c}. \quad (20.23)$$

Из изложенного видно, что вблизи положения устойчивого равновесия консервативная система с одной степенью свободы совершает незатухающие гармонические колебания.

Задача 20.3. Чувствительный элемент прибора для регистрации вертикальных колебаний фундаментов состоит из ломаного рычага с грузом E и осью вращения O . Рычаг удерживается в равновесном положении, при котором плечо EO горизонтально, вертикально расположенной пружиной жесткости c_2 . При этом две одинаковые горизонтально расположенные пружины жесткости c_1 находятся в недеформированном состоянии. Момент инерции рычага вместе с грузом относительно оси вращения O равен I . Составить уравнение малых колебаний и определить период колебаний системы; геометрические размеры указаны на рис. 20.4.

За обобщенную координату примем угол поворота рычага φ . Кинетическая энергия определяется равенством

$$T = 1/2 I \dot{\varphi}^2.$$

Пусть масса рычага вместе с грузом равна m , а центр тяжести находится в точке C . Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии Π_1 силы тяжести и потенциальной энергии Π_2 трех пружин.

За нулевое положение системы примем ее равновесное положение. Тогда потенциальная энергия Π_1 будет равна работе силы тяжести $Q = mg$ при переходе системы из данного положения в равновесное:

$$\Pi_1 = -Qd_3 \sin \varphi,$$

где $d_3 = OC$.

Для малых углов

$$\Pi_1 = -Qd_3 \varphi.$$

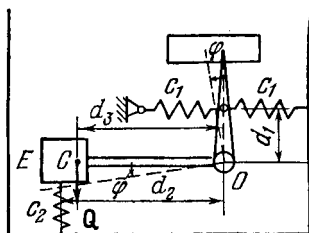


Рис. 20.4

Перейдем к вычислению потенциальной энергии пружин Π_2 . Обозначим через $f_{\text{ст}}$ статическую деформацию вертикальной пружины, ее полная деформация при малом угле φ будет $f_{\text{ст}} + d_2 \varphi$. Деформации горизонтальных пружин равны $d_1 \varphi$ и $-d_1 \varphi$. Теперь найдем

$$\Pi_2 = 1/2 c_1 (d_1 \varphi)^2 + 1/2 c_1 (-d_1 \varphi)^2 + 1/2 c_2 (f_{\text{ст}} + d_2 \varphi)^2 - 1/2 c_2 f_{\text{ст}}^2,$$

или

$$\Pi_2 = c_1 d_1^2 \varphi^2 + 1/2 c_2 (f_{\text{ст}} + d_2 \varphi)^2 - 1/2 c_2 f_{\text{ст}}^2.$$

Потенциальная энергия системы Π равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -Qd_3 \varphi + c_1 d_1^2 \varphi^2 + 1/2 c_2 (f_{\text{ст}} + d_2 \varphi)^2 - 1/2 c_2 f_{\text{ст}}^2.$$

Раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$\Pi = (-Qd_3 + c_2 f_{\text{ст}} d_2) \varphi + 1/2 (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi^2.$$

В положении равновесия должно выполняться равенство (20.2):

$$(\partial \Pi / \partial \varphi)_0 = 0.$$

Для данного примера

$$(\partial \Pi / \partial \varphi)_0 = [(-Qd_3 + c_2 f_{\text{ст}} d_2) + (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi]_{\varphi=0} = -Qd_3 + c_2 f_{\text{ст}} d_2 = 0.$$

Теперь выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$\Pi = 1/2 (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi^2.$$

Пользуясь выражениями для T и Π , составим с помощью схемы Лагранжа дифференциальное уравнение малых колебаний чувствительного элемента прибора

$$I \ddot{\varphi} + (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}{I} \varphi = 0.$$

Круговая частота k и период колебаний T определяются равенствами

$$k = \sqrt{\frac{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2}}.$$

Изложенный метод можно применить к системам, в которых, кроме консервативных сил, имеются и силы другой природы, на-

пример силы сопротивления, или возмущающие силы. Мы не будем сейчас рассматривать этот вопрос в общей постановке и поясним его на разобранном только что примере.

Как известно, собственные колебания чувствительного элемента прибора нужно погасить. Это может быть осуществлено как за счет естественных сил сопротивления, так и с помощью специального приспособления, называемого *демпфером*.

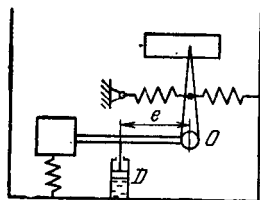


Рис. 20.5

Рассмотрим ту же схему вибрографа, но присоединим к нему демпфер D , создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости поршня (рис. 20.5). Обозначим расстояние от оси вращения до штока поршня через e . Тогда при малых углах φ скорость поршня будет равна $e\dot{\varphi}$, сила сопротивления — $\mu e\dot{\varphi}$ (μ — коэффициент пропорциональности), а соответствующая обобщенная сила — $\mu e^2\dot{\varphi}$. Полная обобщенная сила системы равна

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \mu e^2 \dot{\varphi}.$$

После подстановки соответствующих величин в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение малых колебаний

$$I\ddot{\varphi} = -(2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2)\varphi - \mu e^2 \dot{\varphi}, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad (20.24)$$

где k имеет прежнее значение, а $h = \mu e^2/(2I)$. Обычно $h < k$. Поэтому общее решение будет

$$\varphi = Ae^{-ht} \sin(k_1 t + e), \quad k_1 = \sqrt{k^2 - h^2},$$

что определяет затухающие колебания.

§ 20.4. Случай произвольной возмущающей силы

До сих пор мы рассматривали свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия. При отсутствии сил сопротивления дифференциальное уравнение малых колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (20.25)$$

Если же, помимо потенциальных сил, действуют еще силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости, то дифференциальное уравнение приводится к следующей форме:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = 0. \quad (20.26)$$

Предположим теперь, что, помимо потенциальных сил и сил сопротивления, на материальную систему действует возмущающая сила, явным образом зависящая от времени. Обозначим соответствующую обобщенную силу через $Q(t)$. Тогда, после деления на коэффициент инерции a , получим вместо уравнения (20.26) следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = F(t), \quad (20.27)$$

где $F(t)$ — обобщенная сила, отнесенная к коэффициенту инерции: $F(t) = Q(t)/a$ (не делая в дальнейшем этой оговорки, будем называть функцию $F(t)$ обобщенной силой).

В §§ 2.5 и 2.6 мы подробно исследовали решение этого уравнения в предположении, что возмущающая сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону. Поэтому в тех случаях, когда функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = F_0 \sin(pt + \delta),$$

можно использовать полученные в §§ 2.5, 2.6 результаты. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда возмущающая сила $F(t)$ изменяется произвольным образом.

Предположим сначала, что силы сопротивления отсутствуют. Тогда уравнение (20.27) примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = F(t). \quad (20.28)$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного уравнения (20.28). Соответствующее однородное уравнение будет

$$\ddot{q} + k^2 q = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$q = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt, \quad (20.29)$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Частное решение уравнения (20.28) будем искать в форме (20.29), предположив, что D_1 и D_2 являются функциями времени *):

$$q = D_1(t) \cos kt + D_2(t) \sin kt. \quad (20.30)$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{q} = \frac{dD_1}{dt} \cos kt + \frac{dD_2}{dt} \sin kt - D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt.$$

Нам нужно найти одно частное решение, а мы ввели две неизвестные функции D_1 и D_2 . Поэтому их можно подчинить некоторому условию. Потребуем, чтобы сумма первых двух слагаемых в правой части последнего равенства равнялась нулю:

$$\frac{dD_1}{dt} \cos kt + \frac{dD_2}{dt} \sin kt = 0. \quad (20.31)$$

Тогда

$$\dot{q} = -D_1 k \sin kt + D_2 k \cos kt.$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим

$$\ddot{q} = -\frac{dD_1}{dt} k \sin kt + \frac{dD_2}{dt} k \cos kt - D_1 k^2 \cos kt - D_2 k^2 \sin kt.$$

*) Этот метод определения частного решения, предложенный впервые Лагранжем, называется *методом вариации произвольных постоянных*.

Подставим это выражение для $\ddot{q}$ и выражение (20.30) для q в уравнение (20.28). Тогда, после приведения подобных членов, получим

$$-\frac{dD_1}{dt} k \sin kt + \frac{dD_2}{dt} k \cos kt = F(t). \quad (20.32)$$

Решая совместно уравнения (20.31) и (20.32) относительно производных dD_1/dt и dD_2/dt , найдем

$$\frac{dD_1}{dt} = -\frac{1}{k} F(t) \sin kt, \quad \frac{dD_2}{dt} = \frac{1}{k} F(t) \cos kt.$$

Интегрируя, будем иметь

$$D_1 = -\frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin k\xi d\xi, \quad D_2 = \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \cos k\xi d\xi,$$

где через ξ обозначена переменная интегрирования.

Подставив найденные значения для D_1 и D_2 в равенство (20.30), получим частное решение уравнения (20.28):

$$q = -\frac{1}{k} \cos kt \int_0^t F(\xi) \sin k\xi d\xi + \frac{1}{k} \sin kt \int_0^t F(\xi) \cos k\xi d\xi.$$

Так как функции $\cos kt$ и $\sin kt$ не зависят от переменной интегрирования ξ , то их можно внести под знаки интегралов:

$$q = -\frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \cos kt \sin k\xi d\xi + \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin kt \cos k\xi d\xi.$$

Объединяя оба интеграла, получим

$$q = \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) [\sin kt \cos k\xi - \cos kt \sin k\xi] d\xi,$$

или

$$q = \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin [k(t-\xi)] d\xi. \quad (20.33)$$

Таково частное решение дифференциального уравнения (20.28) при произвольной возмущающей силе $F(t)$.

Для того чтобы найти частное решение уравнения (20.27), сделаем в нем замену переменных, положив $q = e^{-ht}z$, где z — новая неизвестная функция. Имеем

$$\dot{q} = -he^{-ht}z + e^{-ht}\dot{z}, \quad \ddot{q} = h^2e^{-ht}z - 2he^{-ht}\dot{z} + e^{-ht}\ddot{z}.$$

После подстановки значений для q , $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ в уравнение (20.27) и приведения подобных членов получим

$$e^{-ht}\ddot{z} + (k^2 - h^2)e^{-ht}z = F(t),$$

или, разделив на e^{-ht} ,

$$\ddot{z} + (k^2 - h^2)z = F(t)e^{ht}.$$

Будем предполагать, что $h < k$ (силы сопротивления не очень велики). Тогда, положив

$$k_1^2 = k^2 - h^2, \quad (20.34)$$

мы приходим к уравнению (20.28), где функция $F(t)$ заменена на функцию $F(t)e^{ht}$, а коэффициент k на k_1 . Поэтому частное решение последнего уравнения согласно равенству (20.33) будет

$$z = \frac{1}{k_1} \int_0^t e^{h\xi} F(\xi) \sin[k_1(t - \xi)] d\xi,$$

Переходя к старой переменной $q = e^{-ht}z$, найдем

$$q = \frac{1}{k_1} e^{-ht} \int_0^t e^{h\xi} F(\xi) \sin[k_1(t - \xi)] d\xi.$$

или, внося множитель e^{-ht} под знак интеграла,

$$q = \frac{1}{k_1} \int_0^t F(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin[k_1(t - \xi)] d\xi. \quad (20.35)$$

Таково частное решение дифференциального уравнения (20.27) при произвольной возмущающей силе $F(t)$. Непосредственной проверкой легко установить, что частные решения (20.33) и (20.35) удовлетворяют нулевым начальным условиям, т. е.

$$q = 0, \quad \dot{q} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (20.36)$$

Общее решение дифференциального уравнения (20.27) имеет вид ($h < k$)

$$q = e^{-ht} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \frac{1}{k_1} \int_0^t F(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin[k_1(t - \xi)] d\xi, \quad (20.37)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Интегральная форма частного решения (20.35) дифференциального уравнения (20.27) позволяет определять движение системы и после того, как сила $F(t)$ прекратила свое действие. Поясним это подробнее. Пусть сила $F(t)$ до момента времени $t = 0$ равнялась нулю, а затем в промежутке времени $(0, t_1)$ она приняла значение $F(t)$ и, начиная с момента $t = t_1$, она прекращает свое действие. Математически это можно записать следующим образом:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases} \quad (20.38)$$

Будем считать, что до начала действия силы $F(t)$ система находилась в покое. Тогда движение системы определится решением, удовлетворяющим нулевым начальным условиям, т. е. решением (20.35). Если $t > t_1$, то разобьем промежуток интегрирования $(0, t)$ на два промежутка $(0, t_1)$ и (t_1, t) :

$$q = \frac{1}{k_1} \int_0^{t_1} e^{-h(t-\xi)} F(\xi) \sin[k_1(t-\xi)] d\xi + \int_{t_1}^t e^{-h(t-\xi)} F(\xi) \sin[k_1(t-\xi)] d\xi.$$

Второй интеграл равен нулю (так как при $t > t_1$ функция $F(t) = 0$). Поэтому движение системы после окончания действия силы $F(t)$ определяется равенством

$$q = \frac{1}{k_1} \int_0^{t_1} e^{-h(t-\xi)} F(\xi) \sin[k_1(t-\xi)] d\xi. \quad (20.39)$$

Если силы сопротивления отсутствуют ($h = 0$, $k_1 = k$), то

$$q = \frac{1}{k} \int_0^{t_1} F(\xi) \sin[k(t-\xi)] d\xi. \quad (20.40)$$

Задача 20.4. Прибор, описанный в § 20 (см. рис. 20.4 и 20.5), установлен в лифте. Сначала лифт находился в покое, а затем начал подниматься вверх с постоянным ускорением ω_0 . По прошествии t_1 секунд стал двигаться равномерно. Определить колебания прибора при равномерном движении лифта.

Будем изучать колебания рычага относительно корпуса прибора, т. е. относительно движущегося лифта. Для того чтобы можно было рассматривать колебания рычага с помощью тех же уравнений, что и в абсолютном движении, нужно ввести переносную силу инерции (лифт движется поступательно, и, следовательно, кориолисова сила инерции равна нулю). При движении лифта вверх с ускорением ω_0

сила инерции груза E , равная по модулю $\frac{Q}{g} \omega_0$, будет направлена вертикально вниз. Ей соответствует обобщенная сила $\frac{Q}{g} \omega_0 d_3$ (см. рис. 20.4). Учитывая упругие силы, создаваемые пружинами, и силу сопротивления, возникающую за счет действия демпфера, вместо уравнения (20.24) получим

$$I\ddot{\varphi} = -(2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2) \varphi - \mu \dot{\varphi} + \frac{Q}{g} \omega_0 d_3,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = F_0,$$

$$\text{где } k^2 = \frac{1}{I} (2c_1 d_1^2 + c_2 d_2^2), \quad h = \frac{\mu e^2}{2I},$$

$$F_0 = \frac{Q d_3}{g I} \omega_0.$$

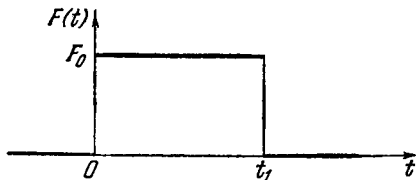


Рис. 20.6

Возмущающая сила $F(t)$ удовлетворяет условиям (ее график изображен на рис. 20.6):

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ F_0 = \text{const} & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Нас интересует поведение прибора при равномерном движении лифта, т. е. при $t > t_1$. Воспользуемся формулой (20.39):

$$\varphi = \frac{1}{k_1} \int_0^{t_1} F_0 e^{-h(t-\xi)} \sin[k_1(t-\xi)] d\xi,$$

или, учитывая, что в промежутке $(0, t_1)$ функция $F = F_0 = \text{const}$,

$$\varphi = \frac{F_0}{k_1} \int_0^{t_1} e^{-h(t-\xi)} \sin[k_1(t-\xi)] d\xi.$$

Вычисляя этот интеграл, найдем *)

$$\varphi = -\frac{F_0}{k_1(h^2 + k_1^2)} e^{-h(t-\xi)} \{h \sin[k_1(t-\xi)] + k_1 \cos[k_1(t-\xi)]\} \Big|_{\xi=0}^{\xi=t_1}.$$

Подставим верхний и нижний пределы и учтем равенство (20.34):

$$\varphi = -\frac{F_0}{k^2} \left\{ e^{-h(t-t_1)} \left[\frac{h}{k_1} \sin[k_1(t-t_1)] + \cos[k_1(t-t_1)] \right] - e^{-ht} \left(\frac{h}{k_1} \sin k_1 t + \cos k_1 t \right) \right\}. \quad (20.41)$$

Это решение справедливо при $t > t_1$. Им можно пользоваться и при $t < t_1$, если только положить в нем $t_1 = t$. Таким образом, при ускоренном подъеме лифта стрелка прибора колеблется по закону

$$\varphi = \frac{F_0}{k^2} e^{-ht} \left(\frac{h}{k_1} \sin k_1 t + \cos k_1 t \right) - \frac{F_0}{k^2}$$

и после окончания ускорения при $t \geq t_1$ закон колебания стрелки прибора определяется равенством (20.41).

Если применить обычные методы, то нужно сначала решить уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = F_0,$$

затем найти постоянные интегрирования по нулевым начальным условиям, после чего определить значения угла φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$ в момент $t = t_1$. Полученные значения для φ и $\dot{\varphi}$ служат начальными условиями для движения, описываемого уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

(первое уравнение справедливо для промежутка $0 < t < t_1$, второе для $t \geq t_1$).

Несмотря на кажущуюся простоту этого метода (он называется методом *приспосабливания*, или методом *постанного интегрирования*), он требует больших преобразований, чем определение решения в интегральной форме. Однако главный его недостаток состоит в том, что он, в отличие от интегральной формы, не может быть применен при произвольной возмущающей силе $F(t)$.

*) Интеграл $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ легко вычисляется по частям (см. также Г р а д - ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, — М.: Наука, 1971).

§ 20.5. Определение периодических решений

Вопрос об определении периодических решений является одним из важнейших в теории колебаний. Мы рассмотрим случай, когда движение системы описывается дифференциальным уравнением (20.28), правая часть которого (возмущающая сила) представляет некоторую периодическую функцию периода τ

$$F(t + \tau) \equiv F(t).$$

Существует несколько методов определения периодического решения периода τ . Мы рассмотрим два из них.

1. Определение периодического движения с помощью ряда Фурье. Пусть периодическая функция $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и может быть разложена в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(pt + \varepsilon_1) + a_2 \sin(2pt + \varepsilon_2) + \dots,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ и сдвиги фаз каждой гармонки определяются по известным формулам, а $p = 2\pi/\tau$,

Уравнение (20.28) примет теперь вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(pt + \varepsilon_1) + a_2 \sin(2pt + \varepsilon_2) + \dots$$

Для каждого слагаемого правой части легко определяется частное решение (см. § 2.5). Поэтому частное решение, отвечающее всей правой части, будет иметь вид

$$q = \frac{a_0}{2k^2} + \frac{a_1}{k^2 - p^2} \sin(pt + \varepsilon_1) + \frac{a_2}{k^2 - (2p)^2} \sin(2pt + \varepsilon_2) + \dots \quad (20.42)$$

Это решение справедливо, если $p \neq k/n$ при любом целом n (предполагается, что это условие выполнено). Решение (20.42) определяет периодическое движение системы периода τ .

Применение ряда Фурье целесообразно использовать для определения периодического движения системы в том случае, когда ряд быстро сходится и можно ограничиться первыми несколькими членами.

2. Определение периодического решения в замкнутой форме. Даже в тех сравнительно редких случаях, когда ряд Фурье быстро сходится, практически можно получить только приближенное решение. Применение интегральной формы частного решения (20.33) дает возможность построить точное периодическое решение (решение в замкнутой форме).

Формула (20.33) определяет частное решение уравнения (20.28), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Поэтому решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям ($q = q_0$ и $\dot{q} = \dot{q}_0$ при $t = 0$), имеет вид

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin[k(t - \xi)] d\xi. \quad (20.43)$$

Если возмущающая сила $F(t)$ имеет период τ , то вынужденным колебаниям того же периода должно отвечать периодическое решение, удовлетворяющее условиям

$$q(0) = q(\tau) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}(\tau) = \dot{q}_0. \quad (20.44)$$

Так как дифференциальное уравнение (20.28) не изменяет своей формы от замены t на $t + \tau$, то условия (20.44) будут не только необходимыми, но и достаточными, т. е. решение, удовлетворяющее этим условиям, будет периодическим с периодом τ .

Решение (20.43) уравнения (20.28) является общим. Для того чтобы оно содержало частное периодическое решение с периодом τ , подчиним его условиям (20.44). Это даст нам два уравнения, из которых можно будет найти неизвестные для периодического движения начальные значения обобщенной координаты q_0 и обобщенной скорости $\dot{q}_0$.

Представим формулу (20.43) в следующем виде:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{k} \left[\sin kt \int_0^t F(\xi) \cos k\xi d\xi - \cos kt \int_0^t F(\xi) \sin k\xi d\xi \right].$$

Вычислим производную по времени и разделим ее на k :

$$\frac{\dot{q}}{k} = -q_0 \sin kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \cos kt + \frac{1}{k} \left[\cos kt \int_0^t F(\xi) \cos k\xi d\xi + \sin kt \int_0^t F(\xi) \sin k\xi d\xi \right].$$

Подчиним решение условиям (20.44). Для этого положим $t = \tau$ и заменим q на q_0 , а $\dot{q}$ на $\dot{q}_0$:

$$\begin{aligned} q_0 &= q_0 \cos k\tau + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin k\tau + \frac{1}{k} [A \sin k\tau - B \cos k\tau], \\ \frac{\dot{q}_0}{k} &= -q_0 \sin k\tau + \frac{\dot{q}_0}{k} \cos k\tau + \frac{1}{k} [A \cos k\tau + B \sin k\tau], \end{aligned} \quad (20.45)$$

где числа A и B определены равенствами

$$A = \int_0^\tau F(\xi) \cos k\xi d\xi, \quad B = \int_0^\tau F(\xi) \sin k\xi d\xi, \quad (20.46)$$

Решая уравнения (20.45) относительно q_0 и $\dot{q}_0/k$, найдем

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{4k \sin^2(k\tau/2)} [A \sin k\tau + (1 - \cos k\tau) B], \\ \frac{\dot{q}_0}{k} &= \frac{1}{4k \sin^2(k\tau/2)} [- (1 - \cos k\tau) A + B \sin k\tau]. \end{aligned} \quad (20.47)$$

Внося эти выражения для q_0 и $\dot{q}_0/k$ в равенство (20.43), получим после элементарных преобразований искомое периодическое решение

$$q = \frac{A \cos k(t + \tau/2) + B \sin k(t + \tau/2)}{2k \sin(k\tau/2)} + \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin[k(t - \xi)] d\xi. \quad (20.48)$$

Это решение определяет движение на отрезке $[0, \tau]$. На последующих отрезках $[\tau, 2\tau]$, $[2\tau, 3\tau]$ и т. п. значение обобщенной координаты и ее график (если он построен) нужно просто повторить.

