

Н. И. ЛЕВИТСКИЙ

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 34.41
Л36
УДК 531.8(075.8)

Левитский Н. И. Колебания в механизмах: Учеб. пособие для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 336 с.
ISBN 5-02-013811-8

Учебное пособие содержит основные сведения из теории колебаний, используемые при расчете механизмов и машин. Рассматриваются колебания в зубчатых, кулачковых и шарнирных механизмах. Изложены принципы построения вибрационных машин. Защита от вибрации показана на примерах расчета устройств для виброизоляции и виброгашения.

Для студентов машиностроительных специальностей, изучающих курс «Теория механизмов и машин» по программе, включающей основы теории колебаний в механизмах. Может быть также использовано конструкторами при проектировании машин и приборов.

Табл. 8. Ил. 107. Библиогр. 16 назв.

Рецензенты:
кафедра теории механизмов и машин Московского станкоинструментального института;
доктор технических наук Ф. М. Диментберг

ЛЕВИТСКИЙ Николай Иванович

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

Редактор И. М. Бокова

Художественный редактор Т. Н. Кольченко

Технический редактор С. Я. Шкляр

Корректоры О. А. Бутусова, Г. И. Сурова

ИБ № 32636

Сдано в набор 13.10.87. Подписано к печати 26.01.88. Т-04521. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 1. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,64. Усл. кр.-отт. 17,64. Уч.-изд. л. 17,36. Тираж 13 000 экз. Заказ № 1063. Цена 90 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Л 2702000000—064
053(02)-88 95-88

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1988

ISBN 5-02-013811-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
часть первая	
ОБЩИЕ МЕТОДЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЗМОВ	
Глава I. Характеристики сил в механизмах	7
§ 1. Характеристики движущих сил	7
§ 2. Характеристики сил сопротивления	13
§ 3. Характеристики сил трения	17
§ 4. Характеристики сил упругости	22
§ 5. Характеристики импульсных и ударных сил	25
Глава II. Уравнения движения механизмов	28
§ 6. Уравнения движения механизмов с одной степенью свободы	28
§ 7. Уравнения движения механизмов с учетом трения	40
§ 8. Уравнения движения механизмов с несколькими степенями свободы	48
§ 9. Уравнения движения механизмов с неголономными связями	57
§ 10. Уравнения движения механизмов с электроприводом	65
Глава III. Решение линейных уравнений движения механизмов	70
§ 11. Типовые линейные уравнения движения механизмов с постоянными коэффициентами	70
§ 12. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	72
§ 13. Решение линейных уравнений движения при свободных колебаниях	76
§ 14. Решение линейных уравнений движения при вынужденных колебаниях	80
§ 15. Решение линейных уравнений движения с переменными коэффициентами	85
Глава IV. Решение нелинейных уравнений движения механизмов	88
§ 16. Линеаризация нелинейных характеристик сил	88
§ 17. Метод гармонического баланса и метод Галеркина	90
§ 18. Метод малого параметра	95

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 19. Метод медленно меняющихся параметров . . .	100
§ 20. Метод точечных преобразований	102
§ 21. Численные и графоаналитические методы . . .	105
Глава V. Динамические характеристики механизмов	113
§ 22. Кинематические и динамические передаточные функции	113
§ 23. Переходные функции	117
§ 24. Частотные характеристики	118
§ 25. Критерии устойчивости движений в механизмах	127
Глава VI. Решение уравнений движения механизмов при случайных воздействиях	133
§ 26. Вероятностные характеристики случайных величин	133
§ 27. Вероятностные характеристики случайных функций	138
§ 28. Основные виды случайных процессов	141
§ 29. Определение вероятностных характеристик обобщенных координат механизма по заданным вероятностным характеристикам внешних сил	143
 ЧАСТЬ ВТОРАЯ	
КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ	
Глава VII. Фрикционные колебания в механизмах . . .	149
§ 30. Колебания, вызываемые скачком силы трения	149
§ 31. Колебания при силах трения, зависящих от скорости скольжения	154
Глава VIII. Колебания в механизмах с упругими муфтами и валами	158
§ 32. Колебания в механизмах с упругой муфтой . . .	158
§ 33. Колебания в механизмах с упругими валами	166
Глава IX. Колебания в рычажных механизмах	175
§ 34. Колебания в шарпирном четырехзвеннике с упругими звеньями	175
§ 35. Малые колебания в рычажных механизмах приборов	178
§ 36. Самосинхронизация механизмов на вибрирующем основании	183
§ 37. Колебания в механизме центробежного вибровозбудителя с двигателем ограниченной мощности	188
Глава X. Колебания в механизмах регуляторов скорости	195
§ 38. Колебания в механизме регулятора скорости с тахогенератором	195
§ 39. Колебания в механизме центробежного регулятора	200
Глава XI. Колебания в кулачковых механизмах . . .	203
§ 40. Уравнения движения кулачкового механизма с упругим толкателем	203
§ 41. Типовые законы движения выходного звена в кулачковых механизмах	206

