Н. В. БУТЕНИН, Я. Л. ЛУНЦ, Д. Р. МЕРКИН

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ТОМ I

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

22.21
Б93
УДК 531

Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. В двух томах. Т. I: Статика и кинематика. — 4-е изд., исправл. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1985. — 240 с.

В книге изложены статика и кинематика. Приведено большое количество примеров и задач, имеющих прикладное значение. Кроме традиционного материала, книга содержит некоторые разделы, выходящие за пределы программы, как, например, определение натяжения тяжелой подвешенной нити, определение реакций упругих опор твердого тела, криволинейные координаты.

Книга рассчитана на студентов дневных, вечерних и заочных отделений технических вузов с полной и сокращенной программой по механике, а также может быть полезной для аспирантов и инженерно-технических работников.

Табл. 3, ил. 223.

Рецензент
доктор технических наук *М. С. Сергеев*

Б $\frac{1703020000-076}{053\,(02)-85}$ 94—85

ОГЛАВЛЕНИЕ

КИНЕМАТИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий курс рассчитан на студентов технических вузов с полной программой по теоретической механике. По сравнению с традиционными курсами в книге более подробно рассматриваются общие теоремы динамики системы, движение материальной точки в центральном силовом поле, динамика тела переменной массы, теория гироскопов, некоторые вопросы аналитической механики и теории колебаний. При построении курса авторы стремились к единству используемых методических приемов и учитывали фактический объем известных студенту втуза сведений, в частности, в курсе последовательно использован аппарат векторной алгебры.

В 1972 г. авторский коллектив понес тяжелую утрату — после непродолжительной болезни скончался Яков Львович Лунц.

При подготовке второго издания, выполненной Н. В. Бутениным и Д. Р. Меркиным, частично или полностью переработаны и заново изложены некоторые разделы курса, написана новая, XXI глава, посвященная элементам теории нелинейных колебаний, введены новые параграфы, в которых рассматривается движение искусственного спутника Земли относительно центра масс, добавлено много новых задач, пересмотрен весь текст, исправлены замеченные опечатки. Сохранены § 5.6 и § 5.7, написанные для первого издания Я. Г. Пановко.

В связи с тем, что учащиеся многих втузов нуждаются в более углубленном изучении ряда важнейших разделов механики, была написана серия книг, дополняющих настоящее руководство. К настоящему времени Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» изданы следующие приложения: Н. В. Бутенин, «Введение в аналитическую механику», Я. Л. Лунц, «Введение в теорию гироскопов», Д. Р. Меркин, «Введение в теорию устойчивости движения» (два издания), Я. Г. Пановко, «Введение в теорию механических колебаний», Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, «Введение в теорию нелинейных колебаний», Я. Г. Пановко, «Введение в теорию механического удара», Д. Р. Меркин, «Введение в механику гибкой нити».

Авторы выражают глубокую благодарность С. М. Таргу, В. К. Прокопову, В. Г. Дёмину, Г. Д. Мошкову, Л. М. Гриншпуну, А. Г. Мамиконову и Г. С. Шпаку, замечания которых позволили существенно улучшить курс.

* * *

Все величины, приводимые в четвертом издании, даются в системе единиц СИ — Международной системе единиц, введенной в СССР с 1 января 1982 года в соответствии с ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78) «Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин».

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика — раздел физики, в котором изучается механическое движение материальных тел, т. е. изменение с течением времени положения их относительно друг друга. Так как состояние покоя есть частный случай механического движения, то в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел.

Движение материи происходит во времени и пространстве. За пространство, в котором происходит движение тел, принимают «обычное» евклидово трехмерное пространство. Для изучения движения вводят так называемую *систему отсчета*, понимая под ней совокупность тела отсчета (тела, относительно которого изучается движение других тел) и связанных с ним систем координатных осей и часов. В теоретической механике принимается, что время не зависит от движения тел и что оно одинаково во всех точках пространства и всех системах отсчета (*абсолютное время*). В связи с этим в теоретической механике, говоря о системе отсчета, можно ограничиться указанием только тела отсчета или системы координатных осей, связанных с этим телом.

Движение тела происходит в результате действия на движущееся тело сил, вызванных другими телами. При изучении механического движения и равновесия материальных тел знание природы сил не обязательно, достаточно знать только их величины. Поэтому в теоретической механике не изучают физическую природу сил, ограничиваясь только рассмотрением связи между силами и движением тел.

Теоретическая механика построена на законах И. Ньютона, справедливость которых проверена огромным количеством непосредственных наблюдений, опытной проверкой следствий (зачастую далеких и вовсе не очевидных) из этих законов, а также многовековой практической деятельностью человека. Законы Ньютона справедливы не во всех системах отсчета. В механике постулируется наличие хотя бы одной такой системы (*инерциальная система отсчета*). Многочисленные опыты и измерения показывают, что с высокой степенью точности система отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными к далеким «неподвижным» звездам, является инерциальной системой отсчета (она называется *гелиоцентрической* или *основной инерциальной системой отсчета*).

В дальнейшем будет показано, что если имеется хотя бы одна инерциальная система отсчета, то их имеется бесчисленное множество (очень часто инерциальные системы отсчета называют *неподвижными системами*). Во многих задачах за инерциальную систему отсчета принимают систему, связанную с Землей. Ошибки, возникающие при этом, как правило, столь незначительны, что практического значения они не имеют. Но имеются задачи, в которых уже нельзя пренебречь вращением Земли. В этом случае за неподвижную систему отсчета следует принимать введенную гелиоцентрическую систему отсчета.

Теоретическая механика является естественной наукой, опирающейся на результаты опыта и наблюдений и использующей математический аппарат при анализе этих результатов. Как во всякой естественной науке, в основе механики лежит опыт, практика, наблюдение. Но наблюдая какое-нибудь явление, мы не можем сразу охватить его во всем многообразии. Поэтому перед исследователем возникает задача выделить в изучаемом явлении главное, определяющее, отвлекаясь (абстрагируясь) от того, что менее существенно, второстепенно.

В теоретической механике метод абстракции играет очень важную роль. Отвлекаясь при изучении механических движений материальных тел от всего частного, случайного, менее существенного, второстепенного и рассматривая только те свойства, которые в данной задаче являются определяющими, мы приходим к рассмотрению различных моделей материальных тел, представляющих ту или иную степень абстракции. Так, например, если отсутствует различие в движениях отдельных точек материального тела или в данной конкретной задаче это различие пренебрежимо мало́, то размерами этого тела можно пренебречь, рассматривая его как материальную точку. Такая абстракция приводит к важному понятию теоретической механики — понятию *материальной точки*, которая отличается от геометрической точки тем, что имеет массу. Материальная точка обладает свойством инертности, как обладает этим свойством тело, и, наконец, она обладает той же способностью взаимодействовать с другими материальными телами, какую имеет тело. Так, например, планеты в их движении вокруг Солнца, космические аппараты в их движении относительно небесных тел можно рассматривать в первом приближении как материальные точки.

Другим примером абстрагирования от реальных тел является понятие *абсолютно твердого тела. Под ним понимается тело, которое сохраняет свою геометрическую форму неизменной, независимо от действий других тел.* Конечно, абсолютно твердых тел нет, так как в результате действия сил все материальные тела изменяют свою форму, т. е. деформируются, но во многих случаях деформацией тела можно пренебречь. Например, при расчете полета ракеты мы можем пренебречь небольшими колебаниями отдельных частей ее, так как эти колебания весьма мало скажутся на параметрах ее полета. Но при расчете ракеты на прочность учет этих колебаний обязателен, ибо они могут вызвать разрушение корпуса ракеты.

Принимая те или иные гипотезы, следует помнить о пределах их применимости, так как, забыв об этом, можно прийти к совершенно неверным выводам. Это происходит тогда, когда условия решаемой задачи уже не удовлетворяют сделанным предположениям и неучитываемые свойства становятся существенными. В курсе при постановке задачи мы всегда будем обращать внимание на те предположения, которые принимаются при рассмотрении данного вопроса.

Приведем некоторые сведения из истории механики. Подобно всем другим наукам механика возникла и развивалась под влиянием практических нужд человеческого общества. Она является одной из древнейших наук и ее история насчитывает приблизительно 25 веков напряженных исканий. В примитивном виде первичные понятия механики, в частности, понятия силы и скорости, появились еще в античный период. Чисто практическое применение катков, наклонной плоскости, рычага, блоков при постройке грандиозных сооружений древности (пирамиды, дворцы и т. п.) накапливало определенный опыт и, очевидно, должно было привести к обобщению этого опыта, к установлению некоторых законов механики (статики). Так, в трактате «Механические проблемы» Аристотель (384—322 до н. э.) рассматривает конкретные практические задачи при помощи метода, основанного на законе рычага. Однако первые попытки установления динамических законов оказались неудачными. Аристотель ошибочно полагал, что скорости падающих тел пропорциональны их весам и что равномерное и прямолинейное движение является результатом действия постоянной силы. Потребовалось почти два тысячелетия, чтобы преодолеть эти ошибочные представления и заложить научные основы динамики. К числу бесспорных достижений античной механики следует отнести работы Архимеда (287—212 до н. э.), который был не только выдающимся инженером своего времени, но и дал ряд научных обобщений, относящихся к гидростатике (закон Архимеда), учению о равновесии и центре тяжести.

В течение XIV—XVII столетий под влиянием торгового мореплавания и военного дела возник обширный комплекс задач, связанных с движением небесных тел, полетом снарядов, прочностью кораблей, ударом тел. Решение этих задач не могло быть осуществлено старыми методами и требовало прежде всего установления связи между движением и причинами, вызывающими его изменение.

Созданию основ динамики предшествовал сравнительно длительный период накопления опытных данных и их научного анализа. Здесь необходимо прежде всего отметить работы Н. Коперника (1473—1543), который на основе данных, установленных многовековыми наблюдениями, показал, что планеты обращаются не вокруг Земли, а вокруг Солнца. Дальнейший шаг к изучению движения небесных тел сделал Иоганн Кеплер (1571—1630). Обрабатывая многочисленные наблюдения своего учителя Тихо Браге, он установил три закона движения планет.

К этому же периоду относятся работы Галилео Галилея (1564—1642). Он сформулировал принцип относительности классической механики и принцип инерции (хотя и не в общем виде), установил законы свободного падения тел. Галилеем была построена количественная теория движения тяжелого тела по наклонной плоскости и теория движения тела, брошенного под углом к горизонту. Кроме того, Галилей занимался изучением прочности стержней и сопротивлением жидкости движущимся в ней телам. Последователем Галилея в области механики был Христиан Гюйгенс (1629—1695), который сформулировал понятия центростремительной и центробежной сил, исследовал колебания физического маятника, заложил основы теории удара.

Успешно преодолевая схоластический стиль античной науки, ученые этого периода с особым вниманием относились к опытным данным и систематически контролировали истинность своих теоретических построений экспериментальными наблюдениями. Таковы, в частности, установленные Галилеем и Гюйгенсом законы движения тел.

В 1687 г. вышла в свет книга Исаака Ньютона (1642—1727) «Математические начала натуральной философии» (в Англии натуральной философией называли физику). Прежде всего в этой книге Ньютон, завершая работы своих предшественников, главным образом Галилея и Гюйгенса, создает стройную систему основных законов динамики. Он впервые вводит понятие массы, устанавливает основной закон динамики, связывающий массу точки, ее ускорение и действующую на нее силу, и закон равенства действия и противодействия.

Исходя из законов Кеплера, он математически установил закон всемирного тяготения, а затем доказал, что если этот закон справедлив, то планеты должны двигаться по законам Кеплера. Закон всемирного тяготения, открытый и доказанный И. Ньютоном, получил за последние десятилетия особо важное значение, так как он лежит в основе расчета межпланетных траекторий космических кораблей и траекторий искусственных спутников Земли.

Ньютон установил также тождественность природы сил взаимного тяготения и силы тяжести на Земле. Он показал, что Земля сплюснута у полюсов, объяснил явления приливов и отливов, заложил основы теории удара.

Установление общих законов механики и закона всемирного тяготения является научным открытием первостепенного значения. Но этим не исчерпывается значение «Математических начал натуральной философии» Ньютона. В своей книге он с предельной ясностью изложил общий метод, которым нужно руководствоваться при физических исследованиях.

Кратко этот метод сводится к следующему. Из опытов следует вывести два или три общих закона (принципы) и затем показать, как из этих простых законов логически вытекают различные свойства (следствия), наблюдаемые на практике. Хотя этот метод исследования не является единственно возможным, а в наши дни он кажется само собой разумеющимся, ясное изложение его и блестящий пример построения механики, данный Ньютоном в его книге, оказал громадное влияние на все последующие поколения физиков. Именно поэтому академик С. И. Вавилов сказал, что в истории естествознания не было события более крупного, чем появление «Начал» Ньютона *).

Период развития механики после Ньютона в значительной мере связан с именем Л. Эйлера (1707—1783), отдавшего бо́льшую часть своей исключительно плодотворной деятельности Петербургской Академии наук, членом которой он стал в 1727 г. Эйлер развил динамику точки (им была дана естественная форма дифференциальных уравнений движения материальной точки) и заложил основы динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку («динамические уравнения Эйлера»), нашел решения этих уравнений при движении тела по инерции. Он же является основателем гидродинамики (дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости), теории корабля и теории упругой устойчивости стержней. Эйлер получил ряд важных результатов и в кинематике (достаточно вспомнить углы и кинематические уравнения Эйлера, теорему о распределении скоростей в твердом теле). Ему принадлежит заслуга создания первого курса механики в аналитическом изложении.

К этому же периоду относится глубокая разработка механики свободных и несвободных систем материальных точек. Развитие этого направления было дано работами Ж. Л. Даламбера (1717—1783), Ж. Л. Лагранжа (1736—1813). В «Трактате по динамике» первого из этих авторов показано, «каким образом все задачи динамики можно решать одним и притом весьма простым и прямым методом». Однако законченное развитие этого метода было дано лишь спустя полвека Лагранжем («уравнения Лагранжа») в замечательном трактате «Аналитическая механика» (1788 г.), где, в частности, содержалось также вполне современное изложение теории линейных колебаний систем с несколькими степенями свободы.

Последующее развитие меха́ники характеризуется углубленным изучением ранее намеченных разделов и появлением ряда ее новых ветвей. Дальнейшее обоснование принципа возможных перемещений, сформулированного Лагранжем, было проведено П. С. Лапласом (1749—1827), который ввел реакции связей, действующие на каждую точку материальной системы, и сделал предположение об идеальности связей. М. В. Остроградский (1801—1861) обобщил принцип возможных перемещений, распространив его на неудерживающие связи.

В 1829 г. К. Ф. Гаусс (1777—1855) сформулировал дифференциальный вариационный принцип — «Принцип наименьшего принуждения».

Развитие принципа наименьшего действия связано с именами П. Л. Мопертюи (1698—1759), Эйлера, Лагранжа, К. Г. Якоби

---

*) Вавилов С. И. Исаак Ньютон. — М.: Изд. АН СССР, 1961. — с. 110.

(1804—1851). Существенный вклад в развитие аналитической механики на основе сформулированного им принципа был сделан У. Р. Гамильтоном (1805—1865). Независимо от Гамильтона этот принцип несколько позднее был разработан Остроградским, который применил его для более широкого класса задач. Этот наиболее важный и общий принцип получил название принципа Гамильтона — Остроградского.

Существенные результаты были достигнуты Остроградским, Гамильтоном, Якоби в области методов интегрирования уравнений динамики.

Дальнейшее развитие получила теория движения тяжелого твердого тела. В эту область после существенных результатов Эйлера и Лагранжа сделала значительный вклад С. В. Ковалевская (1850—1891). Работа Ковалевской послужила толчком для целого ряда исследований по отысканию частных случаев интегрирования уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.

Л. Фуко (1819—1868) впервые продемонстрировал во Французской Академии наук гироскоп в кардановом подвесе. Последующее развитие теории гироскопов, обусловленное требованиями навигационных нужд, происходит в конце XIX века и особенно интенсивно в XX веке. Наиболее существенные результаты в этом разделе механики были получены М. Шулером, А. Н. Крыловым (1863—1945), Б. В. Булгаковым (1900—1952), Б. Н. Кудревичем (1884—1953) и др.

Развитие механики неголономных систем связано с именами С. А. Чаплыгина, П. В. Воронца, П. Аппеля, В. Вольтерры и многих других ученых.

Существенное развитие получила теория устойчивости равновесия и движения, начала которой были даны еще Лагранжем; наиболее крупные результаты здесь принадлежат Э. Раусу (1831—1907), Н. Е. Жуковскому (1847—1921), А. Пуанкаре (1854—1912) и в особенности А. М. Ляпунову (1857—1918).

Проблема борьбы с опасными вибрациями машин и сооружений вызвала к жизни углубленную разработку теории колебаний (исследования Рэлея (1842—1919), А. Пуанкаре, А. Н. Крылова).

В XX веке особенно интенсивное развитие получила теория нелинейных колебаний, описывающая важные процессы не только в механических, но и в радиотехнических системах. Основополагающими в этой области являются работы Ван-дер-Поля, А. А. Андронова (1901—1952), Н. Н. Боголюбова, Л. И. Мандельштама (1879—1944), Н. М. Крылова (1879—1955), Н. Д. Папалекси (1880—1947) и др.

В механике зародилась теория автоматического регулирования (работы И. А. Вышнеградского (1831—1895)); в настоящее время эта теория представляет собой самостоятельную научную дисциплину, которую связывают с механикой, помимо исторических корней, теория устойчивости движения и теория колебаний.

В XIX веке сложилась теория упругости — наука о законах статического и динамического деформирования упругих тел (работы Эйлера, Навье (1785—1836), Коши (1789—1857), Сен-Венана (1797—1886)). В настоящее время ее начинают называть теорией твердого деформируемого тела в связи с расширением представления о законах деформирования и учетом вязких и пластичных свойств реальных тел.

В конце XIX века под сильным влиянием развития надводного и подводного кораблестроения и авиации начата углубленная разработка проблем гидро- и аэродинамики. Наиболее крупные результаты в этих областях связаны с именами Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина (1869—1942), Л. Прандтля (1875—1953), Т. Ка̀рмана (1881—1963).

В известных работах И. В. Мещерского (1859—1935) заложены основы механики тела переменной массы (переменного состава) — дисциплины, служащей фундаментом изучения реактивного полета. Основополагающими работами в области ракетодинамики являются работы К. Э. Циолковского (1857—1935).

Механика прошла огромный путь развития, но и в наши дни она представляет живо развивающуюся науку. Укажем на одну проблему, возникшую в самое последнее время (за последние десятилетия) — проблему управления движением. Речь идет об установлении характера изменения сил, с помощью которых можно обеспечить движение по заранее выработанной программе. Сюда непосредственно примыкает проблема оптимального управления, например, каким образом управлять движением ракеты, чтобы она вышла на заданную орбиту при минимальном расходе горючего.

Строго говоря, под механикой следует понимать совокупность достаточно обособленных отраслей знаний, базирующихся на законах Ньютона. Круг вопросов, изучаемых механикой, все время расширяется, охватывая все новые и новые области науки и техники. Это привело к тому, что ряд разделов теоретической механики вследствие специфики объектов исследования и применяемых математических методов становится вполне самостоятельными науками. К их числу относятся дисциплины: механика жидкостей и газов, теория упругости, теория механизмов и машин, небесная механика, теория регулирования и др. Этот естественный процесс развития науки продолжается и в наши дни.

Сейчас под собственно теоретической механикой обычно понимают сравнительно узкий раздел механики, а именно: механику материальной точки, механику абсолютно твердого тела и их систем. Несмотря на это, теоретическая механика является одним из важнейших курсов, изучаемых в высшей технической школе; ее законы и выводы широко применяются в целом ряде других предметов при решении самых разнообразных и сложных технических задач. Все технические расчеты при постройке различных сооружений, при проектировании машин, при изучении полета различных управляемых и неуправляемых летательных аппаратов и т. п. основаны на законах теоретической механики.

Особое значение механика приобретает сейчас, когда началась эра исследования космоса. Расчеты космических траекторий, разработки методов управления полетом представляют сложные задачи механики.

Отдавая должное значению механики как одного из важнейших разделов физики и фундамента современной техники, следует все же иметь в виду, что классическая механика лишь приближенно описывает законы природы, ибо в ее основе лежат постулаты, не вполне точно отражающие геометрию мира и характер механического взаимодействия тел. Это стало очевидным после создания А. Эйнштейном специальной теории относительности, на которой основывается релятивистская механика.

Согласно теории относительности не существует абсолютного времени и абсолютного пространства, служащего лишь простым вместилищем тел. На самом деле свойства пространства и времени существенно зависят от взаимодействующих в них тел. Более того, механические характеристики, такие как масса, тоже оказываются переменными и зависящими от обстоятельств движения (скорости). Однако становление релятивистской механики отнюдь не привело к отрицанию классической механики. Классическая механика, являясь частным (точнее, предельным) случаем релятивистской механики, не теряет своего значения, ибо ее выводы при скоростях движения, достаточно малых по сравнению со скоростью света, с большой точностью удовлетворяют требованиям многих отраслей современной техники.

В высших технических учебных заведениях теоретическая механика делится обычно на три раздела: *статику*, *кинематику* и *динамику*. Эта сложившаяся традиция нашла отражение и в настоящем курсе.

В статике изучаются методы преобразования одних совокупностей сил в другие, эквивалентные данным, выясняются условия равновесия, а также определяются возможные положения равновесия.

В кинематике движение тел рассматривается с чисто геометрической точки зрения, т. е. без учета силовых взаимодействий между телами.

В динамике движение тел изучается в связи с силовыми взаимодействиями между телами. Более подробные сведения о задачах статики, кинематики и динамики будут даны в соответствующих разделах курса.

СТАТИКА

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

§ 1.1. Сила. Система сил. Равновесие абсолютно твердого тела

Как уже отмечалось во введении, в теоретической механике изучается движение материальных тел относительно друг друга. Для этого требуется прежде всего построить модели объектов и дать определение понятий, с которыми имеет дело механика. В теоретической механике рассматривается простейшая модель «обычного» евклидова трехмерного пространства. Постулируется, что в этом пространстве существует хотя бы одна система координат, в которой справедливы законы Ньютона (*инерциальная система*). Многочисленные опыты и измерения показывают, что с высокой степенью точности система отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными к далеким «неподвижным» звездам, является инерциальной системой. В дальнейшем будет показано, что если существует хотя бы одна инерциальная система, то их имеется бесчисленное множество *) (инерциальные системы отсчета условно называются *неподвижными*).

В статике, не внося никаких погрешностей в вычисления, можно считать, что системы координат, жестко связанные с Землей, неподвижны **). Условия относительного равновесия в других, неинерциальных системах отсчета, в частности, в системах, движущихся относительно Земли, будут выяснены в динамике.

Как для статики, так и для динамики одним из основных является понятие силы. Первичное представление о силе дают нам мускульные ощущения. В *механике под силой понимается мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться* (изменять свою форму). Из этого определения сразу вытекают два способа измерения сил: первый, динамический способ, основан на измерении ускорения тела в инерциальной системе от-

---

*) Более подробно о моделях пространства и инерциальных системах отсчета будет рассказано в разделе «Динамика» (см. том II, § 1.2). Здесь же предполагается, что читатель знаком с законами Ньютона в объеме школьного курса физики.

**) Это объясняется тем, что сила тяжести имеет сложный характер, учитывающий вращение Земли (см. том II, § 6.3).

счета, а второй, статический способ, основан на измерении деформации упругих тел.

В механике не изучают физическую природу сил. Укажем только, что силы могут возникать как при непосредственном контакте тел (например, сила тяги электровоза, передаваемая вагонам, сила трения между поверхностями соприкасающихся тел и т. п.), так и на расстоянии (например, силы притяжения небесных тел, силы взаимодействия электрически заряженных или намагниченных частиц и т. п.).

Сила является векторной величиной — она характеризуется численным значением, или модулем, точкой приложения и направлением. Точка приложения силы и ее направление определяют линию действия силы. На рис. 1.1 показана сила **F**, приложенная в точке A, длина отрезка AB в соответствующем масштабе равна модулю силы, точка B называется концом силы; у конца силы ставится стрелка, указывающая направление действия силы. Прямая LM называется *линией действия силы.* Условимся обозначать силу буквой жирного шрифта, например, **F**, а ее модуль — той же буквой обычного шрифта, т. е. F.

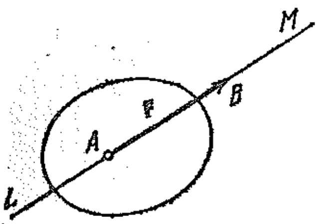


Рис. 1.1

Для измерения модуля силы ее сравнивают с некоторой силой, выбранной в качестве единицы. В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) за единицу силы принят ньютон (Н), а в технической системе единиц (система МКГСС) — килограмм-сила (кгс); ее не следует смешивать с единицей массы в системе СИ — кг. Напомним, что эти единицы связаны соотношениями

$$1 \text{ кгс} \approx 9{,}81 \text{ Н}; \; 1 \text{ Н} \approx 0{,}102 \text{ кгс}.$$

Применяются и более крупные единицы измерения сил, в частности, 1 МН $= 10^6$ Н (меганьютон), 1 кН $= 10^3$ Н (килоньютон), 1 тс $= 10^3$ кгс (тонна-сила) и т. п.

Силу часто задают непосредственным описанием, например: к концу балки приложена сила **F**, численно равная 5 кН и направленная вертикально вниз. Но можно задать силу и способом, которым обычно определяют векторы, а именно, через ее проекции на оси прямоугольной системы координат и точку приложения силы. Если, как обычно, единичные векторы (орты) осей x, y, z обозначить через **i**, **j**, **k** (рис. 1.2), то сила **F** определится точкой приложения и равенством

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, \qquad (1.1)$$

где F_x, F_y, F_z — проекции силы **F** на соответствующие координатные оси *).

*) Здесь и в дальнейшем нижними индексами x, y, z отмечаются проекции вектора на соответствующие координатные оси.

Рассматривая действие сил на материальные тела, мы будем отвлекаться не только от физической природы сил, но и от многих свойств самих тел. Так, реальные твердые тела обычно мало изменяют свою форму под действием приложенных к ним сил. Поэтому для решения многих задач механики допустимо вовсе пренебречь малыми деформациями (т. е. малыми изменениями формы) и пользоваться моделью *абсолютно твердого тела, понимая под ним тело, в котором расстояния между двумя любыми точками его остаются неизменными независимо от действия тех или иных сил* *). Для краткости мы будем часто пользоваться выражением «твердое тело» или даже просто «тело», имея в виду только что введенное понятие абсолютно твердого тела.

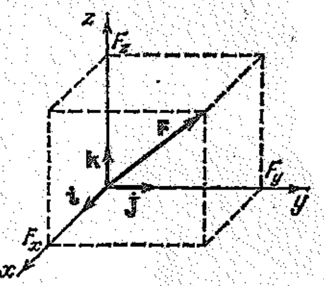


Рис. 1.2

Совокупность нескольких сил ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$) называется системой сил. *Если, не нарушая состояния тела, одну систему сил* ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$) *можно заменить другой системой* ($\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k$) *и наоборот, то такие системы сил называются эквивалентными.* Символически это обозначается следующим образом:

$$(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim (\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k). \qquad (1.2)$$

Введенное понятие эквивалентности систем сил не устанавливает условий, при выполнении которых две системы сил будут эквивалентны. Оно означает только, что эквивалентные системы сил вызывают одинаковое состояние тела (одинаковые ускорения).

В том случае, когда система сил ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$) *эквивалентна одной силе* $\mathbf{R}$, *т. е.*

$$(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim \mathbf{R}, \qquad (1.3)$$

последняя называется равнодействующей данной системы сил. Это означает, что одна равнодействующая сила может заменить действие всех данных сил. В дальнейшем будет показано, что не всякая система сил имеет равнодействующую.

Как уже отмечалось, *в инерциальной системе координат выполняется закон инерции.* Это означает, в частности, что *тело, находящееся в начальный момент в покое, останется пребывать в этом состоянии, если на него не действуют никакие силы.* (Полная формулировка закона инерции будет дана в разделе динамики.) *Если абсолютно твердое тело остается в состоянии покоя при действии на*

---

*) Кроме простейшей модели абсолютно твердого тела в механике применяются другие модели твердых, жидких и газообразных тел. Так, например, имеются модели упругих и пластических тел, модели идеальной и вязкой жидкости и т. п. Эти модели изучаются в других разделах механики — в теории упругости, в механике жидкостей и газов и т. п. Конечно, все модели тел представляют лишь приближение к реальным телам, и ими можно пользоваться только в рамках сделанных предположений.

него системы сил ($\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$), *то последняя называется уравновешенной системой сил, или системой сил, эквивалентной нулю:*

$$(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim 0. \qquad (1.4)$$

Часто в этом случае говорят, что *тело находится в равновесии* *).

В заключение этого параграфа обратим внимание на *различие между понятием эквивалентности сил и понятием равенства векторов, изображающих эти силы.* В математике два вектора считаются равными, если они параллельны, направлены в одну сторону и равны по модулю. Для эквивалентности двух сил этого недостаточно и из равенства $\mathbf{F} = \mathbf{P}$ еще не следует соотношение $\mathbf{F} \sim \mathbf{P}$. Из сделанных определений вытекает, что в общем случае две силы эквивалентны, если они геометрически (векторно) равны и приложены к одной точке тела. Но рис. 1.3 показаны две геометрически равные, но не эквивалентные силы. В этом проявляется различие между свободными векторами, рассматриваемыми в математике, и силами.

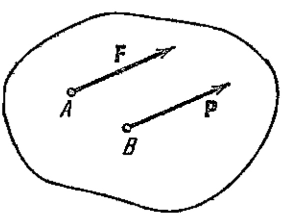


Рис. 1.3

§ 1.2. Аксиомы статики и их следствия

В аксиомах статики формулируются те простейшие и общие законы, которым подчиняются силы, действующие на одно и то же тело, или силы, приложенные к взаимодействующим телам. Эти законы установлены многочисленными непосредственными наблюдениями, а также опытной проверкой следствий (часто далеких и вовсе не очевидных), логически вытекающих из этих аксиом.

Как следует из второго закона Ньютона, тело под действием одной силы приобретает ускорение и, следовательно, оно не может находиться в покое. Это означает, что одна сила не может составлять уравновешенную систему сил. Первая аксиома устанавливает условия, при выполнении которых простейшая система сил будет уравновешена.

Аксиома 1. *Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены (эквивалентны нулю) тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.*

Это означает, что если абсолютно твердое тело находится в покое под действием двух сил, то эти силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Обратно, если на абсолютно твердое тело действуют по одной прямой в про-

*) Отметим, что введенное определение уравновешенных сил, приложенных к абсолютно твердому телу, не может быть распространено на силы, приложенные к деформируемым телам.

тивоположные стороны две равные по модулю силы и тело в начальный момент находилось в покое, то состояние покоя тела сохранится.

На рис. 1.4 показаны уравновешенные силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, удовлетворяющие соотношениям: $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim 0$, $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim 0$.

При решении некоторых задач статики приходится рассматривать силы, приложенные к концам жестких стержней, весом которых

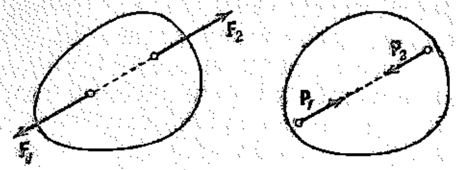


Рис. 1.4

можно пренебречь, причем известно, что стержни находятся в равновесии. Из сформулированной аксиомы непосредственно следует, что действующие на такой стержень силы направлены вдоль прямой, проходящей через концы стержня, противоположны по направлению и равны друг другу по модулю (рис. 1.5, *а*). Этот вывод сохраняется и в случае, когда ось стержня криволинейная (рис. 1.5, *б*).

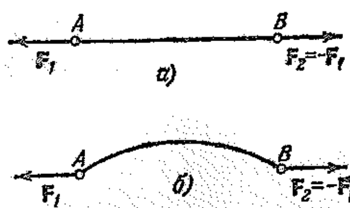


Рис. 1.5

Первая аксиома устанавливает необходимые и достаточные условия уравновешивания только двух сил, но, конечно, уравновешенная система сил может состоять и из большего числа сил.

Две следующие аксиомы устанавливают простейшие действия с силами, при которых состояние тела не изменяется.

Аксиома 2. *Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, к нему можно прикладывать или отбрасывать силы тогда и только тогда, когда они составляют уравновешенную систему, в частности, если эта система состоит из двух сил, равных по модулю, действующих по одной прямой и направленных в противоположные стороны.*

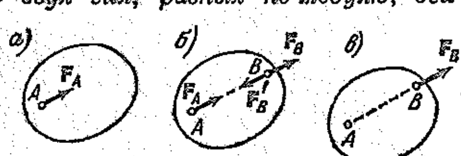


Рис. 1.6

Из этой аксиомы вытекает следствие: *не нарушая состояния тела, точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.*

Действительно, пусть сила $\mathbf{F}_A$ приложена к точке A (рис. 1.6, *а*). Приложим в точке B на линии действия силы $\mathbf{F}_A$ две уравновешенные силы $\mathbf{F}_B$ и $\mathbf{F}'_B$, полагая, что $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A$ (рис. 1.6, *б*). Тогда согласно аксиоме 2 будем иметь

$$\mathbf{F}_A \sim (\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B).$$

Так как силы $\mathbf{F}_A$ и $\mathbf{F}'_B$ образуют также уравновешенную систему сил (аксиома 1), то согласно аксиоме 2 их можно отбросить (рис. 1.6, *в*). Таким образом,

$$\mathbf{F}_A \sim (\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B) \sim \mathbf{F}_B, \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_A \sim \mathbf{F}_B,$$

что доказывает следствие.

Это следствие показывает, что *сила, приложенная к абсолютно твердому телу, представляет собой скользящий вектор.*

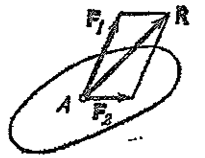


Рис. 1.7

Обе аксиомы и доказанное следствие нельзя применять к деформируемым телам, в частности, перенос точки приложения силы вдоль линии ее действия меняет напряженно-деформированное состояние тела.

Аксиома 3. *Не меняя состояния тела, две силы, приложенные к одной его точке, можно заменить одной равнодействующей силой, приложенной в той же точке и равной их геометрической сумме (аксиома параллелограмма сил).*

Эта аксиома устанавливает два обстоятельства: первое — две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 1.7), приложенные к одной точке, имеют равнодействующую, т. е. эквивалентны одной силе

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim \mathbf{R};$$

второе — аксиома полностью определяет модуль, точку приложения и направление равнодействующей силы

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \tag{1.5}$$

Другими словами, равнодействующую $\mathbf{R}$ можно построить как диагональ параллелограмма со сторонами, совпадающими с $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

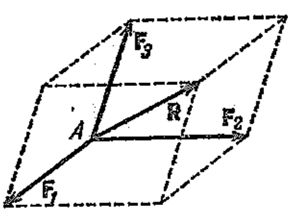


Рис. 1.8

Модуль равнодействующей определится равенством

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α—угол между данными векторами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

Отметим, что третья аксиома применима к любым, не обязательно абсолютно твердым телам.

Вторая и третья аксиомы статики дают возможность переходить от одной системы сил к другой системе, ей эквивалентной. В частности, они позволяют разложить любую силу $\mathbf{R}$ на две, три и т. д. составляющие, т. е. перейти к другой системе сил, для которой сила $\mathbf{R}$ является равнодействующей. Задавая, например, два направления, которые лежат с $\mathbf{R}$ в одной плоскости, можно построить параллелограмм, у которого диагональ изображает силу $\mathbf{R}$. Тогда силы, направленные по сторонам параллелограмма, составят систему, для которой сила $\mathbf{R}$ будет равнодействующей (рис. 1.7). Аналогичное построение можно провести и в пространстве. Для этого достаточно из точки приложения силы **R** провести три прямые, не лежащие в одной плоскости, и построить на них параллелепипед с диагональю, изображающей силу **R**, и с ребрами, направленными по этим прямым (рис. 1.8).

Аксиома 4 (3-й закон Ньютона). *Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.*

Заметим, что силы взаимодействия двух тел не составляют систему уравновешенных сил, так как они приложены к разным телам.

Если тело *I* действует на тело *II* с силой **P**, а тело *II* действует на тело *I* с силой **F** (рис. 1.9), то эти силы равны по модулю ($F = P$) и направлены по одной прямой в противоположные стороны, т. е. $\mathbf{F} = -\mathbf{P}$.

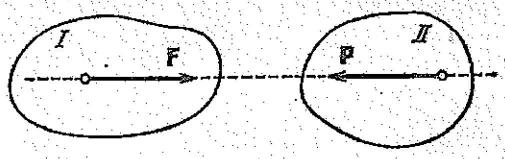


Рис. 1.9

Если обозначить через **F** силу, с которой Солнце притягивает Землю, то Земля притягивает Солнце с такой же по модулю, но противоположно направленной силой $-\mathbf{F}$.

При движении тела по плоскости к нему будет приложена сила трения **T**, направленная в сторону, противоположную движению. Это — сила, с которой неподвижная плоскость действует на тело. На основании четвертой аксиомы тело действует на плоскость с такой же силой, но ее направление будет противоположно силе **T**. На рис. 1.10 показано тело, движущееся вправо; сила трения **T** приложена к движущемуся телу, а сила $\mathbf{T}' = -\mathbf{T}$ — к плоскости.

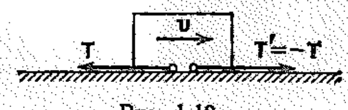


Рис. 1.10

Рассмотрим еще покоящуюся систему, изображенную на рис. 1.11, *а*. Она состоит из двигателя *A*, установленного на фундаменте *B*, который в свою очередь находится на основании *C*. На двигатель и фундамент действуют силы тяжести $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соответственно (они представляют собой действие Земли на эти тела). Кроме указанных двух сил, действуют также следующие силы:

$\mathbf{F}_3$ — сила действия тела *A* на тело *B* (она равна весу тела *A*);

$\mathbf{F}_3'$ — сила обратного действия тела *B* на тело *A*;

$\mathbf{F}_4$ — сила действия тел *A* и *B* на основание *C* (она равна суммарному весу тел *A* и *B*);

$\mathbf{F}_4'$ — сила обратного действия основания *C* на тело *B*. Эти силы показаны на рис. 1.11, *б*, *в*, *г*.

Согласно аксиоме 4

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_3', \quad \mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_4',$$

причем эти силы взаимодействия определяются заданными силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

Для нахождения сил взаимодействия необходимо исходить из аксиомы 1. Вследствие покоя тела A (рис. 1.11, *б*) должно быть

$$\mathbf{F}_3' = -\mathbf{F}_1,$$

а значит, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$.

Точно так же из условия равновесия тела B (рис. 1.11, *в*) следует

$$\mathbf{F}_4' = -(\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3),$$

т. е.

$$\mathbf{F}_4' = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

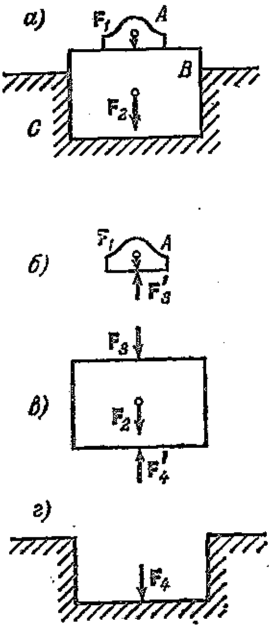


Рис. 1.11

Аксиома 5. *Равновесие деформируемого тела не нарушится, если жестко связать его точки и считать тело абсолютно твердым.*

Этой аксиомой (ее называют иногда *принципом отвердевания*) пользуются в тех случаях, когда речь идет о равновесии тел, которые нельзя считать твердыми. Приложенные к таким телам внешние силы должны удовлетворять условиям равновесия твердого тела, однако для нетвердых тел эти условия являются лишь необходимыми, но не достаточными. Проиллюстрируем это положение простым примером. На стр. 19 было показано, что для равновесия абсолютно твердого невесомого стержня необходимо и достаточно, чтобы приложенные к концам стержня силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ действовали по прямой, соединяющей его концы, были равны по модулю и направлены в разные стороны. Эти же условия необходимы и для равновесия отрезка невесомой нити, но для нити они недостаточны — необходимо дополнительно потребовать, чтобы силы, действующие на нить, были растягивающими (рис. 1.12, *б*), в то время как для стержня они могут быть и сжимающими (рис. 1.12, *а*).

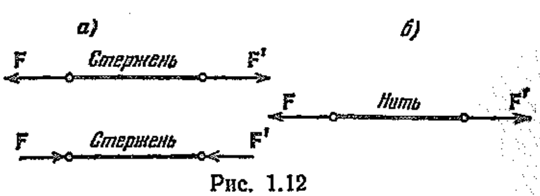


Рис. 1.12

В заключение этого параграфа рассмотрим случай эквивалентности нулю трех непараллельных сил, приложенных к твердому телу (рис. 1.13, *а*).

Теорема о трех непараллельных силах. *Если под действием трех сил тело находится в равновесии и линии действия двух сил* *пересекаются, то все силы лежат в одной плоскости, и их линии действия пересекаются в одной точке.*

Пусть на тело действует система трех сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$, причем линии действия сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ пересекаются в точке A (рис. 1.13, *а*). Согласно следствию из аксиомы 2 силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ можно перенести в точку A (рис. 1.13, *б*), а по аксиоме 3 их можно заменить одной силой $\mathbf{R}$, причем (рис. 1.13, *в*)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

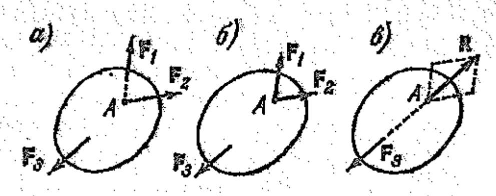


Рис. 1.13

Таким образом, рассматриваемая система сил приведена к двум силам $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}_3$ (рис. 1.13, *в*). По условиям теоремы тело находится в равновесии, следовательно, по аксиоме 1 силы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}_3$ должны иметь общую линию действия, но тогда линии действия всех трех сил должны пересекаться в одной точке.

§ 1.3. Активные силы и реакции связей

Условимся называть тело *свободным*, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называется *несвободным*, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, — *связями*. Как уже упоминалось, в точках контакта возникают силы взаимодействия между данным телом и связями. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются *реакциями связей*. При перечислении всех сил, действующих на данное тело, необходимо, разумеется, учитывать и эти контактные силы (реакции связей).

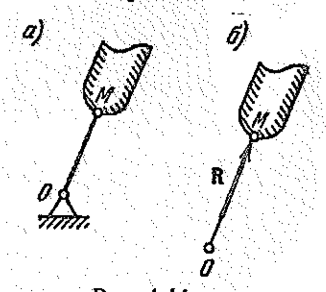


Рис. 1.14

В механике принимают следующее положение, называемое иногда *принципом освобождаемости: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить реакциями их, приложенными к данному телу.*

В статике полностью определить реакции связей можно с помощью условий или уравнений равновесия тела, которые будут установлены в дальнейшем, но направления их во многих случаях можно определить из рассмотрения свойств связей.

В качестве простейшего примера на рис. 1.14, *а* представлено тело, точка M которого соединена с неподвижной точкой O при помощи стержня, весом которого можно пренебречь; концы стержня имеют шарниры, допускающие свободу вращения. В данном случае для тела связью служит стержень OM; стеснение свободы перемещения точки M выражается в том, что она вынуждена находиться на неизменном удалении от точки O. Но, как мы видели выше (см. рис. 1.5, *б*), сила действия на такой стержень должна быть направлена по прямой OM, и согласно аксиоме 4 сила противодействия стержня (реакция) $\mathbf{R}$ должна быть направлена вдоль той же прямой. Таким образом, направление реакции стержня совпадает с прямой OM (рис. 1.14, *б*). (В случае криволинейного невесомого стержня — по прямой, соединяющей концы стержня; см. рис. 1.5, *б*.)

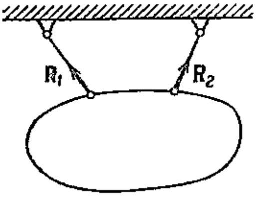


Рис. 1.15

Аналогично сила реакции гибкой нерастяжимой нити должна быть направлена вдоль нити. На рис. 1.15 показано тело, висящее на двух нитях, и реакции нитей $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.

Возвращаясь к общему случаю, отметим, что силы, действующие на несвободное тело (или на несвободную материальную точку), можно разделить на две категории. Одну категорию образуют силы, не зависящие от связей, а другую категорию — реакции связей. При этом реакции связей, в сущности, носят пассивный характер — они возникают лишь постольку, поскольку на тело действуют те или иные силы первой категории. Поэтому силы, не зависящие от связей, называют *активными* силами (иногда они называются *заданными*), а реакции связей — *пассивными* силами.

На рис. 1.16, *а* вверху показаны две равные по модулю активные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, растягивающие стержень AB, внизу показаны реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ растянутого стержня. На рис. 1.16, *б* вверху показаны

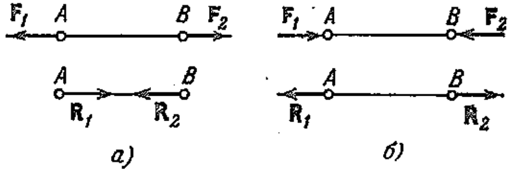


Рис. 1.16

активные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, сжимающие стержень, внизу показаны реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ сжатого стержня.

Рассмотрим еще некоторые типичные виды связей и укажем возможные направления их реакций; конечно, модули реакций определяются активными силами и не могут быть найдены, пока последние не заданы определенным образом. При этом мы будем пользоваться некоторыми упрощенными представлениями, схематизирующими действительные свойства реальных связей.

1. Если твердое тело опирается на идеально гладкую (без трения) поверхность, то точка контакта тела с поверхностью может свободно скользить вдоль поверхности, но не может перемещаться в направлении вдоль нормали к поверхности. *Реакция идеально*

гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям (рис. 1.17, *а*).

Если твердое тело имеет гладкую поверхность и опирается на острие (рис. 1.17, *б*), то реакция *направлена по нормали к поверхности самого тела.*

Если твердое тело упирается острием в угол (рис. 1.17, *в*), то связь препятствует перемещению острия как по горизонтали, так

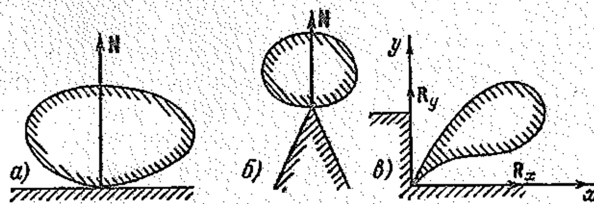


Рис. 1.17

и по вертикали. Соответственно реакция $\mathbf{R}$ угла может быть представлена двумя составляющими — горизонтальной $\mathbf{R}_x$ и вертикальной $\mathbf{R}_y$, величины и направления которых в конечном счете определяются заданными силами.

2. *Сферическим шарниром* называется устройство, изображенное на рис. 1.18, *а*, которое делает неподвижной точку *O* рассматриваемого тела. Если сферическая поверхность контакта идеально гладкая, то реакция сферического шарнира имеет направление нормали

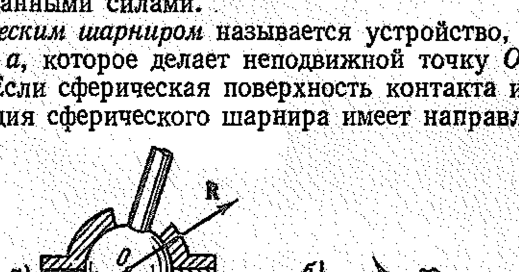


Рис. 1.18

к этой поверхности. Поэтому единственное, что известно относительно реакции, — это то, что она проходит через центр шарнира *O*; направление реакции может быть любым и определяется в каждом конкретном случае в зависимости от заданных сил и общей схемы закрепления тела. Точно так же нельзя заранее определить направление реакции *подпятника*, изображенного на рис. 1.18, *б*.

3. *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора* (рис. 1.19, *а*). Реакция такой опоры проходит через ее ось, причем направление реакции может быть любым (в плоскости, перпендикулярной оси опоры).

4. *Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора* (рис. 1.19, *б*) препятствует перемещению закрепленной точки тела по перпен-

дикуляру к плоскости $I—I$; соответственно реакция такой опоры также имеет направление этого перпендикуляра.

На одно и то же тело может быть наложено одновременно несколько связей, возможно, различного типа. Три примера такого рода представлены на рис. 1.20, *а*. На рис. 1.20, *б* изображены соответствующие системы сил; здесь, в соответствии с принципом освобождаемости, связи отброшены и заменены реакциями. Реакции стержней направлены вдоль стержней (левая схема); при этом предполагается, что стержни невесомы и соединены с телом и опорами с помощью шарниров. Реакции идеально гладких опорных поверхностей направлены по нормали к этим поверхностям (средняя и правая схемы). Кроме того, реакция

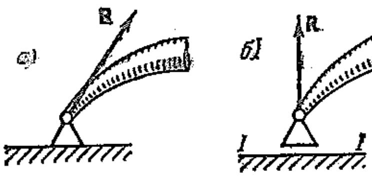


Рис. 1.19

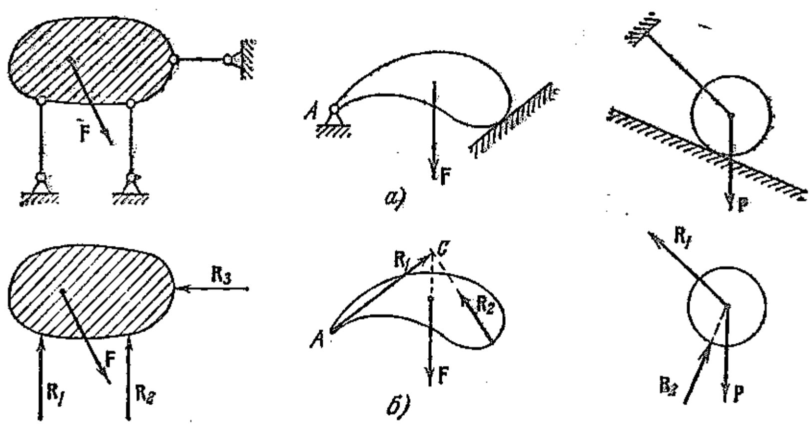


Рис. 1.20

цилиндрического шарнира в точке A (средняя схема) должна на основании теоремы о трех непараллельных силах проходить через точку пересечения линий действия сил F и R_2 — точку C. Реакция R_1 идеально гибкой нерастяжимой и невесомой нити направлена вдоль нити (правая схема).

В механических системах, образованных путем сочленения нескольких твердых тел, наряду с внешними связями (опорами) имеются *внутренние связи*. В этих случаях иногда мысленно расчленяют систему и заменяют отброшенные не только внешние, но и внутренние связи соответствующими реакциями. Один пример такого рода, в котором два тела соединены шарниром C, представлен на рис. 1.21. Отметим, что силы R_2 и R_3 равны друг другу по модулю, но противоположно направлены (по аксиоме 4).

где $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{M}_{O_1}$ — главные моменты относительно центров приведения O и O_1. Второе слагаемое в правой части формулы (7.2) представляет собой момент главного вектора, приложенного в центре приведения O, относительно нового центра приведения O_1.

Умножим скалярно обе части равенства (7.2) на вектор $\mathbf{F}_O$:

$$\mathbf{M}_{O_1}\cdot\mathbf{F}_O=\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{F}_O+(\overline{O_1O}\times\mathbf{F}_O)\cdot\mathbf{F}_O.$$

Так как вектор $\overline{O_1O}\times\mathbf{F}_O$ перпендикулярен вектору $\mathbf{F}_O$, то их скалярное произведение равно нулю. Следовательно,

$$\mathbf{M}_{O_1}\cdot\mathbf{F}_O=\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{F}_O, \tag{7.3}$$

т. е. скалярное произведение главного вектора $\mathbf{F}_O$ на главный момент не зависит от центра приведения.

Таким образом, при перемене центра приведения не изменяются главный вектор и скалярное произведение главного вектора на главный момент. Говорят, что эти величины *инвариантны относительно выбора центра приведения.*

Первым статическим инвариантом называется главный вектор $\mathbf{F}_O$. *В более узком смысле этого слова под первым инвариантом понимают квадрат модуля главного вектора*

$$I_1=F_O^2=F_x^2+F_y^2+F_z^2. \tag{7.4}$$

Вторым статическим инвариантом называется скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I_2=\mathbf{F}_O\cdot\mathbf{M}_O=F_xM_x+F_yM_y+F_zM_z. \tag{7.5}$$

Из второго инварианта вытекает простое геометрическое следствие. Действительно, запишем равенство (7.3) в следующем виде:

$$M_{O_1}\cdot F_O\cos(\mathbf{M}_{O_1},\ \mathbf{F}_O)=M_O\cdot F_O\cos(\mathbf{M}_O,\ \mathbf{F}_O).$$

Если $F_O\neq 0$, то

$$M_{O_1}\cos(\mathbf{M}_{O_1},\ \mathbf{F}_O)=M_O\cos(\mathbf{M}_O,\ \mathbf{F}_O).$$

Каждое из этих произведений представляет проекцию главного момента на направление главного вектора. Следовательно, при перемене центра приведения *проекция главного момента на направление главного вектора не изменяется.* Заметим, что при $F_O\neq 0$ это следствие можно принять за определение второго инварианта.

Так как проекция главного момента на направление главного вектора не изменяется при перемене центра приведения, то можно утверждать, что для центра приведения, в котором главный вектор и главный момент направлены по одной прямой, модуль главного момента будет минимальным. В этом случае модуль главного момента равен величине его проекции на направление главного вектора.

Очевидно, что проекция M^* главного момента на направление главного вектора определяется равенством

$$M^*=(\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{F}_O)/F_O,$$

или, учитывая (6.12),

$$S \leqslant \frac{\delta}{r} N. \tag{6.15}$$

Очевидно, что максимальный момент трения качения $M_т^{max} = \delta N$ пропорционален силе нормального давления.

В справочных таблицах приводится отношение коэффициента трения качения к радиусу цилиндра ($\lambda = \delta/r$) для различных материалов.

Задача 6.8. На наклонной плоскости находится цилиндр. Найти, при каких углах наклона плоскости к горизонту α цилиндр будет находиться в равновесии, если r — радиус цилиндра, f — коэффициент трения скольжения, δ — коэффициент трения качения (рис. 6.11).

Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -T + P \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N - P \cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = M_т - rP \sin\alpha = 0.$$

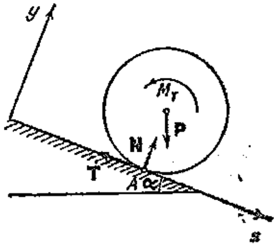


Рис. 6.11

Кроме того, должны выполняться неравенства

$$T \leqslant fN, \quad M_т \leqslant \delta N.$$

Из первых трех уравнений мы можем определить N, T, $M_т$; подставив эти величины в последние два неравенства, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f, \tag{6.16}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \delta/r. \tag{6.17}$$

Эти неравенства должны удовлетворяться одновременно. В тех случаях, когда $\delta/r < f$, потеря равновесия происходит путем перехода к качению, так как сначала нарушится неравенство (6.17); если же $f < \delta/r$, то нарушится неравенство (6.16) и цилиндр начнет скользить.

Глава VII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 7.1. Статические инварианты. Динамический винт

Ранее было установлено, что главный вектор системы сил, как угодно расположенных в пространстве,

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \tag{7.1}$$

не изменяется при перемене центра приведения. Главный же момент при этом изменяется и для нового центра приведения определяется формулой (см. формулу (4.14))

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \overline{O_1O} \times \mathbf{F}_O, \tag{7.2}$$

ных на рис. 6.10, *а*. Согласно этой схеме равновесие невозможно, так как главный момент всех сил, действующих на цилиндр $M_{Cz} = -Sr$, отличен от нуля, и одно из условий равновесия не выполняется.

Причина выявившегося несоответствия состоит в том, что в наших рассуждениях мы продолжаем пользоваться представлением об абсолютно твердом теле и предполагаем касание цилиндра с поверхностью происходящим по образующей. Для устранения отмеченного несоответствия теории с опытом необходимо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учесть, что в действительности цилиндр и плоскость вблизи точки C деформируются и существует некоторая площадь соприкосновения конечной ширины. Вследствие этого в ее правой части цилиндр прижимается сильнее, чем в левой, и полная реакция **R** приложена правее точки C (см. точку C_1 на рис. 6.10, *б*).

Полученная теперь схема действующих сил статически удовлетворительна, так как момент пары (**S**, **T**) может уравновеситься моментом пары (**N**, **P**). Считая деформацию малой, заменим эту систему сил системой, изображенной на рис. 6.7, *в*. В отличие от первой схемы (рис. 6.10, *а*), к цилиндру приложена пара сил с моментом

$$M_т = Nh. \qquad (6.11)$$

Этот момент называется *моментом трения качения*.

Составим уравнения равновесия цилиндра:

$$S - T = 0, \quad N - P = 0, \quad -Sr + M_т = 0. \qquad (6.12)$$

Первые два уравнения дают $T = S$, $N = P$, а из третьего уравнения можно найти $M_т$. Затем из (6.11) определяем расстояние между точками C и C_1:

$$h = Sr/P. \qquad (6.13)$$

Как видно, с увеличением модуля активной силы S растет расстояние h. Но это расстояние связано с площадью поверхности контакта и, следовательно, не может неограниченно увеличиваться. Это значит, что наступит такое состояние, когда увеличение силы S приведет к нарушению равновесия. Обозначим максимально возможную величину h буквой δ. Экспериментально установлено, что величина δ пропорциональна радиусу цилиндра и различна для разных материалов.

Следовательно, если имеет место равновесие, то выполняется условие

$$h \leqslant \delta. \qquad (6.14)$$

Величина δ называется *коэффициентом трения качения*; она имеет размерность длины.

Условие (6.14) можно также записать в виде

$$M_т \leqslant \delta N,$$

Задача 6.6. К концу троса подвешен груз весом $Q = 20$ кН; угол охвата цилиндра тросом $\varphi^* = 11{,}5$. Найти силу, необходимую для подъема груза, если коэффициент трения $f = 0{,}2$.

В данном случае нужно воспользоваться формулой (6.10)

$$P = Qe^{f\varphi^*} = 20e^{0,2\cdot 11,5} \approx 200 \text{ кН}.$$

Сопоставляя этот результат с полученным в задаче 6.5, заключаем, что трос будет находиться в состоянии равновесия, если $2 \text{ кН} \leqslant P \leqslant 200$ кН. При $P < 2$ кН начинается движение в сторону силы **Q**, а при $P > 200$ кН — движение в сторону силы **P**.

Задача 6.7. При причаливании (швартовке) судна матрос удерживает его с помощью каната, накинутого в форме восьмерки на причальные тумбы (кнехты), причем один конец каната A укреплен на судне, а второй конец каната B находится в руках матроса (рис. 6.9). Считая, что угол охвата каждой тумбы равен $5\pi/3$ (300°), определить, какое максимальное усилие P судна может выдержать матрос, прикладывая силу $Q = 500$ Н при одной, двух и трех уложенных канатных восьмерках, если коэффициент трения между канатом и причальными тумбами равен 0,2.

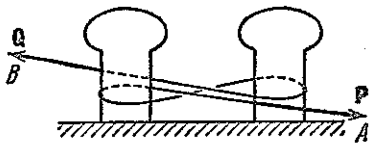


Рис. 6.9

При одной восьмерке общий угол охвата $\varphi_1 = (10/3)\,\pi$, а при двух и трех восьмерках соответственно $\varphi_2 = (20/3)\,\pi$ и $\varphi_3 = 10\pi$. Применяя формулу (6.10), получаем

$$P_1 = 500e^{0,2\,(10/3)\,\pi},$$

или, пользуясь таблицами показательных функций, находим (аналогично получены значения сил P_2 и P_3):

$$P_1 = 4{,}04 \text{ кН}, \quad P_2 = 32{,}7 \text{ кН}, \quad P_3 = 264 \text{ кН}.$$

Таким образом, при трех уложенных восьмерках за счет сил трения между канатом и причальными тумбами один матрос может удержать судно, развивающее усилие в 264 кН, т. е. в 528 раз больше силы, прикладываемой матросом.

§ 6.2. Равновесие тела при наличии трения качения

Рассмотрим цилиндр (каток), покоящийся на горизонтальной плоскости, когда на него действует горизонтальная активная сила **S**; кроме нее, действуют сила тяжести **P**, а также нормальная реакция **N**

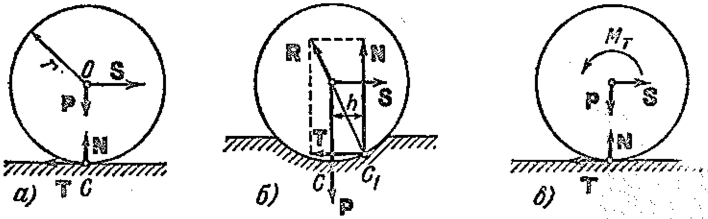


Рис. 6.10

и сила трения **T** (рис. 6.10, *а*). Как показывает опыт, при достаточно малом модуле силы **S** цилиндр остается в покое. Но этот факт нельзя объяснить, если удовлетвориться введением сил, изображен-

Подставляя в уравнения равновесия вместо S_1 и ds их значения

$$S_1 = S + dS, \quad ds = r\,d\varphi,$$

получаем

$$Nr - S = 0, \quad Tr + \frac{dS}{d\varphi} = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $S = Nr$, а так как $T = fN$, то второе уравнение можно переписать в виде

$$dS = -fS\,d\varphi, \quad \text{или} \quad \frac{dS}{S} = -f\,d\varphi.$$

Выполняя интегрирование в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi^*$, находим

$$\ln\frac{S^*}{S_0} = -f\varphi^*.$$

Здесь S_0 — натяжение в сечении $\varphi = 0$, равное модулю силы Q, S^* — натяжение в сечении $\varphi = \varphi^*$, равное модулю силы P. Следовательно,

$$\ln\frac{P}{Q} = -f\varphi^* \tag{6.8}$$

и, окончательно,

$$P = Qe^{-f\varphi^*}. \tag{6.9}$$

Эта формула (формула Эйлера) позволяет найти наименьшую силу $\mathbf{P}$, способную уравновесить силу $\mathbf{Q}$.

Можно поставить обратный вопрос: при каком значении $\mathbf{P}$ наступит скольжение троса против хода часовой стрелки, т. е. какая сила $\mathbf{P}$ способна преодолеть сопротивление трения вместе с силой $\mathbf{Q}$? Для ответа на этот вопрос нет необходимости заново повторять все выкладки; они останутся прежними с тем единственным различием, что сила трения на рис. 6.8, *б* изменит свое направление. Поэтому в окончательном результате, изменяя знак при коэффициенте трения, получаем

$$P = Qe^{f\varphi^*}. \tag{6.10}$$

Таким образом, если сила $\mathbf{P}$ удовлетворяет неравенствам

$$Qe^{-f\varphi^*} \leqslant P \leqslant Qe^{f\varphi^*},$$

то трос будет находиться в равновесии.

Задача 6.5. Найти угол охвата φ^* цилиндра тросом, необходимый для того, чтобы удержать силой $P = 2$ кН груз весом $Q = 20$ кН, если коэффициент трения $f = 0{,}2$.

По формуле (6.8) имеем

$$\ln\frac{2}{20} = -0{,}2\varphi^*;$$

отсюда

$$\varphi^* = 11{,}5 < 2\cdot 2\pi,$$

т. е. несколько меньше двух полных охватов.

жения троса **P**, достаточную для уравновешивания силы **Q**, приложенной ко второму концу троса, если между тросом и цилиндром имеется трение (рис. 6.8, *а*).

Опыт показывает, что благодаря трению сила **P** может быть во много раз меньше, чем сила **Q**. Задача будет статически определенной лишь в том случае (представляющем наибольший интерес), когда рассматривается критическое состояние и силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям. Речь идет о критическом состоянии, в котором сила **Q** уже способна вызвать

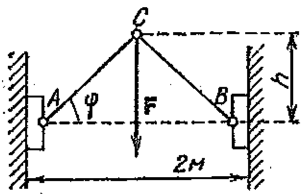


Рис. 6.7

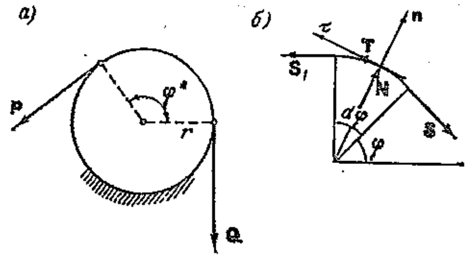


Рис. 6.8

скольжение троса по неподвижному цилиндру (по ходу часовой стрелки).

Нормальное давление и сила трения непрерывно распределены по всей длине охвата φr. Обозначим через **N** и **T** значения этих сил, отнесенных к единице длины троса. Эти силы, конечно, являются функциями полярного угла φ, определяющего положение элемента, т. е. $N = N(\varphi)$, $T = T(\varphi) = fN(\varphi)$. Натяжение троса в любой его точке на цилиндре также является функцией φ, т. е.

$$S = S(\varphi).$$

Выделим элемент троса длины $ds = r\,d\varphi$. На этот элемент действуют две реакции шкива: $\mathbf{T}\,ds$ и $\mathbf{N}\,ds$, а также две силы натяжения, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} + d\mathbf{S}$, приложенные к рассматриваемому элементу в точках рассечения (рис. 6.8, *б*).

Пренебрегая весом троса, запишем условия равновесия выделенного элемента троса, спроектировав силы на направления нормали (**n**) и касательной (τ), взятые в середине элемента:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kn} = N\,ds - S_1\frac{d\varphi}{2} - S\frac{d\varphi}{2} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} = T\,ds + S_1 - S = 0.$$

При составлении этих уравнений мы воспользовались малостью угла $d\varphi$ и положили

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \qquad \cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1.$$

можных направлений предельной реакции **R** образует коническую поверхность — *конус трения* (рис. 6.6, *б*). Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаков, то согласно формуле (6.7) конус трения будет круговым. В тех случаях, когда коэффициент трения f зависит от направления возможного движения тела, конус трения не будет круговым.

Рассмотрим теперь случай, когда активные силы, действующие на тело, приводятся к одной равнодействующей **F**, составляющей угол α с нормалью к поверхности (рис. 6.6, *в*). Такая сила оказывает двоякое действие: во-первых, ее нормальная составляющая $\mathbf{F}_n$ определяет нормальную составляющую **N** реакции поверхности и, следовательно, предельную силу трения $T_{max} = fN$, а, во-вторых, ее касательная составляющая $\mathbf{F}_\tau$ стремится эту силу преодолеть. Если увеличивать модуль силы **F**, то пропорционально будут возрастать обе составляющие. Отсюда можно заключить, что состояние покоя или движения тела не зависит от модуля силы **F** и определяется только углом α — чем меньше этот угол, тем меньше тенденция к нарушению равновесия.

Для аналитического решения задачи составим условия равновесия тела:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = T - F\sin\alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N - F\cos\alpha = 0, \quad T \leqslant fN.$$

Из уравнений найдем $T = F\sin\alpha$, $N = F\cos\alpha$ и, подставляя их в неравенство, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f,$$

или, учитывая (6.7), $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, при равновесии тела

$$\alpha \leqslant \varphi.$$

Это означает, что если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, то увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела; *для того чтобы тело начало движение, необходимо (и достаточно), чтобы равнодействующая активных сил* **F** *находилась вне конуса трения.*

Задача 6.4. Найти условие, определяющее размер h самотормозящегося механизма, изображенного на рис. 6.7. Необходимо, чтобы приложенная к узлу C сила **F** не могла вызвать скольжения ползунов A и B по вертикальным направляющим. Коэффициент трения $f = 0{,}2$, расстояние между направляющими 2 м.

Сила **F** вызывает сжатие наклонных стержней, и последние передают на ползуны силы давления под некоторым углом к горизонтальной плоскости. Для того чтобы скольжение отсутствовало, ось каждого стержня должна располагаться внутри соответствующего конуса трения. А это имеет место при выполнении условия

$$\operatorname{tg}\varphi < 0{,}2.$$

Но $h = 1\cdot\operatorname{tg}\varphi$, поэтому $h < 0{,}2$ м.

Рассмотрим теперь трение гибких тел. Пусть трос охватывает неподвижный круглый цилиндр. Требуется определить силу натя-

Имеем: $T_2 = N_B^* = N_B = {}^1/_2 P \operatorname{tg} \alpha$, $N = G$. Подставляя это в написанное выше неравенство, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 G/P.$$

Таким образом, вся система будет находиться в покое, если угол α удовлетворяет трем условиям:

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_1, \quad \sin \alpha \leqslant \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 \frac{G}{P}. \tag{6.5}$$

Если будет нарушено только первое из этих неравенств, т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha > 2f_1, \quad \sin \alpha \leqslant \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 \frac{G}{P},$$

призма останется в покое, а балка начнет двигаться.

Если будет нарушено только второе условие (6.5), т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_1, \quad \sin \alpha > \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_2 \frac{G}{P},$$

точка A балки останется в покое, а призма начнет опрокидываться вокруг ребра E.

Наконец, если будет нарушено только третье условие (6.5), т. е. при

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant 2f_1, \quad \sin \alpha \leqslant \frac{a}{l} \frac{G}{P}, \quad \operatorname{tg} \alpha > 2f_2 \frac{G}{P},$$

точка A балки снова останется в покое, но призма начнет скользить по плоскости влево.

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности. Будем считать, что в результате действия активных сил и сил реакции тело находится в предельном равновесии. На рис. 6.6, *а* показана предельная реакция **R** и ее составляющие **N** и $\mathbf{T}_{\max}$ (в положении, изображенном на этом рисунке, активные силы стремятся сдвинуть тело вправо, максимальная сила трения $\mathbf{T}_{\max}$ направлена влево). *Угол φ между предельной реакцией* **R** *и нормалью к поверхности называется углом трения.* Найдем этот угол. Из рис. 6.6, *а* имеем

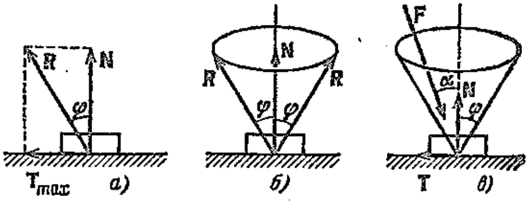


Рис. 6.6

$$\operatorname{tg} \varphi = T_{\max}/N, \tag{6.6}$$

или, пользуясь выражением (6.4),

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \tag{6.7}$$

Из этой формулы видно, что вместо коэффициента трения можно задавать угол трения (в справочных таблицах приводятся обе величины).