Множитель $\sin(k\tau/2)$ в знаменателе указывает на возможность резонанса при $k\tau/2 = n\pi$, или $\tau = \frac{2\pi}{k} n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), т. е. резонанс может наступить, если период τ возмущающей силы будет кратен периоду $T = 2\pi/k$ собственных колебаний.

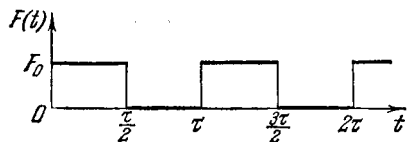


Рис. 20.7

Рассмотрим пример. Пусть периодическая возмущающая сила изменяется по закону, изображенному на рис. 20.7. На отрезке $[0, \tau]$ будем иметь

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } \tau/2 < t \leq \tau. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты A и B по формулам (20.46). Для этого разобьем отрезок интегрирования $[0, \tau]$ на два, равных $[0, \tau/2]$ и $[\tau/2, \tau]$, учитывая, что во втором из них $F(t) = 0$. Имеем

$$A = \int_0^{\tau/2} + \int_{\tau/2}^{\tau} = \int_0^{\tau/2} F_0 \cos k\xi d\xi = \frac{F_0}{k} \sin \frac{k\tau}{2}, \quad (20.49)$$

$$B = \int_0^{\tau/2} F_0 \sin k\xi d\xi = \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos \frac{k\tau}{2}\right). \quad (20.50)$$

Интеграл, стоящий в формуле (20.48), вычислим сначала для момента времени t , лежащего в промежутке $(0, \tau/2)$, когда $F = F_0$:

$$\frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin[k(t - \xi)] d\xi = \frac{F_0}{k^2} \cos[k(t - \xi)] \Big|_0^t = \frac{F_0}{k^2} (1 - \cos kt).$$

Для момента времени t , удовлетворяющего условию $\tau/2 < t < \tau$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin[k(t - \xi)] d\xi &= \frac{1}{k} \int_0^{\tau/2} F_0 \sin[k(t - \xi)] d\xi = \\ &= \frac{F_0}{k^2} \left\{ \cos \left[k \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] - \cos kt \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \int_0^t F(\xi) \sin[k(t - \xi)] d\xi = \\ = \begin{cases} \frac{F_0}{k^2} (1 - \cos kt) & \text{при } 0 \leq t < \frac{\tau}{2}, \\ \frac{F_0}{k^2} \left\{ \cos \left[k \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] - \cos kt \right\} & \text{при } \frac{\tau}{2} < t \leq \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для чисел A и B , а также значения интеграла в равенство (20.48), после очевидных упрощений найдем решение уравнения (20.28) при заданной возмущающей силе:

$$\begin{aligned} q = \frac{F_0}{2k^2} \frac{\cos[k(t + \tau/4)]}{\cos(k\tau/4)} + \\ + \begin{cases} \frac{F_0}{k^2} (1 - \cos kt) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ \frac{F_0}{k^2} \left\{ \cos \left[k \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] - \cos kt \right\} & \text{при } \frac{\tau}{2} < t \leq \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим $k\tau/4 = \pi$, т. е. $\tau = 2 \cdot 2\pi/k = 2T$. Тогда получим на отрезке $(0, \tau/2)$

$$q = \frac{F_0}{k^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos kt \right), \quad (20.51)$$

а на отрезке $[\tau/2, \tau]$

$$q = \frac{F_0}{2k^2} \cos kt. \quad (20.52)$$

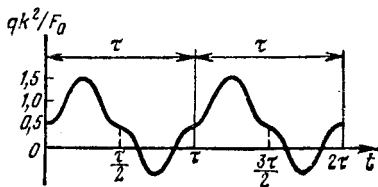


Рис. 20.8

Примерный график вынужденных колебаний показан на рис. 20.8 (на отрезке $[0, \tau]$ он построен обычным путем по точкам, а затем периодически продолжен). Отметим, что, несмотря на кратность периодов ($\tau = 2T$), в данном примере резонанс не наступил (он имел бы место при $\tau = T$, $\tau = 3T$, $\tau = 5T$ и т. п.).

Мы рассмотрели построение периодических решений в предположении, что отсутствуют силы сопротивления. Учет их не представляет труда, нужно только при выводе воспользоваться формулой (20.37), а не формулой (20.43)*).

§ 20.6. Малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим произвольную консервативную систему с голономными и стационарными связями, имеющую две степени свободы. Положение системы будем определять обобщенными координатами q_1 и q_2 , отсчитываемыми от положения устойчивого равновесия.

*) См., например, Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, том II. — М.: Гостехиздат, 1955.

Вблизи этого положения обобщенные координаты q_1 и q_2 и обобщенные скорости $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$ будут все время малы по модулю, так как равновесие устойчивое.

Кинетическая энергия системы для $s = 2$ согласно формуле (19.25) имеет вид

$$T = \frac{1}{2} [a_{11}(q_1, q_2) \dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1, q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22}(q_1, q_2) \dot{q}_2^2]. \quad (20.53)$$

Коэффициенты инерции в общем случае зависят от координат q_1 и q_2 . Разложим их в ряд Маклорена по степеням q_1 и q_2 и ограничимся малыми нулевого порядка (для того, чтобы кинетическая энергия содержала члены не выше второго порядка малости относительно $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$):

$$\begin{aligned} a_{11}(q_1, q_2) &\approx a_{11}(0, 0) = a_{11}, \\ a_{12}(q_1, q_2) &\approx a_{12}(0, 0) = a_{12}, \\ a_{22}(q_1, q_2) &\approx a_{22}(0, 0) = a_{22}. \end{aligned} \quad (20.54)$$

Теперь выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2), \quad (20.55)$$

где все обобщенные коэффициенты инерции — постоянные числа.

Так как при скоростях, отличных от нуля, кинетическая энергия положительна, то квадратичная форма (20.55) удовлетворяет критерию Сильвестра (20.16), который для данного случая имеет вид

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (20.56)$$

Разложение потенциальной энергии в ряд по степеням q_1 и q_2 дается формулой (20.13). Для системы с двумя степенями свободы получим

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (20.57)$$

Для положения устойчивого равновесия квадратичная форма (20.57) определена положительно и она удовлетворяет критерию Сильвестра (20.16):

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (20.58)$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

и равенствами (20.55) и (20.57), составим дифференциальные уравнения малых колебаний. Имеем ($a_{jk} = \text{const}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -(c_{11}q_1 + c_{12}q_2).$$

Следовательно, уравнение для координаты q_1 будет

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0.$$

Второе уравнение может быть получено аналогичным способом.

Принимая во внимание, что $a_{12} = a_{21}$ и $c_{12} = c_{21}$, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.59)$$

Таким образом, малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия описываются двумя линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение этих уравнений будем искать в форме

$$q_1 = A \sin(kt + \epsilon), \quad q_2 = B \sin(kt + \epsilon), \quad (20.60)$$

где A , B , k и ϵ — неизвестные постоянные.

Продифференцируем выражения для q_1 и q_2 дважды по времени t :

$$\ddot{q}_1 = -Ak^2 \sin(kt + \epsilon), \quad \ddot{q}_2 = -Bk^2 \sin(kt + \epsilon)$$

и подставим полученные выражения в уравнения (20.59):

$$\begin{aligned} -a_{11}Ak^2 \sin(kt + \epsilon) - a_{12}Bk^2 \sin(kt + \epsilon) + \\ + c_{11}A \sin(kt + \epsilon) + c_{12}B \sin(kt + \epsilon) &= 0, \\ -a_{21}Ak^2 \sin(kt + \epsilon) - a_{22}Bk^2 \sin(kt + \epsilon) + \\ + c_{21}A \sin(kt + \epsilon) + c_{22}B \sin(kt + \epsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы эти равенства удовлетворялись тождественно при любых t , вычислим коэффициенты при $\sin(kt + \epsilon)$ и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2) A + (c_{12} - a_{12}k^2) B &= 0, \\ (c_{21} - a_{21}k^2) A + (c_{22} - a_{22}k^2) B &= 0. \end{aligned} \quad (20.61)$$

Эти алгебраические линейные однородные уравнения относительно A и B должны иметь решение, отличное от нуля (в противном случае согласно (20.60) $q_1 \equiv q_2 \equiv 0$, что соответствует покою, а не движению). Поэтому определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (20.62)$$

Раскрывая определитель, получим

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0, \quad (20.63)$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) k^4 - \\ - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12}) k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (20.64)$$

Уравнение (20.62), или эквивалентные ему уравнения (20.63) и (20.64), называется *уравнением частот*, или *вековым уравнением*.

Докажем, что оба корня этого уравнения относительно k^2 вещественны и положительны. Для доказательства обозначим левую часть уравнения (20.64) или, что то же самое, уравнения (20.63) через $\Delta(k^2)$. Тогда, пользуясь соотношениями (20.56) и (20.58), будем иметь

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad \Delta(\infty) > 0,$$

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\frac{(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2}{a_{11}^2} < 0, \quad \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\frac{(a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22})^2}{a_{22}^2} < 0$$

(значения $k^2 = 0$ и $k^2 = \infty$ подставлялись в левую часть уравнения (20.64), а значения $k^2 = c_{11}/a_{11}$ и $k^2 = c_{22}/a_{22}$ — в левую часть эквивалентного ему уравнения (20.63)).

Это означает, что между $k^2 = 0$ и $k^2 = \infty$ график функции $\Delta = \Delta(k^2)$ пересекает ось абсцисс в двух точках (рис. 20.9), определяющих два положительных корня k_1^2 и k_2^2 уравнения частот

(при построении графика предполагалось для определенности, что $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$ и $k_1^2 < k_2^2$).

Прежде чем перейти к дальнейшему, заметим, что в том случае, когда уравнения (20.61) распадаются на два независи-

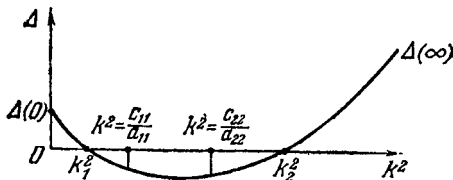


Рис. 20.9

мых уравнения (это будет при $a_{12} = a_{21} = 0$ и $c_{12} = c_{21} = 0$), соответствующие частоты колебаний будут (они называются *парциальными частотами*)

$$k_1^* = \sqrt{c_{11}/a_{11}}, \quad k_2^* = \sqrt{c_{22}/a_{22}}.$$

Из полученных выражений и рис. 20.9 видно, что парциальные частоты больше меньшей частоты системы k_1 и меньше большей частоты системы k_2 .

Извлечем теперь из k_1^2 и k_2^2 квадратные корни и воспользуемся только положительными значениями k_1 и k_2 . Каждому корню k_1 и k_2 будет отвечать одно частное решение (20.60), причем каждой частоте k_1 и k_2 отвечают свои значения A , B и ε . Частные решения линейно независимы, поэтому общее решение будет равно их линейной комбинации:

$$q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2),$$

$$q_2 = B_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + B_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2).$$

Между числами A_1 и B_1 , A_2 и B_2 имеется связь, которая устанавливается уравнениями (20.61). Если подставить в эти уравнения k_1 или k_2 , то определитель системы (20.61) обратится в нуль. Следовательно, из двух уравнений этой системы независимых только одно. Возьмем одно из этих уравнений, например первое (при ре-

шении практических задач нужно выбирать наиболее простое уравнение), и найдем из него отношение

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{a_{12}k_i^2 - c_{12}} = \mu_i \quad (i = 1, 2). \quad (20.65)$$

Каждому значению частоты k_1 и k_2 отвечают соответствующие значения μ_1 и μ_2 . Вычислив их по формуле (20.65), найдем

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2. \quad (20.66)$$

Теперь общее решение примет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (20.67)$$

В этом решении частоты k_1 и k_2 и коэффициенты μ_1 и μ_2 — известные числа, характеризующие данную систему, A_1 , A_2 , ε_1 и ε_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Из формы общего решения видно, что движение системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия складывается из двух независимых колебаний:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), & q_1^{(2)} &= A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2^{(1)} &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), & q_2^{(2)} &= \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Первое колебание в обеих координатах происходит с частотой k_1 , а второе с частотой k_2 . Эти колебания называются *главными*. Коэффициенты μ_1 и μ_2 определяют *формы колебаний*; согласно равенствам (20.65) они имеют простой физический смысл, показывая, во сколько раз амплитуда соответствующего главного колебания в одной из координат больше (или меньше) амплитуды другой координаты.

Из определения видно, что все координаты в каждом главном колебании изменяются по гармоническому закону, имея одинаковые частоты и фазы. Это означает, что они (т. е. координаты) одновременно обращаются в нуль, одновременно достигают максимальных значений и т. п., причем координаты в каждом главном колебании находятся в постоянном отношении μ_i , не зависящем от начальных условий.

Частоты колебаний (точнее, круговые частоты) k_1 и k_2 , а также коэффициенты μ_1 и μ_2 являются основными характеристиками малых колебаний системы с двумя степенями свободы.

В заключение отметим, что методы составления и интегрирования дифференциальных уравнений малых колебаний системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия без всяких изменений могут быть распространены на системы с большим числом степеней свободы.

§ 20.7. Задачи

При решении задач на исследование малых колебаний системы с несколькими степенями свободы около положения устойчивого равновесия можно, конечно, пользоваться полученными формулами. Однако значительно полезнее для каждого примера производить все преобразования с самого начала. Это объясняется тем, что метод запомнить значительно проще, чем формулы.

Задача 20.5. Определить малые колебания двойного математического маятника (рис. 20.10).

Выражения для кинетической и потенциальной энергий двойного математического маятника были получены ранее (см. формулы (18.32) и (19.15)):

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2],$$

$$\Pi = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

Среди коэффициентов инерции только один коэффициент, а именно $a_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, зависит от обобщенных координат φ_1 и φ_2 . Согласно общей теории заменим этот коэффициент на его значение в положении равновесия при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, т. е. положим приближенно

$$m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx m_2 l_1 l_2.$$

Кинетическая энергия двойного математического маятника для малых колебаний принимает вид

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2].$$

Потенциальную энергию разложим в ряд по степеням φ_1 и φ_2 , ограничиваясь членами не выше второго порядка малости. Имеем

$$\cos \varphi_1 = 1 - \varphi_1^2/2, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \varphi_2^2/2.$$

Следовательно, для малых колебаний (постоянные слагаемые отброшены)

$$\Pi = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \varphi_2^2.$$

Пользуясь этими выражениями для кинетической и потенциальной энергий, составим дифференциальные уравнения Лагранжа, определяющие малые колебания двойного математического маятника:

для координаты φ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = (m_1 + m_2) l_1 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1;$$

для координаты φ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -m_2 g l_2 \varphi_2.$$

Следовательно, уравнения малых колебаний имеют вид (первое уравнение сокращено на l_1 , а второе на $m_2 l_2$; кроме того, все члены перенесены в левые части уравнений)

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 &= 0, \\ l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.68)$$

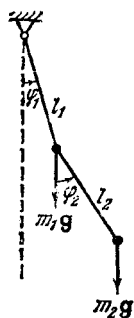


Рис. 20.10

Общее решение будем искать в форме (20.60):

$$\varphi_1 = A \sin(kt + \varepsilon), \quad \varphi_2 = B \sin(kt + \varepsilon).$$

Отсюда следует

$$\ddot{\varphi}_1 = -Ak^2 \sin(kt + \varepsilon), \quad \ddot{\varphi}_2 = -Bk^2 \sin(kt + \varepsilon).$$

Подставим значения φ_1 , φ_2 , $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$ в уравнения (20.68) и приравняем к нулю коэффициенты при $\sin(kt + \varepsilon)$. После группировки членов получим алгебраические уравнения (20.61):

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)(g - l_1 k^2) A - m_2 l_2 k^2 B &= 0, \\ -l_1 k^2 A + (g - l_2 k^2) B &= 0. \end{aligned} \quad (20.69)$$

Так как A и B не равны нулю одновременно, то определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 k^2) & -m_2 l_2 k^2 \\ -l_1 k^2 & g - l_2 k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приведем частотное уравнение к виду

$$m_1 l_1 l_2 k^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) g k^2 + (m_1 + m_2) g^2 = 0.$$

Дальнейшие вычисления в общем виде производить не рационально. Нужно задать числовые значения параметров двойного математического маятника либо соотношения между ними. Будем считать, что оба маятника одинаковы: $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$. Тогда частотное уравнение примет вид

$$k^4 - 4 \frac{g}{l} k^2 + 2 \frac{g^2}{l^2} = 0.$$

Отсюда найдем две круговые частоты собственных колебаний:

$$k_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) g / l}, \quad k_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) g / l}. \quad (20.70)$$

Пользуясь вторым уравнением (20.69), найдем отношения амплитуд

$$\mu = \frac{B}{A} = \frac{l_1 k^2}{g - l_2 k^2}.$$

Подставляя сюда найденные значения для k_1^2 и k_2^2 , получим ($l_1 = l_2 = l$)

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}, \quad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Следовательно, $B_1 = \sqrt{2} A_1$, $B_2 = -\sqrt{2} A_2$.

Теперь можно составить общее решение дифференциальных уравнений (20.68):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2 &= \sqrt{2} A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) - \sqrt{2} A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (20.71)$$

где k_1 и k_2 определены равенствами (20.70).

Произвольные постоянные A_1 , A_2 , ε_1 и ε_2 находятся из начальных условий. Пусть, например, при $t = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \quad \varphi_2 = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}_1 &= 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (20.72)$$

т. е. в начальный момент первый маятник занимал крайнее нижнее положение, второй маятник был отклонен на угол φ_0 и система была отпущена без начальной скорости.

Продифференцируем φ_1 и φ_2 по времени:

$$\dot{\varphi}_1 = A_1 k_1 \cos(k_1 t + e_1) + A_2 k_2 \cos(k_2 t + e_2),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \sqrt{2} A_1 k_1 \cos(k_1 t + e_1) - \sqrt{2} A_2 k_2 \cos(k_2 t + e_2).$$

Подставим в эти выражения для $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ и в равенства (20.71) начальные условия

$$0 = A_1 k_1 \cos e_1 + A_2 k_2 \cos e_2, \quad 0 = \sqrt{2} A_1 k_1 \cos e_1 - \sqrt{2} A_2 k_2 \cos e_2,$$

$$0 = A_1 \sin e_1 + A_2 \sin e_2, \quad \varphi_0 = \sqrt{2} A_1 \sin e_1 - \sqrt{2} A_2 \sin e_2.$$

Из первых двух уравнений найдем $\cos e_1 = \cos e_2 = 0$, откуда $e_1 = \pi/2$, $e_2 = \pi/2$. Теперь вторая пара уравнений принимает вид

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_1 - A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi_0.$$

Следовательно, $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_0$, $A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_0$. Частное решение, соответствующее начальным условиям (20.72), будет

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi_0 (\cos k_1 t - \cos k_2 t), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos k_1 t + \cos k_2 t).$$

Главные колебания согласно (20.71) определяются следующими равенствами

$$\varphi_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + e_1), \quad \varphi_2^{(1)} = \sqrt{2} A_1 \sin(k_1 t + e_1);$$

второе главное колебание:

$$\varphi_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + e_2), \quad \varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2} A_2 \sin(k_2 t + e_2).$$

Формы главных колебаний изображены на рис. 20.11. Если в первом главном колебании первый маятник отклонится от вертикали на угол $\varphi_1^{(1)}$, то второй отклонится в ту же сторону на угол $\varphi_2^{(1)} = \sqrt{2} \varphi_1^{(1)}$. Во втором главном колебании при

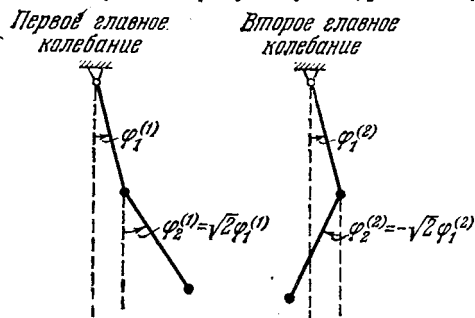


Рис. 20.11

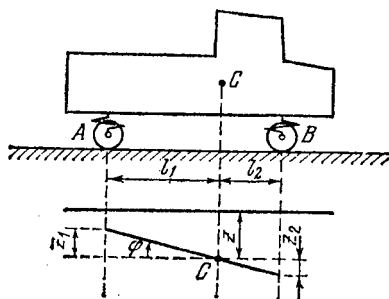


Рис. 20.12

отклонении первого маятника на угол $\varphi_1^{(2)}$ второй маятник отклонится в противоположную сторону на угол $\varphi_2^{(2)} = -\sqrt{2} \varphi_1^{(2)}$.

Задача 20.6. Определить колебания автомобиля в его средней вертикальной плоскости при следующих условиях: масса поддресоренной части автомобиля равна m , расстояния от центра тяжести C до вертикальных плоскостей, проведенных через оси колес, равны l_1 и l_2 , радиус инерции поддресоренной части относительно центральной оси, параллельной оси автомобиля, ρ , жесткости рессор c_1 и c_2 .

Так как колебания автомобиля происходят в его средней вертикальной плоскости, то система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем вертикальное перемещение z центра масс C автомобиля и угол φ поворота вокруг оси, проходящей через точку C параллельно осям (рис. 20.12).

Кинетическая энергия на основании теоремы Кёнига будет равна

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2,$$

где $I_C = m r^2$ — момент инерции автомобиля.