§ 42. Колебания в кулачковом механизме при законе постоянного ускорения	208
§ 43. Колебания в кулачковом механизме при косинусоидальном законе изменения ускорения толкателя	212
§ 44. Колебания в кулачковых механизмах при законах движения толкателя без мягких ударов	215
§ 45. Синтез кулачковых механизмов с учетом упругости звеньев	219
Глава XII. Вибрационные транспортеры	221
§ 46. Безударные вибрационные транспортеры	221
§ 47. Вибрационные транспортеры с подбрасыванием груза	227

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

УРАВНОВЕШИВАНИЕ И ЗАЩИТА ОТ ВИБРАЦИИ

Глава XIII. Уравновешивание масс в механизмах и машинах	230
§ 48. Уравновешивание вращающихся звеньев	230
§ 49. Уравновешивание масс механизма	240
Глава XIV. Уравновешивание сил в механизмах и машинах	247
§ 50. Уравновешивание сил на входном звене механизма	247
§ 51. Кулачковые разгрузатели	255
§ 52. Пружинные разгрузатели	262
Глава XV. Виброизоляция	271
§ 53. Линейный виброизолятор	271
§ 54. Нелинейный виброизолятор	281
§ 55. Виброизоляция при ударном воздействии	285
§ 56. Виброизоляция при случайном воздействии	289
§ 57. Управляемые системы виброизоляции	294
Глава XVI. Динамическое гашение колебаний	303
§ 58. Пружинный динамический гаситель	303
§ 59. Маятниковый динамический гаситель	308
§ 60. Поглотители колебаний	312
§ 61. Ударные гасители колебаний	317
Глава XVII. Защита человека от вибрации	322
§ 62. Нормирование вибрации, действующей на человека	322
§ 63. Поверочный расчет систем виброизоляции человека	328
Список литературы	333
Предметный указатель	334

ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышенные требования к анализу и синтезу тяжело нагруженных и быстроходных современных машин привели к необходимости расширения того раздела общего курса теории механизмов и машин, в котором изучается динамика механизмов и, в частности, колебательные процессы в машинах. Колебания в машинах могут быть полезными, когда само действие машины основано на эффекте колебаний (вибрационные транспортеры, сита, виброударные машины для забивки свай и т. п.), но чаще они являются нежелательными, так как снижают надежность машин, вызывают шум и оказывают вредное влияние на организм человека. В этих случаях применяются дополнительные устройства для защиты от колебаний — виброзащитные системы.

Основные сведения из теории колебаний, используемые при расчете механизмов и машин, были впервые включены в программу курса «Теория механизмов и машин» в 1982 г. и кратко изложены во втором издании книги автора «Курс теории механизмов и машин» (М.: Высшая школа, 1985), написанной совместно с О. Н. Левитской для студентов вузов. В предлагаемом учебном пособии эти сведения изложены более подробно применительно к тем инженерно-техническим специальностям, для которых изучение колебаний в механизмах и машинах представляет наибольший интерес.

Термины и условные обозначения в книге даны в соответствии с Государственными стандартами СССР и рекомендациями Комитета научно-технической терминологии АН СССР.

Автор выражает глубокую признательность Ф. М. Диментбергу и Е. П. Солдаткину за ценные замечания по рукописи книги.

Н. И. Левитский

Глава I. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛ В МЕХАНИЗМАХ

§ 1. Характеристики движущих сил

Характеристика силы. При решении большинства задач динамики механизмов надо знать силы *), определяющие действие одного тела на другое. Силы, действующие на звенья (твердые тела) механизма, могут быть функциями времени. Например, движущая сила, действующая на лопасть гидравлической муфты, зависит от времени истечения жидкости через постоянное отверстие. Чаще, однако, переменные силы, действующие на звенья механизма, связаны или с перемещениями, или со скоростями точек приложения этих сил. Например, сила пружины связана с ее деформацией, т. е. с перемещением точки приложения силы; сила взаимодействия проводника с током и магнитного поля в электродвигателе связана со скоростью движения проводника относительно поля и т. д.