В зависимости от действия активных сил направление предельной реакции может меняться. Геометрическое место всех возжести $\mathbf{G}$, сила давления $\mathbf{N}_B^*$ балки на призму, равнодействующая сил нормального давления плоскости $\mathbf{N}$, приложенная в некоторой точке D, и сила трения $\mathbf{T}_2$. На балку действуют сила тяжести $\mathbf{P}$, сила давления $\mathbf{N}_B$ призмы на балку, нормальная составляющая $\mathbf{N}_A$ реакции плоскости и сила трения $\mathbf{T}_1$. Конечно, модули сил $\mathbf{N}_B$ и $\mathbf{N}_B^*$ равны между собой (аксиома 4).

Будем считать вначале, что вся система находится в покое, и составим условия равновесия балки:

$$\sum_k F_{kx} = N_B - T_1 = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N_A - P = 0,$$

$$\sum_k M_{Az}(\mathbf{F}_k) = Pl \sin\alpha - N_B \cdot 2l\cos\alpha = 0, \quad T_1 \leqslant f_1 N_A.$$

Из уравнений находим

$$T_1 = N_B, \quad N_A = P, \quad N_B = (P/2)\operatorname{tg}\alpha.$$

Внеся значения T_1 и N_A в неравенство, получим условия равновесия балки:

$$\operatorname{tg}\alpha < 2f_1.$$

Составим теперь условия равновесия призмы:

$$\sum_k F_{kx} = T_2 - N_B^* = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N - G = 0,$$

$$\sum_k M_{Dz}(\mathbf{F}_k) = N_B^* \cdot 2l\cos\alpha - G \cdot c = 0, \quad T_2 \leqslant f_2 N.$$

Из уравнений находим

$$T_2 = N_B^*, \quad N = G, \quad N_B^* = \frac{c}{2l\cos\alpha} G.$$

Число c нам неизвестно, но его можно найти из равенства $N_B^* = N_B$, или

$$\frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{2l\cos\alpha} G;$$

отсюда

$$c = \frac{P}{G} l \sin\alpha.$$

Так как точка приложения силы $\mathbf{N}$, точка D, не может находиться левее точки E, то $c \leqslant a$, или

$$\frac{P}{G} l \sin\alpha \leqslant a,$$

что дает нам еще одно условие равновесия:

$$\sin\alpha \leqslant \frac{a}{l}\frac{G}{P}.$$

Это неравенство равносильно требованию, чтобы под действием силы $\mathbf{N}_B^*$ призма не опрокинулась вокруг ребра E (его можно получить из условия, чтобы момент силы $\mathbf{N}_B^*$ относительно точки E не превосходил по модулю момента силы G относительно той же точки).

Потребуем теперь, чтобы призма не скользила по плоскости, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$T_2 \leqslant f_2 N.$$

Отсюда найдем:

$$S = P\sin\alpha - T, \quad N = P\cos\alpha, \quad T \leqslant fP\cos\alpha,$$

или, учитывая условия задачи,

$$S = 10 - T, \quad T \leqslant 17{,}3f.$$

Для первого случая $f_1 = 0{,}8$ будем иметь: $T \leqslant 13{,}8$ Н. При отсутствии троса ($S = 0$) получим $T = 10$ Н. Так как при этом условие $T \leqslant 13{,}8$ Н не нарушается, то это означает, что при $f_1 = 0{,}8$ тело будет находиться в равновесии за счет одной силы трения $T = 10$ Н.

Пусть теперь $f_2 = 0{,}2$. Тогда должно выполняться условие $T \leqslant 17{,}3 \cdot f_2 = 3{,}46$ Н. При отсутствии троса ($S = 0$) это неравенство находится в противоречии

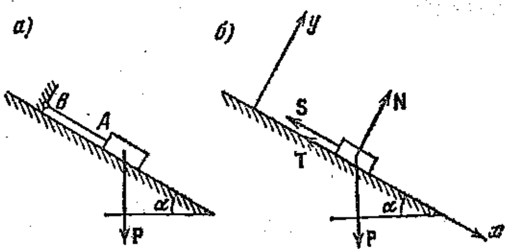


Рис. 6.4

с первым уравнением $10 - T = 0$. Это означает, что при отсутствии троса тело начало бы скользить вниз. Поэтому при $f_2 = 0{,}2$ сила трения достигает своего максимального значения, равного 3,46 Н, а натяжение троса будет: $S = 10 - T = 6{,}54$ Н.

Итак,

при $f_1 = 0{,}8$: $\quad T = 10$ Н, $\quad S = 0$;

при $f_2 = 0{,}2$: $\quad T = 3{,}46$ Н, $\quad S = 6{,}54$ Н.

Задача 6.3. К однородной прямоугольной призме веса G, находящейся на шероховатой горизонтальной плоскости, прислонена под углом α однородная балка силы тяжести P и длины $2l$ (рис. 6.5, *а*). Коэффициент трения между балкой и плоскостью

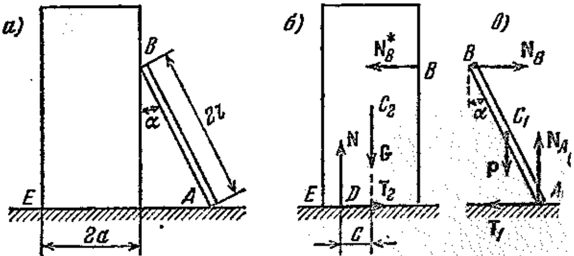


Рис. 6.5

равен f_1, а между призмой и плоскостью f_2. Пренебрегая силами трения между балкой и призмой и поперечными размерами балки, определить: 1) условия равновесия всей системы; 2) условия, при которых призма останется в покое, а балка начнет двигаться; 3) условия, при которых конец A балки останется в покое, а призма начнет скользить по плоскости влево или опрокидываться вокруг ребра E.

Расчленим систему и изобразим все силы (активные и реакции связей), действующие на призму (рис. 6.5, *б*) и балку (рис. 6.5, *в*). На призму действуют сила тя-

Кроме того, в соответствии с условием (6.4) должно быть

$$T_A \leqslant f N_A.$$

Решая уравнения, получим

$$N_B = T_A = (P/2)\operatorname{ctg}\alpha, \quad N_A = P.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1/(2f).$$

Последнее неравенство и содержит решение задачи. Критическое значение угла α^* определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha^* = 1/(2f).$$

Определим теперь критическое значение угла α^* с учетом трения плиты о стенку, если соответствующий коэффициент трения равен также f.

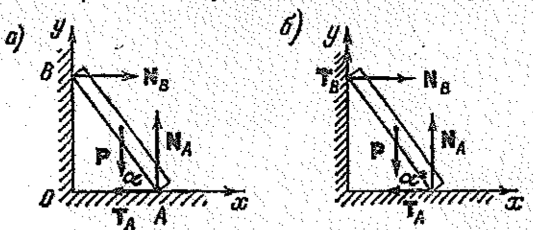


Рис. 6.3

Относящаяся к этому случаю силовая схема изображена на рис. 6.3, *б*. В общем случае система является статически неопределимой, так как содержит четыре неизвестные реакции, а мы располагаем только тремя уравнениями равновесия (при заданном угле α нельзя найти силы трения и нормальные давления). Однако в критическом состоянии силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям, и это позволяет решить задачу. Для этого состояния имеем два уравнения для сил трения

$$T_A = fN_A, \quad T_B = fN_B$$

и три уравнения равновесия

$$N_B - T_A = 0, \quad N_A + T_B - P = 0, \quad \frac{Pl}{2}\cos\alpha^* - N_B l\sin\alpha^* - T_B l\cos\alpha^* = 0.$$

В этих пяти уравнениях содержатся четыре неизвестные реакции и неизвестное критическое значение угла α^*. Решая эту систему уравнений, находим

$$\operatorname{tg}\alpha^* = \frac{1-f^2}{2f}, \quad N_A = \frac{P}{1+f^2}, \quad T_A = \frac{Pf}{1+f^2}, \quad N_B = \frac{Pf}{1+f^2}, \quad T_B = \frac{Pf^2}{1+f^2}.$$

Подчеркнем, что последние четыре выражения относятся только к критическому состоянию, но если

$$T_A < fN_A, \quad T_B < fN_B,$$

то задача становится статически неопределенной (для ее решения необходимо привлечь какие-либо соображения, выходящие за рамки наших представлений о твердых телах).

Задача 6.2. На шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтальной плоскостью, находится тело веса $P = 20$ Н (рис. 6.4, *а*). Тело удерживается на плоскости тросом AB, весом которого можно пренебречь. Определить силу трения T между телом и плоскостью и минимальное натяжение троса S при двух значениях коэффициента трения: $f_1 = 0{,}8$ и $f_2 = 0{,}2$.

На тело действуют четыре силы: активная сила тяжести **P**, сила трения **T**, нормальная составляющая реакции плоскости **N** и реакция троса **S** (рис. 6.4, *б*). Составим условия равновесия тела:

$$\sum_{k=1}^{4} F_{kx} = P\sin\alpha - T - S = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} F_{ky} = N - P\cos\alpha = 0, \quad T \leqslant fN.$$

процесса нагружения, когда тело B теряет равновесие и начинает скользить по плите D. Следовательно, если тело находится в равновесии, то

$$T \leqslant T_{\max}. \tag{6.2}$$

Максимальная сила трения $T_{\max}$ зависит от свойств материалов, из которых сделаны тела, их состояния (например, от характера обработки поверхности), а также от нормального давления N. Как показывает опыт, максимальная сила трения приближенно пропорциональна нормальному давлению, т. е.

$$T_{\max} = fN. \tag{6.3}$$

Это соотношение носит название *закона Амонтона—Кулона.*

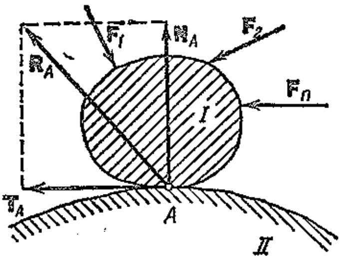


Рис. 6.1

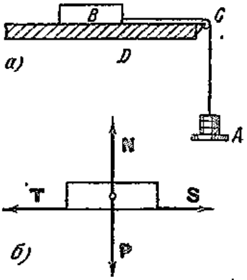


Рис. 6.2

Безразмерный коэффициент f называется *коэффициентом трения скольжения.* Как следует из опыта, его *значение в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей*, но зависит от материала и степени шероховатости соприкасающихся поверхностей. Значения коэффициентов трения устанавливаются опытным путем, и их можно найти в справочных таблицах.

Неравенство (6.2) можно теперь записать в виде

$$T \leqslant fN. \tag{6.4}$$

Случай строгого равенства в (6.4) отвечает максимальному значению силы трения. Это значит, что силу трения можно вычислять по формуле $T = fN$ только в тех случаях, когда заранее известно, что имеет место критический случай. Во всех же других случаях силу трения следует определять из уравнений равновесия.

Задача 6.1. Тяжелая плита AB силы тяжести $\mathbf{P}$, длины l опирается на идеально гладкую стенку OB и шероховатый пол OA (рис. 6.3, *а*). Определить, при каких углах наклона плиты возможно ее равновесие, если коэффициент трения плиты и пола равен f. Составим уравнение равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = N_B - T_A = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N_A - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = P\frac{l}{2}\cos\alpha - N_B l \sin\alpha = 0.$$

диаграммы, стороны которого параллельны стержням, сходящимся в этом узле. Наоборот, каждой вершине диаграммы соответствует некоторая область плоскости фермы. Таким образом, любой вершине одной фигуры соответствует многоугольник другой фигуры; такие фигуры называются *взаимными* (отсюда и название диаграммы). Легко видеть, что эта фигура состоит из тех же многоугольников, которые ранее были построены на рис. 5.26, *б*. По принятому масштабу сил можно найти численное значение всех усилий в стержнях.

Таким образом, при построении взаимной диаграммы используется, по существу, тот же способ вырезания узлов, но здесь чертеж компактнее и не содержит повторений, в чем легко убедиться, сравнив чертежи на рис. 5.26 и 5.27.

Глава VI

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

§ 6.1. Равновесие тела при наличии трения скольжения

Если два тела I и II (рис. 6.1) взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь в точке A, то всегда реакцию $\mathbf{R}_A$, действующую, например, со стороны тела II и приложенную к телу I, можно разложить на две составляющие: $\mathbf{N}_A$, направленную по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке A, и $\mathbf{T}_A$, лежащую в касательной плоскости. Составляющая $\mathbf{N}_A$ называется *нормальной реакцией*, сила $\mathbf{T}_A$ называется *силой трения скольжения* — она препятствует скольжению тела I по телу II. В соответствии с аксиомой *4* (третьим законом Ньютона) на тело II со стороны тела I действует равная по модулю и противоположно направленная сила реакции. Ее составляющая, перпендикулярная касательной плоскости, называется *силой нормального давления*. Как было сказано выше, сила трения $T_A = 0$, если соприкасающиеся поверхности идеально гладкие. В реальных условиях поверхности шероховаты и во многих случаях пренебречь силой трения нельзя.

Для выяснения основных свойств сил трения произведем опыт по схеме, представленной на рис. 6.2, *а*. К телу B, находящемуся на неподвижной плите D, присоединена перекинутая через блок C нить, свободный конец которой снабжен опорной площадкой A. Если площадку A постепенно нагружать, то с увеличением ее общего веса будет возрастать натяжение нити S, которое стремится сдвинуть тело вправо. Однако пока общая нагрузка не слишком велика, сила трения $\mathbf{T}$ будет удерживать тело B в покое. На рис. 6.2, *б* изображены действующие на тело B силы, причем через $\mathbf{P}$ обозначена сила тяжести, а через $\mathbf{N}$ — нормальная реакция плиты D.

Если нагрузка недостаточна для нарушения покоя, то справедливы следующие уравнения равновесия:

$$N - P = 0, \quad S - T = 0. \tag{6.1}$$

Отсюда следует, что $N = P$ и $T = S$. Таким образом, пока тело находится в покое, сила трения остается равной силе натяжения нити S. Обозначим через $T_{\max}$ силу трения в критический момент реакции стержня *1*. Из условия равновесия стержня *1* очевидно, что эта реакция по модулю равна S_1, но направлена противоположно S_1. На рис. 5.26, *б* она обозначена через S_1'. Затем от конца S_1' откладываем вектор F_1 и проводим направление S_4 параллельно стержню *4*, а из начала вектора S_1' проводим направление реакции S_3 параллельно стержню *3*. Получаем замкнутый многоугольник S_1', F_1, S_4, S_3 и тем самым находим силы S_3 и S_4. Направления векторов S_4 и S_3 показывают, что стержень *4* сжат («к узлу»), а стержень *3* растянут («от узла»). Рассматривая равновесие узлов *III*, *IV* и *V*, определяем остальные реакции стержней S_5, S_6, S_7, S_8, S_9.

Из рис. 5.26, *б* видно, что каждое из усилий в стержнях встречается дважды (S_1 и S_1', S_2 и S_2' и т. д.). Оказывается, что, не меняя существа этого метода, можно его несколько усовершенствовать и избежать таких повторений. При этом получается особое построение, называемое «взаимной диаграммой», или диаграммой Максвелла — Кремоны. Метод построения такой взаимной диаграммы проиллюстрируем на только что разобранном примере.

Прежде всего введем единый метод обозначения усилий в стержнях, реакций опор и внешних сил. Обозначим буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* области, ограниченные внешними силами и стержнями контура фермы (рис. 5.27, *а*), а внутренние области, ограниченные только стержнями фермы, обозначим буквами *G*, *H*, *K*, *L*. Далее, условимся обходить всю ферму, а также каждый узел по ходу часовой стрелки.

Начало и конец вектора силы, пересекаемой при таком обходе, будем обозначать малыми буквами, которые соответствуют названиям пограничных областей. Например, силу R_1 (рис. 5.27, *а*) теперь обозначим через $\overline{ab}$ (рис. 5.27, *б*), силу F_3 — через $\overline{de}$, силы, действующие на узел *III*, — через $\overline{hc}$, $\overline{cd}$, $\overline{dk}$, $\overline{kh}$ и т. п.

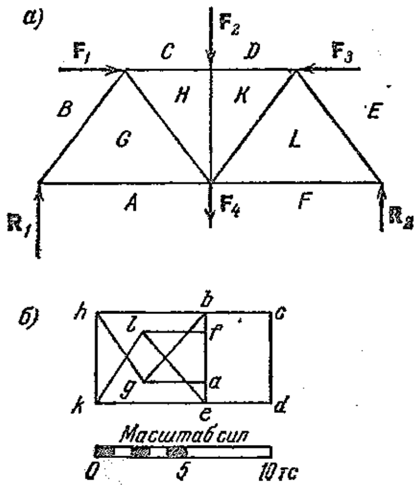


Рис. 5.27

Теперь построим многоугольник всех внешних сил, откладывая их в определенном масштабе в порядке обхода фермы по часовой стрелке; в результате мы получим многоугольник *abcdefa* (рис. 5.27, *б*). Конечно, этот многоугольник обязательно замкнут, так как ферма находится в равновесии. Мы теперь можем и не ставить на концах векторов стрелки — правило обхода областей по часовой стрелке однозначно определяет, где начало и конец вектора.

Далее воспользуемся способом вырезания узлов. Обойдем узел *I* по часовой стрелке, начиная с известной силы $\overline{ab}$. Эта сила уже имеется в многоугольнике внешних сил, и остается построить две другие силы, действующие на узел *I*, т. е. силу $\overline{bg}$ и силу $\overline{ga}$. Для этого из точек *b* и *a* проводим прямые, параллельные стержням *1* и *2*; точка их пересечения дает нам точку *g*. Сила $\overline{bg}$ оказалась направленной к узлу, значит, стержень *1* сжат, сила $\overline{ga}$ направлена от узла, следовательно, стержень *2* растянут.

Обращаясь к узлу *II*, обходим его также по ходу часовой стрелки в порядке *GBCH*. Используя уже найденные точки *g*, *b*, *c*, находим точку *h* — конец силы $\overline{ch}$ и начало силы $\overline{hg}$. Для этого из *c* проводим прямую, параллельную стержню *4*, а из *g* — прямую, параллельную стержню *3*; точка их пересечения и даст нам искомую точку *h*.

Продолжая такое построение дальше, для остальных узлов фермы мы получим фигуру (рис. 5.27, *б*), называемую *взаимной диаграммой*, или *диаграммой Максвелла — Кремоны*. Каждому узлу фермы соответствует некоторый многоугольник и O_{10} обозначены точки, относительно которых берутся моменты; мы получим по одному неизвестному усилию в каждом из уравнений моментов. Определение усилия в стержне *9* обладает некоторой особенностью. Дело в том, что точка пересечения усилий $\mathbf{S}_7$ и $\mathbf{S}_{10}$ бесконечно удалена, и уравнение моментов составить нельзя. В этом случае вместо него можно составить уравнение проекций на ось y, что позволит достигнуть той же цели: получить уравнение с одним неизвестным усилием $\mathbf{S}_9$.

Способ рассечения весьма удобен для простых схем ферм, образованных путем наращивания последовательных треугольников. В более сложных случаях все же приходится решать громоздкие системы уравнений, так как не удается проводить сечение только через три стержня.

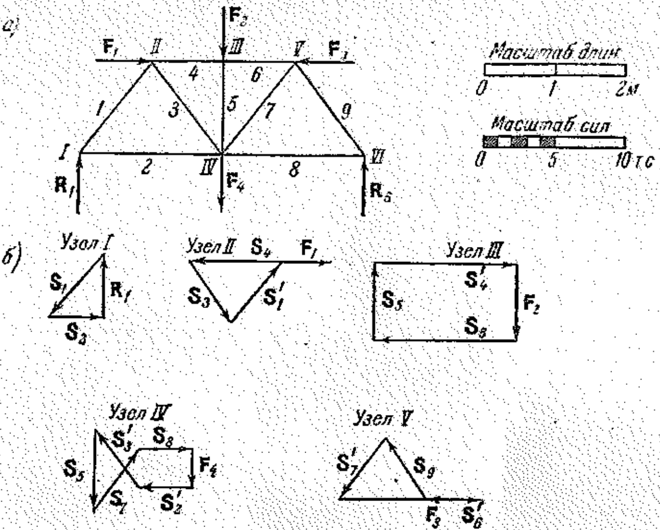


Рис. 5.26

Иногда применяется графический способ определения усилий в стержнях фермы. Предполагая, что опорные реакции фермы определены, для нахождения усилий в стержнях применим способ «вырезания» узлов. Согласно этому способу необходимо поочередно «вырезать» узлы и находить усилия в стержнях из условий замкнутости силовых многоугольников для каждого из узлов.

Для определенности рассмотрим ферму, изображенную на рис. 5.26, *а*, где показаны внешние силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ и опорные реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_6$. Расчет всегда нужно начинать с того узла, где сходятся два стержня. Начнем с рассмотрения равновесия узла *I*, на который действуют сила $\mathbf{R}_1$ и неизвестные по модулю реакции стержней $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$. Графическим условием равновесия сходящейся системы сил является замкнутость силового многоугольника.

При всех дальнейших построениях придерживаемся определенного масштаба сил. На рис. 5.26, *б* дан силовой многоугольник для узла *I* (в данном случае — треугольник); модуль сил $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ можно определить по масштабу сил. Сила $\mathbf{S}_1$ направлена к узлу, следовательно, на стержень она действует в обратном направлении, т. е. стержень *1* сжат. Сила $\mathbf{S}_2$ направлена от узла, значит, стержень *2* растянут. Заметим, что если начать расчет с узла *II*, то определить усилия в стержнях *1*, *3*, *4* не удается, так как в узле сходится более двух стержней, и силовой многоугольник однозначно не может быть построен.

Но теперь, после определения усилий в стержнях *1* и *2*, можно перейти к расчету узла *II*. Обходим его по часовой стрелке, начиная с первой известной силы —

При расчете ферм обычно составляют сначала три уравнения равновесия для всей фермы, определяют из них три опорные реакции, а затем уже приступают к нахождению усилий в стержнях.

Рассмотрим способ расчета фермы, который позволяет найти усилие в любом стержне фермы независимо от усилий в других стержнях. Согласно этому способу предварительно необходимо определить реакции опор. Для этого следует рассматривать ферму как абсолютно твердое тело и написать соответствующие три уравнения равновесия. Затем мысленно произвести полное рассечение фермы на две части; при надлежащем выборе сечения мысленно перерезаются, как правило, три стержня. Поэтому для определения трех неизвестных усилий могут быть записаны три уравнения равновесия сил, приложенных к какой-либо из полученных частей фермы. Чаще всего пользуются уравнениями в форме (5.17), но иногда пользуются и формой (5.18).

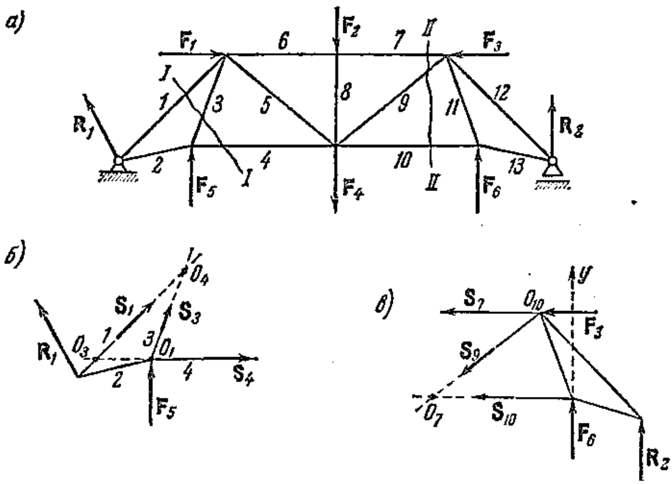


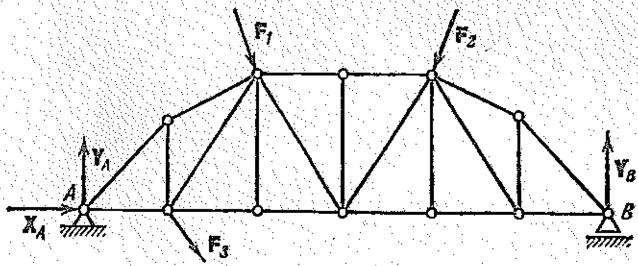
Рис. 5.25

Рассмотрим для примера ферму, изображенную на рис. 5.25, и предположим, что опорные реакции найдены.

Пусть требуется определить усилие в стержне *4*. Для этого мысленно рассечем ферму разрезом *I — I* и рассмотрим равновесие левой части фермы, изображенной на рис. 5.25, *а* (вместо этого можно рассматривать правую часть фермы — результат от этого не изменится, но вычисления окажутся более громоздкими). На эту часть действуют известные силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{F}_5$, а также три неизвестные по модулю силы $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$. Для определения искомого модуля силы $\mathbf{S}_4$ составляем уравнение моментов относительно точки пересечения направлений *1* и *3* (точка O_4); при таком выборе моментной точки усилия $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_3$ в уравнение равновесия не войдут, и оно будет содержать только одну неизвестную величину — искомое усилие $\mathbf{S}_4$ (такой выбор точек, относительно которых берут моменты, типичен для рассматриваемого способа). Обычно при составлении уравнения равновесия размеры плеч сил снимаются с чертежа с учетом его масштаба. Понятно, что решение полученного уравнения не вызовет никаких затруднений. Совершенно таким же образом составляются уравнения моментов относительно точки O_1 (для определения усилия $\mathbf{S}_1$) и точки O_3 (для определения усилия $\mathbf{S}_3$).

Для определения усилий в других стержнях требуются иные рассечения фермы; так, на рис. 5.25, *а* показано также рассечение *II—II*, необходимое для определения усилий в стержнях *7*, *9* и *10*. Для определения указанных усилий проще рассматривать равновесие правой части фермы, как это показано на рис. 5.25, *в*. Через O_7

Найдем связь между числом s стержней и числом n узлов в простой ферме. Число добавляемых узлов в простой ферме равно $n-3$, а число добавляемых



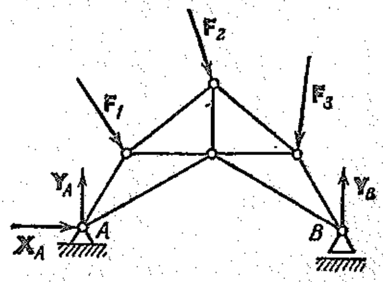


Рис. 5.23

стержней равно $s-3$. Из способа построения простой фермы видно, что число новых стержней в два раза больше числа новых узлов; следовательно,

$$s-3=2(n-3),$$

т. е.

$$s=2n-3. \tag{5.34}$$

Простая ферма всегда статически определима, т. е. число независимых уравнений статики достаточно для определения усилия в каждом стержне.

В самом деле, для каждого узла можно составить два уравнения равновесия, так как на узел действует сходящаяся система сил. Таким образом, всегда можно

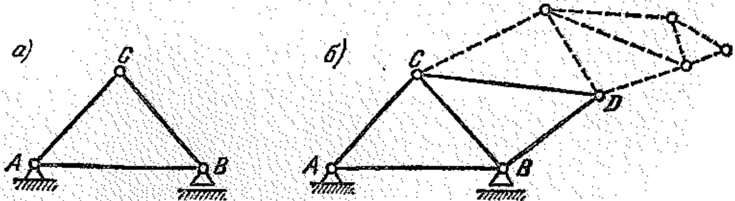


Рис. 5.24

составить $2n$ уравнений равновесия. Подсчитаем теперь число содержащихся в них неизвестных. Прежде всего, неизвестными будут все s реакций стержней, кроме того, неизвестны три опорные реакции (X_A, Y_A, Y_B на рис. 5.23). Таким образом, всего имеем $s+3$ неизвестных. Воспользовавшись соотношением (5.34), получим

$$s+3=2n-3+3=2n,$$

т. е. число неизвестных равно числу уравнений равновесия, поэтому простые фермы всегда статически определимы.

ности k. Для определения этих величин мы располагаем тремя уравнениями равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = k\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_*) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = -k\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_*) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{O_*z} = -k\sum_{k=1}^{n}[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2] + M = 0. \tag{5.31}$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение моментов всей системы сил относительно центра жесткости O_*, причем для момента силы $\mathbf{F}_k$ имеем

$$M_{O_*z}(\mathbf{F}_k) = -F_k\rho_k = -k\rho_k^2 = -k[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2].$$

Из первых двух уравнений системы (5.31) находим координаты центра жесткости

$$x_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad y_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{5.32}$$

после чего из третьего уравнения следует

$$k = \frac{M}{\sum\limits_{k=1}^{n}[(x_k - x_*)^2 + (y_k - y_*)^2]}. \tag{5.33}$$

Теперь можно с помощью формул (5.29) найти все усилия F_k.

§ 5.8. Приложение методов статики к определению усилий в стержнях фермы

При перекрытии больших пролетов (мосты, промышленные здания и т. п.) и в крупных строительных кранах часто применяются сквозные конструкции, называемые *фермами* (рис. 5.23). Ферма состоит из большого числа стержней, соединенных в точках схода их осей; соединения стержней называются *узлами*.

Важной частью инженерного расчета фермы является определение усилий, возникающих в стержнях при действии заданной нагрузки на ферму. При этом обычно исходят из следующих упрощающих предположений:

1) внешние силы приложены только в узлах фермы;

2) веса стержней пренебрежимо малы;

3) узлы представляют собой идеальные шарниры (т. е. силы трения в них не возникают).

При таких допущениях сила, действующая со стороны какого-либо узла на примыкающий к нему стержень (усилие в стержне), всегда направлена вдоль прямой, проходящей через концы этого стержня. Поэтому стержни, если они прямолинейные, либо растягиваются, либо сжимаются под действием этих сил.

Прежде чем обратиться к определению усилий в стержнях, необходимо рассмотреть вопросы структуры ферм.

Простейшей плоской фермой является трехстержневая ферма ABC, изображенная на рис. 5.24, *а*; она содержит три узла. Если к этой конструкции добавить еще один узел D с помощью двух стержней, то вновь получится неизменяемая ферма, содержащая пять стержней и четыре узла (рис. 5.24, *б*). Добавляя этим же способом новые узлы, как показано на рис. 5.24, *б* штриховой линией, можно образовать множество более сложных ферм.

Простой плоской фермой называется такая ферма, которая может быть получена из треугольной путем последовательного присоединения каждого нового узла при помощи двух новых стержней.

Задача 5.9. К жесткой плите A, прикрепленной несколькими болтами к основанию B, приложена активная пара сил, действующая в плоскости плиты. Момент пары равен M, координаты центров болтов x_k и y_k известны (рис. 5.22, *а*). Под действием пары произойдут малые деформации болтов, и плита повернется вокруг некоторого центра («центра жесткости») на малый угол.

Найти положение центра жесткости и усилия, действующие на каждый болт, считая, что усилия перпендикулярны радиусам-векторам центров болтов, проведенным из центра жесткости. Усилия можно принять пропорциональными модулям этих радиусов-векторов.

Схема сил, действующих на плиту, представлена на рис. 5.22, *б*, причем через $\mathbf{F}_k$ обозначены реакции болтов. Система сил $\mathbf{F}_k$ вместе с моментом M (рис. 5.22, *б*) находится в равновесии и должна удовлетворять трем уравнениям равновесия.

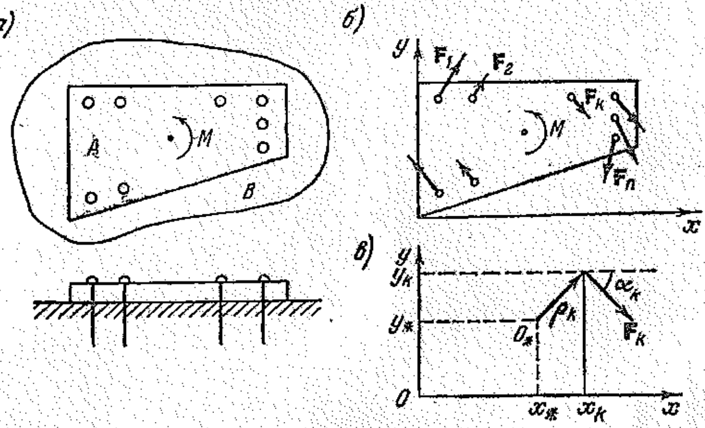


Рис. 5.22

Очевидно, что этих трех уравнений недостаточно для нахождения всех усилий, так как общее число неизвестных равно $2n$ (каждое усилие определяется двумя проекциями на координатные оси x и y). Тем не менее нам удается решить до конца эту задачу, опираясь на указанные выше дополнительные условия.

Обозначим через x_* и y_* искомые координаты центра жесткости и через ρ_k — радиусы-векторы центров болтов, проведенные из центра жесткости (рис. 5.22, *в*).

Усилия F_k, как было сказано, принимаются пропорциональными величинам ρ_k, т. е.

$$F_k = k\rho_k, \tag{5.29}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Проекции усилий $\mathbf{F}_k$ на оси координат, очевидно, будут

$$F_{kx} = F_k \cos\alpha_k = F_k \frac{y_k - y_*}{\rho_k}, \quad F_{ky} = -F_k \sin\alpha_k = -F_k \frac{x_k - x_*}{\rho_k}.$$

Подставляя сюда выражение (5.29), находим

$$F_{kx} = k(y_k - y_*), \quad F_{ky} = -k(x_k - x_*). \tag{5.30}$$

Заметим, что все $2n$ неизвестные составляющие реакций выражены всего через три числа: координаты центра жесткости x_*, y_* и коэффициент пропорциональ-

В качестве дополнительного условия примем, что реакции опор пропорциональны их осадкам при одинаковом для всех опор коэффициенте жесткости; по-видимому, это условие приемлемо в тех случаях, когда физические свойства всех опор одинаковы. Как мы сейчас убедимся, это условие вместе с уравнениями равновесия позволяет легко найти все опорные реакции независимо от их числа. После приложения нагрузки опоры несколько осядут, а балка займет новое положение. Принимая координатные оси, как показано на рис. 5.20, *в*, мы можем записать уравнение смещенной оси балки в виде

$$y = a + bx.$$

Обоснованный выбор расчетной схемы в виде *б*) или *в*) определяется конкретными соотношениями жесткости балки и опор. Однако случай *б*) мы вынуждены оставить в стороне и будем рассматривать только случай *в*) *). Обозначим соответственно осадки опор через y_j (рис. 5.21), причем

$$y_j = a + bx_j$$

(x_j — абсцисса j-й опоры).

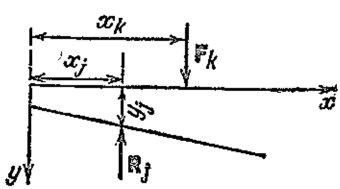


Рис. 5.21

По предположению, реакции опор пропорциональны осадкам

$$R_j = ky_j = k(a + bx_j),$$

где k — коэффициент жесткости; для определения реакций значение коэффициента жесткости несущественно. Введем неизвестные параметры $a_0 = ka$ и $b_0 = kb$; тогда реакции всех опор будут выражены через эти две неизвестные:

$$R_j = a_0 + b_0 x_j. \tag{5.27}$$

Для их определения воспользуемся двумя уравнениями равновесия плоской системы параллельных сил (рис. 5.21):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} - \sum_{j=1}^{m} R_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k F_{ky} - \sum_{j=1}^{m} x_j R_j = 0; \tag{5.28}$$

здесь n — число заданных сил, m — число неизвестных реакций. Подставляя выражение (5.27) в систему уравнений (5.28), получим

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} - a_0 m - b_0 \sum_{j=1}^{m} x_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k F_{ky} - a_0 \sum_{j=1}^{m} x_j - b_0 \sum_{j=1}^{m} x_j^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right) - \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k F_{ky}\right)}{m \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)^2},$$

$$b_0 = \frac{m \sum_{k=1}^{n} x_k F_{ky} - \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)}{m \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)^2}.$$

Внося эти значения a_0 и b_0 в формулу (5.27), получим решение задачи.

К той же категории относится и следующая задача.

---

*) Может оказаться, что необходим одновременный учет малой жесткости балки и малой жесткости опор.

Задача 5.8. Определить наименьшее и наибольшее натяжение нити, если вес единицы длины составляет 100 Н, длина пролета $l = 20$ м, а полная длина нити $L = 21$ м.

Прежде всего по формуле (5.26) находим

$$f = {}^1/_4\ \sqrt{3 \cdot 20 \cdot 1} = 1{,}94 \text{ м.}$$

Наименьшее натяжение нити (в нижней точке) определяется по формуле (5.23):

$$X_0 = \frac{100 \cdot 20^2}{8 \cdot 1{,}94} = 2577 \text{ Н.}$$

Наибольшее натяжение (в точках подвеса) находим по формуле (5.24):

$$T = 257 + 100 \cdot 1{,}94 \approx 2771 \text{ Н.}$$

§ 5.7. Определение реакций упругих опор твердого тела

Если твердое тело опирается на большое число опор, то задача нахождения реакций может оказаться статически неопределенной. Такова, например, балка, изображенная на рис. 5.20, *а*. Очевидно, что трех уравнений равновесия недостаточно для определения пяти реакций, т. е. система статически неопределимая

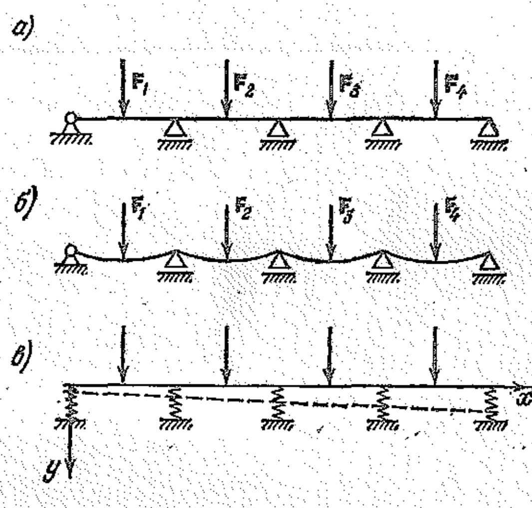


Рис. 5.20

(единственная определимая реакция, горизонтальная реакция левой опоры, равна нулю).

Задача определения реакций в таких системах, вообще говоря, выходит за рамки курса теоретической механики и чаще всего требует использования методов сопротивления материалов. При этом приходится отказываться от предположения об абсолютной жесткости балки и исследовать ее изгиб под действием заданной нагрузки и неизвестных реакций (рис. 5.20, *б*).

Однако среди статически неопределенных задач встречаются такие, которые не требуют привлечения сложных соображений. Здесь мы имеем в виду такие системы, которые можно схематизировать в виде абсолютно твердых тел, покоящихся на упругих опорах. Примером может служить та же балка (в предположении ее абсолютной жесткости), лежащая на упругих опорах, показанных на рис. 5.20, *в*.

Для вычисления X_O и T по найденным формулам необходимо знать стрелу провеса f, а для этого требуется располагать уравнением кривой, по которой провиснет нить. С этой целью рассмотрим часть нити, расположенную между началом координат и произвольным сечением с абсциссой x (рис. 5.19, *в*). Для этой части можно написать следующие уравнения равновесия (для проекций сил на оси x и y):

$$-X_O + T_x \cos\varphi = 0, \qquad T_x \sin\varphi - P_x = 0.$$

Здесь $P_x = qx$ — вес рассматриваемой части нити, T_x — натяжение на правом конце этой части.

Из первого уравнения можно заключить, что с удалением от нижней точки, т. е. с увеличением угла φ, натяжение нити возрастает и достигает максимума в точках подвеса.

Исключив из этих уравнений T_x, получим с учетом формулы (5.23)

$$\operatorname{tg}\varphi = 8fx/l^2,$$

но $\operatorname{tg}\varphi = dy/dx$, и мы приходим к дифференциальному уравнению, определяющему форму нити в положении равновесия:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8fx}{l^2}. \tag{5.25}$$

Интегрируя его, получаем

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что $y = 0$ при $x = 0$:

$$y = 4fx^2/l^2.$$

Таким образом, приближенно установлено, что тяжелая нить в положении равновесия принимает форму параболы *). Теперь можно выразить стрелу провеса f через L и l. Для этого запишем известное из курса математического анализа выражение длины дуги

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

и заметим, что для пологой нити $y'^2 \ll 1$. Поэтому $\sqrt{1 + y'^2} \approx 1 + {}^1/_2 y'^2$. Тогда будем иметь

$$L \approx \int_{-l/2}^{l/2} \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx = l + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} y'^2\, dx.$$

Подставляя сюда выражение (5.25), находим

$$L = l + \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{8fx}{l^2}\right)^2 dx = l + \frac{16f^2}{3l};$$

отсюда получаем

$$f = {}^1/_4 \sqrt{3l(L - l)}. \tag{5.26}$$

---

*) В тех случаях, когда стрела провеса f не мала по сравнению с длиной пролета l, уравнение кривой равновесия тяжелой нити определяет цепную линию (см., например: Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980. — 240 с.).

§ 5.6. Определение натяжения тяжелой подвешенной нити

Задача об определении натяжения в подвешенной тяжелой нити (рис. 5.19, *а*) связана с проблемой прочности тросов или проводов линий электропередачи. Будем считать, что нить идеально гибкая и нерастяжимая и что провисание нити происходит только из-за различия между ее длиной L и расстоянием между опорами l (рис. 5.19, *а*).

Обозначим через q линейный удельный вес нити. Для пологой кривой можно принять, что вес равномерно распределен не по кривой AOB, а по ее проекции AB. Таким образом, общий вес нити будем считать равным ql.

В соответствии с аксиомой 5 можно рассматривать условия равновесия любой части нити. Рассмотрим, например, правую половину нити; действующие на нее силы изображены на рис. 5.19, *б*. Заметим, что натяжение в любом сечении нити направлено по касательной к кривой в соответствующем месте (это следует из предположения об идеальной гибкости нити). Поэтому в нижней точке нити O, принятой за начало координатной системы, натяжение горизонтально. Обозначив через f стрелу провеса (т. е. расстояние по вертикали между нижней точкой и опорами), запишем уравнение моментов относительно точки B

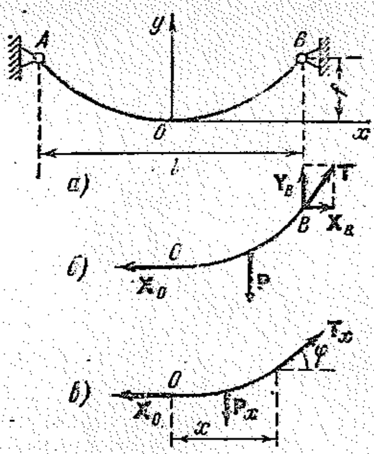


Рис. 5.19

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = -X_0 f + P\frac{l}{4} = 0.$$

Здесь $P = ql/2$ представляет собой вес половины нити. Из этого уравнения находим

$$X_0 = \frac{ql^2}{8f}; \tag{5.23}$$

отсюда, между прочим, ясно, что чем меньше стрела провеса нити f, тем больше натяжение X_0.

Из двух уравнений для проекций сил на оси можно найти составляющие натяжения в точке B

$$X_B = X_0 = \frac{ql^2}{8f}, \qquad Y_B = \frac{ql}{2},$$

а затем и полное натяжение в точке B

$$T = \frac{ql^2}{8f}\sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}.$$

Второе слагаемое в сумме под знаком корня значительно меньше единицы, и мы можем воспользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2},$$

достаточно точной для малых значений α. Тогда будет

$$T \approx \frac{ql^2}{8f} + qf. \tag{5.24}$$

Этот результат определяет наибольшее натяжение нити, которое, впрочем, мало отличается от наименьшего натяжения X_0.

на случае твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения; к телу приложена система активных сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_n$, расположенная в плоскости, перпендикулярной к оси вращения (рис. 5.18, *а*). Ось вращения служит связью для рассматриваемого тела; согласно принципу освобождаемости действие связи заменяем реакцией $\mathbf{N}$, приложенной к точке A (предполагаем, что трение отсутствует).

Направление реакции $\mathbf{N}$ зависит от характера приложенных к телу сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$. Напишем уравнения равновесия в форме (5.18):

$$N_x + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,$$

$$N_y + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

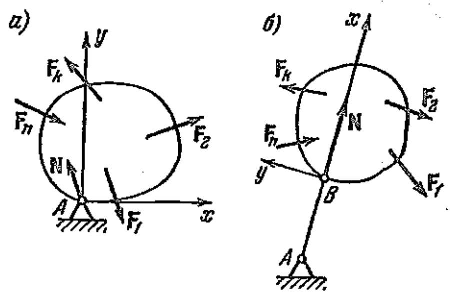


Рис. 5.18

Из первых двух уравнений можно найти обе составляющие реакции $\mathbf{N}$. В последнее уравнение $\mathbf{N}$ не входит. Это уравнение устанавливает зависимость между активными силами, необходимую для равновесия тела.

Таким образом, для рассматриваемого случая активные силы должны удовлетворять одному уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0. \tag{5.21}$$

Обратимся теперь ко второму примеру (рис. 5.18, *б*), где связью служит стержень. Направление реакции N фиксировано и совпадает с осью стержня. Выбирая систему координат Bxy, как указано на рис. 5.18, *б*, имеем следующие уравнения равновесия:

$$N_x + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Первое уравнение служит для определения реакции $\mathbf{N}$. Два остальных уравнения накладывают определенные требования на систему активных сил. Таким образом, для равновесия тела необходимо, чтобы активные силы в данном случае удовлетворяли двум условиям:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0. \tag{5.22}$$

Последнее уравнение записано для точки тела B; понятно, что его можно видоизменить, записав его для любой точки оси x.

Для нахождения X_A рассмотрим теперь равновесие левого стержня. Сумма моментов всех сил, приложенных к левому стержню, относительно C должна быть равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = X_A b - Y_A \frac{d}{2} + P\frac{d}{4} = 0;$$

отсюда

$$X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P+Q).$$

Задача 5.7. Определить опорные реакции системы, состоящей из двух балок, сочлененных идеальным шарниром, если $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 6$ кН, $a = 2$ м. Конец A балки AC защемлен, конец B балки CB укреплен в катковой опоре (рис. 5.17, *а*).

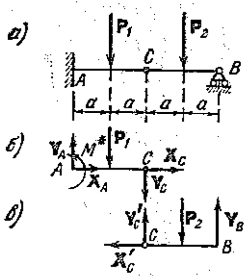


Рис. 5.17

Рассмотрим равновесие каждой балки в отдельности. Мы получаем два твердых тела, на которые действуют реакции внешних связей $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, M^*, $\mathbf{Y}_B$ и попарно равные силы взаимодействия $\mathbf{X}_C = -\mathbf{X}'_C$, $\mathbf{Y}_C = -\mathbf{Y}'_C$. Таким образом, общее число неизвестных равно шести.

Запишем уравнения равновесия в форме (5.16) для левой балки (рис. 5.17, *б*):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + X_C = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - P_1 - Y_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = M^* - P_1 a - Y_C 2a = 0;$$

для правой балки (рис. 5.17, *в*):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -X'_C = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y'_C + Y_B - P_2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = -P_2 a + Y_B 2a = 0.$$

На основании аксиомы 4 (третьего закона Ньютона) модули сил $\mathbf{X}_C$ и $\mathbf{X}'_C$, а также сил $\mathbf{Y}_C$ и $\mathbf{Y}'_C$, равны между собой, т. е. $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$. Учитывая эти равенства и решая затем полученную систему уравнений, находим

$$X_A = 0, \quad X_C = 0,$$

$$Y_A = 13 \text{ кН}, \quad Y_C = 3 \text{ кН}, \quad Y_B = 3 \text{ кН}, \quad M^* = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

§ 5.5. Условия равновесия частично закрепленного тела

В некоторых случаях приходится рассматривать равновесие частично закрепленных тел, т. е. тел, на которые наложены связи, допускающие некоторое перемещение тела. Два примера такого рода изображены на рис. 5.18, *а*, *б*. Очевидно, что при произвольной системе активных сил $\mathbf{F}_k$, приложенных к телу, равновесия не будет. Однако возможны и такие случаи, когда равновесие имеет место. Выясним условия, которым должны удовлетворять активные силы, чтобы тело находилось в равновесии. Прежде всего остановимся

Рассмотрим равновесие каждого тела в отдельности. На рис. 5.15, *б* указаны силы, приложенные к телам M и N, причем силы $\mathbf{X}_C$ и $\mathbf{Y}_C$ представляют собой составляющие силы, заменяющие собой действие тела N на тело M, а $\mathbf{X}'_C$, $\mathbf{Y}'_C$ — составляющие силы, заменяющие действие тела M на тело N.

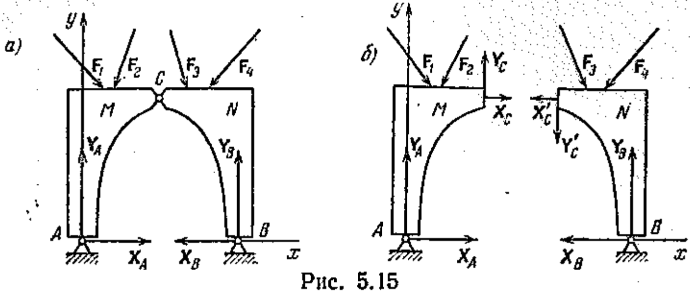


Рис. 5.15

Для каждого тела мы можем составить по три уравнения равновесия, т. е. всего шесть уравнений, неизвестных же тоже будет шесть, так как в силу аксиомы 4

$$\mathbf{X}_C = -\mathbf{X}'_C, \quad \mathbf{Y}_C = -\mathbf{Y}'_C.$$

Указанный путь решения задачи, конечно, не единственный. Можно, например, составить три уравнения равновесия для тела M, а остальные три — для системы тел M и N, принимая их за одно твердое тело, или составить уравнения равновесия для тела N и уравнения равновесия для системы тел M и N, как для одного твердого тела. Целесообразность применения того или иного способа решения задачи зависит от условий конкретной задачи.

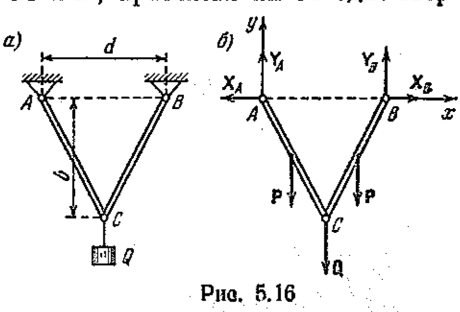


Рис. 5.16

Задача 5.6. Два однородных стержня одинаковой длины соединены шарнирно в точке C и шарнирно закреплены в точках A и B. Вес каждого стержня равен P. В точке C к системе стержней подвешен груз Q. Расстояние $AB = d$. Расстояние точки C до горизонтальной прямой AB равно b. Определить реакции шарниров A и B (рис. 5.16, *а*).

Заменяя действие опор реакциями, рассмотрим сначала равновесие этой системы в целом (рис. 5.16, *б*). Уравнения равновесия (5.16) в этом случае будут

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -X_A + X_B = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A + Y_B - 2P - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -P\frac{d}{4} - Q\frac{d}{2} - P\frac{3d}{4} + Y_B d = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$Y_A = Y_B = P + Q/2, \quad X_A = X_B.$$

также и поворот. Такая связь создает систему реакций, состоящую (рис. 5.13, *б*) из двух составляющих $\mathbf{X}_A$ и $\mathbf{Y}_A$ и пары, момент которой обозначен через M^*. Это следует из того, что на заделанный конец балки действует распределенная нагрузка, которую можно привести к силе, приложенной к точке A, и к паре сил с моментом M^*.

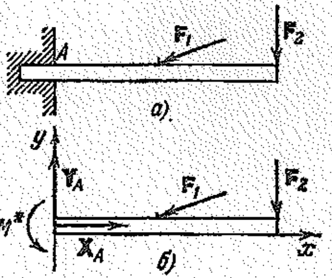


Рис. 5.13

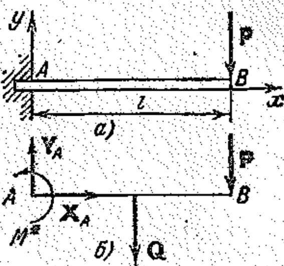


Рис. 5.14

Задача 5.5. К однородной балке, сила тяжести которой равна Q и длина l, в точке B приложена сила $\mathbf{P}$ (рис. 5.14, *а*). Определить реакции в месте заделки.

Силовая схема изображена на рис. 5.14, *б*. Уравнения равновесия будут

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - Q - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = M^* - Q\frac{l}{2} - Pl = 0;$$

отсюда имеем

$$X_A = 0, \quad Y_A = Q + P, \quad M^* = \frac{Q + 2P}{2}\, l.$$

§ 5.4. Задачи на равновесие системы тел

Рассмотрим задачу о нахождении опорных реакций трехшарнирной арки, которая состоит из двух частей, M и N, имеющих шарнирные опоры A и B и соединенных между собой идеальным шарниром C (рис. 5.15, *а*). Если рассматривать эту систему тел как одно твердое тело (аксиома 5), то будем иметь три уравнения равновесия с четырьмя неизвестными X_A, Y_A, X_B, Y_B (проекции опорных реакций в точках A и B).

Тем не менее эта задача статически определенная. Дело в том, что в равновесии находятся два тела M и N, соединенных между собой шарниром C, и можно рассматривать равновесие каждого тела в отдельности. Таким образом, число уравнений равновесия будет равно шести — по три уравнения для каждого тела. Действие тела N на тело M, передаваемое через идеальный шарнир, может быть заменено одной силой, а действие тела M на тело N может быть заменено такой же по модулю силой, но противоположно направленной (аксиома 4).

отсюда находим

$$N_B = \frac{2P + P_1\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx 51{,}3 \text{ кН}, \quad X_A = \frac{P\sqrt{2} - P_1}{2\sqrt{2}} \approx 6{,}3 \text{ кН},$$

$$Y_A = \frac{P\sqrt{2} + P_1}{2\sqrt{2}} \approx 36{,}2 \text{ кН}.$$

Задача 5.4. К балке, изображенной на рис. 5.12, *а*, приложены: сосредоточенная сила $F = 16$ кН и равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 1{,}2$ кН/м. Угол $\alpha = 30°$, $a = 3$ м, $b = 7$ м, $l = 12$ м. Сила тяжести балки $P = 5$ кН. Определить реакции опор.

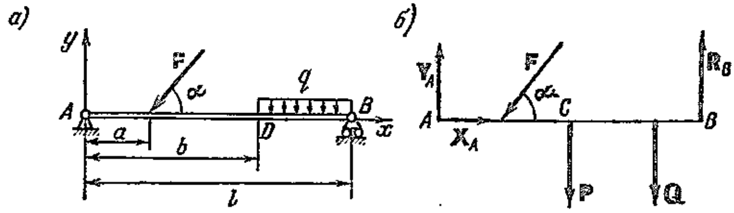


Рис. 5.12

Действие опор на балку заменяем реакциями $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$ и $\mathbf{R}_B$, а распределенную нагрузку — ее равнодействующей $Q = q(l - b)$, приложенной в середине отрезка DB (рис. 5.12, *б*). Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -Fa\sin\alpha - P\frac{l}{2} - Q\left(b + \frac{l-b}{2}\right) + R_B l = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = -Y_A l + F(l-a)\sin\alpha + P\frac{l}{2} + Q\frac{l-b}{2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A - F\cos\alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$X_A = F\cos\alpha = 13{,}8 \text{ кН},$$

$$Y_A = \frac{F(l-a)}{l}\sin\alpha + \frac{P}{2} + Q\frac{l-b}{2l} = 9{,}75 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{Fa}{l}\sin\alpha + \frac{P}{2} + Q\frac{l+b}{2l} = 9{,}25 \text{ кН}.$$

Познакомимся теперь с особым видом связи, которая называется *жесткой* (или *полной*) *заделкой*. Эта связь препятствует не только линейным перемещениям закрепленной точки тела, но и повороту вокруг этой точки.

Такова, например, жесткая заделка левого конца балки на рис. 5.13, *а*; этот конец оказывается полностью закрепленным — невозможны его вертикальное и горизонтальное перемещения, а

Образуем силовую схему, заменив действие связей их реакциями. Реакция в точке A не известна ни по величине, ни по направлению, поэтому будем искать

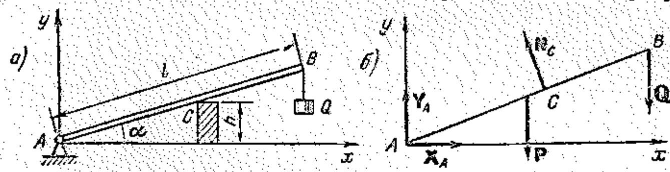


Рис. 5.10

эту реакцию через ее проекции X_A и Y_A; реакция в точке C направлена перпендикулярно балке (рис. 5.10, *б*).

Уравнения равновесия напишем в форме (5.16):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A - N_C \cos 60^\circ = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - P + N_C \cos 30^\circ - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -P\frac{l}{2}\cos 30^\circ + N_C \frac{h}{\sin 30^\circ} - Ql\cos 30^\circ = 0;$$

отсюда находим

$$N_C = \frac{(P+2Q)}{4h}\, l \sin 60^\circ \approx 2{,}6 \text{ кН}, \quad X_A = \frac{(P+2Q)}{8h}\, l\cos 30^\circ \approx 1{,}3 \text{ кН},$$

$$Y_A = P + Q - \frac{P+2Q}{4h}\, l \sin^2 60^\circ \approx 2{,}25 \text{ кН}.$$

Задача 5.3. Ферма опирается на неподвижный шарнир A и каток B, который может без трения перемещаться по наклонной плоскости. Определить реакции опор A и B, если к ферме приложены силы $P = 30$ кН и $P_1 = 60$ кН (рис. 5.11, *а*).

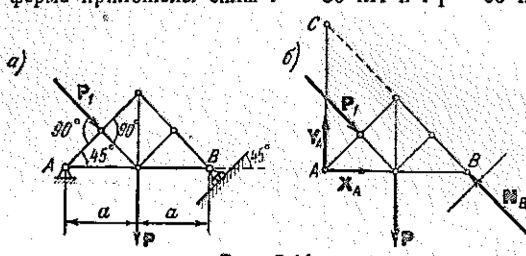


Рис. 5.11

Заменяя действие опор реакциями, составляем силовую схему (рис. 5.11, *б*). Уравнения равновесия возьмем в форме (5.17). В качестве точек, относительно которых составляются уравнения моментов, выбирем точки A, B и C. Уравнения равновесия при этом будут

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -Pa + N_B \frac{a}{\cos 45^\circ} - P_1 \frac{a}{2\cos 45^\circ} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = -Y_A 2a + P_1 \frac{a}{2\cos 45^\circ} + Pa = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = X_A 2a - Pa + P_1 \frac{a}{2\cos 45^\circ} = 0;$$

Здесь ΔV — объем элемента, выделенного в окрестности точки, ΔF — сила, действующая на этот элемент. Тогда

$$F^* = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

называется *интенсивностью* силы, распределенной по объему в данной точке тела.

Аналогично вводится понятие интенсивности для силы, распределенной по поверхности и по длине линии:

$$F_п^* = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta\sigma}, \quad F_л^* = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s},$$

где $\Delta\sigma$ и Δs — соответственно элементарная площадь и элемент длины линии.

Очень часто интенсивность силы называют силой, отнесенной к соответствующей геометрической единице — длине, площади или объему. Соответственно этому единицами интенсивности служат Н/м³, Н/м² и Н/м.

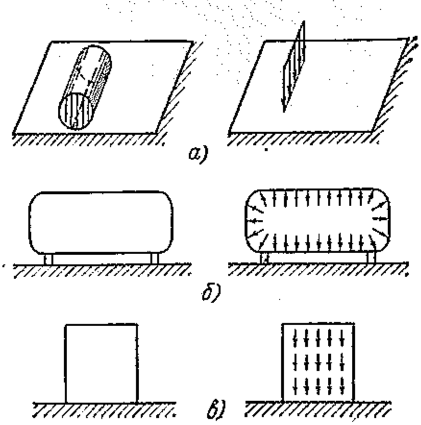


Рис. 5.8

Понятно, что в простейших случаях (см., например, рис. 5.8, *а*) интенсивность определяется простым делением полной силы давления на длину, площадь или объем участка ее приложения.

В ряде случаев силы оказываются неравномерно распределенными. Так, на рис. 5.9, *а* изображено давление воды на стенку плотины, оно

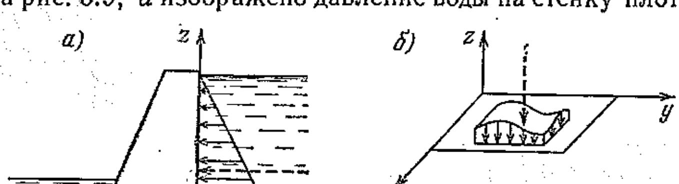


Рис. 5.9

переменно и зависит от глубины, т. е. от координаты z. На рис. 5.9, *б* показан случай, когда давление сыпучего тела на основание является функцией двух координат x и y из-за переменной толщины слоя.

§ 5.3. Задачи на применение уравнений равновесия

Задача 5.2. Однородная гладкая балка AB силой тяжести $P = 2$ кН, закрепленная в точке A при помощи шарнира, опирается в точке C на стену. В точке B подвешен груз $Q = 1$ кН. Определить опорные реакции в точках A и C, если балка составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$, $h = 1$ м и $l = 3$ м (рис. 5.10, *а*).

лучения наиболее простых уравнений равновесия (каждое из которых содержит минимальное число неизвестных) целесообразно координатные оси проводить перпендикулярно неизвестным силам, а указанные точки выбирать на пересечении линий действия неизвестных сил.

При рассмотрении равновесия несвободного твердого тела на основании принципа освобождаемости заменяем действие связей их реакциями. Значит, если число этих заранее неизвестных реакций будет равно числу уравнений равновесия, в которые реакции входят, то задачу их определения можно выполнить. Если же число неизвестных реакций будет больше уравнений равновесия, содержащих реакции, то задача становится статически неопределимой.

Среди плоских задач статики особого рассмотрения заслуживает случай плоской системы параллельных сил. Хотя для этой системы главный вектор и главный момент по-прежнему определяются формулами (5.1) и (5.5), но фактические вычисления значительно упрощаются.

Пусть линии действия всех сил параллельны оси y (рис. 4.8). Тогда уравнения равновесия для рассматриваемой системы параллельных сил будут

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = 0. \tag{5.19}$$

В соответствии с (5.17) уравнения равновесия можно также записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0, \tag{5.20}$$

причем точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной оси y (если точки A и B будут лежать на прямой, параллельной оси y, то эти уравнения будут удовлетворяться при равнодействующей, отличной от нуля, если ее линия действия проходит через указанные точки).

В заключение этого параграфа отметим, что система сил, действующих на твердое тело, может состоять как из *сосредоточенных* (изолированных) сил, так и *распределенных сил*. Различают силы, распределенные по линии, по поверхности и по объему тела. Так, например, давление тяжелого цилиндрического катка на горизонтальную опорную поверхность (рис. 5.8, *а*) представляет собой силы, распределенные вдоль линии (в данном случае — вдоль прямой). Давление газа на стенки сосуда может служить примером сил, распределенных по поверхности (рис. 5.8, *б*). Действие сил тяжести (рис. 5.8, *в*) иллюстрирует случай сил, распределенных по объему тела.

Распределенные силы задаются их *интенсивностью*. Так, например, для объемных сил сначала вводится понятие средней интенсивности силы в окрестности рассматриваемой точки тела

$$\overset{*}{F}_{\text{ср}} = \frac{\Delta F}{\Delta V}.$$

ются. Равенство нулю главного момента при центре приведения в точке A возможно, либо если система приводится к равнодействующей ($\mathbf{R} \neq 0$) и линия ее действия проходит через точку A, либо $\mathbf{R} = 0$; аналогично равенство нулю главного момента относительно точек B и C означает, что либо $\mathbf{R} \neq 0$ и равнодействующая проходит через обе точки, либо $\mathbf{R} = 0$. Но равнодействующая не может проходить через все эти три точки A, B и C (по условию они не лежат на одной прямой). Следовательно, равенства (5.17) возможны лишь при $\mathbf{R} = 0$, т. е. система сил находится в равновесии.

Заметим, что если точки A, B и C лежат на одной прямой, то выполнение условий (5.17) не будет достаточным условием равновесия, — в этом случае система может быть приведена к равнодействующей, линия действия которой проходит через эти точки.

Третьей формой уравнений равновесия плоской системы сил является равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил системы относительно двух любых точек и равенство нулю алгебраической суммы проекций всех сил системы на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через две выбранные точки:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \tag{5.18}$$

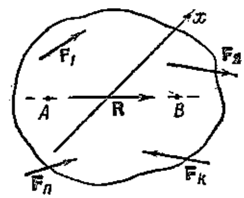


Рис. 5.7

(ось x не перпендикулярна отрезку AB).

Необходимость выполнения этих равенств для равновесия сил вытекает непосредственно из условий (5.15). Убедимся в том, что выполнения этих условий достаточно для равновесия сил.

Из первых двух равенств, как и в предыдущем случае, вытекает, что если система сил имеет равнодействующую, то ее линия действия проходит через точки A и B (рис. 5.7). Тогда проекция равнодействующей на ось x, не перпендикулярную отрезку AB, окажется отличной от нуля. Но эта возможность исключается третьим уравнением (5.18) $\left(\text{так как } R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)$. Следовательно, равнодействующая должна равняться нулю и система находится в равновесии. Понятно, что если ось x будет перпендикулярна отрезку AB, то уравнения (5.18) не будут достаточными условиями равновесия, так как в этом случае система может иметь равнодействующую, линия действия которой проходит через точки A и B.

Таким образом, система уравнений равновесия может содержать одно уравнение моментов и два уравнения проекций, либо два уравнения моментов и одно уравнение проекций, либо, наконец, три уравнения моментов.

Отметим, что при составлении любой из форм уравнений равновесия выбор координатных осей и точек, относительно которых берутся моменты сил, вообще говоря, произволен. Однако для по-

Главный вектор не равен нулю, поэтому система заданных сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, приложенных к плотине, приводится к равнодействующей $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_O$, модуль которой равен

$$R = F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2} \approx 50{,}6 \text{ МН}.$$

Уравнение линии действия равнодействующей найдем по формуле (5.14):

$$25x + 4y - 136 = 0.$$

На рис. 5.6 показана равнодействующая $\mathbf{R}$ заданных сил, приложенных к плотине. Равнодействующая реакция грунта действует по той же прямой, но она направлена в сторону, противоположную $\mathbf{R}$. Модули этих сил, конечно, равны между собой.

§ 5.2. Условия равновесия плоской системы сил

Как было установлено в главе IV, необходимым и достаточным условием равновесия системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента. Для плоской системы сил эти условия получают вид

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0, \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = 0, \tag{5.15}$$

где O — произвольная точка в плоскости действия сил.

На основании (5.15) и (5.7) имеем

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = 0, \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \cdots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

т. е. *для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на две координатные оси и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки равнялись нулю.*

Возможны также другие формы уравнений равновесия.

Второй формой является равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Bz}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Cz}(\mathbf{F}_k) = 0, \tag{5.17}$$

где A, B и C — указанные точки.

Необходимость выполнения этих трех равенств в случае равновесия системы сил вытекает из условий (5.15), и нам остается доказать их достаточность. Предположим, что все равенства (5.17) выполня-

При помощи теоремы Вариньона можно найти уравнение линии действия равнодействующей. Пусть равнодействующая $\mathbf{R}_1$ приложена в какой-либо точке O_1 с координатами x и y (рис. 5.5) и известны главный вектор $\mathbf{F}_O$ и главный момент M_{Oz} при центре приведения в начале координат. Так как $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_O$, то составляющие равнодействующей по осям x и y равны $\mathbf{R}_{1x} = \mathbf{F}_{Ox} = F_{Ox}\mathbf{i}$ и $\mathbf{R}_{1y} = \mathbf{F}_{Oy} = F_{Oy}\mathbf{j}$. Согласно теореме Вариньона момент равнодействующей относительно начала координат равен главному моменту при центре приведения в начале координат, т. е.

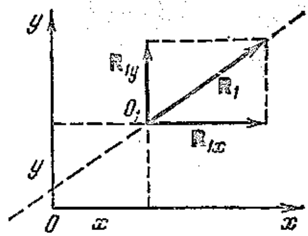


Рис. 5.5

$$M_{Oz} = M_{Oz}(\mathbf{R}_1) = xF_{Oy} - yF_{Ox}. \quad (5.14)$$

Величины M_{Oz}, F_{Ox} и F_{Oy} при переносе точки приложения равнодействующей вдоль ее линии действия не изменяются, следовательно, на координаты x и y в уравнении (5.14) можно смотреть как на текущие координаты линии действия равнодействующей. Таким образом, уравнение (5.14) есть уравнение линии действия равнодействующей. При $F_{Ox} \neq 0$ его можно переписать в виде

$$y = \frac{F_{Oy}}{F_{Ox}} x - \frac{M_{Oz}}{F_{Ox}}.$$

Задача 5.1. Равнодействующие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}$ сил давления воды на гравитационную плотину приложены в вертикальной плоскости симметрии перпендикулярно соответствующим граням на расстояниях $H = 4$ м и $h = 2{,}4$ м от основания (рис. 5.6). Сила тяжести $\mathbf{G}_1$ прямоугольной части плотины приложена в ее центре, а сила тяжести $\mathbf{G}_2$ треугольной части — на расстоянии одной трети от вертикальной грани треугольного сечения.

Определить равнодействующую распределенных сил реакции грунта, на котором установлена плотина, если $P = 20$ МН, $F = 13$ МН, $G_1 = 30$ МН, $G_2 = 15$ МН, $a = 5$ м, $b = 10$ м, $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$.