Потенциальная энергия Π системы складывается из потенциальной энергии $\Pi_1 = -mgz$ силы тяжести и потенциальной энергии $\Pi_2 = \Pi_A + \Pi_B$ рессор A и B . Из рис. 20.12 видно, что деформация пружины A от положения равновесия для малых углов равна $z - z_1 = z - l_1 \varphi$, а с учетом статической деформации f_A она будет $f_A + z - l_1 \varphi$. Поэтому потенциальная энергия пружины A

$$\Pi_A = \frac{1}{2} c_1 (f_A + z - l_1 \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_1 f_A^2.$$

Аналогично для пружины B

$$\Pi_B = \frac{1}{2} c_2 (f_B + z + l_2 \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_2 f_B^2.$$

Потенциальная энергия всей системы равна

$$\Pi = -mgz + \frac{1}{2} c_1 (f_A + z - l_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2} c_2 (f_B + z + l_2 \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_1 f_A^2 - \frac{1}{2} c_2 f_B^2.$$

В положении равновесия при $z = 0$ и $\varphi = 0$ должны выполняться равенства (20.2):

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = 0.$$

Имеем

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = [-mg + c_1 (f_A + z - l_1 \varphi) + c_2 (f_B + z + l_2 \varphi)]_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = -mg + c_1 f_A + c_2 f_B,$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right|_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = [-c_1 l_1 (f_A + z - l_1 \varphi) + c_2 l_2 (f_B + z + l_2 \varphi)]_{\substack{z=0 \\ \varphi=0}} = -c_1 l_1 f_A + c_2 l_2 f_B.$$

Следовательно, параметры системы удовлетворяют условиям

$$-mg + c_1 f_A + c_2 f_B = 0, \quad -c_1 l_1 f_A + c_2 l_2 f_B = 0. \quad (20.73)$$

Раскроем в выражении для потенциальной энергии скобки и сгруппируем члены:

$$\Pi = (-mg + c_1 f_A + c_2 f_B) z + (c_2 l_2 f_B - c_1 l_1 f_A) \varphi + \\ + \frac{1}{2} (c_1 + c_2) z^2 + (c_2 l_2 - c_1 l_1) z \varphi + \frac{1}{2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) \varphi^2,$$

или, принимая во внимание равенства (20.73),

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) z^2 + (c_2 l_2 - c_1 l_1) z \varphi + \frac{1}{2} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) \varphi^2.$$

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad L = T - \Pi$$

после очевидных операций приводятся к такому виду:

$$m \ddot{z} + (c_1 + c_2) z + (c_2 l_2 - c_1 l_1) \varphi = 0, \\ I_C \ddot{\varphi} + (c_2 l_2 - c_1 l_1) z + (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) \varphi = 0.$$

Запишем полученные дифференциальные уравнения малых колебаний автомобиля следующим образом (напомним, что $I_C = m r^2$):

$$\ddot{z} + a z + b \varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{b}{r^2} z + \frac{e}{r^2} \varphi = 0, \quad (20.74)$$

где

$$a = \frac{c_1 + c_2}{m}, \quad b = \frac{c_2 l_2 - c_1 l_1}{m}, \quad e = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{m}. \quad (20.75)$$

Ищем решение уравнений в форме (20.60):

$$z = A \sin(kt + e), \quad \varphi = B \sin(kt + e).$$

Подставляя z , $\ddot{z}$, φ и $\ddot{\varphi}$ в дифференциальные уравнения движения и приравнявая нулю коэффициенты при $\sin(kt + e)$, получим систему двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно A и B :

$$(a - k^2)A + bB = 0, \quad \frac{b}{\rho^2}A + \left(\frac{e}{\rho^2} - k^2\right)B = 0. \quad (20.76)$$

Так как при колебаниях A и B не равны нулю одновременно, то определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a - k^2 & b \\ \frac{b}{\rho^2} & \frac{e}{\rho^2} - k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение частот после раскрытия определителя и группировки членов примет вид

$$k^4 - \left(\frac{e}{\rho^2} + a\right)k^2 + \frac{ae - b^2}{\rho^2} = 0,$$

откуда

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{\rho^2} + a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{e}{\rho^2} + a \right)^2 - \frac{ae - b^2}{\rho^2}},$$

или

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{\rho^2} + a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{e}{\rho^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{\rho^2}}.$$

Из первого уравнения системы (20.76) найдем отношения амплитуд

$$\mu_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{b}{k_1^2 - a}, \quad \mu_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{k_2^2 - a}.$$

Теперь составим общее решение дифференциальных уравнений малых колебаний (20.74):

$$z = \mu_1 B_1 \sin(k_1 t + e_1) + \mu_2 B_2 \sin(k_2 t + e_2),$$

$$\varphi = B_1 \sin(k_1 t + e_1) + B_2 \sin(k_2 t + e_2).$$

Здесь k_1 и k_2 , μ_1 и μ_2 вычисляются по установленным формулам, а произвольные постоянные B_1 , B_2 , e_1 и e_2 определяются из начальных условий.

Рассмотрим численный пример: $m = 4000$ кг, $\rho = 1,2$ м, $l_1 = 1,5$ м, $l_2 = 1,3$ м, $c_1 = 2,94$ кН/см, $c_2 = 1,96$ кН/см. После подстановки этих значений получим $k_1 = 10,06$ рад/с, $k_2 = 13,9$ рад/с, что соответствует 95,6 колеб/мин и 133 колеб/мин. Найдем теперь отношения амплитуд: $\mu_1 = A_1/B_1 = 218$ см/рад = 3,8 см/град, $\mu_2 = A_2/B_2 = -66$ см/рад = -1,15 см/град.

Таким образом, если в первом главном колебании центр масс опустится на 3,8 см, то автомобиль повернется одновременно по ходу часовой стрелки на один градус. Во втором главном колебании при опускании центра масс на 1,15 см автомобиль повернется против хода часовой стрелки на один градус. Формы главных колебаний показаны на рис. 20.13.

Если $c_1 = c_2 = c$, $l_1 = l_2 = l$ (соответствует железнодорожным вагонам), то по формулам (20.75) будем иметь:

$$a = 2 \frac{c}{m}, \quad b = 0, \quad e = 2 \frac{cl^2}{m}.$$

Дифференциальные уравнения малых колебаний (20.74) в этом случае разделяются:

$$\ddot{z} + az = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{e}{\rho^2} \varphi = 0,$$

и, следовательно, колебания в каждой координате будут независимыми друг от друга.

Задача 20.7. Электромотор массы $m_1 = 100$ кг установлен на фундаменте с помощью амортизаторов, суммарная жесткость которых равна $c_1 = 490$ Н/см. Учитывая упругость фундамента, определить вертикальные колебания системы, если приведенная масса фундамента $m_2 = 1000$ кг, а его упругие свойства характеризуются коэффициентом жесткости $c_2 = 245$ Н/см (рис. 20.14, а).

Схематично представим фундамент в виде тела II, установленного на пружине жесткости c_2 (рис. 20.14, б). Тело I (мотор) связано с телом II с помощью пружины жесткости c_1 .

Обозначим через O_1 и O_2 положения равновесия соответствующих тел. На систему, состоящую из двух тел, действуют активные силы тяжести m_1g и m_2g и

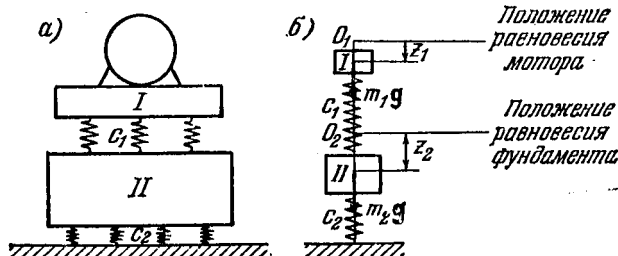


Рис. 20.14

упругие силы пружин. Положение системы будем определять двумя обобщенными координатами z_1 и z_2 (z_i — вертикальное перемещение центра тяжести тела i от соответствующего положения равновесия). Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2.$$

Потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии сил тяжести и потенциальной энергии двух пружин:

$$\Pi = -m_1gz_1 - m_2gz_2 + \frac{1}{2}c_1(f_1 + z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(f_2 + z_2)^2 - \frac{1}{2}c_1f_1^2 - \frac{1}{2}c_2f_2^2,$$

где f_1 и f_2 — статические деформации пружин. Раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$\Pi = (-m_1g - c_1f_1)z_1 + (-m_2g + c_1f_1 + c_2f_2)z_2 + \frac{1}{2}c_1(z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2}c_2z_2^2.$$

В положении равновесия при $z_1 = z_2 = 0$ должны выполняться равенства (20.2):

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_2} \right)_0 = 0.$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} \right)_{z_1=z_2=0} = -m_1 g - c_1 f_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_2} \right)_{z_1=z_2=0} = -m_2 g + c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0.$$

В силу этих равенств выражение для потенциальной энергии системы примет вид

$$\Pi = 1/2 c_1 (z_2 - z_1)^2 + 1/2 c_2 z_2^2.$$

Воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Для координаты z_1 имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = m_1 \dot{z}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = m_1 \ddot{z}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial z_1} = c_1 (z_2 - z_1).$$

Подставляя соответствующие выражения и перенося все члены в левую часть, получим дифференциальные уравнения малых колебаний рассматриваемой системы (уравнение для z_2 составлено аналогично)

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1 z_1 - c_1 z_2 = 0, \quad m_2 \ddot{z}_2 - c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2 = 0. \quad (20.77)$$

Будем искать решение в форме (20.60):

$$z_1 = A \sin(kt + e), \quad z_2 = B \sin(kt + e).$$

Продифференцируем эти выражения для z_1 и z_2 дважды по времени, подставим в дифференциальные уравнения движения, приравняем к нулю коэффициенты при $\sin(kt + e)$ и сгруппируем члены:

$$(c_1 - m_1 k^2) A - c_1 B = 0, \quad (20.78)$$

$$-c_1 A + (c_1 + c_2 - m_2 k^2) B = 0.$$

Составим уравнение частот

$$\begin{vmatrix} c_1 - m_1 k^2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2 k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель,

$$m_1 m_2 k^4 - [m_1 (c_1 + c_2) + m_2 c_1] k^2 + c_1 c_2 = 0.$$

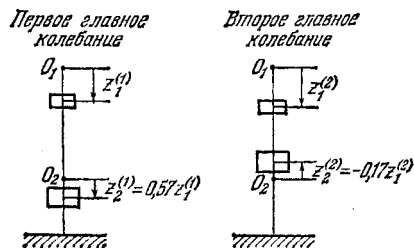


Рис. 20.15

Подставляя численные значения и деля на коэффициент при k^4 , получим

$$k^4 - 784 k^2 + 120\,000 = 0.$$

Отсюда найдем $k_1^2 = 209$, $k_2^2 = 575$ и частоты главных колебаний $k_1 = 14,5$ рад/с, $k_2 = 24,0$ рад/с.

Из первого уравнения (20.78) определим отношения амплитуд для каждого главного колебания:

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{c_1 - m_1 k_1^2}{c_1} = 0,57, \quad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{c_1 - m_1 k_2^2}{c_1} = -0,17.$$

Формы главных колебаний показаны на рис. 20.15. В первом главном колебании оба тела перемещаются в одну сторону, во втором — в разные стороны (на рисунке по-прежнему точки O_1 и O_2 — положения равновесия тел).

В заключение отметим, что все методы, изложенные для систем с двумя степенями свободы, почти без всяких изменений переносятся на системы с любым числом степеней свободы. В частности, уравне-

ние частот малых колебаний консервативной системы с s степенями свободы имеет вид (см. уравнение (20.62))

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 & \dots & c_{1s} - a_{1s}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 & \dots & c_{2s} - a_{2s}k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} - a_{s1}k^2 & c_{s2} - a_{s2}k^2 & \dots & c_{ss} - a_{ss}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (20.79)$$

Принципиально можно решить задачу о малых колебаниях системы с любым числом степеней свободы. Однако в общем случае при решении задач приходится преодолевать ряд трудностей чисто вычислительного характера. Наибольшие затруднения возникают при решении уравнения частот (20.79). Уже раскрытие определителя при $s > 2$ представляет трудоемкий процесс. Действительно, определитель порядка s содержит $s!$ членов, каждый из которых для уравнения (20.79) состоит из произведения s биномов вида $c_{ij} - a_{ij}k^2$. Таким образом, если раскрыть определитель (20.79), то в общем случае получится $2^s s!$ слагаемых. Так, для $s = 3$ число слагаемых равно $2^3 \cdot 3! = 48$, а при $s = 4$ это число будет $2^4 \cdot 4! = 384$.

Для того чтобы оценить сложность и значение этой проблемы, укажем, что над ее решением работали Лагранж, Лаплас, Гаусс, Леверье, Якоби, Лобачевский, Крылов и многие другие ученые. Были разработаны различные точные и приближенные методы, позволяющие упростить численное решение уравнения частот и связанных с этим задач *).

С появлением электронных вычислительных машин многие из ранее разработанных методов утратили свое значение, некоторые из них легли в основу программ работы вычислительных машин. В настоящее время в сложных случаях решение осуществляется на цифровых электронных вычислительных машинах дискретного действия. Кроме цифровых вычислительных машин, используются также аналоговые (моделирующие) электронные машины непрерывного действия. Об этом рассказано более подробно в § 2.7.

§ 20.8. Нормальные координаты

Сложность решения дифференциальных уравнений (20.59) малых колебаний консервативной системы:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20.80)$$

*) Изложение некоторых из этих методов можно найти, например, в следующих работах: Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1966; Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1963; Бабак И. М. Теория колебаний. — М.: Гостехиздат, 1958.

объясняется тем, что эти уравнения связаны между собой. Если бы можно было найти такие координаты θ_1 и θ_2 (они называются *нормальными*, или *главными координатами*), в которых дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\theta}_1 + \lambda_1 \theta_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_2 + \lambda_2 \theta_2 = 0, \quad (20.81)$$

где $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, то решение определилось бы сразу:

$$\theta_1 = A_1 \sin(\sqrt{\lambda_1} t + \epsilon_1), \quad \theta_2 = A_2 \sin(\sqrt{\lambda_2} t + \epsilon_2) \quad (20.82)$$

(A_1 , A_2 , ϵ_1 и ϵ_2 — произвольные постоянные интегрирования).

Покажем, что существует линейное преобразование, с помощью которого можно перейти от обобщенных координат q_1 и q_2 к нормальным координатам θ_1 и θ_2 . Для этого умножим первое уравнение (20.80) на l_1 , а второе на l_2 и сложим почленно оба уравнения (l_1 и l_2 — пока не известные множители). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} [(a_{11}l_1 + a_{21}l_2)q_1 + (a_{12}l_1 + a_{22}l_2)q_2] + \\ + [(c_{11}l_1 + c_{21}l_2)q_1 + (c_{12}l_1 + c_{22}l_2)q_2] = 0. \end{aligned} \quad (20.83)$$

Возьмем еще одно число λ и подчиним числа l_1 , l_2 и λ двум условиям:

$$\begin{aligned} c_{11}l_1 + c_{21}l_2 &= \lambda (a_{11}l_1 + a_{21}l_2), \\ c_{12}l_1 + c_{22}l_2 &= \lambda (a_{12}l_1 + a_{22}l_2). \end{aligned} \quad (20.84)$$

Введем теперь новую переменную θ по формуле

$$\theta = (a_{11}l_1 + a_{21}l_2) q_1 + (a_{12}l_1 + a_{22}l_2) q_2. \quad (20.85)$$

Тогда дифференциальное уравнение (20.83) примет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda\theta = 0. \quad (20.86)$$

Уравнения (20.84) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda a_{11}) l_1 + (c_{21} - \lambda a_{21}) l_2 &= 0, \\ (c_{12} - \lambda a_{12}) l_1 + (c_{22} - \lambda a_{22}) l_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.87)$$

Для существования ненулевого решения этой системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно l_1 и l_2 необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{21} - \lambda a_{21} \\ c_{12} - \lambda a_{12} & c_{22} - \lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (20.88)$$

Это уравнение совпадает с уравнением частот (20.62), и, следовательно, два корня этого уравнения, λ_1 и λ_2 , совпадают с k_1^2 и k_2^2 , где k_1 и k_2 — частоты главных колебаний. Так как каждому корню λ_1 и λ_2 соответствует своя система значений чисел l_1 и l_2 (они определяются из уравнений (20.87)), то согласно равенству (20.85) мы получим две координаты, θ_1 и θ_2 , удовлетворяющие двум уравнениям

вида (20.86). Таким образом, преобразование (20.85) приводит нас к нормальным координатам.

Из приведенного доказательства следует, что переход к нормальным координатам не сокращает вычисления по сравнению с решением исходных дифференциальных уравнений (уравнение для определения λ совпадает с уравнением частот, а уравнения (20.87) совпадают с уравнениями (20.61), служащими для определения форм главных колебаний). Поэтому нормальные координаты имеют главным образом теоретическое значение для доказательства различных положений.

В заключение заметим, что кинетическая и потенциальная энергии в нормальных координатах имеют вид

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(\lambda_1 \theta_1^2 + \lambda_2 \theta_2^2), \quad (20.89)$$

где $\lambda_1 = k_1^2$ и $\lambda_2 = k_2^2$.

§ 20.9. Функция рассеяния Релея

Исследуем, какое влияние оказывают силы сопротивления на движение потенциальной системы. Будем считать, что сила сопротивления F_k , приложенная к точке M_k , направлена в сторону, противоположную скорости v_k точки M_k :

$$F_k = -F_k \frac{v_k}{v_k},$$

где F_k — модуль силы F_k .

Пусть, далее, F_k зависит только от модуля скорости v_k . Разлагая $F_k = F_k(v_k)$ в ряд по степеням v_k и ограничиваясь членами первого порядка, получим

$$F_k = F_k(0) + F'_k(0)v_k.$$

Если при покое сила сопротивления не равна нулю ($F_k(0) \neq 0$), то говорят, что имеется *сухое трение*. Такой случай встречается при наличии трения скольжения и трения качения. Если же $F_k(0) = 0$, т. е. при покое сила сопротивления равна нулю, то говорят, что имеет место *вязкое трение*. Этот случай встречается при движении в сопротивляющейся среде.

В случае вязкого трения имеем

$$F_k = -b_k v_k, \quad (20.90)$$

где все постоянные коэффициенты $b_k = F'_k(0)$ неотрицательны (так как F_k и v_k — модули соответствующих величин).

Положение системы будем определять обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$. Тогда согласно формуле (18.27) обобщенные силы сопротивления Q'_j будут равны

$$Q'_j = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_j}.$$

Воспользуемся тождеством (19.6) и выражением (20.90) для силы F_k :

$$Q_j = - \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j}, \quad \text{или} \quad Q_j = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^n b_k v_k^2;$$

при этом учтено, что $\mathbf{v}_k^2 = v_k^2$.

Введем обозначение

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k v_k^2. \quad (20.91)$$

Функция Φ называется *функцией рассеивания Релея*, или *диссипативной функцией* (происхождение этого термина будет объяснено в дальнейшем). В этих обозначениях обобщенные силы сопротивления примут вид (для общности мы считаем, что число степеней свободы равно s)

$$Q_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (20.92)$$

Выразим функцию рассеивания Φ через обобщенные скорости $\dot{q}$. Для этого заметим, что выражение (20.91) по своей форме полностью совпадает с выражением для кинетической энергии (10.1) (массы точек m_k заменены неотрицательными коэффициентами b_k). Поэтому при стационарных связях выражение функции Релея Φ через обобщенные скорости $\dot{q}$ будет совпадать по форме с аналогичным выражением (19.26) для кинетической энергии. Изменятся только коэффициенты квадратичной формы. Обозначив эти коэффициенты через b_{ij} , получим

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (20.93)$$

причем $b_{ij} = b_{ji}$.

Будем считать, что на рассматриваемую материальную систему действуют потенциальные силы и силы сопротивления. Тогда обобщенные силы

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j,$$

или, учитывая равенства (20.92),

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (20.94)$$

Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода примут такой вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (20.95)$$

Покажем, что при наличии сил сопротивления полная механическая энергия убывает. Действительно, умножим каждое уравнение на $\dot{q}_j$ и сложим почленно все уравнения:

$$\sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (20.96)$$

Члены, стоящие в левой части этого равенства, и первая сумма правой части преобразуются к виду (см. формулы (19.29) и (19.30)) $\frac{d}{dt}(T + \Pi)$, так как при стационарных связях $T_0 = 0$ и $T_2 = T$.

Функция Релея согласно равенству (20.93) представляет однородную квадратичную форму относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$. Поэтому на основании теоремы Эйлера об однородных функциях (см. примечание на стр. 408) будем иметь

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2\Phi.$$

Теперь равенство (20.96) может быть записано в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -2\Phi. \quad (20.97)$$

Так как функция Релея Φ согласно (20.91) неотрицательна, то

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) < 0$$

и, следовательно, полная механическая энергия под действием сил сопротивления убывает или рассеивается, переходя, конечно, в другие формы энергии (например, тепловую). Из равенства (20.97) следует, что функция Релея может служить мерой рассеивания энергии, чем оправдывается ее название. На этом же основании силы сопротивления называются часто *диссипативными силами*.

Если функция рассеивания Релея (20.93) определенно положительна относительно обобщенных скоростей, то диссипация называется *полной*. Если же функция Релея может, кроме положительных значений, принимать значения, равные нулю, когда не все $\dot{q} = 0$, то диссипация называется *неполной*, или *частичной*.

Все выводы этого раздела были получены нами в предположении, что действуют силы F_k вязкого трения, причем их модули пропорциональны модулям соответствующих скоростей v_k , а по направлению силы F_k противоположны скоростям v_k (предположение о линейности самой системы для вывода формулы (20.97) не требуется). Полученные результаты можно обобщить на силы сопротивления более общей природы *).

*) См. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, гл. 5, § 5.11; Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1976, § 6.2.