Функциональная зависимость, связывающая модуль силы и кинематические параметры (время, координаты и скорость точки приложения силы), называется *характеристикой силы*. Модуль силы в этой зависимости может быть и функцией, и аргументом. Однако для удобства расчетов будем всегда считать, что модуль силы есть функция указанных кинематических параметров.

Силы движущие и силы сопротивления. *Движущей силой* называется сила, элементарная работа которой на возможном перемещении точки ее приложения положительна. *Силой сопротивления* называется сила, элементарная работа которой на возможном перемещении точки ее приложения отрицательна.

*) *Силой* называется векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия одного материального тела на другое. (Теоретическая механика. Терминология. Вып. 90.— М.: Наука, 1977.)

Входные и выходные звенья. *Входным звеном* механизма называется звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев. *Выходным звеном* называется звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм. Движущие силы в механизме действуют обычно на входные звенья, а силы сопротивления — на выходные звенья.

Ведущие и ведомые звенья. *Ведущим* (иначе — *движущим*) *звеном* называется звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является положительной *). *Ведомым звеном* называется звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю. Одно и то же выходное звено на отдельных участках движения может быть то ведомым, то ведущим. Аналогично входное звено, которое по признаку действия сил обычно является ведущим, на некоторых участках движения может быть ведомым. Например, электродвигатель, соединенный с входным звеном, может в зависимости от соотношения сил, действующих на звенья механизма, работать как в двигательном, так и в генераторном режиме.

Статическая характеристика электродвигателя. Входное звено получает движение от *привода*, под которым понимается система взаимосвязанных устройств для приведения в движение одного или нескольких твердых тел, входящих в состав машины или механизма. Основные типы приводов: *электропривод*, *гидропривод* и *пнеumoпривод*.

Для всех типов электродвигателей, применяемых для привода машин и механизмов, характерно изменение угловой скорости ротора ω при изменении момента $\tilde{M}$, сил сопротивления, приложенных к ротору **). Для каждого значения момента $\tilde{M}$, можно экспериментально опреде-

*) В этом определении внешними силами считаются силы, приложенные со стороны материальных тел, не входящих в состав механизма.

**) Здесь и далее знаком $\sim$ (тильда) обозначены линейные и угловые скорости и ускорения, а также силы и моменты сил, если они считаются скалярными величинами, т. е. величинами, которые могут быть и положительными, и отрицательными. Знак $\sim$ введен для того, чтобы отличить эти величины от векторов или их модулей. Например, ω — вектор угловой скорости, ω — модуль этого вектора, $\dot{\omega}$ — производная от угла поворота по времени, которая может быть и положительной, и отрицательной.

лечь соответствующее ему значение угловой скорости $\tilde{\omega}$ на установившемся режиме, т. е. при $d\tilde{\omega}/dt = 0$. По данным измерения $\tilde{\omega}$ и $\tilde{M}_c$ определяется зависимость

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{M}_c), \quad (1.1)$$

которая называется *статической характеристикой электродвигателя*. Статической она называется потому, что определяется при $d\tilde{\omega}/dt = 0$, т. е. без учета сил инерции.

В задачах динамики машин зависимость (1.1) удобнее представлять в форме характеристики движущего момента, действующего на входное звено механизма со стороны вала двигателя

$$M_d = M_d(\omega) \quad (1.2)$$

при условии $M_d = M_c$.

Характеристика движущего момента в асинхронном двигателе. Наиболее распространенным типом электродвигателя переменного тока для привода машин является *асинхронный двигатель*, действие которого основано на том, что трехфазная обмотка статора, получающая питание от трехфазной сети переменного тока, создает вращающийся магнитный поток, который, пересекая проводники ротора (якоря), наводит в них электродвижущую силу. Если цепь якоря замкнута, то по его проводникам будет протекать ток, который, взаимодействуя с магнитным потоком, создает вращающий момент, увлекающий якорь в направлении вращения магнитного потока. Однако этот момент действует только до тех пор, пока угловая скорость ротора не сравняется со скоростью вращения магнитного потока. Отсюда следует, что ротор в своем вращении обязательно отстает от вращения магнитного поля. Отсюда происходит название двигателя — асинхронный. Мерой этого отставания является величина s , называемая *скольжением двигателя*

$$s = \frac{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_c}, \quad (1.3)$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость ротора, $\tilde{\omega}_c$ — угловая скорость вращения магнитного потока или *синхронная скорость двигателя*.