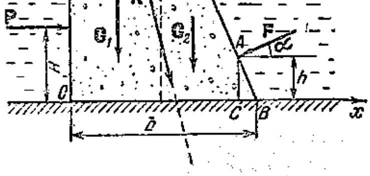


Рис. 5.6

Прежде всего найдем равнодействующую заданных сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$, приложенных к плотине. Для вычисления главного вектора $\mathbf{F}_O$ и главного момента M_{Oz} относительно начала координат O нам понадобятся значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и координаты точки A. Так как $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$, то $\sin\alpha = 5/13$, $\cos\alpha = 12/13$. По условию задачи $y_A = h = 2{,}4$ м. Из треугольника ABC найдем $CB = h\operatorname{tg}\alpha = 1$ м. Следовательно, $x_A = 9$ м. Согласно формулам (5.7) и (5.10) имеем

$$F_{Ox} = P - F\cos\alpha = 8 \text{ МН}, \quad F_{Oy} = -G_1 - G_2 - F\sin\alpha = -50 \text{ МН},$$

$$M_{Oz} = -PH - G_1\frac{a}{2} - G_2\left[a + \frac{1}{3}(b-a)\right] + x_A F_y - y_A F_x = -272 \text{ МН}.$$

ляющих пару, приложим к центру приведения и направим в сторону, противоположную направлению силы $\mathbf{F}_O$ (рис. 5.4, *б*). Тогда система сил $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{F}'_1$ эквивалентна нулю и может быть отброшена. Следовательно, заданная система сил эквивалентна единственной силе $\mathbf{F}_1$, приложенной к точке O_1; эта сила и является равнодействующей. В дальнейшем равнодействующую будем обозначать буквой $\mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{R}$. Очевидно, что расстояние h от прежнего центра приведения O до линии действия равнодействующей можно найти из условия $|M_{Oz}| = hF_1 = hF_0$, т. е.

$$h = |M_{Oz}|/F_O.$$

Расстояние h нужно отложить от точки O так, чтобы момент пары сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1)$ совпадал с главным моментом M_{Oz} (рис. 5.4, *б*). В результате приведения системы сил к данному центру могут встретиться следующие случаи:

1. $\mathbf{F}_O \neq 0$, $M_{Oz} \neq 0$.

В этом случае система сил может быть приведена к одной силе (равнодействующей), как это показано на рис. 5.4, *в*.

2. $\mathbf{F}_O \neq 0$, $M_{Oz} = 0$.

В этом случае система сил приводится к одной силе (равнодействующей), проходящей через данный центр приведения.

3. $\mathbf{F}_O = 0$, $M_{Oz} \neq 0$.

При этом система сил эквивалентна одной паре сил.

4. $\mathbf{F}_O = 0$, $M_{Oz} = 0$.

В этом случае рассматриваемая система сил эквивалентна нулю, т. е. силы, составляющие систему, взаимно уравновешены.

Для системы сил, которая приводится к равнодействующей, справедлива следующая теорема о моменте равнодействующей.

Теорема Вариньона. *Если рассматриваемая плоская система сил приводится к равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно какой-либо точки равен алгебраической сумме моментов всех сил данной системы относительно той же самой точки.*

Предположим, что система сил приводится к равнодействующей $\mathbf{R}$, проходящей через точку O. Возьмем теперь в качестве центра приведения другую точку O_1. Главный момент (5.5) относительно этой точки равен сумме моментов всех сил:

$$M_{O_1z} = \sum_{k=1}^{n} M_{O_1z}(\mathbf{F}_k). \tag{5.11}$$

С другой стороны, на основании формулы (5.6) имеем

$$M_{O_1z} = M_{O_1z}(\mathbf{R}), \tag{5.12}$$

так как главный момент для центра приведения O равен нулю ($M_{Oz} = 0$). Сравнивая соотношения (5.11) и (5.12), получаем

$$M_{O_1z}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_{O_1z}(\mathbf{F}_k); \tag{5.13}$$

это и доказывает сформулированную теорему.

Исходя из этих определений, для нахождения главного момента вместо формулы (5.2) будем пользоваться формулой

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_z). \tag{5.5}$$

Формула (4.14), определяющая изменение главного момента при перемене центра приведения, примет вид

$$M_{O1z} = M_{Oz} + M_{O1z}(\mathbf{F}_O). \tag{5.6}$$

Для аналитического определения главного вектора применяются формулы:

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}, \tag{5.8}$$

$$\cos(x,\ \mathbf{F}_O) = F_{Ox}/F_O, \quad \cos(y,\ \mathbf{F}_O) = F_{Oy}/F_O. \tag{5.9}$$

Согласно формулам (5.5) и (3.11) главный момент равен

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}), \tag{5.10}$$

где x_k, y_k — координаты точки приложения силы $\mathbf{F}_k$.

Докажем теперь, что если *главный вектор плоской системы сил не равен нулю, то данная система сил эквивалентна одной силе, т. е. приводится к равнодействующей.*

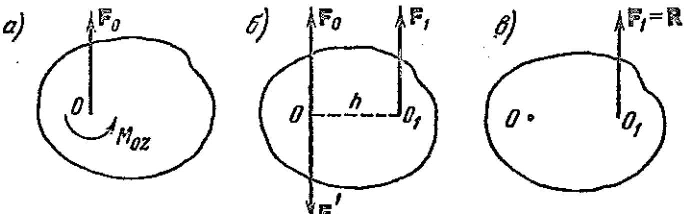


Рис. 5.4

Пусть для выбранного центра приведения главный вектор и главный момент не равны нулю, т. е. $\mathbf{F}_O \neq 0$, $M_{Oz} \neq 0$ (рис. 5.4, *а*). Дуговая стрелка на рис. 5.4, *а* символически изображает пару с моментом M_{Oz}. Пару сил, момент которой равен главному моменту, представим в виде двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_1'$, равных по модулю главному вектору $\mathbf{F}_O$, т. е. $F_1 = F_1' = F_0$. При этом одну из сил ($\mathbf{F}_1'$), состав-

мент полностью характеризуется алгебраической величиной M_z, *равной произведению плеча пары на величину одной из сил, составляющих пару, взятой со знаком плюс, если «вращение» пары происходит против хода часовой стрелки, и со знаком минус, если оно происходит по ходу часовой стрелки.* Иными словами, за момент пары в плоских системах принимается проекция вектора момента пары на ось z, перпендикулярную плоскости действия сил.

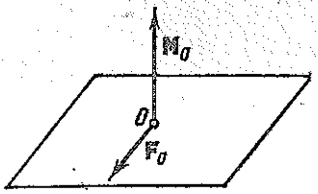


Рис. 5.1

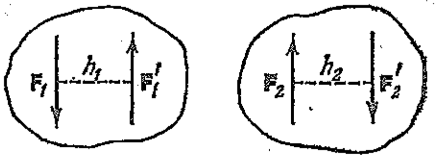


Рис. 5.2

Пусть, например, даны две пары, $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ и $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$ (рис. 5.2); тогда согласно данному определению имеем

$$\begin{aligned} M_z(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') &= h_1F_1, \\ M_z(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2') &= -h_2F_2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Аналогично, *моментом силы относительно точки будем называть алгебраическую величину, равную проекции вектора момента силы относительно этой точки на ось, перпендикулярную плоскости, т. е.*

Рис. 5.3

равную произведению модуля силы на плечо, взятому с соответствующим знаком. Для случаев, изображенных на рис. 5.3, *а* и *б*, соответственно будет

$$M_{Oz}(\mathbf{F}_1) = hF_1, \quad M_{Oz}(\mathbf{F}_2) = -hF_2. \tag{5.4}$$

Индекс z в формулах (5.3) и (5.4) сохранен для того, чтобы указать на алгебраический характер моментов.

Модули же момента пары и момента силы обозначаются следующим образом:

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = |M_z(\mathbf{F}, \mathbf{F}')|, \quad M_O(\mathbf{F}) = |M_{Oz}(\mathbf{F})|.$$

тождественно (для любой системы параллельных сил на плоскости) и остаются только два уравнения равновесия:

$$F_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0,$$
$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0. \tag{4.22}$$

Напомним, что при составлении уравнений равновесия (4.17) за центр приведения может быть выбрана любая точка (см. § 4.3).

Глава V

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 5.1. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

Рассмотрим систему сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$), расположенных в одной плоскости. К этому случаю приводится весьма большое число практических задач техники. Совместим с плоскостью расположения сил систему координат Oxy и, выбрав ее начало в качестве центра приведения, согласно основной теореме статики (§ 4.2) приведем рассматриваемую систему сил к одной силе

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k, \tag{5.1}$$

равной главному вектору, и к паре сил, момент которой равен главному моменту

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\mathbf{F}_k), \tag{5.2}$$

где $M_O(\mathbf{F}_k)$ — момент силы $\mathbf{F}_k$ относительно центра приведения O *).

Так как силы расположены в одной плоскости, то сила $\mathbf{F}_O$ также лежит в этой плоскости. Момент же пары M_O направлен перпендикулярно этой плоскости, так как сама пара расположена в плоскости действия рассматриваемых сил. Таким образом, для плоской системы сил главный вектор и главный момент всегда перпендикулярны друг другу (рис. 5.1).

При рассмотрении плоской системы сил мы имеем дело с парами, расположенными в плоскости действия сил. Поэтому здесь нет необходимости придавать векторный смысл моменту пары. Мо-

---

*) Здесь и в дальнейшем на протяжении всей пятой главы предполагается, что все силы расположены в одной плоскости xy и что точки, относительно которых вычисляются моменты, лежат в плоскости действия сил. Ось z, перпендикулярная плоскости действия сил, на рисунках не показывается.

1. Равновесие пространственной системы параллельных сил. Направим ось z параллельно линиям действия сил (рис. 4.6). Тогда проекции сил $\mathbf{F}_k$ на оси x и y равны нулю ($F_{kx} \equiv 0$, $F_{ky} \equiv 0$), и остается удовлетворить только одному из уравнений группы (4.16):

$$F_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0. \tag{4.18}$$

Во второй группе уравнений (4.17) последнее выполняется тождественно, так как силы параллельны оси z ($M_{Oz}(\mathbf{F}_k) \equiv 0$), и остаются только два уравнения:

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = M_{Ox}(\mathbf{F}_1) + M_{Ox}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Ox}(\mathbf{F}_n) = 0, \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = M_{Oy}(\mathbf{F}_1) + M_{Oy}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oy}(\mathbf{F}_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

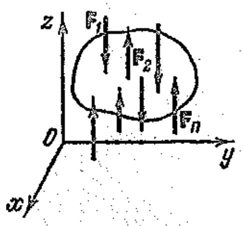


Рис. 4.6

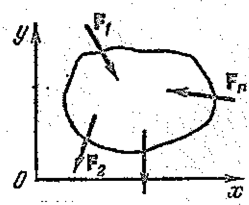


Рис. 4.7

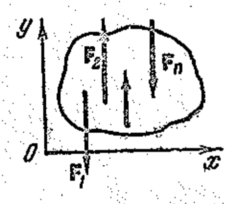


Рис. 4.8.

2. Равновесие плоской системы сил.

Для плоской системы сил из уравнений первой группы останутся два уравнения:

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Из уравнений второй группы два первых удовлетворяются тождественно, так как силы лежат в одной плоскости с осями x и y (рис. 4.7). Остается только третье уравнение:

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0. \tag{4.21}$$

3. Равновесие плоской системы параллельных сил.

Условия равновесия для этого частного случая следуют из уравнений (4.20) и (4.21). Направим ось y параллельно линиям действия сил (рис. 4.8). Тогда первое из уравнений (4.20) удовлетворяется линию действия и, кроме того, должно выполняться равенство $\mathbf{Q} = -\mathbf{P}$. Но в рассматриваемом нами случае это может быть, если линия действия силы $\mathbf{P}$ проходит через точку O, т. е. если $h = 0$. А это значит, что главный момент равен нулю ($\mathbf{M}_O = 0$). Далее, так как $\mathbf{Q} + \mathbf{P} = 0$, а $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_O + \mathbf{P}'$, то $\mathbf{F}_O + \mathbf{P}' + \mathbf{P} = 0$, и, следовательно, $\mathbf{F}_O = 0$.

Итак, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сил будут иметь вид

$$\mathbf{F}_O = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0 \tag{4.15}$$

или, в проекциях на координатные оси,

$$\begin{aligned} F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \\ F_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0; \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = M_{Ox}(\mathbf{F}_1) + M_{Ox}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Ox}(\mathbf{F}_n) = 0, \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = M_{Oy}(\mathbf{F}_1) + M_{Oy}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oy}(\mathbf{F}_n) = 0, \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = M_{Oz}(\mathbf{F}_1) + M_{Oz}(\mathbf{F}_2) + \ldots + M_{Oz}(\mathbf{F}_n) = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Таким образом, при решении задач о равновесии пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, мы имеем возможность из уравнений (4.16) и (4.17) определить шесть неизвестных величин.

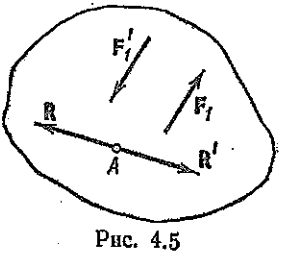


Рис. 4.5

Замечание. О невозможности приведения пары сил к равнодействующей. Проведем доказательство от противного. Пусть пара сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$ приводится к равнодействующей $\mathbf{R}$, приложенной к какой-либо точке A тела. Тогда эта пара и сила $\mathbf{R}'$ ($\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$), приложенная в точке A, эквивалентны нулю (рис. 4.5). На основании только что доказанного главный вектор и главный момент этой системы должны быть равны нулю. Примем за центр приведения точку A, тогда главный момент $M_A \neq 0$ и равен моменту пары $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$; главный вектор тоже не равен нулю ($\mathbf{F}_A = \mathbf{R}' \neq 0$). Следовательно, предположение о существовании равнодействующей для пары сил несправедливо.

Уравнения равновесия для более частных систем сил могут быть получены из уравнений (4.16) и (4.17).

откуда на основании формул (4.2) и (4.3)

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \overline{O_1O} \times \mathbf{F}_O = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_O), \tag{4.14}$$

т. е. момент пары, а следовательно, и *главный момент при перемене центра приведения изменяются на момент силы, равной главному вектору, приложенному в старом центре приведения, относительно нового центра приведения.*

Из формулы (4.14) следует, что если в каком-либо центре приведения, например точке O, $\mathbf{F}_O = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$, то и для любого центра приведения O_1 будет

$$\mathbf{F}_{O_1} = 0, \quad \mathbf{M}_{O_1} = 0.$$

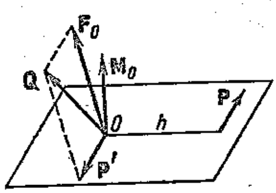


Рис. 4.4

Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил не является единственным способом приведения к простейшему виду (хотя и применяется наиболее часто). Возможен другой вариант приведения; согласно этому варианту *система сил, как угодно расположенных в пространстве, может быть приведена к двум силам, в общем случае не лежащим в одной плоскости.*

В самом деле, пусть произвольная система сил приведена в данном центре O к силе $\mathbf{F}_O$ и паре сил с моментом $\mathbf{M}_O$. Выберем силы, составляющие пару, равными $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ ($\mathbf{P} = -\mathbf{P}'$); приложим одну из них (например, $\mathbf{P}'$) в центре приведения (рис. 4.4) и сложим ее с силой $\mathbf{F}_O$. В результате получим силу $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_O + \mathbf{P}'$, уже не лежащую в плоскости действия пары ($\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$).

Таким образом, пространственная система сил приведена к двум силам $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$, которые в общем случае не лежат в одной плоскости.

§ 4.4. Условия равновесия пространственной системы сил

В этом параграфе мы обратимся ко второй задаче статики и установим условия, при которых пространственная система сил эквивалентна нулю, т. е. условия ее равновесия. Докажем теорему.

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы равнялись нулю.

Достаточность сформулированных условий вытекает из того, что при $\mathbf{F}_O = 0$ система сходящихся сил, приложенных в центре приведения O, эквивалентна нулю, а при $\mathbf{M}_O = 0$ система пар сил эквивалентна нулю. Следовательно, исходная система сил эквивалентна нулю.

Докажем необходимость этих условий. Пусть данная система сил эквивалентна нулю. Приведя систему к двум силам, заметим, что в нашем случае система сил $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$ (рис. 4.4) должна быть эквивалентна нулю, следовательно, эти две силы должны иметь общую

Следовательно, модуль и направление вектора $\mathbf{M}_O$ определяются формулами

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \tag{4.8}$$

$$\cos(x, \mathbf{M}_O) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \quad \cos(y, \mathbf{M}_O) = \frac{M_{Oy}}{M_O}, \quad \cos(z, \mathbf{M}_O) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \tag{4.9}$$

При приведении пространственной системы сил к одной силе и одной паре сил угол между направлением главного вектора и направлением главного момента может получиться любым в зависимости от действующих сил. Для определения этого угла воспользуемся формулой, выражающей скалярное произведение векторов $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O = F_O M_O \cos(\mathbf{F}_O, \mathbf{M}_O).$$

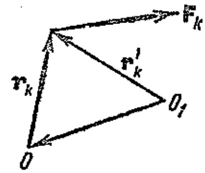


Рис. 4.3

Отсюда

$$\cos(\mathbf{F}_O, \mathbf{M}_O) = \frac{\mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O}{F_O M_O} = \frac{F_{Ox}M_{Ox} + F_{Oy}M_{Oy} + F_{Oz}M_{Oz}}{F_O M_O} \tag{4.10}$$

или, по формулам для направляющих косинусов (4.6) и (4.9),

$$\cos(\mathbf{F}_O, \mathbf{M}_O) = \cos(x, \mathbf{F}_O)\cos(x, \mathbf{M}_O) + \cos(y, \mathbf{F}_O)\cos(y, \mathbf{M}_O) + \cos(z, \mathbf{F}_O)\cos(z, \mathbf{M}_O). \tag{4.11}$$

Выясним, как будут меняться сила и пара сил, к которым приводится рассматриваемая система сил, при перемене центра приведения. Так как сила $\mathbf{F}_O$ равна главному вектору, т. е. сумме всех сил системы, то для любого центра приведения она будет одной и той же. Если в качестве нового центра приведения взята точка O_1, то

$$\mathbf{F}_{O_1} = \mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k. \tag{4.12}$$

Для центра приведения O_1 момент пары равен главному моменту относительно этого центра приведения

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k, \tag{4.13}$$

где $\mathbf{r}'_k$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{F}_k$, проведенный из нового центра приведения O_1 (рис. 4.3). Из рассмотрения рис. 4.3 видно, что

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k + \overline{O_1O}.$$

Подставив значение $\mathbf{r}'_k$ в формулу (4.13), получим

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r}_k + \overline{O_1O}) \times \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \overline{O_1O} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k.$$

По тем же соображениям момент силы и момент пары сил также не следует рассматривать только как формальные величины, введенные для удобства доказательства. В технике очень часто проще задать не силу или пару, а их моменты. Например, в характеристику электромотора входит не сила, с которой статор действует на ротор, а вращающий момент.

§ 4.3. Аналитическое определение главного вектора и главного момента пространственной системы сил

Определим модули и направления векторов $\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{M}_O$. Пусть декартова система координат $Oxyz$ имеет начало в центре приведения O. Тогда проекции силы $\mathbf{F}_O$ на координатные оси найдутся из соотношений:

$$F_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx},$$

$$F_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \tag{4.4}$$

$$F_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}.$$

Модуль силы $\mathbf{F}_O$ равен

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}, \tag{4.5}$$

а направление определяется направляющими косинусами

$$\cos(x, \mathbf{F}_O) = \frac{F_{Ox}}{F}, \quad \cos(y, \mathbf{F}_O) = \frac{F_{Oy}}{F}, \quad \cos(z, \mathbf{F}_O) = \frac{F_{Oz}}{F}. \tag{4.6}$$

Для проекций вектора $\mathbf{M}_O$ имеем (см. (3.10))

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} M_x(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}),$$

$$M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} M_y(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \tag{4.7}$$

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}).$$

в точку O, а затем сложим эти силы как сходящиеся; в результате получим одну силу:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k,$$

которая равна главному вектору (рис. 4.2, *б*). Но при последовательном переносе сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ в точку O мы получаем каждый раз соответствующую пару сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1''), (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2''), \ldots, (\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n'')$.

Моменты этих пар соответственно равны моментам данных сил относительно точки O:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1'') = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1), \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2'') = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{M}_n &= \mathbf{M}(\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n'') = \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n). \end{aligned} \tag{4.1}$$

На основании правила приведения системы пар к простейшему виду все указанные пары можно заменить одной парой. Ее момент равен сумме моментов всех сил системы относительно точки O, т. е. равен главному моменту, так как согласно формулам (3.18) и (4.1) имеем (рис. 4.2, *в*)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbf{M}_n =$$
$$= \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2) + \cdots + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k.$$

Итак, систему сил, как угодно расположенных в пространстве, можно в произвольно выбранном центре приведения заменить силой

$$\mathbf{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \tag{4.2}$$

и парой сил с моментом

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k. \tag{4.3}$$

Не следует считать, что главный вектор и главный момент имеют чисто формальное значение и что их можно найти только с помощью вычислений. Очень часто отдельно действующие на тело силы нельзя определить даже опытным путем, в то время как главный вектор или главный момент находятся сравнительно легко. Поясним это примером. Рассмотрим вал, находящийся в подшипниках скольжения. При вращении вала на точки его поверхности действуют со стороны подшипника силы трения. Число точек контакта и модули сил трения, как правило, нам не известны. Не всегда их можно определить и с помощью эксперимента, однако простым измерением находится сумма моментов всех сил трения относительно оси вращения, т. е. главный момент сил трения.

т. е. равен моменту силы $\mathbf{F}$ относительно точки B

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}).$$

Таким образом, лемма о параллельном переносе силы доказана.

§ 4.2. Основная теорема статики

Введем определения. Пусть дана произвольная система сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n)$. Сумму этих сил

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$$

называют *главным вектором* системы сил.

Сумму моментов сил относительно какого-либо полюса (центра приведения) называют *главным моментом* рассматриваемой системы сил относительно этого полюса.

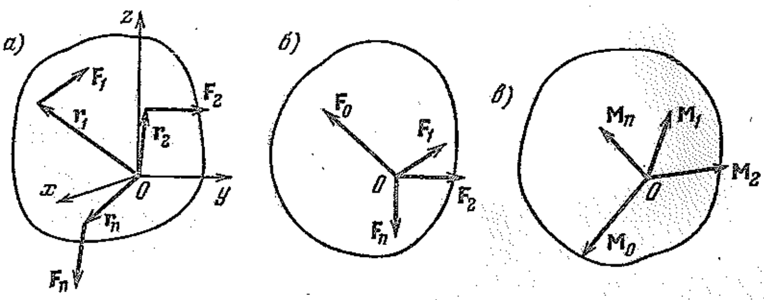


Рис. 4.2

Пользуясь теперь леммой о параллельном переносе силы, докажем следующую основную теорему статики (теорема Пуансо):

Всякую пространственную систему сил в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела (центре приведения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту всех сил относительно выбранного центра приведения.

Следовательно, основная теорема статики устанавливает закон эквивалентной замены произвольной системы сил более простой системой, состоящей из одной силы и одной пары.

Пусть O — центр приведения, принимаемый за начало координат, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_n$ — соответствующие радиусы-векторы точек приложения сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$, составляющих данную систему сил (рис. 4.2, *а*). Прежде всего перенесем силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$

При этом ясно, что $M_z = M$, если вращение пары видно с положительного направления оси z против хода часовой стрелки, и $M_z = -M$ при противоположном направлении вращения. Оба эти случая представлены на рис. 3.12.

Задача 3.2. Один конец балки длиной l укреплен в неподвижной шарнирной опоре A, а второй ее конец B опирается на гладкую наклонную плоскость, составляющую с балкой угол α. На балку действует пара сил с моментом, равным M. Пренебрегая весом балки, определить реакции опор (рис. 3.13).

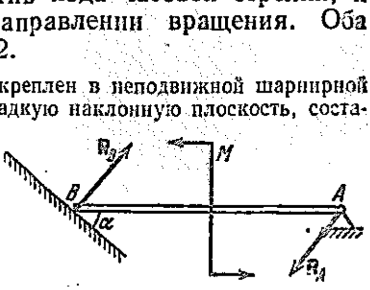


Рис. 3.13

Действие опор заменим реакциями. Реакция гладкой поверхности $\mathbf{R}_B$ направлена по нормали к поверхности. Так как балка находится в равновесии, то система сил, действующих на балку, эквивалентна нулю. Но активная пара сил с моментом $\mathbf{M}$ может быть уравновешена только парой сил. Следовательно, реакция $\mathbf{R}_A$ неподвижной опоры A вместе с реакцией плоскости $\mathbf{R}_B$ должны составлять пару сил. Модули реакций найдутся из условия равенства модулей моментов пар:

$$M = M(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B), \quad \text{или} \quad M = R_A \cdot h,$$

где $h = l \cos\alpha$ — плечо пары. Отсюда

$$R_A = R_B = M/(l\cos\alpha).$$

Глава IV

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ И УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

§ 4.1. Лемма о параллельном переносе силы

В этом параграфе рассматривается вспомогательная задача о параллельном переносе силы.

Докажем лемму:

Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

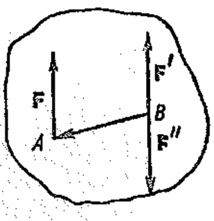


Рис. 4.1

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\mathbf{F}$ (рис. 4.1). Приложим теперь в точке B тела систему двух сил $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$, эквивалентную нулю, причем выбираем $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ (следовательно, $\mathbf{F}'' = -\mathbf{F}$). Тогда сила $\mathbf{F} \sim (\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'')$, так как $(\mathbf{F}', \mathbf{F}'') \sim 0$. Но, с другой стороны, система сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'')$ эквивалентна силе $\mathbf{F}'$ и паре сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$; следовательно, сила $\mathbf{F}$ эквивалентна силе $\mathbf{F}'$ и паре сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$. Момент пары $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$ равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'') = \overline{BA} \times \mathbf{F},$$

цам стержня, с точки зрения статики твердого тела эквивалентны нулю. Между тем их действие на деформируемый стержень вызывает его кручение, и тем большее, чем больше модули моментов.

Перейдем к решению первой и второй задач статики в случаях, когда на тело действуют только пары сил.

§ 3.4. Приведение системы пар к простейшему виду. Равновесие системы пар

Пусть дана система n пар $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1')$, $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2')$, ..., $(\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n')$, как угодно расположенных в пространстве, моменты которых равны $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ..., $\mathbf{M}_n$. На основании теоремы 3 первые две пары можно заменить одной парой $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1')$ с моментом $\mathbf{M}_2^*$:

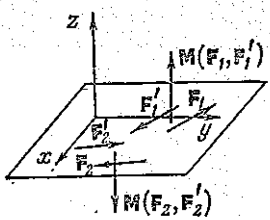


Рис. 3.12

$$\mathbf{M}_2^* = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

Полученную пару $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1')$ сложим с парой $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3')$, тогда получим новую пару $(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2')$ с моментом $\mathbf{M}_3^*$:

$$\mathbf{M}_3^* = \mathbf{M}_2^* + \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3.$$

Продолжая и дальше последовательное сложение моментов пар, мы получим последнюю *результирующую* пару $(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ с моментом

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k. \tag{3.18}$$

Итак, *система пар приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар.*

Теперь легко решить вторую задачу статики, т. е. найти условия равновесия тела, на которое действует система пар. Для того чтобы система пар была эквивалентна нулю, т. е. приводилась к двум уравновешенным силам, необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары был равен нулю. Тогда из формулы (3.18) получим следующее условие равновесия в векторном виде:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \ldots + \mathbf{M}_n = 0. \tag{3.19}$$

В проекциях на координатные оси уравнение (3.19) дает три скалярных уравнения.

Условие равновесия (3.19) упрощается, когда все пары лежат в одной плоскости. В этом случае все моменты перпендикулярны этой плоскости, и поэтому уравнение (3.19) достаточно спроектировать только на одну ось, например ось, перпендикулярную плоскости пар. Пусть это будет ось z (рис. 3.12).

Тогда из уравнения (3.19) получим:

$$M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz} = 0. \tag{3.20}$$

Пусть пары $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1)$ и $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}'_2)$ расположены в пересекающихся плоскостях I и II соответственно. Пользуясь следствием теоремы 2, приведем обе пары к плечу AB (рис. 3.11), расположенному на линии пересечения плоскостей I и II. Обозначим трансформированные пары через $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}'_1)$ и $(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}'_2)$. При этом должны выполняться равенства:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}'_1) = \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1) \text{ и } \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}'_2) = \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}'_2).$$

Сложим по аксиоме 3 силы, приложенные в точках A и B соответственно. Тогда получим $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{R}' = \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2$. Учитывая, что $\mathbf{Q}'_1 = -\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}'_2 = -\mathbf{Q}_2$, получим: $\mathbf{R} = -\mathbf{R}'$. Таким образом, мы доказали, что система двух пар эквивалентна одной паре $(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$.

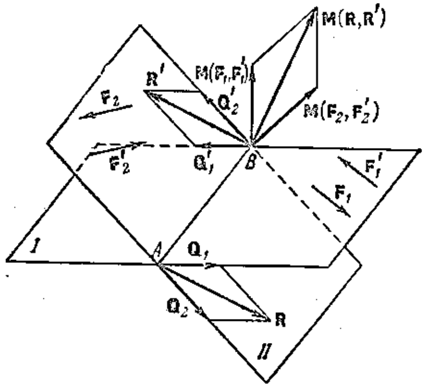


Рис. 3.11

Найдем момент $\mathbf{M}$ этой пары. На основании формулы (3.13) имеем $\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \overline{BA} \times \mathbf{R}$, но $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2$ и, следовательно,

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \overline{BA} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) =$$
$$= \overline{BA} \times \mathbf{Q}_1 + \overline{BA} \times \mathbf{Q}_2 =$$
$$= \mathbf{M}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}'_1) + \mathbf{M}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}'_2) =$$
$$= \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1) + \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}'_2),$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2,$$

т. е. теорема доказана.

Заметим, что полученный результат справедлив и для пар, лежащих в параллельных плоскостях. По теореме 2 такие пары можно привести к одной плоскости, а по теореме 1 их можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов составляющих пар.

Доказанные выше теоремы о парах позволяют сделать важный вывод: *момент пары является свободным вектором и полностью определяет действие пары на абсолютно твердое тело.* В самом деле, мы уже доказали, что если две пары имеют одинаковые моменты (следовательно, лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях), то они друг другу эквивалентны (теорема 2). С другой стороны, две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, не могут быть эквивалентны, ибо это означало бы, что одна из них и пара, противоположная другой, эквивалентны нулю, что невозможно, так как сумма моментов таких пар отлична от нуля.

Таким образом, введенное понятие момента пары чрезвычайно полезно, поскольку оно полностью отражает механическое действие пары на тело. В этом смысле можно сказать, что момент исчерпывающим образом представляет действие пары на твердое тело.

Для деформируемых тел изложенная выше теория пар неприменима. Две противоположные пары, действующие, например, по тор-

Для этого согласно аксиоме 2 нужно подобрать пару ($\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_3'$) с моментом M_3 так, чтобы приложенная система сил ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_3'$) была уравновешена. Это можно сделать, например, следующим образом: положим $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_3' = -\mathbf{F}_1$ и совместим точки приложения этих сил с проекциями A_1 и B_1 точек A и B на плоскость II (см. рис. 3.10). В соответствии с построением будем иметь: $\mathbf{M}_3 = -\mathbf{M}_1$ или, учитывая, что $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$,

$$\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = 0,$$

Принимая во внимание второе замечание к предыдущей теореме, получим ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_3'$) ~ 0. Таким образом, пары ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$) и ($\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_3'$) взаимно уравновешены и присоединение их к телу не нарушает его состояния (аксиома 2), так что

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3'). \tag{3.16}$$

С другой стороны, силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$, а также $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_3'$ можно сложить по правилу сложения параллельных сил, направленных в одну сторону. По модулю все эти силы равны друг другу, поэтому их равнодействующие $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ должны быть приложены в точке пересечения диагоналей прямоугольника ABB_1A_1; кроме того, они равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Это означает, что они составляют систему, эквивалентную нулю. Итак,

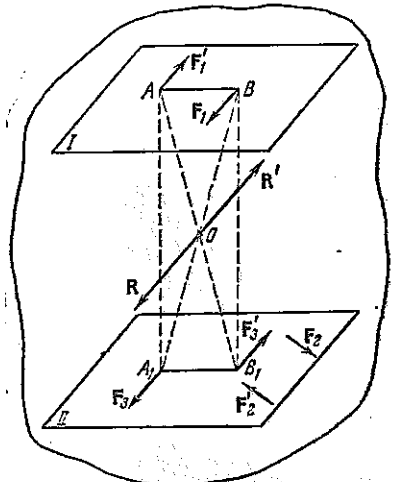


Рис. 3.10

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3') \sim (\mathbf{R}, \mathbf{R}') \sim 0.$$

Теперь мы можем записать

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_3') \sim (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2'). \tag{3.17}$$

Сравнивая соотношения (3.16) и (3.17), получим ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$) $\sim$ ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$), что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что пару сил можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в параллельную плоскость; наконец, в паре можно менять одновременно силы и плечо, сохраняя лишь направление вращения пары и модуль ее момента ($F_1h_1 = F_2h_2$).

В дальнейшем мы будем широко пользоваться такими эквивалентными преобразованиями пары.

Теорема 3. *Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме моментов двух данных пар.*

Теорема 1. *Две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар.*

Для доказательства этой теоремы рассмотрим две пары ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$) и ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$) (рис. 3.9) и перенесем точки приложения всех сил вдоль линий их действия в точки A и B соответственно. Складывая силы по аксиоме 3, получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{R}' = \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_2', \text{ но } \mathbf{F}_1' = -\mathbf{F}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_2' = -\mathbf{F}_2.$$

Следовательно, $\mathbf{R} = -\mathbf{R}'$, т. е. силы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ образуют пару. Найдем момент этой пары, воспользовавшись формулой (3.13):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \overline{BA} \times \mathbf{R} = \overline{BA} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \overline{BA} \times \mathbf{F}_1 + \overline{BA} \times \mathbf{F}_2. \tag{3.14}$$

При переносе сил, составляющих пару, вдоль линий их действия ни плечо, ни направление вращения пары не меняются, следовательно, не меняется и момент пары. Значит,

$$\overline{BA} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1') = \mathbf{M}_1,$$

$$\overline{BA} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2') = \mathbf{M}_2,$$

и формула (3.14) примет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \tag{3.15}$$

что и доказывает справедливость сформулированной выше теоремы.

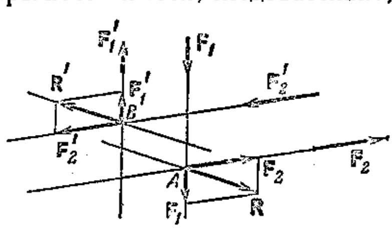


Рис. 3.9

Сделаем к ней два замечания.

1. Линии действия сил, составляющих пары, могут оказаться параллельными. Теорема остается справедливой и в этом случае, но для ее доказательства следует воспользоваться правилом сложения параллельных сил.

2. После сложения может получиться, что $\mathbf{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = 0$; на основании сделанного ранее замечания из этого следует, что совокупность двух пар ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$) ~ 0.

Теорема 2. *Две пары, имеющие равные моменты, эквивалентны.*

Пусть на тело в плоскости I действует пара ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$) с моментом $\mathbf{M}_1$. Покажем, что эту пару можно заменить другой парой ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$), расположенной в плоскости II, если только ее момент $\mathbf{M}_2$ равен $\mathbf{M}_1$ (согласно определению (см. § 1.1) это и будет означать, что пары ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$) и ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$) эквивалентны). Прежде всего заметим, что плоскости I и II должны быть параллельны, в частности, они могут совпадать. Действительно, из параллельности моментов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ (в нашем случае $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$) следует, что плоскости действия пар, перпендикулярные моментам, также параллельны.

Введем в рассмотрение новую пару ($\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_3'$) и приложим ее вместе с парой ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$) к телу, расположив обе пары в плоскости II.

но так как $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$, то

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \overline{OA} \times \mathbf{F} - \overline{OB} \times \mathbf{F} = (\overline{OA} - \overline{OB}) \times \mathbf{F}.$$

Принимая во внимание равенство $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$, окончательно находим:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \overline{BA} \times \mathbf{F}.$$

Следовательно, *сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от положения точки, относительно которой берутся моменты.*

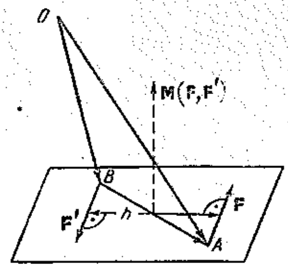


Рис. 3.8

Векторное произведение $\overline{BA} \times \mathbf{F}$ и называется *моментом пары*. Обозначается момент пары символом $\mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, причем

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \overline{BA} \times \mathbf{F} = \overline{AB} \times \mathbf{F}',$$

или, короче,

$$\mathbf{M} = \overline{BA} \times \mathbf{F} = \overline{AB} \times \mathbf{F}'. \tag{3.13}$$

Рассматривая правую часть этого равенства, замечаем, что *момент пары представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару) и направленный в ту сторону, откуда «вращение» пары видно происходящим против хода часовой стрелки.* Если h — плечо пары, то $M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = hF$.

Из самого определения видно, что момент пары сил представляет собой свободный вектор, линия действия которого не определена (дополнительное обоснование этого замечания следует из теорем 2 и 3 этой главы).

Для того чтобы пара сил составляла уравновешенную систему (систему сил, эквивалентную нулю), необходимо и достаточно, чтобы момент пары равнялся нулю. Действительно, если момент пары равен нулю, $M = Fh = 0$, то либо $F = 0$, т. е. нет сил, либо плечо пары h равно нулю. Но в этом случае силы пары будут действовать по одной прямой; так как они равны по модулю и направлены в противоположные стороны, то на основании аксиомы 1 они составят уравновешенную систему. Обратно, если две силы, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, составляющие пару, уравновешены, то на основании той же аксиомы 1 они действуют по одной прямой. Но в этом случае плечо пары h равно нулю и, следовательно, $M = Fh = 0$.

§ 3.3. Теоремы о парах

Докажем три теоремы, с помощью которых становятся возможными эквивалентные преобразования пар. При всех рассуждениях следует помнить, что они относятся к парам, действующим на какое-либо одно твердое тело.

2) *спроектировать на эту плоскость силу;*

3) *определить плечо проекции силы* h^*.

Момент силы относительно оси равен произведению модуля проекции силы на ее плечо, взятому с соответствующим знаком (см. изложенное выше правило).

Из формулы (3.12) следует, что *момент силы относительно оси равен нулю* в двух случаях: 1) когда проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю, т. е. *когда сила и ось параллельны;* 2) когда плечо проекции h^* равно нулю, т. е. *когда линия действия силы пересекает ось.* Оба эти случая можно объединить в один: *момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось находятся в одной плоскости.*

Задача 3.1. Вычислить относительно точки O момент силы **F**, приложенной к точке A и направленной по диагонали грани куба со стороной a (рис. 3.7).

При решении подобных задач рационально сначала вычислить моменты силы **F** относительно координатных осей x, y, z. Координаты точки A приложения силы **F** будут

$$x = a,\ y = a,\ z = 0.$$

Проекции силы **F** на координатные оси:

$$F_x = -(\sqrt{2}/2)F,\quad F_y = 0,\quad F_z = (\sqrt{2}/2)F.$$

Подставляя эти значения в равенства (3.10), найдем

$$M_{O_x} = (\sqrt{2}/2)Fa,\quad M_{O_y} = -(\sqrt{2}/2)Fa,$$

$$M_{O_z} = (\sqrt{2}/2)Fa.$$

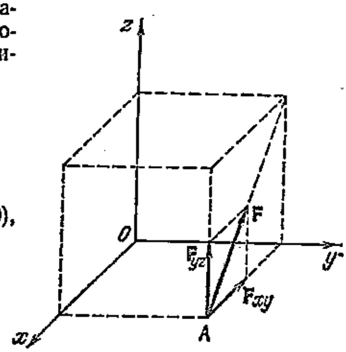


Рис. 3.7

Эти же выражения для моментов силы **F** относительно координатных осей можно получить, пользуясь формулой (3.12). Для этого спроектируем силу **F** на плоскости, перпендикулярные осям x и y (рис. 3.7). Очевидно, что $F_{xy} = F_{yz} = (\sqrt{2}/2)F$. Применяя изложенное выше правило, получим, как и следовало ожидать, те же выражения:

$$M_x = (\sqrt{2}/2)Fa,\quad M_y = -(\sqrt{2}/2)Fa,\quad M_z = (\sqrt{2}/2)Fa.$$

Модуль момента определится равенством

$$M_O(\mathbf{F}) = \sqrt{M_{O_x}^2 + M_{O_y}^2 + M_{O_z}^2} = \sqrt{3/2}Fa.$$

Введем теперь понятие момента пары. Найдем сначала, чему равна сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки. Пусть O — произвольная точка пространства (рис. 3.8), а **F** и **F′** — силы, составляющие пару.

Тогда

$$M_O(\mathbf{F}) = \overline{OA} \times \mathbf{F},\quad M_O(\mathbf{F}') = \overline{OB} \times \mathbf{F}',$$

откуда

$$M_O(\mathbf{F}) + M_O(\mathbf{F}') = \overline{OA} \times \mathbf{F} + \overline{OB} \times \mathbf{F}',$$

Если в качестве рассматриваемой плоскости принять плоскость xOy, то проекцией силы $\mathbf{F}$ на эту плоскость будет вектор $\mathbf{F}_{xy}$ (рис. 3.5).

Момент силы $\mathbf{F}_{xy}$ относительно точки O (точки пересечения оси z с плоскостью xOy) может быть вычислен по формуле (3.9), если в ней положить $z = 0$, $F_z = 0$. Получим

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}.$$

Таким образом, этот момент направлен вдоль оси z, а его проекция на ось z в точности совпадает с проекцией на ту же ось момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки O. Другими словами,

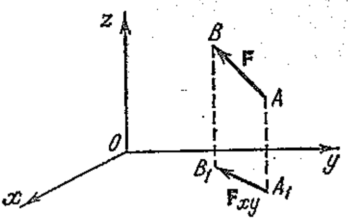


Рис. 3.5

$$M_{Oz}(\mathbf{F}) = M_{Oz}(\mathbf{F}_{xy}) = xF_y - yF_x. \quad (3.11)$$

Очевидно, что тот же результат можно получить, если спроектировать силу $\mathbf{F}$ на любую другую плоскость, параллельную плоскости xOy. При этом точка пересечения оси z с плоскостью будет уже иной (обозначим новую точку пересечения через O_1). Однако все входящие в правую часть равенства (3.11) величины x, y, F_x, F_y останутся неизменными, и, следовательно, можно записать

$$M_{Oz}(\mathbf{F}) = M_{O_1z}(\mathbf{F}_{xy}).$$

Другими словами, *проекция момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, не зависит от выбора точки на оси.* Поэтому в дальнейшем вместо символа $M_{Oz}(\mathbf{F})$ будем применять символ $M_z(\mathbf{F})$. Эта проекция момента называется *моментом силы относительно оси z.* Вычисление момента силы относительно оси часто бывает удобнее производить посредством проектирования силы $\mathbf{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси, и вычисления величины $M_z(\mathbf{F}_{xy})$.

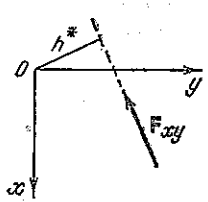


Рис. 3.6

В соответствии с формулой (3.7) и учитывая знак проекции, будем иметь

$$M_z(\mathbf{F}) = M_z(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h^*. \quad (3.12)$$

Здесь h^* — плечо силы $\mathbf{F}_{xy}$ относительно точки O (рис. 3.6); если наблюдатель видит со стороны положительного направления оси z, что сила $\mathbf{F}_{xy}$ стремится повернуть тело вокруг оси z против хода часовой стрелки, то берется знак «плюс», а в противном случае — знак «минус».

Формула (3.12) дает возможность сформулировать следующее правило для вычисления момента силы относительно оси. Для этого нужно:

1) *выбрать на оси произвольную точку и построить плоскость, перпендикулярную оси;*

Если O — точка, относительно которой находится момент силы $\mathbf{F}$, то момент силы обозначается символом $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$. Покажем, что если точка приложения силы $\mathbf{F}$ определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ относительно O, то справедливо соотношение

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{3.6}$$

Согласно этому соотношению *момент силы равен векторному произведению вектора* $\mathbf{r}$ *на вектор* $\mathbf{F}$.

В самом деле, модуль векторного произведения равен

$$M_O(\mathbf{F}) = rF \sin\alpha = Fh, \tag{3.7}$$

где h — плечо силы (рис. 3.4). Заметим также, что вектор $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\mathbf{r}$ к направлению вектора $\mathbf{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, формула (3.6) полностью определяет модуль и направление момента силы $\mathbf{F}$.

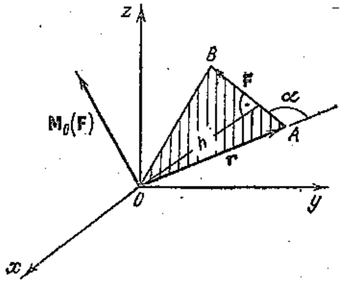


Рис. 3.4

Иногда формулу (3.7) полезно записывать в виде

$$M_O(\mathbf{F}) = 2S, \tag{3.8}$$

где S — площадь треугольника OAB (рис. 3.4).

Пусть x, y, z — координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси. Тогда, если точка O находится в начале координат, момент силы выражается следующим образом:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\,\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\,\mathbf{j} + \\ + (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что проекции момента силы на координатные оси определяются формулами:

$$M_{Ox}(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_{Oy}(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_{Oz}(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \tag{3.10}$$

Введем теперь понятие проекции силы на плоскость.

Пусть даны сила $\mathbf{F}$ и некоторая плоскость. Опустим из начала и конца вектора силы перпендикуляры на эту плоскость (рис. 3.5).

Проекцией силы на плоскость называется *вектор*, начало и конец которого совпадают с проекцией начала и проекцией конца силы на эту плоскость.

Прежде чем рассмотреть случай двух равных по модулю, параллельных, но противоположно направленных сил, заметим, что из равенств (3.3) и (3.4) следует

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \qquad (3.5)$$

Рассмотрим теперь случай двух параллельных, равных по модулю, но противоположно направленных сил (рис. 3.3). Эта система сил называется *парой сил* или просто *парой* и обозначается символом $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. Рассуждения, которыми мы пользовались при выводе соотношений (3.4) и (3.5), здесь непригодны. Формальное применение этих соотношений приводит к заключению, что в данном случае модуль равнодействующей равен нулю, а линия ее действия находится на бесконечном удалении от линий действия слагаемых сил. Чтобы понять природу этого результата, вновь вернемся к случаю, когда слагаемые силы имеют различные модули, и предположим, что модуль F_2 постепенно возрастает, приближаясь к значению модуля F_1. Тогда разность модулей будет стремиться к нулю, а система сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ — к паре. При этом модуль равнодействующей будет неограниченно приближаться к нулю (см. (3.4)), а линия ее действия — неограниченно удаляться от линий действия слагаемых (см. (3.5)).

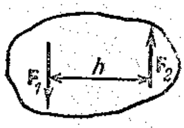


Рис. 3.3

Как следует из сказанного, для пары сил понятие равнодействующей лишено смысла, так как *она представляет собой неуравновешенную систему, которая не может быть заменена одной силой.* Говорят, что пара сил не имеет равнодействующей *).

Таким образом, пара сил является неприводимым (неупрощаемым) элементом статики; наряду с силой она является вторым самостоятельным элементом статики.

В следующих параграфах рассматриваются свойства пар сил, а также правила действия над системами пар.

§ 3.2. Момент силы относительно точки и относительно оси. Момент пары сил

Прежде чем перейти к исследованию свойств пары сил, введем понятие момента силы, которое необходимо для дальнейшего.

Моментом силы относительно какой-либо точки (центра) называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, представляется происходящим против хода часовой стрелки. Момент силы характеризует ее вращательное действие.

*) По этому поводу см. главу IV.

которым определяется точка приложения равнодействующей R. Таким образом, *система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам, причем ее модуль равен сумме модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.*

Рассмотрим теперь задачу о сложении двух параллельных сил, направленных в разные стороны и не равных друг другу по модулю. Пусть даны две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 3.2), причем для определенности будем считать, что $F_1 > F_2$.

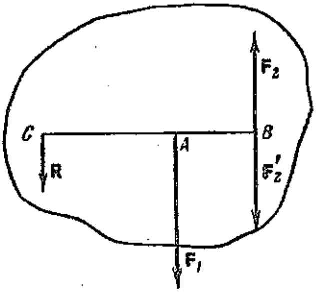


Рис. 3.2

Пользуясь формулами (3.1) и (3.2), можно силу $\mathbf{F}_1$ разложить на две составляющие, $\mathbf{F}_2'$ и $\mathbf{R}$, направленные в сторону силы $\mathbf{F}_1$. Сделаем это так, чтобы сила $\mathbf{F}_2'$ оказалась приложенной к точке B, и положим $\mathbf{F}_2' = -\mathbf{F}_2$.

Таким образом, $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{R}, \mathbf{F}_2', \mathbf{F}_2)$. Теперь заметим, что силы $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$ можно отбросить как эквивалентные нулю (аксиома 2), следовательно, $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim \mathbf{R}$, т. е. сила $\mathbf{R}$ и является равнодействующей. Определим силу $\mathbf{R}$, удовлетворяющую такому разложению силы $\mathbf{F}_1$. Формулы (3.1) и (3.2) дают

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1, \quad \frac{R}{F_2} = \frac{AB}{AC}. \tag{3.3}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

и так как силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены в разные стороны, то

$$R = F_1 - F_2. \tag{3.4}$$

Подставив это выражение во вторую формулу (3.3), получим после простых преобразований

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Из двух последних формул следует, что *две не равные по модулю противоположно направленные параллельные силы имеют равнодействующую, параллельную этим силам, причем ее модуль равен разности модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.* Заметим, что равнодействующая в этом случае всегда расположена за большей из двух сил.

При $\gamma = 90°$

$$T = 0, \quad S_1 = -S_2 = 10\sqrt{2}\,\text{Н} \approx 14{,}1\ \text{Н}$$

(знак минус в выражении для S_2 означает, что стержень AC сжат, а не растянут, как предполагалось при построении реакций).

При $\operatorname{tg}\gamma = 2\sqrt{3}/3$ ($\gamma \approx 49°\,5'$) усилие в стержне AC равно нулю.

Глава III

ТЕОРИЯ ПАР

§ 3.1. Сложение двух параллельных сил

Настоящий параграф носит вспомогательный характер и необходим для дальнейшего построения теории.

Пусть параллельные и одинаково направленные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к точкам A и B тела и нужно найти их равнодействующую (рис. 3.1). Приложим к точкам A и B равные по модулю и противоположно направленные силы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ (их модуль может быть любым); такое добавление можно делать на основании аксиомы 2. Тогда в точках A и B мы получим две силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$:

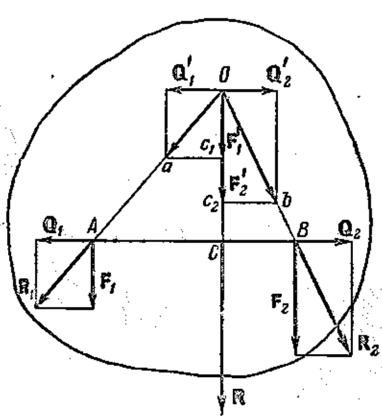


Рис. 3.1

$$\mathbf{R}_1 \sim (\mathbf{F}_1,\ \mathbf{Q}_1) \text{ и } \mathbf{R}_2 \sim (\mathbf{F}_2,\ \mathbf{Q}_2).$$

Линии действия этих сил пересекаются в некоторой точке O. Перенесем силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ в точку O и разложим каждую на составляющие:

$$\mathbf{R}_1 \sim (\mathbf{F}_1',\ \mathbf{Q}_1') \text{ и } \mathbf{R}_2 \sim (\mathbf{F}_2',\ \mathbf{Q}_2').$$

Из построения видно, что $\mathbf{Q}_1' = \mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2' = \mathbf{Q}_2$, следовательно, $\mathbf{Q}_1' = -\mathbf{Q}_2'$ и две эти силы согласно аксиоме 2 можно отбросить. Кроме того, $\mathbf{F}_1' = \mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_2$. Силы $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$ действуют по одной прямой, и их можно заменить одной силой

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \tag{3.1}$$

которая и будет искомой равнодействующей. Модуль равнодействующей равен

$$R = F_1 + F_2.$$

Очевидно, что линия действия равнодействующей параллельна линиям действия слагаемых. Из подобия треугольников Oac_1 и OAC, а также Obc_2 и OBC получим соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \tag{3.2}$$

Заменим действие стержней и нити на узел A реакциями $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{T}$. Проекции сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{T}$ на оси координат будут (рис. 2.10, *б*):

Проекции	Силы			
	$\mathbf{F}$	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{T}$
F_{kx}	$F\sin\gamma$	$-S_1\cos\beta$	$S_2\cos\beta$	0
F_{ky}	$F\cos\gamma$	$-S_1\sin\beta\cos\alpha$	$-S_2\sin\beta\cos\alpha$	0
F_{kz}	0	$-S_1\sin\beta\sin\alpha$	$-S_2\sin\beta\sin\alpha$	T

Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F\sin\gamma - S_1\cos\beta + S_2\cos\beta = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F\cos\gamma - S_1\sin\beta\cos\alpha - S_2\sin\beta\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = -S_1\sin\beta\sin\alpha - S_2\sin\beta\sin\alpha + T = 0,$$

отсюда

$$T = F\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha = 20\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\gamma,$$

$$S_1 = \frac{F}{2}\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\beta\cos\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\right) = 10\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\gamma + \sin\gamma\right),$$

$$S_2 = \frac{F}{2}\left(\frac{\cos\gamma}{\sin\beta\cos\alpha} - \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\right) = 10\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\gamma - \sin\gamma\right).$$

Натяжение нити и усилия в стержнях соответственно равны полученным значениям T, S_1 и S_2.

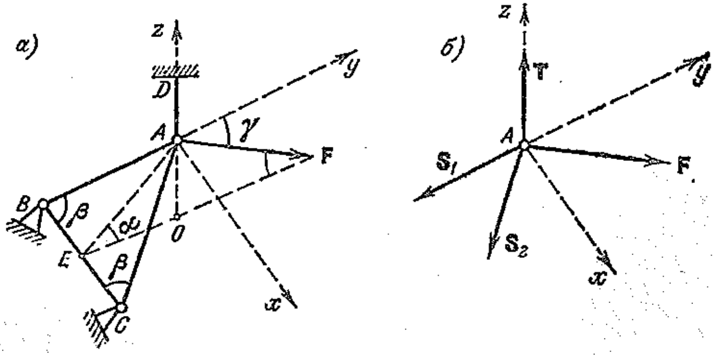


Рис. 2.10

Если $\gamma = 0$, то

$$T = 20\sqrt{3}/3 \approx 11{,}5\ \text{Н}, \quad S_1 = S_2 = 20\sqrt{6}/3 \approx 16{,}3\ \text{Н}.$$

Задача 2.6. Горизонтальная балка AB удерживается в равновесии стержнями AC и AD. Найти усилия в стержнях и балке, если к концу A балки приложена сила $\mathbf{P}$, перпендикулярная балке и образующая с вертикалью угол α.

Дано: $\angle OAB = \beta$, $\angle DAO = \angle CAO = \gamma$. Весами балки и стержней пренебречь; крепления шарнирные (рис. 2.9, *а*).

Заменяя действие стержней и балки на узел A реакциями $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, получим систему четырех сил, приложенных к одной точке A (рис. 2.9, *б*).

Проекции этих сил на координатные оси (систему координат см. на рис. 2.9, *б*) равны:

Проекции	Силы			
	$\mathbf{P}$	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{S}_3$
F_{kx}	0	$-S_1 \cos\gamma \cos\beta$	$-S_2 \cos\gamma \cos\beta$	S_3
F_{ky}	$P \sin\alpha$	$-S_1 \sin\gamma$	$S_2 \sin\gamma$	0
F_{kz}	$-P \cos\alpha$	$S_1 \cos\gamma \sin\beta$	$S_2 \cos\gamma \sin\beta$	0

Поэтому в соответствии с условиями (2.11) уравнения равновесия данной системы сил имеют вид

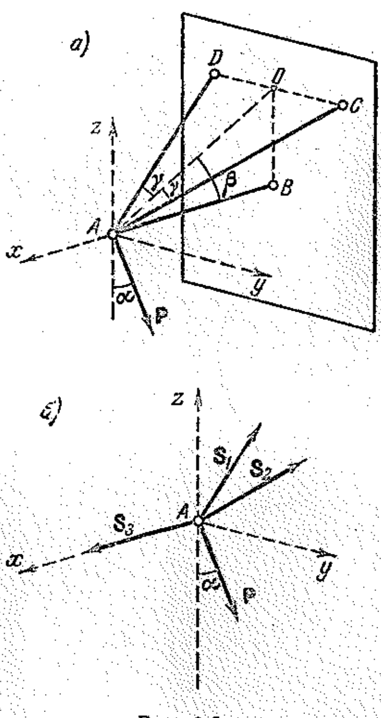


Рис. 2.9

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = -S_1 \cos\gamma \cos\beta - S_2 \cos\gamma \cos\beta + S_3 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = P \sin\alpha - S_1 \sin\gamma + S_2 \cos\gamma = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = -P \cos\alpha + S_1 \cos\gamma \sin\beta + S_2 \cos\gamma \sin\beta = 0.$$

Отсюда

$$S_1 = \frac{P}{2} \frac{\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma}{\sin\gamma \cos\gamma \sin\beta},$$

$$S_2 = \frac{P}{2} \frac{\sin\gamma \cos\alpha - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma}{\sin\gamma \cos\gamma \sin\beta},$$

$$S_3 = P \cos\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

Усилия в стержнях и балке соответственно равны найденным реакциям S_1, S_2 и S_3.

Если бы балка поддерживалась бо́льшим числом стержней, то задача стала бы статически неопределенной, поскольку число неизвестных превзошло бы число уравнений.

Задача 2.7. Невесомые стержни AB и AC, соединенные в точке A шарниром, поддерживаются в равновесии нитью AD. Определить натяжение нити и усилия в стержнях, если $\angle ABC = \angle ACB = \beta = 45°$, $\angle AEO = \alpha = 30°$, а к точке A приложена горизонтальная сила $F = 20$ Н, линия действия которой образует с осью y угол γ (рис. 2.10, *а*). Концы стержней B и C закреплены шарнирно. Прямая BC горизонтальна.

Начало этих рассуждений может быть несколько видоизменено, если рассматривать равновесие балки, отделенной как от стены (в точке A), так и нити (в точке B); см. рис. 2.6, *г*. Однако последующие выкладки останутся прежними, в частности, тем же останется силовой треугольник на рис. 2.6, *в*.

Задача 2.4. Определить реакции опорных шарниров невесомой трехшарнирной арки ABC, левая половина которой нагружена силой $\mathbf{P}$ (рис. 2.7, *а*).

Рассмотрим равновесие каждой полуарки отдельно. К правой полуарке приложены две силы: реакция в шарнире B и реакция $\mathbf{R}'_C$ левой полуарки на правую. Значит, линии действия этих сил проходят через B и C. Левая полуарка (рис. 2.7, *б*) находится в равновесии, следовательно, силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C$ образуют уравновешенную систему, и линия действия реакции $\mathbf{R}_A$ проходит через точку пересечения линий

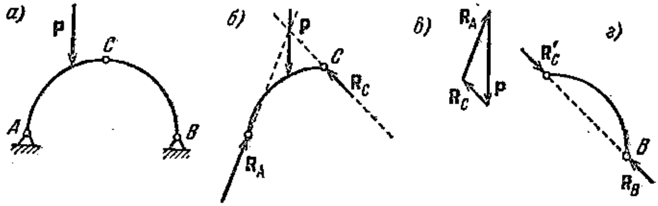


Рис. 2.7

действия силы $\mathbf{P}$ и реакции $\mathbf{R}_C$ (реакции правой полуарки на левую). Так как направления всех сил известны, то можно построить силовой треугольник (рис. 2.7, *в*) и определить модули искомых реакций. После этого можно построить систему сил для правой полуарки; это сделано на рис. 2.7, *г*, причем

$$R'_C = R_B = R_C.$$

Задача 2.5. Однородный цилиндр веса P расположен между двумя гладкими наклонными плоскостями, образующими с горизонтом углы α и β (рис. 2.8, *а*). Определить силы давления цилиндра на обе опорные плоскости.

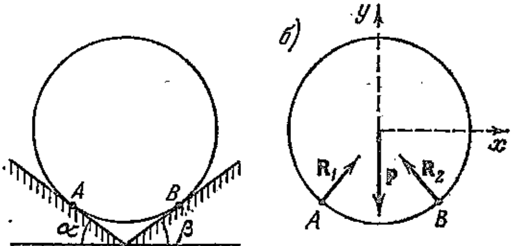


Рис. 2.8

Так как плоскости гладкие, то их реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ (рис. 2.8, *б*) направлены перпендикулярно плоскостям, т. е. направлены к оси цилиндра и вместе с силой $\mathbf{P}$ образуют сходящуюся систему сил. Запишем уравнения равновесия этой системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\beta = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = R_1 \cos\alpha + R_2 \cos\beta - P = 0,$$

откуда находим

$$R_1 = \frac{P \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad R_2 = \frac{P \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Искомые силы давления $\mathbf{R}'_1$ и $\mathbf{R}'_2$ будут равны (согласно аксиоме 4) по модулю и противоположны по направлению реакциям $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$.

Задача 2.2. Шар веса P и радиуса r удерживается нитью AB длины l на неподвижной гладкой цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 2.5, *а*). Определить натяжение нити **T** и давление шара на опорную поверхность, если точка A крепления нити лежит на одной вертикали с центром O цилиндрической поверхности.

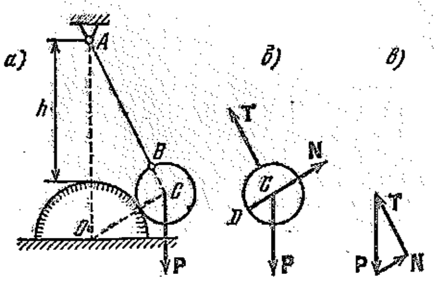


Рис. 2.5

Рассмотрим равновесие шара. Мысленно освободим шар от связей и заменим их реакциями (рис. 2.5, *б*). Реакция нити **T**, равная ее натяжению, направлена вдоль нити от B к A; реакция **N** гладкой цилиндрической поверхности направлена по нормали к поверхности (она приложена к шару в точке D касания шара с опорной поверхностью и направлена по нормали к поверхности шара, т. е. по радиусу DC). Шар находится в равновесии под действием трех сил: **P**, **N** и **T**. Построив замкнутый силовой треугольник (из конца известной силы **P** проводим прямую, параллельную DC, а из начала силы **P** — прямую, параллельную BA; точка пересечения этих прямых определяет конец силы **N** и начало силы **T**; рис. 2.5, *в*), мы можем определить модули сил **N** и **T** с помощью масштаба простым измерением их длины. В данном примере легко использовать аналитические методы. Действительно, из подобия треугольника OCA (рис. 2.5, *а*) и силового треугольника **PNT** следует

$$\frac{N}{R+r}=\frac{T}{l+r}=\frac{P}{R+h}.$$

Отсюда найдем

$$N=\frac{R+r}{R+h}P, \qquad T=\frac{l+r}{R+h}P.$$

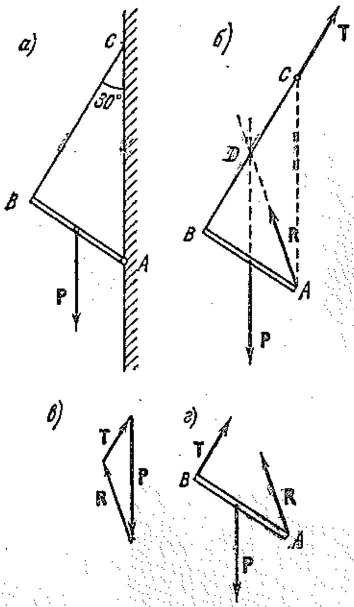


Рис. 2.6

Давление шара **N′** на опорную поверхность (аксиома 4) равно по модулю реакции **N**, но направлено в противоположную сторону: **N′** = −**N**.

Задача 2.3. Однородная балка длины l и веса P удерживается в равновесии нитью BC и шарниром A (рис. 2.6, *а*).

Найти натяжение нити и реакцию шарнира A, если $\angle BCA = 30°$, $\angle ABC = 90°$.

Рассмотрим равновесие системы, состоящей из балки и нити. Мысленно освободим систему от связей в точках A и C и приложим в этих точках реакции (рис. 2.6, *б*). К балке приложены сила тяжести **P**, сила натяжения нити **T** и реакция шарнира **R**. Эта система сил должна быть эквивалентна нулю. По теореме о трех непараллельных силах реакция **R** должна проходить через точку D (середину стороны BC). Построим силовой треугольник (рис. 2.6, *в*). Из подобия силового треугольника и треугольника ADC (рис. 2.6, *б*) следует, что

$$\frac{P}{AC}=\frac{T}{CD}=\frac{R}{AD}.$$

Подставляя сюда $AC=2l$, $CD=l\sqrt{3}/2$, $AD=l\sqrt{7}/2$, получим

$$T=P\sqrt{3}/4, \qquad R=P\sqrt{7}/4.$$

Рассмотрим равновесие стрелы AC. В точке A к ней приложена активная сила **P** (сила тяжести груза). В той же точке к ней приложена реакция **T** троса BA, направленная от A к B, а в точке C к стреле приложена реакция **S** опоры C, направленная вдоль стрелы. Мысленно освободимся от связей и заменим их реакциями (рис. 2.4, *б*). Так как все три силы, **P**, **T** и **S**, приложенные к стреле, уравновешены и пересекаются в одной точке A, то силовой треугольник должен быть замкнут.

Построение замкнутого треугольника сил следует начинать с известной силы **P**. Из ее конца проводится направление силы **S** (или **T**), а из начала силы **P** проводится прямая, параллельная силе **T** (или **S**). Точка пересечения этих прямых определяет силы **S** и **T** (рис. 2.4, *в*).

При отбрасывании связей было заранее предположено, что стрела (стержень) AB сжата и поэтому реакция опоры C была направлена от C к A. В данном примере это очевидно; в других, более сложных, случаях состояние стержня (растягивается он или сжимается) определяется решением задачи.

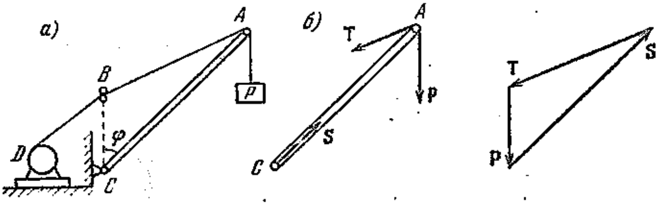


Рис. 2.4

Треугольник сил **PST** подобен треугольнику ABC, образованному элементами крана (так как соответствующие стороны параллельны). Поэтому

$$\frac{S}{AC}=\frac{T}{AB}=\frac{P}{BC}.$$

Отсюда

$$S=\frac{AC}{BC}P, \qquad T=\frac{AB}{BC}P.$$

По условию задачи $AC=l$, $BC=a$. Пользуясь теоремой косинусов, из треугольника ABC найдем

$$AB=\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\varphi}.$$

Внося значения для AC, BC и AB в S и T, получим

$$S=\frac{l}{a}P, \quad T=\frac{\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\varphi}}{a}P.$$

При заданных значениях будем иметь

$$S=160\ \text{кН}, \quad T=140\ \text{кН}.$$

В заключение этого примера отметим, что при хорошем выполнении чертежа (строгое соблюдение масштабов и параллельности линий) приближенные значения усилия **S** и натяжения **T** можно определить без всяких вычислений простым измерением длин сторон силового треугольника. Недостаток графического метода состоит в том, что он не позволяет провести анализ полученного решения, так как численные значения искомых величин отвечают одному фиксированному положению механизма.

т. е. *для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.*

Для частного случая плоскостей системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости xy, третье условие (2.10) отпадает (т. е. обращается в тождество).

Очевидно, что условия равновесия (как в аналитической, так и в геометрической форме) позволяют проконтролировать, находится ли в равновесии заданная система сил.

Однако еще большее практическое значение имеет другая возможность использования этих условий. Часто заведомо известно, что вследствие наложенных связей тело находится в равновесии, причем мы знаем только часть действующих сил, а именно, активные силы; при этом опорные реакции известны лишь отчасти (например, известны их направления). Тогда с помощью условий равновесия можно найти остальные неизвестные, определяющие реакции связей. Условия равновесия, в которые входят неизвестные, будут уже служить уравнениями для определения этих неизвестных. Конечно, определение неизвестных возможно лишь в тех случаях, когда число неизвестных составляющих реакций не больше числа уравнений равновесия. Для определенности решения пространственной задачи на равновесие системы сходящихся сил она должна содержать не более трех неизвестных (соответственно трем уравнениям равновесия), а для плоской задачи — не более двух. Если неизвестных реакций больше, чем уравнений равновесия, в которые эти реакции входят, то задача не может быть решена только методами статики твердого тела (*статически неопределенная задача*) *). Соответствующая система называется *статически неопределимой*.

Хотя выбор направления координатных осей, на которые проектируются силы, не имеет принципиального значения, однако при решении задач для получения более простых уравнений равновесия рационально иногда направлять координатные оси перпендикулярно неизвестным силам; при этом некоторые уравнения равновесия содержат меньшее число неизвестных, чем их имеется в задаче.

§ 2.3. Задачи **)

Задача 2.1. Кран состоит из стрелы AC, блоков B, троса ABD и мотора D. К концу A стрелы подвешен груз, вес которого равен P. С помощью мотора D и троса стрелу можно установить под любым углом φ (рис. 2.4, *а*). Пренебрегая весом троса и стрелы, а также размерами блоков B, определить натяжение троса T и усилие S в стреле, если известно расстояние $BC = a$ и длина стрелы l. Вычислить найденные величины при $a = 1{,}5$ м, $l = 4$ м, $\varphi = 60°$, $P = 60$ кН.

---

*) Методы решения статически неопределенных задач выходят за рамки теоретической механики и относятся к курсу сопротивления материалов и строительной механики.