§ 20.10. Влияние сил сопротивления на колебания системы около положения устойчивого равновесия

Пусть на потенциальную систему с двумя степенями свободы, движущуюся около положения устойчивого равновесия, действуют, помимо потенциальных сил, еще силы вязкого трения. Обобщенные силы сопротивления вычислим по формуле (20.92):

$$Q'_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2),$$

где диссипативная функция Релея определена равенством (20.93). Выполняя дифференцирование, найдем

$$Q'_j = -(b_{j1}\dot{q}_1 + b_{j2}\dot{q}_2) \quad (j = 1, 2).$$

Присоединяя обобщенные силы сопротивления Q'_j к уравнениям (20.59) и перенося все члены в левую часть, получим дифференциальные уравнения малых колебаний под действием потенциальных и диссипативных сил:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.98)$$

Будем искать решение этих уравнений в следующей форме:

$$q_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = A_2 e^{\lambda t}, \quad (20.99)$$

где A_1 , A_2 и λ — некоторые постоянные числа, которые требуется определить. Продифференцируем эти выражения для q_1 , q_2 дважды по времени:

$$\dot{q}_j = A_j e^{\lambda t}, \quad \ddot{q}_j = A_j \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставим значения координат и их производных в уравнения (20.98), сократим полученные равенства на общий множитель $e^{\lambda t}$ и сгруппируем члены. В результате получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} (a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}) A_1 + (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12}) A_2 &= 0, \\ (a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21}) A_1 + (a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22}) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.100)$$

Так как эти линейные однородные уравнения относительно A_1 , A_2 должны иметь решение, отличное от нулевого, то определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (20.101)$$

Можно доказать (мы не будем на этом останавливаться), что вещественные части корней этого характеристического уравнения отрицательны либо равны нулю. Таким образом, корни этого уравнения могут иметь вид

$$\lambda = -h \pm ni, \quad \lambda = -m, \quad \lambda = \pm ki,$$

где h , n , m и k — вещественные положительные числа.

Вещественным отрицательным корням (они бывают при больших силах сопротивления; см. § 2.3) соответствует аperiodическое движение

$$q = Ae^{-mt}.$$

Чисто мнимым корням (они могут появиться при частичной диссипации) отвечают главные колебания вида

$$q = A \sin(kt + \varepsilon).$$

Комплексно сопряженным корням отвечают затухающие главные колебания

$$q = Ae^{-ht} \sin(nt + \varepsilon).$$

Обычно силы сопротивления невелики. В этом случае при полной (а иногда и при частичной) диссипации все корни характеристического уравнения (20.101) будут комплексно сопряженными с отрицательными вещественными частями:

$$-h_1 \pm n_1 i, \quad -h_2 \pm n_2 i.$$

Каждой паре комплексно сопряженных корней отвечает свое главное затухающее колебание. Поэтому общее решение уравнений (20.98) имеет при этих условиях такой вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} e^{-h_1 t} \sin(n_1 t + \varepsilon_1) + A_1^{(2)} e^{-h_2 t} \sin(n_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 &= A_2^{(1)} e^{-h_1 t} \sin(n_1 t + \varepsilon_1) + A_2^{(2)} e^{-h_2 t} \sin(n_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (20.102)$$

В этом решении из четырех чисел $A_j^{(k)}$ произвольных только два, остальные определяются из уравнений (20.100) подобно тому, как это было сделано в § 20.6 при определении форм главных колебаний.

§ 20.11. Приближенный метод вычисления корней характеристического уравнения

Покажем, что при небольших по модулю силах сопротивления (случай, чаще всего встречающийся на практике) вычисление корней характеристического уравнения значительно упрощается, так как их мнимые и вещественные части приближенно могут быть вычислены независимо друг от друга. Действительно, при небольших силах сопротивления можно считать, что они зависят от малого параметра ε :

$$b_{jk} = \varepsilon \beta_{jk},$$

где β_{jk} — некоторые, вообще говоря, конечные числа.

Характеристическое уравнение (20.101) в развернутой форме будет иметь вид (с точностью до членов первого порядка относительно ε)

$$a_0 \lambda^4 + \varepsilon a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + \varepsilon a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (20.103)$$

Положим $\varepsilon = 0$ и $\lambda = \pm ki$; тогда характеристическое уравнение (20.103) переходит в уравнение частот незатухающих колебаний (20.64):

$$a_0 k^4 - a_2 k^2 + a_4 = 0. \quad (20.104)$$

Разложим вещественную и мнимую части корня λ уравнения (20.103) в ряды по степеням ε , ограничиваясь членами первого порядка относительно ε :

$$\lambda = \alpha\varepsilon + (\beta + \varepsilon\gamma)i,$$

где α , β и γ — вещественные числа.

Заметим, что вещественная часть λ не имеет свободного от ε члена, так как все корни уравнения (20.104) относительно k^2 вещественны и положительны (см. § 20.7), а следовательно, при $\varepsilon = 0$ корни уравнения (20.103) — чисто мнимые числа.

Вычислим λ^2 , λ^3 , λ^4 , придерживаясь все время принятой точности. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -\beta^2 - 2\varepsilon\beta\gamma + 2\varepsilon\alpha\beta i, & \lambda^3 &= -3\varepsilon\alpha\beta^2 - (\beta^3 + 3\varepsilon\beta^2\gamma)i, \\ \lambda^4 &= \beta^4 + 4\varepsilon\beta^3\gamma - 4\varepsilon\alpha\beta^3 i. \end{aligned}$$

Внесем выражения для λ , λ^2 , λ^3 , λ^4 в уравнение (20.103), отделим вещественную и мнимые части и сгруппируем члены по степеням ε , сохраняя члены не выше первого порядка:

$$\begin{aligned} &[(a_0\beta^4 - a_2\beta^2 + a_4) + 2\beta\gamma(2a_0\beta^2 - a_2)\varepsilon] - \\ &- \beta\varepsilon i [(4a_0\beta^2 - 2a_2)\alpha + (a_1\beta^3 - a_3)] = 0. \end{aligned}$$

Это равенство может выполняться при всех ε только в том случае, если

$$a_0\beta^4 - a_2\beta^2 + a_4 = 0, \quad \gamma = 0, \quad (4a_0\beta^2 - 2a_2)\alpha + (a_1\beta^3 - a_3) = 0.$$

Так как $\gamma = 0$, то мнимая часть корня характеристического уравнения с точностью выше первого порядка относительно ε равна корню уравнения (20.104). Иначе говоря, частоты затухающих колебаний с указанной точностью совпадают с частотами незатухающих колебаний.

Пусть $\beta_j = k_j$ — одна из частот незатухающих колебаний. Тогда из последнего равенства будем иметь (мы перешли к старым обозначениям $\lambda = -h \pm ni$, в которых $h = -\alpha\varepsilon$)

$$h_j = \frac{1}{2} \frac{a_1 k_j^2 - a_3}{2a_0 k_j^2 - a_2} \varepsilon \quad (j = 1, 2). \quad (20.105)$$

Формула (20.105) справедлива при условии, что k_j не является кратным корнем уравнения частот (20.104), так как в противном случае знаменатель правой части этого равенства обращается в нуль.

Обозначим точные значения корней характеристического уравнения (20.103) через $\lambda_j^* = -h_j^* \pm n_j i$, а приближенные значения через $\lambda_j = -h_j \pm k_j i$, где h_j вычислены по формулам (20.105),

а k_j — корни частотного уравнения (20.104). Покажем, что сумма точных значений корней характеристического уравнения равна сумме их приближенных значений. Действительно, пусть k_1^* и k_2^* — корни уравнения частот (20.104); тогда по формулам Виета будем иметь

$$k_1^* + k_2^* = a_2/a_0, \quad k_1^* k_2^* = a_4/a_0.$$

Вычислим по формуле (20.105) соответствующие значения h_1 и h_2 :

$$h_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 k_1^* - a_3}{2a_0 k_1^* - a_2} \varepsilon, \quad h_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 k_2^* - a_3}{2a_0 k_2^* - a_2} \varepsilon.$$

Найдем затем сумму этих коэффициентов

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 k_1^* - a_3}{2a_0 k_1^* - a_2} + \frac{a_1 k_2^* - a_3}{2a_0 k_2^* - a_2} \right] \varepsilon,$$

или

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \frac{4a_0 a_1 k_1^* k_2^* - (2a_0 a_3 + a_1 a_2)(k_1^* + k_2^*) + 2a_2 a_3}{4a_0^2 k_1^* k_2^* - 2a_0 a_2 (k_1^* + k_2^*) + a_2^2} \varepsilon.$$

Пользуясь выражениями для $k_1^* + k_2^*$ и $k_1^* k_2^*$, после очевидных преобразований получим

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} \varepsilon.$$

Составим сумму приближенных значений корней характеристического уравнения. Имеем ($\lambda = -h \pm ki$)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -2(h_1 + h_2).$$

Учитывая последнее равенство, найдем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{a_1}{a_0} \varepsilon.$$

Воспользуемся теперь первой формулой Виета для точных значений корней характеристического уравнения (20.103):

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* + \lambda_4^* = -\frac{a_1}{a_0} \varepsilon.$$

Сравнивая оба выражения, видим, что суммы приближенных и точных значений корней характеристического уравнения одинаковы. Это может служить дополнительным оправданием введения приближенных формул (20.105).

На основании доказанного при малом сопротивлении можно рекомендовать следующий порядок вычисления корней характеристического уравнения:

1. Выделить малый параметр ε и привести характеристическое уравнение (20.101) к виду (20.103).

2. Положить $\varepsilon = 0$ и составить уравнение частот (20.104).

3. Определить частоты колебаний, положив $n_j \approx k_j$.

4. Вычислить вещественные части корней уравнения (20.103) по формуле (20.105).

Заметим также, что при малом сопротивлении формы главных колебаний мало отличаются от соответствующих форм незатухающих колебаний.

Задача 20.8. Электромотор установлен с помощью амортизаторов на упругом фундаменте (см. задачу 20.7 § 20.7). Гашение возникающих собственных колебаний осуществляется двумя демпферами A и B (рис. 20.16), создающими силу сопротивления, пропорциональную относительной скорости; коэффициент суммарной силы сопротивления $b = 4,9 \text{ Н} \cdot \text{с/см}$. Определить параметры затухающих колебаний.

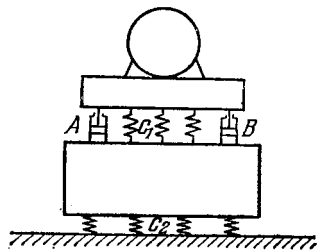


Рис. 20.16

Скорость электромотора относительно фундамента равна $\dot{z}_2 - \dot{z}_1$. Будем для определенности считать, что $\dot{z}_2 > \dot{z}_1 > 0$. Тогда относительная скорость электромотора будет направлена вверх, а сила сопротивления F_{1c} , приложенная к электромотору, вниз; очевидно, что сила сопротивления F_{2c} , приложенная к фундаменту, направлена вверх (силы сопротивления F_{1c} и F_{2c} для рассматриваемой системы являются внутренними силами). Из этого следует, что обобщенные силы сопротивления, соответствующие обобщенным координатам z_1 и z_2 , будут

$$Q'_1 = b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \quad Q'_2 = -b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1).$$

Функция рассеивания Релея (20.93) определяется равенством

$$\Phi = 1/2 b (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2.$$

Легко проверить справедливость равенств (20.92):

$$Q'_1 = -\partial\Phi/\partial\dot{z}_1, \quad Q'_2 = -\partial\Phi/\partial\dot{z}_2.$$

Отметим, что функция рассеивания не является определению положительной, так как при $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 \neq 0$ она обращается в нуль.

Присоединяя к правым частям уравнений незатухающих колебаний (20.77) обобщенные силы сопротивления, получим дифференциальные уравнения затухающих колебаний

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 - b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_1 z_1 - c_1 z_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_1 z_1 + (c_1 + c_2) z_2 &= 0. \end{aligned}$$

В соответствии с общей теорией будем искать решение в форме

$$z_1 = A e^{\lambda t}, \quad z_2 = B e^{\lambda t},$$

откуда

$$\dot{z}_1 = \lambda A e^{\lambda t}, \quad \ddot{z}_1 = \lambda^2 A e^{\lambda t}, \quad \dot{z}_2 = \lambda B e^{\lambda t}, \quad \ddot{z}_2 = \lambda^2 B e^{\lambda t}.$$

Подставим эти выражения для z , $\dot{z}$ и $\ddot{z}$ в дифференциальные уравнения движения, сократим их на $e^{\lambda t}$ и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} (m_1 \lambda^2 + b \lambda + c_1) A - (b \lambda + c_1) B &= 0, \\ -(b \lambda + c_1) A + (m_2 \lambda^2 + b \lambda + c_1 + c_2) B &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю определитель этой системы, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} m_1 \lambda^2 + b \lambda + c_1 & -(b \lambda + c_1) \\ -(b \lambda + c_1) & m_2 \lambda^2 + b \lambda + c_1 + c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, будем иметь

$$m_1 m_2 \lambda^4 + b(m_1 + m_2) \lambda^3 + [(c_1 + c_2)m_1 + c_1 m_2 + b^2] \lambda^2 + bc_2 \lambda + c_1 c_2 = 0.$$

При заданных значениях ($m_1 = 100$ кг, $m_2 = 1000$ кг, $c_1 = 490$ Н/см, $c_2 = 245$ Н/см, $b = 4,9$ Н·с/см) коэффициент b можно принять за малый параметр $\varepsilon = b$. В принятых для уравнения (20.103) обозначениях имеем

$$a_3 = m_1 m_2, \quad a_1 = m_1 + m_2, \quad a_2 = (c_1 + c_2)m_1 + c_1 m_2, \quad a_3 = c_2, \quad a_4 = c_1 c_2,$$

причем в a_2 отброшен малый член b^2 .

Если в характеристическом уравнении положим $b = 0$ и $\lambda = ki$, то получим уравнение частот

$$m_1 m_2 k^4 - [(c_1 + c_2)m_1 + c_1 m_2] k^2 + c_1 c_2 = 0.$$

Корни этого уравнения были найдены при решении задачи 20.7 § 20.7: $k_1^2 = 209$ рад/с², $k_1 = 14,5$ рад/с, $k_2^2 = 575$ рад/с², $k_2 = 24,0$ рад/с. Внося в формулу (20.105) соответствующие значения параметров, найдем $h_1 = 0,105$ рад/с, $h_2 = 2,60$ рад/с.

Положив приближенно $n_j = k_j$, получим корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -0,105 \pm 14,5i, \quad \lambda_{3,4} = -2,6 \pm 24i.$$

Как уже отмечалось, при малом сопротивлении формы главных колебаний затухающих колебаний практически совпадают с соответствующими формами незатухающих колебаний. Поэтому, пользуясь значениями для μ_1 и μ_2 , вычисленными в задаче 20.7 § 20.7, найдем главные колебания затухающих колебаний

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &= A_1 e^{-0,105t} \sin(14,5t + \varepsilon_1), & z_1^{(2)} &= A_2 e^{-2,6t} \sin(24t + \varepsilon_2), \\ z_2^{(1)} &= 0,57 A_1 e^{-0,105t} \sin(14,5t + \varepsilon_1), & z_2^{(2)} &= -0,17 A_2 e^{-2,6t} \sin(24t + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Первое главное колебание затухает значительно медленнее, чем второе. Это объясняется тем, что в первом главном колебании оба тела движутся в одном направлении, скорости вычитаются и сила сопротивления $F_c = b(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$ будет меньше, чем во втором главном колебании, когда движение тел происходит в разные стороны.

§ 20.12. Вынужденные колебания

Предположим, что к потенциальной системе, движущейся вблизи положения устойчивого равновесия, приложены также возмущающие силы. Обозначим обобщенную возмущающую силу, соответствующую обобщенной координате q_j , через $Q_j(t)$. Тогда дифференциальные уравнения движения можно получить, присоединяя к уравнениям (20.59) обобщенные силы $Q_j(t)$ (для простоты силами сопротивления пренебрегаем):

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1(t), \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2(t). \end{aligned} \quad (20.106)$$

Общее решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений складывается из общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения данной неоднородной системы. Соответствующая однородная система дифференциальных уравнений совпадает с системой (20.59), ее общее решение определяется равенствами (20.67). Поэтому, если

$q_1^*(t)$, $q_2(t)$ — какое-нибудь частное решение системы (20.106), то ее общее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + q_1^*(t), \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) + q_2^*(t). \end{aligned} \quad (20.107)$$

Совокупность главных колебаний называется *собственными колебаниями*; движение, определяемое частным решением $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ — *вынужденным движением* (эти термины иногда нуждаются в уточнении). В тех случаях, когда возмущающие силы изменяются по гармоническому закону (H_j , p и δ — заданные числа)

$$Q_j(t) = H_j \sin(pt + \delta),$$

частное решение ищется в той же форме:

$$q_j^*(t) = M_j \sin(pt + \delta),$$

где M_j — неопределенные коэффициенты, подлежащие определению. При этом предполагается, что частота p возмущающей силы не совпадает ни с одной из частот k_1 , k_2 собственных колебаний.

С помощью линейного преобразования перейдем в уравнениях (20.106) к нормальным координатам (см. § 20.8)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_1^* \theta_1 &= H_1^* \sin(pt + \delta), \\ \ddot{\theta}_2 + k_2^* \theta_2 &= H_2^* \sin(pt + \delta), \end{aligned}$$

где H_j^* — новые амплитудные значения возмущающих сил, а k_j — частоты собственных незатухающих колебаний исходной системы.

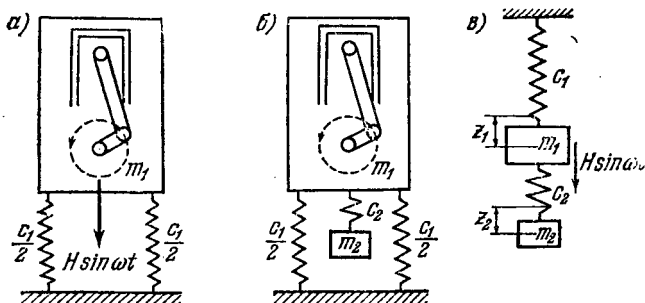


Рис. 20.17

Из этих уравнений видно, что резонанс в системе наступает при совпадении частоты p возмущающей силы с одной из частот собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим динамический поглотитель колебаний. На рис. 20.17, а приведена схема машины, установленной на упругой опоре. Если частота ω возмущающей силы $H \sin \omega t$, создаваемой движущимися внутри машины неуравновешенными массами, близка к собственной частоте $\sqrt{c_1/m_1}$ машины, то

система будет работать в зоне резонанса и на фундамент будет передаваться чрезмерно большая нагрузка.

Подвесим к машине дополнительный груз массой m_2 (рис. 20.17, б; на рис. 20.17, в изображена эквивалентная система).

Сравнивая системы, изображенные на рисунках 20.14 и 20.17, в, видим, что они идентичны, поменялись местами только индексы у масс и у жесткостей пружин. Поэтому дифференциальные уравнения движения системы, изображенной на рис. 20.17, б и в, можно получить из уравнений (20.77), поменяв в них индексы и добавив в уравнение, отвечающее координате z_1 , обобщенную силу $H \sin \omega t$:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) z_1 - c_2 z_2 &= H \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{z}_2 - c_2 z_1 + c_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20.108)$$

Частное решение будем искать в форме

$$z_1 = M_1 \sin \omega t, \quad z_2 = M_2 \sin \omega t.$$

Подставим значения для z_1 и z_2 в дифференциальные уравнения, сократим их на $\sin \omega t$ и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) M_1 - c_2 M_2 &= H, \\ -c_2 M_1 + (c_2 - m_2 \omega^2) M_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно M_1 и M_2 , получим

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{(c_2 - m_2 \omega^2) H}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}, \\ M_2 &= \frac{c_2 H}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}. \end{aligned}$$

Теперь находим вынужденные колебания

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{c_2 - m_2 \omega^2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2} H \sin \omega t, \\ z_2 &= \frac{c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2} H \sin \omega t. \end{aligned}$$

Если параметры подвешенного груза подобрать так, что

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0, \quad (20.109)$$

то машина не будет участвовать в вынужденных колебаниях. Действительно, в этом случае

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{H}{c_2} \sin \omega t.$$

Таким образом, добавочный груз «поглотил» колебания машины. Из равенства (20.109) видно, что для «поглощения» колебаний машины параметры дополнительного груза должны удовлетворять условию $\sqrt{c_2/m_2} = \omega$, т. е. динамический поглотитель колебаний нужно настроить на резонанс с частотой возбуждающей силы. Заметим, что частота $\sqrt{c_2/m_2}$ не является одной из частот системы «машина + поглотитель колебаний». Это — парциальная частота; она соответствует динамическому поглотителю, подвешенному к неподвижной опоре.

Глава XXI

АВТОНОМНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ *)

§ 21.1. Введение

В предыдущей главе были рассмотрены колебания динамических систем, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти колебания называются также малыми колебаниями, так как линеаризация уравнений обосновывается предположением, что отклонения системы от положения равновесия малы.

Достоинства метода линеаризации состоят в основном в следующем:

1) во многих случаях этот метод дает вполне удовлетворительные результаты, описывая достаточно точно процесс колебаний не только с качественной, но и с количественной стороны;

2) интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами не содержит принципиальных трудностей и сводится к чисто алгебраическим вычислениям;

3) метод линеаризации применим не только к анализу колебаний механических систем около положения устойчивого равновесия, но он также может быть использован для исследования колебаний около любого устойчивого движения механических, электромеханических, электрических и других систем.

Отмечая достоинства метода линеаризации, следует все же иметь в виду, что при упрощении дифференциальных уравнений движения можно упустить ряд явлений, специфичных для систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями.

К таким явлениям, например, можно отнести явление «автоколебаний» — периодических колебаний, амплитуда и частота которых в широких пределах не зависят от начальных условий и определяются параметрами системы.

Имеются и другие интересные с теоретической стороны и очень важные по своим приложениям примеры, которые не могут быть объяснены линейной теорией колебаний. Кроме того, существует ряд нелинейных зависимостей, которые принципиально не могут быть линеаризованы (например, характеристика кулонова трения скольжения).

В связи с этим примерно с конца двадцатых годов нашего столетия начала интенсивно развиваться теория нелинейных колеба-

*) Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. — М.: Судпромгиз, 1962.

Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фufaев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976.

ний, т. е. колебаний, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Материальные системы, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, называются *нелинейными системами*.

В теории нелинейных колебаний получает более глубокое развитие рассмотрение колебаний динамических систем, позволяющее изучить явления, недоступные линейной теории колебаний.

Безусловно, что нелинейные задачи значительно многообразнее, чем линейные, а изучение их представляет значительные трудности.

В настоящей главе, посвященной рассмотрению колебаний автономных нелинейных систем с одной степенью свободы, излагаются лишь некоторые методы исследования таких систем. Материалы этой главы следует рассматривать лишь как начальное введение в обширную и многообразную науку о колебаниях нелинейных систем.