Если обозначить через p число пар полюсов обмотки статора, то модуль синхронной скорости двигателя

связан с частотой питающего тока f_c соотношением

$$\omega_c = \frac{2\pi f_c}{p}, \quad (1.4)$$

а знак $\tilde{\omega}_c$ определяется способом включения фаз обмотки статора.

Статическая характеристика асинхронного двигателя, полученная опытным путем, обычно представляется в

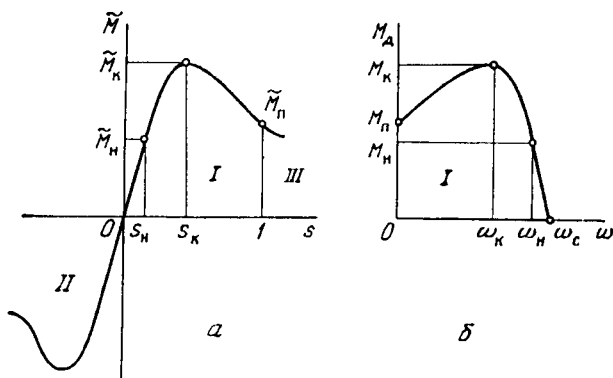


Рис. 1

виде зависимости момента на валу ротора $\tilde{M}$ от величины скольжения s (рис. 1, а). Приближенно ее можно описать соотношением

$$\tilde{M} = \frac{2\tilde{M}_K}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}}, \quad (1.5)$$

где $\tilde{M}_K$ — максимальный или критический момент двигателя (раньше его называли опрокидывающим), s_K — критическое скольжение, т. е. скольжение при $M = M_K$.

Для асинхронных двигателей возможны три режима движения, отмеченные на графике $\tilde{M}(s)$ цифрами I, II и III.

Область I соответствует двигательному режиму, при котором угловая скорость $\tilde{\omega}$ и момент на валу двигателя $\tilde{M}$ имеют одно и то же направление, причем угловая скорость меньше синхронной ($\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_c$), а скольжение s находится в пределах от 0 до 1.

Область II соответствует *генераторному режиму*, при котором угловая скорость вала двигателя больше синхронной ($\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_c$), а момент на валу двигателя считается отрицательным, т. е. для возможности вращения вала двигателя с угловой скоростью, превышающей синхронную скорость, надо извне приложить к валу двигателя пару сил с моментом $\tilde{M}$. При этом режиме «двигатель» отдает энергию в сеть. Скольжение s изменяется в пределах от 0 до $-\infty$.

Область III называется областью *режима противовключения*, когда угловая скорость вращения магнитного потока меняет знак при неизменном направлении момента на валу двигателя. Скольжение изменяется от $s = 1$ до $s = \infty$. Этот режим используется для торможения путем переключения на ходу двух фаз обмотки статора.

В каталогах асинхронных электродвигателей для двигательного режима приводятся следующие данные:

1) *синхронная частота вращения* n_c , измеряемая в оборотах в минуту и связанная с модулем синхронной угловой скорости соотношением $\omega_c = \pi n_c / 30$;

2) *номинальная частота вращения* n_n , измеряемая в оборотах в минуту и связанная с модулем номинальной угловой скорости соотношением $\omega_n = \pi n_n / 30$;

3) *номинальная мощность двигателя* N_n *), по которой можно определить номинальный момент двигателя $M_n = N_n / \omega_n$;

4) *перегрузочная способность двигателя*, которая характеризуется коэффициентом $\lambda = M_k / M_n$ и определяет максимальный (критический) момент, развиваемый двигателем;

5) *кратность пускового момента* M_p / M_n .

По этим данным можно найти модуль критического момента

$$M_k = \frac{N_n}{\omega_n} \lambda \quad (1.6)$$

и номинальное скольжение при двигательном режиме

$$s_n = \frac{\omega_c - \omega_n}{\omega_c}. \quad (1.7)$$

*) Здесь и далее под мощностью двигателя понимается мощность силы, которая обозначается через N (Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 102.— М.: Наука, 1984). В каталогах электродвигателей указывается электрическая мощность, обозначаемая P .