**) В книге принята двойная нумерация задач: первое число означает номер главы, второе — номер задачи в этой главе.

положения сил. Тогда проекции всех сил на ось z равны нулю, и вместо формул (2.2), (2.4) и (2.5) будем иметь

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx},$$
$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}; \tag{2.6}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}, \tag{2.7}$$

$$\cos(x,\ \mathbf{R}) = R_x/R, \quad \cos(y,\ \mathbf{R}) = R_y/R. \tag{2.8}$$

§ 2.2. Условия равновесия системы сходящихся сил

При приведении системы сходящихся сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$) было показано, что такая система эквивалентна одной равнодействующей силе

$$(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim \mathbf{R}.$$

Отсюда следует, что для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая их равнялась нулю:

$$\mathbf{R} = 0. \tag{2.9}$$

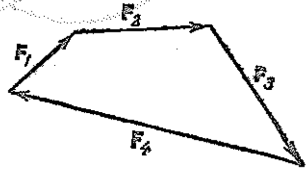


Рис. 2.3

Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что *силовой многоугольник замкнут* (рис. 2.3). Это условие удобно использовать при графическом решении задач для плоских систем сил.

Векторное равенство (2.9) эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0. \tag{2.10}$$

Принимая во внимание равенства (2.2), получаем аналитические условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \tag{2.11}$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0,$$

В случае плоской системы сил можно воспользоваться плоским чертежом, откладывая силы в некотором масштабе; равнодействующая определяется непосредственным измерением по чертежу. Такой способ ее нахождения называется *графическим*.

Наиболее общим способом определения модуля и направления равнодействующей является *аналитический способ*, который также вытекает из основного соотношения (2.1). Поместим, например, начало прямоугольной системы координат в точку пересечения линий действия сил (см. рис. 2.1); тогда, пользуясь теоремой (она доказывается в курсе векторной алгебры), согласно которой проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций на ту же ось слагаемых векторов, получим

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}, \\
R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}, \\
R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проекции силы $\mathbf{F}_k$ на указанные оси, а R_x, R_y и R_z — проекции равнодействующей на те же оси.

Итак, *проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.*

С помощью выражений (2.2) можно найти модуль равнодействующей и ее направление в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Так как составляющие равнодействующей $\mathbf{R}$ системы сил

$$\mathbf{R}_x = R_x\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_y = R_y\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_z = R_z\mathbf{k} \tag{2.3}$$

взаимно перпендикулярны (рис. 2.1), то модуль равнодействующей равен

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}. \tag{2.4}$$

Направляющие косинусы равнодействующей соответственно равны

$$\cos(x, \mathbf{R}) = R_x/R, \quad \cos(y, \mathbf{R}) = R_y/R, \quad \cos(z, \mathbf{R}) = R_z/R. \tag{2.5}$$

В частном случае, когда все силы расположены в одной плоскости, удобно выбрать систему координат Oxy в плоскости расдействующую:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Индекс в обозначении равнодействующей соответствует номеру добавляемой силы $\mathbf{F}_2$. Затем, сложив силу $\mathbf{R}_2$ с силой $\mathbf{F}_3$, найдем

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3.$$

Сила $\mathbf{R}_3$ является равнодействующей трех сил, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, и равна их сумме. Дойдя, таким образом, до последней силы $\mathbf{F}_n$, получим равнодействующую $\mathbf{R}$ всей системы n данных сил *)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i. \tag{2.1}$$

Этим соотношением и доказывается справедливость сформулированной теоремы.

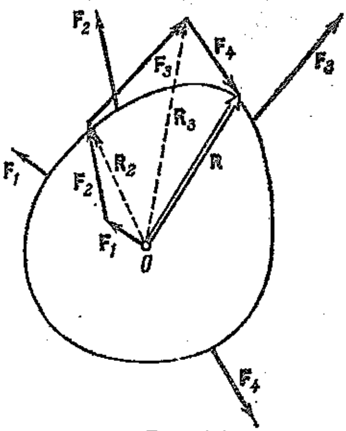


Рис. 2.2

Построение равнодействующей может быть упрощено, если вместо параллелограммов построить силовой многоугольник. Пусть, например, система состоит из четырех сил (рис. 2.2). Если от конца вектора $\mathbf{F}_1$ отложить вектор $\mathbf{F}_2$, то вектор, соединяющий начало O и конец вектора $\mathbf{F}_2$, будет вектором $\mathbf{R}_2$. Далее отложим вектор $\mathbf{F}_3$, помещая его начало в конце вектора $\mathbf{F}_2$. Тогда мы получим вектор $\mathbf{R}_3$, идущий от точки O к концу вектора $\mathbf{F}_3$. Наконец, точно так же добавим вектор $\mathbf{F}_4$; при этом получим, что вектор, идущий от начала первого вектора $\mathbf{F}_1$ к концу вектора $\mathbf{F}_4$, является равнодействующей $\mathbf{R}$ **).

Пространственный многоугольник, который получен указанным образом, называется *силовым многоугольником.*

На рис. 2.2 показан *разомкнутый* силовой многоугольник (конец последней силы не совпадает с началом первой силы); равнодействующая $\mathbf{R}$ направлена по замыкающей силового многоугольника. Конечно, при практическом построении силового многоугольника промежуточные равнодействующие $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ и т. д. строить не нужно.

Если для нахождения равнодействующей при помощи силового многоугольника используются правила геометрии или тригонометрии, то такой способ нахождения равнодействующей называется *геометрическим способом.*

---

*) Построенные таким образом параллелограммы лежат в общем случае в разных плоскостях.

**) Понятно, что при изменении порядка сложения сил равнодействующая не изменится.

Глава II

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 2.1. Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

Силы называются сходящимися, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке. Простейший случай трех сил был рассмотрен в главе I. Здесь рассматривается общий случай произвольного числа сил, образующих систему.

Существует немало практических задач, которые требуют исследования систем сходящихся сил; в частности, они возникают при расчетах шарнирно-стержневых систем (ферм), о чем будет сказано в § 5.8. Кроме того, изучение системы сходящихся сил необходимо для дальнейших обобщений, относящихся к произвольной пространственной системе сил.

Прежде всего докажем теорему:

Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Пусть задана система сходящихся сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$, приложенных к абсолютно твердому телу (рис. 2.1, *а*). Согласно следствию из аксиомы 1 перенесем точки приложения сил по линиям

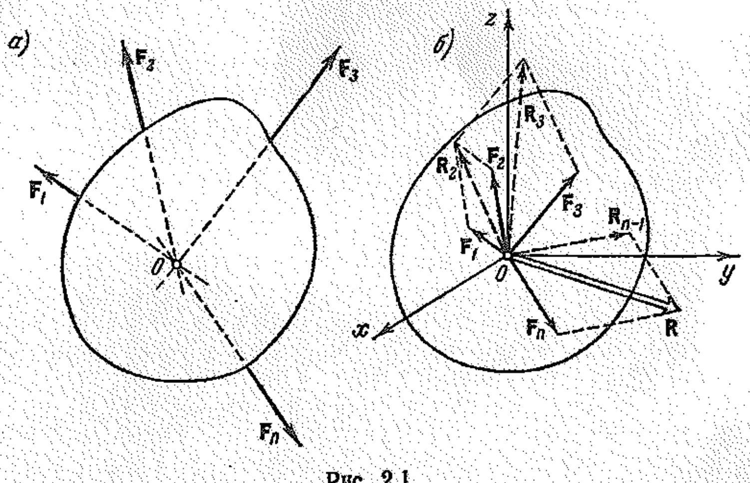


Рис. 2.1

их действия в точку пересечения этих линий (рис. 2.1, *б*). Таким образом, мы получаем систему сил, приложенных в одной точке. Она эквивалентна исходной системе сходящихся сил. Складывая теперь силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, на основании аксиомы 3 получим их равно-

В заключении этого параграфа заметим, что силы взаимодействия между отдельными точками данного тела называются *внутренними*, а силы, действующие на данное тело и вызванные другими телами, называются *внешними*. Из этого следует, что реакции связей являются для данного тела внешними силами.

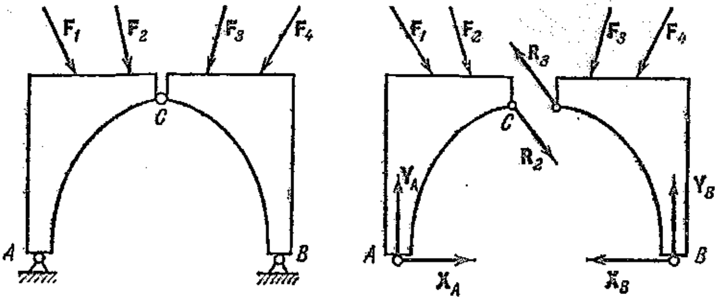


Рис. 1.21

§ 1.4. Основные задачи статики

Содержание статики абсолютно твердого тела составляют две основные задачи:

1. Задача о приведении системы сил: как данную систему сил заменить другой, в частности наиболее простой, ей эквивалентной?

2. Задача о равновесии: каким условиям должна удовлетворять система сил, приложенная к данному телу (или материальной точке), чтобы она была уравновешенной системой?

Первая основная задача имеет важное значение не только в статике, но и в динамике.

Вторая задача часто ставится в тех случаях, когда равновесие заведомо имеет место, например, когда заранее известно, что тело находится в равновесии, которое обеспечивается связями, наложенными на тело. При этом условия равновесия устанавливают зависимость между всеми силами, приложенными к телу; во многих случаях с помощью этих условий удается определить опорные реакции. Хотя этим не ограничивается сфера интересов статики твердого тела, но нужно иметь в виду, что определение реакций связей (внешних и внутренних) необходимо для последующего расчета прочности конструкции.

В более общем случае, когда рассматривается система тел, имеющих возможность перемещаться друг относительно друга, одной из основных задач статики является задача определения возможных положений равновесия. Эти вопросы рассматриваются в аналитической статике (см. том II, глава XVIII).

или, принимая во внимание значения первого и второго инвариантов,

$$M^* = I_2/\sqrt{I_1}. \tag{7.6}$$

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется динамическим винтом или динамой. Так как плоскость действия пары перпендикулярна моменту пары, то *динамический*

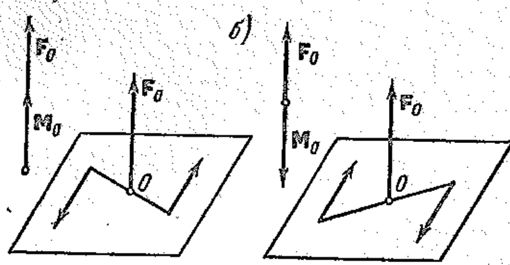


Рис. 7.1

винт представляет собой совокупность силы и пары сил, действующей в плоскости, перпендикулярной силе. Различают правый и левый динамические винты. На рис. 7.1, *а* показан правый динамический винт, составленный из силы F_O, равной главному вектору системы, и пары сил с моментом M_O, равным главному моменту; на рис. 7.1, *б* показан левый винт, составленный из тех же элементов.

Рис. 7.2

Может возникнуть вопрос, в каких случаях данную систему сил можно привести к динаме? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Если второй статический инвариант не равен нулю, то систему сил можно привести к динаме.

Пусть в произвольной точке O (рис. 7.2, *а*) система приведена к силе, равной главному вектору F_O, и паре сил с моментом, равным главному моменту. Так как по условию теоремы $I_2 = F_O \cdot M_O \neq 0$, то оба вектора, F_O и M_O, не равны нулю и не перпендикулярны между собой. Разложим главный момент на две составляющие: одну M^* направим по главному вектору и другую M_1 направим перпендикулярно главному вектору (рис. 7.2, *а*). Составляющая $\mathbf{M}_1$ представляет собой момент пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{M}_1$. Выберем силы $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$, составляющие эту пару, равными по модулю главному вектору $\mathbf{F}_O$ и приложим силу $\mathbf{F}'$ к центру приведения (рис. 7.2, *б*). Система сил $\mathbf{F}_O$, $\mathbf{F}'$, как эквивалентная нулю, может быть отброшена (рис. 7.2, *в*). Так как момент $\mathbf{M}^*$ — вектор свободный, то его можно перенести из точки O в точку O^* (рис. 7.2, *г*). Таким образом, заданная система сил приведена в точке O^* к силе $\mathbf{F}'' = \mathbf{F}_O$ и к паре сил с моментом $\mathbf{M}^*$ (рис. 7.2, *г*), расположенной в плоскости, перпендикулярной силе, т. е. мы получили динамический винт.

Из формулы (7.6) видно, что положительному второму инварианту ($I_2 > 0$) отвечает правый динамический винт, а отрицательному второму инварианту ($I_2 < 0$) — левый динамический винт.

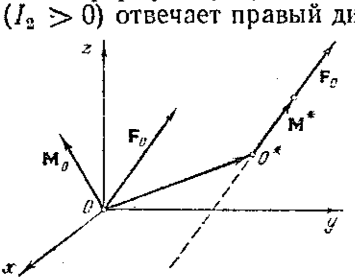


Рис. 7.3

Точка O^* не единственная, где система сил приводится к динаме. В самом деле, силу можно переносить вдоль линии ее действия, момент же пары сил есть вектор свободный, следовательно, система сил может быть приведена к динаме во всех точках прямой, проходящей через точку O^* и являющейся линией действия силы $\mathbf{F}'' = \mathbf{F}_O$. Эта прямая называется *центральной* осью системы сил. Найдем теперь уравнение центральной оси.

Пусть O^* (рис. 7.3) — точка центральной оси. Тогда для этой точки главный вектор и главный момент должны быть коллинеарны друг другу. На основании формулы (7.2) главный момент для точки O^* можно записать в виде

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_O + \overline{O^*O} \times \mathbf{F}_O = \mathbf{M}_O - \overline{OO^*} \times \mathbf{F}_O.$$

Условие коллинеарности главного вектора и главного момента для точки O^* записывается следующим образом:

$$p\mathbf{F}_O = \mathbf{M}^*,$$

где p — параметр винта, имеющий размерность длины.

Таким образом,

$$p\mathbf{F}_O = \mathbf{M}_O - \overline{OO^*} \times \mathbf{F}_O. \tag{7.7}$$

Пусть F_x, F_y, F_z и M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} — соответственно проекции главного вектора и главного момента на оси x, y и z; тогда

$$\mathbf{F}_O = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{M}_O = M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k}.$$

Пусть координаты какой-либо точки O^* центральной оси будут x, y, z, следовательно,

$$\overline{OO^*} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Подставляя соответствующие выражения в соотношение (7.7), получим

$$p\,(F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k})=M_{Ox}\mathbf{i}+M_{Oy}\mathbf{j}+M_{Oz}\mathbf{k}-\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=$$

$$=[M_{Ox}-(yF_z-zF_y)]\,\mathbf{i}+[M_{Oy}-(zF_x-xF_z)]\,\mathbf{j}+[M_{Oz}-(xF_y-yF_x)]\,\mathbf{k}.$$

Приравнивая коэффициенты при единичных векторах $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, будем иметь

$$pF_x=M_{Ox}-(yF_z-zF_y),$$
$$pF_y=M_{Oy}-(zF_x-xF_z),$$
$$pF_z=M_{Oz}-(xF_y-yF_x).$$

Следовательно,

$$\frac{M_{Ox}-(yF_z-zF_y)}{F_x}=\frac{M_{Oy}-(zF_x-xF_z)}{F_y}=\frac{M_{Oz}-(xF_y-yF_x)}{F_z}. \qquad (7.8)$$

Это и есть искомые уравнения центральной оси.

§ 7.2. Частные случаи приведения пространственной системы сил

Если при приведении системы сил к динамическому винту главный момент динамы оказался равным нулю, а главный вектор отличен от нуля, то это означает, что система сил приведена к равнодействующей, причем центральная ось является линией действия этой равнодействующей.

Выясним, при каких условиях, относящихся к главному вектору $\mathbf{F}_O$ и главному моменту $\mathbf{M}_O$, это может быть. Поскольку главный момент динамы $\mathbf{M}^*$ равен составляющей главного момента $\mathbf{M}_O$, направленной по главному вектору, то рассматриваемый случай $\mathbf{M}^*=0$ означает, что главный момент $\mathbf{M}_O$ перпендикулярен главному вектору, т. е. $I_2=\mathbf{F}_O\cdot\mathbf{M}_O=0$. Отсюда непосредственно вытекает, что если главный вектор $\mathbf{F}_O$ не равен нулю, а второй инвариант равен нулю,

$$\mathbf{F}_O\neq 0, \quad I_2=\mathbf{F}_O\cdot\mathbf{M}_O=0, \qquad (7.9)$$

то рассматриваемая *система приводится к равнодействующей.*

В частности, если для какого-либо центра приведения $\mathbf{F}_O\neq 0$, а $\mathbf{M}_O=0$, то это означает, что система сил приведена к равнодействующей, проходящей через данный центр приведения; при этом условие (7.9) также будет выполнено.

Обобщим приведенную в главе V теорему о моменте равнодействующей (теорему Вариньона) на случай пространственной системы сил.

Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов всех сил относительно той же точки.

Пусть система сил имеет равнодействующую $\mathbf{R}$ и точка O лежит на линии действия этой равнодействующей. Если приводить заданную систему сил к этой точке, то получим, что главный момент равен нулю.

Возьмем какой-либо другой центр приведения O_1; тогда

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_k). \tag{7.10}$$

С другой стороны, на основании формулы (4.14) имеем

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_O) = \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_O), \tag{7.11}$$

так как $\mathbf{M}_O = 0$. Сравнивая выражения (7.10) и (7.11) и учитывая, что в данном случае $\mathbf{F}_O = \mathbf{R}$, получаем

$$\mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{F}_k). \tag{7.12}$$

Таким образом, теорема доказана.

Пусть при каком-либо выборе центра приведения $\mathbf{F}_O = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$. Так как главный вектор не зависит от центра приведения, то он равен нулю и при любом другом выборе центра приведения. Поэтому главный момент тоже не меняется при перемене центра приведения, и, следовательно, в этом случае система сил приводится к паре сил с моментом, равным $\mathbf{M}_O$.

Составим теперь таблицу всех возможных случаев приведения пространственной системы сил:

	$I_2 = \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{M}_O$	$\mathbf{F}_O$	$\mathbf{M}_O$	Случай приведения
1	$I_2 \neq 0$	$\mathbf{F}_O \neq 0$	$\mathbf{M}_O \neq 0$	Динамический винт
2	$I_2 = 0$	$\mathbf{F}_O \neq 0$	$\mathbf{M}_O \neq 0$ $\mathbf{M}_O = 0$	Равнодействующая
3	$I_2 = 0$	$\mathbf{F}_O = 0$	$\mathbf{M}_O \neq 0$	Пара сил
4	$I_2 = 0$	$\mathbf{F}_O = 0$	$\mathbf{M}_O = 0$	Система сил эквивалентна нулю

Если все силы находятся в одной плоскости, например в плоскости Oxy, то их проекции на ось z и моменты относительно осей x и y будут равны нулю. Следовательно,

$$F_z = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = 0.$$

Внося эти значения в формулу (7.5), найдем, что второй инвариант плоской системы сил равен нулю.

Тот же результат мы получим и для пространственной системы параллельных сил. Действительно, пусть все силы параллельны оси z. Тогда проекции их на оси x и y и моменты относительно оси z будут равны нулю. Отсюда

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad M_{Oz} = 0.$$

Пользуясь снова формулой (7.5), найдем $I_2 = 0$.

На основании доказанного можно утверждать, что *плоская система сил и система параллельных сил в пространстве не приводятся к динамическому винту*.

Задача 7.1. Систему двух сил $P_1 = 8$ Н и $P_2 = 12$ Н, направленных параллельно осям x и y, как указано на рис. 7.4, *а* (расстояние между точками приложения сил равно 1,3 м), требуется привести к динаме, определив главный вектор и

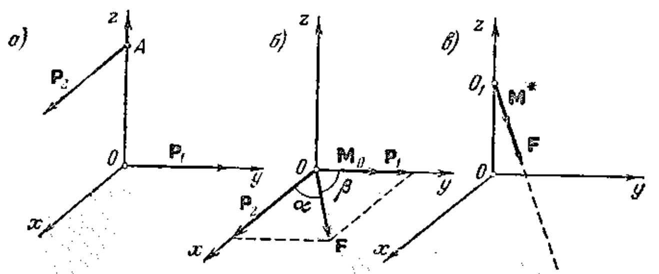


Рис. 7.4

главный момент динамы. Найти углы α, β и γ, составляемые центральной осью системы с координатными осями, а также уравнение центральной оси.

Возьмем за центр приведения начало координат O. Проекции главного вектора $\mathbf{F}$ на оси координат будут

$$F_x = P_2 = 12 \text{ Н}, \quad F_y = P_1 = 8 \text{ Н}, \quad F_z = 0.$$

Модуль главного вектора

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 14{,}4 \text{ Н}.$$

Направляющие косинусы главного вектора равны

$$\cos\alpha = F_x/F = 0{,}834, \quad \cos\beta = F_y/F = 0{,}555, \quad \cos\gamma = F_z/F = 0.$$

Найдем проекции главного момента на оси координат:

$$M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = OA \cdot P_2 = 15{,}6 \text{ Н·м}, \quad M_{Oz} = 0.$$

На рис. 7.4, *б* показано расположение главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}_O$ для центра приведения O.

Проекцию главного момента на направление главного вектора определим по формуле

$$M^* = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_O)/F = F_y M_{Oy}/F = (8 \cdot 15{,}6)/14{,}4 = 8{,}66 \text{ Н·м}.$$

Уравнение центральной оси (7.8) имеет вид

$$\frac{8z}{12}=\frac{15,6-12z}{8}=\frac{-8x+12y}{0}.$$

Отсюда следует, что центральная ось является линией пересечения плоскостей

$$z=0,9, \quad y={}^2/_3x.$$

На рис. 7.4, *в* показано расположение этой оси ($OO_1=0,9$ м).

Задача 7.2. По ребрам куба со стороной a действуют двенадцать равных по модулю сил, как показано на рис. 7.5, *а*. Привести систему к простейшему виду.

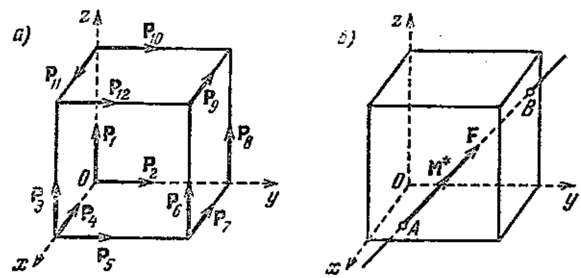


Рис. 7.5

За центр приведения возьмем начало координат O и вычислим проекции главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента на координатные оси. Имеем

$$F_x=-2P, \quad F_y=4P, \quad F_z=4P, \quad M_x=0, \quad M_y=-2Pa, \quad M_z=4Pa,$$

где P — общее значение модуля заданных сил.

По формулам (7.4) и (7.5) найдем значения статических инвариантов

$$I_1=36P^2, \quad I_2=8P^2a.$$

Так как второй инвариант положителен, то система сил приводится к правому динамическому винту (главный вектор $\mathbf{F}$ и момент $\mathbf{M}^*$ направлены в одну сторону). Модуль момента M^* найдем по формуле (7.6):

$$M^*=I_2/\sqrt{I_1}={}^4/_3Pa.$$

Напишем уравнение центральной оси (7.8):

$$\frac{-(y\cdot 4P-z\cdot 4P)}{-2P}=\frac{-2Pa-[z(-2P)-x\cdot 4P]}{4P}=\frac{4Pa-[x\cdot 4P-y(-2P)]}{4P}.$$

Отсюда видно, что центральная ось системы представляет линию пересечения плоскостей

$$2x-4y+5z=a, \quad 2x+5y-4z=2a.$$

Подставляя в эти уравнения сначала $z=0$, а затем $y=a$, найдем точки пересечения центральной оси с нижней и боковой гранями куба (рис. 7.5, *б*)

$$x_A=\frac{13}{18}a, \quad y_A=\frac{a}{9}, \quad z_A=0, \quad x_B=\frac{5}{8}a, \quad y_B=a, \quad z_B=\frac{8}{9}a.$$

Таким образом, динамический винт, эквивалентный данной системе сил, состоит из силы $\mathbf{F}$, модуль которой равен $F=\sqrt{I_1}=6P$, и пары сил с моментом $\mathbf{M}^*$, коллинеарным силе $\mathbf{F}$ и численно равным $M^*={}^4/_3Pa$. Центральная ось и составляющие динамического винта показаны на рис. 7.5, *б*.

§ 7.3. Уравнения равновесия пространственной системы сил

Как было выяснено в § 4.4, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, можно записать в виде трех уравнений проекций (4.16) и трех уравнений моментов (4.17):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0, \tag{7.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k)=0. \tag{7.14}$$

Если тело полностью закреплено, то действующие на него силы находятся в равновесии и уравнения (7.13) и (7.14) служат для определения опорных реакций. Конечно, могут встретиться случаи, когда этих уравнений недостаточно для определения опорных реакций; такие статически неопределимые системы мы рассматривать не будем.

Для пространственной системы параллельных сил уравнения равновесия принимают следующий вид (§ 4.4) *):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k)=0. \tag{7.15}$$

Рассмотрим теперь случаи, когда тело закреплено лишь частично, т. е. связи, которые наложены на тело, не гарантируют равновесия тела. Можно указать четыре частных случая.

1. Твердое тело имеет одну неподвижную точку. Иначе говоря, оно прикреплено к неподвижной точке при помощи идеального сферического шарнира.

Поместим в эту точку (см. точку A на рис. 7.6, a) начало неподвижной системы координат. Действие связи в точке A заменим реакцией; так как она неизвестна по модулю и направлению, то мы ее представим в виде трех неизвестных составляющих X_A, Y_A, Z_A, направленных соответственно вдоль осей x, y, z.

Уравнения равновесия (7.13) и (7.14) в этом случае запишутся в таком виде:

$$1)\ X_A+\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0, \quad 2)\ Y_A+\sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad 3)\ Z_A+\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0,$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k)=0, \quad 5)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k)=0, \quad 6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k)=0. \tag{7.16}$$

Последние три уравнения не содержат составляющих реакции, так как линия действия этой силы проходит через точку A. Следовательно, эти уравнения устанавливают зависимости между актив-

*) Предполагается, что линии действия сил параллельны оси z.

ными силами, необходимые для равновесия тела, причем три первых уравнения могут быть использованы для определения составляющих реакции.

Таким образом, *условием равновесия твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, является равенство нулю каждой из алгебраических сумм моментов всех активных сил системы относительно трех осей, пересекающихся в неподвижной точке тела.*

2. Тело имеет две неподвижные точки. Это, например, будет иметь место, если оно прикреплено к двум неподвижным точкам при помощи шарниров (рис. 7.6, *б*).

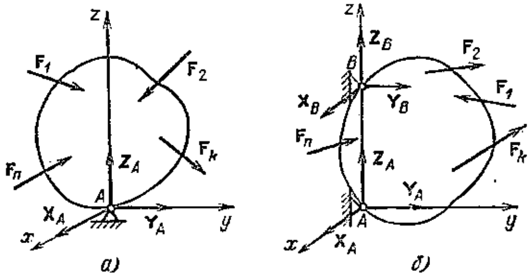


Рис. 7.6

Выберем начало координат в точке A и направим ось z вдоль линии, проходящей через точки A и B. Заменим действие связей реакциями, направив составляющие реакций вдоль координатных осей (рис. 7.6, *б*). Обозначим расстояние между точками A и B через a; тогда уравнения равновесия (7.13) и (7.14) запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}
1)\ X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad 2)\ Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\
3)\ Z_A + Z_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \\
4)\ -aY_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = 0, \quad 5)\ aX_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = 0, \\
6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.
\end{gathered} \tag{7.17}$$

Последнее уравнение не содержит составляющих сил реакций и устанавливает связь между активными силами, необходимую для равновесия тела. Следовательно, *условием равновесия твердого тела, имеющего две неподвижные точки, является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех активных сил, приложенных к телу, относительно оси, проходящей через неподвижные точки.* Первые пять уравнений служат для определения неизвестных составляющих реакций X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B.

Заметим, что составляющие Z_A и Z_B не могут быть определены в отдельности. Из третьего уравнения определяется только сумма $Z_A + Z_B$, и, следовательно, задача в отношении каждого из этих неизвестных для твердого тела является статически неопределенной. Однако, если в точке B находится не сферический, а цилиндрический шарнир (т. е. подшипник), не препятствующий продольному скольжению тела вдоль оси вращения, то $Z_B = 0$ и задача становится статически определенной.

3. Тело имеет неподвижную ось вращения, вдоль которой оно может скользить без трения. Это значит, что в точках A и B находятся цилиндрические шарниры (подшипники), причем составляющие их реакций вдоль оси вращения равны нулю.

Следовательно, уравнения равновесия примут вид

$$
\begin{aligned}
&1)\ X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\\
&2)\ Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\\
&3)\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad\qquad (7.18)\\
&4)\ -aY_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = 0,\\
&5)\ aX_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = 0,\\
&6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.
\end{aligned}
$$

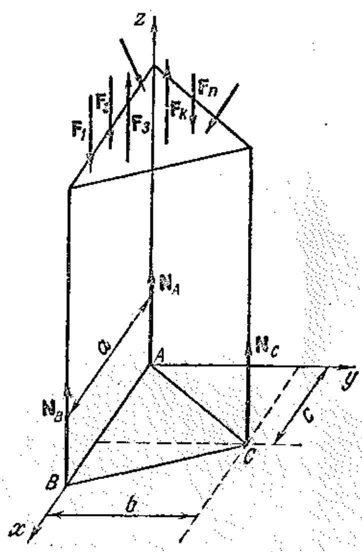


Рис. 7.7

Два из уравнений (7.18), а именно третье и шестое, накладывают ограничения на систему активных сил, а остальные уравнения служат для определения реакций.

4. Тело опирается в трех точках на гладкую плоскость, причем точки опоры не лежат на одной прямой. Обозначим эти точки через A, B и C и совместим с плоскостью ABC координатную плоскость Axy (рис. 7.7). Заменив действие связей вертикальными реакциями $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$ и $\mathbf{N}_C$, запишем условия равновесия (7.13) и (7.14) в таком виде:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad 2)\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} + N_A + N_B + N_C = 0, \quad 4)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) - bN_C = 0, \quad (7.19)$$

$$5)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) - aN_B - cN_C = 0, \quad 6)\ \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Третье — пятое уравнения могут служить для определения неизвестных реакций, а первое, второе и шестое уравнения представляют собой условия, связывающие активные силы и необходимые для равновесия тела. Конечно, для равновесия тела необходимо выполнение условий $N_A \geqslant 0$, $N_B \geqslant 0$, $N_C \geqslant 0$, так как в точках опоры могут возникнуть только реакции принятого выше направления.

Если тело опирается на горизонтальную плоскость более чем в трех точках, то задача становится статически неопределенной, так как при этом реакций будет столько, сколько точек, а уравнений для определения реакций остается по-прежнему только три.

§ 7.4. Задачи

Задача 7.3. Найти главный вектор и главный момент системы сил, изображенной на рис. 7.8, *а*; силы приложены к вершинам куба и направлены вдоль его ребер, причем $F_1 = F_2 = F_3 = P$, $F_4 = F_5 = F_6 = 3P$. Длина ребра куба равна a.

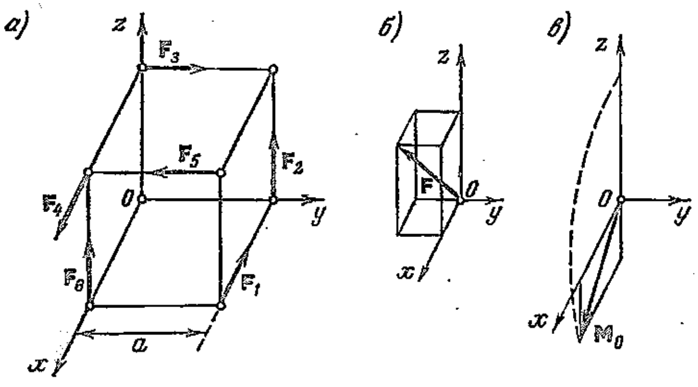


Рис. 7.8

Проекции главного вектора находим по формулам (4.4):

$$F_x = -P + 3P = 2P, \qquad F_y = P - 3P = -2P, \qquad F_z = P + 3P = 4P.$$

Его модуль равен $F = \sqrt{(2P)^2 + (2P)^2 + (4P)^2} = 4{,}9P$. Направляющие косинусы будут

$$\cos(x, \mathbf{F}) = \frac{2P}{4{,}9P} = 0{,}407, \qquad \angle x, \mathbf{F} \approx 66^\circ,$$

$$\cos(y, \mathbf{F}) = -\frac{2P}{4{,}9P} = -0{,}407, \qquad \angle y, \mathbf{F} \approx 114^\circ,$$

$$\cos(z, \mathbf{F}) = \frac{4P}{4{,}9P} = 0{,}814, \qquad \angle z, \mathbf{F} \approx 35^\circ 30'.$$

Главный вектор изображен на рис. 7.8, *б*.

Далее находим проекции главного момента по формулам (4.7):

$$M_{Ox} = F_2a - F_3a + F_5a = 3Pa, \qquad M_{Oy} = F_4a - F_6a = 0,$$

$$M_{Oz} = F_1a - F_5a = -2Pa,$$

а модуль главного момента по формуле (4.8)

$$M_O = \sqrt{(3Pa)^2 + (2Pa)^2} \approx 3{,}6Pa.$$

Теперь определим направляющие косинусы главного момента:

$$\cos(x,\ \mathbf{M}_O) = \frac{3Pa}{3{,}6Pa} = 0{,}833, \qquad \angle\, x,\ \mathbf{M}_O = 33°40',$$

$$\cos(y,\ \mathbf{M}_O) = 0, \qquad \angle\, y,\ \mathbf{M}_O = 90°,$$

$$\cos(z,\ \mathbf{M}_O) = -\frac{2Pa}{3{,}6Pa} = -0{,}555, \qquad \angle\, z,\ \mathbf{M}_O = 123°40'.$$

Главный момент изображен на рис. 7.8, *в*. Угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}_O$ вычисляется по формуле (4.11)

$$\cos(\mathbf{F},\ \mathbf{M}_O) = 0{,}407 \cdot 0{,}833 - 0{,}407 \cdot 0 - 0{,}814 \cdot 0{,}555 = -0{,}112.$$

Следовательно, угол между этими векторами равен 96° 30′.

Задача 7.4. Жесткая конструкция, имеющая форму параллелепипеда $ABCDEFGH$, прикреплена к основанию шаровым шарниром A и тремя стержнями *1*,

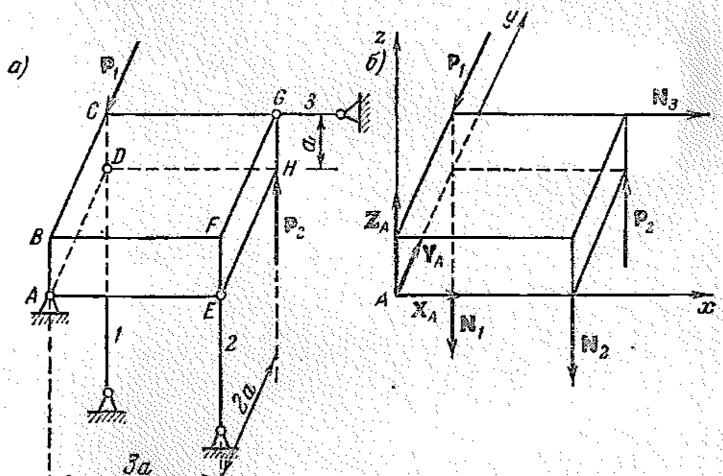


Рис. 7.9

2 и *3*. Определить реакцию шарнирной опоры и усилия в стержнях, если задана нагрузка в виде двух сил $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, причем $P_1 = P$, $P_2 = 2P$. Весом конструкции пренебречь. Размеры указаны на чертеже (рис. 7.9, *а*).

Усилия в стержнях обозначим через $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ и $\mathbf{N}_3$; реакцию шарнира представим в виде трех составляющих $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$ и $\mathbf{Z}_A$. Соответствующая схема сил изображена на рис. 7.9, *б*. Выбрав координатную систему, как указано на чертеже, составим уравнения равновесия в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + N_3 = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_A - N_1 - N_2 + 2P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = -N_1 \cdot 2a + Pa + 2P \cdot 2a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = +N_2 \cdot 3a + N_3 a - 2P \cdot 3a = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -N_3 \cdot 2a = 0.$$

Число уравнений равно числу неизвестных, т. е. рассматриваемая задача статически определенная. Решив полученную систему уравнений, найдем значения усилий

$$N_1 = {}^5/_2 P, \quad N_2 = 2P, \quad N_3 = 0$$

и составляющие реакции шарнира

$$X_A = 0, \quad Y_A = P, \quad Z_A = {}^5/_2 P.$$

Задача 7.5. Прямоугольная пластинка тремя ножками опирается на гладкий пол (рис. 7.10). Сила тяжести **P** пластинки приложена в ее центре. Размеры указаны на рисунке. В точке с координатами x и y к пластинке приложена вертикальная сила **Q**. Определить область, внутри которой можно брать точки приложения силы **Q**, чтобы пластинка не опрокинулась. Определить также, при каком соотношении между модулями сил **P** и **Q** вся поверхность пластинки будет безопасной.

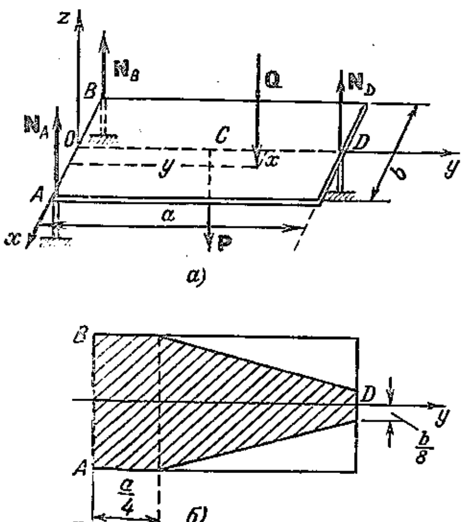


Рис. 7.10

Заменяя действие пола вертикальными реакциями $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{N}_B$, $\mathbf{N}_D$, составим уравнения равновесия. Так как все силы, действующие на пластинку, параллельны, то можно воспользоваться уравнениями (7.15):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = N_A + N_B + N_D - Q - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = -Qy - P\frac{a}{2} + N_D a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) = -N_A\frac{b}{2} + N_B\frac{b}{2} + Qx = 0.$$

Отсюда

$$N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2}, \qquad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2},$$

$$N_D = \frac{Q}{a}y + \frac{P}{2}.$$

Для того чтобы пластинка не опрокинулась, необходимо выполнение условий

$$N_A \geqslant 0, \quad N_B \geqslant 0.$$

Границы искомой области найдем из условий

$$N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2} = 0, \quad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2} = 0.$$

Отсюда находим

$$y = \frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a, \quad y = -\frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a.$$

На рис. 7.10, *б* искомая область, построенная при $P = Q/2$, заштрихована. При $Q < P/2$ вся поверхность пластинки будет безопасной.

Задача 7.6. Тонкий стержень OA, весом которого можно пренебречь, шарнирно закреплен в точке O и удерживается в горизонтальной плоскости нитями AB и CD (рис. 7.11). Точка C находится в середине стержня OA. На стержень действует вертикальная сила $\mathbf{Q}$, приложенная в точке E стержня. Дано: $\angle AOD = \angle BAK = \alpha$, $OA = l$, $OE = a$, $OD = AK$. Найти натяжение нитей AB и CD.

Стержень OA шарнирно укреплен в точке O; для определения натяжения нитей воспользуемся уравнениями моментов.

Заменяем действие нитей реакциями $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$. Так как имеется лишь две неизвестные величины, то составим уравнения моментов сил, действующих на стержень, только относительно осей x и z:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) = -Qa\sin\alpha + T_2 l\sin\alpha\sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k) = T_2 l\cos\alpha\sin\alpha - T_1 l\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Отсюда следует:

$$T_1 = T_2 = \frac{aQ}{l\sin\alpha}.$$

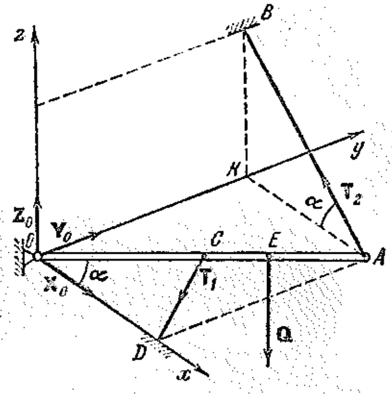


Рис. 7.11

Мы не составляем уравнения моментов относительно оси y, так как оно удовлетворится найденными значениями T_1 и T_2. Это уравнение может служить для проверки решения задачи.

Определив силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, можно найти и реакцию шарнира O. Для этого составим уравнения проекций, заменив действие шарнира реакциями $\mathbf{X}_O$, $\mathbf{Y}_O$, $\mathbf{Z}_O$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_O - T_2\cos\alpha + T_1\cos\alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_O - T_1\sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_O + T_2\sin\alpha - Q = 0.$$

Следовательно,

$$X_O = 0, \quad Y_O = T_1\sin\alpha = \frac{aQ}{l}, \quad Z_O = Q - T_2\sin\alpha = Q\left(1 - \frac{a}{l}\right).$$

Задача 7.7. Прямоугольная пластинка удерживается в горизонтальном положении при помощи петель в точках A и B и однородного стержня DC, имеющего шарниры в точках C и D. Стержень имеет длину l и вес P. Размеры пластинки указаны на рис. 7.12, a, $\angle DCE = \alpha$. Определить реакции в точках A, B, C и D, если сила тяжести $\mathbf{Q}$, действующая на пластинку, приложена в точке с координатами x и y.

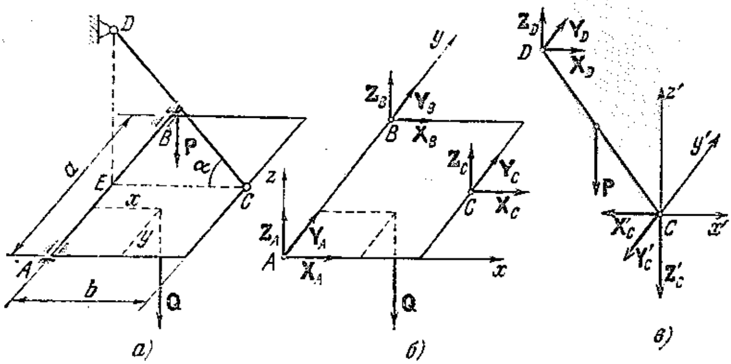


Рис. 7.12

В данном случае мы имеем дело с равновесием двух сочлененных тел: пластинки и стержня.

Рассмотрим каждое тело в отдельности. Заменяя связи в точках A, B и C реакциями $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{Y}_B$, $\mathbf{Z}_B$ и $\mathbf{X}_C$, $\mathbf{Y}_C$, $\mathbf{Z}_C$, составим уравнения равновесия пластинки (рис. 7.12, *б*):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_A + X_B + X_C = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = Y_A + Y_B + Y_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = Z_A + Z_B + Z_C - Q = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = -yQ + Z_C\frac{a}{2} + Z_B a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = xQ - Z_C b = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Az}(\mathbf{F}_k) = -X_C\frac{a}{2} + Y_C b - X_B a = 0.$$

Выбрав систему координат $Cx'y'z'$, составим теперь уравнения равновесия для стержня. Освобождаясь от связей в точках D и C и вводя реакции $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$, $\mathbf{Z}_D$, $\mathbf{X}'_C$, $\mathbf{Y}'_C$, $\mathbf{Z}'_C$ (рис. 7.12, *в*), получим следующие уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx'} = X_D - X'_C = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky'} = Y_D - Y'_D = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz'} = Z_D - Z'_C - P = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Cx'}(\mathbf{F}_k) = -Y_D l \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cy'}(\mathbf{F}_k) = -Pl/_2 \cos\alpha + Z_D l\cos\alpha + X_D l \sin\alpha = 0.$$

Мы не составляли уравнения моментов относительно оси z', так как оно будет содержать только неизвестную Y_D, определяемую из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Cx'}(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Так как $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$, $Z'_C = Z_C$, то

$$X_D = X_C, \quad Y_D = Y_C \quad \text{и} \quad Z_D = Z_C + P.$$

Решая полученные уравнения, найдем:

$$X_A = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_A = Q\left(1 - \frac{y}{a} - \frac{x}{2b}\right),$$

$$X_B = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_B = \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{2b}\right),$$

$$X_C = -\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_C = \frac{Q}{b}x,$$

$$X_D = -\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{b}x\right)\operatorname{ctg}\alpha, \quad Z_D = P + \frac{Q}{b}x,$$

$$Y_A + Y_B = 0, \quad Y_D = 0, \quad Y_C = 0.$$

Как и следовало ожидать, мы не смогли определить реакции Y_A и Y_B, а нашли только их сумму (§ 7.3).

Отметим, что если $P = 0$, то, как легко проверить, реакции шарниров C и D будут направлены вдоль стержня CD.

Задача 7.8. Однородная балка AB длины $2l$ и веса P опирается верхним концом B на угол, образованный двумя вертикальными гладкими взаимно перпендикулярными плоскостями. Нижний конец балки A, находясь на горизонтальной шероховатой плоскости, упирается в прямолинейный выступ DE, отстоящий от оси y на расстоянии $2a$ (рис. 7.13). Пренебрегая поперечными размерами балки, определить, при каком угле α между балкой и горизонтальной плоскостью возможно равновесие, если коэффициент трения между концом A балки и углом, образованным горизонтальной плоскостью и выступом DE, равен f.

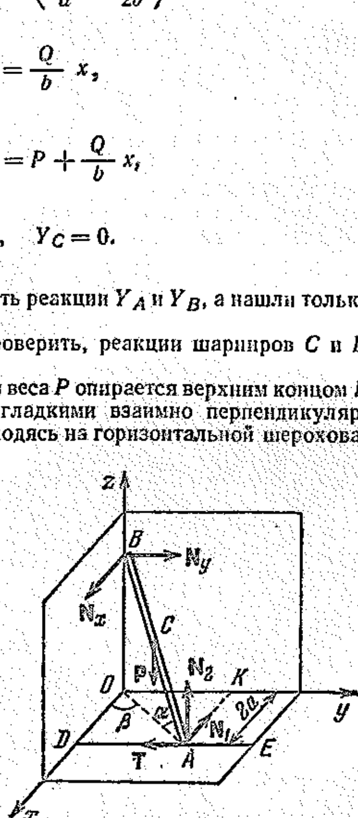


Рис. 7.13

Прежде чем перейти к составлению уравнений равновесия, введем вспомогательный угол β (см. рис. 7.13). Легко видеть, что между углами α и β имеется простая связь. Действительно, отрезок AK по условию равен $2a$; с другой стороны, из прямоугольного треугольника OKA имеем $AK = OA\cos\beta$, а из треугольника OAB найдем $OA = 2l\cos\alpha$. Таким образом, $AK = 2a = 2l\cos\alpha\cos\beta$ или

$$\cos\alpha\cos\beta = a/l. \tag{7.20}$$

Перейдем к рассмотрению сил, действующих на балку. Прежде всего, к ней приложена одна активная сила — сила тяжести $\mathbf{P}$; кроме того, на балку действуют реакции гладких вертикальных стенок $\mathbf{N}_x$ и $\mathbf{N}_y$, нормальные составляющие $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ реакции угла, образованного выступом и горизонтальной плоскостью, и сила трения $\mathbf{T}$ (она направлена влево, так как под действием силы тяжести $\mathbf{P}$ конец балки A стремится переместиться вправо).

При равновесии балки перечисленные силы должны удовлетворять уравнениям равновесия (7.13) и (7.14). Имеем:

$$\sum_k F_{kx}=N_x-N_1=0, \quad \sum_k F_{ky}=N_y-T=0, \quad \sum_k F_{kz}=N_2-P=0,$$

$$\sum_k M_{Ox}(\mathbf{F}_k)=-N_y\cdot 2l\sin\alpha-Pl\cos\alpha\sin\beta+N_2\cdot 2l\cos\alpha\sin\beta=0,$$

$$\sum_k M_{Oy}(\mathbf{F}_k)=N_x\cdot 2l\sin\alpha+Pa-N_2\cdot 2a=0,$$

$$\sum_k M_{Oz}(\mathbf{F}_k)=N_1\cdot 2l\cos\alpha\sin\beta-T\cdot 2a=0.$$

Пользуясь этими уравнениями, легко найдем

$$T=\frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta, \quad N_1=\frac{Pa}{2l\sin\alpha}, \quad N_2=P$$

(другие величины нас не интересуют).

Для того, чтобы балка находилась в равновесии, сила трения должна удовлетворять условию $T\leqslant fN$, где $N=\sqrt{N_1^2+N_2^2}$ — полная нормальная составляющая реакции угла, в который упирается конец балки A. Внося в это неравенство найденные значения для T, N_1 и N_2, получим

$$\frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta\leqslant f\sqrt{\frac{P^2a^2}{4l^2\sin^2\alpha}+P^2},$$

или, возводя в квадрат и сокращая на P^2,

$$\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\beta\leqslant f^2\operatorname{cosec}^2\alpha\frac{a^2}{l^2}+4f^2.$$

Из равенства (7.20) найдем

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{a^2}{l^2}\sec^2\alpha.$$

Внесем это значение для $\sin^2\beta$ в предыдущее неравенство. Тогда после несложных преобразований получим

$$\operatorname{ctg}^2\alpha\leqslant\frac{4l^2f^2+(1+f^2)a^2}{l^2-(1+f^2)a^2}.$$

Таково условие, которому должен удовлетворять угол α, чтобы при заданных условиях балка находилась в равновесии. Как и следовало ожидать, при $a=0$ это условие совпадает с соответствующим неравенством, полученным при решении задачи 6.1 (стр. 84).

Глава VIII

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 8.1. Центр параллельных сил

В этой главе рассматриваются такие системы параллельных сил, которые приводятся к равнодействующей. Прежде всего нужно отметить, что условия приведения системы параллельных сил к равнодействующей сводятся к одному неравенству $\mathbf{F}\neq 0$. Действительно, уже было показано, что второй инвариант системы параллельных сил тождественно равен нулю (стр. 99). Поэтому единственным условием приведения пространственной системы параллельных сил к равнодействующей является неравенство нулю главного вектора этой системы

$$\mathbf{F} \neq 0. \tag{8.1}$$

Считая это условие выполненным, выясним, что происходит с равнодействующей $\mathbf{R}$ при одновременном повороте линий действия данных параллельных сил на один и тот же угол, если точки приложения этих сил сохраняются неизменными и повороты линий действия сил происходят вокруг параллельных осей.

При этих условиях равнодействующая заданной системы сил также одновременно поворачивается на тот же угол, причем поворот происходит вокруг некоторой фиксированной точки, которая называется *центром параллельных сил.* Перейдем к доказательству этого утверждения.

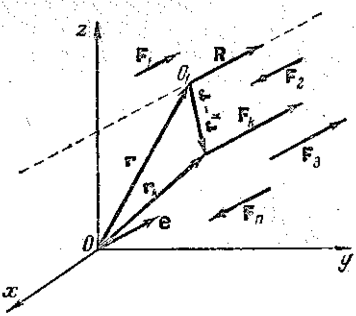


Рис. 8.1

Предположим, что для рассматриваемой системы параллельных сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ главный вектор не равен нулю, следовательно, данная система сил приводится к равнодействующей. Пусть точка O_1 есть какая-либо точка линии действия этой равнодействующей. Пусть теперь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки O_1 относительно выбранного полюса O, а $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{F}_k$ (рис. 8.1).

Согласно теореме Вариньона (§ 7.2) сумма моментов всех сил системы относительно точки O_1 равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_k = 0, \tag{8.2}$$

так как точка O_1 лежит на линии действия равнодействующей.

Полученное равенство можно переписать в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r} \times \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k - \mathbf{r} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0. \tag{8.3}$$

Введем теперь в рассмотрение единичный вектор $\mathbf{e}$, параллельный линиям действия сил. Тогда любая сила $\mathbf{F}_k$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_k = F_k^* \mathbf{e}, \tag{8.4}$$

где $F_k^* = F_k$, если направление силы $\mathbf{F}_k$ и вектора $\mathbf{e}$ совпадают, и $F_k^* = -F_k$, если $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{e}$ направлены противоположно друг другу. Очевидно, что при этом

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \mathbf{e} \sum_{k=1}^{n} F_k^*. \tag{8.5}$$

Подставляя выражения (8.4) и (8.5) в соотношение (8.3), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times F_k^* \mathbf{e} - \mathbf{r} \times \mathbf{e} \sum_{k=1}^{n} F_k^* = 0,$$

откуда

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k F_k^* - \mathbf{r} \sum_{k=1}^{n} F_k^*\right] \times \mathbf{e} = 0. \tag{8.6}$$

Последнее равенство удовлетворяется при любом направлении сил (т. е. направлении единичного вектора $\mathbf{e}$) только при условии, что первый множитель равен нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k F_k^* - \mathbf{r} \sum_{k=1}^{n} F_k^* = 0. \tag{8.7}$$

В свою очередь это равенство имеет единственное решение относительно радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего такую точку приложения равнодействующей, которая не меняет своего положения при повороте линий действия сил. Такой точкой и является центр параллельных сил, чем и доказывается его существование. Обозначив радиус-вектор центра параллельных сил через $\mathbf{r}_c$, из равенства (8.7) получим

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{\mathbf{r}_1 F_1^* + \mathbf{r}_2 F_2^* + \ldots + \mathbf{r}_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}. \tag{8.8}$$

Пусть x_c, y_c, z_c — координаты центра параллельных сил, а x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения произвольной силы $\mathbf{F}_k$; тогда координаты центра параллельных сил найдутся из формул:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{x_1 F_1^* + x_2 F_2^* + \ldots + x_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*},$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{y_1 F_1^* + y_2 F_2^* + \ldots + y_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}, \tag{8.9}$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*} = \frac{z_1 F_1^* + z_2 F_2^* + \ldots + z_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \ldots + F_n^*}.$$

Выражения

$$\sum_{k=1}^{n} x_k F_k^*, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k F_k^*, \quad \sum_{k=1}^{n} z_k F_k^*$$

называются *статическими моментами* заданной системы сил соответственно относительно координатных плоскостей yOz, xOz, xOy.

Отметим, что если начало координат выбрано в центре параллельных сил, то

$$x_c = y_c = z_c = 0,$$

и статические моменты заданной системы сил равны нулю.

§ 8.2. Центр тяжести

Тело произвольной формы, находящееся в поле сил тяжести, можно разбить сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объемы (рис. 8.2). Если пренебречь размерами тела по сравнению с радиусом Земли, то силы тяжести, действующие на каждый элементарный объем, можно считать параллельными друг другу. Обозначим через ΔV_k объем элементарного параллелепипеда с центром в точке M_k (см. рис. 8.2), а силу тяжести, действующую на этот элемент, — через $\Delta \mathbf{P}_k$. Тогда средним удельным весом элемента объема называется отношение $\Delta P_k / \Delta V_k$. Стягивая параллелепипед в точку M_k, получим удельный вес в данной точке тела, как предел среднего удельного веса

$$\gamma(x_k, y_k, z_k) = \lim_{\Delta V_k \to 0} \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}. \qquad (8.10)$$

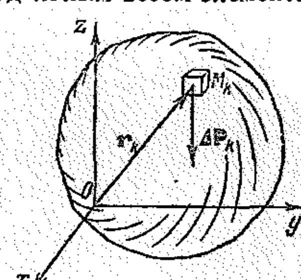


Рис. 8.2

Таким образом, удельный вес является функцией координат, т. е. $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Будем считать, что вместе с геометрическими характеристиками тела задан также и удельный вес в каждой точке тела.

Вернемся к разбиению тела на элементарные объемы. Если исключить объемы тех элементов, которые граничат с поверхностью тела, то можно получить ступенчатое тело, состоящее из совокупности параллелепипедов. Приложим к центру каждого параллелепипеда силу тяжести $\Delta P_k = \gamma_k \Delta V_k$, где γ_k — удельный вес в точке тела, совпадающей с центром параллелепипеда. Для системы n параллельных сил тяжести, образованной таким образом, можно найти центр параллельных сил

$$\mathbf{r}^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \, \Delta P_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta P_k} = \frac{\mathbf{r}_1 \, \Delta P_1 + \mathbf{r}_2 \, \Delta P_2 + \ldots + \mathbf{r}_n \, \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \ldots + \Delta P_n}. \qquad (8.11)$$

Формула (8.11) определяет положение некоторой точки C_n. *Центром тяжести* называется точка, являющаяся предельной для точек C_n при $n \to \infty$. Другими словами, центром тяжести тела называется такая точка, радиус-вектор которой определяется следующим пределом:

$$\mathbf{r}_c = \lim_{n\to\infty} \mathbf{r}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \,\Delta P_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta P_k} \tag{8.12}$$

или, переходя к удельному весу,

$$\mathbf{r}_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \mathbf{r}_k \,\Delta V_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \mathbf{r}_k \,\Delta V_k}{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \,\Delta V_k}. \tag{8.13}$$

При таком предельном переходе предполагается, что размеры всех параллелепипедов стремятся к нулю. Пределы знаменателей в формулах (8.12) и (8.13) равны весу тела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta P_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \,\Delta V_k = P.$$

Поскольку пределы интегральных сумм в числителе и знаменателе формулы (8.13) представляют собой определенные интегралы, распространенные по объему тела, то $\mathbf{r}_c$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, \mathbf{r}\, dx\, dy\, dz.$$

Координаты центра тяжести определяются формулами

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} x\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\ y_c &= \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} y\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\ z_c &= \frac{1}{P} \iiint\limits_{(V)} z\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Тело называется *однородным*, если $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$. В этом случае величина γ выносится в формулах (8.14) за знаки интегралов в числителе и знаменателе и сокращается. Знаменатели в формулах (8.14) после сокращения их на γ равны объему тела V. Таким образом, получим

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz,$$
$$z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz. \tag{8.15}$$

Центр тяжести однородного тела часто называют *центром тяжести объема.*

В ряде случаев тело можно считать тонкой пластиной или оболочкой (рис. 8.3, *а*).

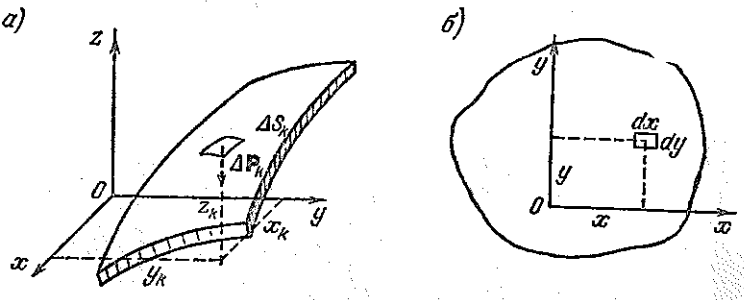


Рис. 8.3

Найдем центр тяжести однородной оболочки, предполагая, что вес элемента ее поверхности пропорционален площади этого элемента

$$\Delta P_k = \gamma' \Delta S_k$$

и, следовательно, вес тела $P = \gamma' S$ (S — площадь рассматриваемой части поверхности).

Из определения центра тяжести в соответствии с формулами (8.15) получим при $\gamma' = \text{const}$

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} x\,dS, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} y\,dS, \quad z_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} z\,dS. \tag{8.16}$$

Центр тяжести однородной оболочки называют *центром тяжести поверхности.*

Как следует из формул (8.16), определение координат центра тяжести поверхности связано с вычислением интегралов по поверхности.

Для плоской однородной пластины (рис. 8.3, *б*) получим

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy. \tag{8.17}$$

Наконец, рассмотрим криволинейный стержень — тело удлиненной формы, один из характерных размеров которого значительно больше двух других (рис. 8.4). Полагая, что вес элемента такого стержня, заключенного между двумя сечениями, нормальными к его оси, пропорционален длине Δl дуги этой оси, получим

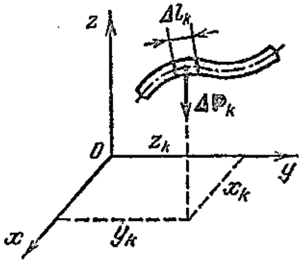


Рис. 8.4

$$\Delta P_k = \gamma''\Delta l_k, \quad P = \gamma'' L,$$

где L — длина стержня.

Величину γ'' называют «погонным» весом. При сделанном предположении γ'' — величина постоянная. Тогда в соответствии с формулами (8.15) координаты центра тяжести однородного стержня имеют вид

$$x_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x\,dl, \quad y_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y\,dl, \quad z_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z\,dl. \tag{8.18}$$

Центр тяжести однородного криволинейного стержня называют *центром тяжести линии*.

§ 8.3. Методы нахождения центра тяжести

Во многих случаях центр тяжести тела можно определить с помощью весьма простых методов. Мы рассмотрим некоторые из них.

Симметрия. Если тело однородно и имеет плоскость симметрии (рис. 8.5, *а*), то задача определения центра тяжести несколько упрощается. Совместим с этой плоскостью симметрии координатную плоскость xOy. Тогда каждому элементу объема тела ΔV_k, положение которого определяется координатами x_k, y_k, z_k, будет соответствовать элемент объема тела ΔV_j с координатами x_j, y_j, z_j, причем

$$\Delta V_j = \Delta V_k, \quad x_j = x_k, \quad y_j = y_k, \quad z_j = -z_k.$$

Следовательно,

$$z_c = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\,\Delta V_k}{V} = 0,$$

так как в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\Delta V_k$ все члены попарно уничтожаются.

Поэтому, *если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.*

Пусть, далее, однородное тело имеет ось симметрии. Выберем эту ось за ось z (рис. 8.5, *б*); тогда каждому элементу объема тела ΔV_k с координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать элемент объема тела ΔV_j с координатами x_j, y_j, z_j, причем

$$\Delta V_j = \Delta V_k, \quad x_j = -x_k, \quad y_j = -y_k, \quad z_j = z_k.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{1}{V} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta V_k = 0, \quad y_c = \frac{1}{V} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta V_k = 0,$$

так как в суммах $\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta V_k$ и $\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta V_k$ все члены попарно уничтожаются.

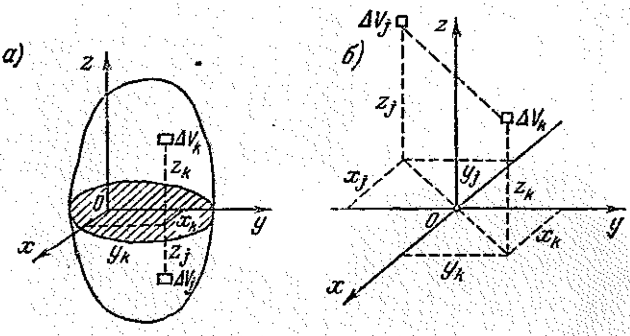


Рис. 8.5

Таким образом, *если однородное тело имеет ось симметрии, то его центр тяжести лежит на этой оси.*

Аналогично можно показать, что если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела будет совпадать с этой точкой. Так, например, для пластинки, имеющей прямоугольную форму, центр тяжести лежит в центре прямоугольника.

Разбиение. Иногда представляется возможным разбить тело на такие части, для которых вес и положение центра тяжести заранее известны. Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ — радиусы-векторы центра тяжести каждой части, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — веса соответствующих частей. Из формулы (8.8) следует, что

$$\mathbf{r}_c = \frac{P_1\mathbf{r}_1 + P_2\mathbf{r}_2 + \ldots + P_n\mathbf{r}_n}{P}, \tag{8.19}$$

где

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n.$$

Для однородной пластинки, например, из формулы (8.19) следует

$$x_c = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x_k S_k, \quad y_c = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} y_k S_k, \tag{8.20}$$

где S_k — площади частей плоской фигуры; x_k, y_k — координаты центров тяжести этих частей.

Задача 8.1. Способом разбиения найти координаты центра тяжести площади поперечного сечения неравнобокого угольника, размеры которого указаны на рис. 8.6.

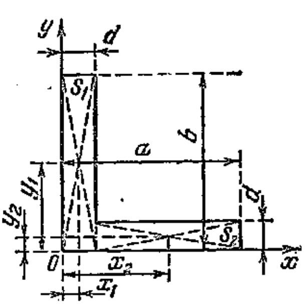


Рис. 8.6

Разобьем угольник на два прямоугольника, площади которых равны

$$S_1 = bd, \quad S_2 = (a-d)\,d.$$

На основании (8.20) формулы для координат центра тяжести угольника имеют вид

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2}{S_1+S_2}, \quad y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2}{S_1+S_2},$$

где x_1, y_1 — координаты центра тяжести первого прямоугольника, а x_2, y_2 — координаты центра тяжести второго прямоугольника. Очевидно, что

$$x_1 = \frac{d}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2}, \quad x_2 = d + \frac{a-d}{2}, \quad y_2 = \frac{d}{2}.$$

Таким образом, получим координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\frac{d}{2}bd + \left(d + \frac{a-d}{2}\right)d\,(a-d)}{bd + d\,(a-d)} = \frac{a^2 + bd - d^2}{2\,(a+b-d)},$$

$$y_c = \frac{\frac{b}{2}bd + \frac{d}{2}\,(a-d)\,d}{bd + d\,(a-d)} = \frac{b^2 + ad - d^2}{2\,(a+b-d)}.$$

Отрицательные веса. Этот способ применяют при нахождении центра тяжести тела, имеющего свободные (т. е. пустые) полости. Пусть дано тело, у которого имеется k свободных полостей (рис. 8.7), причем P_c — вес тела, $\mathbf{r}_c$ — искомый радиус-вектор, определяющий положение центра тяжести этого тела.

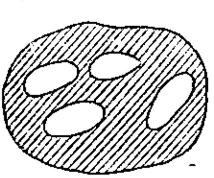


Рис. 8.7

Если бы тело не имело полостей, то его вес P, очевидно, равнялся бы сумме

$$P = P_c + P_1 + P_2 + \ldots + P_k,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — веса частей тела, которыми мы мысленно заполняем полости.

Обозначим через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение центра тяжести тела, не имеющего полостей, а через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k$ — радиусы-векторы, определяющие соответственно центры тяжести частей тела, заполняющих полости. На основании формулы (8.19) для тела, не имеющего полостей, можно записать

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_c P_c+\mathbf{r}_1 P_1+\mathbf{r}_2 P_2+\ldots+\mathbf{r}_k P_k}{P_c+P_1+P_2+\ldots+P_k}.$$

Находя из этой формулы радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра тяжести тела, имеющего полости, получим

$$\mathbf{r}_c=\frac{\mathbf{r}P-\mathbf{r}_1 P_1-\mathbf{r}_2 P_2-\ldots-\mathbf{r}_k P_k}{P-P_1-P_2-\ldots-P_k}. \quad (8.21)$$

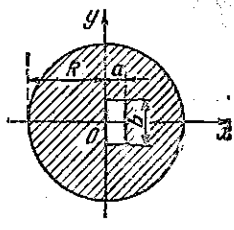


Рис. 8.8

Таким образом, при нахождении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять способ разбиения, но считать, что полости имеют отрицательные веса.

Задача 8.2. Найти центр тяжести однородной круглой пластинки радиуса R, у которой вырезано отверстие в виде прямоугольника со сторонами a и b (рис. 8.8), использовав способ отрицательных весов.

Пластинка симметрична относительно оси x; следовательно, $y_c=0$. Остается найти лишь одну координату x_c.

Согласно (8.21) будем иметь

$$x_c=\frac{Sx-S_1x_1}{S-S_1},$$

где $S=\pi R^2$, $S_1=ab$, $x=0$, $x_1=a/2$. Таким образом,

$$x_c=\frac{-aba/2}{\pi R^2-ab}=-\frac{a^2b}{2(\pi R^2-ab)}.$$

§ 8.4. Центры тяжести простейших фигур

Центр тяжести треугольника. Воспользуемся способом разбиения и разделим треугольник ABC (рис. 8.9) на элементарные полоски, проведя линии, параллельные стороне AC треугольника. Каждую такую полоску можно принять за прямоугольник; центры тяжести этих прямоугольников находятся в их серединах, т. е. на медиане BD треугольника. Следовательно, центр тяжести треугольника должен лежать на этой же медиане BD.

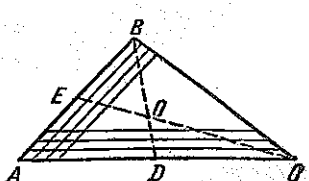


Рис. 8.9

Разбивая теперь треугольник на элементарные полоски линиями, параллельными стороне AB, заключаем, что центр тяжести треугольника должен быть расположен на медиане EC.

Следовательно, центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Эта точка, как известно, делит каждую из медиан на отрезки в отношении $1:2$, т. е. $OD:OB=1:2$.

Центр тяжести трапеции. Аналогично предыдущему, разобьем трапецию $ABCD$ (рис. 8.10) на элементарные полоски, параллельные основаниям BC и AD. Центры тяжести полосок расположатся на прямой KL, соединяющей середины оснований трапеции. Следовательно, и центр тяжести трапеции лежит на этой прямой. Для того чтобы найти его расстояние y_G от нижнего основания, разобьем трапецию на треугольники ABC и ACD. Для этих треугольников соответственно имеем

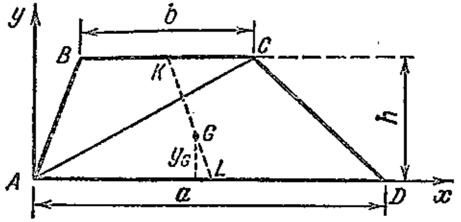


Рис. 8.10

$$y_1 = \frac{2}{3}h, \quad S_1 = \frac{bh}{2},$$

$$y_2 = \frac{1}{3}h, \quad S_2 = \frac{ah}{2}.$$

Используя формулу (8.20), получаем

$$y_G = \frac{y_1S_1 + y_2S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h\,(a+2b)}{3\,(a+b)}.$$

Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу ADB окружности радиуса R с центральным углом 2α. Поместим начало координат в центре окружности и направим ось x перпендикулярно хорде AB (рис. 8.11, *а*).