§ 21.2. Фазовая плоскость

Одним из распространенных методов исследования нелинейных систем является метод фазовой плоскости (фазового пространства). Изложению этого метода на примере системы с одной степенью свободы и посвящен этот параграф *).

Многие задачи теории колебаний материальных систем с одной степенью свободы приводят к необходимости исследования дифференциального уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad (21.1)$$

где $f(x, \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$.

Вводя переменную $y = \dot{x}$, перепишем уравнения (21.1) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y). \quad (21.2)$$

Полученная система уравнений представляет собой частный случай системы более общего вида

$$\dot{x} = P(x, y, t), \quad \dot{y} = Q(x, y, t). \quad (21.3)$$

Если нелинейные функции P и Q не содержат явно времени, то система (21.3) называется *автономной системой*, а колебания, которые эта система описывает, называются *автономными*.

Если же функции P и Q содержат явно время, то система (21.3) называется *неавтономной*.

В этой главе будут рассматриваться только автономные системы.

*) Этот метод, разработанный и примененный к решению некоторых нелинейных задач радиотехники, механики, автоматического регулирования Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси, А. А. Андроновым и другими учеными, позволил решить многие нелинейные задачи и выявить специфические особенности нелинейных систем.

Вводя плоскость переменных x и $y = \dot{x}$, будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты.

Для простоты примем, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены на всей плоскости переменных x и y . Тогда каждому состоянию нелинейной системы, определяемому координатой x и скоростью $y = \dot{x}$, на плоскости xy будет соответствовать точка и, наоборот, каждая точка плоскости будет соответствовать только одному состоянию системы.

В связи с этим плоскость xy называют плоскостью состояний, или *фазовой плоскостью*. Каждому состоянию системы на фазовой плоскости соответствует одна точка, которую называют *изображающей точкой*.

При изменении состояния системы, т. е. при изменении координат x и $y = \dot{x}$, изображающая точка перемещается по фазовой плоскости. Траектория изображающей точки называется *фазовой траекторией*. Уравнение фазовой траектории представляет собой зависимость между координатой и скоростью движения рассматриваемой системы.

Целой фазовой траекторией называется кривая, которая описывается изображающей точкой за все время ее движения.

Положение изображающей точки на фазовой плоскости может быть определено радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

($\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы осей x и y). Следовательно, скорость изображающей точки (*фазовая скорость*) будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}. \quad (21.4)$$

Для исходной механической материальной системы производная $\dot{x}$ является скоростью изменения координаты x , а производная $\dot{y} = \ddot{x}$ — проекцией ускорения. Значит, точки фазовой плоскости, в которых фазовая скорость равна нулю, для исходной материальной системы будут соответствовать состояниям равновесия (скорость и ускорение системы одновременно равны нулю).

Деля второе уравнение системы (21.3) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (21.5)$$

Решение этого уравнения устанавливает связь между x и y , т. е. дает *интегральные кривые*.

Следует иметь в виду, что интегральные кривые лишь в простейших случаях являются фазовыми траекториями. Как это будет установлено ниже, интегральная кривая может состоять из нескольких фазовых траекторий.

В точках фазовой плоскости, где функции P и Q одновременно обращаются в нуль, т. е.

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \quad (21.6)$$

скорость изображающей точки равна нулю и, следовательно, для исходной материальной системы эти точки являются состояниями равновесия.

Точки фазовой плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнениям (21.6), для дифференциального уравнения (21.5) являются особыми точками; в этих точках не выполняются условия теоремы Коши о единственности решения дифференциального уравнения.

Таким образом, особые точки уравнения (21.5) имеют физический смысл как состояния равновесия исходной материальной системы.

Поведение фазовых траекторий на всей плоскости x, y , а также вблизи особых точек позволяет судить как о характере движения исходной системы, так и о характере ее состояний равновесия.

В качестве примера рассмотрим простейшую линейную систему.

Уравнение колебаний математического маятника имеет вид (стр. 122)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (21.7)$$

Введя обозначения $k^2 = g/l$ и $x = \varphi$ и считая колебания малыми, получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (21.8)$$

После замены $y = \dot{x}$ имеем

$$\dot{y} = -k^2 x, \quad \dot{x} = y \quad (21.9)$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k^2 x}{y}. \quad (21.10)$$

Единственной особой точкой этого уравнения является точка $x = 0$, $y = 0$.

Интегрирование уравнения (21.10) дает

$$y^2 + k^2 x^2 = c = \text{const.}$$

Полученная зависимость представляет собой семейство эллипсов. Каждый такой эллипс при конкретном значении постоянной c представляет собой фазовую траекторию, т. е. в этом случае интегральные кривые будут фазовыми траекториями. Полученное семейство эллипсов заполняет всю фазовую плоскость, за исключением начала координат. В этой точке эллипс, соответствующий $c = 0$, вырождается в точку (рис. 21.1).

Особая точка, через которую не проходит ни одна фазовая траектория и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называется *центром*.

Поскольку модуль скорости изображающей точки равен

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{y^2 + k^4 x^2},$$

то фазовая скорость равна нулю только в особой точке ($x = 0$, $y = 0$).

Рассмотрение фазовой плоскости с нанесенными на ней фазовыми траекториями позволяет судить о характере движения системы. Направление движения изображающей точки можно определить по одному из уравнений (21.9), например, при $x > 0$ $\dot{y} < 0$, следовательно, y убывает (см. рис. 21.1).

Изображающая точка, начав движение из какой-либо точки фазовой траектории, по истечении конечного промежутка времени, возвратится опять в ту же точку, так как фазовая скорость равна нулю только при $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, система вернется в свое исходное положение, а это значит, что замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению.

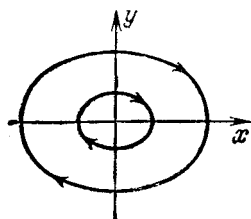


Рис. 21.1

Итак, нами установлено, что малые колебания маятника около устойчивого положения равновесия при любых начальных условиях совершаются по периодическому закону.

Рассмотрим теперь поведение маятника вблизи верхнего положения равновесия ($\varphi = \pi$).

Введя замену $\varphi = \psi + \pi$, перепишем уравнение (29.7) в виде

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l} \sin \psi = 0.$$

Для малых ψ , после замены ψ на x и g/l на k^2 , будем иметь

$$\ddot{x} - k^2 x = 0.$$

Отсюда

$$\dot{y} = k^2 x, \quad \dot{x} = y \quad (21.11)$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k^2 x}{y}.$$

Интегрируя это уравнение, получим уравнения интегральных кривых — семейство гипербол

$$y^2 - k^2 x = c, \quad (21.12)$$

заполняющих фазовую плоскость.

При $c = 0$ интегральная кривая вырождается в две прямые $y = kx$, $y = -kx$, проходящие через особую точку системы уравнений (21.11) $x = 0$, $y = 0$.

При $c \neq 0$ интегральные кривые через особую точку не проходят. Прямые $y = kx$ и $y = -kx$ являются асимптотами для интегральных кривых, для которых $c \neq 0$. Расположение интегральных кривых и направление движения по ним изображающей точки показано на рис. 21.2.

Отметим, что прямая $y = kx$ состоит из трех фазовых траекторий: прямой $y = kx$ при $x > 0$, особой точки $x = 0, y = 0$, прямой $y = kx$ при $x < 0$. Это же относится и к прямой $y = -kx$.

Таким образом, в рассматриваемом примере при любых начальных условиях, кроме соответствующих прямой $y = -kx$, изображающая точка или удаляется от особой точки или, вначале приближаясь к ней, затем удаляется от нее, причем движение исходной системы не является периодическим. Такая особая точка называется *седлом*.

Скорость изображающей точки равна нулю только в особой точке ($x = 0, y = 0$).

Из этого следует, что состояние равновесия, соответствующее этой особой точке, является неустойчивым.

Движение по прямой $y = -kx$ соответствует такому случаю, когда изображающая точка, перемещаясь к особой точке со стремящейся к нулю скоростью, в конечный промежуток времени ее не достигает. Очевидно, что движение по этой прямой соответствует такой специально подобранной скорости, когда кинетическая энергия в начальный момент равна работе, которую должны совершить действующие силы, чтобы система попала в положение равновесия.

Такое движение практически получить нельзя, так как нельзя точно реализовать такие начальные условия. Поэтому для всякого реального движения особая точка типа седла является неустойчивой.

На стр. 40 приведено уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы в среде с линейным сопротивлением

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0.$$

Заменяя $\dot{x}$ на y , имеем

$$\dot{y} = -2hy - k^2x, \quad \dot{x} = y$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - k^2x}{y}. \quad (21.13)$$

Единственной особой точкой этого уравнения является начало координат ($x = 0, y = 0$).

Уравнение интегральных кривых при $h < k$ имеет вид

$$(y^2 + 2hxy + k^2x^2)^{1/2} = ce^{\frac{h}{k^*} \operatorname{arctg} \frac{y+hx}{k^*x}}, \quad (21.14)$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$.

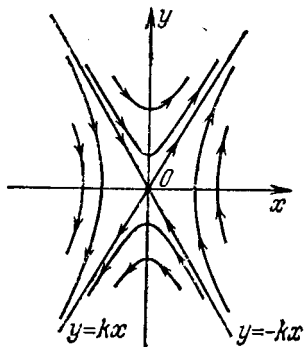


Рис. 21.2

Семейство интегральных кривых (21.14) заполняет всю фазовую плоскость. Фазовая скорость, равная $v = \sqrt{(2hy + k^2x)^2 + y^2}$, нигде не равна нулю, кроме особой точки, и стремится к нулю при приближении к этой точке.

Интегральные кривые являются в этом случае фазовыми траекториями и представляют собой спирали, навивающиеся на начало координат (рис. 21.3). Движение изображающей точки по фазовым траекториям происходит к началу координат (это видно из рассмотрения уравнений движения). Такая особая точка называется *устойчивым фокусом*.

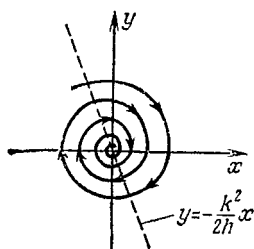


Рис. 21.3

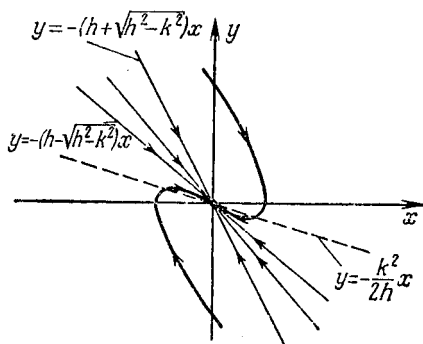


Рис. 21.4

Рассмотрение поведения фазовых траекторий позволяет сделать вывод, что при любых начальных условиях материальная точка совершает затухающие колебания, асимптотически приближаясь к состоянию равновесия.

При $h > k$ уравнение интегральных кривых будет

$$y^2 + 2hxy + k^2x^2 = c \left[\frac{y/x + h - \sqrt{h^2 - k^2}}{y/x + h + \sqrt{h^2 - k^2}} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - k^2}}}.$$

На рис. 21.4 показано примерное расположение интегральных кривых на плоскости xy . В этом случае фазовые траектории не совпадают с интегральными кривыми, так как каждая интегральная кривая состоит из трех фазовых траекторий: две из них соответствуют асимптотическим движениям изображающей точки к началу координат, а третья является особой точкой.

Особая точка, через которую проходят все интегральные кривые, называется *узлом*. В рассматриваемом случае изображающая точка по всем фазовым траекториям движется к особой точке, которая будет *устойчивым узлом*.

Для исходной системы устойчивый узел соответствует устойчивому состоянию равновесия. Представленные на рис. 21.4 фазовые траектории соответствуют аperiодическому движению.

На основании фазовых представлений о простейшей линейной системе можно сделать следующие выводы:

1. Характер и расположение фазовых траекторий, направление движения по ним изображающей точки дают возможность судить о характере движения исходной материальной системы.

2. Особые точки и их характер определяют характер состояний равновесия материальной системы.

Эти обстоятельства требуют найти способы и приемы определения характера особых точек нелинейных уравнений, а также найти методы построения фазовых траекторий для нелинейных уравнений, особенно тогда, когда дифференциальные уравнения интегральных кривых не удается проинтегрировать.

Рассмотрим предварительно вопрос о типах и характере особых точек линейной однородной системы общего вида

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy, \quad (21.15)$$

где a, b, c, d — постоянные числа.

Характеристическое уравнение этой системы уравнений имеет вид

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - cb = 0. \quad (21.16)$$

В дальнейшем ограничимся случаями, когда $a + d \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, т. е. случаями, когда отсутствуют чисто мнимые корни и нулевые корни.

Можно показать *), что для системы уравнений (21.15) могут быть следующие типы состояний равновесия:

1. Для корней уравнения (21.16) α_1 и α_2 действительных и отрицательных — устойчивый узел; изображающая точка движется по фазовым траекториям к состоянию равновесия.

2. Для α_1 и α_2 действительных и положительных — неустойчивый узел; изображающая точка движется по фазовым траекториям от состояния равновесия.

3. Для α_1 и α_2 действительных и разных знаков — седло.

4. Для α_1 и α_2 комплексно сопряженных при отрицательной действительной части — устойчивый фокус. Изображающая точка по фазовым траекториям (спиралям) приближается к состоянию равновесия.

5. Для α_1 и α_2 комплексно сопряженных при положительной действительной части — неустойчивый фокус. Изображающая точка по фазовым траекториям (спиралям) удаляется от состояния равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейной системы уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (21.17)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические нелинейные функции x и y . Предположим, что система уравнений (21.17) описывает поведение

*) Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

некоторой динамической системы, а координаты x и y являются координатами изображающей точки на фазовой плоскости.

Состояния равновесия исходной динамической системы являются особыми точками уравнения интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (21.18)$$

и находятся из уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (21.19)$$

Пусть координаты особой точки будут x_0 и y_0 . Поставим вопрос об определении характера и устойчивости этой точки, т. е. об определении устойчивости состояния равновесия исходной динамической системы.

Для ответа на вопрос об устойчивости особой точки с координатами x_0, y_0 выясним характер движения изображающей точки в окрестности особой точки. Для этого введем новые переменные ξ и η , характеризующие отклонения изображающей точки от точки с координатами x_0, y_0 :

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta.$$

Разложим функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в ряды по степеням ξ и η . Эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + P'_x(x_0, y_0)\xi + P'_y(x_0, y_0)\eta + P_1(\xi, \eta), \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + Q'_x(x_0, y_0)\xi + Q'_y(x_0, y_0)\eta + Q_1(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (21.20)$$

где $P_1(\xi, \eta)$ и $Q_1(\xi, \eta)$ — функции, в которые ξ и η входят в степени не ниже второй.

Так как x_0, y_0 — координаты особой точки, что

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Вводя обозначения

$$a = P'_x(x_0, y_0), \quad b = P'_y(x_0, y_0), \quad c = Q'_x(x_0, y_0), \quad d = Q'_y(x_0, y_0)$$

и учитывая соотношения (21.20), перепишем уравнения (21.17) в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta + P_1(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta + Q_1(\xi, \eta). \quad (21.21)$$

Если отбросить в этих уравнениях функции $P_1(\xi, \eta)$ и $Q_1(\xi, \eta)$, то получим линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \quad (21.22)$$

Характеристическое уравнение системы уравнений (21.22) будет

$$\alpha^2 - (a + d)\alpha + ad - cb = 0.$$

А. М. Ляпуновым было доказано, что в случае, когда оба корня этого уравнения имеют отличную от нуля действительную часть, состояние равновесия (особая точка) системы (21.21) асимптотически устойчиво, если действительные части корней отрицательны; если хотя бы одна действительная часть положительна, то состояние равновесия неустойчиво.

В случае, если действительные части корней характеристического уравнения равны нулю или если один из корней равен нулю, а другой отрицателен, то уравнения первого приближения (21.22) не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Характер поведения фазовых траекторий вблизи простых особых точек, т. е. точек, для которых оба корня характеристического уравнения имеют отличную от нуля действительную часть, также определяется уравнениями первого приближения (21.22) *).

Изложенное выше позволяет при определении характера и устойчивости особой точки нелинейной системы (21.17) пользоваться уравнениями первого приближения (21.22).

§ 21.3. Методы построения фазовых траекторий

Рассмотрим некоторые методы, позволяющие в ряде случаев точно или приближенно построить интегральные кривые на фазовой плоскости для динамической системы, имеющей одну степень свободы.

Консервативные системы. Пусть исходная система является консервативной. Дифференциальное уравнение движения такой системы можно привести к виду

$$m\ddot{x} = f(x)$$

(предполагаем, что $f(x)$ — аналитическая функция).

Это уравнение можно заменить двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{y} = \frac{1}{m}f(x), \quad \dot{x} = y. \quad (21.23)$$

Уравнение интегральных кривых в этом случае может быть проинтегрировано. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{my} \quad \text{и} \quad y dy = \frac{1}{m} f(x) dx,$$

то

$$\frac{y^2}{2} = h + \frac{1}{m} \int f(x) dx, \quad (21.24)$$

где h — постоянная интегрирования.

*) См., например, Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

Уравнение (21.24), представляющее собой уравнение интегральных кривых, выражает закон сохранения энергии, так как $m\dot{x}^2/2 = my^2/2$ — кинетическая энергия, а $\Pi = -\frac{1}{m} \int f(x) dx$ — потенциальная энергия исходной системы, поделенная на массу m .

После замены $y_1 = y \sqrt{2}$ соотношение (21.24) примет вид

$$y_1^2 = h - \Pi(x). \quad (21.25)$$

Постоянная h определяется из начальных условий, причем каждому значению начальных условий соответствует одно значение h , каждому же значению h соответствует бесчисленное множество значений x и y , удовлетворяющих уравнению (21.25).

Построенная на фазовой плоскости в соответствии с уравнением (21.25) кривая называется *кривой равной энергии*. Ветви этой кривой являются фазовыми траекториями. Из уравнений (21.23) следует, что интегральные кривые пересекают ось x , имея вертикальные касательные ($\dot{x} = 0$). Кроме того, согласно (21.25) интегральные кривые симметричны относительно оси x .

Интегральные кривые будут иметь горизонтальные касательные в точках, расположенных на прямых, параллельных оси y , для всех x , являющихся корнями уравнения $f(x) = 0$.

Так как

$$y_1 = \sqrt{h - \Pi(x)}, \quad (21.26)$$

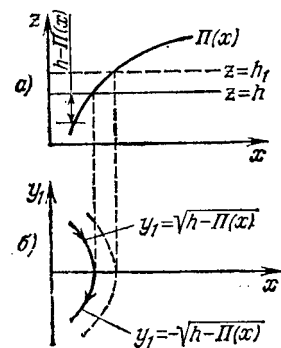


Рис. 21.5

то для x , удовлетворяющих неравенству $h - \Pi(x) < 0$, интегральные кривые действительных ветвей не имеют.

Особые точки, соответствующие состояниям равновесия исходной динамической системы, будут в точках фазовой плоскости, где $f(x) = 0$ и $y = 0$.

Для удобства введем в рассмотрение вспомогательную плоскость xz и построим на ней кривую $z = \Pi(x)$ (рис. 21.5, а).

Проведя прямую $z = h$, замечаем, что действительные движения будут только для x , расположенных левее точки пересечения кривой $z = \Pi(x)$ и прямой $z = h$. На рис. 21.5, б показан вид интегральной кривой на плоскости xy_1 (для $z = h_1 > h$ интегральная кривая показана пунктиром).

Рассмотрим случай, когда функция $z = \Pi(x)$ имеет минимум. Из рассмотрения рис. 21.6 следует, что при $h = h_0$ интегральная кривая вырождается в особую точку, где $f(x) = 0$ и $y = 0$. Для всех $h > h_0$ интегральные кривые будут замкнутыми кривыми, окружающими особую точку (центр).

Замкнутые интегральные кривые соответствуют периодическим движениям. Период этих движений определяется из уравнения (21.26).

Так как $y_1 = \dot{x}/\sqrt{2}$, то

$$dt = \frac{dx}{y_1 \sqrt{2}} = \frac{dx}{\sqrt{2} [h - \Pi(x)]},$$

откуда следует, что искомый период равен

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2} [h - \Pi(x)]}, \quad (21.27)$$

где x_1 и x_2 — абсциссы точек пересечения интегральной кривой с осью x .

Пусть потенциальная энергия имеет максимум (рис. 21.7). При $h = h_0$ интегральная кривая распадается на четыре фазовые траектории, сходящиеся в особой точке. Эти фазовые траектории называются *усами*. При $h > h_0$ все фазовые траектории расположены выше

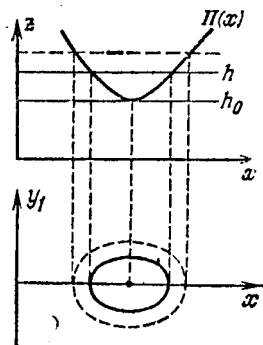


Рис. 21.6

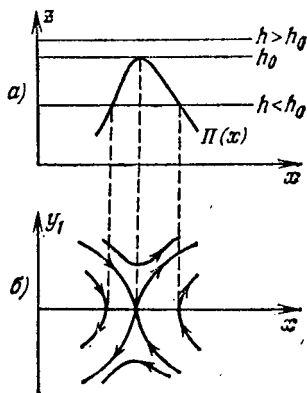


Рис. 21.7

и ниже особой точки, а при $h < h_0$ слева и справа от нее. Характер фазовых траекторий около особой точки подобен характеру фазовых траекторий у особой точки типа седла.

Рассмотренные случаи являются элементарным доказательством теоремы Лагранжа—Дирихле и теоремы Ляпунова, приведенных в § 20.2.

Перейдем теперь к рассмотрению возможных движений на всей фазовой плоскости. Будем по-прежнему предполагать, что $z = \Pi(x)$ является аналитической функцией для всех значений x . Построим на плоскости xz эту функцию и выясним возможный характер фазовых траекторий для какого-либо определенного значения z .

Возможны следующие случаи:

1. Кривая $z = \Pi(x)$ нигде не пересекается прямой $z = h$.

Если прямая $z = h$ лежит ниже кривой $z = \Pi(x)$, то на всей фазовой плоскости не будет движений, так как при этом y будет мнимым, т. е. движений с такой полной энергией у исходной системы не будет.