Критическое скольжение находится из соотношения (1.5) при $s = s_n$ и $M_n/M_n = \lambda$:

$$s_n = \lambda s_n \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right). \quad (1.8)$$

По найденным значениям M_n и s_n можно построить для двигательного режима характеристику движущего момента $M_d = M_d(\omega)$ (рис. 1, б), используя соотношения (1.3) и (1.5):

$$M_d = \frac{2M_n s_n \omega_c (\omega_c - \omega)}{(\omega_c - \omega)^2 + s_n^2 \omega_c^2}. \quad (1.9)$$

Участок характеристики от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \omega_n$ (или от $s = 0$ до $s = s_n$) называют *устойчивым*, так как при увеличении момента внешних сил, приложенных к валу двигателя, скорость его падает и вместе с тем в соответствии с характеристикой на этом участке растет движущий момент, обеспечивая новое установившееся значение скорости. Участок характеристики от $\omega = \omega_n$ до $\omega = 0$ (или от $s = s_n$ до $s = 1$) называют *неустойчивым*, так как при увеличении момента внешних сил и соответствующем уменьшении скорости вала двигателя движущий момент также уменьшается и через некоторое время двигатель останавливается.

Точка характеристики, соответствующая номинальному режиму ($M_d = M_n$, $\omega = \omega_n$), лежит на устойчивом участке. Этот участок может с достаточной для практики точностью считаться линейным. Пренебрегая величиной s/s_n в знаменателе соотношения (1.5), получаем для этого участка

$$M_d = 2M_n \frac{s}{s_n}. \quad (1.10)$$

С учетом формулы (1.3) имеем

$$M_d = a - b\omega, \quad (1.11)$$

где $a = \frac{2M_n}{s_n}, \quad b = \frac{2M_n}{s_n \omega_c}.$

Следовательно, движущий момент, развиваемый на валу асинхронного двигателя, в первом приближении выражается линейной функцией модуля угловой скорости вращения вала ротора. В уточненных расчетах можно учесть нелинейность по соотношению (1.9). Заметим

только, что для асинхронного двигателя движущий момент не может быть больше M_k .

Характеристики движущих сил в электродвигателях постоянного тока. Движущий момент на валу *двигателя постоянного тока с параллельным возбуждением*, т. е. электродвигателя, у которого обмотка возбуждения для образования магнитного поля включена параллельно с обмоткой якоря (ротора), определяется по формуле, аналогичной формуле (1.11)

$$M_d = a - b\omega,$$

где a и b — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров двигателя.

Формула (1.11) справедлива и для *электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением*, у которого ток в обмотке возбуждения не зависит от тока в обмотке якоря.

Характеристика движущего момента на валу *электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением*, у которого обмотка возбуждения включена последовательно с обмоткой якоря, выражается нелинейной функцией. Приближенное аналитическое выражение этой функции может быть получено из рассмотрения системы уравнений, описывающих изменения не только механических, но и электрических величин*). Эта же система уравнений используется в тех случаях, когда использование статических характеристик электродвигателей не дает требуемой точности расчетов.

§ 2. Характеристики сил сопротивления

Характеристики сил сопротивления в машинах определяются условиями, зависящими от того процесса, для выполнения которого предназначена машина. Эти силы действуют на выходные звенья механизма и могут быть функциями перемещений, скоростей и времени. Для многих машин общим свойством этих характеристик является их периодичность во времени. Внутри каждого периода нелинейные характеристики сил сопротивления представляются приближенными выражениями, получаемыми из разложения в ряды Фурье. Если ограничиться $k + 1$ членами этого разложения, то характеристику силы со-

*) См. § 10.

противления $F_c(t)$ внутри периода времени продолжительностью T можно приближенно представить в виде

$$F_c(t) = a_0 + \sum_{n=1}^h (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (1.12)$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.13)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F_c(t) dt, \quad (1.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F_c(t) \cos n\omega t dt, \quad (1.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F_c(t) \sin n\omega t dt. \quad (1.16)$$

Аналогичные формулы получаются, если считать силу F_c функцией перемещения x .