Так как вследствие симметрии фигуры относительно оси x центр тяжести будет лежать на этой оси x, т. е. $y_c = 0$, то остается найти

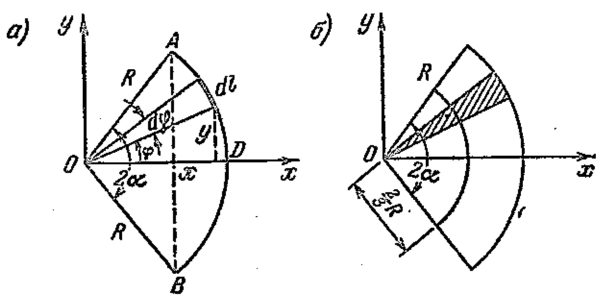


Рис. 8.11

только абсциссу центра тяжести x_c; для этого воспользуемся формулой (8.18). Согласно рис. 8.11, *а* имеем $x = R\cos\varphi$, $dl = R\,d\varphi$, $l = 2R\alpha$ и, следовательно,

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\varphi\, d\varphi}{2\alpha R} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}, \tag{8.22}$$

где α — половина центрального угла в радианах.

В частности, для дуги полуокружности ($\alpha = \pi/2$) будем иметь

$$x_c = 2R/\pi.$$

Центр тяжести кругового сектора. Для определения положения центра тяжести кругового сектора разобьем его на элементарные секторы, как показано на рис. 8.11, *б*. Каждый элементарный сектор можно принять за равнобедренный треугольник с высотой, равной R. Но высота в равнобедренном треугольнике является также и медианой; следовательно, центр тяжести каждого элементарного треугольника лежит на расстоянии $^2/_3 R$ от начала координат O. Соответственно геометрическим местом центров тяжести всех элементарных треугольников является дуга окружности радиуса $^2/_3 R$.

Это означает, что центр тяжести площади кругового сектора можно искать как центр тяжести материальной линии, по которой непрерывно и равномерно распределен вес этого сектора. Применив формулу (8.22), получим координату центра тяжести площади сектора

$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \tag{8.23}$$

где α — половина центрального угла в радианах. В частности, для сектора в виде полукруга ($\alpha = \pi/2$) получим

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}. \tag{8.24}$$

Задача 8.3. Пластинка, изображенная на рис. 8.12, получена из квадрата, сторона которого равна a, после того как из него была вырезана часть, составляющая четверть круга радиуса a с центром в вершине A квадрата. Определить центр тяжести пластинки.

Ось x проведем по диагонали квадрата, взяв начало оси в вершине A. Так как ось x является осью симметрии пластинки, то центр тяжести ее находится на этой оси. Площадь квадрата без выреза $S = a^2$, абсцисса его центра тяжести $x = a\sqrt{2}/2$; площадь вырезанной части $S_1 = \pi a^2/4$, абсцисса центра тяжести ее определяется формулой (8.23), в которой $R = a$, $\alpha = \pi/4$:

$$x_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a.$$

Центр тяжести пластинки определим по формуле

$$x_c = \frac{Sx - S_1 x_1}{S - S_1}$$

или, подставляя соответствующие величины,

$$x_c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{a}{4-\pi} \approx 1{,}09a.$$

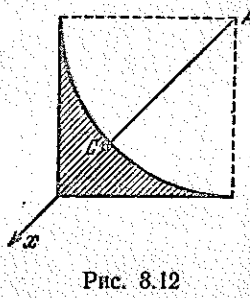


Рис. 8.12

На рис. 8.12 показан центр тяжести пластинки заданной конфигурации.

Приведем без вывода формулы, определяющие положения центров тяжести некоторых простейших однородных тел.

Поверхность шарового сегмента (рис. 8.13)

$$x_c = R - \frac{h}{2}. \tag{8.25}$$

Пирамида и конус (рис. 8.14).

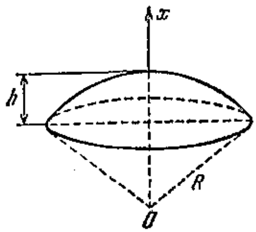


Рис. 8.13

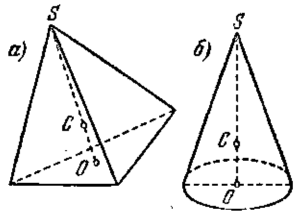


Рис. 8.14

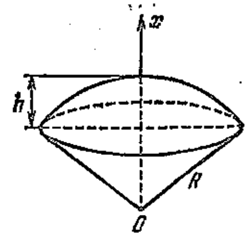


Рис. 8.15

Центр тяжести находится на прямой, соединяющей вершину с центром тяжести P площади основания, на расстоянии $^1/_4$ ее длины, считая от основания

$$OC = {}^1/_4 OS. \tag{8.26}$$

Рис. 8.16

Шаровой сектор (рис. 8.15).

$$x_c = \frac{3}{4}\left(R - \frac{h}{2}\right), \tag{8.27}$$

где R — радиус шара и h — высота сферической части сектора.

Задача 8.4. Определить центр тяжести колонны, состоящей из однородного цилиндра веса P, высоты H и радиуса R, на который установлена половина однородного шара веса G и того же радиуса R (рис. 8.16).

Разделим колонну на цилиндрическую и шаровую части. Центр тяжести всей системы лежит на оси симметрии. Абсцисса центра тяжести цилиндра $x_1 = H/2$. Расстояние от центра полушара до его центра тяжести найдем по формуле (8.27) при $h = R$, что дает $^3/_8 R$. Следовательно, $x_2 = H + {}^3/_8 R$. Пользуясь равенством (8.19), найдем центр тяжести колонны

$$x_c = \frac{P\frac{H}{2} + G\left(H + \frac{3}{8}R\right)}{P + G}.$$

КИНЕМАТИКА

Глава IX
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 9.1. Введение

В этом разделе курса мы приступим к изучению движения материальных тел. Когда говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение его положения с течением времени по отношению к какому-либо другому телу. Это значит, что при изучении движения тела мы всегда должны указать, относительно какого другого тела рассматривается его движение. С телом, по отношению к которому изучается движение (тело отсчета), связывают систему координатных осей и часы. Эту совокупность тела отсчета и связанной с ним системой координатных осей (системы координат) и часов, как было уже сказано во введении, называют *системой отсчета*.

Так как в теоретической механике считается, что время, являясь непрерывно изменяющейся величиной, не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и всех системах отсчета, то, говоря о системе отсчета, можно ограничиться указанием только тела отсчета или системы координатных осей (системы координат), связанных с этим телом. В кинематике движение тел изучается с чисто геометрической точки зрения и связь между движением и движущими силами не рассматривается. В кинематике движение считается заданным, т. е. считаются заданными как функции времени параметры, определяющие положение тела по отношению к выбранной системе координат.

В кинематике безразлично, какое движение совершает выбранная система координат по отношению к каким-то иным телам, не входящим в рамки нашего рассмотрения. Однако всегда следует иметь в виду, что характер наблюдаемого движения существенно зависит от выбора тела (системы координат), относительно которого изучается движение. Так, поршень автомобильного двигателя совершает относительно корпуса автомобиля прямолинейное колебательное движение, а относительно дороги, по которой движется автомобиль с постоянной скоростью, поршень перемещается по синусоиде.

Если тело не перемещается по отношению к выбранной системе координат, то говорят, что оно находится в покое. Так как покой и движение тела мы рассматриваем лишь относительно выбранной системы координат, которая в свою очередь может перемещаться произвольным образом, то понятия «покой» и «движение» являются относительными понятиями. Однако в кинематике часто пользуются терминами «абсолютное движение», «абсолютная скорость» и т. п., имеющими, конечно, условный характер. В частности, если нет специальной оговорки, под выражением «неподвижная система координат» следует понимать систему осей, относительно которых рассматривается движение.

Рассматривая движение, мы связываем изменение положения тела (или точки) с течением времени (будем обозначать его через t).

При изучении движения всегда устанавливается начало отсчета времени $t = t_0$ (во многих задачах будем полагать $t_0 = 0$). Под промежутком времени понимают разность между значениями времени в какой-либо момент времени t_2 и момент времени t_1.

При движении тела все его точки в общем случае совершают различные движения, например, при качении колеса по прямому рельсу центр колеса движется по прямой линии, а точки обода движутся по циклоидам. Поэтому изучению движения тела, естественно, должно предшествовать изучение движения точки. Кроме того, некоторые практические задачи о движении тел могут быть решены непосредственно на основании изучения движения точки.

Непрерывную кривую, которую описывает точка при своем движении, называют *траекторией точки*. В задачах небесной механики траекторию именуют также *орбитой*. Если траектория точки является прямой линией, то движение точки называют *прямолинейным*. Если же траектория — кривая линия (не обязательно плоская), то движение точки называется *криволинейным*.

Мы сразу начнем с изучения криволинейного движения точки, так как прямолинейное движение представляет собой частный случай криволинейного. Приступая к изучению движения точки, мы должны сформулировать те задачи, которые решаются в кинематике. Исходя из того, что основными пространственно-временными (кинематическими) характеристиками движения точки являются ее положение, скорость и ускорение, мы можем сформулировать эти задачи следующим образом: *найти способы задания движения и, исходя из них, найти методы определения скорости и ускорения.*

§ 9.2. Способы задания движения

Прежде всего определим, что значит задать движение.

Движение точки по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени. Следовательно, задать движение точки это значит указать способ, позволяющий в любой момент времени определить ее положение по отношению к выбранной системе отсчета.

Векторный способ. Положение точки в пространстве будет вполне определено, если ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, проводимый из какого-либо заданного центра, известен как функция времени, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Следует, однако, иметь в виду, что задать вектор как функцию времени значит уметь находить его модуль и направление в любой момент времени. Это можно сделать, если избрана какая-либо определенная система координат, т. е. задание радиуса-вектора как функции времени обязательно предполагает наличие системы координат, но в то же время не конкретизирует ее. Считая, что радиус-вектор задан, мы тем самым должны предполагать, что умеем определять его модуль и направление в избранной нами системе координат.

То обстоятельство, что введением радиуса-вектора, определяющего положение точки, мы не связываем себя с конкретной системой координат, позволяет широко использовать задание радиуса-вектора как функции времени для получения основных кинематических характеристик движения. Для решения же конкретных задач обычно переходят от векторного способа к координатному и естественному способам задания движения.

Введем еще одно полезное для дальнейшего понятие о годографе вектора, рассматриваемого как функция скалярного аргумента (например, времени).

Годографом какого-либо вектора называют кривую, которую вычерчивает конец этого вектора (предполагается, что начало вектора находится все время в одной и той же точке) при изменении его аргумента.

Следовательно, годографом радиуса-вектора, определяющего положение точки, будет траектория точки.

Перейдем теперь к рассмотрению координатного и естественного способов задания движения.

Координатный способ. Положение точки по отношению к какой-либо системе координат полностью определяется координатами точки. Поэтому задание координат точки в виде известных функций времени дает возможность определить ее положение в любой момент времени. Способ задания движения, заключающийся в задании координат точки как известных функций времени, называется *координатным способом* задания движения и требует выбора конкретной системы координат. Этот выбор определяется содержанием решаемой задачи; конечно, предпочтительнее та система координат, использование которой наиболее целесообразно для данной задачи.

При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат указанный способ заключается в задании координат x, y, z точки M (рис. 9.1) как известных функций времени:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{9.1}$$

Во многих случаях бывает предпочтительнее использовать *цилиндрические* или *сферические* координаты.

В цилиндрических координатах (рис. 9.1, *a*) положение точки определяется радиусом ρ, углом φ (азимут) и аппликатой z.

Следовательно, движение будет задано, если ρ, φ и z будут известными функциями времени

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \tag{9.2}$$

В сферических координатах (рис. 9.1, *б*) положение точки определяется полярным радиусом r, углом φ и углом θ (полюсный угол). Движение будет задано, если

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t) \tag{9.3}$$

— известные функции времени.

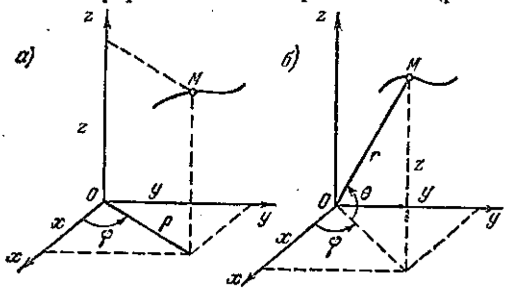


Рис. 9.1

Формулы, связывающие цилиндрические и сферические координаты с декартовыми, соответственно будут

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z;$$

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

При движении точки в плоскости иногда целесообразно использовать *полярные* координаты. В этом случае нужно задать в виде функций времени координаты r и φ (рис. 9.2):

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Связь этих координат с декартовыми дается формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

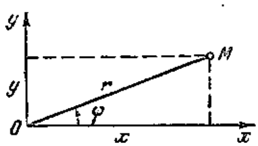


Рис. 9.2

Уравнения (9.1) движения точки представляют одновременно и уравнения траектории в параметрической форме, где роль параметра играет время t. Если требуется определить уравнение траектории в координатной форме, то нужно исключить каким-либо образом из этих уравнений время t.

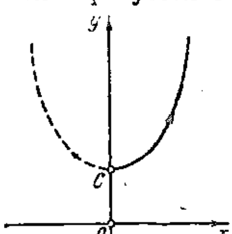


Рис. 9.3

Задача 9.1. Движение точки в плоскости xOy (рис. 9.3) задано при помощи уравнений

$$x = at, \quad y = bt^2 + c \; (a > 0, \; b > 0, \; c > 0), \tag{9.4}$$

и движение начинается в момент $t = 0$. Найти уравнение траектории в координатной форме.

Из первого уравнения следует, что $t = x/a$, поэтому уравнение траектории будет $y = \frac{b}{a^2}x^2 + c$. Это — уравнение параболы. Однако траекторией будет не вся парабола, а только часть, показанная на рис. 9.3 сплошной линией. Это следует из того обстоятельства, что от начального момента движения $t = 0$ (когда $x = 0$, $y = c$) координата x будет увеличиваться (время t положительно и непрерывно возрастает). Направление движения точки по траектории определяется из уравнений (9.4) и показано на рис. 9.3 стрелкой.

В рассмотренном примере исключение времени из уравнений движения было произведено путем нахождения времени t из уравнения для x и подстановки в уравнение для y. Такой прием не всегда удобен, поэтому исключение времени можно производить и другими способами.

Задача 9.2. Движение точки в плоскости xOy задано уравнениями

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t. \tag{9.5}$$

Найти уравнение траектории в координатной форме. Уравнения

$$\frac{x}{a} = \cos\omega t \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} = \sin\omega t$$

следует возвести в квадрат и сложить. Тогда получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Она представляет собой эллипс (рис. 9.4). Из уравнений (9.5) следует, что движение начнется в точке A с координатами $x = a$, $y = 0$ и будет происходить в на-

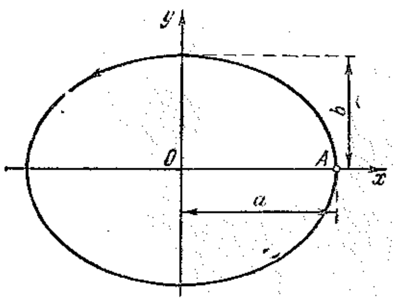


Рис. 9.4

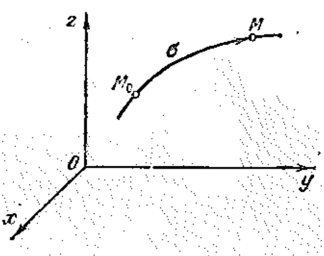


Рис. 9.5

правлении, указанном стрелкой (предполагается, что движение начинается в момент времени $t = 0$).

Естественный способ. При естественном способе задания движения указываются *траектория точки и закон ее движения по этой траектории.*

Пусть точка движется по отношению к выбранной системе отсчета по заданной траектории (рис. 9.5), определяемой уравнениями

$$f_1(x, y, z) = 0, \; f_2(x, y, z) = 0. \tag{9.6}$$

Пусть M_0 — какая-либо фиксированная точка на траектории. Выбрав направление положительного отсчета дуги по траектории, мы определим положение точки M в любой момент времени, если будем знать, как изменяется дуга $\sigma = \overset{\frown}{M_0M}$ (см. рис. 9.5) со временем

$$\sigma = \sigma(t). \tag{9.7}$$

Эта зависимость называется *законом движения.*

Кривая, построенная на плоскости (t, σ), выражающая зависимость $\sigma = \sigma(t)$, называется *графиком движения*.

Если движение происходит в сторону возрастания дуги σ, то дифференциал дуги *)

$$d\sigma = \dot{\sigma}(t)\,dt$$

будет положительным, если же движение происходит в сторону убывания дуги, то дифференциал дуги будет отрицательным. Отметим, что путь s, проходимый точкой, всегда будет возрастать и, следовательно, положителен, т. е.

$$ds = |d\sigma|.$$

Задача 9.3. Закон движения точки по траектории имеет вид

$$\sigma = -t^2 + 4t + 3$$

(t — в секундах, σ — в метрах). Построить и исследовать график движения.

Графиком движения будет кривая, изображенная на рис. 9.6. Из рассмотрения этого графика следует, что дуга σ увеличивается до значения $\sigma = 7$ м при $t = 2$ с, а затем начинает уменьшаться. Ход графика движения в области отрицательных σ характеризует увеличение абсолютного значения дуги при движении точки от начала отсчета M_0 в сторону, противоположную положительному отсчету дуги.

На рис. 9.6 показана и кривая $s(t)$, представляющая график функции $s_1(t) + 3$, где $s_1(t)$ — путь, пройденный точкой. До значения $t = 2$ с кривая s совпадает с кривой σ, для $t \geqslant 2$ с кривая $s(t)$ показана пунктиром.

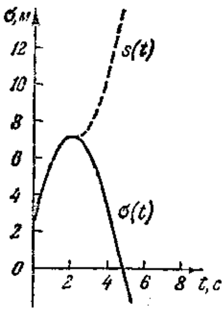


Рис. 9.6

Все рассмотренные способы задания движения взаимосвязаны.

Пусть, например, движение задано координатным способом в виде (9.1). Очевидно, что при этом проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (рис. 9.7) на оси координат равны координатам точки M и, следовательно, можно записать

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{9.8}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей x, y, z.

Модуль $\mathbf{r}$ найдется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{9.9}$$

а направление определится направляющими косинусами

$$\cos(x, \mathbf{r}) = x/r, \quad \cos(y, \mathbf{r}) = y/r, \quad \cos(z, \mathbf{r}) = z/r. \tag{9.10}$$

Рассмотрим еще переход от координатного способа к естественному.

*) В механике производная по времени обозначается точкой над функцией, так что $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$.

Пусть движение задано уравнениями (9.1). Исключая из этих уравнений время t, получим уравнения траектории (9.6). Найдем теперь закон движения $\sigma = \sigma(t)$.

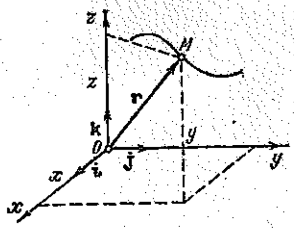


Рис. 9.7

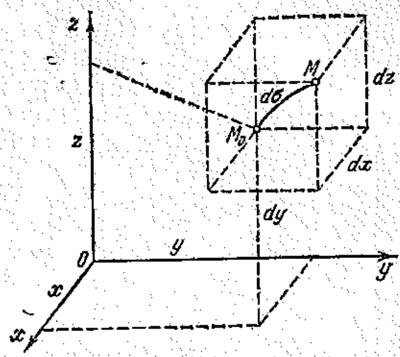


Рис. 9.8

Дифференциал дуги может быть найден по формуле (рис. 9.8) $d\sigma = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, где dx, dy, dz — дифференциалы координат точки $dx = \dot{x}(t)\,dt$, $dy = \dot{y}(t)\,dt$, $dz = \dot{z}(t)\,dt$.

Формулу для $d\sigma$ можно переписать в виде

$$d\sigma = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Интегрируя это выражение в промежутке от $t = 0$ (начало движения) до какого-либо момента времени t, получим закон движения

$$\sigma = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Знак «плюс» или «минус» перед интегралом ставится в зависимости от выбора направления положительного отсчета дуги; если движение точки начинается в сторону выбранного положительного отсчета дуги, то следует брать знак «плюс», в противном случае — знак «минус».

§ 9.3. Понятие о производной вектора по скалярному аргументу

При рассмотрении задач кинематики и динамики мы встретимся с необходимостью вычисления производных векторов, имеющих различный физический смысл и являющихся функциями различных скалярных аргументов (времени, дуги и пр.). Поэтому в начале этого параграфа мы определим понятие производной вектора по скалярному аргументу в общем виде, не придавая конкретного физического значения вектору и аргументу.

Пусть вектор a задан в какой-либо системе координат как непрерывная функция скалярного аргумента u

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(u).$$

При изменении аргумента u будут меняться как модуль вектора a, так и его направление. Конец вектора a при изменении аргумента u описывает кривую — годограф вектора $\mathbf{a}(u)$ (рис. 9.9). Пусть u — некоторое фиксированное значение аргумента, а Δu — его приращение. Тогда при значении аргумента $u+\Delta u$ вектор a будет иметь другой модуль и другое направление, чем при значении аргумента, равном u.

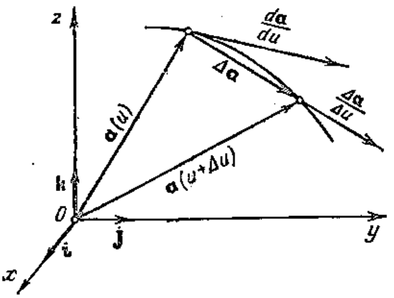


Рис. 9.9

Разность

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(u+\Delta u) - \mathbf{a}(u)$$

называется приращением вектора a.

Предел отношения

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{a}(u+\Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}$$

при $\Delta u \to 0$, если он существует, называется *производной вектора по скалярному аргументу и обозначается через* $\frac{d\mathbf{a}}{du}$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{a}(u+\Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}.$$

Заметим, что вектор $\Delta\mathbf{a}$ всегда направлен по секущей годографа вектора a (рис. 9.9), а значит, и вектор $\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta u}$ направлен также по секущей. При $\Delta u \to 0$ секущая займет предельное положение, совпадающее с касательной к годографу вектора a. Следовательно, *производная вектора по скалярному аргументу всегда направлена по касательной к годографу этого вектора.*

Приведем без доказательства свойства производной вектора по скалярному аргументу:

1. Производная постоянного по величине и направлению вектора равна нулю.

2. Производная суммы векторов равна сумме производных, т. е.

$$\frac{d(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{du} = \frac{d\mathbf{a}}{du} + \frac{d\mathbf{b}}{du}.$$

3. Производные скалярного и векторного произведений векторов соответственно определяются выражениями:

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{du}, \quad \frac{d}{du}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{du}.$$

Пусть вектор $\mathbf{a}$ задан в неподвижной прямоугольной системе координат; тогда

$$\mathbf{a}(u) = a_x(u)\,\mathbf{i} + a_y(u)\,\mathbf{j} + a_z(u)\,\mathbf{k},$$

где $a_x(u)$, $a_y(u)$, $a_z(u)$ — проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси x, y, z (рис. 9.9). Так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ постоянные, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\mathbf{i} + \frac{db_y}{du}\mathbf{j} + \frac{da_z}{du}\mathbf{k}.$$

С другой стороны, вектор $\frac{d\mathbf{a}}{du}$ можно записать через его проекции следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_x \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_y \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_z \mathbf{k}.$$

Сравнивая оба выражения, найдем проекции производной вектора на координатные оси

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_x = \frac{da_x}{du}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_y = \frac{da_y}{du}, \quad \left(\frac{d\mathbf{a}}{du}\right)_z = \frac{da_z}{du}.$$

Эти равенства можно прочитать следующим образом: *проекции производной вектора на неподвижные оси равны производным от соответствующих проекций вектора.*

Модуль производной определяется из равенства

$$\left|\frac{d\mathbf{a}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{du}\right)^2}.$$

Если модуль вектора $\mathbf{a}(u)$ остается постоянным при изменении аргумента u, то годографом вектора $\mathbf{a}$ будет кривая, расположенная на сфере радиуса a. Следовательно, производная $d\mathbf{a}/du$, направленная по касательной к годографу вектора $\mathbf{a}$, будет в этом случае перпендикулярна вектору $\mathbf{a}$.

§ 9.4. Скорость точки

Перейдем теперь к определению понятия скорости точки и методам ее нахождения.

Пусть в момент времени t положение точки определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ — радиусом-вектором $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Вектор

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

будем называть вектором перемещения точки за время Δt (рис. 9.10).

Отношение вектора $\Delta\mathbf{r}$ к промежутку времени Δt называется *средней скоростью точки за промежуток времени* Δt

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Скоростью в данный момент времени называется предел отношения вектора перемещения точки к промежутку времени, за который произошло это перемещение, когда этот промежуток времени стремится к нулю, т. е.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{9.11}$$

Размерность скорости будет

$$[v] = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]} = \frac{L}{T}.$$

Единицами измерения могут быть м/с, см/с, км/ч.

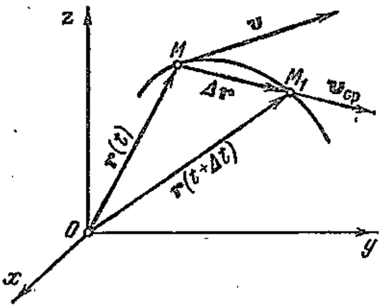


Рис. 9.10

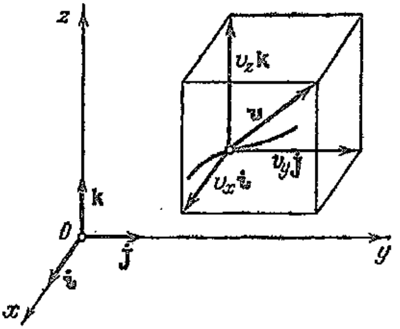


Рис. 9.11

Из этого определения видно, что *скорость точки равна производной радиуса-вектора точки по времени*. На рис. 9.10 показаны средняя скорость $\mathbf{v}_{ср}$ и скорость $\mathbf{v}$ точки M. Как следует из общей теории, *скорость точки* $\mathbf{v}$ *— это вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения точки*.

Скорость точки при координатном способе задания движения. Пусть движение точки задано в декартовой системе координат, принятой за неподвижную, т. е. пусть заданы координаты точки как функции времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Согласно выражению (9.8) имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Так как единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ выбранной системы координат постоянны, то на основании формулы (9.11) получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

На рис. 9.11 показано разложение скорости на составляющие по осям координатной системы $Oxyz$.

Таким образом, проекции скорости v_x, v_y, v_z на координатные оси будут

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

т. е. *проекция скорости точки на координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей этой оси координаты.*

Так как производную по времени мы условились обозначать точкой сверху, то полученные формулы можно переписать в виде

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{9.12}$$

Модуль скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \tag{9.13}$$

а направление скорости — направляющими косинусами

$$\begin{aligned} \cos(x, \mathbf{v}) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(y, \mathbf{v}) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(z, \mathbf{v}) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется *равномерным.*

Задача 9.4. Движение точки задано уравнениями

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = bt.$$

Найти скорость точки.

В соответствии с выражениями (9.12) получим проекции скорости

$$v_x = \dot{x} = -a\omega\sin\omega t, \quad v_y = \dot{y} = a\omega\cos\omega t, \quad v_z = \dot{z} = b.$$

Модуль скорости определится формулой (9.13):

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}.$$

Направление скорости найдем, используя формулы (9.14):

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{-a\omega\sin\omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}, \quad \cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{a\omega\cos\omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}},$$

$$\cos(z, \mathbf{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{b}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}.$$

Из этих соотношений видно, что точка движется равномерно ($v = \text{const}$), но направление скорости изменяется с течением времени.

Исследуем траекторию точки. Из первых двух уравнений движения найдем

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это — уравнение цилиндра радиуса a, ось которого совпадает с осью z (рис. 9.12).

Опустим теперь из точки M на плоскость xOy перпендикуляр MN и обозначим угол между осью x и прямой ON через φ. Координаты точки N будут

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi.$$

Сравнивая эти соотношения с уравнениями движения, найдем

$$\varphi = \omega t.$$

Таким образом, угол φ изменяется пропорционально времени. Из этого следует, что прямая ON равномерно вращается, а точка M в это время равномерно перемещается по образующей NM ($z = bt$). Следовательно, точка движется по винтовой линии. Уравнения винтовой линии в параметрической форме совпадают с уравнениями движения, а в координатной форме имеют вид

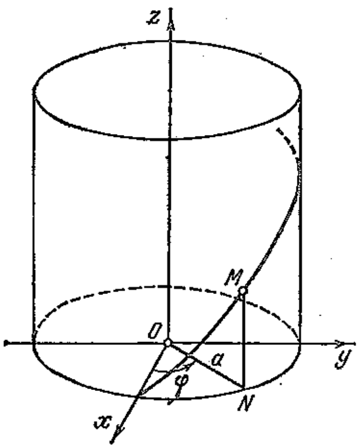


Рис. 9.12

$$x = a\cos\frac{\omega z}{b}, \quad y = a\sin\frac{\omega z}{b}.$$

Рассмотрим теперь движение, заданное в полярных координатах, т. е. пусть даны как функции времени полярный радиус $r = r(t)$ и угол $\varphi = \varphi(t)$, определяющие положение точки.

Введем в рассмотрение единичные векторы: $\mathbf{r}^0$, направленный по радиусу-вектору в сторону возрастания r, и $\mathbf{p}^0$, повернутый относительно $\mathbf{r}^0$ на угол $\pi/2$ в сторону возрастания угла φ (рис. 9.13). Единичные векторы $\mathbf{r}^0$ и $\mathbf{p}^0$ могут быть представлены через единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ координатных осей:

$$\mathbf{r}^0 = \cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j},$$

$$\mathbf{p}^0 = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathbf{j} = -\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j}.$$

В дальнейшем нам будут нужны выражения для производных по времени от единичных векторов $\mathbf{r}^0$, $\mathbf{p}^0$.

Дифференцируя $\mathbf{r}^0$ по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{dt} = (-\sin\varphi\cdot\mathbf{i} + \cos\varphi\cdot\mathbf{j})\,\dot\varphi = \dot\varphi\mathbf{p}^0. \tag{9.15}$$

Аналогично

$$\frac{d\mathbf{p}^0}{dt} = -(\cos\varphi\cdot\mathbf{i} + \sin\varphi\cdot\mathbf{j})\,\dot\varphi = -\dot\varphi\mathbf{r}^0. \tag{9.16}$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}$, определяющий положение точки, может быть представлен в виде $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$ (рис. 9.13). При движении точки меняются как модуль, так и направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$, следовательно, и r, и $\mathbf{r}^0$ являются функциями времени. На основании равенства (9.11) имеем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{r}^0) = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}^0 + r\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}.$$

Используя соотношение (9.15), будем иметь

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{r}^0 + r\,\frac{d\varphi}{dt}\,\mathbf{p}^0.$$

Полученная формула дает разложение вектора скорости на две взаимно перпендикулярные составляющие: радиальную $\mathbf{v}_r = \dot{r}\mathbf{r}^0$ и поперечную $\mathbf{v}_p = r\dot{\varphi}\mathbf{p}^0$ (рис. 9.14).

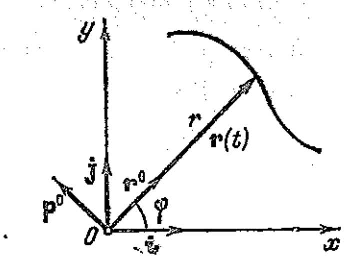


Рис. 9.13

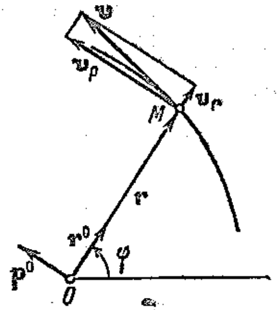


Рис. 9.14

Проекции скорости на радиальное и поперечное направления

$$v_r = \dot{r} \text{ и } v_p = r\dot{\varphi} \tag{9.17}$$

называются соответственно *радиальной* и *поперечной* скоростями.

Модуль скорости находится по формуле

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \tag{9.18}$$

Формулу (9.18) можно также получить, используя связь между декартовыми и полярными координатами,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Продифференцировав эти соотношения по времени $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$ и используя равенство (9.13), получим

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Нахождение скорости при естественном способе задания движения. Пусть точка M движется по какой-либо кривой (рис. 9.15). За промежуток времени Δt точка переместится по кривой из положения M в положение M_1. Дуга $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta\sigma > 0$, если движение точки происходит в сторону положительного отсчета дуги (рис. 9.15, *а*), и $\Delta\sigma < 0$, если движение происходит в противоположную сторону (рис. 9.15, *б*). На основании (9.11) имеем

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}.$$

Так как предел отношения дуги к стягивающей ее хорде равен по модулю единице, а предельное положение секущей MM_1 совпадает с направлением касательной к кривой в точке M, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}=\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}=\boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой, направленный в сторону положительного отсчета дуги.

Действительно, если $\Delta\sigma>0$, то вектор $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}$ направлен в сторону $\Delta\mathbf{r}$ (см. рис. 9.15, *а*), а при $\Delta\sigma<0$ вектор $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\sigma}$ направлен в сторону, противоположную $\Delta\mathbf{r}$ (см. рис. 9.15, *б*). В обоих случаях этот

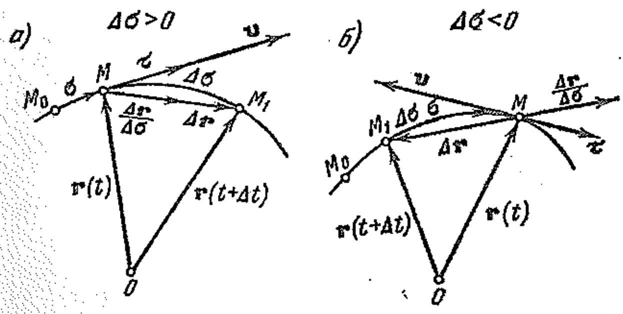


Рис. 9.15

вектор, а следовательно, и его предел $\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}=\boldsymbol{\tau}$, направлены в сторону возрастания дуги σ (на рис. 9.15 положительное направление отсчета дуги σ выбрано вправо от начала отсчета M_0).

Принимая во внимание, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}=\frac{d\sigma}{dt}=\dot{\sigma},$$

имеем

$$\mathbf{v}=\frac{d\sigma}{dt}\boldsymbol{\tau}. \tag{9.19}$$

Обозначая $v_\tau=\frac{d\sigma}{dt}$, получим

$$\mathbf{v}=v_\tau\boldsymbol{\tau}. \tag{9.20}$$

Из формулы (9.20) следует, что $v=|v_\tau|$. Очевидно, что $v_\tau=v$, если движение происходит в сторону положительного отсчета дуги, и $v_\tau=-v$, если движение происходит в противоположную сторону.

Так как проходимый точкой путь всегда положителен, то элемент пути

$$ds=|d\sigma|$$

и, следовательно, модуль скорости можно определить по формуле

$$v = \left| \frac{d\sigma}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}.$$

§ 9.5. Задачи

Задача 9.5. Если ось x направить горизонтально, а ось y вертикально вверх, то движение тяжелой точки (например, артиллерийского снаряда) у поверхности Земли в предположении, что сопротивление воздуха пропорционально скорости точки, будет описываться уравнениями

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt}), \quad y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k},$$

где v_0, α, k, g — постоянные величины.

Найти модуль и направление скорости в начальный момент времени. Найти также наибольшую высоту h подъема точки над уровнем ее начального положения, дальность L по горизонтали от начального положения точки до ее наивысшего положения.

На основании (9.12) имеем

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos\alpha e^{-kgt}, \quad v_y = \dot{y} = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) e^{-kgt} - \frac{1}{k}.$$

При $t = 0$ $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha$, а модуль v скорости будет

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0.$$

Направление начальной скорости определим, найдя направляющие косинусы при $t = 0$:

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_0} = \cos\alpha,$$

$$\cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0} = \sin\alpha.$$

Следовательно, начальная скорость, равная по модулю v_0, направлена под углом α к горизонту.

Так как точка траектории, где $v_y = 0$, соответствует наибольшей высоте подъема движущейся точки, то из уравнения

$$v_y = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right) e^{-kgt_1} - \frac{1}{k} = 0$$

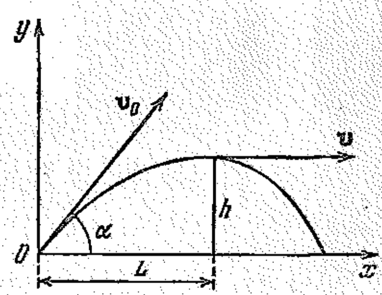


Рис. 9.16

мы определим момент времени t_1 достижения точкой наибольшей высоты. Имеем

$$e^{kgt_1} = 1 + kv_0 \sin\alpha;$$

отсюда

$$t_1 = \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0 \sin\alpha).$$

Подставляя найденное значение t_1 в выражение для y, получим искомую высоту (рис. 9.16)

$$h = \frac{v_0 \sin\alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + kv_0 \sin\alpha).$$

Найдем теперь расстояние по горизонтали от начального положения точки до ее положения в наивысшей точке. Для этого подставим время t_1 в выражение для x:

$$L = x_{t=t_1} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin\alpha)}.$$

Задача 9.6. Точка движется так, что ее радиус-вектор образует со скоростью постоянный угол. Определить уравнение траектории в полярных координатах, если угол, образуемый скоростью с радиусом-вектором, равен α (рис. 9.17).

Согласно формуле (9.17) проекции скорости на радиальное и поперечное направления будут

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_p = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

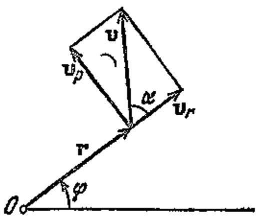


Рис. 9.17

По условию задачи

$$\frac{v_p}{v_r} = \operatorname{tg}\alpha = \text{const}.$$

Следовательно,

$$r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{dr}{r} = d\varphi \operatorname{ctg}\alpha.$$

Интегрируя это уравнение и приняв при $t = 0$ угол $\varphi = 0$, получим

$$\ln r\Big|_{r_0}^{r} = \varphi \operatorname{ctg}\alpha\Big|_0^{\varphi}.$$

Тогда $r = r_0 e^{\varphi \operatorname{ctg}\alpha}$, где r_0 — модуль радиуса-вектора r в момент времени $t = 0$. Таким образом, траектория представляет собой логарифмическую спираль.

Если угол $\alpha = 0$, то траектория будет прямолинейной — движение будет происходить вдоль радиуса-вектора. Если угол $\alpha = \pi/2$, то движение будет происходить по окружности, так как $r = r_0$.

§ 9.6. Ускорение точки

Предположим, что в момент времени t скорость точки равна $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ будет $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t + \Delta t)$ (рис. 9.18). Изменение вектора скорости за промежуток времени Δt найдем как разность векторов $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$, если параллельно перенесем вектор $\mathbf{v}_2$ в точку M_1 (рис. 9.18). Вектор

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$$

представляет собой приращение вектора скорости за промежуток времени Δt.

Отношение вектора $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt называется *средним ускорением* точки за промежуток времени Δt:

$$\mathbf{w}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Ускорением $\mathbf{w}$ точки в данный момент времени называется *предел отношения приращения скорости $\Delta\mathbf{v}$ к приращению времени Δt при условии, что последнее стремится к нулю, т. е.*

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{9.21}$$

так как $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Можно также пользоваться следующей формой записи: $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$.

Следовательно, ускорение точки в данный момент времени равно *первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной по времени от радиуса-вектора точки.*

Годографом скорости называется кривая, которую вычерчивает конец вектора скорости при движении точки, если вектор скорости проводится из одной и той же точки (рис. 9.19).

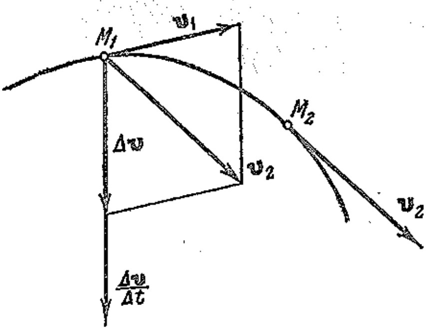


Рис. 9.18

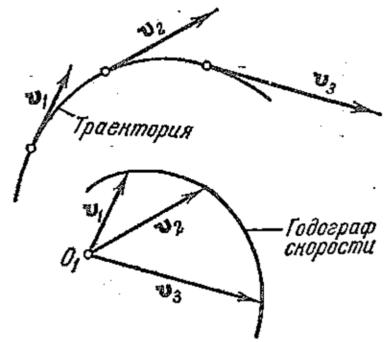


Рис. 9.19

Очевидно, что скорость точки, вычерчивающей годограф скорости, будет равна $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$, т. е. ускорению точки при ее движении по траектории. Размерность ускорения

$$[w] = \frac{[\text{скорость}]}{[\text{время}]} = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]^2} = \frac{L}{T^2}.$$

Единицами измерения могут быть м/с^2, см/с^2.

Нахождение ускорения при координатном способе задания движения. Пусть движение точки задано в прямоугольной системе координат:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Так как вектор скорости точки можно представить в виде

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

то на основании (9.21) будем иметь

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}.$$

Пусть w_x, w_y, w_z — проекции ускорения на координатные оси x, y, z; тогда

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}, \tag{9.22}$$

т. е. проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей проекции скорости точки.

Выражения (9.22) на основании (9.12) можно переписать в виде

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}. \tag{9.23}$$

Следовательно, проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты.

Модуль ускорения определяется по формуле

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{9.24}$$

Зная проекции ускорения и его модуль, легко находим направляющие косинусы вектора ускорения:

$$\begin{aligned} \cos(x, \mathbf{w}) &= \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(y, \mathbf{w}) &= \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(z, \mathbf{w}) &= \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Найдем теперь ускорение в полярных координатах. Пусть координаты точки заданы как функции времени

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Согласно (9.17) имеем

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{p}^0.$$

На основании (9.21) получим

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{r}^0 + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{p}^0 + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\mathbf{p}^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{p}^0}{dt},$$

но так как [см. (9.15) и (9.16)]

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{p}^0, \quad \frac{d\mathbf{p}^0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{r}^0,$$

то

$$\mathbf{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{r}^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{p}^0.$$

Отсюда находим проекции ускорения на радиальное и поперечное направления

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{9.26}$$

Модуль и направление вектора ускорения определяются по формулам

$$w=\sqrt{w_r^2+w_p^2}, \quad \cos(\mathbf{r}^0, \mathbf{w})=\frac{w_r}{w}, \quad \cos(\mathbf{p}^0, \mathbf{w})=\frac{w_p}{w}.$$

Нахождение ускорения при естественном способе задания движения. Предварительно познакомимся с необходимыми сведениями из дифференциальной геометрии. Рассмотрим пространственную кривую. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, проведенной в какой-либо точке M этой кривой (рис. 9.20). Возьмем теперь на кривой точку M_1, близкую к точке M, и обозначим единичный

Рис. 9.20

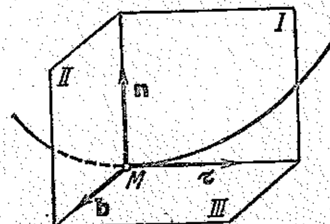


Рис. 9.21

вектор касательной в этой точке через $\boldsymbol{\tau}_1$. Параллельно перенеся вектор $\boldsymbol{\tau}_1$ в точку M, проведем плоскость через векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}_1$, приложенные в точке M.

При стремлении точки M_1 к точке M эта плоскость в пределе займет определенное положение. Полученную таким образом плоскость называют *соприкасающейся* плоскостью в точке M. Отметим, что если рассматриваемая кривая плоская, то она целиком будет расположена в соприкасающейся плоскости.

Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно касательной, называют *нормальной* плоскостью. Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей определяет *главную нормаль* к кривой в точке M. Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно главной нормали, называют *спрямляющей плоскостью*. На рис. 9.21 соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости обозначены соответственно цифрами I, II и III.

Линия пересечения спрямляющей и нормальной плоскостей определяет *бинормаль* к кривой.

Таким образом, в каждой точке кривой можно указать три взаимно перпендикулярных направления: касательной, главной нормали и бинормали. Принимая эти направления за координатные оси, введем единичные векторы этих осей.

Единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}$ нами уже был введен. Единичный вектор $\mathbf{n}$, *направленный в сторону вогнутости* кривой, будет единичным вектором главной нормали. Направление единичного вектора бинормали $\mathbf{b}$ определим из требования, чтобы касательная, главная нормаль и бинормаль, направления которых определяются векторами τ, n, b, образовывали правую систему осей. Полученный трехгранник, составленный из соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей, называется *естественным трехгранником*. Векторы τ, n, b являются единичными векторами осей естественного трехгранника (рис. 9.21).

Обозначим через ε величину угла между вектором τ, проведенным в точке M, и вектором τ_1, проведенным в точке M_1, близкой к точке M. Этот угол называется *углом смежности* (рис. 9.22, *а*).

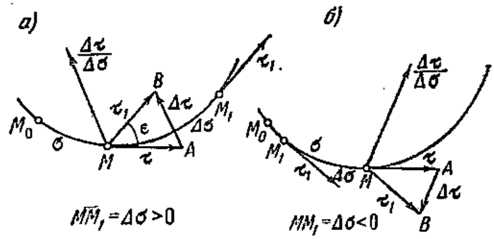


Рис. 9.22

Кривизной кривой в точке M называют предел отношения угла смежности ε к абсолютному значению длины дуги $MM_1 = \Delta\sigma$, т. е.

$$k = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta\sigma|}. \tag{9.27}$$

Радиусом кривизны кривой в точке M называется величина, обратная кривизне

$$\rho = 1/k. \tag{9.28}$$

Заметим, что кривизна прямой равна нулю, а ее радиус кривизны равен бесконечности. Кривизна окружности во всех ее точках одинакова и равна обратной величине радиуса ($k = 1/R$); радиус кривизны равен радиусу окружности ($\rho = R$).

Если через точку кривой M и две близкие к ней точки провести окружность, то при стремлении этих точек к M в пределе получится окружность, которая называется *кругом кривизны*. Круг кривизны лежит в соприкасающейся плоскости. Радиус этого круга равен радиусу кривизны кривой в точке M. Центр круга кривизны лежит на главной нормали и называется центром кривизны *).

Вектор скорости согласно выражению (9.20) можно представить в виде

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau},$$

где v_τ — проекция скорости на направление τ. На основании формулы (9.21) имеем

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \boldsymbol{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \tag{9.29}$$

*) Доказательства этих утверждений можно найти в любом курсе дифференциальной геометрии.

Определим величину и направление вектора $d\boldsymbol{\tau}/dt$.

Пусть в момент времени t точка находится в положении M на траектории, а в момент времени $t+\Delta t$ — в положении M_1. Перенося вектор $\boldsymbol{\tau}_1$ в точку M, найдем приращение вектора $\boldsymbol{\tau}$ за промежуток времени Δt (рис. 9.22, *а*)

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}.$$

Вектор $\Delta\boldsymbol{\tau}$ при движении точки в сторону положительного отсчета дуги направлен в сторону вогнутости траектории (рис. 9.22, *а*), а при движении точки в сторону отрицательного отсчета дуги направлен в сторону выпуклости траектории (рис. 9.22, *б*).

Найдем производную вектора $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta\sigma}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = v_\tau\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}.$$

Вектор $\Delta\boldsymbol{\tau}/\Delta\sigma$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории (см. рис. 9.22, *а* и *б*) и лежит в плоскости, проходящей через точку M и векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ (плоскость MAB). Следовательно, вектор $d\boldsymbol{\tau}/d\sigma$ лежит в соприкасающейся плоскости, так как при $\Delta\sigma \to 0$ ($\Delta t \to 0$) плоскость MAB совпадает с соприкасающейся плоскостью к траектории в точке M.

Дифференцируя тождество $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$ по σ, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0,$$

т. е. скалярное произведение $\boldsymbol{\tau}$ на $d\boldsymbol{\tau}/d\sigma$ равно нулю, а это значит, что вектор $d\boldsymbol{\tau}/d\sigma$ перпендикулярен $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, вектор $d\boldsymbol{\tau}/d\sigma$ лежит в соприкасающейся плоскости, направлен в сторону вогнутости траектории и перпендикулярен $\boldsymbol{\tau}$; следовательно, он направлен по главной нормали к центру кривизны.

Определим теперь модуль вектора $d\boldsymbol{\tau}/d\sigma$. Из равнобедренного треугольника AMB (см. рис. 9.22, *а*) найдем

$$AB = |\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2\sin(\varepsilon/2)$$

или, используя равенства (9.27) и (9.28), получим

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{|\Delta\sigma|} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin(\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)}\frac{\varepsilon}{|\Delta\sigma|} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Учитывая, что $\mathbf{n}$ есть единичный вектор главной нормали, будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}.$$

Значит,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v_\tau}{\rho}\mathbf{n},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{w} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}, \tag{9.30}$$

так как $v_\tau^2 = v^2$.

Из этой формулы следует, что *вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.*

Составляющие ускорения по направлениям $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ соответственно равны

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}.$$

Проекция ускорения на направление $\boldsymbol{\tau}$

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \tag{9.31}$$

называется *касательным* (тангенциальным) ускорением. Проекция ускорения на главную нормаль

$$w_n = v^2/\rho \tag{9.32}$$

называется *нормальным* ускорением. *Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Модуль вектора ускорения равен

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{9.33}$$

Касательное ускорение $w_\tau = dv_\tau/dt$ равно нулю при движении точки с постоянной по модулю скоростью и в моменты времени, в которые скорость v_τ достигает экстремальных значений.

Если v_τ и w_τ одного знака, то модуль скорости $v = |v_\tau|$ точки возрастает и движение в этом случае называется *ускоренным*. Если же v_τ и w_τ разных знаков, то модуль скорости $v = |v_\tau|$ точки убывает и движение будет *замедленным*. При $w_\tau = 0$ модуль скорости остается постоянным — движение *равномерное*.

Нормальное ускорение равно нулю при прямолинейном движении ($\rho = \infty$), в точках перегиба криволинейной траектории и в моменты времени, в которые скорость точки обращается в нуль.

Отметим, что для вычисления касательного ускорения w_τ можно использовать равенство

$$w_\tau = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{v_\tau},$$

так как $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v_\tau$.

Если движение точки задано координатным способом, то в случае задания движения в декартовых координатах ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$) будем иметь

$$w_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}};$$

для полярных координат получим

$$w_\tau = \frac{v_r w_r + v_p w_p}{\pm\sqrt{v_r^2 + v_p^2}}.$$

§ 9.7. Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение. Если траектория точки является прямой линией, то, направляя одну из координатных осей, например ось x, вдоль этой прямой, мы полностью определим положение точки заданием ее абсциссы как функции времени, т. е. $x = x(t)$.

Проекции скорости и ускорения на ось x согласно формулам (9.12) и (9.23) будут

$$v_x = \dot{x}, \quad w_x = \ddot{x}.$$

Модули скорости и ускорения соответственно равны

$$v = |\dot{x}|, \quad w = |\ddot{x}|.$$

Если $v_x > 0$, то движение точки происходит в сторону положительного направления оси x. Если при этом $w_x > 0$, то движение ускоренное, если же $w_x < 0$, то движение замедленное.

При $v_x < 0$ точка движется в направлении, противоположном положительному направлению оси x. Если при этом $w_x > 0$, то движение замедленное, если же $w_x < 0$, то движение ускоренное.

В качестве примера рассмотрим прямолинейное движение, происходящее по закону

$$x = a\sin(\omega t + \varepsilon),$$

где a, ω, ε — постоянные величины.

Движение точки по такому закону называют *гармоническим*.

Величина a, равная максимальному отклонению точки от положения $x = 0$, называется *амплитудой* колебаний; $\omega t + \varepsilon$ называется *фазой* и ε — *начальной фазой* колебаний.

Скорость и ускорение точки, совершающей гармоническое колебание, соответственно будут

$$v_x = \dot{x} = a\omega\cos(\omega t + \varepsilon), \quad w_x = \ddot{x} = -a\omega^2\sin(\omega t + \varepsilon) = -\omega^2 x.$$

Из формулы для w_x следует, что ускорение точки всегда направлено к началу координат и по модулю пропорционально отклонению точки от начала координат.

С помощью закона движения и формулы для скорости нетрудно установить, что если для какого-либо момента времени $t = t_1$ координата $x = x_1$, а скорость $v_x = v_{x_1}$, то в момент времени $t = t_2$, при котором имеет место равенство

$$\omega t_2 + \varepsilon = \omega t_1 + \varepsilon + 2\pi n,$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — скорость точки и ее положение будут такими же, как и в момент $t = t_1$.

Значит, гармоническое движение будет *периодическим* *), т. е. через промежутки времени, равные

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega} n,$$

движение будет полностью повторяться.

Наименьший промежуток времени, по истечении которого движение повторяется, называется периодом колебаний. Очевидно, что период гармонических колебаний будет равен

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число колебаний в единицу времени называется *частотой* колебаний и равно $\nu = 1/T$. Если время измеряется в секундах, то частота

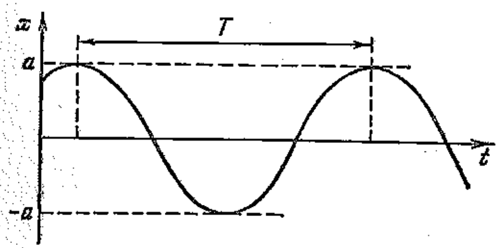


Рис. 9.23

измеряется в герцах. Величина $\omega = 2\pi\nu$ называется *круговой частотой.* Круговая частота равна числу колебаний за 2π единиц времени. График движения приведен на рис. 9.23.

Движение точки по окружности. При движении точки по окружности удобно задать ее движение в полярных координатах, так как при этом координата r является постоянной величиной, равной радиусу R окружности (рис. 9.24). Положение точки вполне определяется углом φ.

Так как $r = R$ — постоянная величина, то проекция скорости на радиальное направление $v_r = \dot{r} = 0$. Поперечная проекция скорости равна

$$v_p = r\dot{\varphi} = R\dot{\varphi}.$$

*) В общем случае движение $x(t)$ называется периодическим, если существует такой промежуток времени T, что для всех t будет справедливо равенство $x(t + T) \equiv x(t)$.

Модуль скорости будет

$$v = |\dot{v}_p| = R\omega,$$

где $\omega = |\dot{\varphi}|$.

В соответствии с формулами (9.26) проекции ускорения на радиальное и поперечное направления определяются равенствами

$$w_r = -R\omega^2, \quad w_p = R\ddot{\varphi}.$$

Модуль ускорения равен

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

где $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$.

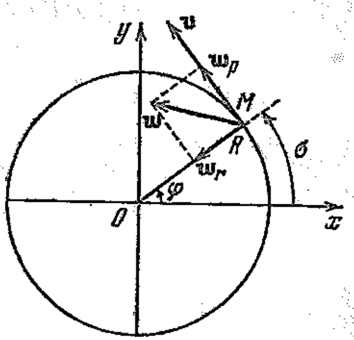


Рис. 9.24

Если выбрать направление положительного отсчета дуги, проходимой точкой, как указано на рис. 9.24, то очевидно, что касательное ускорение точки будет равно $w_\tau = R\ddot{\varphi}$, а нормальное $w_n = \omega^2 R$ (это ускорение называют *центростремительным ускорением*).

Заметим, что ω определяет угловую скорость вращения радиуса r, а ε — соответствующее угловое ускорение (подробнее об этом см. § 10.2).

§ 9.8. Задачи

Задача 9.7. Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$. Определить скорость и ускорение снаряда в начальный момент времени, высоту траектории, дальность полета, а также радиус кривизны в начальной и наивысшей точках траектории. Ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально (рис. 9.25).

Траекторией снаряда будет парабола

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

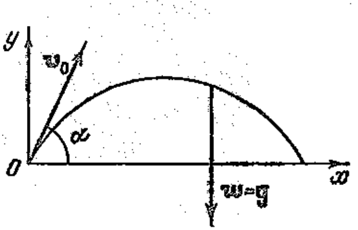


Рис. 9.25

Определим сначала скорость движения снаряда. Имеем

$$v_x = \dot{x} = v_0\cos\alpha, \quad v_y = \dot{y} = v_0\sin\alpha - gt.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}.$$

В момент времени $t = 0$ величина скорости $v = v_0$. Направление скорости определяется по формулам

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0\cos\alpha}{v},$$

$$\cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_0\sin\alpha - tg}{v}.$$

При $t=0$ получим

$$\cos(x,\ \mathbf{v}) = \cos\alpha, \qquad \cos(y,\ \mathbf{v}) = \sin\alpha,$$

т. е. скорость в начальный момент образует с осью x угол α.

Проекции ускорения на координатные оси будут

$$w_x = \ddot{x} = 0, \qquad w_y = \ddot{y} = -g,$$

следовательно, модуль ускорения равен

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = g,$$

и оно направлено по вертикали вниз (ускорение силы тяжести). Под высотой траектории понимается максимальное значение ординаты y. Очевидно, что y принимает максимальное значение при $v_y = 0$, т. е. когда

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0.$$

Находя отсюда $t = (v_0 \sin\alpha)/g$ и подставляя его в уравнение для y, получим

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Дальность полета определяется из условия $y=0$. Из уравнения

$$v_0 t \sin\alpha - gt^2/2 = 0$$

найдем

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Момент $t_1 = 0$ соответствует начальному положению снаряда. Подставляя $t = t_2$ в уравнение для x, найдем дальность полета

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальная дальность полета будет при $\alpha = 45°$ и равна v_0^2/g.

Найдем теперь радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей ее точках. Из формулы $w_n = v^2/\rho$ имеем

$$\rho = v^2/w_n.$$

Таким образом, задача нахождения радиуса кривизны траектории сводится к нахождению скорости и проекции ускорения точки на нормаль.

Согласно (9.33) имеем

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2.$$

Так как движение точки происходит все время в сторону возрастания дуги, то $v_\tau = v$, и, следовательно,

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{-g\,(v_0 \sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}}.$$

При $t=0$ $w_\tau = -g\sin\alpha$, а так как $w = g$, то $w_n = g\cos\alpha$ и, следовательно, радиус кривизны траектории в начальной точке равен

$$\rho = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}.$$

Для момента времени $t = (v_0 \sin\alpha)/g$, соответствующего наивысшей точке траектории, $w_\tau = 0$. Поэтому $w_n = g$.

Скорость точки в этот момент равна $v = v_0 \cos\alpha$ и радиус кривизны в наивысшей точке траектории будет

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^3\alpha}{g}.$$

Отметим, что в данной задаче проекцию ускорения на нормаль в начальной и наивысшей точках траектории можно легко найти и простым проектированием (рис. 9.26).

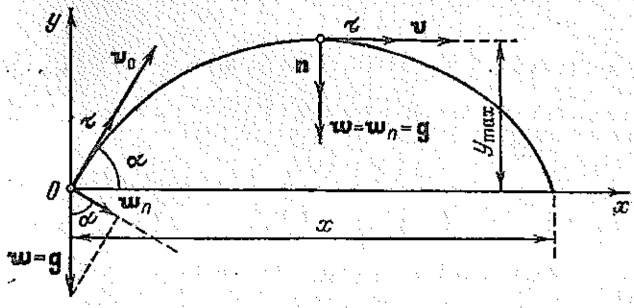


Рис. 9.26

Задача 9.8. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Скорость центра колеса постоянна и равна v_0. Найти уравнения движения точки M, лежащей на ободе колеса, ее траекторию, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории как функцию времени.

По условию, колесо катится без скольжения, следовательно, дуга AM равна отрезку OA при предположении, что в начальный момент времени точка M находилась в точке O (рис. 9.27).

Так как дуга $AM = R\varphi$, а $OA = v_0 t$, то $v_0 t = R\varphi$ и $\varphi = \omega t$, где $\omega = v_0/R$.

Координаты точки M будут:

$$x = v_0 t - R\sin\varphi = v_0 t - R\sin\omega t, \quad y = R - R\cos\varphi = R(1-\cos\omega t).$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, которая представляет собой циклоиду.

Проекции скорости точки на оси Ox и Oy равны

$$v_x = \dot{x} = v_0 - R\omega\cos\omega t = v_0(1-\cos\omega t),$$

$$v_y = \dot{y} = R\omega\sin\omega t = v_0\sin\omega t.$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t} =$$
$$= v_0\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = v_0\sqrt{4\sin^2(\omega t/2)} =$$
$$= 2v_0\sin(\omega t/2).$$

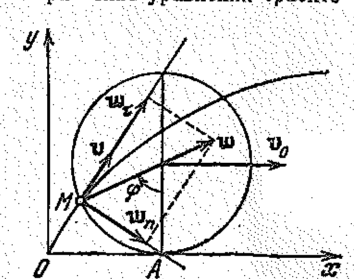


Рис. 9.27

Заметим, что угол φ изменяется от нуля до 2π и поэтому $\sin(\omega t/2) \geqslant 0$.

Направляющие косинусы вектора скорости будут

$$\cos(x, \mathbf{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{1-\cos\omega t}{2\sin(\omega t/2)} = \sin\frac{\omega t}{2},$$

$$\cos(y, \mathbf{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\sin\omega t}{2\sin(\omega t/2)} = \cos\frac{\omega t}{2}.$$

Отсюда следует, что вектор скорости все время проходит через верхнюю точку колеса.

Проекции ускорения на оси Ox и Oy равны

$$w_x = \ddot{x} = v_0\omega \sin \omega t, \qquad w_y = \ddot{y} = v_0\omega \cos \omega t$$

и, следовательно,

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = v_0\omega = \omega^2 R,$$

а так как

$$\cos(x, \mathrm{w}) = \frac{w_x}{w} = \sin \omega t, \qquad \cos(y, \mathrm{w}) = \frac{w_y}{w} = \cos \omega t,$$

то вектор ускорения точки M всегда проходит через центр колеса.

Радиус кривизны траектории найдем из выражения

$$\rho = v^2/w_n.$$

Так как $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$ и при $v_\tau = v$ $w_\tau = \frac{dv}{dt} = v_0\omega \cos\frac{\omega t}{2}$, то

$$w_n = v_0\omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t/2)} = v_0\omega \sin(\omega t/2).$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{4v_0^2 \sin^2(\omega t/2)}{v_0\omega \sin(\omega t/2)} = 4R \sin\frac{\omega t}{2} = 2AM,$$

где $AM = 2R \sin(\omega t/2)$ — длина отрезка от рассматриваемой точки колеса до его нижней точки.

Задача 9.9. Движение точки M задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$ (рис. 9.28), где a и k — постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции ее радиуса r.

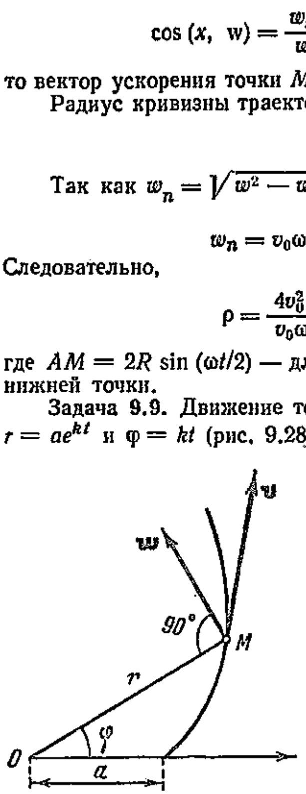


Рис. 9.28

Исключая из уравнений $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$ время t, получим уравнение траектории

$$r = ae^{\varphi}.$$

Это — уравнение логарифмической спирали.

Согласно формуле (9.17) радиальная и поперечная составляющие скорости соответственно будут

$$v_r = \dot{r} = ake^{kt} = kr, \quad v_p = r\dot{\varphi} = rk.$$

Следовательно, скорость точки M равна

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = kr\sqrt{2}.$$

Согласно формулам (9.26) будем иметь $w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = ak^2e^{kt} - ak^2e^{kt} = 0$, $w_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2k^2ae^{kt} = 2k^2r$, т. е. ускорение точки M

$$w = w_p = 2k^2r.$$

Определим теперь радиус кривизны траектории. На основании (9.32) получим

$$\rho = v^2/w_n.$$

Скорость v нами уже определена. Найдем w_n. Согласно (9.33)

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2};$$

имеем

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = k^2 \sqrt{2} a e^{kt} = k^2 r \sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$w_n = k^2 r \sqrt{2}.$$

Итак, радиус кривизны траектории будет

$$\rho = \frac{2k^2 r^2}{k^2 r \sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$$

Задача 9.10. Радар O, установленный на берегу, непрерывно следит за движением судна M, определяя в каждый данный момент времени расстояние r и угол φ между меридианом и направлением от радара на судно, а также скорости изменения этих величин. Пренебрегая кривизной земной поверхности, определить модуль скорости судна $\mathbf{v}$ относительно Земли, его курс (угол α между меридианом и скоростью $\mathbf{v}$) и расстояние p от радара до направления скорости $\mathbf{v}$ (рис. 9.29).

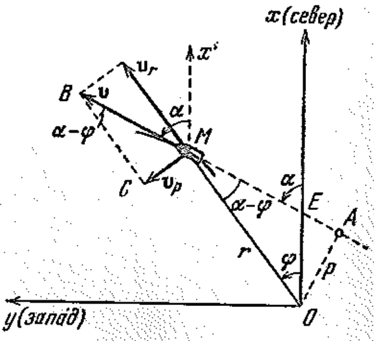


Рис. 9.29

Для решения задачи построим прямоугольную систему координат Oxy, направив ось x по касательной к меридиану на север, а ось y — по касательной к параллели на запад. Величины r, φ, $\dot r$ и $\dot\varphi$, которые непрерывно измеряет радар, суть полярные координаты судна и их скорости. Поэтому модуль скорости судна будет (см. формулу (9.18))

$$v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}.$$

Для определения курса (угла α) разложим вектор скорости судна $\mathbf{v}$ на радиальную $\mathbf{v}_r$ и поперечную $\mathbf{v}_p$ составляющие. Имеем (см. рис. 9.29):

$$\angle CBM = \angle OME = \alpha - \varphi$$

(углы CBM и OME — соответственные при параллельных прямых CB и OM а $\angle MEx$ — внешний для треугольника OME).

Из треугольника BCM найдем

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = v_p/v_r,$$

или, учитывая значения проекций поперечной $\mathbf{v}_p$ и радиальной $\mathbf{v}_r$ составляющих скорости $\mathbf{v}$,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = r\dot\varphi/\dot r. \tag{9.34}$$

Отсюда

$$\alpha = \varphi + \operatorname{arctg}(r\dot\varphi/\dot r). \tag{9.35}$$

Из треугольника OAM найдем параметр p:

$$p = r\sin(\alpha - \varphi) = r^2\dot\varphi/v. \tag{9.36}$$

С помощью счетно-решающих устройств скорость судна v, его курс α и параметр p определяются по формулам (9.18), (9.35) и (9.36) или им эквивалентным непрерывно.

Если судно идет постоянным курсом α, т. е. движется по прямой линии AMB, то равенство (9.36) определяет уравнение траектории судна в полярных координатах. Покажем, что при $\alpha = \text{const}$ это уравнение может быть получено из равенства (9.34).

Действительно, умножая числитель и знаменатель правой части равенства (9.34) на dt, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{r\,d\varphi}{dr}, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{r} = \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi)\,d\varphi.$$

Интегрируя обе части этого равенства и учитывая, что по предположению $\alpha = \mathrm{const}$, получим

$$\ln r = -\ln \sin(\alpha - \varphi) + C, \tag{9.37}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. При $\varphi = \alpha - \pi/2$ расстояние от радара до судна будет равно p, т. е. $r = p$. Подставляя эти значения в (9.37), найдем

$$\ln p = -\ln \sin(\pi/2) + C, \quad C = \ln p.$$

Внося это значение для C в равенство (9.37), получаем

$$\ln r = -\ln \sin(\alpha - \varphi) + \ln p,$$

откуда следует равенство (9.36):

$$r = \frac{p}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$

Задача 9.11. Угол ψ между неподвижной осью Ox и кривошипом O_1A изменяется по закону $\psi = \omega t$, где ω — постоянное положительное число. С кривошипом в точке A шарнирно соединен стержень AB, проходящий все время через качающуюся муфту O. Найти уравнение движения точки M стержня AB, отстоящей от точки A на расстоянии b, ее траекторию, скорость и ускорение, если $O_1A = OO_1 = a/2$ (рис. 9.30, a).

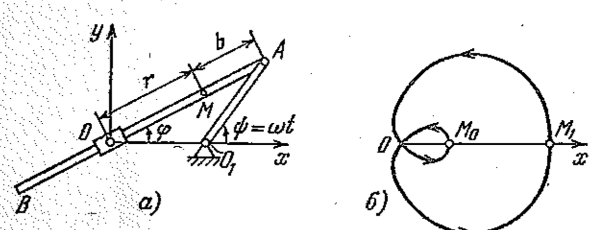


Рис. 9.30

Положение точки M проще всего определяется полярными координатами: радиусом $r = OM$ и полярным углом $\varphi = \angle O_1OA$. Так как треугольник OO_1A равнобедренный, то $\varphi = (\omega/2)\,t$, а сторона $OA = a\cos\varphi = a\cos(\omega t/2)$. Из рис. 9.30, a имеем $r = OA - b$; следовательно, уравнения движения точки M будут

$$r = a\cos(\omega t/2) - b, \quad \varphi = \omega t/2.$$

Исключая отсюда время t, найдем уравнение траектории точки M в полярных координатах:

$$r = a\cos\varphi - b.$$

(Для сравнения рекомендуем читателям самостоятельно найти уравнения движения и траекторию точки M в декартовых координатах.)

На рис. 9.30, $б$ показана траектория точки M, построенная по точкам *) для случая $b = a/2$ (при $b = a$ получается обычная кардиоида). Точка M_0 — начальная точка траектории, соответствующая моменту времени $t = 0$ или $\varphi = 0$ ($OM_0 = a - b$). Направление движения точки M показано стрелками. Отметим, что точка M

*) Если при заданном значении полярного угла φ получается отрицательный радиус r, то его нужно отложить в обратном направлении.

попадает в свое начальное положение M_0 не через один оборот кривошипа O_1A, а через два оборота, когда угол φ изменится на 2π, а угол ψ — на 4π радиана (это произойдет в момент времени $t = 4\pi/\omega$).