Если прямая $z = h$ лежит выше кривой $z = \Pi(x)$, то на фазовой плоскости будут две симметрично расположенные ветви интегральной кривой (рис. 21.8).

Для любых начальных условий, соответствующих точкам этой кривой, изображающая точка будет двигаться в одном направлении и уйдет в бесконечность.

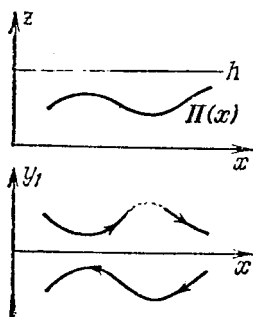


Рис. 21.8

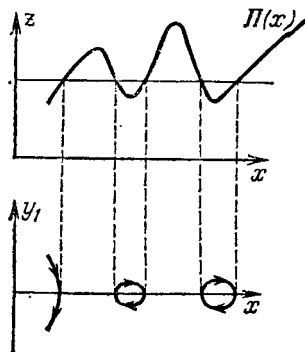


Рис. 21.9

Такие траектории называются *убегающими* траекториями.

2. Прямая $z = h$ пересекает кривую $z = \Pi(x)$, нигде ее не касаясь (рис. 21.9).

Для тех значений x , для которых $\Pi(x) > h$, фазовых траекторий не существует. Для x , для которых $\Pi(x) < h$, фазовые траектории могут быть двух видов: замкнутые ветви и ветви, уходящие в бесконечность. Замкнутые ветви соответствуют периодическим движениям, ветви, уходящие в бесконечность, соответствуют убегающим движениям.

3. Прямая $z = h$ имеет несколько точек касания с кривой $z = \Pi(x)$. В этом случае фазовые траектории возможны следующих видов:

а) изолированные точки, вблизи которых при данном h нет фазовых кривых. При изменении h мы будем иметь или замкнутую траекторию (при увеличении h) или не будем иметь действительных траекторий (при уменьшении h);

б) изолированные конечные куски фазовых траекторий (рис. 21.10). Это будут или просто замкнутые траектории, соответствующие периодическим движениям, или фазовые кривые с самопересечением, которые называются *сепаратрисами*. Точки самопересечения сепаратрис являются особыми точками типа седла и соответствуют точкам, где $z = h$ касается максимумов кривой $z = \Pi(x)$.

Сепаратрисы имеют очень большое значение, так как они отделяют друг от друга области, заполненные траекториями различных типов. В самом деле, при увеличении h мы получим интегральную кривую, охватывающую всю сепаратрису, при уменьшении h мы получим замкнутые траектории, которые показаны пунктиром на рис. 21.11;

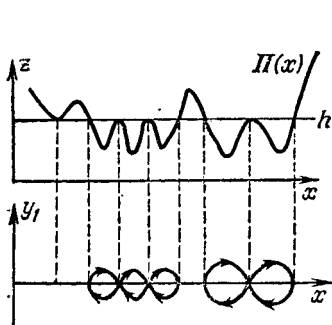


Рис. 21.10

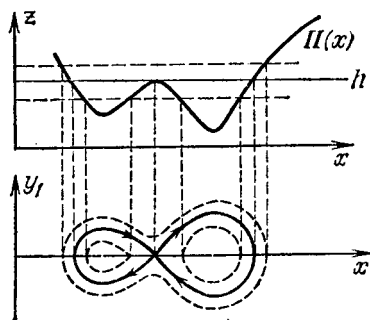


Рис. 21.11

в) бесконечные куски фазовых траекторий. Вид возможных фазовых траекторий показан на рис. 21.12. Здесь имеют место траектории, уходящие в бесконечность. Эти траектории также являются сепаратрисами, так как при изменении h мы получим существенно различные траектории.

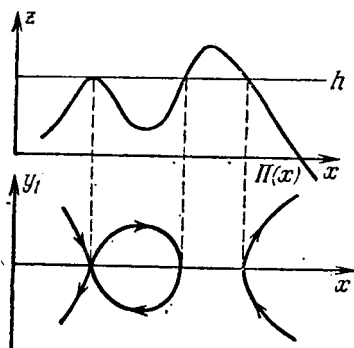


Рис. 21.12

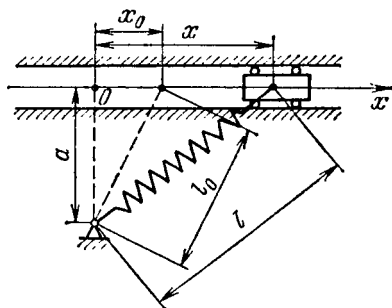


Рис. 21.13

Задача 21.1 *). Определить характер движения динамической системы, изображенной на рис. 21.13. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна $l_0 > a$. Жесткость пружины c . Масса тела m . Трением пренебречь.

Потенциальная энергия системы, деленная на массу тела, равна

$$\Pi = \frac{c}{2m} (\Delta l)^2,$$

где $\Delta l = l - l_0$ — деформация пружины.

*) Идея задачи заимствована из книги: Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: ИЛ, 1961.

Так как $l = \sqrt{a^2 + x^2}$, $l_0 = \sqrt{a^2 + x_0^2}$, то

$$\Pi = \frac{c}{2m} (\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x_0^2})^2 = \frac{ca}{2m} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} \right)^2.$$

Рассмотрим малые колебания системы и, ограничиваясь при разложении в ряд первыми членами одного порядка, отличными от нуля, получим

$$\Pi = \frac{c}{2m} \left[\frac{x_0^4}{4a^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 x^2 + \frac{x^4}{4a^2} \right]. \quad (21.28)$$

Так как

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{c}{2m} \left[- \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 x + \frac{x^3}{a^2} \right],$$

то значения x , где $\Pi(x)$ имеет экстремальные значения, определяются из уравнения

$$x \left[- \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 + \frac{x^2}{a^2} \right] = 0.$$

Корнями этого уравнения будут $x_1 = 0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0$. Найдя производную

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{c}{2m} \left[- \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 + \frac{3x^2}{a^2} \right],$$

убеждаемся, что при $x = x_1 = 0$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = - \frac{cx_0^2}{2ma^2} < 0,$$

т. е. при $x = 0$ функция $\Pi(x)$ имеет максимум, равный $\Pi(0) = cx_0^4/(8ma^2)$.

При $x = \pm x_0$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{cx_0^2}{ma^2} > 0$$

и, следовательно, при этих значениях x функция $\Pi(x)$ имеет минимум, равный $\Pi(\pm x_0) = 0$.

Примерный вид функции $\Pi(x)$ показан на рис. 21.14, а. На рис. 21.14, б показаны фазовые траектории динамической системы. Жирными линиями показаны сепаратрисы.

Из рассмотрения рис. 21.14, б видно, что для начальных условий в областях внутри сепаратрис система совершает периодические движения около устойчивых положений равновесия ($x = x_0$ или $x = -x_0$). В начале координат — неустойчивая особая точка — седло (неустойчивое состояние равновесия).

Для начальных условий вне сепаратрис система совершает периодическое движение, симметричное относительно начала координат.

Метод изоклин. Общим методом построения интегральных кривых является графический метод изоклин.

Пусть уравнения движения динамической системы будут

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (21.29)$$

Уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad (21.30)$$

где $\varphi(x, y) = Q(x, y)/P(x, y)$. Кривая

$$\varphi(x, y) = c \quad (21.31)$$

при фиксированном c представляет собой геометрическое место точек, в которых интегральные кривые имеют одинаковый угол наклона касательных, и называется *изоклиной*.

Метод изоклин заключается в следующем: на фазовой плоскости строится семейство изоклин, т. е. кривые (21.31) при различных значениях c . Пусть эти значения c будут $c_1, c_2, c_3, \dots$

Отметим, что точки пересечения изоклин будут особыми точками уравнения (21.30) и, следовательно, состояниями равновесия для исходной динамической системы.

Возьмем теперь какую-либо точку A на изоклине, для которой $c = c_1$, и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом, равным c_1 , затем проведем через эту же точку прямую с угловым коэффициентом, равным c_2 (рис. 21.15). Разделим теперь расстояние между точками пересечения этих прямых с изоклиной, для которой $c = c_2$, на две равные части и обозначим точку деления буквой B . Отрезок AB и примем за отрезок интегральной кривой между рассматриваемыми изоклинами. Отметим, что для более точного построения этого участка интегральной кривой значения c_1 и c_2 нужно выбирать как можно более близкими друг к другу. Дальнейшее построение проводится аналогичным образом, только за исходную точку выбирается уже точка B .

Перейдем теперь к рассмотрению других приемов построения интегральных кривых, пригодных для некоторых частных случаев.

Метод Льенара *). Метод Льенара является графическим способом построения интегральных кривых для нелинейных уравнений вида

$$\ddot{x} + \varphi_1(\dot{x}) + k^2x = 0. \quad (21.32)$$

Введем замену $\tau = kt$, тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} k \quad \text{и} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2} k^2$$

и, следовательно, уравнение (21.32) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0, \quad (21.33)$$

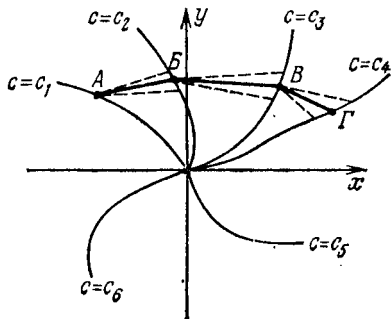


Рис. 21.15

*) Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. — М.: ИЛ, 1952.

где

$$\Phi\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{k^2} \Phi_1\left(k \frac{dx}{dt}\right).$$

Обозначив $dx/dt = y$, получим

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\Phi(y) - x.$$

Уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\Phi(y) - x}{y}. \quad (21.34)$$

Построим теперь на фазовой плоскости xu кривую

$$x = -\Phi(y).$$

Возьмем на фазовой плоскости некоторую точку P с координатами x и y (рис. 21.16). Проведем из этой точки прямую, параллельную оси x , до пересечения с кривой $x = -\Phi(y)$. Обозначим точку пересечения буквой M . Из точки M опустим перпендикуляр MN на ось x .

Так как $MP = x - (-\Phi(y)) = x + \Phi(y)$, то тангенс угла наклона отрезка NP к оси x равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PL}{MP} = \frac{y}{x + \Phi(y)}.$$

Следовательно, согласно (21.34) направление касательной к интегральной кривой, проходящей через точку P , будет перпендикулярно отрезку NP .

Таким образом, построение фазовой траектории можно провести следующим образом: через точку P проводим отрезок, перпендикулярный отрезку NP ,

на этом отрезке берем новую точку P_1 и определяем направление касательной к интегральной кривой указанным способом и т. д. В результате получим ломаную линию, которая будет тем ближе к интегральной кривой, чем меньше будут отрезки ломаной линии.

В приведенной ниже задаче показывается, когда построение Льебара сразу дает возможность точно построить интегральную кривую.

Задача 21.2. Влияние сухого трения на гармонический осциллятор.

Уравнение движения гармонического осциллятора при наличии сухого трения имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = T_x,$$

где $T_x = -T$ при $\dot{x} > 0$ и $T_x = T$ при $\dot{x} < 0$ ($T > 0$).

Вводя $\tau = kt$, получим

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \Phi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0,$$

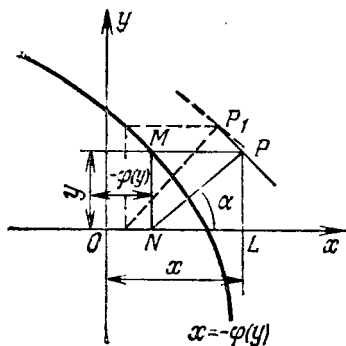


Рис. 21.16

где

$$\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = T_0 = \frac{T}{k^2} \quad \text{при} \quad \frac{dx}{d\tau} > 0 \quad \text{и} \quad \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = -T_0 = -\frac{T}{k^2} \quad \text{при} \quad \frac{dx}{d\tau} < 0.$$

Построим на фазовой плоскости кривую $x = -\varphi(y)$, где $y = dx/d\tau$.

Очевидно, что при $y > 0$ функция $x = -\varphi(y)$ будет иметь вид $x = -T_0$, а при $y < 0$ — вид $x = T_0$ (рис. 21.17).

Проводя для любой точки фазовой плоскости, где $y > 0$, построение Льенара, убеждаемся, что интегральная кривая, проходящая через эту точку, будет окружностью с центром в точке O_1 .

Для $y < 0$ интегральные кривые будут окружностями с центром в точке O_2 . Вид фазовых траекторий показан на рис. 21.17. Заметим, что отрезок O_1O_2 является отрезком стыка фазовых траекторий — зоной «застоя». В точках этого отрезка величина упругой силы пружины меньше максимальной силы трения покоя.

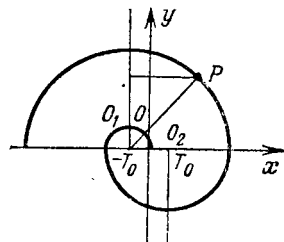


Рис. 21.17

§ 21.4. Метод припасовывания.

Понятие об автоколебаниях

Метод припасовывания является одним из точных методов изучения движения нелинейных систем и применяется в том случае, когда нелинейная функция, входящая в дифференциальное уравнение движения, может быть заменена ломаной линией, каждое звено которой является прямолинейным отрезком. В этом случае движение системы будет описываться линейными уравнениями, сменяющимися друг друга. Каждому звену ломаной линии будет соответствовать участок, на котором система описывается линейным дифференциальным уравнением.

Метод припасовывания заключается в следующем. Задавшись начальными условиями внутри какого-либо участка и решая соответствующее линейное дифференциальное уравнение, получим решение, справедливое на этом участке; затем определяем состояние системы (координату и скорость) на границе с соседним участком, на котором движение описывается уже другим линейным дифференциальным уравнением; для решения, соответствующего второму участку, за начальные условия выбираем конечное состояние на предыдущем участке и т. д.

Особенно наглядно метод припасовывания иллюстрируется на фазовой плоскости.

Пусть, например, кривая $y = \varphi(x)$ (рис. 21.18) делит фазовую плоскость на две области, в каждой из которых фазовые траектории определяются соответствующими линейными дифференциальными уравнениями. Пусть начальные условия задачи соответствуют точке P_0 с координатами x_0, y_0 на фазовой плоскости в области А.

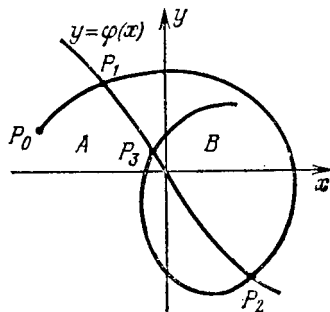


Рис. 21.18

Точка пересечения $P_1(x_1, y_1)$ фазовой траектории с кривой $y = \varphi(x)$ будет начальной точкой для фазовой траектории в области B . Точка $P_2(x_2, y_2)$ будет начальной точкой фазовой траектории в области A .

Производя такое последовательное припасовывание начальных условий, мы можем следить за движением изображающей точки и тем самым судить о поведении динамической системы.

В качестве примера рассмотрим маятник, находящийся в среде с вязким линейным сопротивлением. Предположим, что на маятник действует постоянный момент, направленный всегда в сторону движения:

$$M(\dot{\varphi}) = \begin{cases} M & \text{при } \dot{\varphi} > 0, \\ -M & \text{при } \dot{\varphi} < 0. \end{cases} \quad (21.35)$$

Уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = \pm M_0, \quad (21.36)$$

где $k^2 = g/l$, $2h = b/(ml)$, $M_0 = M/(ml)$ (m — масса маятника, l — его длина, b — коэффициент вязкого трения).

Вводя замену $\dot{\varphi} = \omega$, перепишем уравнение (21.36) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -2h\omega - k^2\varphi + M_0(\omega). \quad (21.37)$$

Рассмотрим часть фазовой плоскости $\varphi\omega$, для которой $\dot{\varphi} = \omega < 0$. Уравнения (21.37) в этом случае будут

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -2h\omega - k^2\varphi - M_0.$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-2h\omega - k^2\varphi - M_0}{\omega}. \quad (21.38)$$

Особая точка $\varphi = -M_0/k^2$, $\omega = 0$ здесь одна, и при $h < k$ это — устойчивый фокус.

Если предположить, что уравнение (21.38) справедливо для всех ω , то картина фазовой плоскости будет такой, как показано на рис. 21.19, а.

Для $\omega > 0$ уравнение (21.37) будет

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-2h\omega - k^2\varphi + M_0}{\omega}.$$

Особая точка $\varphi = M_0/k^2$, $\omega = 0$ — устойчивый фокус ($h < k$).

Если бы это уравнение было справедливо на всей плоскости $\varphi\omega$, то картина фазовой плоскости была бы такой, как на рис. 21.19, б.

Разрезая теперь обе фазовые плоскости, изображенные на рис. 21.19, по линии $\omega = 0$, произведем «сшивание» верхней полу-плоскости, изображенной на рис. 21.19, б, и нижней, изображенной на рис. 21.19, а.

На рис. 21.20 изображен характер фазовых траекторий для рассматриваемой задачи. Из рассмотрения рис. 21.20 следует, что при достаточно больших начальных отклонениях движение системы будет колебательным затухающим и, наоборот, при достаточно малых начальных отклонениях движение точки будет колебательным нарастающим.

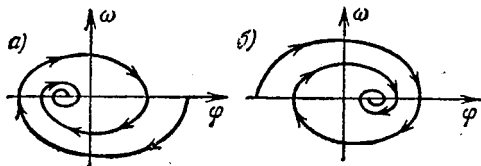


Рис. 21.19

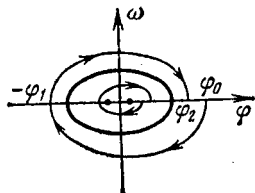


Рис. 21.20

Это происходит потому, что при малых значениях угловой скорости момент сил вязкого трения меньше возмущающего момента, а при больших значениях угловой скорости момент сил вязкого трения больше возмущающего момента.

Исходя из этого, естественно сделать вывод о существовании замкнутой фазовой траектории, на которую наматываются все остальные фазовые траектории. Эта замкнутая фазовая траектория соответствует периодическому движению системы, причем параметры этого периодического движения не зависят от начальных условий и определяются параметрами динамической системы.

Докажем, применяя метод припасовывания, что эта замкнутая фазовая траектория будет единственной и движение маятника, соответствующее этой фазовой траектории, будет устойчивым.

Движению маятника влево ($\omega = \dot{\phi} < 0$) соответствует уравнение

$$\ddot{\phi} + 2h\dot{\phi} + k^2\phi = -M_0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\phi = e^{-ht}(c_1 \cos k^*t + c_2 \sin k^*t) - \frac{M_0}{k^2},$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$ (предполагается, что $k > h$). Отсюда

$$\dot{\phi} = e^{-ht} [-h(c_1 \cos k^*t + c_2 \sin k^*t) + k^*(-c_1 \sin k^*t + c_2 \cos k^*t)].$$

Подставляя начальные условия, найдем

$$\varphi_0 = c_1 - \frac{M_0}{k^2}, \quad 0 = -h c_1 + k^* c_2.$$

Следовательно,

$$c_1 = \varphi_0 + \frac{M_0}{k^2}, \quad c_2 = \frac{h}{k^*} \left(\varphi_0 + \frac{M_0}{k^2} \right),$$

$$\varphi = e^{-ht} \left(\varphi_0 + \frac{M_0}{k^2} \right) \left(\cos k^* t + \frac{h}{k^*} \sin k^* t \right) - \frac{M_0}{k^2}.$$

Первая остановка маятника в крайнем левом положении произойдет в момент времени $t = \pi/k^*$. Соответствующий угол обозначим через $-\varphi_1$, т. е. при $t = \pi/k^*$ $\varphi = -\varphi_1$, $\dot{\varphi} = 0$. Внося соответствующие значения в последнее равенство, получим

$$-\varphi_1 = e^{-\frac{h\pi}{k^*}} \left(\varphi_0 + \frac{M_0}{k^2} \right) (-1) - \frac{M_0}{k^2}.$$

Отсюда находим ($f = e^{-h\pi/k^*} < 1$)

$$\varphi_1 = f\varphi_0 + (1+f) \frac{M_0}{k^2}.$$

Легко сообразить, что следующее крайнее отклонение вправо определится равенством (φ_0 заменяем на φ_1 , а φ_1 на φ_2)

$$\varphi_2 = f\varphi_1 + (1+f) \frac{M_0}{k^2}.$$

Таким образом, амплитуды колебаний маятника последовательно могут быть определены из следующей цепочки равенств:

$$\varphi_1 = \varphi_0 f + (1+f) \frac{M_0}{k^2}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 f + (1+f) \frac{M_0}{k^2}, \quad \dots,$$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} f + (1+f) \frac{M_0}{k^2}.$$

Умножим первое равенство на f^{n-1} , второе на f^{n-2} , ..., последнее на 1 и сложим почленно все равенства. Тогда получим

$$\varphi_n = f^n \varphi_0 + (1+f) \frac{M_0}{k^2} (f^{n-1} + f^{n-2} + \dots + 1),$$

или, суммируя геометрическую прогрессию,

$$\varphi_n = \varphi_0 f^n + (1+f) \frac{M_0}{k^2} \frac{(1-f^n)}{1-f}.$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Учитывая, что $f < 1$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n = 0$, получим

$$\varphi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \frac{1+f}{1-f} \frac{M_0}{k^2}. \quad (21.39)$$

Формулу (21.39) можно получить и несколькими другим путем. Так как $\varphi_{n-1} = \varphi_{n-2}f + (1+f)\frac{M_0}{k^2}$ и $\varphi_n = \varphi_{n-1}f + (1+f)\frac{M_0}{k^2}$, то, исключая отсюда φ_{n-1} , получим

$$\varphi_n = \varphi_{n-2}f^2 + (1+f)^2 \frac{M_0}{k^2}. \quad (21.40)$$

Для периодического движения имеем

$$\varphi_n = \varphi_{n-2} = \varphi^*,$$

т. е.

$$\varphi^* = \varphi^*f^2 + (1+f)^2 \frac{M_0}{k^2};$$

отсюда имеем

$$\varphi^* = \frac{1+f}{1-f} \frac{M_0}{k^2}.$$

Эта величина φ^* и есть искомая амплитуда периодического движения. Таким образом, мы убедились, что в рассматриваемой задаче могут быть периодические движения, амплитуда которых не зависит от начальных условий, а зависит от свойств самой системы.