Выражение в скобках, стоящее под знаком суммирования в формуле (1.12), называется *гармоникой* порядка n . Следует обратить внимание на то, что в характеристиках сил сопротивления, действующих на звенья механизма, не обязательно первая гармоника имеет наибольшее значение по сравнению с другими. Гармоника, которая имеет максимальное значение (по модулю), называется *доминирующей* или *доминантой*. Коэффициенты a_n и b_n каждой гармоники находятся по формулам (1.14) — (1.16), если известно аналитическое или графическое представление характеристики $F_c(t)$ с использованием методов гармонического анализа. Заметим также, что коэффициенты a_0 , a_n и b_n не зависят от переменной t . По свойству определенных интегралов их значения зависят только от пределов интегрирования и вида функции $F_c(t)$. На этом основании переменную интегрирования в формулах (1.14) — (1.16) иногда обозначают другой буквой, чтобы подчеркнуть независимость коэффициентов a_0 , a_n и b_n от текущих значений переменной t .

Если сила $F_c(t)$ не является периодической функцией, то формула (1.12) используется для приближенного выражения характеристики силы только на заданном

участке $0 \leq t \leq l$, полагая $T = l$, или же используются понятия *интеграла Фурье* и *спектральной плотности*.

Интеграл Фурье. Для непериодической функции $f(t)$, удовлетворяющей условию абсолютной интегрируемости на всей числовой оси, т. е. условию сходимости интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

предельный переход от ряда Фурье при $T \rightarrow \infty$ дает выражение $f(t)$ в интегральной форме

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (1.17)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (1.18)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (1.19)$$

или, после тригонометрических преобразований,

$$f(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos [\omega t - \theta(\omega)] d\omega, \quad (1.20)$$

где

$$S(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (1.21)$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (1.22)$$

На рис. 2 показано графическое изображение соотношения между формулами (1.17) и (1.20). Для фиксированного значения ω отрезок OK дает $S(\omega)$ в формуле (1.20), а проекция его на направление, образующее с осью абсцисс угол ωt , дает отрезок $OA = S(\omega, t)$, равный значению подынтегральной функции в формулах (1.17) и (1.20), что и доказывает их тождественность.

В отличие от ряда Фурье, в котором угловые частоты гармонических составляющих (гармоник) $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ образуют *дискретный спектр*, интеграл Фурье характеризуется *непрерывным спектром* ω от 0 до ∞ , причем для каждого значения t интеграл Фурье дает

значение функции $f(t)$ в виде «суммы» гармоник с непрерывно изменяющейся угловой частотой ω и амплитудой $S(\omega)$.

Для четных функций $f(-t) = f(t)$ ряд Фурье содержит лишь слагаемые с коэффициентами a_n (разложение

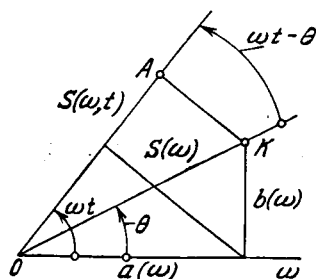


Рис. 2

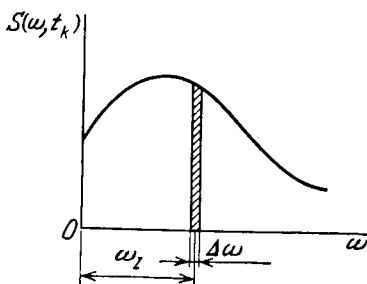


Рис. 3

по косинусам), для нечетных функций $f(-t) = -f(t)$ — слагаемые с коэффициентами b_n (разложение по синусам). Соответственно интеграл Фурье для четных функций имеет вид

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (1.23)$$

Вследствие четности функции $f(t)$ коэффициент $a(\omega)$ достаточно вычислить в пределах от 0 до ∞ и затем удвоить:

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (1.24)$$

Для нечетных функций интеграл Фурье

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (1.25)$$

где

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (1.26)$$

Спектральная плотность. На рис. 3 для фиксированного значения $t = t_k$ показан график изменения подын-

тегральной функции интеграла Фурье $S(\omega, t_k)$ в зависимости от угловой частоты ω . Площадь, заключенная между этим графиком и осью абсцисс, дает согласно (1.17) значение функции $f(t)$ при $t = t_k$. Выделим из этой площади элементарную площадку шириной $\Delta\omega$ вблизи текущего значения $\omega = \omega_1$. Тогда средняя ордината графика $S(\omega, t_k)$ дает среднюю плотность распределения функции $f(t_k)$ по оси абсцисс на участке $\Delta\omega$ вблизи $\omega = \omega_1$. При $\Delta\omega \rightarrow 0$ получаем, что функция $S(\omega, t_k)$ дает плотность распределения функции $f(t)$ по частоте ω при значении $t = t_k$. Для того чтобы характеризовать плотность распределения функции $f(t)$ по частоте ω независимо от текущего значения переменной t , условимся называть *спектральной плотностью* функцию $S(\omega)$, определяемую по (1.21).