Найдем проекции скорости точки на радиальное и поперечное направления. Имеем

$$v_r = \dot r = -\frac{a\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2} = -\frac{a\omega}{2}\sin\varphi,$$

$$v_p = r\dot\varphi = \left(a\cos\frac{\omega t}{2} - b\right)\frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2}(a\cos\varphi - b).$$

Теперь найдем модуль скорости точки M:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2},$$

или, подставляя найденные значения для v_r и v_p и произведя очевидные преобразования,

$$v = \frac{\omega}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\omega t}{2}} = \frac{\omega}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}.$$

Для ускорения будем иметь

$$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = -\frac{a\omega^2}{2}\cos\frac{\omega t}{2} + \frac{b\omega^2}{4} = \frac{\omega^2}{4}(-2a\cos\varphi + b),$$

$$w_p = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = -\frac{a\omega^2}{2}\sin\frac{\omega t}{2} = -\frac{a\omega^2}{2}\sin\varphi.$$

Модуль ускорения равен

$$w = \frac{\omega^2}{4}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cos\frac{\omega t}{2}} = \frac{\omega^2}{4}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cos\varphi}.$$

В начальной точке M_0 при $t = 0$ ($\varphi = 0$):

$$v_0 = (a - b)\,\omega/2, \quad w_0 = (2a - b)\,\omega^2/2.$$

Через один оборот кривошипа $\psi = 2\pi$, $\varphi = \pi$ точка M попадет в положение M_1 (рис. 9.30, *б*), и ее скорость и ускорение будут соответственно равны

$$v_1 = (a + b)\,\omega/2, \quad w_1 = (2a + b)\,\omega^2/4.$$

§ 9.9. Криволинейные координаты

Положение точки в трехмерном пространстве, как известно, можно однозначно определить тремя числами. Так, например, в декартовой системе координат такими числами будут координаты x, y и z точки, в цилиндрической и сферической системах координат такими числами соответственно будут ρ, φ, z и r, θ, φ (§ 9.2). Очевидно, что можно ввести в рассмотрение и другие системы координат, в которых определен закон выбора трех чисел, однозначно определяющих положение любой точки. В этом параграфе мы рассмотрим так называемые *криволинейные координаты*.

Предположим, что для однозначного определения положения любой точки нами установлен закон выбора трех чисел q_1, q_2, q_3, тем самым введена в рассмотрение определенная система координат. Эти числа q_1, q_2, q_3 называются *криволинейными координатами*, а введенная система координат — криволинейной. Пусть радиус-вектор, определяющий положение точки M, заданной координатами q_1, q_2, q_3, проведен из произвольно выбранного полюса O. Этот радиус-вектор будет функцией координат q_1, q_2, q_3:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{9.38}$$

Проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на оси декартовой системы координат также будут функциями q_1, q_2, q_3, т. е.

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{9.39}$$

Возьмем какую-либо точку M_0 с координатами q_1, q_{20}, q_{30}; тогда уравнения

$$x = x(q_1, q_{20}, q_{30}), \quad y = y(q_1, q_{20}, q_{30}), \quad z = z(q_1, q_{20}, q_{30}),$$

в которых переменной является только одна координата q_1, определяют кривую, проходящую через точку M_0. Эту кривую называют

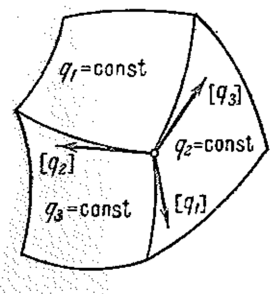


Рис. 9.31

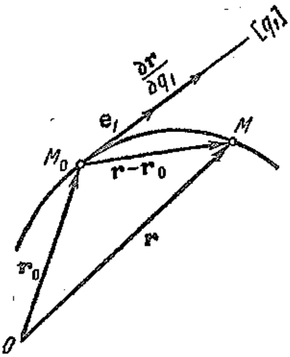


Рис. 9.32

координатной линией, соответствующей изменению координаты q_1. Аналогично определяются координатные линии, соответствующие изменению q_2 и q_3.

Касательные к координатным линиям, проведенные в точке M_0 в сторону возрастания соответствующих координат, называются *координатными осями* $[q_1]$, $[q_2]$, $[q_3]$ (рис. 9.31).

Координатными поверхностями называются поверхности, определяемые уравнениями (9.39) при изменении двух координат и при одной фиксированной координате. Так, например, поверхность (q_1, q_2) определяется следующими уравнениями:

$$x = x(q_1, q_2, q_{30}), \quad y = y(q_1, q_2, q_{30}), \quad z = z(q_1, q_2, q_{30}).$$

Касательные плоскости, проведенные в точке M_0 к координатным поверхностям, называются *координатными плоскостями*.

Определим теперь единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координатных осей. Рассмотрим движение точки по координатной линии, соответствующей изменению координаты q_1. Пусть в момент времени t точка находится в положении M_0 (рис. 9.32). Вектор $\partial\mathbf{r}/\partial q_1$, вычисленный в точке M_0, направлен по касательной к координатной линии $q_2 = \mathrm{const}$, $q_3 = \mathrm{const}$, т. е. он направлен по координатной оси $[q_1]$ в сторону возрастания q_1.

Так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\,\mathbf{k},$$

то

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1. \tag{9.40}$$

Таким образом, единичный вектор $\mathbf{e}_1$ равен

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}. \tag{9.41}$$

Аналогично можно получить

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \tag{9.42}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}, \tag{9.43}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Коэффициенты H_1, H_2, H_3 называются *коэффициентами Ламе*.

Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты, т. е. такие, у которых координатные оси взаимно перпендикулярны. Условием ортогональности является

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3;\quad i \neq j). \tag{9.45}$$

Скорость точки может быть найдена посредством дифференцирования соотношения (9.38)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{9.46}$$

но так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_2\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = H_3\mathbf{e}_3,$$

то

$$\mathbf{v} = \dot{q}_1 H_1 \mathbf{e}_1 + \dot{q}_2 H_2 \mathbf{e}_2 + \dot{q}_3 H_3 \mathbf{e}_3. \tag{9.47}$$

Учитывая, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ по предположению взаимно перпендикулярны, для модуля скорости имеем

$$v = \sqrt{\dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2}. \tag{9.48}$$

Проекции скорости на координатные оси определяются выражениями

$$v_{q_1} = \dot{q}_1 H_1, \quad v_{q_2} = \dot{q}_2 H_2, \quad v_{q_3} = \dot{q}_3 H_3. \tag{9.49}$$

Проекция ускорения точки на координатную ось $[q_1]$, очевидно, будет равна

$$w_{q_1} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1};$$

отсюда

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right). \tag{9.50}$$

Взяв частную производную от выражения (9.46) по $\dot{q}_1$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}. \tag{9.51}$$

Так как производная $\partial \mathbf{r}/\partial q_1$ зависит от координат q_1, q_2 и q_3, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_1} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_1} \dot{q}_3.$$

Дифференцируя теперь обе части равенства (9.46) по q_1, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_3} \dot{q}_3.$$

Сравнивая оба выражения, найдем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right). \tag{9.52}$$

Подставляя полученные равенства (9.51) и (9.52) в формулу (9.50), имеем

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1}.$$

Так как $\mathbf{v}^2 = v^2$, то

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_1} = v \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Аналогично

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Теперь выражение для w_{q_1} можно записать в следующей форме:

$$w_{q_1} = \frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \tag{9.53}$$

где v находится по формуле (9.48). Аналогично получаем

$$w_{q_2} = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \tag{9.54}$$

$$w_{q_3} = \frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}. \tag{9.55}$$

§ 9.10. Задачи

Задача 9.12. Найти скорость и ускорение точки в цилиндрической системе координат ρ, φ, z (§ 9.2). Координатные линии и координатные оси показаны на рис. 9.33.

Так как

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

то согласно формулам (9.40) и (9.44)

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (9.48) и (9.49), получим

$$v_\rho = \dot\rho, \quad v_\varphi = \rho\dot\varphi, \quad v_z = \dot z \qquad (9.56)$$

и

$$v = \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2}.$$

Для полярной системы координат ($\rho = r$, $z = 0$)

$$v_r = \dot r, \quad v_\varphi = r\dot\varphi, \quad v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}.$$

Имея в виду, что $v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial\dot\rho}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot\rho, \qquad \frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho^2\dot\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot z}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot z, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho\dot\varphi^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

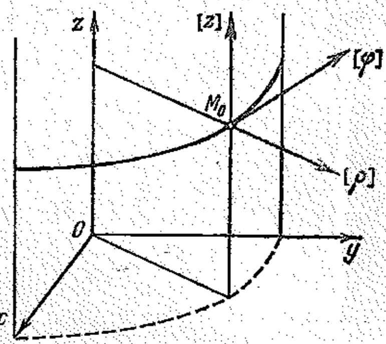


Рис. 9.33

Таким образом, по формулам (9.53), (9.54) и (9.55) получим

$$w_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2, \quad w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) = \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi, \quad w_z = \ddot z. \qquad (9.57)$$

Для полярной системы координат

$$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2, \quad w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi.$$

Задача 9.13. Найти скорость и ускорение точки в сферической системе координат r, φ, θ (рис. 9.34).

Декартовы координаты связаны со сферическими зависимостями

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

Так как

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta,$$

то согласно формуле (9.40) имеем

$$H_1 = 1.$$

Вычисляя далее

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -r\cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = -r\sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

и используя формулы (9.44), получим

$$H_2 = r\sin\theta, \quad H_3 = r.$$

Следовательно, на основании формул (9.48), (9.49) проекции скорости на координатные оси сферической системы координат равны

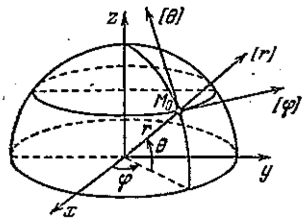


Рис. 9.34

$$v_r = \dot r, \quad v_\varphi = r\dot\varphi\cos\theta, \quad v_\theta = r\dot\theta, \qquad (9.58)$$

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\cos^2\theta + r^2\dot\theta^2.$$

Вычислив производные

$$\frac{\partial}{\partial \dot r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \dot r, \quad \frac{\partial}{\partial \dot\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = r^2\dot\varphi\cos^2\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot\theta}\left(\frac{v^2}{2}\right) = r^2\dot\theta, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = r\dot\varphi^2\cos^2\theta + r\dot\theta^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -r^2\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta,$$

найдем проекции ускорения на оси сферических координат:

$$\begin{aligned} w_r &= \ddot r - r\dot\varphi^2\cos^2\theta - r\dot\theta^2,\\ w_\varphi &= \frac{1}{r\cos\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi\cos^2\theta) = r\ddot\varphi\cos\theta + 2\dot r\dot\varphi\cos\theta - 2r\dot\varphi\dot\theta\sin\theta,\\ w_\theta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) + r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta + r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta. \end{aligned} \qquad (9.59)$$

Задача 9.14. Найти скорость и ускорение точки, движущейся равномерно по винтовой линии.

Так как в этом случае в цилиндрической системе координат

$$\rho = R = \text{const}, \quad \varphi = kt, \quad z = ut$$

(k и u постоянны), то в силу формул (9.56) имеем

$$v_\rho = 0, \quad v_\varphi = Rk, \quad v_z = u,$$

и, следовательно,

$$v = \sqrt{R^2k^2 + u^2}.$$

Используя формулы (9.57), получим

$$w_\rho = -Rk^2, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0.$$

Так как $v = \text{const}$, то $w_\tau = 0$ и $w_n = w = Rk^2$. Радиус кривизны

$$\rho = \frac{R^2k^2 + u^2}{Rk^2}.$$

Задача 9.15. Точка движется по земной поверхности (принимаемой за сферу радиуса R), имея северную и восточную составляющие скорости соответственно равными v_N и v_O. Найти ускорение точки относительно Земли, не учитывая ее вращения. Составляющие v_N и v_O считать известными функциями времени.

Из условия задачи находим

$$r = R = \text{const}, \quad \dot\varphi = \frac{v_O}{R\cos\theta}, \quad \dot\theta = \frac{v_N}{R}.$$

В соответствии с формулами (9.55) получим

$$w_r = -\frac{v_O^2 + v_N^2}{2}, \quad w_\varphi = \dot v_O - \frac{v_O v_N}{R}\operatorname{tg}\theta, \quad w_\theta = \dot v_N + \frac{v_O^2}{R}\operatorname{tg}\theta.$$

Глава X

ОСНОВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 10.1. Задание движения твердого тела

При движении твердого тела отдельные его точки движутся в общем случае по различным траекториям и имеют в каждый момент времени различные скорости и ускорения. Вместе с тем имеются кинематические характеристики, одинаковые для всех точек твердого тела. Основными задачами кинематики и твердого тела являются установление способа задания его движения и изучение кинематических характеристик, присущих телу, а также определение траекторий, скоростей и ускорений всех точек тела.

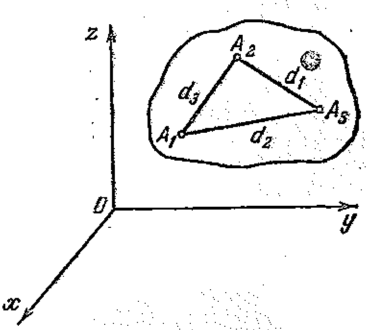


Рис. 10.1

Необходимо сначала уточнить понятие «задание движения твердого тела». Мы будем говорить, что движение твердого тела задано, если имеется способ определения положения любой его точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе координат.

Может сначала показаться, что для задания движения твердого тела требуется задать движение каждой его точки, т. е. необходимо иметь бесконечное множество уравнений движения. На самом деле это не так, ибо перемещения отдельных точек связаны условием неизменяемости расстояний между ними.

Покажем, что положение твердого тела в общем случае вполне определяется заданием шести независимых параметров. Для этого возьмем в теле три не лежащие на одной прямой точки (рис. 10.1) A_1, A_2, A_3 с координатами

$$x_k = x_k(t), \quad y_k = y_k(t), \quad z_k = z_k(t) \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{10.1}$$

Так как расстояния d_1, d_2, d_3 между точками твердого тела не изменяются, то координаты точек должны удовлетворять трем уравнениям:

$$\begin{gathered}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_3^2,\\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = d_1^2,\\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = d_2^2.\end{gathered} \tag{10.2}$$

Следовательно, из девяти координат (10.1) независимых только шесть, остальные три определяются из уравнений (10.2). Если взять еще одну точку A_4 с координатами x_4, y_4, z_4, то эти координаты должны будут удовлетворять трем уравнениям вида (10.2), выражающим неизменность расстояния до ранее выбранных точек A_1, A_2, A_3. Таким образом, положение твердого тела относительно произвольно выбранной системы координат вполне определяется шестью независимыми параметрами.

Если твердое тело будет закреплено в какой-либо точке, то его положение будет определяться уже только тремя независимыми параметрами.

Число независимых параметров, задание которых однозначно определяет положение твердого тела в пространстве, называется *числом степеней свободы* твердого тела.

Заметим, что задание шести декартовых координат, например, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3, не является наилучшим способом задания движения твердого тела. Как будет позднее выяснено, существуют более удобные параметры, определяющие положение тела в пространстве. В каждом отдельном случае мы будем стараться выбирать независимые параметры, определяющие движение твердого тела, исходя из соображений простоты и удобства решения основных задач кинематики.

§ 10.2. Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела. *Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению.*

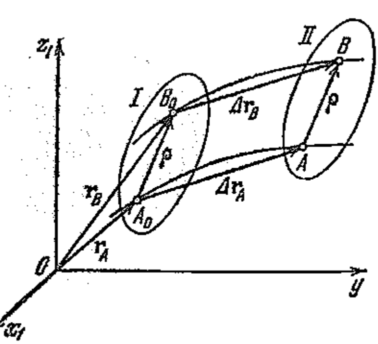


Рис. 10.2

Пусть твердое тело движется поступательно относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 10.2), $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор точки A, $\mathbf{r}_B$ — радиус-вектор точки B, а ρ — радиус-вектор, определяющий положение точки B в подвижной системе координат $Axyz$, жестко связанной с телом (на рис. 10.2 эта система не показана).

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и его движение поступательное, то вектор ρ при движении тела не меняет модуля и направления.

Из рассмотрения рис. 10.2 следует

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \rho. \tag{10.3}$$

Пусть в момент времени t тело занимало положение I, а в момент времени $t + \Delta t$ — положение II (рис. 10.2). Тогда $\Delta \mathbf{r}_A$ будет вектором перемещения точки A, а $\Delta \mathbf{r}_B$ — вектором перемещения точки B за промежуток времени Δt.

Во время движения вектор $\boldsymbol{\rho}$ не изменяется, значит, отрезки A_0B_0 и AB равны и параллельны и, следовательно, фигура A_0B_0BA — параллелограмм.

Таким образом,

$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B,$$

т. е. при поступательном движении абсолютно твердого тела перемещения всех его точек геометрически равны между собой.

Из равенства (10.3) и условия постоянства вектора $\boldsymbol{\rho}$ также следует, что *траектории точек тела, движущегося поступательно, одинаковы и получаются друг из друга параллельным смещением.*

Продифференцировав выражение (10.3) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt},$$

но так как $\boldsymbol{\rho} = \text{const}$, то $\dot{\boldsymbol{\rho}} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A,$$

т. е. *при поступательном движении твердого тела скорости всех его точек в каждый момент времени равны между собой.*

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A,$$

т. е. *ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны между собой.*

Таким образом, *при поступательном движении твердого тела все его точки движутся одинаково, так как их перемещения, скорости и ускорения геометрически равны.*

Следовательно, для определения движения твердого тела, движущегося поступательно, нет необходимости рассматривать движение всех точек тела, а достаточно рассмотреть движение одной точки тела, иначе говоря, поступательное движение твердого тела определяется движением одной точки этого тела, координаты которой должны быть заданы как функции времени.

Пользуясь понятием поступательного движения, докажем теорему о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение *).

Предположим, что точка M движется по отношению к системе координат $Axyz$, которая жестко связана с телом перемещающимся поступательно по отношению к неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$. Положение точки относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором (рис. 10.3)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho},$$

*) Более общий случай сложного движения точки будет рассмотрен в главе XIII.

где $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор начала подвижной системы координат, ρ — радиус-вектор, определяющий положение точки M в подвижной системе координат.

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_A}{dt}+\frac{d\rho}{dt}.$$

В этом равенстве $d\mathbf{r}/dt$ есть скорость точки относительно неподвижной системы координат, которая называется *скоростью точки в сложном движении* или *абсолютной скоростью* и обозначается через $\mathbf{v}_a$.

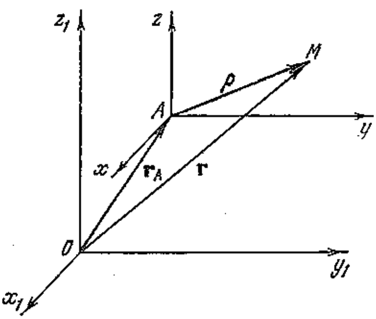


Рис. 10.3

Первое слагаемое в правой части равенства $d\mathbf{r}_A/dt$ — скорость точки A. Так как система координат $Axyz$ движется поступательно, то это одновременно будет скоростью той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M. Эта скорость называется *переносной скоростью* точки M и обозначается $\mathbf{v}_e$.

Выясним смысл производной $d\rho/dt$. Вектор ρ определен в подвижной системе координат, следовательно,

$$\rho=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

где x, y, z — координаты точки M в системе координат $Axyz$, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы этих осей.

Так как подвижная система координат перемещается поступательно, то $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — постоянные векторы и их производные по времени равны нулю, поэтому

$$\frac{d\rho}{dt}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}.$$

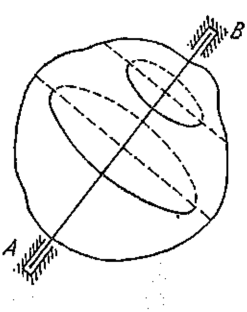


Рис. 10.4

Это равенство определяет скорость точки по отношению к подвижной системе координат и называется *относительной скоростью* точки M. Обозначим эту скорость через $\mathbf{v}_r$.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{v}_a=\mathbf{v}_e+\mathbf{v}_r. \tag{10.4}$$

Полученное равенство выражает теорему о сложении скоростей: *скорость точки в сложном движении равна сумме переносной и относительной скоростей.*

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. При движении твердого тела с двумя неподвижными точками A и B (рис. 10.4) все точки на прямой AB остаются неподвижными. Это следует из условия неизменяемости расстояний между точками твердого тела. *Прямая*

AB называется осью вращения, а движение тела называется вращательным. Нетрудно видеть, что все точки тела описывают дуги окружностей с центрами в основаниях перпендикуляров, опущенных из этих точек на ось вращения.

Возьмем на оси вращения две точки A и B и введем систему координат $Ax_1y_1z_1$ с началом в точке A (рис. 10.5). Так как положение точек A и B нам известно, то положение тела будет полностью определено, если мы будем знать в любой момент времени положение какой-либо точки C тела (не лежащей на оси вращения). Из трех координат этой точки независимой будет только одна, так как расстояния AC и BC постоянны и координаты точки связаны двумя уравнениями:

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = AC^2,$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2.$$

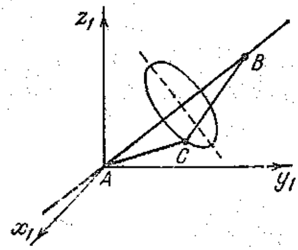


Рис. 10.5

Отсюда следует, что положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется одним параметром.

Направим ось Az_1 неподвижной системы координат $Ax_1y_1z_1$ по оси вращения тела. Введем подвижную систему координат $Axyz$, жестко связанную с телом, ось Az которой так же направим по оси вращения (рис. 10.6). Положение тела будет полностью определено, если задан угол $\varphi = \varphi(t)$ между неподвижной плоскостью x_1Az_1 и подвижной плоскостью (жестко связанной с телом) xAz (рис. 10.6). Этот угол называется *углом поворота тела.*

Для однозначного определения положения тела необходимо знать не только величину, но и направление отсчета угла φ. Условимся считать положительным направлением отсчета направление против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси Oz_1.

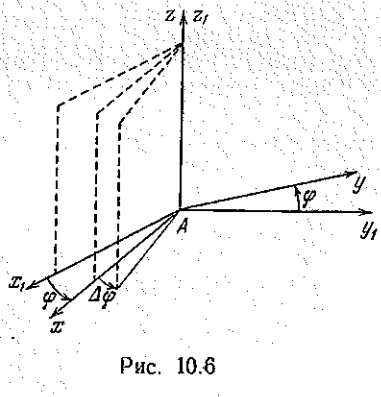


Рис. 10.6

Характер вращательного движения твердого тела целиком определяется заданием угла его поворота как функции времени. Главными кинематическими характеристиками вращательного движения тела в целом будут *угловая скорость* и *угловое ускорение*, к определению которых мы и перейдем.

Пусть в момент времени t угол между неподвижной полуплоскостью x_1Az_1 и подвижной полуплоскостью xAz равен $\varphi(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ равен $\varphi(t + \Delta t)$. Это значит, что за промежуток времени Δt подвижная плоскость, а следовательно, и тело повернулись на угол

$$\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t).$$

Отношение угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за который тело повернулось на этот угол, называется *средней угловой скоростью тела* за промежуток времени Δt

$$(\omega_z)_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *угловой скоростью тела* в данный момент времени

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{10.5}$$

Введенная таким образом угловая скорость ω_z может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от закона изменения угла φ. Абсолютное значение угловой скорости будем обозначать через ω, т. е. $\omega = |d\varphi/dt|$.

Если угол поворота измеряется в радианах, а время — в секундах, то единицей измерения угловой скорости будет рад/с. В технике часто при равномерном вращении тела пользуются *числом оборотов в минуту*. Зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту определяется по следующей формуле:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с},$$

где n — число оборотов в минуту.

Пусть теперь в момент времени t угловая скорость вращения равна $\omega_z(t)$, а в момент $t+\Delta t$ равна $\omega_z(t+\Delta t)$; тогда за промежуток времени Δt приращение угловой скорости будет равно

$$\Delta\omega_z = \omega_z(t+\Delta t) - \omega_z(t).$$

Средним угловым ускорением тела за промежуток времени Δt будем называть отношение приращения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, т. е.

$$(\varepsilon_z)_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *угловым ускорением тела* в данный момент времени

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \tag{10.6}$$

так как

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение, характеризующее изменение угловой скорости с течением времени, равно производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота. Модуль углового ускорения обозначается буквой ε.

Единица измерения углового ускорения — рад/с^2.

Весьма полезным для дальнейшего изучения кинематики твердого тела является введение в рассмотрение *вектора угловой скорости* и *вектора углового ускорения.*

Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, мы будем называть вектор, модуль которого равен абсолютному значению производной угла поворота тела по времени, направленный вдоль оси вращения в ту сторону откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

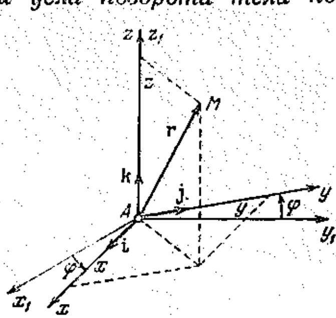


Рис. 10.7

Учитывая ранее введенное определение направления положительного отсчета угла φ, вектор угловой скорости можно определить по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{k} = \omega_z\mathbf{k}, \qquad (10.7)$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси Oz.

Из этой формулы следует, что при $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ направление вектора ω совпадает с направлением вектора $\mathbf{k}$, а при $\omega_z = \dot{\varphi} < 0$ вектор ω направлен в сторону, противоположную направлению вектора $\mathbf{k}$.

Вектором углового ускорения будем называть вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости, т. е.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\mathbf{k} = \varepsilon_z\mathbf{k}, \qquad (10.8)$$

где $\varepsilon_z = d^2\varphi/dt^2$. Из формулы (10.8) следует, что вектор ε направлен, как и вектор ω, вдоль оси вращения.

Величины ω_z и ε_z представляют *проекции* векторов угловой скорости ω и углового ускорения ε на ось вращения.

Перейдем к нахождению скорости и ускорения любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Пусть единичные векторы координатных осей x, y, z, соответственно будут $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ (рис. 10.7). Радиус-вектор произвольной точки M можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad (10.9)$$

где x, y, z — координаты точки (постоянные величины).

Скорость точки M будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \qquad (10.10)$$

Так как вектор $\mathbf{k}$ неподвижен, то $\dot{\mathbf{k}} = 0$; что же касается производных векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, то мы уже вычисляли их, рассматривая движение точки в полярной системе координат. Если обозначить $\mathbf{r}^0 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{p}^0 = \mathbf{j}$, то формулы (9.15) и (9.16) примут вид

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\varphi}\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\dot{\varphi}\mathbf{i}.$$

Подставляя в формулу (10.10) эти производные и учитывая, что $\dot{\varphi} = \omega_z$, получим

$$\mathbf{v} = x\omega_z\mathbf{j} - y\omega_z\mathbf{i}. \tag{10.11}$$

Отсюда следует, что проекции вектора скорости точки M на оси x, y и z соответственно равны

$$v_x = -y\omega_z, \quad v_y = x\omega_z, \quad v_z = 0. \tag{10.12}$$

Так как векторное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z\mathbf{i} + x\omega_z\mathbf{j}$$

имеет те же проекции на оси x, y и z, что и вектор скорости $\mathbf{v}$, то имеем

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{10.13}$$

иначе говоря, *скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.*

Из формулы (10.13) следует, что

$$v = \omega r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \omega\rho,$$

т. е. *модуль скорости любой точки твердого тела равен произведению модуля угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения. Направлен же вектор скорости по касательной к окружности, по которой перемещается точка M, в сторону ее движения.*

Взяв производную по времени от обеих частей равенства (10.13), получим

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Но $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение, а $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ — скорость точки M. Тогда

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ направлен по касательной к траектории точки (к окружности радиуса ρ), т. е. параллельно скорости (так как вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен по оси вращения (рис 10.8)). Эта составляющая ускорения является касательной составляющей ускорения точки M тела. В дальнейшем будем называть эту составляющую *вращательным ускорением*, т. е.

$$\mathbf{w}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r},$$

Это название связано с тем, что с такой составляющей ускорения мы встретимся при изучении более сложного движения тела, когда вектор $\mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ уже не будет являться касательным ускорением точки M.

Численное значение вращательного ускорения равно

$$w^{вр} = \varepsilon r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{\varepsilon}) = \varepsilon\rho.$$

Вектор $\mathbf{\omega} \times \mathbf{v}$ направлен в плоскости окружности радиуса ρ от точки M к точке C, т. е. направлен к оси вращения по нормали к траектории и является нормальным ускорением точки M. Этот вектор

$$\mathbf{w}^{oc} = \mathbf{\omega} \times \mathbf{v},$$

направленный к оси вращения, будем называть *осестремительным* ускорением.

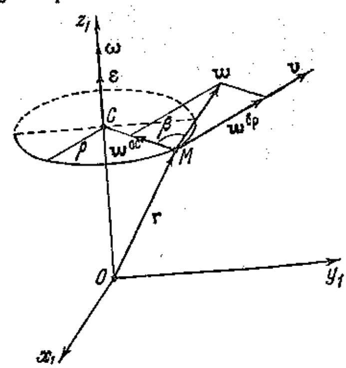


Рис. 10.8

Так как вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{\omega}$, то численное значение осестремительного ускорения равно

$$w^{oc} = \omega v = \omega^2\rho.$$

Модуль полного ускорения точки M будет

$$w = \sqrt{(w^{oc})^2 + (w^{вр})^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол β, образованный векторами полного и осестремительного ускорений, определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w^{вр}}{w^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Задача 10.1. Стрелка гальванометра длиной l движется по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$, где φ_0 — угол максимального отклонения стрелки от положения $\varphi = 0$, а T — период колебаний. Найти модуль и направление ускорения конца стрелки гальванометра в момент времени $t = T/4$.

Угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны

$$\omega_z = \dot\varphi = \frac{2\pi}{T}\varphi_0\cos\frac{2\pi}{T}t, \quad \varepsilon_z = \ddot\varphi = -\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi_0\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Модуль вращательного ускорения будет

$$w^{вр} = l\varepsilon = l\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi_0\left|\sin\frac{2\pi}{T}t\right|,$$

а модуль осестремительного ускорения

$$w^{oc} = l\omega^2 = l\frac{4\pi^2}{T^2}\varphi_0^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t.$$

При $t = T/4$

$$w^{вр} = l\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,\varphi_0, \quad w^{ос} = 0.$$

В момент $t = T/4$, угол $\varphi = \varphi_0$, т. е. стрелка доходит до своего крайнего положения. В этот момент времени скорость конца стрелки $v = l\omega = 0$, а ускорение будет равно модулю вращательного ускорения.

Глава XI

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 11.1. Задание движения

Движение твердого тела называется плоским, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Примером плоского движения тела может служить качение цилиндра по горизонтальной плоскости, при котором его основание остается все время параллельным плоскости yz (рис. 11.1).

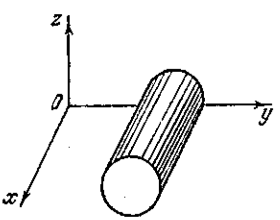


Рис. 11.1

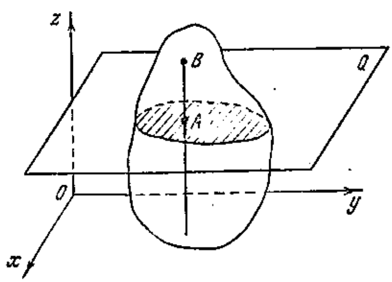


Рис. 11.2

Рассмотрим произвольное плоское движение твердого тела. Пусть все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости xy (рис. 11.2). Из определения плоского движения и из свойств твердого тела (углы между любыми прямыми, фиксированными в твердом теле, сохраняются неизменными) следует, что любая прямая AB, проведенная в теле перпендикулярно плоскости xy, будет перемещаться поступательно, т. е. траектории, скорости и ускорения всех точек этой прямой будут одинаковы.

Таким образом, для определения движения тела необходимо знать движение лишь одной точки на каждой прямой, проведенной перпендикулярно плоскости xy. Взяв точки в одной плоскости, параллельной плоскости xy, *мы можем утверждать, что плоское движение твердого тела вполне определяется движением плоской фигуры, полученной от пересечения тела любой плоскостью Q, параллельной плоскости xy* (см. рис. 11.2).

Итак, задание движения твердого тела сводится к заданию движения одного его сечения. Поэтому в дальнейшем будем изображать только плоскую фигуру — сечение тела и изучать движение точек этого сечения в его плоскости.

Пусть $A(x_{1A}, y_{1A})$ и $B(x_{1B}, y_{1B})$ — две точки плоской фигуры, находящейся в плоскости Ox_1y_1 (рис. 11.3, *а*). Так как расстояние d между этими точками остается неизменным

$$(x_{1A}-x_{1B})^2+(y_{1A}-y_{1B})^2=d^2,$$

то из четырех координат независимых только три. Присоединение третьей точки $C(x_{1C}, y_{1C})$ не увеличивает числа независимых координат, ибо две новые координаты x_{1C} и y_{1C} должны удовлетворять

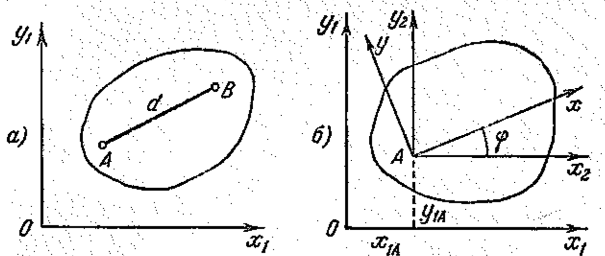


Рис. 11.3

двум равенствам, выражающим неизменность расстояний до ранее выбранных точек A и B. Таким образом, для описания плоского движения тела требуется знать три независимые координаты как функции времени.

Свяжем жестко с плоской фигурой систему координат Axy. Тогда положение системы Axy, а вместе с ней и положение плоской фигуры относительно системы координат Ox_1y_1 будет вполне определено заданием координат x_{1A} и y_{1A} точки A и углом φ между осями Ax_2 и Ax — см. рис. 11.3, *б* (оси Ax_2 и Ay_2 соответственно параллельны осям Ox_1 и Oy_1 и перемещаются при движении фигуры поступательно). Следовательно, три функции времени

$$x_{1A}=x_{1A}(t),\quad y_{1A}=y_{1A}(t),\quad \varphi=\varphi(t) \tag{11.1}$$

определяют положение плоской фигуры в любой момент времени. Равенства (11.1) называются *уравнениями движения плоской фигуры* или *уравнениями плоского движения твердого тела.*

§ 11.2. Скорости точек тела при плоском движении

Найдем формулы, позволяющие при заданных функциях (11.1) определить координаты любой точки плоской фигуры.

Пусть система координат Ox_1y_1 является неподвижной системой, а система координат Ax_2y_2, имеющая начало в произвольно выбранной точке A плоской фигуры, движется поступательно. Систему координат Axy жестко свяжем с плоской фигурой.

Радиус-вектор $\mathbf{r}_B$, определяющий положение точки B относительно неподвижной системы координат Ox_1y_1 (рис. 11.4), можно задать при помощи двух векторов: $\mathbf{r}_A$, определяющего положение точки A в системе отсчета Ox_1y_1, и ρ, определяющего положение точки B в системе отсчета Ax_2y_2,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}. \tag{11.2}$$

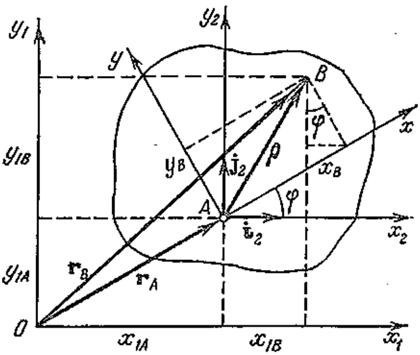


Рис. 11.4

Зная координаты x_{1A} и y_{1A} точки A и координаты x_B и y_B точки B в системе координат Axy, а также угол φ между осями Ax_2 и Ax, можно определить координаты x_{1B} и y_{1B} точки B по формулам:

$$\begin{aligned} x_{1B}(t) &= x_{1A}(t) + x_B \cos\varphi(t) - \\ &\quad - y_B \sin\varphi(t), \\ y_{1B}(t) &= y_{1A}(t) + x_B \sin\varphi(t) + \\ &\quad + y_B \cos\varphi(t). \end{aligned} \tag{11.3}$$

Напомним, что координаты x_B и y_B — постоянные величины.

Продифференцировав по времени x_{1B} и y_{1B}, найдем проекции скорости точки B на координатные оси:

$$\dot{x}_{1B} = \dot{x}_{1A} - x_B\dot{\varphi}\sin\varphi - y_B\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y}_{1B} = \dot{y}_{1A} + x_B\dot{\varphi}\cos\varphi - y_B\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{11.4}$$

К этому же результату можно прийти, дифференцируя непосредственно тождество (11.2),

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{11.5}$$

Заметим, что $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$, $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$. Что же касается $d\boldsymbol{\rho}/dt$, то это есть скорость точки B относительно подвижной системы координат Ax_2y_2, т. е. относительная скорость (см. § 10.2). Введем для нее обозначение $\mathbf{v}_{BA}$:

$$\mathbf{v}_{BA} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

Движение тела относительно системы координат Ax_2y_2 представляет собой вращение тела вокруг оси Az_2, направленной перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 11.4) на читателя. Таким образом, скорость $\mathbf{v}_{BA}$ есть скорость точки B при вращении тела вокруг оси Az_2. Для определения этой скорости мы уже получили формулу (§ 10.2)

$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{\rho},$$

где ω_A — угловая скорость вращения фигуры вокруг точки A (вокруг оси Az_2), которую в дальнейшем будем называть *полюсом*.

Формула (11.5) принимает теперь вид

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \tag{11.6}$$

т. е. *скорость какой-либо точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса A и скорости точки B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A.*

Покажем, что угловая скорость вращения фигуры не зависит от выбора полюса. Пусть A и B — две какие-нибудь точки плоской фигуры. Пусть полюсу A соответствует угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_A$, а полюсу B — угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_B$. Найдем скорость точки B, приняв за полюс точку A

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \boldsymbol{\rho}.$$

Приняв теперь за полюс точку B, найдем скорость точки A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (-\boldsymbol{\rho}).$$

Сложив оба равенства, получим

$$(\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B) \times \boldsymbol{\rho} = 0.$$

Но вектор $\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B$ перпендикулярен плоскости фигуры, и, значит, полученное равенство может выполняться только при $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B$. Таким образом, нет надобности в дальнейшем сохранять индекс полюса в обозначении вектора угловой скорости, т. е. $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}$.

Формула (11.6) может быть записана теперь в виде

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{11.7}$$

Если заметить, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_{2B} & y_{2B} & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$x_{2B} = x_B \cos\varphi - y_B \sin\varphi, \quad y_{2B} = x_B \sin\varphi + y_B \cos\varphi, \quad \omega_z = \dot{\varphi},$$

то из (11.7) после проектирования на оси координат можно получить уже ранее полученные формулы (11.4).

Так как $\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$, то модуль скорости

$$v_{BA} = \omega \cdot AB,$$

ибо вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости чертежа. Отметим, что вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен также $\overline{AB}$. Направление вращения плоской фигуры вокруг полюса определяется по знаку проекции угловой скорости на ось Az_2. Так как $\omega_z = \dot{\varphi}$, то при $\omega_z > 0$ вращение происходит против хода часовой стрелки и при $\omega_z < 0$ — по ходу часовой стрелки.

На рис. 11.5, *а* и *б* показано, как, зная скорость точки A, можно найти скорость точки B при $\omega_z > 0$ и $\omega_z < 0$.

Из формулы (11.7) следует одна полезная теорема:

При плоском движении проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой.

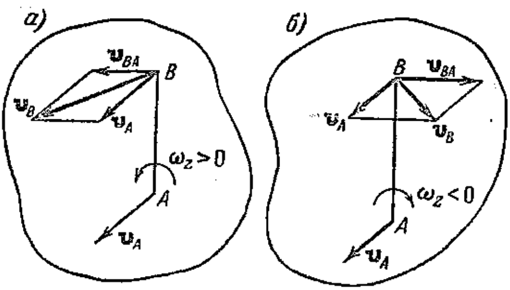


Рис. 11.5

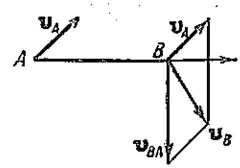


Рис. 11.6

Выберем положительное направление для оси AB, как указано на рис. 11.6. Воспользуемся далее формулой (11.7)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}.$$

Проектируя это равенство на направление AB, получим

$$(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB} + (\mathbf{v}_{BA})_{AB}.$$

Последнее слагаемое в этом соотношении равно нулю, так как вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен AB, и, следовательно,

$$(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB}.$$

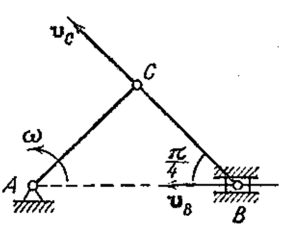


Рис. 11.7

Задача 11.1. Определить скорость ползуна B кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 11.7, если $AC = CB = l$ и известна угловая скорость ω кривошипа AC в момент времени, когда AC и BC взаимно перпендикулярны.

На основании доказанной теоремы

$$(\mathbf{v}_C)_{BC} = (\mathbf{v}_B)_{BC}, \qquad v_C = v_B \cos(\pi/4),$$

откуда $v_B = v_C\sqrt{2} = \omega l\sqrt{2}$, так как $v_C = \omega l$.

Определения и теоремы этого параграфа можно использовать для графического нахождения скоростей точек плоской фигуры.

§ 11.3. План скоростей

Приступая к графическому нахождению скоростей точек плоской фигуры, будем считать заданными модуль и направление скорости одной точки и направление скорости другой точки.

Пусть, например, известны вектор скорости точки A и направление скорости точки B (рис. 11.8, *а*). Определим сначала модуль скорости точки B, а затем векторы скоростей точек C и D.

Скорость точки B определяется формулой (11.7)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}.$$

Так как нам известны вектор $\mathbf{v}_A$ и направления векторов $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{BA}$ (напомним, что вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен отрезку AB), то можно получить графическое решение уравнения (11.7). Для этого из произвольно выбранного полюса p (рис. 11.8, б) в произвольно выбранном масштабе отложим вектор $\overline{pa} = \mathbf{v}_A$.

Если бы нам была известна скорость $\mathbf{v}_{BA}$, то, отложив от точки a вектор $\overline{ab} = \mathbf{v}_{BA}$, мы получили бы точку b и, очевидно, вектор $\overline{pb}$ был бы равен вектору скорости $\mathbf{v}_B$. Но нам известно лишь направление вектора $\mathbf{v}_{BA}$ ($\mathbf{v}_{BA} \perp AB$). Поэтому поступим следующим образом: через точку a проведем прямую, перпендикулярную отрезку AB. Конец вектора $\mathbf{v}_{BA}$ должен лежать на этой прямой. Проведем теперь из полюса p прямую, параллельную вектору скорости точки B. Пересечение этих прямых и определит точку b, причем вектор $\overline{ab} = \mathbf{v}_{BA}$, а вектор $\overline{pb} = \mathbf{v}_B$.

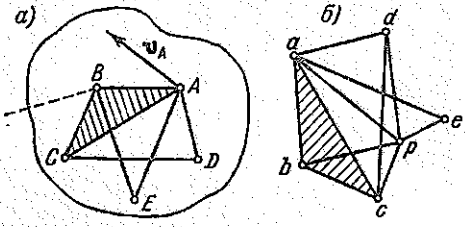


Рис. 11.8

Зная теперь векторы скоростей точек A и B, найдем скорость точки C. На основании формул

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA},$$
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$$

можно записать:

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}. \quad (11.8)$$

Проведем из точки a прямую перпендикулярно отрезку AC (так как $\mathbf{v}_{CA} \perp AC$). Конец вектора $\mathbf{v}_{CA}$ должен лежать на этой прямой. Из точки b проведем прямую перпендикулярно отрезку BC ($\mathbf{v}_{CB} \perp BC$). Конец вектора $\mathbf{v}_{CB}$ лежит на этой прямой. Следовательно, точка пересечения прямых, проведенных нами из точек a и b, определит точку c; в соответствии с равенством (11.8) будем иметь

$$\overline{ac} = \mathbf{v}_{CA}, \quad \overline{bc} = \mathbf{v}_{CB}.$$

Соединим точки p и c прямой, получим

$$\overline{pc} = \mathbf{v}_C.$$

Для нахождения скорости точки D следует использовать формулы

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA}, \quad \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{DC}$$

и провести аналогичные построения.

Фигура $abced$ (рис. 11.8, б) представляет собой графическую картину распределения скоростей точек плоской фигуры и называется *планом скоростей*. Точки a, b, c, e и d называются вершинами, а точка p — полюсом плана скоростей; векторы $\overline{pa}$, $\overline{pb}$, $\overline{pc}$, $\overline{pe}$ и $\overline{pd}$ называются *лучами* и представляют собой скорости соответствующих точек. Векторы, соединяющие вершины плана скоростей, т. е. векторы $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{ae}$, $\overline{ad}$, $\overline{be}$ и $\overline{cd}$, равны скоростям точек B, C, E, D при вращении фигуры вокруг соответствующих полюсов.

Легко показать, что треугольник относительных скоростей на плане скоростей подобен соответствующему треугольнику плоской фигуры и повернут по отношению к нему на угол 90°. Так как $ab \perp AB$, $ac \perp AC$, $bc \perp BC$, то

$$\angle abc = \angle ABC, \quad \angle acb = \angle ACB, \quad \angle cab = \angle CAB,$$

а следовательно, треугольник abc подобен треугольнику ABC и повернут по отношению к нему на угол 90°.

Построив план скоростей, можно определить угловую скорость плоской фигуры. Так как $\overline{ab} = \mathbf{v}_{BA}$, $\overline{bc} = \mathbf{v}_{CB}$ и т. д., то, приняв во внимание принятый масштаб построения плана скоростей, угловую скорость найдем по формуле

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \dots \tag{11.9}$$

Задача 11.2. Определить скорость точки D механизма, изображенного на рис. 11.9, *а*, путем построения плана скоростей, если известно, что угловая скорость стержня O_1A равна ω_0.

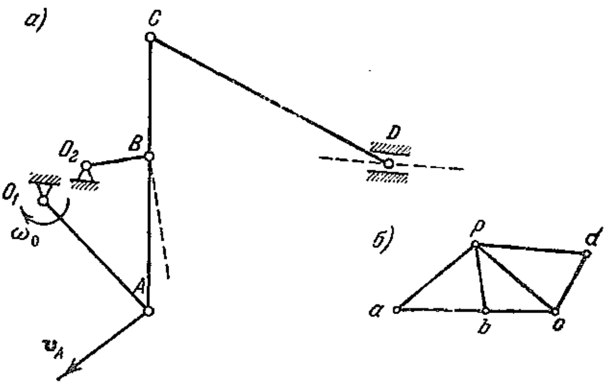


Рис. 11.9

Скорость точки A будет равна по модулю $v_A = O_1A \cdot \omega_0$ и направлена, как показано на рисунке. Направление скорости точки B перпендикулярно стержню O_2B. Для определения скорости точки D мы сначала должны найти скорость точки C, принадлежащей как стержню AC, так и стержню CD.

Отложим от полюса p вектор $\overline{pa} = \mathbf{v}_A$, из точки a проведем прямую, перпендикулярную стержню AB (рис. 11.9, *б*). Прямая, проведенная из точки p параллельно направлению скорости точки B, пересечет прямую, проведенную из точки a, в точке b и, следовательно, вектор $\overline{pb}$ будет равен $\mathbf{v}_B$. Точку c на плане скоростей получить путем нахождения точки пересечения прямых линий, проведенных из точки a перпендикулярно стержню AC и из точки b перпендикулярно BC, нельзя, так как эти линии сливаются. Поэтому для нахождения точки c воспользуемся соотношениями (11.9):

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC}.$$

Это значит, что точка b делит отрезок ac в том же отношении, что и точка B — отрезок AC. Таким образом находим точку c. Вектор $\overline{pc} = \mathbf{v}_C$.

Теперь проведем из точки p прямую, параллельную направлению скорости точки D, а из точки c — прямую, перпендикулярную стержню CD. Пересечение этих прямых определит точку d, причем $\overline{pd} = \mathbf{v}_D$.

§ 11.4. Мгновенный центр скоростей. Центроиды

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем теорему о существовании мгновенного центра скоростей: *если угловая скорость плоской фигуры отлична от нуля, то мгновенный центр скоростей существует.*

Пусть скорость $\mathbf{v}_A$ произвольной точки плоской фигуры отлична от нуля (в противном случае точка A была бы мгновенным центром скоростей).

По знаку угловой скорости $\omega_z = \dot{\varphi}$ определяем направление вращения плоской фигуры вокруг точки A и в этом направлении откладываем от точки A отрезок $AP = v_A/\omega$ перпендикулярно скорости $\mathbf{v}_A$.

На рис. 11.10 предполагается, что $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$, и поэтому отрезок AP повернут относительно $\mathbf{v}_A$ против хода часовой стрелки.

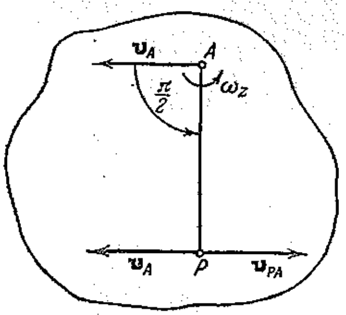


Рис. 11.10

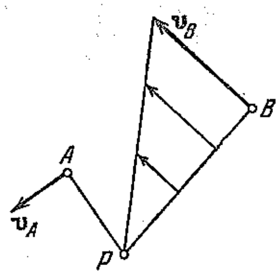


Рис. 11.11

Докажем, что скорость полученной точки P равна нулю, т. е. эта точка и есть мгновенный центр скоростей.

В соответствии с формулой (11.7) имеем

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA}.$$

Так как скорость $\mathbf{v}_{PA}$ перпендикулярна AP, то вектор $\mathbf{v}_{PA}$ параллелен $\mathbf{v}_A$. Кроме того, в соответствии с правилом построения отрезка AP векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_{PA}$ имеют противоположные направления. Модуль скорости $\mathbf{v}_{PA}$ равен

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \frac{v_A}{\omega}\,\omega = v_A.$$

Два вектора, равных по величине и противоположно направленных, в сумме равны нулю. Следовательно,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA} = 0,$$

т. е. скорость точки P равна нулю.

Выберем теперь за полюс точку P. Тогда скорость произвольной точки A плоской фигуры найдется по формуле (рис. 11.11)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \overline{PA} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{PA}, \tag{11.10}$$

так как $\mathbf{v}_P = 0$.

Отсюда следует, что скорости точек тела при его плоском движении распределяются точно так же, как и при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет мгновенная ось, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Таким образом, скорости всех точек фигуры перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей ($\mathbf{v}_A \perp AP$), а модули скоростей пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей ($v_A = \omega \cdot PA$).

Зная положение мгновенного центра скоростей, можно найти скорости всех точек плоской фигуры, если известна скорость какой-либо ее точки.

В самом деле, пусть известна, например, скорость $\mathbf{v}_A$ точки A; тогда из равенства $v_A = \omega \cdot AP$ найдем $\omega = v_A/AP$ и скорость

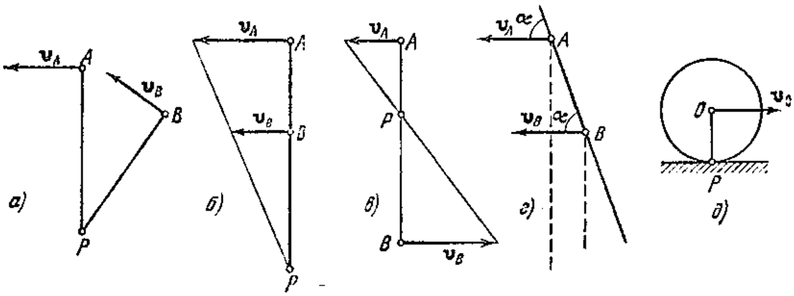


Рис. 11.12

любой точки B будет $v_B = v_A \cdot PB/PA$. Соединив конец вектора $\mathbf{v}_B$ с точкой P, получим эпюру распределения скоростей вдоль отрезка PB (см. рис. 11.11).

Используя основные свойства мгновенного центра скоростей, можно определить его положение и в других случаях. На рис. 11.12, *а* показано, как находится эта точка, когда известны направления скоростей двух точек. Из точек A и B восставлены перпендикуляры к $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$. Точка P находится на их пересечении. Если скорости точек A и B параллельны и $AB \perp \mathbf{v}_A$, то для определения мгновенного центра скоростей следует воспользоваться свойством пропорциональности модулей скоростей расстояниям точек до мгновенного центра скоростей. На рис. 11.12, *б* и *в* показано, как находится мгновенный центр в этих случаях. На рис. 11.12, *г* показан случай, когда $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_A$ параллельны, но $\mathbf{v}_A$ не перпендикулярна отрезку AB. Очевидно, что в этом случае прямые, перпендикулярные $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$, пересекаются в бесконечности и мгновенного центра скоростей не существует. В самом деле, на основании теоремы о проекциях скоростей имеем $v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha$. Отсюда $v_A = v_B$ и $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$. Из формулы (11.7) следует, что при этом $\omega \times \overline{AB} = 0$, т. е. угловая скорость фигуры равна нулю ($\omega = 0$). Значит, в данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры равны по модулю и направлению и, следовательно, точки, линейная скорость которой равна нулю, не существует.

При качении без скольжения одного тела по поверхности другого (рис. 11.12, *д*) мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тел (так как при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения равна нулю).

Использование мгновенного центра скоростей очень часто упрощает решение задачи.

Задача 11.3. В двухползунковом кривошипном механизме кривошип $OA = r = 15$ см, вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с (рис. 11.13). Длины шатунов равны между собой ($AB = CD = l = 60$ см), $AC = l/3$. При горизонтальном (правом) положении кривошипа OA определить: 1) угловые скорости шатунов AB и CD; 2) скорость ползуна D.

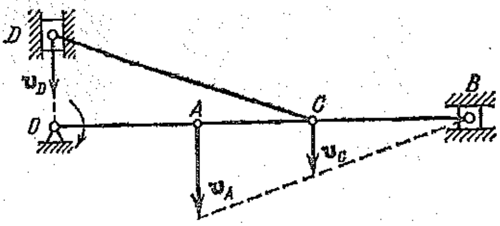


Рис. 11.13

В рассматриваемом механизме звенья AB и CD совершают плоское движение. Определим положение мгновенных центров скоростей шатунов AB и CD. Восставляя перпендикуляры к направлениям скорости точки A и скорости точки B (точка B движется по горизонтальной прямой), убеждаемся, что мгновенный центр скоростей шатуна AB в данный момент времени совпадает с точкой B (рис. 11.13).

Модуль скорости точки A как точки кривошипа OA равен $v_A = \omega_0 r$, с другой стороны, модуль скорости этой же точки как точки шатуна AB будет

$$v_A = \omega \cdot AB,$$

где ω — угловая скорость шатуна AB.

Следовательно, $\omega_0 r = \omega \cdot AB$ и

$$\omega = \frac{\omega_0 r}{AB} = 0{,}5 \text{ рад/с}.$$

Модуль скорости точки C шатуна AB равен

$$v_C = \omega \cdot BC = 20 \text{ см/с}.$$

Направление вектора $\mathbf{v}_C$ перпендикулярно AB.

Так как скорости точек C и D параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна DC лежит в бесконечности и угловая скорость ω_1 шатуна DC равна нулю. Значит, $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C$ и $v_D = 20$ см/с.

В отличие от чисто вращательного движения, при плоском движении мгновенный центр скоростей меняет, вообще говоря, свое положение на плоскости. Если наклеить на фигуру, совершающую плоское движение, лист бумаги и в каждый момент времени прокалывать иглой мгновенный центр скоростей, то получатся две серии отметок: одна на неподвижной плоскости, другая на листе, связанном с фигурой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на неподвижной плоскости, называется неподвижной центроидой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на плоскости, жестко связанной с фигурой, называется подвижной центроидой.

При качении цилиндра по горизонтальной плоскости (рис. 11.12, *д*) неподвижная центроида — горизонтальная прямая, а подвижная — окружность.

В каждый момент времени подвижная и неподвижная центроиды имеют общую точку касания — мгновенный центр скоростей P, т. е. точку, скорость которой равна нулю. Поэтому плоское движение можно представить как качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

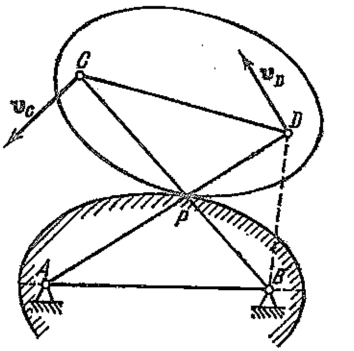


Рис. 11.14

Задача 11.4. Определить центроиды подвижного звена CD антипараллелограмма $ABCD$, у которого звено AB закреплено неподвижно, $CD = AB$, $CB = AD$.

Изобразим в точках C и D скорости $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{v}_D$. Перпендикуляры к ним пересекаются в точке P (рис. 11.14) — мгновенном центре скоростей звена CD. Треугольники ABD и CBD равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ADB = \angle CBD$ и треугольник PBD равнобедренный. Поэтому

$$AP + PB = AP + PD = AD = \text{const},$$

$$CP + PD = CP + PB = CB = \text{const}.$$

Отсюда вытекает, что точка P неподвижной плоскости, жестко связанной со звеном AB, описывает эллипс с фокусами в A и B, а в подвижной плоскости, связанной со звеном CD — эллипс с фокусами в C и D. Первая кривая является неподвижной центроидой (она заштрихована), вторая — подвижной.

§ 11.5. Ускорения точек при плоском движении. Мгновенный центр ускорений

Для определения ускорения точки плоской фигуры продифференцируем равенство (11.7) по времени:

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

В этом соотношении $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{w}_B$, $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{w}_A$ — соответственно ускорения точек B и A, $d\boldsymbol{\rho}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_{BA}$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, как и вектор $\boldsymbol{\omega}$, направлен перпендикулярно плоскости фигуры и определяется формулой

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\mathbf{k}) = \ddot{\varphi}\mathbf{k}.$$

Таким образом, ускорения точек A и B связаны между собой соотношением

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA}. \qquad (11.11)$$

Два последних слагаемых в равенстве (11.11) определяют ускорение точки B при закрепленной точке A ($\mathbf{w}_A = 0$). Поэтому их сумма

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{w}_{BA}$$

дает ускорение точки B во вращательном движении относительно системы координат Ax_2y_2.

При изучении вращательного движения мы уже выяснили, как направлены составляющие вектора ускорения $\mathbf{w}_{BA}$. Легко еще раз убедиться, пользуясь правилом составления векторного произведения, что $\omega\times\mathbf{v}_{BA}$ имеет направление, совпадающее с $\overline{BA}$ (от точки к полюсу), а $\varepsilon\times\rho$ перпендикулярно $\overline{BA}$. Сохраним за этими составляющими старые названия — осестремительного (или центростремительного) и вращательного ускорений, т. е.

$$\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}=\omega\times\mathbf{v}_{BA},\quad \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}=\varepsilon\times\rho.$$

Модули этих составляющих будут

$$w_{BA}^{\text{ос}}=\omega^2\rho=\omega^2\cdot AB,\quad w_{BA}^{\text{вр}}=\varepsilon\rho=\varepsilon\cdot AB. \tag{11.12}$$

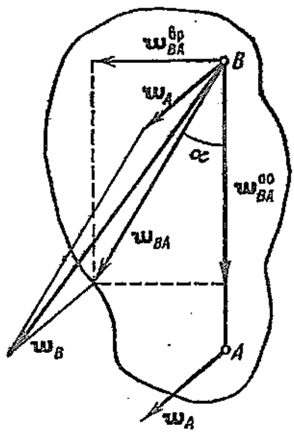


Рис. 11.15

На рис. 11.15 геометрически сложены три вектора и определено ускорение точки B при помощи формулы

$$\mathbf{w}_B=\mathbf{w}_A+\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}+\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}. \tag{11.13}$$

Таким образом, ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения полюса, осестремительного и вращательного ускорений во вращательном движении фигуры относительно полюса.

Заметим, что при решении задач, прежде чем устроить ускорение точки по формуле (11.13), необходимо вычислить угловую скорость тела, его угловое ускорение и выбрать полюс. За полюс выбирается обычно такая точка, ускорение которой легко находится из условия задачи. Иногда, зная, например, направление искомого ускорения точки, угловое ускорение можно определить по формуле (11.13).

Из (11.12) найдем угол, составленный вектором $\mathbf{w}_{BA}$ с направлением на полюс (рис. 11.15),

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{w_{BA}^{\text{ос}}}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Отсюда видно, что этот угол, во-первых, не зависит от выбора полюса и, во-вторых, для всех точек при фиксированном времени одинаков.

Модуль ускорения точки при вращении фигуры вокруг полюса также находится из равенства (11.12)

$$w_{BA}=AB\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}. \tag{11.14}$$

Он зависит от расстояния точки до полюса.

Введем понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Для построения мгновенного центра ускорений будем предполагать, что нам известны ускорение одной из точек w_A, угловая скорость ω и угловое ускорение ε, причем предполагается, что ω и ε не равны нулю одновременно. Из точки A отложим под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(\varepsilon/\omega^2)$ к ускорению w_A отрезок AQ

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{11.15}$$

При этом, если $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$, то угол α откладывается против хода часовой стрелки (рис. 11.16), при противоположном знаке $\ddot{\varphi}$ — по ходу часовой стрелки.

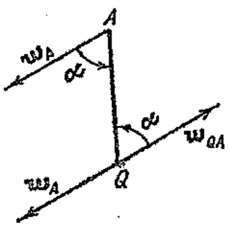


Рис. 11.16

Убедимся в том, что ускорение точки Q равно нулю. Выбрав за полюс точку A, получим

$$w_Q = w_A + w_{QA}.$$

Как мы уже отметили ранее, угол между ускорением точки относительно полюса и направлением на полюс не зависит от выбора полюса. Следовательно, w_{QA} составляет с направлением QA угол α. Такой же угол составляет и w_A с AQ. Поэтому векторы w_{QA} и w_A параллельны (рис. 11.16). В силу принятого правила отсчета угла α ускорения w_{QA} и w_A будут всегда противоположно направлены. Остается теперь установить, что они равны по модулю. Вспоминая (11.14) и подставляя (11.15), получим

$$w_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

Отсюда следует:

$$w_Q = w_A + w_{QA} = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что точка Q — мгновенный центр ускорений.

Ускорение любой точки в данный момент времени теперь может быть определено так же, как и при вращении вокруг неподвижной оси:

$$w_A = w_Q + w_{AQ} = w_{AQ} = w_{AQ}^{\text{ос}} + w_{AQ}^{\text{вр}}$$

(поскольку $w_Q = 0$).

Следует иметь в виду, что мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей, — вообще говоря, разные точки. В этом легко убедиться, рассмотрев простой пример. Допустим, диск катится по горизонтальной плоскости без скольжения (рис. 11.12, *д*) и скорость его центра O постоянна. Как мы уже знаем, мгновенный центр скоростей находится в точке касания P. Так как вектор скорости точки O постоянен, то ускорение центра диска равно нулю. Таким образом, мгновенный центр ускорений совпадает с центром диска, а мгновенный центр скоростей — с точкой касания.

§ 11.6. План ускорений

В этом параграфе мы рассмотрим методы графического определения ускорений точек плоской фигуры.

Пусть заданы скорости точек плоской фигуры (рис. 11.17) (построен план скоростей), ускорение w_A точки A и направление BB' ускорения точки B. Определим

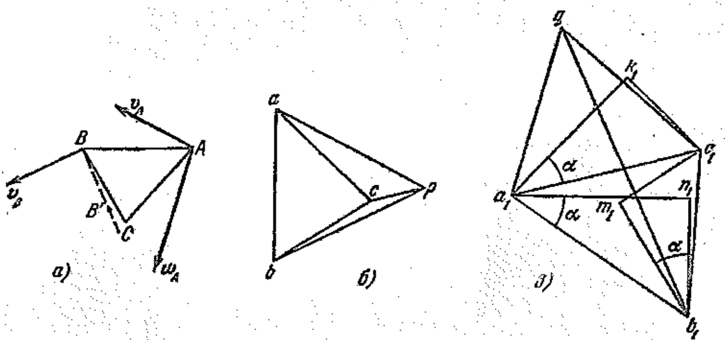


Рис. 11.17

ускорения точек B и C плоской фигуры. На основании формулы (11.13) для данных точек A и B фигуры можно записать

$$w_B = w_A + w_{BA}^{\text{вр}} + w_{BA}^{\text{ос}}.$$

В этом уравнении вектор w_A известен по модулю и направлению, вектор $w_{BA}^{\text{ос}}$ известен по направлению (он направлен от точки B к точке A), а его модуль определяется по формуле

$$w_{BA}^{\text{ос}} = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \frac{(ab)^2}{AB} = \omega^2 \cdot AB.$$

Вектор $w_{BA}^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно AB, а вектор w_B — вдоль линии BB'. Поэтому уравнение (11.13) можно графически решить следующим образом.

Выбирая соответствующий масштаб, из произвольной точки q (полюса построения) проводим вектор $\overline{qa_1}$, геометрически равный вектору w_A. К вектору $\overline{qa_1}$ прикладываем вектор $\overline{a_1n_1}$, геометрически равный вектору $w_{BA}^{\text{ос}}$. Через точку n_1 проводим прямую, перпендикулярную AB (параллельно вектору $w_{BA}^{\text{вр}}$), на этой прямой будет лежать конец вектора $w_{BA}^{\text{вр}}$ — последнего слагаемого векторной суммы, а следовательно, и конец вектора w_B. Для определения модуля вектора w_B проведем из точки q прямую, параллельную BB'. На этой прямой лежит конец вектора w_B, следовательно, конец вектора w_B будет лежать в точке b_1 пересечения прямых, проведенных параллельно векторам $w_{BA}^{\text{вр}}$ и w_B из точек n_1 и q.

Таким образом, мы построили векторы $\overline{qb_1} = \mathbf{w}_B$, $\overline{n_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$, $\overline{a_1n_1} = \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$ и $\overline{a_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}$.

Для определения ускорения точки C можем написать следующие два уравнения:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}, \quad \mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}. \qquad (11.16)$$

В первом уравнении нам известен вектор $\mathbf{w}_A$ по модулю и направлению, вектор $\mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}}$ мы знаем по направлению (он направлен от точки C к точке A), а модуль его определяется по формуле

$$w_{CA}^{\text{ос}} = \frac{v_{CA}^2}{AC}.$$

Вектор $\mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}$ известен только по направлению (он перпендикулярен AC).

Вектор $\mathbf{w}_C$ не известен ни по модулю, ни по направлению. Поэтому первое уравнение графически решить нельзя. Точно так же нельзя решить и второе уравнение, так как в него входит искомый вектор $\mathbf{w}_C$ и вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$, неизвестный по модулю.

Из уравнений (11.16) следует

$$\mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}} = \mathbf{w}_B + \mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}} + \mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}. \qquad (11.17)$$

В этом уравнении вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}}$ направлен от точки C к точке B, модуль же вектора определится из равенства

$$w_{CB}^{\text{ос}} = \frac{v_{CB}^2}{BC}.$$

Вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$ перпендикулярен отрезку CB. Таким образом, в уравнение (11.17) входят известные векторы $\mathbf{w}_A$, $\mathbf{w}_B$, $\mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}}$ и $\mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}}$ и векторы $\mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}$ и $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$, известные по направлению. Следовательно, уравнение (11.17) можно решить графически.

К построенному вектору $\overline{qa_1} = \mathbf{w}_A$ прикладываем вектор $\overline{a_1k_1} = \mathbf{w}_{CA}^{\text{ос}}$ и через точку k_1 проводим прямую, перпендикулярную вектору $\overline{a_1k_1}$. Вдоль этой прямой будет направлен вектор $\mathbf{w}_{CA}^{\text{вр}}$ и, следовательно, на этой прямой будет лежать конец вектора $\mathbf{w}_C$. К построенному вектору $\overline{qb_1} = \mathbf{w}_B$ прикладываем вектор $\overline{b_1m_1} = \mathbf{w}_{CB}^{\text{ос}}$ и через точку m_1 перпендикулярно $\overline{b_1m_1}$ проводим прямую. Вдоль этой прямой будет направлен вектор $\mathbf{w}_{CB}^{\text{вр}}$ и, следовательно, и на этой прямой будет лежать конец вектора $\mathbf{w}_C$.

Так как конец вектора $\mathbf{w}_C$ должен лежать на прямых, перпендикулярных векторам $\overline{a_1k_1}$ и $\overline{b_1m_1}$, то он лежит в точке их пересечения c_1. Таким образом, полученный вектор $\overline{qc_1}$ будет вектором ускорения точки C. Итак, мы определили графически ускорения точек B и C. Векторы $\overline{qa_1}$, $\overline{qb_1}$ и $\overline{qc_1}$, выходящие из полюса q, будут векторами ускорений точек A, B и C.

Фигура $qa_1b_1c_1q$ (рис. 11 17, *в*), представляющая собой графическую картину распределения ускорений точек в плоской фигуре, называется *планом ускорений*.

На плане ускорений векторы $\overline{a_1b_1} = \mathbf{w}_{BA}$, $\overline{a_1c_1} = \mathbf{w}_{CA}$ и $\overline{b_1c_1} = \mathbf{w}_{CB}$ суть ускорения точек B и C, обусловленные вращением фигуры вокруг соответствующих полюсов, причем

$$w_{BA} = AB\,\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad w_{CA} = AC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad w_{CB} = BC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (11.18)$$

Построив план ускорений, легко показать, что фигура $a_1b_1c_1$ подобна фигуре ABC и повернута по отношению к ней на угол $\pi - \alpha$, где α определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon/\omega^2.$$

Действительно, согласно формулам (11.18) отрезки a_1b_1, b_1c_1 и c_1a_1 пропорциональны отрезкам AB, BC и CA, поэтому $\triangle a_1b_1c_1 \sim \triangle ABC$. Далее, так как $\angle n_1a_1b_1 = \angle m_1b_1c_1 = \angle k_1a_1c_1 = \alpha$, то векторы $\overline{a_1b_1}$, $\overline{b_1c_1}$ и $\overline{c_1a_1}$ составляют с отрезками AB, BC и CA угол $\pi-\alpha$.