Однако одного факта определения амплитуды φ^* еще недостаточно, чтобы утверждать, что такое движение физически может быть реализовано. Нужно показать, при каких начальных условиях установится это решение и будет ли оно устойчиво. На эти вопросы можно ответить, построив соответствующую диаграмму, которая называется *диаграммой Кенигса — Лемерея*.

На этой диаграмме рассматривается графически связь между двумя последовательными максимальными отклонениями одного знака, т. е. φ_n и φ_{n-2} . Согласно формуле (21.40) φ_n можно считать функцией φ_{n-2} .

На плоскости $\varphi_{n-2}\varphi_n$ эта зависимость между φ_{n-2} и φ_n изображается прямой линией (рис. 21.21). Тангенс угла наклона этой прямой с осью φ_{n-2} равен $e^{-2h\pi/k^*} < 1$. Проведем еще вспомогательную прямую $\varphi_n = \varphi_{n-2}$. Пересечение этих прямых и определяет амплитуду $\varphi_n = \varphi_{n-2} = \varphi^*$.

Пусть φ_{n-2} — начальное отклонение, меньшее φ^* ; тогда этому отклонению будет соответствовать φ'_n , которому будет соответствовать максимальное отклонение φ'_{n+2} . Продолжая эти построения, видим, что, как бы мало начальное отклонение ни было, колебания происходят с возрастающей амплитудой, пока максимальное отклонение не достигнет постоянного значения φ^* .

Если теперь взять максимальное отклонение $\varphi'_{n-2} > \varphi^*$, то по графику найдем следующее φ''_n , по которому найдем следующее φ''_{n+2} и т. д. Из этого построения видно, что колебания затухают до тех пор, пока отклонение не достигает постоянного значения φ^* .

Итак, в рассмотренном нами примере, несмотря на наличие вязкого трения, существует устойчивое периодическое движение.

Амплитуда этих незатухающих колебаний не зависит, как было уже показано, от начальных условий, а определяется свойствами системы. Такие колебания называются *автоколебаниями*, а системы, в которых возможны автоколебания, называются *автоколебательными системами* *).

Изолированная замкнутая траектория на фазовой плоскости, соответствующая автоколебаниям системы, называется *предельным циклом*.

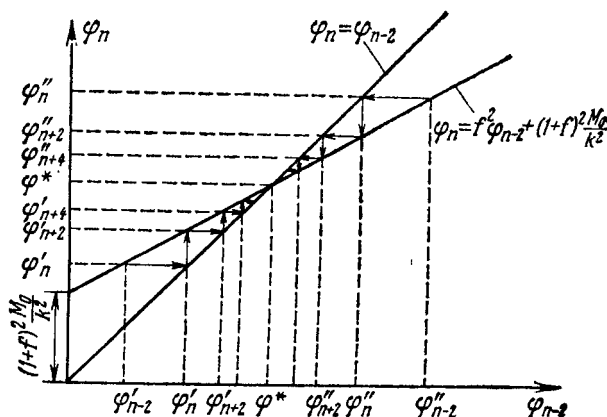


Рис. 21.21

Предельные циклы могут быть устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые.

Если фазовые траектории, близкие к предельному циклу, как внутри, так и вне его «наматываются» на него, т. е. изображающая точка приближается к предельному циклу, то такой предельный цикл называется *устойчивым* и соответствует автоколебаниям.

Если же траектории разматываются как снаружи, так и внутри с предельного цикла, т. е. изображающая точка удаляется от предельного цикла, то такой предельный цикл называется *неустойчивым* и физически реализован быть не может.

Наконец, может быть *полуустойчивый* предельный цикл, когда, с одной стороны, фазовые траектории на него наматываются, а с другой — разматываются.

Картины, показывающие устойчивый, неустойчивый и полуустойчивый предельные циклы соответственно, представлены на рис. 21.22, 21.23 и 21.24.

*) Термин «автоколебания» введен в теорию колебаний А. А. Андроновым.

Таким образом, с математической точки зрения автономные автоколебательные системы с одной степенью свободы можно определить как такие системы, уравнения движения которых характеризуются наличием на фазовой плоскости одного или нескольких устойчивых предельных циклов.

С физической точки зрения автономные автоколебательные системы, грубо говоря, можно охарактеризовать как системы, способные совершать незатухающие колебания за счет постоянных источников энергии, причем поступление энергии, расходуемой системой на преодоление сопротивлений, регулируется самой системой.

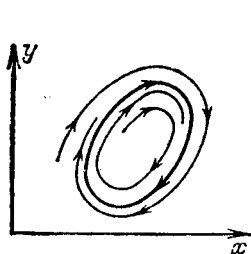


Рис. 21.22

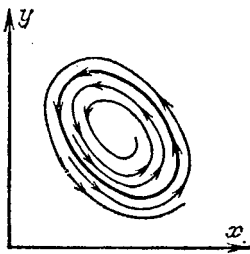


Рис. 21.23

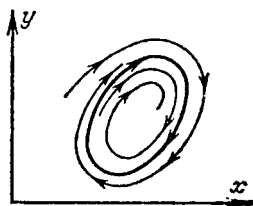


Рис. 21.24

Характерным свойством автоколебательных систем является то обстоятельство, что «амплитуда» колебаний в широких пределах не зависит от начальных условий. Это является основным отличием периодического движения в автоколебательной системе от периодического движения в консервативной системе.

Хотя в рассматриваемом нами примере период автоколебаний оказался равным периоду затухающих колебаний в линейной системе, в общем случае этот период определяется свойствами самой системы, а не навязывается извне. Это является основным отличием автоколебаний от вынужденных колебаний.

§ 21.5. Метод медленно меняющихся коэффициентов (метод ван-дер-Поля)

Существует несколько приближенных методов количественного исследования нелинейных систем *).

*) Изложение этих методов читатель найдет, например, в книгах: Андропов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959; Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1958; Булгаков Б. В. Колебания. — М.: Гостехиздат, 1954; Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1956; Малкин И. Г. Некоторые задачи нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956; Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М. Наука, 1972; Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1960.

В этом параграфе рассмотрен лишь один из методов, а именно метод медленно меняющихся коэффициентов.

Пусть уравнение движения динамической системы имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu f_1(x, \dot{x}), \quad (21.41)$$

где $f_1(x, \dot{x})$ — нелинейная функция x и $\dot{x}$, $\mu > 0$.

Мы будем предполагать, что рассматриваемая динамическая система близка к линейной консервативной. Коэффициент μ (обычно безразмерный) и будет тем малым параметром, который будет характеризовать близость исходной системы к линейной консервативной.

Введем «безразмерное время» $\tau = kt$, тогда в силу равенств $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} k$ и $\ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2} k^2$ уравнение (21.41) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right), \quad (21.42)$$

где

$$f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{k^2} f_1\left(x, \frac{dx}{dt} k\right).$$

Вводя $y = dx/d\tau$, получим

$$\frac{dy}{d\tau} = -x + \mu f(x, y), \quad \frac{dx}{d\tau} = y.$$

Уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu f(x, y)}{y}. \quad (21.43)$$

При $\mu = 0$ рассматриваемая система будет линейной консервативной. Фазовые траектории будут представлять собой вложенные друг в друга окружности, окружающие состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Решение уравнения (21.42) в этом случае будет

$$x = a \cos \tau + b \sin \tau, \quad (21.44)$$

где a и b — постоянные числа (произвольные постоянные интегрирования).

Нашей задачей является выяснение вопроса о том, как изменится картина распределения фазовых траекторий на плоскости xu , если μ будет достаточно мало, но отлично от нуля.

Будем искать решение уравнения (21.42) при $\mu \neq 0$ в виде (21.44), но a и b будем уже считать функциями времени. Очевидно, что при заданном x функции a и b недостаточно определены, поэтому наложим на них условие, заключающееся в том, что производная от x по τ должна иметь такой же вид, как при постоянных a и b .

Таким образом, имеем

$$x = a \cos \tau + b \sin \tau,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau + \frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau. \quad (21.45)$$

Но в силу условия, наложенного на a и b ,

$$\frac{dx}{d\tau} = -a \sin \tau + b \cos \tau \quad (21.46)$$

и, следовательно,

$$\frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau = 0. \quad (21.47)$$

Вторая производная от x по τ будет

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -a \cos \tau - b \sin \tau - \frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau. \quad (21.48)$$

Подставляя выражения (21.45), (21.46) и (21.48) в уравнение (21.42), получим

$$-\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau = \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau). \quad (21.49)$$

Присоединяя к этому уравнению условие (21.47), получим систему уравнений для определения $da/d\tau$ и $db/d\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau &= 0, \\ -\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau &= \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau). \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно $da/d\tau$ и $db/d\tau$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau. \end{aligned} \quad (21.50)$$

Отметим, что уравнения (21.50) — это уравнение (21.42), преобразованное к новым переменным. Как видно из (21.50), эта система уже неавтономная, хотя исходное уравнение было автономным.

Предположим теперь, что при достаточно малом μ функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ будут медленно меняющимися функциями τ , т. е. такими, изменениями которых в течение одного периода колебаний исходной системы можно пренебречь.

Это предположение равносильно тому, что производные $da/d\tau$ и $db/d\tau$ в течение одного периода (2π) считаются постоянными, имеющими порядок μ . Тогда, умножая обе части уравнений на $d\tau$ и интегрируя в пределах от 0 до 2π , получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (21.51)$$

В сущности, эти уравнения отличаются от уравнений (21.50) тем, что в правых частях у них стоят средние интегральные значения за период 2π от правых частей уравнений (21.50).

Перепишем уравнения (21.51) в виде

$$\frac{da}{d\tau} = \mu P(a, b) \quad \frac{db}{d\tau} = \mu Q(a, b), \quad (21.52)$$

где

$$P(a, b) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau d\tau,$$

$$Q(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau d\tau.$$

Уравнения (21.52) называются «укороченными» уравнениями или уравнениями ван-дер-Поля.

Рассмотрим теперь плоскость ab . Очевидно, что согласно (21.45) состояние равновесия $a = 0, b = 0$ на плоскости ab будет соответствовать для исходной системы состоянию равновесия $x = 0, y = 0$. Состояния равновесия на плоскости ab , для которых $a \neq 0, b \neq 0$, для исходной системы будут соответствовать периодическим движениям. Таким образом, изучая состояния равновесия, а также расположение фазовых траекторий на плоскости ab , мы сможем судить о возможных движениях исходной системы. Этот прием был впервые применен А. А. Андроновым.

Покажем, что в системе (21.52) при переходе к полярным координатам переменные разделяются. Пусть

$$a = \rho \cos \vartheta, \quad b = \rho \sin \vartheta, \quad (21.53)$$

тогда

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau},$$

$$a \cos \tau + b \sin \tau = \rho \cos(\tau - \vartheta),$$

$$-a \sin \tau + b \cos \tau = -\rho \sin(\tau - \vartheta).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (21.52) получим

$$\frac{d\rho}{d\tau} \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \sin \tau d\tau,$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[\rho \cos(\tau - \vartheta), -\rho \sin(\tau - \vartheta)] \cos \tau d\tau,$$

откуда будем иметь

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu \Phi(\rho), \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu \Psi(\rho). \quad (21.54)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi d\xi, \\ \Psi(\rho) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi d\xi,\end{aligned}\quad (21.55)$$

где $\xi = \tau - \theta^*$).

Рассмотрим первое уравнение

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho). \quad (21.56)$$

Это уравнение первого порядка, и фазовая плоскость для него вырождается в прямую.

Качественная картина уравнения такого типа полностью определяется характером и расположением состояний равновесия, которые располагаются на фазовой прямой. Координаты этих состояний равновесия являются корнями уравнения

$$\Phi(\rho) = 0. \quad (21.57)$$

Пусть один из корней этого уравнения будет $\rho = \rho_0$. Рассмотрим поведение изображающей точки вблизи этого состояния равновесия. Введем новую переменную u , определяющую положение изображающей точки вблизи состояния равновесия, т. е. положим $\rho = \rho_0 + u$. Тогда уравнение (21.56) будет

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi(\rho_0 + u).$$

Разложим функцию $\Phi(\rho_0 + u)$ в ряд по степеням u :

$$\Phi(\rho_0 + u) = \Phi'(\rho_0)u + \text{члены высших порядков}.$$

Ограничиваясь членами в первой степени u , получим уравнение первого приближения

$$\frac{du}{d\tau} = \mu\Phi'(\rho_0)u.$$

А. М. Ляпунов доказал **), что при $\Phi'(\rho_0) \neq 0$ состояние равновесия будет устойчивым, если $\Phi'(\rho_0) < 0$, и неустойчивым, если

*) Эту замену можно произвести, так как подынтегральные функции периодические.

**) См., например, Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

$\Phi'(\rho_0) > 0$. Качественно это можно объяснить следующим образом. Так как при достаточно малом μ членами высших порядков можно пренебречь, т. е. определяющим знак $du/d\tau$ будет знак $\Phi'(\rho_0)$, то при $\Phi'(\rho_0) < 0$ изображающая точка будет стремиться к состоянию равновесия, а при $\Phi'(\rho_0) > 0$ будет уходить от состояния равновесия.

Итак, состояние равновесия $\rho = \rho_0$ уравнения (21.56) будет устойчивым, если

$$\Phi'(\rho_0) < 0, \quad (21.58)$$

и неустойчивым, если

$$\Phi'(\rho_0) > 0. \quad (21.59)$$

Закон движения изображающей точки по фазовой прямой можно найти, интегрируя уравнение (21.56):

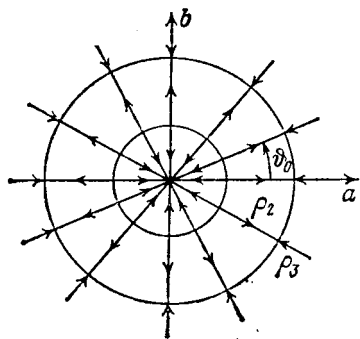


Рис. 21.25

$$\mu(\tau - \tau_0) = \int_{\rho'}^{\rho} \frac{d\rho}{\Phi(\rho)},$$

где $\rho' = \rho_{\tau=\tau_0}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu\Psi(\rho).$$

В практике очень часто бывают случаи, когда

$$\Psi(\rho) \equiv 0,$$

тогда $d\vartheta/d\tau = 0$ и $\vartheta = \vartheta_0$ — постоянное число.

Следовательно, на плоскости ab все интегральные кривые представляют собой прямые, проходящие через начало координат и имеющие различные углы наклона $\vartheta = \text{const}$. Движение по каждой из таких прямых происходит одинаково и определяется уравнением (21.56). Состояния равновесия, определяемые уравнением $\Phi(\rho) = 0$, будут целиком заполнять окружности (на плоскости ab), радиусы которых равны корням уравнения (21.57). На рис. 21.25 показан вид плоскости ab в случае, когда уравнение (21.57) имеет три корня: $\rho_1 = 0$, $\rho_2 < \rho_3$.

Перейдем к плоскости xu ; согласно формулам (21.45), (21.46) и (21.53) получим

$$x = \rho \cos \vartheta \cos \tau + \rho \sin \vartheta \sin \tau = \rho \cos(\tau - \vartheta),$$

$$y = -\rho \cos \vartheta \sin \tau + \rho \sin \vartheta \cos \tau = -\rho \sin(\tau - \vartheta).$$

Для какого-либо корня $\rho = \rho_i$ уравнения (21.57) будем иметь

$$x = \rho_i \cos(\tau - \vartheta_0), \quad y = -\rho_i \sin(\tau - \vartheta_0), \quad (21.60)$$

т. е. на плоскости xu будем иметь круговой предельный цикл.

Величина ϑ_0 в формулах (21.60) произвольна, это соответствует тому, что на плоскости ab состояния равновесия составляют целые окружности.

Если ρ_i соответствует устойчивому состоянию равновесия, то на плоскости xu будет устойчивый предельный цикл. Все соседние интегральные кривые будут спиралями, накручивающимися на этот цикл. Если же ρ_i соответствует неустойчивому состоянию равновесия, то на плоскости xu будет неустойчивый предельный цикл (рис. 21.26).

Рассмотрим теперь случай, когда $\Psi(\rho) \neq 0$. Тогда для какого-либо корня $\rho = \rho_i$ уравнения $\Phi(\rho) = 0$ (мы будем предполагать, что корни уравнения $\Phi(\rho) = 0$ не совпадают с корнями уравнения $\Psi(\rho) = 0$, так как в противном случае придем к рассмотренному уже случаю) будем иметь $d\vartheta/d\tau = \mu\Psi(\rho_i)$ и, следовательно,

$$\vartheta = \mu\Psi(\rho_i)\tau + \vartheta_0.$$

Движение изображающей точки на плоскости ab будет происходить по закону

$$a = \rho_i \cos [\mu\Psi(\rho_i)\tau + \vartheta_0],$$

$$b = \rho_i \sin [\mu\Psi(\rho_i)\tau + \vartheta_0].$$

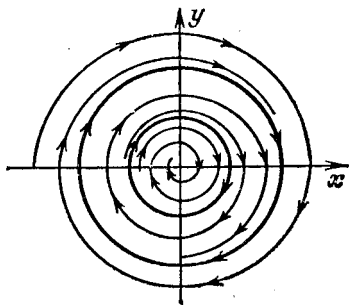


Рис. 21.26

т. е. по предельному циклу радиуса $\rho = \rho_i$.

Устойчивость или неустойчивость этого предельного цикла определяется характером состояния равновесия $\rho = \rho_i$. Направление движения определяется знаком $\Psi(\rho_i)$. Остальные интегральные кривые будут спиралями, накручивающимися на предельный цикл или раскручивающимися с него.

Переходя к плоскости xu , получим

$$x = \rho_i \cos \{[1 - \mu\Psi(\rho_i)]\tau - \vartheta_0\}, \quad y = -\rho_i \sin \{[1 - \mu\Psi(\rho_i)]\tau - \vartheta_0\},$$

т. е. будем иметь круговые предельные циклы, соответствующие корням уравнения $\Phi(\rho) = 0$.

Отличие от случая $\Psi(\rho) \equiv 0$ здесь является то, что мы получаем поправку на частоту $\Delta\omega = -\mu\Psi(\rho_i)$. Картина на фазовой плоскости останется прежней.

Задача 21.3. Применить рассмотренный метод к уравнению (21.36). Вводя в рассмотрение безразмерное время $\tau = kt$, получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2h}{k} \frac{d\varphi}{d\tau} + \psi = M_1 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right), \quad (21.61)$$

где

$$M_1 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \begin{cases} \frac{M_0}{k^2} & \text{при } \frac{d\varphi}{d\tau} > 0, \\ -\frac{M_0}{k^2} & \text{при } \frac{d\varphi}{d\tau} < 0. \end{cases}$$

Сделаем предположение о близости рассматриваемой системы к линейной консервативной. Примем, что $2h/k \ll 1$, $M_0/k^2 \ll 1$; тогда, введя $\mu = 2h/k$, будем иметь

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varphi = \mu \left[-\frac{d\varphi}{d\tau} + M_2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \right], \quad (21.62)$$

где

$$M_2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \begin{cases} \frac{M_1}{2hk} & \text{при } \frac{d\varphi}{d\tau} > 0, \\ -\frac{M_1}{2hk} & \text{при } \frac{d\varphi}{d\tau} < 0. \end{cases} \quad (21.63)$$

Уравнение (21.62) имеет вид уравнения (21.42).

Если искать решение уравнения (21.62) в виде

$$\varphi = \rho \cos(\tau - \vartheta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = -\rho \sin(\tau - \vartheta),$$

то уравнения (22.54) будут

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{\mu}{2} \left(\rho - \frac{4M_2}{\pi} \right), \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = 0.$$

Так как в рассматриваемом случае

$$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2} \left(\rho - \frac{4M_2}{\pi} \right), \quad \Psi \equiv 0, \quad \text{то} \quad \Phi'(\rho) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно, на плоскости $\varphi\dot{\varphi}$ имеется устойчивый круговой предельный цикл, радиус которого равен

$$\rho = \frac{4M_2}{\pi} = \frac{2M_0}{\pi hk}. \quad (21.64)$$

Рассмотрим формулу (21.39). Если предположить, что $h/k \ll 1$, и в разложении $e^{-\pi h/k^*}$ пренебречь малыми членами, начиная с члена, содержащего h^2 , то получим $\varphi^* = 2M_0/(\pi hk)$ (принято, что $k^* = k \sqrt{1 - h^2/k^2} \approx k$).

Следовательно, результат (21.64) можно считать достоверным с точностью до членов $h^2 (\mu^2)$.

Задача 21.4. На равномерно вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вал насажена с некоторым трением втулка с жестко скрепленным с ней маятником. Пусть момент силы трения между валом и втулкой является функцией относительной угловой скорости $\omega = \Omega - \dot{\varphi}$ ($\dot{\varphi}$ — абсолютная угловая скорость маятника) и может быть представлен степенным рядом

$$M(\omega) = M(\Omega) - M'(\Omega)\dot{\varphi} - \frac{1}{2} M''(\Omega)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{120} M^{(V)}(\Omega)\dot{\varphi}^5 + \dots$$

Ограничиваясь написанными членами ряда, определить возможные движения маятника *).

Уравнение движения для малых φ имеет вид

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}),$$

где I — момент инерции маятника, b — коэффициент вязкого сопротивления, m — масса маятника, l — расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

*) Стрелков С. П. Маятник Фроуда. — ЖТФ, 1933, т. 3, в. 4; Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. — М.: Судпромгиз, 1962.

Перепишем уравнение движения в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{I} \dot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \varphi = \frac{M(\Omega)}{I} - \frac{M'(\Omega)}{I} \dot{\varphi} - \frac{M''(\Omega)}{6I} \dot{\varphi}^3 - \frac{M^{(V)}(\Omega)}{120I} \dot{\varphi}^5.$$

Если ввести $\tau = kt$ и $\psi = \varphi - \frac{M(\Omega)}{Ik^2}$, где $k = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$, предположить, что для безразмерных величин справедливы неравенства

$$\frac{b}{Ik} \ll 1, \quad \frac{|M'(\Omega)|}{Ik} \ll 1, \quad \frac{k|M''(\Omega)|}{I} \ll 1, \quad \frac{k^3|M^{(V)}(\Omega)|}{I} \ll 1$$

и ввести обозначения

$$\mu = \frac{b}{Ik}, \quad \alpha = -\left(1 + \frac{M'(\Omega)}{b}\right), \quad \beta = -\frac{k^2 M''(\Omega)}{6b}, \quad \gamma = -\frac{k^4 M^{(V)}(\Omega)}{120b},$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \psi = \mu \left[\alpha \frac{d\psi}{d\tau} + \beta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^3 + \gamma \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^5 \right]. \quad (21.65)$$

Параметр μ характеризует близость рассматриваемой системы к линейной консервативной.