Если из плана скоростей мы можем определить угловую скорость плоской фигуры, то из плана ускорений можно определить угловое ускорение плоской фигуры. Действительно, так как

$$n_1b_1 = w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AB,$$

то

$$\varepsilon = \frac{n_1b_1}{AB}.$$

Следует заметить, что при всех вычислениях нужно принимать во внимание принятый масштаб построения планов скоростей и ускорений.

Задача 11.5. Определить ускорение точки D механизма, изображенного на рис. 11.18, *а*.

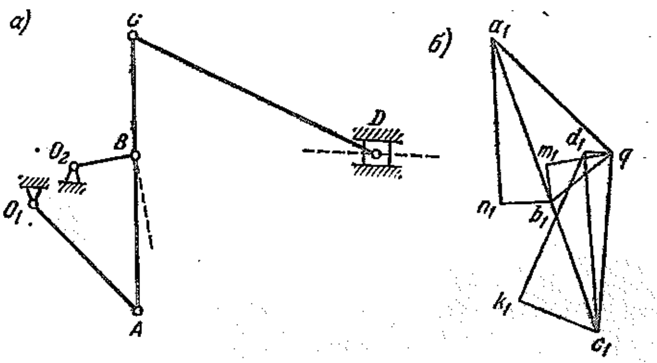


Рис. 11.18

План скоростей для этого механизма нами уже построен (рис. 11.9, *б*). Полное ускорение точки A направлено к точке O_1, так как угловая скорость ω_0 постоянна, а модуль ускорения точки A равен $w_A = O_1A \cdot \omega_0^2$. Модуль и направление ускорения точки B нам неизвестны. Определить ускорение точки B можно, например, следующим образом.

Согласно формуле (11.13) имеем

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{oc}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}.$$

Вектор $\mathbf{w}_A$ нам известен, вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{oc}}$ направлен от точки B к точке A, а его модуль равен $w_{BA}^{\text{oc}} = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \frac{(ab)^2}{AB}$ (величину ab берем из плана скоростей), вектор $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ перпендикулярен отрезку AB.

Из какой-либо произвольной точки q (рис. 11.18, *б*) отложим вектор $\overline{qa_1} = \mathbf{w}_A$ (в произвольно выбранном масштабе), к точке a_1 приложим вектор $\overline{a_1n_1} = \mathbf{w}_{BA}^{\text{oc}}$, а через точку n_1 проведем прямую, перпендикулярную отрезку AB (или вектору $\overline{a_1n_1}$). Очевидно, что конец вектора $\mathbf{w}_B$ должен лежать на этой прямой.

Так как стержень O_2B вращается вокруг точки O_2, то можно представить вектор ускорения w_B в следующем виде:

$$w_B = w^{\text{ос}}_{BO_2} + w^{\text{вр}}_{BO_2},$$

где $w^{\text{ос}}_{BO_2}$ — осестремительное ускорение точки B относительно O_2, направленное к точке O_2 и равное по модулю $w^{\text{ос}}_{BO_2} = (pb)^2/O_2B$ (величина pb берется из плана скоростей), а $w^{\text{вр}}_{BO_2}$ — вращательное ускорение точки B относительно O_2, направленное перпендикулярно O_2B. Отложим теперь от точки q вектор $\overline{qm_1} = w^{\text{ос}}_{BO_2}$, а через точку m_1 проведем прямую, перпендикулярную стержню O_2B. Конец вектора w_B должен лежать на этой прямой. Следовательно, конец вектора w_B находится в точке пересечения прямых, проведенных из точек n_1 и m_1, т. е. $w_B = \overline{qb_1}$.

Построив вектор w_B, мы можем перейти к определению ускорения точки C. Заметим, что вектор $\overline{a_1b_1} = w_{BA}$. Так как векторы w_{BA} и w_{CA} образуют с направлением стержня AC один и тот же угол α ($\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2$), то векторы $\overline{a_1b_1} = w_{BA}$ и $\overline{a_1c_1} = w_{CA}$ будут лежать на одной прямой. Для нахождения точки c_1 воспользуемся зависимостями (11.18). Из них следует, что

$$\frac{w_{BA}}{AB} = \frac{w_{CA}}{AC}, \quad \text{или} \quad \frac{a_1b_1}{AB} = \frac{a_1c_1}{AC},$$

т. е. точка c_1 делит отрезок a_1b_1 внешним образом на части, пропорциональные отрезкам, на которые точка C делит отрезок AB. Таким образом, построив точку c_1, находим что $\overline{a_1c_1} = w_{CA}$ и $\overline{qc_1} = w_C$.

Ускорение точки D определяется формулой

$$w_D = w_C + w^{\text{ос}}_{DC} + w^{\text{вр}}_{DC}.$$

Вектор $w_C = \overline{qc_1}$ мы только что нашли, вектор $w^{\text{ос}}_{DC}$ направлен от точки D к точке C и по модулю равен $w^{\text{ос}}_{DC} = (cd)^2/DC$, а вектор $w^{\text{вр}}_{DC}$ перпендикулярен стержню CD. Направление ускорения точки D известно (точка D совершает прямолинейное движение). Из точки c_1 отложим вектор $w^{\text{ос}}_{DC} = \overline{c_1k_1}$ (параллельно стержню CD). Проведя теперь из точки k_1 прямую, перпендикулярную стержню CD, найдем ее точку пересечения с прямой, проходящей через точку q и параллельной направлению ускорения точки D. Эта точка пересечения и будет точкой d_1 и, следовательно,

$$\overline{c_1d_1} = w_{DC}, \quad \overline{qd_1} = w_D.$$

§ 11.7. Задачи

Задача 11.6. В двойном кривошипно-ползунном механизме, изображенном на рис. 11.19, размеры звеньев следующие: $OA = 10$ см, $AB = CD = DE = 20$ см. Расстояние между ползунами $BC = 10\sqrt{3}$ см. Оси кривошипов O и E расположены на одной прямой с направляющей ползунов B и C. Расстояние $OE = 40\sqrt{3}$ см. Определить угловую скорость ведомого кривошипа ED в момент, когда кривошип OA перпендикулярен направляющей OE, если угловая скорость кривошипа OA в этот момент равна $\omega_0 = 6$ рад/с.

Найдем расстояние CE. Из рис. 11.19 следует:

$$CE = OE - OB - BC = 40\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ см.}$$

Скорости точек A и B оказались параллельными. Следовательно, на основании равенства проекций скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, имеем

$$v_B = v_A = \omega_0 \cdot OA = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см/с}.$$

Заметим, что ползуны B и C составляют одно тело и движутся поступательно, поэтому $v_C = v_B = 60$ см/с.

Найдем мгновенный центр скоростей для шатуна CD. Восставим перпендикуляры к скоростям $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{v}_D$; точка их пересечения P — мгновенный центр скоростей шатуна CD.

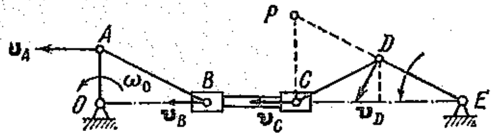


Рис. 11.19

Скорости точек относятся как их расстояния до мгновенного центра скоростей

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{PD}{PC}.$$

Из $\triangle PCE$ следует (по условию $CD = DE$)

$$PD = DE = 20 \text{ см}, \quad PC = \sqrt{PE^2 - CE^2} = 20 \text{ см}.$$

Отсюда получим

$$v_D = \frac{PD}{PC} v_C = 60 \text{ см/с}.$$

Искомая угловая скорость кривошипа ED равна

$$\omega_{ED} = \frac{v_D}{DE} = \frac{60}{20} = 3 \text{ рад/с}.$$

Задача **11.7.** Стержень AB движется в вертикальной плоскости так, что его нижний конец A скользит по горизонтальной прямой OC, а сам стержень все время опирается в точке M на выступ, высота которого равна h (рис. 11.20). Найти неподвижную и подвижную центроиды.

Начало неподвижной системы координат Ox_1y_1 возьмем в точке O (у основания выступа), а ось x_1 направим по прямой OC. Начало подвижной системы координат Axy возьмем в нижнем конце A стержня и ось y направим вдоль стержня.

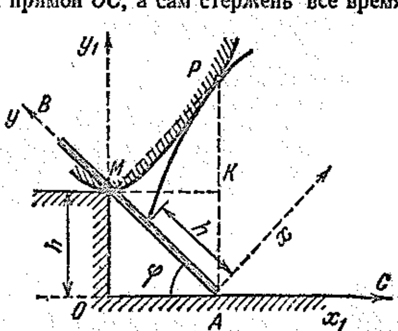


Рис. 11.20

Так как скорость точки A направлена горизонтально, а точки стержня, совпадающей с точкой M, — вдоль стержня, то мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и M к направлениям скоростей этих точек.

Вводя в рассмотрение угол φ между стержнем и горизонтальной прямой, получим для координат мгновенного центра скоростей в неподвижной системе координат следующие выражения:

$$x_{1P} = h \operatorname{ctg} \varphi, \quad y_{1P} = AK + KP = h + x_{1P} \operatorname{ctg} \varphi = h \operatorname{cosec}^2 \varphi.$$

Исключая из этих уравнений угол φ, получим уравнение неподвижной центроиды:

$$y_{1P} = h + \frac{x_{1P}^2}{h}.$$

Это — уравнение параболы. На рис. 11.20 неподвижная центроида заштрихована. Координаты мгновенного центра скоростей в подвижной системе координат Axy будут

$$x_P = AP \cdot \cos\varphi = h \operatorname{cosec}^2\varphi \cos\varphi = \frac{h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \qquad y_P = \frac{h}{\sin\varphi}.$$

Исключая φ из этих уравнений, получим уравнение подвижной центроиды

$$h^2 x_P^2 = y_P^2\left(y_P^2 - h^2\right).$$

Подвижная центроида является кривой четвертого порядка.

Задача 11.8. Коромысло OA длиной 40 см, качаясь вокруг оси O, приводит в движение шатун AB длиной 80 см. Ползун B скользит по направляющей ED, составляющей с горизонтальной линией угол $\alpha = 45°$. Найти ускорение ползуна B и угловое ускорение шатуна AB в момент, когда угол $\beta = 90°$ (рис. 11.21), если в этот момент угловая скорость кривошипа OA равна $\omega_0 = 2$ рад/с, а его угловое ускорение $\varepsilon_0 = 0$.

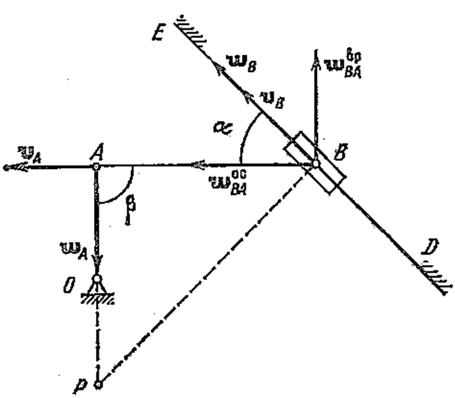


Рис. 11.21

Согласно формуле (11.13) имеем

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{вр} + \mathbf{w}_{BA}^{ос}.$$

Ускорение точки A направлено к точке O и равно

$$w_A = \omega_0^2 \cdot OA = 160 \text{ см/с}^2.$$

Осестремительное ускорение $\mathbf{w}_{BA}^{ос}$ направлено от точки B к точке A и равно

$$w_{BA}^{ос} = \omega^2 \cdot AB,$$

где ω — угловая скорость шатуна AB.

Для определения угловой скорости ω найдем скорость точки A и мгновенный центр скоростей шатуна AB, который лежит в точке пересечения перпендикуляров к скоростям точек A и B этого тела; следовательно, мгновенный центр скоростей звена AB находится в данный момент в точке P (см. рис. 11.21). Треугольник ABP — прямоугольный и равнобедренный:

$$AB = AP = 80 \text{ см}.$$

Угловая скорость ω определится по формуле

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_0 \cdot OA}{AP} = 1 \text{ рад/с}.$$

Подставляя значение ω в формулу для $w_{BA}^{ос}$, получим

$$w_{BA}^{ос} = 80 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{w}_B$ направлен вдоль прямой DE. Вращательное ускорение $\mathbf{w}_{BA}^{вр}$ направлено перпендикулярно AB.

Выберем в указанном положении ползуна B две взаимно перпендикулярные оси, одну ось направим вдоль BA, а другую — перпендикулярно к ней; тогда, проектируя обе части исходного векторного равенства на выбранные оси, получим

$$w_B \cos 45^\circ = w_{BA}^{\text{ос}}, \quad w_B \cos 45^\circ = -w_A + w_{BA}^{\text{вр}}.$$

Отсюда находим

$$w_B = 80\sqrt{2}\ \text{см/с}^2, \quad w_{BA}^{\text{вр}} = 240\ \text{см/с}^2.$$

Угловое ускорение шатуна AB определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{240}{80} = 3\ \text{рад/с}^2.$$

Задача 11.9. Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма (рис. 11.22) делает 3000 оборотов в минуту. Определить угловую скорость и угловое ускорение

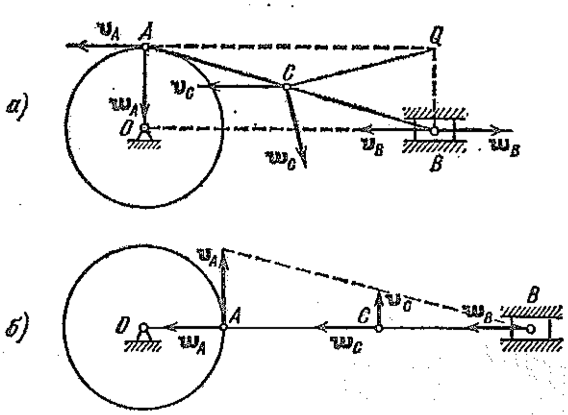


Рис. 11.22

шатуна, скорость и ускорение поршня и средней точки C шатуна, а также положения мгновенных центров скоростей и ускорений в моменты времени, когда $\angle AOB = 90^\circ$ и $\angle AOB = 0^\circ$, если $OA = 100$ мм, $AB = 300$ мм.

Определим искомые величины в момент, когда $\angle AOB = 90^\circ$ (см. рис. 11.22, *а*). Скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ параллельны, следовательно, угловая скорость шатуна $\omega_{BA} = 0$ и

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C.$$

Из условий задачи следует, что

$$v_A = \frac{\pi n}{30}\cdot OA = 100\pi\cdot 0{,}1 = 10\pi\ \text{м/с},$$

а ускорение точки A равно

$$w_A = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\cdot OA = (100\pi)^2\cdot 0{,}1 = 1000\pi^2\ \text{м/с}^2$$

и направлено к точке O.

Обозначая через ε_{AB} угловое ускорение шатуна AB, положение мгновенного центра ускорений шатуна определим с помощью формул

$$AQ = w_A/\sqrt{\omega_{AB}^4 + \varepsilon_{AB}^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \varepsilon_{AB}/\omega_{AB}^2;$$

но $\omega_{AB}=0$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\infty \text{ и } \alpha=90^\circ.$$

Следовательно, мгновенный центр ускорений лежит на прямой, перпендикулярной ускорению точки A и проходящей через эту точку.

Одновременно мгновенный центр ускорений лежит на прямой, проведенной через точку B перпендикулярно ускорению точки B. Так как ускорение точки B направлено параллельно оси цилиндра (вдоль OB), то мгновенный центр лежит в точке Q.

Ускорение точки A как точки, принадлежащей шатуну, равно

$$w_A=w_{AQ}=AQ\cdot\sqrt{\omega_{AB}^4+\varepsilon_{AB}^2},$$

но так как $\omega_{AB}=0$, то

$$w_A=\varepsilon_{AB}\cdot AQ.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{AB}=\frac{w_A}{AQ}=\frac{w_A}{\sqrt{AB^2-OA^2}}=\frac{1000\pi^2}{\sqrt{0{,}3^2-0{,}1^2}}=3525\pi^2 \text{ рад/с}^2;$$

тогда ускорение точки B будет

$$w_B=\varepsilon_{AB}\cdot BQ=3525\pi^2\cdot 0{,}1=352{,}5\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

а ускорение точки C

$$w_C=\varepsilon_{AB}\cdot CQ=673\pi^3 \text{ м/с}^2.$$

Определим искомые величины во втором положении, когда $\angle AOB=0$ (рис. 11.22, *б*). Мгновенный центр скоростей шатуна будет находиться в точке B. Угловая скорость шатуна найдется из формулы

$$v_A=\omega_{AB}\cdot AB;$$

отсюда

$$\omega_{AB}=\frac{10\pi}{0{,}3}=\frac{100}{3}\pi \text{ рад/с}.$$

Скорость точки B равна нулю, а скорость точки C будет равна

$$v_C=\omega_{AB}\cdot BC=\frac{100}{3}\pi\cdot 0{,}15=5\pi \text{ м/с}.$$

Для определения положения мгновенного центра ускорений необходимо найти угловое ускорение шатуна. Для этого воспользуемся формулой

$$\mathrm{w}_B=\mathrm{w}_A+\mathrm{w}_{BA}^{\text{ос}}+\mathrm{w}_{BA}^{\text{вр}}.$$

В этом уравнении вектор w_A направлен к точке O, вектор $\mathrm{w}_{BA}^{\text{ос}}$ направлен от точки B к точке A и вектор w_B направлен вдоль линии OB. Так как вектор w_B параллелен двум слагаемым векторам w_A и $\mathrm{w}_{BA}^{\text{ос}}$, то вектор $\mathrm{w}_{BA}^{\text{вр}}$, перпендикулярный вектору w_A, равен нулю. Но $w_{BA}^{\text{вр}}=\varepsilon_{AB}\cdot BA$, следовательно, $\varepsilon_{AB}=0$.

Зная ускорение точки A, угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB, можем найти положение мгновенного центра ускорений Q шатуна:

$$AQ=w_A/\omega_{AB}^2\approx 0{,}9 \text{ м},\quad \operatorname{tg}\alpha=\varepsilon_{AB}/\omega_{AB}^2=0,\quad \alpha=0.$$

Точка Q лежит на продолжении прямой BA слева от точки A. Ускорение точки B определится по формуле

$$w_B=w_{BQ}=\omega_{AB}^2\cdot QB=1333{,}3\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

где $QB=1{,}2$ м.

Ускорение точки C находится по формуле

$$w_C = \omega_{AB}^2 \cdot QC = 1166{,}7\pi^2 \text{ м/с}^2,$$

где QC — расстояние от точки C до мгновенного центра ускорений, равное 1,05 м.

Задача 11.10. Шестерня I радиуса R приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестерни II радиуса r по закону $\varphi = \varphi(t)$. Определить ускорения точек M, N, B и положение мгновенного центра ускорений Q (рис. 11.23).

Найдем сначала угловую скорость и угловое ускорение шестерни I. Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\dot\varphi$. Поэтому скорость $\mathbf{v}_A$ точки A перпендикулярна кривошипу OA и равна по модулю $v_A = OA \cdot |\dot\varphi| = (r+R)|\dot\varphi|$. Так как точка A принадлежит одновременно шестерне I, то ее скорость определяется равенством (точка M является мгновенным центром скоростей)

$$v_A = |\omega_z| R,$$

где ω_z — угловая скорость шестерни I. Сравнивая оба выражения для v_A, найдем

$$\omega_z R = (r+R)\dot\varphi, \quad \text{т. е.} \quad \omega_z = \frac{r+R}{R}\dot\varphi.$$

Дифференцируя последнее соотношение по времени, найдем угловое ускорение ε_z шестерни I:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{R+r}{R}\ddot\varphi.$$

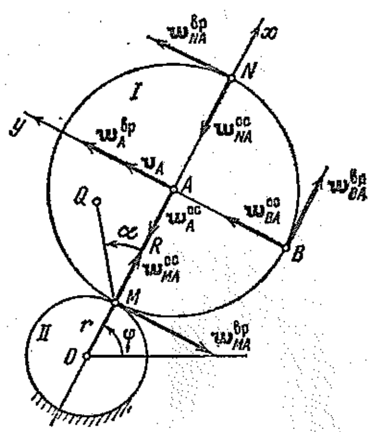


Рис. 11.23

Осестремительное ускорение точки A, как точки кривошипа OA, направлено к O и по модулю равно $(R+r)\dot\varphi^2$. Вращательное ускорение точки A перпендикулярно прямой OA и равно по модулю $(R+r)|\ddot\varphi|$. Таким образом,

$$w_A^{ос} = (R+r)\dot\varphi^2, \quad w_A^{вр} = (R+r)\ddot\varphi. \tag{11.19}$$

На рис. 11.23 направление $\mathbf{w}_A^{вр}$ показано в предположении, что $\dot\varphi > 0$ и $\ddot\varphi > 0$.

Ускорения точек M, N и B будем искать по формуле (11.13), приняв точку A за полюс. Для точки M имеем

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{MA}^{вр} + \mathbf{w}_{MA}^{ос}. \tag{11.20}$$

Ускорение точки A уже найдено через составляющие $\mathbf{w}_A^{ос}$ и $\mathbf{w}_A^{вр}$. Осестремительное ускорение точки M относительно точки A направлено к A (см. рис. 11.23), модуль этого ускорения равен $R\omega^2$. Подставляя значение ω, будем иметь

$$w_{MA}^{ос} = \frac{(r+R)^2}{R}\dot\varphi^2.$$

Вращательное ускорение точки M относительно точки A перпендикулярно прямой AM и модуль этого ускорения равен $R|\varepsilon_z|$, или

$$w_{MA}^{вр} = (R+r)\ddot\varphi.$$

Так как, по предположению, $\ddot\varphi > 0$, то $\varepsilon_z = \frac{R+r}{R}\ddot\varphi > 0$. Поэтому вращательное ускорение $\mathbf{w}_{MA}^{вр}$ будет иметь направление, указанное на рис. 11.23.

Проектируя обе части равенства (11.20) на оси x и y (см. рис. 11.23) и принимая во внимание формулы (11.19), получим

$$w_{Mx} = -(R+r)\dot{\varphi}^2 + \frac{(R+r)^2}{R}\dot{\varphi}^2 = \frac{r}{R}(R+r)\dot{\varphi}^2,$$

$$w_{My} = (R+r)\ddot{\varphi} - (R+r)\ddot{\varphi} = 0.$$

Из этих выражений видно, что ускорение точки M направлено к точке A и равно по модулю w_{Mx}:

$$w_M = \frac{r}{R}(R+r)\dot{\varphi}^2.$$

Для точки N формула (11.13) примет вид

$$\mathbf{w}_N = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{NA}^{\text{вр}} + \mathbf{w}_{NA}^{\text{оо}}.$$

Вращательное ускорение $\mathbf{w}_{NA}^{\text{вр}}$ точки N относительно точки A по модулю равно, конечно, $w_{MA}^{\text{вр}}$; его направление указано на рис. 11.23. Осестремительное ускорение $\mathbf{w}_{NA}^{\text{оо}}$ точки N направлено к A и по модулю равно $w_{MA}^{\text{ос}}$. Проектируя последнее равенство на оси x и y, получим

$$w_{Nx} = -(R+r)\dot{\varphi}^2 - \frac{(R+r)^2}{R}\dot{\varphi}^2 = -\frac{(R+r)(2R+r)}{R}\dot{\varphi}^2,$$

$$w_{Ny} = (R+r)\ddot{\varphi} + (R+r)\ddot{\varphi} = 2(R+r)\ddot{\varphi}.$$

Модуль ускорения точки N равен

$$w_N = (R+r)\sqrt{\frac{(2R+r)^2}{R^2}\dot{\varphi}^4 + 4\ddot{\varphi}^2}.$$

Аналогично находится ускорение точки B. Имеем

$$w_{BA}^{\text{вр}} = w_{MA}^{\text{вр}} = (R+r)\ddot{\varphi}, \quad w_{BA}^{\text{ос}} = w_{MA}^{\text{ос}} = \frac{R+r}{R}\dot{\varphi}^2;$$

направление ускорений $\mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}}$ и $\mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$ показано на рис. 11.23. Проектируя равенство

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{BA}^{\text{вр}} + \mathbf{w}_{BA}^{\text{ос}}$$

на оси x и y, получим

$$w_{Bx} = -(R+r)\dot{\varphi}^2 + (R+r)\ddot{\varphi} = (R+r)(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2),$$

$$w_{By} = (R+r)\ddot{\varphi} + \frac{(R+r)^2}{R}\dot{\varphi}^2 = (R+r)\left(\ddot{\varphi} + \frac{R+r}{R}\dot{\varphi}^2\right).$$

Отсюда

$$w_B = (R+r)\sqrt{(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)^2 + \left(\ddot{\varphi} + \frac{R+r}{R}\dot{\varphi}^2\right)^2}.$$

Расстояние от точки M до мгновенного центра ускорений Q в соответствии с формулой (11.15) равно

$$MQ = \frac{w_M}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{rR\dot{\varphi}^2}{\sqrt{R^2\ddot{\varphi}^2 + (R+r)^2\dot{\varphi}^4}}.$$

Для определения угла w_A между ускорением MQ и отрезком MQ воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{R|\ddot{\varphi}|}{(r+R)\dot{\varphi}^2}.$$

Глава XII

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. СВОБОДНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО

§ 12.1. Задание движения. Углы Эйлера

Движение тела, имеющего одну неподвижную точку, называют иногда сферическим движением или *вращением тела вокруг неподвижной точки*. Первый термин объясняется тем, что все точки тела движутся по поверхностям сфер, общий центр которых совпадает с неподвижной точкой.

В главе X мы установили, что твердое тело с одной закрепленной точкой имеет три степени свободы. Три параметра, определяющих положение такого тела относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 12.1), могут быть выбраны различными способами. В теоретической механике положение тела с одной неподвижной точкой, как правило, определяют при помощи *углов Эйлера*, которые вводятся следующим образом.

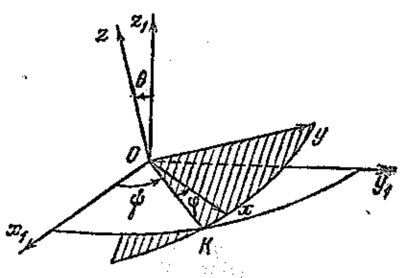


Рис. 12.1

Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $Oxyz$, выбрав начало координат в неподвижной точке O (рис. 12.1).

Координатная плоскость xOy пересекается с неподвижной плоскостью x_1Oy_1 вдоль прямой OK, которая называется *линией узлов*. Угол, составляемый неподвижной осью Ox_1 с линией узлов, называется углом *прецессии* и обозначается буквой ψ. Угол, составляемый линией узлов с подвижной осью Ox, носит название угла *собственного вращения* и обозначается буквой φ. Угол между осями Oz_1 и Oz называется углом *нутации* и обозначается буквой θ. Все углы отсчитываются соответственно от осей Ox_1, OK и Oz_1 против хода часовой стрелки, как показано на рис. 12.1.

Покажем, что, зная три функции $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, можно всегда найти положение системы координат $Oxyz$, а следовательно, и положение тела, скрепленного с ней. Действительно, откладывая от оси Ox_1 угол прецессии ψ, мы найдем линию узлов OK. Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную линии узлов, и от оси Oz_1 (эта ось должна лежать в построенной плоскости) отложим угол нутации θ. Таким образом будет определено положительное направление оси Oz. Через точку O проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz; эта плоскость пройдет через линию узлов OK. Отложим теперь в построенной плоскости от линии узлов угол собственного вращения φ и определим положительное направление оси Ox. Ось Oy должна лежать в той же плоскости и составлять вместе с осями Ox и Oz правую систему координат. Таким образом, углы ψ, θ и φ полностью определяют положение осей подвижной системы.

Углы, определяющие положение тела, можно ввести и другим способом. Например, положение корабля относительно его центра тяжести C определяется *корабельными углами*, введенными А. Н. Крыловым. Ось Cx жестко связанной с кораблем системы координат $Cxyz$ направляется от кормы к носу, ось Cy — к левому борту, ось Cz расположена в диаметральной плоскости корабля. В положении равновесия корабля оси системы координат $Cxyz$ совпадают с осями неизменного направления системы координат $Cx_1y_1z_1$. Угол ψ между осью Cx_1 и линией CK, образованной пересечением плоскостей xCy и x_1Cz_1 (рис. 12.2), называется *углом дифферента*, угол φ между линией CK и осью Cx называется *углом рыскания*. Угол ϑ между осью Cz и линией CM пересечения плоскостей x_1Cz_1 и y_1Cz называется *углом крена*.

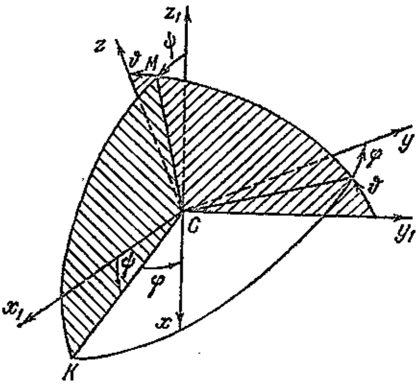


Рис. 12.2

§ 12.2. Распределение скоростей точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Мгновенная ось вращения. Мгновенная угловая скорость

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O. Свяжем жестко с телом систему координат $Oxyz$ (рис. 12.3). Система координат $Oxyz$ однозначно определяет положение рассматриваемого тела по отношению к неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ (§ 12.1). Положение произвольной точки M твердого тела определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Если x, y и z — координаты точки M в подвижной системе координат, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей этой системы координат, то радиус-вектор можно представить в виде

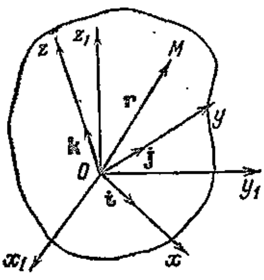


Рис. 12.3

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{12.1}$$

Координаты x, y, z точки M в подвижной системе отсчета являются постоянными величинами, а единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут функциями времени, так как система координат $Oxyz$ движется вместе с твердым телом.

Скорость точки M определяется по формуле

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

поэтому, дифференцируя (12.1) по t, получим

$$\mathbf{v} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \tag{12.2}$$

Умножая обе части равенства (12.2) скалярно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, получим

$$\begin{aligned} v_x &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i},\\ v_y &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{j} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{j} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{j},\\ v_z &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны, то

$$\mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0. \tag{12.4}$$

Дифференцируя эти равенства по времени, найдем две группы формул:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{j} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0, \tag{12.5}$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = -\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = -\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = -\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k}. \tag{12.6}$$

Выражения (12.3) при этом примут вид

$$v_x = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}z - \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}y, \quad v_y = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}x - \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}z, \quad v_z = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}y - \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}x. \tag{12.7}$$

Формулы (12.7) содержат три скалярные функции времени,

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j},$$

для которых введем обозначения:

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}, \qquad \omega_y = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \qquad \omega_z = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}. \tag{12.8}$$

Перепишем теперь формулы (12.7) в виде

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \tag{12.9}$$

Так как

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

то, в соответствии с выражением (12.9), имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

Если теперь ввести вектор $\boldsymbol{\omega}$ с проекциями ω_x, ω_y, ω_z,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k},$$

то скорость точки можно представить векторным произведением

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Итак, скорость точки тела, совершающего сферическое движение, определяется формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{12.10}$$

Геометрическое место точек, скорость которых равна нулю, определяется из уравнения

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \tag{12.11}$$

представляющего собой условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$. Это векторное уравнение в системе координат $Oxyz$ можно записать в виде

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \tag{12.12}$$

Уравнения (12.12) определяют прямую линию, направляющие косинусы которой пропорциональны проекциям ω_x, ω_y, ω_z вектора $\boldsymbol{\omega}$. В общем случае вектор $\boldsymbol{\omega}$ и его проекции ω_x, ω_y, ω_z являются функциями времени, поэтому положение прямой (12.12) изменяется как относительно тела, так и относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$.

Прямая (12.12), в каждой точке которой скорости точек тела в данный момент равны нулю, называется *мгновенной осью вращения*. (Она также называется *мгновенной осью скоростей*.)

Введенный нами вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения.

Как уже было установлено, скорость любой точки M тела определяется формулой (12.10), совпадающей по своей форме с выражением для скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (см. формулу (10.13)). Следовательно, *скорости точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, распределяются так, как если бы тело вращалось вокруг оси, совпадающей в данный момент с мгновенной осью вращения.* В частности, модуль скорости точки M в данный момент определяется равенством

$$v = \omega\rho,$$

где ρ — расстояние от точки M до мгновенной оси вращения. Скорость точки M направлена перпендикулярно плоскости, проходящей через ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ и мгновенную ось вращений (рис. 12.4).

По аналогии с вращением тела вокруг неподвижной оси назовем в рассматриваемом нами случае сферического движения тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ *вектором угловой скорости*. При этом следует иметь в виду, что при вращении тела вокруг неподвижной оси вектор угловой скорости ω представляет собой вектор, всегда направленный по неподвижной оси вращения и характеризующий изменение во времени реального угла φ поворота тела. Для тела, имеющего одну неподвижную точку, выражение «угловая скорость» имеет условный характер, так как положение тела определяется не одним, а тремя углами (§ 12.1) и, следовательно, нет такого одного угла, скорость изменения которого представила бы введенный вектор ω. Кроме того, этот вектор может меняться и по модулю и по направлению. Проекции этого вектора на координатные оси являются функциями углов Эйлера и их первых производных. Эти формулы будут приведены в дальнейшем (§ 14.3).

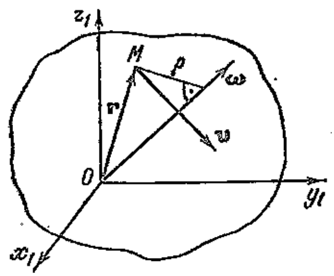


Рис. 12.4

Отметим, что из формул (12.8) для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, например, вокруг оси Oz, можно получить

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = -\dot{\varphi}\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

$$\omega_z = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = \dot{\varphi}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \dot{\varphi},$$

так как (§ 10.2) $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\varphi}\mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\dot{\varphi}\mathbf{i}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$.

Если известны направления скоростей двух точек тела, то мгновенную ось вращения можно найти графически. Как следует из картины распределения скоростей точек тела в данный момент времени, мгновенная ось вращения лежит в плоскости, перпендикулярной направлению скорости точки тела, и проходит через неподвижную точку тела. Следовательно, если через точки тела, направления скоростей которых известны, провести плоскости, перпендикулярные этим скоростям, то линия пересечения этих плоскостей и будет мгновенной осью вращения.

Мгновенную ось вращения можно определить и в том случае, когда известна одна точка тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Соединяя эту точку с неподвижной точкой тела, найдем мгновенную ось вращения.

К понятию о мгновенной оси вращения можно прийти и другим путем. Для этого сначала докажем *теорему Эйлера—Даламбера:*

Всякое перемещение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно заменить одним поворотом вокруг оси, проходящей через неподвижную точку.

Возьмем в теле две точки A и B, отстоящие от неподвижной точки на одинаковом расстоянии, но не лежащие с ней на одной прямой. Проведем через эти две точки сферу с центром в неподвижной точке O (рис. 12.5). Пусть в момент времени t положение тела определяется точками A и B. К моменту времени $t + \Delta t$ эти точки переместятся и займут положение A_1 и B_1.

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что поворотом тела вокруг некоторой оси, проходящей через точку O, можно добиться совмещения точек A и B с точками A_1 и B_1. Соединим точки A и B, A_1 и B_1 дугами больших кругов. Тогда $\smile{AB} = \smile{A_1B_1}$, так как в твердом теле расстояния между точками сохраняются. Соединим теперь также дугами больших кругов точки A и A_1, B и B_1

(рис. 12.5). Из середины дуг AA_1 и BB_1 — точек M и N — проведем сферические перпендикуляры — дуги больших кругов, плоскости которых перпендикулярны плоскостям кругов AOA_1 и BOB_1. Эти сферические перпендикуляры пересекаются в точке P на сфере (рис. 12.5).

Рассмотрим сферические треугольники (треугольники, составленные дугами больших кругов) APA_1 и BPB_1. В этих треугольниках дуга AP равна дуге A_1P и дуга BP равна дуге B_1P как наклонные дуги, имеющие равные проекции. Отсюда следует, что сферические треугольники APB и A_1PB_1 равны (по трем сторонам) и, следовательно, при повороте вокруг их общей вершины P треугольник APB совместится с треугольником A_1PB_1. При таком повороте остаются неподвижными две точки тела: точка O и точка P. Таким образом, перемещение тела может быть осуществлено при помощи одного поворота вокруг оси OP.

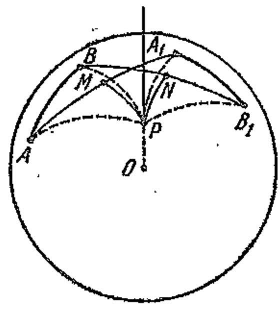


Рис. 12.5

Ось OP называют *осью конечного вращения*, а угол $APA_1 = \theta$ называется *углом конечного вращения*. Положение оси OP зависит от начального и конечного положений тела.

Зафиксируем начальный момент времени t и рассмотрим близкий к нему момент времени $t + \Delta t$. Сравнивая положение тела в момент t с его положением в момент $t + \Delta t$, мы всегда можем найти ось конечного вращения. Если теперь промежуток времени Δt устремить к нулю, то ось конечного вращения будет менять положение, стремясь к своему предельному положению. Предельное положение оси конечного вращения при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной осью вращения* для момента времени t.

Для каждого промежутка времени $(t,\ t + \Delta t)$ с фиксированным начальным моментом времени t можно определить угол конечного поворота θ. Введем в рассмотрение вектор θ угла конечного поворота, равный по модулю θ и направленный по оси OP в сторону, откуда конечный поворот виден происходящим против хода часовой стрелки. *Средней угловой скоростью* будем называть вектор, равный

$$\omega_{ср} = \frac{\theta}{\Delta t}.$$

Предел средней угловой скорости, когда промежуток времени $\Delta t \to 0$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta}{\Delta t},$$

называется *мгновенной угловой скоростью тела* (рис. 12.6) *). Из этого определения следует, что вектор угловой скорости направлен по мгновенной оси вращения.

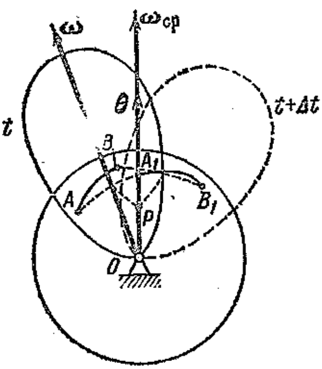


Рис. 12.6

Положение точки M тела в неподвижной системе координат определяется координатами x_1, y_1 и z_1, а вектор ω имеет проекции ω_{x_1}, ω_{y_1}, ω_{z_1}. Тогда, в соответствии с формулой (12.10), проекции скорости точки M на неподвижные оси координат будут

$$v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1, \quad v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1, \quad v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1. \qquad (12.13)$$

*) Мы не останавливаемся на доказательстве идентичности определения угловой скорости по этой формуле и ранее данного определения (стр. 193).

Уравнение мгновенной оси вращения в неподвижной системе координат имеет вид

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}}. \tag{12.14}$$

Геометрическое место мгновенных осей вращений, построенных в неподвижной системе координат, называется *неподвижным аксоидом*, а в подвижной системе координат — *подвижным аксоидом*.

Из уравнений (12.14) следует

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{\omega_{y_1}(t)}{\omega_{z_1}(t)}, \qquad \frac{z_1}{x_1} = \frac{\omega_{z_1}(t)}{\omega_{x_1}(t)}.$$

Полученные уравнения дают уравнения неподвижного аксоида в параметрическом виде; параметром служит время t. Исключая из этих уравнений t, можно получить уравнение конической поверхности (неподвижного аксоида)

$$\frac{z_1}{x_1} = F_1\left(\frac{y_1}{z_1}\right).$$

Аналогично, исключая время t из уравнений

$$\frac{y}{z} = \frac{\omega_y(t)}{\omega_z(t)}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{\omega_z(t)}{\omega_x(t)},$$

полученных из формул (12.12), найдем уравнение подвижного аксоида

$$\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{z}\right).$$

Задача 12.1. Коническая шестерня I (рис. 12.7) обкатывает неподвижную коническую шестерню II. Определить угловую скорость шестерни I и неподвижный и подвижный аксоиды, если $\angle AOD = \beta$, $\angle COD = \alpha$, $OC = h$, а скорость центра C шестерни I равна v.

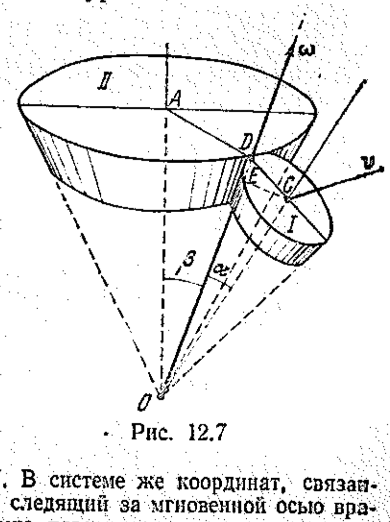


Рис. 12.7

Так как движение шестерни I происходит без скольжения, то скорость ее точки D равна нулю. Неподвижной точкой является точка O пересечения осей OA и OC шестерен. Следовательно, прямая OD является мгновенной осью вращения шестерни I. Геометрическое место мгновенных осей вращений, которое образуется при качении шестерни I, — конус с вершиной в точке O, основанием которого является неподвижная шестерня II. В системе же координат, связанной с подвижной шестерней I, наблюдатель, следящий за мгновенной осью вращения, заметит, что эта ось описывает боковую поверхность конуса, имеющего вершину в точке O и основанием подвижную шестерню I.

Теперь перейдем к определению направления и модуля угловой скорости. В соответствии с формулой (12.10), скорость точки C равна

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC}.$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения OD от точки O к точке D. Далее имеем

$$v = \omega \cdot CE, \qquad CE = h \sin\alpha, \qquad \omega = \frac{v}{h \sin\alpha}.$$

§ 12.3. Ускорения точек тела, имеющего одну неподвижную точку

Введем прежде всего понятие углового ускорения. *Угловым ускорением называется производная угловой скорости по времени*, т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \qquad (12.15)$$

Из определения видно, что вектор углового ускорения можно рассматривать как скорость конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 12.8). Угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлено по касательной к годографу вектора угловой скорости (рис. 12.8), поэтому его направление может быть каким угодно в зависимости от закона изменения вектора угловой скорости. Заметим попутно, что годограф вектора угловой скорости — кривая, лежащая на неподвижном аксоиде (рис. 12.8).

Перейдем теперь к определению ускорения произвольной точки тела. Исходя из определения ускорения и используя равенство (12.10), получим

Рис. 12.8

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}, \quad \text{а} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

следовательно,

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}. \qquad (12.16)$$

Таким образом, ускорение $\mathbf{w}$ может быть представлено как сумма двух ускорений: $\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$.

Ускорение $\mathbf{w}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}$ называется *вращательной* составляющей ускорения. Модуль этого ускорения равен

$$w^{\text{вр}} = \varepsilon r \sin(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}) = \varepsilon h,$$

где h — расстояние от точки M до вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Направлено это ускорение перпендикулярно плоскости векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{r}$ в ту сторону, откуда кратчайший переход от вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ к вектору $\mathbf{r}$ виден против хода часовой стрелки. Заметим, что вследствие несовпадения направлений угловой скорости и углового ускорения вращательная составляющая ускорения может быть направлена по отношению к направлению скорости под любым углом, оставаясь перпендикулярной вектору $\mathbf{r}$. В этом существенное различие между вращением твердого тела вокруг неподвижной оси и движением тела, имеющего одну неподвижную точку.

Ускорение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ направлено по перпендикуляру к плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$, т. е. по направлению вектора $\mathbf{d}$ (рис. 12.9), имеющего начало в точке M и конец в основании перпендикуляра, опущенного из точки M на мгновенную ось вращения. Модуль векторного произведения $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ равен

$$|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}| = \omega v = \omega^2 d,$$

так как

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega d.$$

Следовательно, можно записать

$$\mathbf{w}^{oc} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \omega^2\mathbf{d}. \qquad (12.17)$$

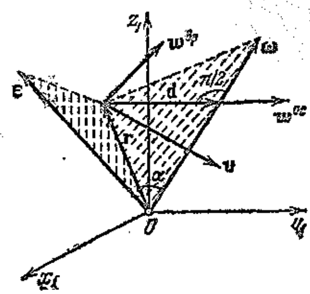


Рис. 12.9

Это ускорение называется *осестремительной* составляющей ускорения.

Итак, ускорение любой точки тела равно сумме вращательной и осестремительной составляющих ускорения

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{вр} + \mathbf{w}^{oc}. \qquad (12.18)$$

Задача 12.2. Найти скорость и ускорение точки B конического катка, равномерно катящегося без скольжения по горизонтальной конической кольцевой опоре (рис. 12.10, *а*). Диаметр катка $BC = 30$ см, $OA = 20$ см, скорость центра катка $v_A = 40$ см/с направлена перпендикулярно плоскости чертежа на читателя.

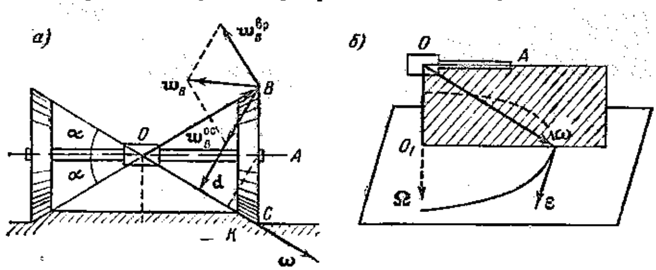


Рис. 12.10

Прежде всего необходимо определить величину и направление угловой скорости и углового ускорения катка BC.

При движении катка точка O остается неподвижной. Скорость точки C равна нулю (качение без скольжения), поэтому мгновенная ось вращения проходит по прямой OC. Угловая скорость также направлена по OC от точки O к точке C. Модуль угловой скорости можно определить из равенства

$$\omega = \frac{v_A}{AK} = \frac{v_A}{OA\cdot\sin\alpha}.$$

Из $\triangle\, OAC$ имеем $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = 25$ см; тогда

$$\sin\alpha = \frac{15}{25} = 0{,}6, \quad \cos\alpha = \frac{20}{25} = 0{,}8, \quad \omega = \frac{40}{20\cdot 0{,}6} = \frac{10}{3} = 3{,}3 \text{ рад/с}.$$

Найдем скорость $\mathbf{v}_B$:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OB}, \qquad v_B = OB \cdot \omega \sin 2\alpha = 80 \text{ см/с}.$$

Скорость $\mathbf{v}_B$ перпендикулярна плоскости чертежа и направлена на читателя.

Конец вектора $\boldsymbol{\omega}$ описывает окружность с центром в точке O_1 на вертикальной оси OO_1 (рис. 12.10, *б*). Найдем теперь угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяется как скорость конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, следовательно, вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен по касательной к окружности, описываемой вектором $\boldsymbol{\omega}$, т. е. перпендикулярно плоскости чертежа на читателя. Найдем модуль ε. Так как конец вектора $\boldsymbol{\omega}$ движется по окружности, то имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения плоскости OAC, в которой расположен вектор $\boldsymbol{\omega}$, вокруг вертикальной оси OO_1

$$\Omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{40}{20} = 2 \text{ рад/с}.$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon = \omega\Omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{16}{3} \approx 5{,}3 \text{ рад/с}^2.$$

Перейдем к определению ускорения точки B:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_B^{\text{ос}} + \mathbf{w}_B^{\text{вр}}, \qquad \mathbf{w}_B^{\text{ос}} = \omega^2\mathbf{d}, \qquad \mathbf{w}_B^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_B.$$

Заметим, что $d = OB \cdot \sin 2\alpha = 0{,}24$ м, $r_B = OB = 0{,}25$ м. Отсюда

$$w_B^{\text{ос}} = \frac{10^2}{9} \cdot 0{,}24 \approx 2{,}7 \text{ м/с}^2, \qquad w_B^{\text{вр}} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Вектор ускорения $\mathbf{w}_B^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно OB, лежит в плоскости BOC и составляет с ускорением $\mathbf{w}_B^{\text{ос}}$ угол $\beta = 180° - 2\alpha$. Тогда

$$w_B = \sqrt{\left(w_B^{\text{ос}}\right)^2 + \left(w_B^{\text{вр}}\right)^2 - 2w_B^{\text{ос}}w_B^{\text{вр}} \cos 2\alpha} \approx 2{,}56 \text{ м/с}^2.$$

§ 12.4. Движение свободного твердого тела

Рассмотрим движение свободного твердого тела. Введем, кроме неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$, еще подвижную систему координат $Ax_2y_2z_2$, перемещающуюся поступательно относительно осей $Ox_1y_1z_1$ и связанную с телом только в одной точке — точке A, и подвижную систему координат $Axyz$, жестко связанную с телом (рис. 12.11). В подвижной системе координат $Ax_2y_2z_2$ тело имеет одну закрепленную в ней точку — точку A, следовательно, тело в этой системе координат участвует в движении, рассмотренном нами в предыдущем параграфе. Для того чтобы задать положение тела в подвижной системе координат $Ax_2y_2z_2$, можно ввести три угла Эйлера θ, ψ, φ, а для определения положения относительно неподвижной системы координат нужно, кроме того, задать положение точки A, для чего потребуется знать еще три величины: x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}. Таким образом, положение свободного твердого тела определяется шестью независимыми параметрами: x_{1A}, y_{1A}, z_{1A}, θ, ψ, φ.

Перейдем к определению скоростей точек свободного тела. Скорость произвольной точки B равна производной от ее радиуса-вектора $\mathbf{r}_B$ по времени. Пользуясь рис. 12.11, найдем

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{12.19}$$

Заметим, что $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ — скорость точки A; кроме того, вектор $d\boldsymbol{\rho}/dt$ представляет собой скорость точки B относительно подвижной системы координат $Ax_2y_2z_2$, в которой тело имеет одну закрепленную точку. Следовательно, согласно формуле (12.10)

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Таким образом, формулу (12.19) можно переписать в виде

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{12.20}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения тела относительно системы координат $Ax_2y_2z_2$. (Так же как и для плоского движения, можно показать, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора полюса.)

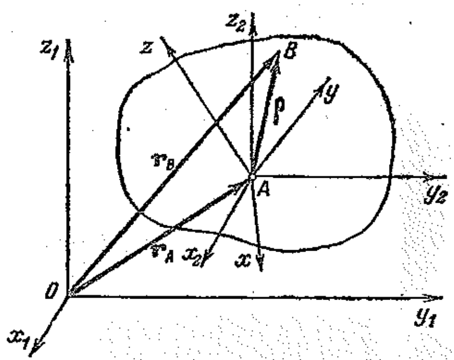


Рис. 12.11

Формулу (12.20) можно прочитать следующим образом: *скорость любой точки свободного твердого тела геометрически складывается из скорости произвольно выбранного полюса и скорости этой точки во вращательном движении тела относительно полюса.*

Пользуясь формулой (12.20), можно доказать следующую теорему: *Проекции скоростей двух точек свободного твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.*

Согласно равенству (12.20) имеем

$$(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_{AB},$$

но вектор $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\rho} = \overline{AB}$; следовательно, $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})_{AB} = 0$ и $(\mathbf{v}_B)_{AB} = (\mathbf{v}_A)_{AB}$. Определим ускорения точек свободного твердого тела. Для этого продифференцируем по времени равенство (12.20):

$$\mathbf{w}_B = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{12.21}$$

Замечая, что $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{w}_A$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела в подвижной системе координат $Ax_2y_2z_2$, а $d\boldsymbol{\rho}/dt = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$, получим

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}).$$

Используя (12.17), можно записать

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})=\omega^2\mathbf{d}_B,$$

где $\mathbf{d}_B$ — вектор, имеющий начало в точке B, а конец в основании перпендикуляра, опущенного из B на $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 12.12).

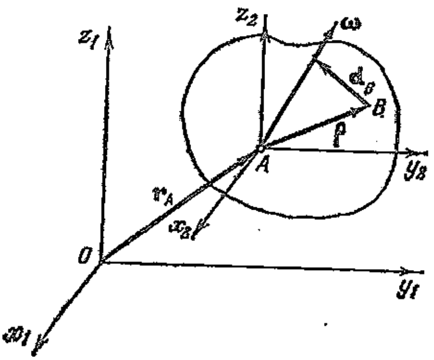


Рис. 12.12

В окончательном виде ускорение точки свободного тела выражается следующим образом:

$$\mathbf{w}_B=\mathbf{w}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho}+\omega^2\mathbf{d}_B. \qquad (12.22)$$

Два последних члена дают ускорение точки B в ее движении вокруг полюса.

Таким образом, *ускорение точки свободного тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее движении вокруг полюса.*

Задача 12.3 *). Точка M твердого тела движется со скоростью $\mathbf{v}$ по пространственной кривой. Определить угловую скорость естественного трехгранника $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ траектории точки M **).

Пусть $\boldsymbol{\rho}_N$ — радиус-вектор любой точки N, неизменно связанной с естественным трехгранником $M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\mathbf{b}$ (рис. 12.13). Так как производная $d\boldsymbol{\rho}_N/dt$ определяет скорость точки N во вращательном движении координатной системы $M\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}\mathbf{b}$ относительно точки M, мы будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_N}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_N,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость естественного трехгранника. Положив $\boldsymbol{\rho}_N=\boldsymbol{\tau}$, затем $\boldsymbol{\rho}_N=\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\rho}_N=\mathbf{b}$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau},\quad \frac{d\mathbf{n}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n},\quad \frac{d\mathbf{b}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b},$$

или, вводя в рассмотрение длину дуги σ (см. § 9.2) и применяя очевидное тождество $\frac{d}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}\frac{d}{d\sigma}=\dot{\sigma}\frac{d}{d\sigma}$,

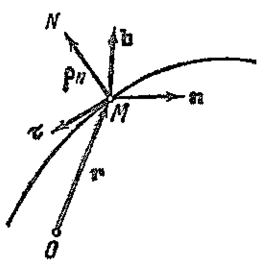


Рис. 12.13

$$\dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau},\quad \dot{\sigma}\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n},\quad \dot{\sigma}\frac{d\mathbf{b}}{d\sigma}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}. \qquad (12.23)$$

Воспользуемся теперь формулами Френе, вывод которых можно найти в любом курсе дифференциальной геометрии:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n},\quad \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau}+\frac{1}{T}\mathbf{b},\quad \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma}=-\frac{1}{T}\mathbf{n}. \qquad (12.24)$$

---

*) Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.

**) Рассмотрение этого примера вызвано тем, что в некоторых задачах механики бывает полезно изучить движение твердого тела по отношению к естественному трехграннику одной из точек тела.

В этих равенствах ρ — радиус кривизны, а T — кручение кривой в данной точке, определяемые формулами

$$\rho = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}\right|, \qquad \frac{1}{T} = \rho^2 \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{d\sigma^3}\right).$$

Заметим, что первая формула Френе была получена нами ранее при выводе формулы (9.30). Теперь последние две формулы (12.23) можно записать в следующем виде:

$$\dot\sigma\left(-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{T}\mathbf{b}\right) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \qquad -\frac{\dot\sigma}{T}\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Умножая первое из этих равенств слева векторно на $\mathbf{n}$, а второе — $\mathbf{b}$ и учитывая при этом, что $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{b}$, а $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \boldsymbol{\tau}$, имеем

$$\dot\sigma\left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{T}\right) = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}), \qquad \frac{\dot\sigma}{T}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{b} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b})$$

или *)

$$\frac{\dot\sigma}{T}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot\sigma}{\rho}\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} - \omega_n\mathbf{n}, \qquad \frac{\dot\sigma}{T}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} - \omega_b\mathbf{b}, \tag{12.25}$$

где $\omega_n = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}$ и $\omega_b = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{b}$ — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Вычитая из первого равенства второе, найдем

$$\frac{\dot\sigma}{\rho}\mathbf{b} = -\omega_n\mathbf{n} + \omega_b\mathbf{b}.$$

Отсюда $\omega_n = 0$; пользуясь первым равенством (12.25), найдем искомую угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ естественного трехгранника:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\sigma\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{T} + \frac{\mathbf{b}}{\rho}\right) = v_\tau\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{T} + \frac{\mathbf{b}}{\rho}\right). \tag{12.26}$$

Таким образом, зная скорость $v_\tau = \dot\sigma$ движущейся точки M, радиус кривизны ρ и кручение T траектории, можно по формуле (12.26) определить угловую скорость естественного трехгранника. Заметим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ лежит в спрямляющей плоскости $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{b}$.

Глава XIII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 13.1. Основные определения. Абсолютная и относительная производные вектора

В главе IX мы изучали основные характеристики движения точки по отношению к заданной системе отсчета (системе координат). Однако в некоторых случаях бывает целесообразно изучать движение точки одновременно по отношению к двум системам координат, одна из которых совершает заданное движение по отношению к другой (основной), принимаемой за неподвижную. Случай, когда подвижная система координат совершала поступательное движение, был нами

*) В курсе векторной алгебры доказывается следующая формула для двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

частично рассмотрен в § 10.2 (приведено доказательство теоремы о сложении скоростей).

В этой главе рассматривается общий случай, когда движение подвижной системы координат может происходить по любому заданному закону.

Изучение движения точки по отношению к каждой из этих координатных систем производится методами, изложенными в главе IX. Нашей задачей является установление связи между основными характеристиками этих движений.

Будем называть сложным или «абсолютным» движением точки ее движение по отношению к системе координат, выбранной за основную. Движение точки по отношению к подвижной системе координат будем называть относительным.

Под переносным движением будем понимать движение подвижной системы координат относительно неподвижной.

Установление связи между сложным, относительным и переносным движениями позволит решать разнообразные задачи по определению кинематических характеристик сложного и составляющих движений.

В этой главе мы встретимся с необходимостью дифференцирования вектора, определенного в системе координат, которая может двигаться произвольным образом. В связи с этим мы введем понятия *абсолютной* и *относительной* производных вектора.

Пусть даны основная система координат и подвижная система координат, которая совершает произвольное движение. Пусть какой-либо вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ определен в подвижной системе координат, т. е. проекции этого вектора a_x, a_y, a_z на оси подвижной системы — заданные функции времени. Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы подвижной системы координат, то вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{13.1}$$

Установим теперь правило нахождения производной в неподвижной системе координат (абсолютной производной) от этого вектора. Дифференцируя обе части равенства (13.1) по времени, будем иметь в виду, что векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ вследствие движения подвижной системы координат меняют свое направление, т. е. являются функциями времени.

Таким образом, абсолютная производная вектора $\mathbf{a}$ по времени будет равна

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} + a_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \tag{13.2}$$

Сумма первых трех слагаемых представляет собой производную от вектора $\mathbf{a}$ в подвижной системе координат. В самом деле, если бы мы поставили задачей изучить изменение вектора $\mathbf{a}$ только по отношению к подвижной системе координат, то мы учитывали бы при этом

Остановимся на этом определении несколько подробнее. Рассматриваемая точка при своем движении относительно подвижного тела, с которым жестко связана подвижная система координат, проходит через разные точки этого тела, имеющие в общем случае отличные друг от друга скорости. Поэтому переносной скоростью точки в данный момент будет скорость именно той точки подвижного тела (подвижной системы координат), через которую в данный момент проходит движущаяся точка.

Если радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ определяет положение точки M по отношению к системе координат $Ox_1y_1z_1$, радиус-вектор $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A(t)$ определяет положение начала системы координат $Axyz$ в системе $Ox_1y_1z_1$, а радиус-вектор $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ определяет положение точки M в системе координат $Axyz$, то в соответствии с рис. 13.1 имеем

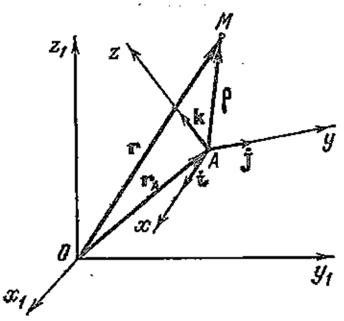


Рис. 13.1

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}. \tag{13.6}$$

Пусть координаты точки в подвижной системе координат будут x, y и z; тогда

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей подвижной системы координат.

По определению абсолютная производная радиуса-вектора по времени будет абсолютной скоростью точки. Следовательно, дифференцируя равенство (13.6) по времени, найдем абсолютную скорость точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}. \tag{13.7}$$

Так как вектор $\boldsymbol{\rho}$ определен в подвижной системе координат, то для нахождения абсолютной производной от него воспользуемся формулой (13.5):

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \tag{13.8}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы координат, а

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\rho}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

представляет собой относительную производную от $\boldsymbol{\rho}$ по времени. Согласно определению это будет относительная скорость точки, т. е.

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \tag{13.9}$$

Подставляя выражения (13.8) и (13.9) в соотношение (13.7), получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_r, \tag{13.10}$$

лишь изменение проекций вектора на оси этой системы координат. Движение же самой системы нас бы не интересовало.

Назовем сумму первых трех слагаемых в (13.2) *относительной* или *локальной* производной и обозначим ее через $\tilde{d}\mathbf{a}/dt$, т. е.

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k}. \tag{13.3}$$

Заменяя в формулах (9.11) и (12.10) радиус-вектор $\mathbf{r}$ последовательно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, получим

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Поэтому сумма последних трех слагаемых в (13.2)

$$a_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

может быть представлена в виде

$$a_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} = a_x(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + a_y(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + a_z(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) =$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \tag{13.4}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы координат.

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \tag{13.5}$$

Таким образом, *абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор.*

§ 13.2. Теорема о сложении скоростей

Выбирая систему координат $Ox_1y_1z_1$ за основную, предположим, что система координат $Axyz$ движется по отношению к основной системе произвольным образом (рис. 13.1). Движение какой-либо точки M может быть изучено как по отношению к основной, так и по отношению к подвижной системам координат методами, изложенными ранее. В данном параграфе мы поставим задачу о нахождении связи между скоростями точки по отношению к выбранным нами системам координат. Напомним данные ранее определения (§ 10.2).

Скорость $\mathbf{v}$ точки M по отношению к основной системе координат называется *абсолютной скоростью*.

Скорость $\mathbf{v}_r$ точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительной скоростью*.

Важным понятием является понятие о переносной скорости. *Переносной скоростью* $\mathbf{v}_e$ точки называется скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

где $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ — скорость начала подвижной системы координат по отношению к основной.

Для определения переносной скорости точки закрепим ее в подвижной системе координат, т. е. положим в формуле (13.10) $\mathbf{v}_r = 0$, тогда получим

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \text{ *}). \tag{13.11}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \tag{13.12}$$

т. е. *абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.*

§ 13.3. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Для того чтобы найти абсолютное ускорение точки, т. е. ее ускорение по отношению к основной системе координат, продифференцируем формулу (13.10) по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}. \tag{13.13}$$

Абсолютную производную вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ найдем по формуле (13.5):

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13.14}$$

В этом соотношении $\tilde{d}\mathbf{v}_r/dt$ есть относительная производная вектора $\mathbf{v}_r$ по времени и, следовательно, представляет собой относительное ускорение $\mathbf{w}_r$, т. е. ускорение точки по отношению к подвижной системе координат

$$\mathbf{w}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \tag{13.15}$$

Используя равенства (13.8), (13.9), (13.14) и (13.15), преобразуем формулу (13.13) к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}_r + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] + \mathbf{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \\ &= \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{w}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \end{aligned} \tag{13.16}$$

где $\mathbf{w}_A = \dot{\mathbf{v}}_A$ — ускорение начала подвижной системы координат, а $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ — ее угловое ускорение.

Для того чтобы найти переносное ускорение $\mathbf{w}_e$ (ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка!), закрепим точку в подвижной системе координат, т. е. положим $\mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{w}_r = 0$.

---

*) Эта формула нам уже знакома (§ 12.4). Скорость, определяемая по этой формуле, есть скорость той точки свободного твердого тела (подвижной системы координат), с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

В этом случае согласно формуле (13.16) будем иметь

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \tag{13.17}$$

т. е. переносное ускорение представляет собой ускорение точки свободного твердого тела, с которым жестко связана подвижная система координат. Таким образом, имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13.18}$$

Ускорение, определяемое членом $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$, называется *поворотным* или *кориолисовым* ускорением и обозначается через $\mathbf{w}_c$, т. е.

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{13.19}$$

Итак, имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c. \tag{13.20}$$

Эта формула выражает содержание теоремы Кориолиса: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.*

При использовании формулы (13.20) полезно иметь в виду, что переносное ускорение следует определять по правилам нахождения ускорения точек твердого тела. При нахождении относительного ускорения подвижную систему координат следует считать неподвижной и использовать правила, изложенные в главе IX.

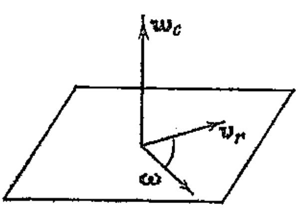


Рис. 13.2

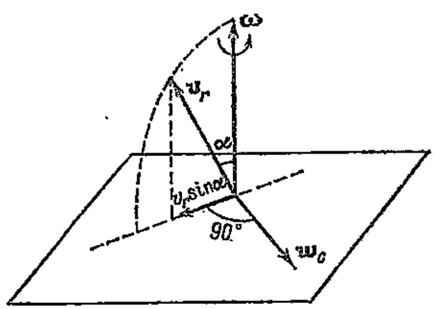


Рис. 13.3

Остановимся несколько подробнее на кориолисовом ускорении $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$. Модуль этого ускорения, очевидно, равен

$$w_c = 2\omega v_r \sin(\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{v}_r). \tag{13.21}$$

Направление кориолисова ускорения определяется направлением векторного произведения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, т. е. кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший переход от $\boldsymbol{\omega}$ к $\mathbf{v}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 13.2). Если векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ не лежат в одной плоскости, удобно бывает мысленно перенести вектор $\boldsymbol{\omega}$ параллельно самому себе в начало вектора скорости $\mathbf{v}_r$ и применить указанное выше правило.

Иногда нахождение кориолисова ускорения облегчается применением следующего правила Н. Е. Жуковского (рис. 13.3): *проекцию* *относительной скорости* $\mathbf{v}_r$ *на плоскость, перпендикулярную угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$ *подвижной системы координат, равную* $v_r \sin\alpha$, *следует умножить на* 2ω *и повернуть на угол* $90°$ *вокруг* $\boldsymbol{\omega}$ *в направлении вращения. Вектор, равный по модулю* $2\omega v_r \sin\alpha$ *и имеющий найденное направление, и будет кориолисовым ускорением.*

На основании формулы (13.21) можно указать, что кориолисово ускорение равно нулю в следующих случаях:

1) $\omega = 0$, это будет при поступательном перемещении подвижной системы координат;

2) угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ подвижной системы параллельна относительной скорости $\mathbf{v}_r$;

3) в момент времени, когда относительная скорость $\mathbf{v}_r$ точки равна нулю.

§ 13.4. Задачи

Задача 13.1. Круговой спутник пролетает над экватором. Его скорость $v_0 = 7{,}9$ км/с. Плоскость орбиты наклонена к плоскости экватора под углом θ. Определить скорость движения спутника, видимую с Земли на экваторе, и видимое направление движения полярного спутника ($\theta = \pi/2$). Радиус Земли $R = 6400$ км (рис. 13.4).

Скорость движения по орбите является абсолютной скоростью в системе координат, движущейся поступательно с началом в центре Земли. Земля в этой системе координат вращается с угловой скоростью $\omega = 2\pi/(24\cdot 3600)$ рад/с.

Отложим от оси x, касательной к экватору, вектор $\mathbf{v}_0$. Он составляет с направлением на восток угол θ.

Переносная скорость точки на экваторе равна скорости точки, участвующей во вращательном движении Земли. Следовательно, переносная скорость направлена по касательной к экватору на восток и равна по модулю

$$v_e = \omega R = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}\,6400 = 0{,}465 \text{ км/с}.$$

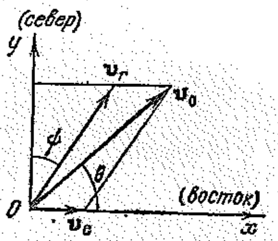


Рис. 13.4

Зная абсолютную и переносную скорости точки, можно определить и относительную скорость. Для этого разложим вектор $\mathbf{v}_0$ на две составляющие, из которых одна равна $\mathbf{v}_e$. Определим проекции относительной скорости на оси x и y (рис. 13.4):

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e,$$

$$v_{rx} = v_0\cos\theta - v_e = 7{,}9\cos\theta - 0{,}465,$$

$$v_{ry} = v_0\sin\theta = 7{,}9\sin\theta.$$

Таким образом, угол ψ, составленный относительной скоростью с меридианом, определится из соотношения

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{v_{rx}}{v_{ry}} = \frac{7{,}9\cos\theta - 0{,}465}{7{,}9\sin\theta},$$

а модуль относительной скорости — из равенства

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} = \sqrt{v_0^2 + v_e^2 - 2v_0v_e\cos\theta} = \sqrt{7{,}9^2 + 0{,}465^2 - 2\cdot 7{,}9\cdot 0{,}465\cos\theta}.$$

Для полярного спутника $\theta = \pi/2$ и поэтому

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{0,465}{7,9} = -0,059.$$

Соответствующий угол $\psi \approx -3°,4$. Знак минус указывает на то, что при направлении абсолютного движения на север видимое с Земли направление скорости отклонено на северо-запад.

Модуль относительной скорости для полярного спутника мало отличается от модуля абсолютной скорости:

$$v_r = \sqrt{7,9^2 + 0,465^2} = 7,914 \text{ км/с}.$$

Задача 13.2. Стержень OA вращается вокруг оси, проходящей через его конец O, с постоянной угловой скоростью ω. Ползун M движется вдоль стержня от точки O

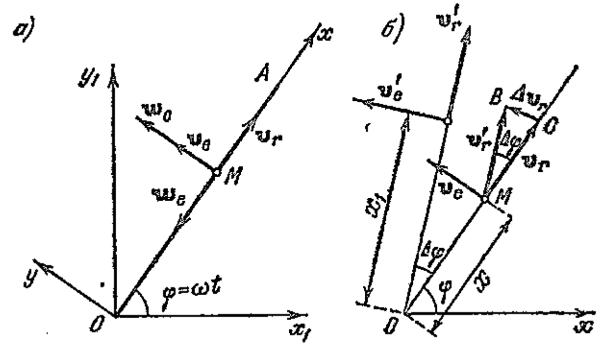


Рис. 13.5

с постоянной относительной скоростью $\mathbf{v}_r$. Определить модуль и направление переносного, относительного и кориолисова ускорений ползуна в тот момент, когда $OM = x$ (рис. 13.5, *а*).