Используя формулы (21.55), будем иметь

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2} \rho \left(\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 \right), \quad \Psi(\rho) = 0.$$

Состояния равновесия системы, описываемой уравнением (21.56), найдем из условия

$$\rho \left(\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 \right) = 0. \quad (21.66)$$

Очевидно, что корень $\rho_1 = 0$ соответствует состоянию равновесия исходной динамической системы, описываемой уравнением (21.65). Другие состояния равновесия получим, решая уравнение

$$\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 + \frac{5}{8} \gamma \rho^4 = 0. \quad (21.67)$$

Поскольку

$$\Phi'(\rho) = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{9}{4} \beta \rho^2 + \frac{25}{8} \gamma \rho^4 \right), \quad (21.68)$$

то при $\alpha < 0$ состояние равновесия $\rho_1 = 0$ будет устойчивым, а при $\alpha > 0$ — неустойчивым.

Состояниям равновесия, определяемым из уравнения (21.67), соответствуют только положительные корни.

Введем в рассмотрение плоскость $\alpha\rho^2$ и рассмотрим два случая: 1) $\beta < 0, \gamma < 0$; 2) $\beta > 0, \gamma < 0$.

Пусть $\beta < 0, \gamma < 0$. Из уравнения (21.67) следует

$$\rho^2 = -\frac{3\beta}{5\gamma} \pm \sqrt{\frac{9\beta^2}{25\gamma^2} - \frac{8\alpha}{5\gamma}}.$$

При $\alpha = 0$ $\rho_1^2 = 0, \rho_2^2 < 0$; при $\alpha > 0$ будет один положительный корень, при $\alpha < 0$ положительных корней уравнение (21.67) не имеет.

Кривая

$$\Phi'(\rho) = 0 \quad \text{или} \quad \alpha + \frac{9}{4} \beta \rho^2 + \frac{25}{8} \gamma \rho^4 = 0 \quad (21.69)$$

на плоскости $\alpha\rho^2$ отделяет область устойчивости, где $\Phi'(\rho) < 0$, от области неустойчивости, где $\Phi'(\rho) > 0$.

На рис. 21.27 показано расположение парабол (21.67) и (21.69). Из рассмотрения этого рисунка следует, что при $\alpha < 0$ будет только одно устойчивое состояние равновесия $\rho = 0$. При $\alpha > 0$ — два состояния равновесия: неустойчивое $\rho = 0$ и устойчивое, соответствующее точкам параболы в первом квадранте плоскости $\alpha\rho^2$.

Переходя к фазовой плоскости $x \frac{dx}{dt}$, видим, что при $\alpha < 0$ есть только одно устойчивое состояние равновесия в начале координат. Это значит, что исходная система совершает затухающие колебания. При $\alpha > 0$ на фазовой плоскости будет неустойчивое положение равновесия в начале координат и устойчивый предельный цикл, соответствующий автоколебаниям. При уменьшении α предельный цикл

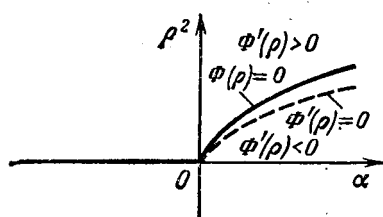


Рис. 21.27

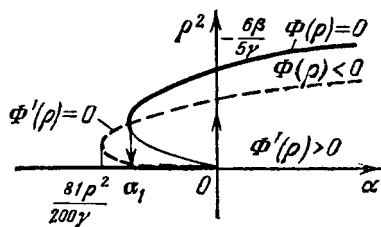


Рис. 21.28

стягивается к началу координат и, сливаясь с состоянием равновесия, передает ему устойчивость. При увеличении α от отрицательных значений при переходе через $\alpha = 0$ возникают автоколебания амплитуда которых увеличивается с возрастанием α . Описанный характер возникновения автоколебаний называют *мягким возбуждением*.

Пусть теперь $\beta > 0$, $\gamma < 0$. Вид парабол (21.66) и (21.69) представлен на рис. 21.28. Из рассмотрения этого рисунка следует, что при $\alpha < \alpha_1$ ($\alpha_1 = 9\beta^2/(40\gamma)$) имеет место только одно устойчивое состояние равновесия и, следовательно, исходная динамическая система совершает затухающие колебания. При $\alpha_1 < \alpha < 0$ состояний равновесия три: устойчивое ($\rho = 0$), неустойчивое, соответствующее нежирной линии параболы, и устойчивое, соответствующее жирной линии параболы. Значит, на фазовой плоскости существует при этих значениях α в начале координат устойчивая особая точка, неустойчивый предельный цикл и устойчивый предельный цикл. Если начальные условия лежат внутри неустойчивого предельного цикла, то исходная система будет совершать затухающие колебания, если же начальные условия лежат вне неустойчивого предельного цикла, то установятся автоколебания. При $\alpha > 0$ состояние равновесия в начале координат неустойчиво, и при любых начальных условиях устанавливаются автоколебания.

Таким образом, если начать изменять α от отрицательных значений к положительным, предполагая, что исходная система находится в устойчивом состоянии равновесия, то при $\alpha = 0$ в системе возникнут автоколебания конечной амплитуды. При дальнейшем увеличении α амплитуда будет увеличиваться. Такой режим возникновения автоколебаний называется *жестким возбуждением*. Если теперь уменьшать α , то амплитуда автоколебаний будет постоянно уменьшаться, и при $\alpha = \alpha_1$ автоколебания при конечной амплитуде прекратятся, система начнет совершать затухающие колебания.

Следовательно, возникновение и исчезновение автоколебаний происходит при различных значениях параметра α , который иногда называют *коэффициентом возбуждения*.

Исследование случаев $\beta < 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, $\gamma > 0$ проводится аналогично. Следует иметь в виду, что в этих случаях, при определенных значениях параметров, в системе могут возникнуть неограниченно возрастающие колебания. Но такие колебания требуют и все возрастающего поступления энергии в систему извне. Практически это невозможно. Следовательно, для суждения о поведении маятника при при-

нятом в задаче приближении в разложении момента трения в степенной ряд недостаточно членов; нужно учитывать члены более высоких порядков.

Задача 21.5. Показать, что в первом приближении колебания системы, описываемой уравнением (21.42), эквивалентны (с точностью до величин порядка малости μ^2) колебаниям некоторой линейной системы. На с. 484 показано, что если искать решение уравнения (21.42) в виде

$$x = \rho \cos (\tau - \vartheta),$$

то получим укороченные уравнения (21.54). Если ввести обозначение

$$\omega_e(\rho) = 1 - \mu \Psi(\rho), \quad (21.70)$$

то уравнения (21.54) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu \Phi(\rho), \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \omega_e(\rho), \quad \xi = \tau - \vartheta. \quad (21.71)$$

Возведем выражение (21.70) в квадрат и отбросим члены с μ^2 :

$$\omega_e^2(\rho) = 1 - 2\mu \Psi(\rho) = 1 - \frac{\mu}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi - \rho \sin \xi) \cos \xi d\xi.$$

Обозначим

$$h(\rho) = \frac{\mu}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi - \rho \sin \xi) \sin \xi d\xi = -\frac{\mu}{\rho} \Phi(\rho) \quad (21.72)$$

и перепишем уравнения (21.71)

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -h(\rho) \cdot \rho, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \omega_e(\rho). \quad (21.73)$$

Дифференцируя $x = \rho \cos \xi$, получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} \cos \xi - \rho \frac{d\xi}{d\tau} \sin \xi = -h(\rho) \rho \cos \xi - \rho \omega_e(\rho) \sin \xi. \quad (21.74)$$

Продифференцировав еще раз, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} = & -\frac{dh}{d\rho} \frac{d\rho}{d\tau} \rho \cos \xi - h \frac{d\rho}{d\tau} \cos \xi + h\rho \frac{d\xi}{d\tau} \sin \xi - \\ & - \frac{d\rho}{d\tau} \omega_e \sin \xi - \rho \frac{d\omega_e}{d\rho} \frac{d\rho}{d\tau} \sin \xi - \rho \omega_e \frac{d\xi}{d\tau} \cos \xi. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение, используя (21.73) и (21.74):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2h(\rho) \frac{dx}{d\tau} + \omega_e^2(\rho) x = Q(\mu^2), \quad (21.75)$$

где $Q(\mu^2)$ — величина порядка малости μ^2 .

Итак, доказано, что решение $x = \rho(\tau - \vartheta)$ с точностью до величин порядка малости μ^2 удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2h(\rho) \frac{dx}{d\tau} + \omega_e^2(\rho) x = 0. \quad (21.76)$$

Линейную систему, движение которой описывается уравнением (21.76), называют *эквивалентной системой*. Получение уравнения (21.76) называют *методом эквивалентной линеаризации* *).

*) Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит, 1958.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 458, 480
 Акселерометр 144
 Амплитуда колебаний 36
 — — вынужденных 54, 55
 Аналогии электромеханические 58—61
 Аномалия истинная 102, 103
 — эксцентрическая 103
 Апекс 168, 300
 Апогей 99

Биения 51
 Бине уравнение 94
 Бэро правило 146

Ван-дер-Поля уравнения 484
 Взаимности свойство 280
 Виброграмма 45
 Виртуальное перемещение материальной системы 369
 — — — точки 366
 Возбуждение жесткое 490
 — мягкое 490
 Возмущения 413
 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 189
 Время абсолютное 10
 Всемирного тяготения закон 14, 86, 159, 301

Галилея принцип относительности 11
 Гироскоп 309
 — в кардановом подвесе 323—327
 — с двумя степенями свободы 310
 — — тремя степенями свободы 310
 — свободный (астатический) 313
 Гироскоп 321
 Главный вектор сил инерции твердого тела 333
 — — — тяготения 301—303
 — — — момент сил инерции твердого тела 334
 — — — тяготения 301, 303—305
 Гравитационная постоянная 14
 Градиент функции 84
 Грюэ — Жуковского правило 321
 Гюйгенса теорема 280
 Гюйгенса — Штейнера теорема 250, 257, 258

Даламбера принцип 129, 130, 317
 Движение аperiodическое 43
 — гармоническое колебательное 36
 — затухающее 41
 — материальной точки несвободное 112
 — — — под действием силы, зависящей от времени 24
 — — — — — положения 25
 — — — — — скорости 26
 — — — — — центральной силы 94
 — — — — — гравитационной 23
 — — — — — свободное 111
 — твердого тела плоское 282 и д.
 — — — поступательное 269, 270
 Декремент колебаний 42
 — — логарифмический 42
 Демпфер 424
 Динамический поглотитель колебаний 456, 457
 Диссипация энергии неполная 449
 — — — полная 449
 Длина приведенная физического маятника 280

Евклидово пространство 10
 Естественный трехгранник 16

Жуковского скамейка 185

Задача двух тел 159—161
 — динамики вторая 9, 18—23,
 — — первая 9, 17, 18
 Закон динамики основной 12
 — независимости действия сил 12, 13
 — площадей 66, 67
 — сохранения полной механической энергии материальной системы 222, 223
 — — — — — точки 87
 Законы динамики 13
 — сохранения количества движения материальной системы 165
 — — — — — момента количества движения материальной системы 185
 Зона застоя 48

Изоклина 473
 Изохронность колебаний 37
 — маятника 124
 Импульс силы элементарный 62
 — ударный 341
 Инерции принцип 10
 Интеграл криволинейный второго рода 71
 — — первого рода 71
 — энергии 87, 223
 — — обобщенный 409
 Искусственные спутники Земли 99—105, 108—111, 152

Карно теорема 347, 356
 Кенига теорема 206
 Кенигса — Лемерея диаграмма 479
 Кеплера третий закон 102
 — уравнение 104
 Колебания автономные 459
 — вынужденные 48—52, 455
 — при наличии вязкого сопротивления 53
 — линейные 35
 — малые консервативной системы с двумя степенями свободы 433
 — нелинейные 458, 459
 — нутационные 314
 — свободные 35, 36
 — при линейно-вязком сопротивлении 40
 — — грани скольжения 46—48
 — собственные 456
 Количество движения материальной системы 162, 163
 — — точки 62
 — — среды секундное 170
 — — твердого тела 230, 266
 — — переменной массы 231
 Координаты главные 446
 — избыточные 380
 — нормальные 446
 — обобщенные 379, 380
 Кориолиса теорема 138
 Космодемьянского формула 240
 Кривая равной энергии 468
 Коэффициент возбуждения
 — восстановления 342—344
 — динамичности 50, 55
 — жесткости 37
 — — на кручение 411
 — перегрузки 240
 Коэффициенты жесткости обобщенные 415
 — инерции 406

Лагранжа — Дирихле теорема 414, 469
 — метод 401
 — случай (движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием силы тяжести) 298
 — уравнения второго рода 393
 — — — для случая потенциальных сил 394
 — — первого рода 116
 Лапласа плоскость 185
 Льенара метод 473
 Ляпунова теорема об устойчивости равновесия консервативной системы 416, 469

Масса 13, 14
 — инертная 14
 — материальной системы 154
 — — приведенная 210, 397
 — покоя 15
 — секундная 169, 170
 — «тяжелая» 15
 Маятник математический 120—122, 368, 461
 — — двойной 438
 — физический 279
 — Фроуда 488
 — эллиптический 398—400
 Меры движения 162
 Метод изоклин 473
 — кинестатики 129, 130, 330—333
 — медленно меняющихся коэффициентов 481—487
 — приспособывания 429, 475
 — эквивалентной линеаризации
 Мещерского уравнение 229, 230, 233
 Момент гироскопический 320
 — инерции материальной системы относительно оси 182, 243
 — — точки относительно оси 182
 — — механизма приведенный 195, 397
 — — твердого тела относительно оси 182, 246—248
 — — — произвольной оси 252, 253, 257, 258
 — — центробежный 244
 — кинетический гироскопа 327
 — количества абсолютного движения материальной системы относительно неподвижного центра 193
 — — движения материальной системы 180, 181
 — — — твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 181, 182
 — количества движения материальной точки 64
 — полярный 243
 Моменты реакций подшипников 272

- Мощность 74, 75
 — внутренних сил трения скольжения 215
- Невесомость 132—136
 Ньютона бином 302
 — гипотеза (об ударе) 342, 343
 — закон второй 12, 13, 330
 — — первый 10
 — — третий 12, 13, 156, 157
- Ось динамической симметрии 245
 — инерции твердого тела главная 245, 296
 — — — — центральная 245
- Перигей 95, 99
 Период затухающих колебаний 41
 — колебаний 37
 — маятника 123
 — незатухающих колебаний 422
 Перицентр 95
 Плотность объема средняя 242
 — тела в данной точке 243
 Поверхность эквипотенциальная 83
 Постоянные времени 202
 Прецессионная теория гироскопа 311, 312
 Прецессия 316
 — артиллерийского снаряда 318, 319
 — оси волчка 319, 320
 — гироскопа 315, 316
 — регулярная 294, 300
 — —, условия существования 301
 Принцип виртуальных перемещений 372—374
 — освобожденности от связей 112
 Пространства и времени модели 10, 11
 Пуансо геометрическая интерпретация 294—296
 Пуассона обобщенные уравнения 306
- Работа внешних сил 211
 — внутренних сил 211
 — — — твердого тела 212
 — — — трения скольжения 215
 — потенциальных сил 214
 — сил виртуальная 370
 — — тяжести 211, 212
 — силы 68, 69
 — —, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси 213
 — — тяжести 72
 — — элементарная 70
- Равновесие механических систем неустойчивое 414
 — — — устойчивое 414
 Равнодействующая сил 13
 Радиус географической параллели 148
 — инерции 244
 — кривизны 121
 Радиус-вектор точки 16
 Реакции добавочные динамические 274, 334, 335
 — статические 274, 334, 335
 Регулятор центробежный 409, 410
 Резаля теорема 312, 313, 317
 Резонанс 52
 Релея функция диссипативная 88
 — — рассеяния 447
- Связи 112, 114, 115, 362
 — голономные 365
 — идеальные 370, 401, 402
 — неголономные 365
 — неидеальные 403, 404
 — нестационарные 363, 368
 — неудерживающие 363, 403, 404
 — стационарные 363, 367
 — удерживающие 363, 401—403
- Седло 463
 Сепаратрисы 470
 Сила 14, 19
 — возмущающая 34
 — гравитационная 86, 135
 — инерции 129, 138
 — кориолисова 138
 — — переносная 138, 197
 — — центробежная 65
 — обобщенная консервативной системы 384
 — реактивная 229, 233
 — тяжести 148
 — ударная 340
 — центральная 65
 Силовая линия 84
 — функция 83
 Силовое поле 77, 78
 Силы внешние 155
 — внутренние 155
 — восстанавливающие 33
 — диссипативные 449
 — массовые (объемные) 170
 — обобщенные 378, 383
 — поверхностные 170
 — потенциальные 214
- Сильвестра теорема 415, 416
 Система координат гелиоцентрическая 11
 — — орбитальная 303
 — материальная 154
 — — автономная 459
 — — неавтономная 459

Система материальных точек несвободная 362
 — — — свободная 362
 — отсчета абсолютная 10
 — инерциальная 137
 — физических единиц международная 14
 — эквивалентная
 Системы автоколебательные 480
 — нелинейные 459
 — отсчета инерциальные 11, 13
 — — неинерциальные 11
 Скорость истечения эффективная 232
 — космическая вторая 15, 57
 — первая 57
 — круговая 94, 97
 — обобщенная 392
 — параболическая 57
 — «потерянная» 346
 — радиальная 98
 — секториальная 66
 — угловая переносного движения 138
 — — прецессии гироскопа 316
 — фазовая 460
 — центра масс твердого тела 266
 Степень неголономности 382
 Субракета 237
 Твердое тело 154
 Тело переменной массы 228
 — статически уравновешенное 275
 Тензор инерции 246, 259
 Тсорема импульсов 166
 — о движении центра масс 166
 — об изменении кинетической энергии материальной системы 20, 216, 217
 — — — — — точки 76, 77
 — — — — — в относительном движении 151, 152
 — — — — — для несвободного движения 127, 128
 — — — — — относительного движения 225, 226
 — — — количества движения материальной системы 164, 166, 331, 332
 — — — — — при ударе 347
 — — — — — точки 62
 — — — — — тела переменной массы 231, 232
 — — — момента количеств движения материальной системы 183, 184, 331, 332
 — — — — — при ударе 347, 348
 — — — — — относительного движения материальной системы 195, 197, 198
 — — — — — количества движения материальной точки 64

Точка изображающая 460
 — материальная 9, 10
 — — изолированная 10
 — подвеса 279
 — — гироскопа 310
 Точки шаровые 255
 Траектории убегающие 470
 Траектория фазовая 460
 Трение вязкое 447, 448
 — сухое 447

Удар 339
 — абсолютно упругий 343
 — не вполне упругий 343
 — плоский 354
 — центральный 354
 Узел 464
 — устойчивый 464
 Уравнение вековое 436
 — вращения твердого тела вокруг неподвижной оси 183, 270, 271
 — движения ИСЗ относительно центра масс 305
 — — материальной точки в векторной форме 16
 — — — — — полярных координатах 17
 — — — — — проекциях на оси естественного трехгранника 16
 — — — — — переменной массы 229
 — — — динамики основное 12, 15, 16, 138
 — — — в неинерциальной системе 138, 139
 — — — общее 390, 391, 393
 — — — малых колебаний системы 422
 — — — относительного покоя 142
 — — — частот 436
 — эллипсоида 255
 Уравнения движения естественные 120
 — — системы материальных точек 158
 — связей 113
 — технические гироскопа 327
 Ускорение кажущееся 145
 — кориолисово 139
 — переносное 139
 — силы тяжести 148
 Условие относительное равновесия ИСЗ 306—308
 — — потенциальности силового поля 83
 — — равновесия в обобщенных координатах 387, 388
 — — устойчивости равновесия консервативной системы 414
 Устойчивость вращения твердого тела вокруг главных осей инерции 296—298
 — — относительного равновесия ИСЗ 418
 Усы 469

- Фаза колебаний 36
 — — начальная 36
 Фазовая плоскость 459, 460
 Фазовой плоскости метод 459
 Фактор затухания 42
 Фокус устойчивый 464
 Формы колебаний 437
 Фуко маятник 148—150
 Функция диссипативная 448
 — силовая 215
- Центр 491
 — качания 280
 — масс (центр инерции) материальной системы 154, 155
 — удара 351
 Цикл предельный 480
 — полуустойчивый 480
 — устойчивый 480
 Циклоида сферическая 300
 Циолковского задача 234
 — формула 236
 — число 236
- Частота 36
 — круговая 422
 — собственная 36
 — угловая 36
 Частоты парциальные 436
 Число степеней свободы системы 381
- Широта географическая 147
 — геоцентрическая 147
- Эйлера динамические уравнения 290
 — кинематические уравнения 290, 293, 364
- Эйлера случаи (движение твердого симметричного тела, имеющего одну неподвижную точку, по инерции) 292—294
 — теорема (о движении жидкости внутри трубы переменного сечения) 169, 170
 — — об обобщенных функциях 408
 — углы 138, 265
 Эксцентриситет конического сечения 95, 99
 Эллипсоид вращения 255
 — инерции 254, 255
 Энергия кинетическая материальной системы 204, 206
 — — — —, выражение через обобщенные скорости и координаты 405—407
 — — — точки 79
 — — относительного движения 204
 — — твердого тела 206
 — — — —, вращающегося вокруг неподвижной оси 207
 — — — —, движущегося поступательно 206, 207
 — — — — произвольным образом 208
 — — — —, имеющего одну неподвижную точку 207
 — — — — при плоском движении 208
 — — — — с одной неподвижной точкой 298
 — потенциальная восстанавливающей силы пружины 86, 87
 — — материальной системы 214
 — — поля 77, 80
 — — — силы тяжести 85
 — — — центральных сил 85, 86
- Якоби обобщенный интеграл энергии 409