Для того чтобы определить переносное ускорение, мысленно закрепим ползун на стержне. Переносным ускорением ползуна будет ускорение той точки стержня, в которой ползун закреплен. Так как стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω, то ускорение этой точки (переносное ускорение ползуна) будет направлено к точке O и по модулю равно

$$w_e = \omega^2 x.$$

Относительное движение ползуна равномерное и прямолинейное, поэтому его относительное ускорение равно нулю, т. е. $\mathbf{w}_r = 0$. Согласно формуле (13.19) кориолисово ускорение численно будет равно

$$w_c = 2\omega v_r,$$

так как векторы ω и $\mathbf{v}_r$ перпендикулярны. Направлено же кориолисово ускорение перпендикулярно стержню в сторону вращения стержня.

В рассматриваемом примере достаточно просто можно показать причину возникновения кориолисова ускорения. В самом деле, при нахождении переносного и относительного ускорений мы не учитывали следующих обстоятельств: во-первых, относительная скорость при вращении стержня меняет свое направление по отношению к неподвижной системе координат; во-вторых, модуль переносной скорости ползуна меняется вследствие перемещения ползуна из точек стержня с меньшей скоростью в точки стержня с большей скоростью.

Учтем теперь эти обстоятельства.

Пусть в момент времени t расстояние точки M от точки O равно x, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ оно составляет x_1. За промежуток времени Δt стержень повернется на угол $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$ (рис. 13.5, *б*). Вектор относительной скорости $\mathbf{v}_r$ повернется также на угол $\Delta\varphi$. Приращение вектора $\mathbf{v}_r$ за промежуток Δt, очевидно, равно

$$\Delta\mathbf{v}_r = \mathbf{v}'_r - \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}'_r$ — относительная скорость в момент $t + \Delta t$.

Из рассмотрения рис. 13.5, *б* следует, что для достаточно малых Δt модуль вектора $\Delta\mathbf{v}_r$ будет равен

$$|\Delta\mathbf{v}_r| = v_r\,\Delta\varphi = v_r\omega\,\Delta t.$$

Разделив обе части равенства на Δt, получим

$$w_1 = |\Delta\mathbf{v}_r|/\Delta t = v_r\omega.$$

Так как $\triangle\, CMB$ равнобедренный, то при $\Delta t \to 0$ вектор $\mathbf{w}_1$ будет направлен перпендикулярно стержню в сторону его вращения.

В момент времени t переносная скорость ползуна равна $v_e = \omega x$, а в момент $t + \Delta t$ $v'_e = \omega x_1$. Приращение модуля переносной скорости равно

$$\Delta v_e = v'_e - v_e = \omega\,(x_1 - x) = \omega v_r\,\Delta t,$$

откуда, поделив на Δt, получим

$$w_2 = \Delta v_e/\Delta t = \omega v_r.$$

Вектор $\mathbf{w}_2$, учитывающий изменение модуля переносной скорости, будет, очевидно, направлен по переносной скорости, т. е. перпендикулярно стержню в сторону его вращения.

Складывая теперь w_1 и w_2, получим

$$w_c = 2\omega v_r.$$

Это и есть кориолисово ускорение, найденное нами ранее при помощи формулы (13.19).

Итак, в рассматриваемом случае кориолисово ускорение появляется, во-первых, вследствие изменения направления относительной скорости по отношению к неподвижной системе координат за счет вращения подвижной системы координат, во-вторых, вследствие перемещения точки из-за относительного движения в сторону больших переносных скоростей.

Задача 13.3. По ободу диска радиуса R, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, движется точка M с постоянной по модулю относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ (рис. 13.6, *а*). Найти абсолютное ускорение точки M.

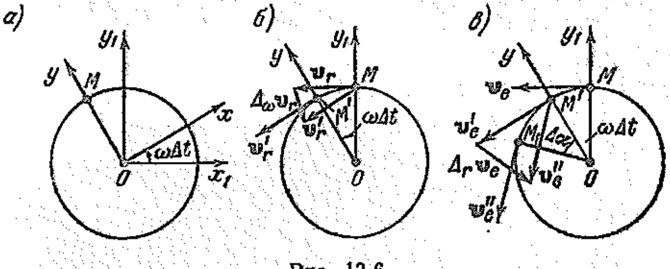


Рис. 13.6

Так как диск вращается с постоянной угловой скоростью, то переносное ускорение будет равно

$$w_e = \omega^2 R$$

и направлено к центру диска. Относительное ускорение равно

$$w_r = v_r^2/R$$

и также направлено к центру диска.

Согласно формуле (13.21) модуль кориолисова ускорения равен

$$w_c = 2\omega v_r.$$

Направлено же кориолисово ускорение также к центру диска (при относительном движении точки, направленном в сторону, обратную вращению диска, ускорение Кориолиса направлено в противоположную сторону).

Таким образом, абсолютное ускорение точки равно

$$w = \omega^2 R + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r.$$

Эту формулу можно получить и иначе. Абсолютная скорость точки равна по модулю

$$v = \omega R + v_r = \text{const},$$

а так как траекторией является окружность, то

$$w = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R + v_r)^2}{R} = \omega^2 R + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r.$$

Появление кориолисова ускорения в этом примере связано с двумя причинами: изменением направления относительной скорости вследствие вращения диска (подвижной системы координат) и изменением направления переносной скорости из-за относительного (по отношению к диску) перемещения точки.

Пусть система координат Ox_1y_1 неподвижная, а система координат Oxy жестко связана с диском. За промежуток времени Δt точка M диска вследствие его вращения переместится в положение M'. Точка же, движущаяся по диску за этот же промежуток времени, переместится в положение M_1 (рис. 13.6, *б*, *в*).

Приращение относительной скорости, обусловленное вращением диска, обозначим через $\Delta_\omega \mathbf{v}_r$. Из рис. 13.6, *б* следует, что при достаточно малых Δt

$$|\Delta_\omega \mathbf{v}_r| = |\mathbf{v}_r' - \mathbf{v}_r| \approx v_r \omega \, \Delta t.$$

Направление вектора $\Delta_\omega \mathbf{v}_r/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ стремится к направлению соответствующего радиуса диска. Модуль же этого вектора стремится к

$$w_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta_\omega \mathbf{v}_r|}{\Delta t} = \omega v_r.$$

Приращение вектора переносной скорости, обусловленное относительным перемещением точки, будет равно (рис. 13.6, *в*)

$$\Delta_r \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_e'' - \mathbf{v}_e'.$$

Так как дуга $M'M_1$ равна $v_r \, \Delta t$, то угол $\Delta\alpha$, на который повернется переносная скорость из-за относительного перемещения, определится из выражения

$$\Delta\alpha = v_r \, \Delta t/R.$$

Поэтому имеем

$$|\Delta_r \mathbf{v}_e| \approx v_e \, \Delta\alpha = \omega R v_r \, \Delta t/R = \omega v_r \, \Delta t.$$

Вектор $\Delta_r \mathbf{v}_e/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ по направлению также будет стремиться совпасть с радиусом, а по модулю приближается к

$$w_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta_r \mathbf{v}_e|}{\Delta t} = \omega v_r.$$

Итак, полное приращение вектора скорости, связанное с двумя указанными причинами, приводит к появлению ускорения, перпендикулярного относительной скорости, направленного к центру диска и равного по модулю

$$w_c = w_1 + w_2 = 2\omega v_r,$$

т. е. к ускорению Кориолиса.

Задача 13.4. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 13.7). По прямолинейному пазу CD движется ползун N по закону $\sigma = CN = 3t^2$ см, расстояние от центра диска до паза $h = 5$ см; $CD = 24$ см. Определить скорость и ускорение ползуна N в момент, когда он достигнет середины паза E.

Абсолютная скорость ползуна N определяется по формуле $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$.

В рассматриваемой задаче подвижная система координат, относительно которой происходит движение ползуна N, жестко связывается с диском. Следовательно, переносной скоростью ползуна, когда он совпадает с точкой E диска, будет скорость точки E диска, т. е.

$$v_e = \omega \cdot OE = 10 \text{ см/с}.$$

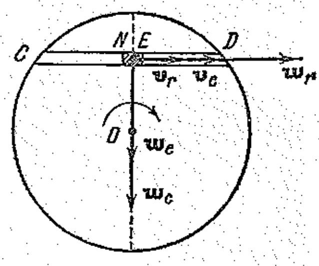


Рис. 13.7

Вектор $\mathbf{v}_e$ направлен перпендикулярно OE.

Относительное движение точки является прямолинейным. Относительная скорость равна

$$v_r = \frac{d\sigma}{dt} = 6t \text{ см/с}.$$

Векторы $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_r$ направлены в одну сторону, следовательно, абсолютная скорость ползуна N равна

$$v = (10 + 6t) \text{ см/с}.$$

Так как $CE = 12$ см, то момент $t = t_1$ прохождения ползуна через точку E определится из соотношения $3t_1^2 = 12$, откуда $t_1 = 2$ с и, следовательно, при $t_1 = 2$ с имеем

$$v = 22 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение ползуна определяется формулой

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c.$$

Диск вращается с постоянной угловой скоростью, поэтому ускорение точки E диска (в которой в момент t_1 находится ползун) равно

$$w_e = w_e^{\text{oc}} = \omega^2 OE = 20 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{w}_e$ направлен к центру O диска. Относительное ускорение, как ускорение точки в прямолинейном движении, будет

$$w_r = \frac{dv_r}{dt} = 6 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\mathbf{w}_r$ направлен вдоль прямой CD. Так как вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и вектор $\mathbf{v}_r$ взаимно перпендикулярны, то кориолисово ускорение равно

$$w_c = 2\omega v_r = 24t \text{ см/с}^2$$

и при $t_1 = 2$ с

$$w_c = 48 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\mathbf{w}_c$ указано на рис. 13.7.

Абсолютное ускорение ползуна N в момент $t = t_1 = 2$с равно

$$w = \sqrt{(w_e + w_c)^2 + w_r^2} \approx 68{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Задача 13.5. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вращается вокруг катета BA (рис. 13.8) с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2; начальная угловая скорость треугольника равна нулю. По гипотенузе треугольника от вершины B к основанию движется точка M по закону $\sigma = BM = 20t$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент $t = 2$ с.

Подвижная система координат в рассматриваемой задаче жестко связывается с треугольником ABC. Пусть в рассматриваемый момент времени точка M находится в положении, указанном на рис. 13.8. Так как угловое ускорение треугольника постоянно, то угловая скорость треугольника равна $\omega = \varepsilon t$ (начальная угловая скорость по условию задачи равна нулю).

Переносное ускорение, т. е. ускорение той точки гипотенузы, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M, может быть разложено на вращательное и осестремительное. Модули этих ускорений равны

$$w_e^{\text{ос}} = \omega^2 \cdot MN, \quad w_e^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot MN,$$

где $MN = BM \sin 45° = 20t \sin 45°$. Для $t = 2$ с имеем

$$w_e^{\text{ос}} = 20\sqrt{2} = 28{,}2 \text{ см/с}^2, \quad w_e^{\text{вр}} = 10\sqrt{2} = 14{,}1 \text{ см/с}^2.$$

Направление ускорений $\mathbf{w}_e^{\text{ос}}$ и $\mathbf{w}_e^{\text{вр}}$ указано на рис. 13.8.

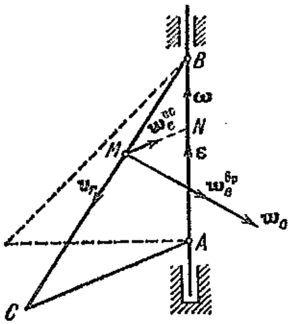


Рис. 13.8

Относительное движение точки прямолинейное. Так как

$$v_r = \frac{d\sigma}{dt} = 20 \text{ см/с} = \text{const},$$

то $w_r = 0$.

Ускорение Кориолиса определится по формуле

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость треугольника (переносная угловая скорость). Направление $\mathbf{w}_c$ указано на рис. 13.8 ($\mathbf{w}_c$ перпендикулярно плоскости $\triangle ABC$).

Модуль кориолисова ускорения равен

$$w_c = 2\omega v_r \sin(180° - 45°) = 2\omega v_r \sin 45°$$

и при $t = 2$ с

$$w_c \approx 28{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки в момент $t = 2$ с равен

$$w = \sqrt{\left(w_e^{\text{вр}} + w_c\right)^2 + \left(w_e^{\text{ос}}\right)^2} \approx 509 \text{ см/с}^2.$$

Задача 13.6. Определить проекции абсолютного ускорения точки M, движущейся по меридиану Земли на юг с постоянной по модулю относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ (рис. 13.9), на оси системы координат $Mxyz$ (ось x направлена по касательной к меридиану на север, ось y — по касательной к параллели на запад, ось z — по радиусу Земли).

Так как абсолютное ускорение точки определяется формулой

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c,$$

то его проекции на оси координат будут

$$w_x = w_{ex} + w_{rx} + w_{cx}, \quad w_y = w_{ey} + w_{ry} + w_{cy},$$

$$w_z = w_{ez} + w_{rz} + w_{cz}.$$

Угловая скорость Ω Земли постоянна, и, следовательно, переносное ускорение равно

$$w_e = \Omega^2 R \cos\varphi,$$

где R — радиус Земли, а φ — геоцентрическая широта той точки Земли, с которой в данный момент совпадает точка M. Направлено $\mathbf{w}_e$ от точки M к оси вращения Земли.

Так как точка M движется по меридиану с постоянной скоростью, то относительное ускорение точки будет по модулю равно

$$w_r = v_r^2/R$$

и направлено к центру Земли.

Кориолисово ускорение согласно (13.19) по модулю равно

$$w_c = 2\Omega v_r \sin(\pi - \varphi) = 2\Omega v_r \sin\varphi,$$

и направлено в сторону, противоположную направлению оси y.

Проектируя векторы ускорений $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{w}_c$ на оси координат, получим

$$w_{ex} = \Omega^2 R \sin\varphi\cos\varphi, \qquad w_{ey} = 0,$$
$$w_{rx} = 0, \qquad w_{ry} = 0,$$
$$w_{cx} = 0, \qquad w_{cy} = -2\Omega v_r \sin\varphi,$$

$$w_{ez} = -\Omega^2 R\cos^2\varphi,$$
$$w_{rz} = -v_r^2/R,$$
$$w_{cz} = 0.$$

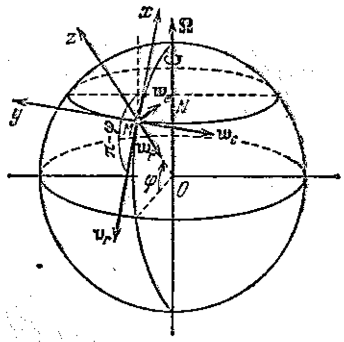


Рис. 13.9

Таким образом, имеем

$$w_x = \Omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi, \qquad w_y = -2\Omega v_r \sin\varphi,$$

$$w_z = -\Omega^2 R\cos^2\varphi - v_r^2/R.$$

Задача 13.7. Точка M движется по поверхности Земли по произвольной траектории. Определить горизонтальную составляющую кориолисова ускорения точки, если ее скорость относительно Земли равна $\mathbf{v}_r$.

Построим географически ориентированную систему координат xyz, направив ось x по касательной к меридиану на север, ось y по касательной к параллели на запад

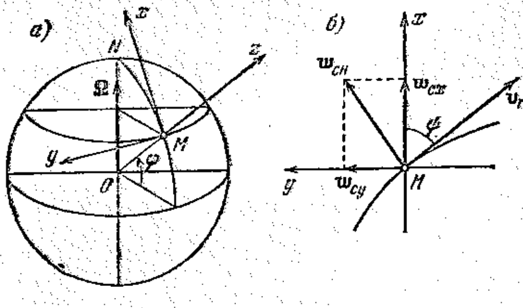


Рис. 13.10

и ось z по радиусу Земли вверх (рис. 13.10, *а*). Обозначим курс точки через ψ (угол между относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ и направлением на север, т. е. осью x (рис. 13.10, *б*)). Тогда проекции относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на оси x, y, z будут

$$v_{rx} = v_r\cos\psi, \quad v_{ry} = -v_r\sin\psi, \quad v_{rz} = 0.$$

Проекции угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ вращения Земли на те же оси определяются равенствами

$$\Omega_x = \Omega\cos\varphi, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega\sin\varphi,$$

где φ — широта места точки M в данный момент (см. рис. 13.10, *а*).

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r = 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x & 0 & \Omega_z \\ v_{rx} & v_{ry} & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее находим проекции кориолисова ускорения на горизонтальные оси x и y

$$w_{cx} = -2\Omega_z v_{ry} = 2\Omega v_r \sin\varphi \sin\psi, \qquad w_{cy} = 2\Omega_z v_{rx} = 2\Omega v_r \sin\varphi \cos\psi.$$

Определим модуль горизонтальной составляющей кориолисова ускорения

$$w_{cH} = \sqrt{w_{cx}^2 + w_{cy}^2} = 2\Omega v_r \sin\varphi.$$

Из этого выражения видно, что модуль горизонтальной составляющей кориолисова ускорения зависит только от относительной скорости $\mathbf{v}_r$ и широты места движения точки и не зависит от направления движения.

Покажем, что в северном полушарии горизонтальная составляющая кориолисова ускорения направлена всегда перпендикулярно $\mathbf{v}_r$ влево от движения, т. е. влево от направления относительной скорости (в южном полушарии вправо). Действительно, составим проекцию горизонтальной составляющей кориолисова ускорения на направление относительной скорости $\mathbf{v}_r$. Имеем (см. рис. 13.10, *б*)

$$\text{пр}_{\mathbf{v}_r} \mathbf{w}_{cH} = w_{cx}\cos\psi - w_{cy}\sin\psi$$

или, подставляя найденные значения для w_{cx} и w_{cy},

$$\text{пр}_{\mathbf{v}_r} \mathbf{w}_{cH} = 0,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Задача 13.8. Принимая поверхность Земли за сферу радиуса R и считая, что движение точки M относительно вращающейся Земли задано, определить скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ точки M относительно системы координат, движущейся поступательно и имеющей начало в центре Земли.

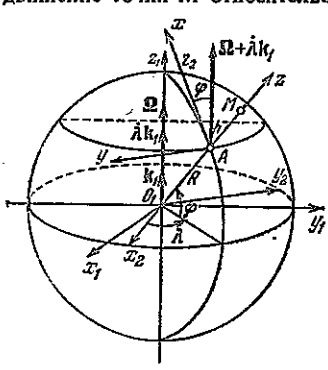


Рис. 13.11

Пусть положение точки M относительно Земли определяется долготой λ, широтой φ и высотой h над уровнем поверхности Земли. Введем в рассмотрение подвижную систему координат $Axyz$. Ось z направим по радиусу Земли так, чтобы она проходила через точку M, ось x направим по касательной к меридиану на север, ось y — по касательной к параллели на запад. Начало координат A этой системы располагаем на земной поверхности (рис. 13.11). Единичными векторами осей x, y и z соответственно будут $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Эту задачу можно решить различными методами, в частности, с помощью теоремы о сложении ускорений. Однако мы воспользуемся не методом разложения движения на простейшие, а используем формулу, связывающую абсолютную производную вектора с относительной производной, так как в данном примере это приводит быстрее всего к цели.

Пусть система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется поступательно, а система координат $O_1x_2y_2z_2$ жестко связана с Землей. Будем считать заданными проекции скорости точки M относительно вращающейся Земли на оси системы координат $Axyz$. Очевидно, что v_N, v_0, v_h — проекции скорости на меридиан, параллель и вертикаль — соответственно равны

$$v_N = (R+h)\dot\varphi, \qquad v_0 = (R+h)\dot\lambda\cos\varphi, \qquad v_h = \dot h. \tag{13.22}$$

При движении точки M и вращении Земли система координат $Axyz$ совершает вращение вокруг оси y с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и вокруг оси вращения Земли с угловой скоростью $\Omega+\dot{\lambda}$, где Ω — угловая скорость Земли (рис. 13.11). Следовательно, проекции угловой скорости системы координат $Axyz$ на ее оси будут

$$\omega_x=(\dot{\lambda}+\Omega)\cos\varphi,\quad \omega_y=\dot{\varphi},\quad \omega_z=(\dot{\lambda}+\Omega)\sin\varphi,$$

или, учитывая (13.22), получим

$$\omega_x=\frac{v_0}{R+h}+\Omega\cos\varphi,\quad \omega_y=\frac{v_N}{R+h},\quad \omega_z=\left(\frac{v_0}{R+h}+\Omega\cos\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi. \quad (13.23)$$

Эти формулы имеют самостоятельное значение в различных прикладных вопросах.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M относительно центра Земли в системе координат $Axyz$ представляется в следующем виде:

$$\mathbf{r}=(R+h)\,\mathbf{k}. \quad (13.24)$$

Абсолютная скорость точки M (скорость по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$) равна

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

где

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt}=\dot{h}\mathbf{k}=v_h\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$v_x=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_x=\omega_y(R+h),\quad v_y=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})_y=-\omega_x(R+h),\quad v_z=v_h.$$

Принимая во внимание формулы (13.23), получаем

$$v_x=v_N,\quad v_y=-v_0-\Omega(R+h)\cos\varphi,\quad v_z=v_h. \quad (13.25)$$

Определив вектор $\mathbf{v}$ в системе координат $Axyz$, абсолютное ускорение точки M найдем по формуле

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\tilde{d}\mathbf{v}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}, \quad (13.26)$$

где

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{i}+\frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{j}+\frac{dv_z}{dt}\,\mathbf{k}.$$

В соответствии с формулой (13.26) имеем

$$w_x=\frac{dv_x}{dt}+\omega_yv_z-\omega_zv_y,\quad w_y=\frac{dv_y}{dt}+\omega_zv_x-\omega_xv_z,$$

$$w_z=\frac{dv_z}{dt}+\omega_xv_y-\omega_yv_x.$$

Так как

$$\frac{dv_x}{dt}=\dot{v}_N,$$

$$\frac{dv_y}{dt}=-\dot{v}_0-\Omega v_h\cos\varphi+\Omega(R+h)\dot{\varphi}\sin\varphi=-\dot{v}_0-\Omega v_h\cos\varphi+v_N\Omega\sin\varphi,$$

$$\frac{dv_z}{dt}=\dot{v}_h,$$

то, учитывая соотношения (13.23) и (13.25), найдем

$$w_x = \dot{v}_N + \frac{v_N v_h}{R+h} + \frac{v_0^2 \operatorname{tg}\varphi}{R+h} + 2v_0\Omega\sin\varphi + \Omega^2(R+h)\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$w_y = -\dot{v}_0 - \frac{v_0 v_h}{R+h} + \frac{v_N v_0}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + 2\Omega(v_N\sin\varphi - v_h\cos\varphi),$$

$$w_z = \dot{v}_h - \frac{v_0^2 + v_N^2}{R+h} - 2v_0\Omega\cos\varphi - (R+h)\Omega^2\cos^2\varphi \ ^{*}).$$

Это и есть проекции абсолютного ускорения точки M на оси системы координат $Axyz$.

Глава XIV

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 14.1. Постановка задачи

Пусть твердое тело движется относительно подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а последняя в свою очередь перемещается относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, принимаемой за неподвижную. В этом случае говорят, что тело совершает сложное движение, которое состоит из двух составляющих движений.

Сложное движение может состоять из n составляющих движений. В этом случае имеется n систем координат и задается n движений: движение тела относительно системы координат $O_nx_ny_nz_n$, движение системы $O_nx_ny_nz_n$ относительно системы $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$ и т. д., наконец, задается движение системы $O_2x_2y_2z_2$ относительно основной системы $O_1x_1y_1z_1$. Движение тела или движение какой-либо одной системы координат относительно другой в общем случае ничем не ограничено. Задача заключается в нахождении зависимости между основными характеристиками составляющих движений и сложного движения.

В главе XII было установлено, что движение свободного твердого тела можно представить как сложное движение, состоящее из совокупности сферического движения тела вокруг некоторого полюса и поступательного движения тела вместе с системой координат, связанной с полюсом. Таким образом, основными кинематическими характеристиками движения тела являются скорость и ускорение поступательного движения и угловые скорости и ускорения. Следовательно, задача изучения сложного движения тела, заключающаяся в нахождении зависимости между основными характеристиками составляющих движений и сложного движения, сводится к установлению связи между поступательными и угловыми скоростями и уско-

*) Эти соотношения к книге: Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961, получены с использованием формул (13.11) и (13.20). См. также: Николаи Е. Л. Труды ЛПИ, 1941, № 3.

рениями составляющих движений. В настоящем курсе мы ограничимся лишь установлением связи между поступательными и угловыми скоростями.

Рассмотрение начнем с простейших случаев.

§ 14.2. Сложение поступательных движений

Пусть $\mathbf{v}_1$ — скорость поступательного движения тела P относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 14.1), а $\mathbf{v}_2$ — скорость поступательного движения системы $O_2x_2y_2z_2$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Тогда, чтобы найти абсолютную скорость какой-либо точки M тела P, нужно применить теорему о сложении скоростей (глава XIII):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e. \tag{14.1}$$

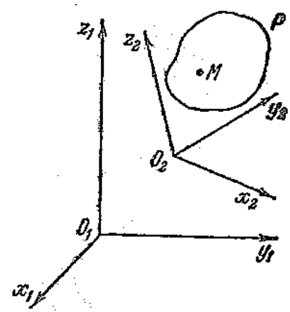


Рис. 14.1

В нашем случае $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_2$, следовательно,

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \tag{14.2}$$

Таким образом, у всех точек тела абсолютные скорости оказались одинаковыми, следовательно, при сложении поступательных движений твердого тела результирующее движение будет также поступательным и скорость результирующего движения равна сумме скоростей составляющих движений.

В случае n поступательных движений, применяя последовательно формулу (14.1), можно показать, что результирующее движение также будет поступательным, и его скорость будет равна сумме скоростей составляющих движений, т. е.

$$\mathbf{v}_M = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

Возможен случай, когда скорости всех точек тела только в данный момент времени оказываются равными между собой. Этот случай называют *мгновенно-поступательным движением*. Однако следует иметь в виду, что ускорения точек при этом различны (см. случай *а*) в задаче 11.9).

§ 14.3. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Кинематические уравнения Эйлера

Пусть тело P вращается в системе координат $Ox_2y_2z_2$ вокруг оси z_2 с угловой скоростью ω_2, а система координат $Ox_2y_2z_2$ вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы с угловой скоростью ω_1 (рис. 14.2). Точка O остается неподвижной, поэтому результирующее движение тела будет сферическим. Обозначим через Ω угловую скорость этого движения. Наша задача состоит в том, чтобы найти угловую скорость абсолютного движения тела, зная угловые скорости ω_1 и ω_2 составляющих вращений.

Найдем абсолютную скорость произвольной точки M тела. Для этого в формулу (14.1) следует подставить

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M; тогда

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

С другой стороны, скорость той же точки M в абсолютном движении будет равна

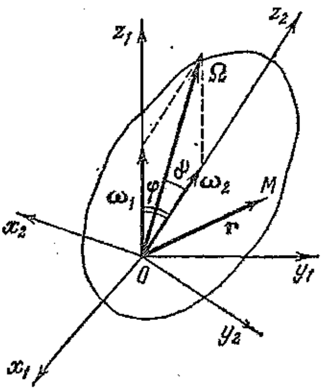


Рис. 14.2

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Сравнивая оба выражения, получим

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

Так как точка M, а следовательно, и ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольны, то

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \qquad (14.3)$$

Из формулы (14.3) следует, что *совокупность двух вращений, происходящих вокруг пересекающихся осей, эквивалентна одному вращению, происходящему с мгновенной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.*

Замечание. В случае $\boldsymbol{\omega}_1 = -\boldsymbol{\omega}_2$ из (14.3) следует, что $\mathbf{v}_M = 0$. Следовательно, совокупность двух вращений вокруг одной и той же оси, происходящих с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями, эквивалентна покою. Такую совокупность движений всегда можно присоединять к любому сложному движению тела.

Совокупность n вращений вокруг пересекающихся в одной точке осей эквивалентна одному вращению с мгновенной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i.$$

Полученное правило сложения вращений вокруг пересекающихся осей позволит нам теперь выразить проекции мгновенной угловой скорости тела, имеющего одну неподвижную точку O, через углы Эйлера и их производные.

Напомним (§ 12.1), что положение подвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, полностью определяется относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ углами Эйлера (рис. 14.3). Тело участвует в трех вращениях: первое вращение, соответствующее изменению угла прецессии ψ, происходит вокруг неподвижной оси Oz_1 с угловой скоростью $\dot{\psi}\mathbf{k}_1$; второе вращение, соответствующее изменению угла нутации θ, происходит вокруг линии узлов OK с угловой скоростью $\dot{\theta}\mathbf{i}'$, где $\mathbf{i}'$ — единичный вектор, линии узлов; наконец, третье вращение, соответствующее изменению угла собственного вращения φ, происходит вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\varphi}\mathbf{k}$. Следовательно, абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела будет

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k}_1 + \dot{\theta}\mathbf{i}' + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \tag{14.4}$$

Составим таблицу направляющих косинусов единичных векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{k}$ в системе подвижных осей $Oxyz$:

	x	y	z
$\mathbf{k}_1$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta$
$\mathbf{i}'$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Поясним составление первой строки этой таблицы (вторая и третья строки непосредственно следуют из рис. 14.3, *а*). Разложим

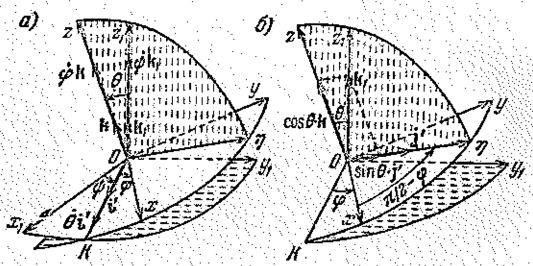


Рис. 14.3

единичный вектор $\mathbf{k}_1$ на две взаимно перпендикулярные составляющие, направив одну из них по оси z (она равна $\cos\theta\cdot\mathbf{k}$, см. рис. 14.3, *б*); тогда вторая составляющая, равная $\sin\theta\cdot\mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}'$ — единичный вектор вспомогательной оси η, будет находиться в плоскости xy. Следовательно,

$$\mathbf{k}_1 = \cos\theta\cdot\mathbf{k} + \sin\theta\cdot\mathbf{j}'. \tag{14.5}$$

Вспомогательная ось η составляет с осями x и y углы $\pi/2 - \varphi$ и φ. Проектируя единичный вектор $\mathbf{k}_1$ на оси x, y и z, получим (напомним, что проекции единичных векторов равны соответствующим направляющим косинусам)

$$\cos(\mathbf{k}_1,\ x) = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos(\mathbf{k}_1,\ y) = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \cos(\mathbf{k}_1,\ z) = \cos\theta.$$

Эти выражения и составляют первую строку таблицы направляющих косинусов.

Проектируя теперь обе части равенства (14.4) на оси x, y, z и учитывая таблицу косинусов, найдем проекции вектора угловой скорости тела на оси, жестко связанные с телом:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,\\ \omega_y &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\\ \omega_z &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi.\end{aligned} \tag{14.6}$$

Полученные соотношения носят название *кинематических уравнений Эйлера.*

Модуль угловой скорости определяется равенством

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta}. \tag{14.7}$$

Таблица направляющих косинусов между единичными векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{k}$ в системе неподвижных осей $Ox_1y_1z_1$ имеет вид

	x_1	y_1	z_1
$\mathbf{k}_1$	0	0	1
$\mathbf{i}'$	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
$\mathbf{k}$	$\sin\theta\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$	$\cos\theta$

Для того чтобы получить последнюю строку, мы разложили вектор $\mathbf{k}$ на две составляющие, направив одну из них по оси z_1 (она равна $\cos\theta\cdot\mathbf{k}_1$; см. рис. 14.4); тогда вторая, равная $\sin\theta\cdot\mathbf{j}''$, где $\mathbf{j}''$ — единичный вектор новой вспомогательной оси η, будет находиться в плоскости Ox_1y_1:

$$\mathbf{k} = \cos\theta\cdot\mathbf{k}_1 + \sin\theta\cdot\mathbf{j}''.$$

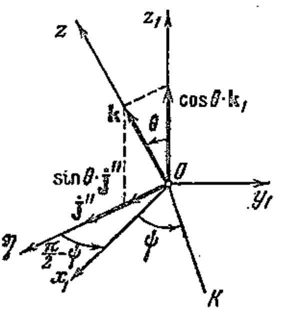


Рис. 14.4

Третья строка второй таблицы получена проектированием этого равенства на оси x_1, y_1, z_1. Проектируя теперь обе части равенства (14.4) на оси x_1, y_1, z_1 и пользуясь второй таблицей направляющих косинусов, найдем проекции вектора угловой скорости на неподвижные оси координат:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi,\\ \omega_{y_1} &= \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi,\\ \omega_{z_1} &= \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta.\end{aligned} \tag{14.8}$$

Кинематические уравнения Эйлера (14.6) и (14.8) устанавливают связь между проекциями вектора угловой скорости ω на соответствующие оси, углами Эйлера ψ, θ и φ и их первыми производными по времени.

Задача 14.1. Планетарный редуктор с коническими шестернями передает вращение вала *I* на вал *II* (рис. 14.5). Определить число оборотов в минуту вала *II* и число оборотов в минуту в абсолютном и относительном вращении сателлитов, если дано: $r_1 = 80$ мм; $r_2 = 80$ мм, $r_3 = 60$ мм и $n = 600$ об/мин.

Подвижная шестерня *3* вращается вокруг своей оси OB и вместе с этой осью вращается вокруг оси OA; мгновенная ось абсолютного движения шестерни *3* проходит через точку пересечения осей слагаемых вращений, т. е. через точку O и точку C (так как шестерня *1* неподвижна). Для определения числа оборотов абсолютного движения шестерни *3* и числа оборотов при относительном вращении ее вокруг своей оси воспользуемся формулой (14.3), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\omega_a = \omega + \omega_3,$$

где ω_a — абсолютная угловая скорость шестерни 3, ω — угловая скорость вала *I*, ω_3 — относительная угловая скорость шестерни *3*. Из рассмотрения подобных треугольников Oab и CBO (см. рис. 14.5) следует

$$\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{r_1}{r_3}, \quad \text{или} \quad \frac{n_3}{n} = \frac{r_1}{r_3},$$

где n_3 — число оборотов в минуту шестерни *3* в относительном движении, а n — число оборотов в минуту вала *I*. Отсюда имеем

$$n_3 = \frac{r_1}{r_3} n = \frac{80}{60} \cdot 600 = 800 \text{ об/мин}.$$

Абсолютная угловая скорость шестерни *3* равна

$$\omega_a = \frac{2\pi n_a}{60} = \frac{\pi \sqrt{n^2 + n_3^2}}{30} \approx$$
$$\approx 100 \text{ рад/с},$$

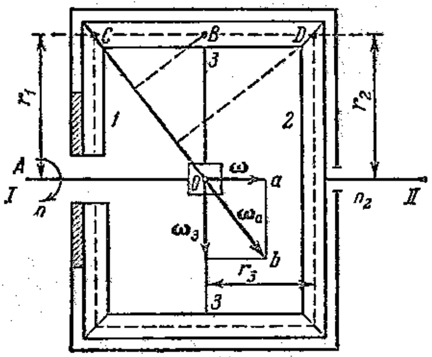


Рис. 14.5

причем через n_a обозначено число оборотов в минуту шестерни *3* в абсолютном движении.

В точке D происходит зацепление шестерен *2* и *3*, поэтому скорости точек шестерен *2* и *3*, совпадающих с точкой D равны между собой.

Скорость точки B шестерни *3* равна

$$v_B = \frac{\pi n}{30} r_1$$

и, следовательно,

$$v_D = 2v_B = \frac{2\pi n}{30} r_1.$$

Но скорость точки D шестерни *2* равна

$$v_D = \frac{\pi n_2}{30} r_2.$$

Таким образом, учитывая, что $r_1 = r_2$, получим

$$n_2 = 2n = 1200 \text{ об/мин}.$$

§ 14.4. Пара вращений

Рассмотрим сложное движение, состоящее из двух вращений относительно параллельных осей O_1z_1 и O_2z_2 (рис. 14.6).

Пусть угловые скорости относительного (ω_2) и переносного (ω_1) движений равны по модулю, но противоположно направлены ($\omega_2 =$

$= -\omega_1$). Такая совокупность движений называется *парой вращений*.

Найдем абсолютную скорость какой-либо точки M твердого тела:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

В нашем случае

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1,$$

следовательно,

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_2 = \\ = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}. \qquad (14.9)$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\overline{O_1O_2}$ не зависят от положения точки M, поэтому из (14.9) вытекает, что скорости всех точек тела одинаковы. Этим свойством обладает только *поступательное* движение.

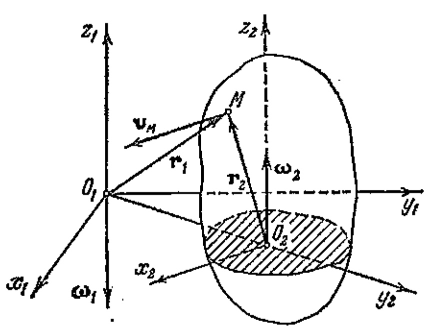


Рис. 14.6

Из (14.9) следует, что

$$\mathbf{v}_M = \overline{O_1O_2} \times \boldsymbol{\omega}_2. \qquad (14.10)$$

Векторное произведение $\overline{O_1O_2} \times \boldsymbol{\omega}_2$ называется *моментом пары вращений*. Таким образом, *тело, участвующее в паре вращений, движется поступательно со скоростью, равной моменту пары вращений*.

Легко видеть, что совокупность n пар вращений эквивалентна одной паре, т. е. поступательному движению. Заметим, что любое мгновенно-поступательное движение можно представить как мгновенную пару вращений.

Задача 14.2. Велосипедист едет со скоростью 21 км/ч, диаметр колес 700 мм, передаточное число равно трем. Определить, сколько оборотов в минуту делает педаль вокруг своей оси, если велосипедист движется без свободного хода.

Педаль велосипеда в результирующем движении перемещается поступательно. Это поступательное движение образуется из поступательного движения вместе с велосипедом и поступательного движения педали относительно велосипеда (последнее движение будет поступательным потому, что велосипедист ступней своей ноги держит педаль все время параллельно поверхности дороги). Поступательное движение педали относительно велосипеда осуществляется ее вращением относительно своей оси и вращением вместе с осью вокруг оси кривошипа. При таком движении педали ее угловая скорость при вращении вокруг своей оси будет равна и противоположно направлена ее угловой скорости при движении вокруг оси кривошипа (пара вращений).

Так как велосипед движется без свободного хода, то движение колеса велосипеда зависит от движения кривошипа. Определим число оборотов кривошипа вокруг своей оси из условия, что передаточное число равно трем. Обозначая через n число оборотов колеса, а через n_1 — число оборотов кривошипа, будем иметь

$$n/n_1 = 3.$$

Предполагая, что колесо катится по поверхности дороги без скольжения, найдем зависимость между скоростью велосипеда и числом оборотов колеса. Очевидно, это будет

$$v = \frac{\pi n}{30} r,$$

где r — радиус колеса. Таким образом,

$$n = \frac{30v}{\pi r} = \frac{30 \cdot 21\,000}{0{,}35\pi \cdot 3600} = \frac{500}{\pi} \text{ об/мин.}$$

Следовательно, число оборотов кривошипа равно

$$n_1 = \frac{n}{3} = \frac{500}{3\pi} \approx 53 \text{ об/мин}$$

и число оборотов педали

$$n_2 = n_1 \approx 53 \text{ об/мин.}$$

§ 14.5. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Из содержания предыдущих параграфов видно, что введенные выше простейшие кинематические элементы — угловые скорости вращения тела (или системы координат) и скорости поступательных

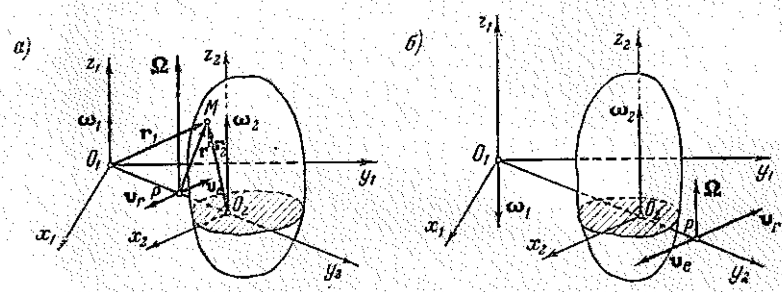


Рис. 14.7

движений подчиняются тем же законам, что и силы и пары в статике. В самом деле, пары вращений или поступательные движения аналогичны парам сил. Как и в статике, совокупность кинематических пар эквивалентна паре, момент которой (или *скорость результирующего поступательного движения*) равен сумме моментов слагаемых пар.

Угловые скорости вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке, заменяются одной угловой скоростью так же, как и сходящаяся система сил в статике приводится к одной силе (равнодействующей). Аналогия между угловыми скоростями составляющих вращений и силами этим не ограничивается. Мы сейчас установим, что сложение вращений вокруг параллельных осей совершенно аналогично сложению параллельных сил.

Предположим, что тело вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси O_2z_2 относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а последняя вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1z_1 относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, причем оси O_1z_1 и O_2z_2 параллельны (рис. 14.7).

Тогда абсолютная скорость любой точки M тела

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2.$$

Скорости $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ точки M расположены в плоскости, перпендикулярной осям O_1z_1 и O_2z_2, следовательно, и абсолютная скорость $\mathbf{v}$ точки M лежит в плоскости, перпендикулярной этим осям. Так как точка M произвольна, то это означает, что тело участвует в плоском движении. Найдем в плоскости $x_1O_1y_1$ мгновенный центр скоростей в случае, когда $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ направлены в одну сторону (рис. 14.7, *а*).

Для точки P, лежащей на прямой O_1O_2, $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ коллинеарны, но направлены в разные стороны. Для того чтобы их геометрическая сумма была равна нулю, должно выполняться равенство

$$\omega_2 \cdot O_2P = \omega_1 \cdot O_1P$$

или

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{14.11}$$

Точка P делит отрезок O_1O_2 внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей составляющих вращений.

Перейдем теперь к сложению вращений, имеющих противоположные направления. Пусть $\omega_2 > \omega_1$. Скорости $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{v}_e$ в этом случае имеют противоположные направления в точках на прямой O_1O_2, расположенных вне отрезка O_1O_2 (рис. 14.7, *б*). Найдем точку P, в которой эти скорости равны:

$$\omega_2 \cdot O_2P = \omega_1 \cdot O_1P$$

или

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{14.12}$$

Точка P делит отрезок O_1O_2 внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Такую точку всегда можно найти, если только $\omega_1 \neq \omega_2$.

В каждом из рассмотренных случаев точка P имеет скорость, равную нулю, т. е.

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{O_2P} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{O_1P} = 0. \tag{14.13}$$

Найдем теперь скорость произвольной точки M:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\overline{O_1P} + \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\overline{O_2P} + \mathbf{r}').$$

Здесь $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки M относительно мгновенного центра скоростей P. Раскрывая скобки в правой части и используя равенство (14.13), получим

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overline{O_1P} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overline{O_2P} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}' = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}', \tag{14.14}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Отсюда следует, что *совокупность двух вращений, происходящих вокруг параллельных осей, но не представляющих собой пары вращений, приводится к одному вращению, мгновенная ось которого делит внутренним или внешним образом расстояние между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Угловая скорость результирующего вращения равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих движений.*

Если угловые скорости направлены в одну сторону, то мгновенная ось вращения расположена между осями O_1z_1 и O_2z_2 и модуль результирующей угловой скорости $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. В случае противоположно направленных вращений мгновенная ось расположена за осью, вокруг которой вращение происходит с большей угловой скоростью и $\Omega = |\omega_1 - \omega_2|$. Результирующая угловая скорость направлена в сторону большей из угловых скоростей.

§ 14.6. Задачи

Задача 14.3. В редукторе (рис. 14.8) водило OC делает $n = 720$ об/мин, а подвижные шестерни 2 и 3 вращаются вокруг своей оси относительно поводка в том же направлении с угловой скоростью, соответствующей $n_{23} = 240$ об/мин. Определить радиус r_1 неподвижного колеса 1 и число оборотов вала II, если $OC = 240$ мм, $r_4 = 40$ мм (r_4 — радиус шестерни 4).

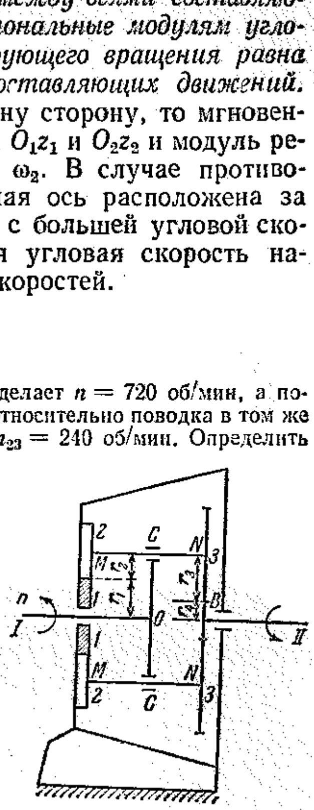


Рис. 14.8

Подвижные шестерни 2 и 3 совершают сложное движение. Они вращаются вокруг оси MN относительно поводка и вместе с этой осью вокруг оси вала I.

Радиус r_1 неподвижного колеса 1 найдем из условия, что мгновенная ось абсолютного вращения шестерен 2 и 3, параллельная оси MN, проходит через точку касания неподвижного колеса 1 и подвижной шестерни 2. На основании соотношения (14.11) можем записать:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega}{\omega_{23}}, \quad \frac{r_2 + r_1}{r_1} = \frac{\omega + \omega_{23}}{\omega_{23}},$$

$$r_1 = \frac{OC \cdot \omega_{23}}{\omega + \omega_{23}},$$

где ω_{23} — угловая скорость шестерен 2 и 3 при их вращении вокруг оси MN, а ω — угловая скорость вала I.

Между угловой скоростью и числом оборотов в минуту существует зависимость вида

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

следовательно,

$$r_1 = \frac{OC \cdot n_{23}}{n + n_{23}} = \frac{240 \cdot 240}{720 + 240} = 60 \text{ мм}.$$

Абсолютная угловая скорость ω_a шестерен 2 и 3 при вращении вокруг мгновенной оси на основании (14.14) равна

$$\omega_a = \omega + \omega_{23}.$$

Характеризуя угловую скорость числом оборотов, получим

$$n_a = n + n_{23} = 720 + 240 = 960 \text{ об/мин.}$$

Для определения числа оборотов шестерни *4*, а следовательно, и вала *II*, воспользуемся тем обстоятельством, что абсолютные скорости точек шестерен *3* и *4* в точке *B* их зацепления равны между собой (нет относительного проскальзывания):

$$n_a d = n_4 r_4,$$

где $d = r_1 - r_4$.

Таким образом,

$$n_4 = \frac{n_a (r_1 - r_4)}{r_4} = \frac{960\,(60 - 40)}{40} = 480 \text{ об/мин.}$$

Задача 14.4. Сколько оборотов в минуту должен делать ведущий вал *I* редуктора (рис. 14.9), чтобы ведомый вал *II* совершал $n_4 = 1800$ об/мин? Первое колесо с внутренними зубьями неподвижно. Дано: $r_1 = 150$ мм, $r_2 = 30$ мм, $r_4 = 50$ мм.

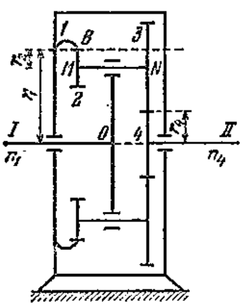


Рис. 14.9

Подвижные шестерни *2* и *3* как одно целое совершают сложное движение. Они вращаются вокруг оси *MN* относительно поводка и вместе с ней вращаются вокруг оси *I*.

Мгновенная ось абсолютного вращения этих шестерен проходит через точку *B* — точку зацепления подвижной шестерни *2* и неподвижной шестерни *I*. Эта ось параллельна оси *MN*. Так как мгновенная ось абсолютного вращения шестерен *2* и *3* лежит вне осей слагаемых движений, то вращение этих шестерен вокруг оси *MN* происходит в сторону, противоположную направлению вращения вала *I*.

На основании формул (14.12) и (14.14) имеем

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad \omega_a = \omega_{23} - \omega_1,$$

где ω_{23} — угловая скорость вращения шестерен *2* и *3* вокруг оси *MN*, ω_a — абсолютная угловая скорость этих шестерен.

Из полученных соотношений следует

$$\omega_a = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} - \omega_1 = \omega_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2}.$$

Скорости точек зацепления шестерен *3* и *4* равны, т. е. $\omega_a (r_1 - r_4) = \omega_4 r_4$. Отсюда следует:

$$\omega_1 = \omega_4 \frac{r_4 r_2}{(r_1 - r_4)(r_1 - r_2)},$$

или

$$n_1 = n_4 \frac{r_2 r_4}{(r_1 - r_4)(r_1 - r_2)} = 1800 \frac{30 \cdot 50}{100 \cdot 120} = 225 \text{ об/мин.}$$

Вал *II* вращается в ту же сторону, что и вал *I*.

Задача 14.5. Стержень *AB* длиной $2l$ приводится в движение относительно направляющих *OA* и *OB* кривошипом *OC*, вращающимся вокруг оси *O* с постоянной угловой скоростью ω_0. Кроме того, весь механизм вместе с направляющими вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости механизма и проходящей через точку *O*, с постоянной угловой скоростью, модуль которой также равен ω_0. Найти абсолютную угловую скорость стержня *AB* и абсолютную скорость любой точки *M* этого стержня, находящейся на расстоянии l_1 от точки *C*, если вращение кривошипа *OC* и вращение всего механизма происходит в противоположных направлениях ($AC = CB = l$).

Будем считать, что вращение кривошипа OC относительно направляющих происходит против хода часовой стрелки (рис. 14.10). Тогда ползун A будет двигаться по вертикальной направляющей вверх, а ползун B — по горизонтальной направляющей влево. Мгновенный центр скоростей P_r стержня AB в его относительном движении определится пересечением перпендикуляров, восставленных к скоростям $\mathbf{v}_{rA}$ и $\mathbf{v}_{rB}$. Учитывая направления последних, видим, что относительная угловая скорость ω_r стержня AB направлена по ходу часовой стрелки. Относительная скорость v_{rC} точки C как точки, принадлежащей кривошипу OC, равна $\omega_0 \cdot OC$, а как точки, принадлежащей стержню AB, равна $\omega_r \cdot P_rC$. Таким образом, $\omega_0 \cdot OC = \omega_r \cdot P_rC$. Отсюда следует, что угловые скорости ω_0 и ω_r равны по модулю ($\omega_0 = \omega_r$), но противоположны по направлению.

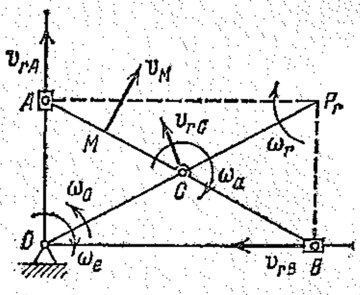


Рис 14.10

Переносная угловая скорость ω_e по условию задачи направлена по ходу часовой стрелки (в сторону, противоположную угловой скорости кривошипа) и численно равна ω_0. Векторы составляющих угловых скоростей стержня AB направлены перпендикулярно плоскости рисунка от читателя вниз. В соответствии с правилом сложения угловых скоростей, направленных в одну сторону, найдем модуль абсолютной угловой скорости ω_a стержня AB: $\omega_a = \omega_e + \omega_r = 2\omega_0$. Мгновенный центр скоростей стержня в его абсолютном движении находится посредине отрезка OP_r в точке C. Модуль абсолютной скорости точки M определится равенством $v_M = \omega_a l_1 = 2\omega_0 l_1$; скорость v_M направлена перпендикулярно мгновенному радиусу CM.

Задача 14.6. Найти передаточное отношение шарнира Гука *). Шарнир Гука применяется для передачи вращения от одного вала к другому. На концах валов I и II (рис. 14.11) имеются жестко скрепленные с ними вилки. Соединение валов производится с помощью крестовины, представляющей собой два жестко соединенных

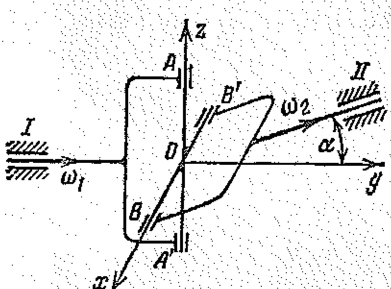


Рис. 14.11

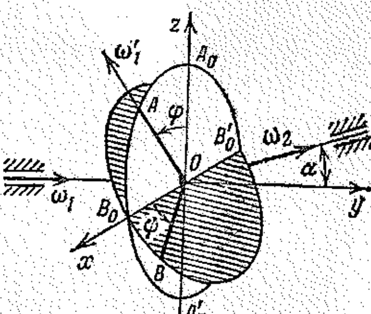


Рис. 14.12

и взаимно перпендикулярных валика. Каждый из этих валиков может вращаться в подшипниках, закрепленных на концах вилок.

На рис. 14.11 изображен шарнир Гука в положении, когда плоскость вилки вала I вертикальна, а валы I и II расположены в плоскости yz и угол между ними равен α.

Пусть вал I ведущий, а вал II ведомый. Векторы угловых скоростей валов соответственно обозначим через ω_1 и ω_2. При вращении валов крестовина совершает вращение вокруг неподвижной точки O. Валик AA' при этом будет вращаться в вер-

*) Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. 1. — М.: Наука, 1982. — С. 321.

тикальной плоскости, перпендикулярной валу I, а валик BB' — в плоскости, перпендикулярной валу II. На рис. 14.12 показаны эти плоскости и положения валиков при повороте ведущего вала I на угол φ (ведомый вал II повернется на угол ψ); буквами A_0A_0' и B_0B_0' обозначено первоначальное положение валиков AA' и BB'.

Абсолютную угловую скорость ω_a крестовины можно, с одной стороны, представить как сумму переносной угловой скорости ω_1 (угловой скорости вала I) и относительной угловой скорости ω_1' вокруг валика AA', вращающегося в вилке вала I, т. е. $\omega_a = \omega_1 + \omega_1'$. С другой стороны, эта абсолютная угловая скорость крестовины может быть найдена как сумма переносной угловой скорости ω_2 (угловой скорости вала II) и относительной скорости ω_2' вращения крестовины вокруг валика BB', вращающегося в вилке вала II, т. е. $\omega_a = \omega_2 + \omega_2'$. Сразу же отметим, что в силу конструкции шарнира $\omega_1 \perp \omega_1'$, $\omega_1' \perp \omega_2'$, $\omega_2 \perp \omega_2'$.

Итак, можно записать

$$\omega_1 + \omega_1' = \omega_2 + \omega_2'. \tag{14.15}$$

Введем в рассмотрение угол φ поворота вала I. С этой целью рассмотрим два вектора: вектор $\omega_1 \times \omega_2$, перпендикулярный плоскости, в которой расположены валы I и II (на рис. 14.12 это плоскость yz); вектор $\omega_1 \times \omega_1'$, перпендикулярный плоскости вилки вала I. Принимая во внимание, что

$$|\omega_1 \times \omega_2| = \omega_1\omega_2 \sin\alpha, \quad |\omega_1 \times \omega_1'| = \omega_1\omega_1',$$

найдем

$$(\omega_1 \times \omega_2)\cdot(\omega_1 \times \omega_1') = |\omega_1 \times \omega_2|\,|\omega_1 \times \omega_1'| \cos\varphi = \omega_1^2\omega_2\omega_1' \sin\alpha \cos\varphi. \tag{14.16}$$

Это же скалярное произведение можно переписать и в другом виде *):

$$(\omega_1\times\omega_2)\cdot(\omega_1\times\omega_1') = [(\omega_1\times\omega_2)\times\omega_1]\cdot\omega_1' = [\omega_1^2\,\omega_2 - (\omega_1\cdot\omega_2)\,\omega_1]\cdot\omega_1' = \omega_1^2\,(\omega_2\cdot\omega_1'), \tag{14.17}$$

так как $\omega_1\cdot\omega_1' = 0$.

Сравнивая отношения (14.16) и (14.17), получим

$$\omega_2\cdot\omega_1' = \omega_2\omega_1' \sin\alpha\cos\varphi. \tag{14.18}$$

Скалярное произведение $\omega_2\cdot\omega_1'$ можно найти, умножив равенство (14.15) на вектор ω_1':

$$\omega_1\cdot\omega_1' + \omega_1'\cdot\omega_1' = \omega_2\cdot\omega_1' + \omega_2'\cdot\omega_1'.$$

Так как $\omega_1\cdot\omega_1' = 0$ и $\omega_2'\cdot\omega_1' = 0$, то имеем

$$\omega_2\cdot\omega_1' = (\omega_1')^2. \tag{14.19}$$

Сравнивая этот результат с равенством (14.18), получим

$$\omega_1' = \omega_2 \sin\alpha\cos\varphi. \tag{14.20}$$

Умножим теперь соотношение (14.15) скалярно на ω_2:

$$\omega_1\cdot\omega_2 + \omega_1'\cdot\omega_2 = \omega_2\cdot\omega_2 + \omega_2'\cdot\omega_2.$$

Отсюда

$$\omega_1'\cdot\omega_2 = \omega_2^2 - \omega_1\cdot\omega_2. \tag{14.21}$$

Используя соотношения (14.19), (14.20) и (14.21), будем иметь

$$\omega_2^2 - \omega_1\omega_2\cos\alpha = \omega_2^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi,$$

и, следовательно, искомое передаточное отношение равно

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

---

*) Используем формулы $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

Если $\cos^2\varphi = 1$, то передаточное отношение будет максимальным и равным

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{max} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Минимальное значение передаточного отношения равно

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{min} = \cos\alpha.$$

§ 14.7. Сложение поступательных и вращательных движений

Первый случай. Рассмотрим сначала следующий случай сложного движения: тело P движется поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а она в свою очередь вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, параллельной скорости $\mathbf{v}_0$

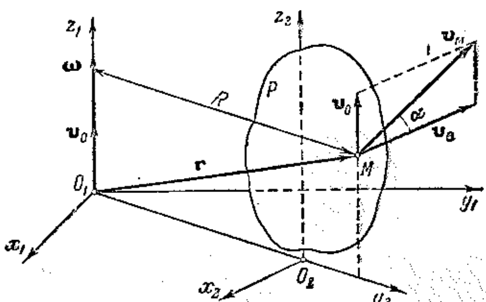


Рис. 14.13

поступательного движения. Найдем абсолютную скорость некоторой точки M тела (рис. 14.13):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}.$$

Таким образом, абсолютная скорость точки может быть разложена на две составляющие: одну $\mathbf{v}_0$, параллельную оси z_2, и другую $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, перпендикулярную плоскости, проходящей через ось z_1 и точку M.

Отсюда следует, что точка M движется по боковой поверхности кругового цилиндра с осью z_1. Касательная к винтовой траектории образует с плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, угол α, причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_r}{v_e} = \frac{v_0}{\omega R},$$

где R — радиус цилиндра (см. рис. 14.13).

Время T одного оборота тела в винтовом движении

$$T = 2\pi/\omega.$$

Любая точка тела переместится за это время параллельно оси на расстояние, равное

$$h = v_0 T = 2\pi v_0/\omega,$$

называемое *шагом винта*. Величина $p = v_0/\omega$ называется *параметром винта*.

Рассмотренное сложное движение тела называется *кинематическим винтом*.

Если скорость $\mathbf{v}_0$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ переменны, то движение тела будет *мгновенно-винтовым движением*. Естественно, что параметр винта в общем случае также будет переменным.

Второй случай. Скорость поступательного движения перпендикулярна угловой скорости вращательного движения. Согласно § 14.3 мгновенное поступательное движение можно рассматривать как сложное движение — пару вращений. При этом момент пары вращений должен быть равен скорости данного поступательного движения. Плоскость пары вращений должна быть перпендикулярна $\mathbf{v}_0$ — проведем ее через ось z_1 (рис. 14.14). Поступательное движение

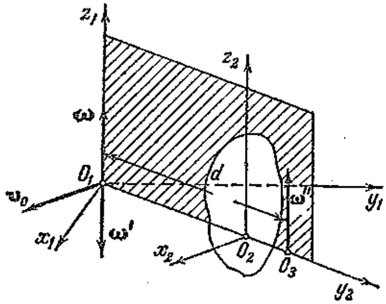


Рис. 14.14

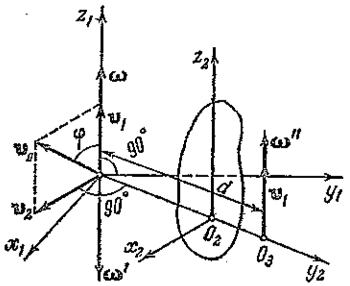


Рис. 14.15

со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ можно заменить вращением тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}''$ относительно некоторой новой системы и вращением этой новой системы относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}' = -\boldsymbol{\omega}''$. Для упрощения чертежа плоскость $y_2O_2z_2$ проведена перпендикулярно $\mathbf{v}_0$ через ось z_1. Пусть одно из вращений, составляющих пару, имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}' = -\boldsymbol{\omega}$ и происходит вокруг оси, совпадающей с z_1; тогда другое вращение имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}$ и происходит вокруг параллельной оси, проходящей через точку O_3. Для эквивалентности этой пары вращений данному поступательному движению тела достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\mathbf{v}_0 = \overline{O_1O_3} \times \boldsymbol{\omega}''.$$

Если $O_1O_3 \perp O_1z_1$ (см. рис. 14.14), то отсюда следует, что

$$d = O_1O_3 = v_0/\omega.$$

Таким образом, совокупность поступательного и вращательного движений нами приведена к трем вращениям (ω'', ω', ω), при этом два последних вращения (ω', ω') эквивалентны покою, так как угловые скорости ω' и ω равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, результирующее движение эквивалентно только одному вращению вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O_3, с угловой скоростью, равной угловой скорости заданного вращения.

Третий случай. Скорость поступательного движения $\mathbf{v}_0$ направлена под углом φ к угловой скорости ω вращательного движения (рис. 14.15). Этот случай легко приводится к первому. В самом деле, поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}_0$ можно сначала представить как совокупность двух поступательных движений со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, причем $\mathbf{v}_1 \parallel \omega$, $\mathbf{v}_2 \perp \omega$ (рис. 14.15) и $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0$.

Поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}_2$ (в соответствии со вторым случаем) можно заменить парой вращений (ω', ω''). Получилась система четырех движений ($\mathbf{v}_1$, ω'', ω', ω); при этом два последних движения (ω', ω) эквивалентны покою, следовательно, остается мгновенно-винтовое движение ($\mathbf{v}_1$, ω'').

Если скорости $\mathbf{v}_0$, ω постоянны, то движение будет винтовым. При этом ось винта отстоит от оси z_1 на расстоянии

$$d = \frac{v_2}{\omega} = \frac{v_0 \sin\varphi}{\omega}.$$

Шаг винта равен

$$h = \frac{2\pi v_0 \sin\varphi}{\omega}.$$

§ 14.8. Общий случай сложения движений твердого тела

Продолжим установленную в §§ 14.4 и 14.5 аналогию между угловыми скоростями и силами, приложенными к твердому телу, а также между скоростью поступательного движения и моментом пары сил. Эта аналогия объясняется тем, что угловая скорость ω тела и сила, приложенная к твердому телу, являются скользящими векторами. Можно показать (мы не будем останавливаться на доказательстве *)), что любая система скользящих векторов, независимо от их физической природы, эквивалентна одному скользящему вектору (главному вектору) и одной паре скользящих векторов, момент которой равен главному моменту.

Применительно к сложению движений твердого тела это означает следующее: *если тело участвует одновременно в n вращениях с угловыми скоростями ω_1, ω_2, ..., ω_n и в m поступательных движениях, скорости которых равны $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$ (моменты пар вращений), то вся система этих движений эквивалентна совокупности одного вращательного и одного поступательного движений. Угловая скорость*

*) См., например, Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946, §§ 6—25; Меркин Д. Р. Алгебра свободных и скользящих векторов. — М.: Физматгиз, 1962.

ω результирующего вращения равна сумме (главному вектору) составляющих угловых скоростей

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n, \tag{14.22}$$

а скорость v_A результирующего поступательного движения равна сумме (главному моменту) моментов угловых скоростей ω_i относительно центра приведения A и скоростей v_i поступательных движений (моментов пар вращения):

$$v_A = M_A(\omega_1) + \cdots + M_A(\omega_n) + v_1 + \cdots + v_m, \tag{14.23}$$

причем ось вращения проходит через выбранный центр приведения A.

На рис. 14.16 показаны результирующая угловая скорость ω вращательного движения (главный вектор) и результирующая скорость v_A (главный момент) поступательного движения. Векторы v_A и ω можно рассматривать так же, как скорость полюса A и угловую скорость вращения тела относительно полюса (§ 12.4).

Покажем, что имеются два *кинематических инварианта*, аналогичных статическим инвариантам. Действительно, из равенства (14.22) следует, что главный вектор ω не зависит от выбора центра приведения A и, следовательно, представляет собой первый кинематический инвариант. По существу, инвариантность главного вектора тождественна с ранее доказанным утверждением о независимости

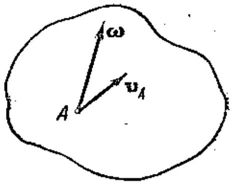


Рис. 14.16

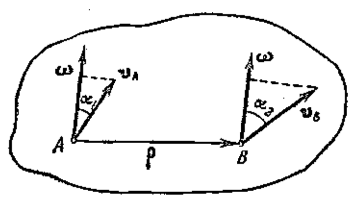


Рис. 14.17

угловой скорости тела от выбора полюса. В более узком смысле под первым инвариантом I_1 будем понимать квадрат модуля главного вектора

$$I_1 = \omega^2. \tag{14.24}$$

Прежде чем перейти ко второму инварианту, заметим, что при переходе к новому центру приведения, например точке B, главный момент v_B будет связан с главным моментом v_A относительно старого полюса формулой (рис. 14.17)

$$v_B = v_A + \omega \times \rho. \tag{14.25}$$

Эту формулу можно получить непосредственно из равенства (14.23). Она также следует из того, что главный момент v_B есть скорость точки B твердого тела и определяется формулой (12.20). Умножим скалярно обе части равенства (14.25) на вектор ω:

$$v_B \cdot \omega = v_A \cdot \omega + (\omega \times \rho) \cdot \omega.$$

Так как вектор $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\omega}$, то их скалярное произведение равно нулю. Поэтому

$$\mathbf{v}_A\cdot\boldsymbol{\omega}=\mathbf{v}_B\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{14.26}$$

т. е. *скалярное произведение главного вектора* $\boldsymbol{\omega}$ *на главный момент не зависит от центра приведения, иначе говоря, скалярное произведение скорости точки твердого тела на угловую скорость тела в каждый момент времени одинаково для всех точек тела.*

Вторым кинематическим инвариантом I_2 *называется скалярное произведение скорости* $\mathbf{v}$ *любой точки тела на его угловую скорость* $\boldsymbol{\omega}$

$$I_2=\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{14.27}$$

Запишем равенство (14.26) в следующей форме:

$$v_A\omega\cos\alpha_1=v_B\omega\cos\alpha_2.$$

Если $\omega\neq 0$, то

$$v_A\cos\alpha_1=v_B\cos\alpha_2.$$

Каждое из этих произведений представляет проекцию главного момента относительно соответствующей точки (скорости соответствующей точки) на направление главного вектора (угловой скорости тела). Следовательно, если угловая скорость тела (главный вектор) не равна нулю, то проекция скорости точки тела (главного момента) на направление угловой скорости тела не зависит от выбора точки.

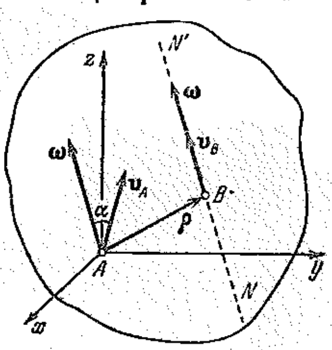


Рис. 14.18

Покажем, что если второй кинематический инвариант не равен нулю, то совокупность всех движений, в которых участвует тело, может быть сведена к мгновенно-винтовому движению. Действительно, если $I_2\neq 0$, то скорость $\mathbf{v}_A$ любой точки A тела и угловая скорость его отличны от нуля; кроме того, в этом случае угол α между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_A$ не равен $\pi/2$. На стр. 230 было показано, что в этом случае имеется такая точка B, скорость которой $\mathbf{v}_B$ параллельна угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела (рис. 14.18). Для этой точки должно выполняться равенство

$$\mathbf{v}_B=p\boldsymbol{\omega}$$

или, учитывая формулу (14.25),

$$\mathbf{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}=p\boldsymbol{\omega}, \tag{14.28}$$

где p — некоторый скаляр, а $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки B в системе координат $Axyz$, жестко связанной с телом; $\mathbf{v}_B$ — скорость точки B.

Очевидно, что равенству (14.28) удовлетворяет радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ любой точки, лежащей на прямой NN', проходящей через точку B и параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$. Следовательно, равенство (14.28) представляет векторное уравнение прямой линии, все точки которой в данный момент времени имеют скорости, параллельные угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Прямая NN' называется *мгновенной винтовой осью тела;* совокупность угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и скорости $\mathbf{v}$ любой точки мгновенной винтовой оси называется *кинематическим винтом,* а число p в равенстве (14.28) — *параметром кинематического винта.* Происхождение этих названий очевидно: винтовое движение состоит из вращения вокруг некоторой оси и одновременного поступательного перемещения вдоль этой оси. Таким образом, в самом общем случае скорости точек твердого тела распределяются так, как если бы тело совершало мгновенно-винтовое движение.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Николай Васильевич Бутенин
Яков Львович Лунц
Давид Рахмильевич Меркин

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
том I
статика и кинематика

Редактор *А. Г. Мордвинцев*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры: *Н. Б. Румянцева, Е. В. Сидоркина*

ИБ № 12712

Сдано в набор 20.07.84. Подписано к печати 08.04.85. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15. Усл. кр.-отт. 15.25. Уч.-изд. л. 16,01. Тираж 76 000 экз. Заказ № 193.
Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144 Ленинград, ул. Моисеенко, 10