Для четных функций $b(\omega) = 0$ и

$$S(\omega) \equiv a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (1.27)$$

В зависимости от физического смысла функции $f(t)$ спектральная плотность $S(\omega)$ получает соответствующее название. Например, если $f(t) = F_c(t)$, то $S(\omega)$ называют спектральной плотностью силы сопротивления, зависящей от времени; если потенциальная энергия системы пропорциональна $f(t) = x^2(t)$, где x — обобщенная координата системы, то $S(\omega)$ называют спектральной плотностью энергии и т. д.

§ 3. Характеристики сил трения

Характеристика силы трения покоя. *Силой трения покоя* называется составляющая полной реакции, лежащая в общей касательной плоскости к поверхности контакта. Модуль этой силы и ее направление зависят от внешних сил, приложенных к трущимся телам, но не могут превышать *предельной силы трения покоя*, под которой понимается сила трения покоя, соответствующая началу относительного движения трущихся тел.

Предельная сила трения покоя зависит от многих факторов, которые можно учесть только экспериментальным путем для каждого механизма в отдельности. При отсутствии экспериментальных данных пользуются обычно приближенными формулами, из которых наибольшее

распространение имеет формула Амонтона

$$F_{\tau} = f_n F, \quad (1.28)$$

где F_{τ} — модуль предельной силы трения покоя, F — модуль результирующей силы нормальных давлений на поверхности трения, f_n — коэффициент трения покоя.

Иногда употребляют формулу Кулона

$$F_{\tau} = A + f_n F, \quad (1.29)$$

где A — сцепленность, зависящая от площади контакта.

Характеристика силы трения скольжения. После достижения предельной силы трения покоя начинается скольжение трущихся поверхностей. Силой трения скольжения называется составляющая полной реакции для трущихся тел, лежащая в общей касательной плоскости к поверхностям контакта и направленная в сторону, противоположную их относительному смещению.

Характеристики сил трения скольжения зависят от вида трения. В зависимости от состояния взаимодействующих тел различают: *чистое трение* (ювенильное) — внешнее трение при полном отсутствии на трущихся поверхностях каких-либо посторонних примесей; *сухое трение* (трение несмазанных поверхностей) — внешнее трение, при котором трущиеся поверхности покрыты пленками окислов и адсорбированными молекулами газов или жидкостей, а смазка отсутствует; *граничное трение* — внешнее трение, при котором между трущимися поверхностями есть тонкий (порядка 0,1 мк и менее) слой смазки с обычными объемными свойствами; *жидкостное (гидродинамическое) трение* — трение, при котором поверхности трущихся твердых тел полностью отделены друг от друга слоем жидкости.

При сухом трении (иногда его называют *кулоновым*) модуль силы трения скольжения приближенно определяется по формуле, аналогичной формуле Амонтона

$$F_{\tau} = f F, \quad (1.30)$$

где f — коэффициент трения скольжения, который всегда меньше коэффициента трения покоя.

Сила трения скольжения F_{τ} направлена противоположно относительной скорости скольжения. Отсюда следует, что характеристика силы трения скольжения при сухом трении F_{τ} в зависимости от скорости скольжения v имеет вид, показанный на рис. 4. При перемене знака

скорости скольжения функция $F_\tau(\tilde{v})$ имеет точку разрыва, и, следовательно, эту характеристику нельзя считать линейной несмотря на то, что модуль силы трения остается постоянным. Характеристики сил с точками разрыва или излома называют существенно нелинейными, так как в этих точках нельзя определить производную и использовать обычный путь линеаризации функций посредством линейных членов ряда Тейлора.

При граничном трении уже проявляется зависимость коэффициента трения от скорости скольжения, который обычно определяется по формулам вида

$$f = f_0 + f_1 v + f_2 v^2 + f_3 v^3, \quad (1.31)$$

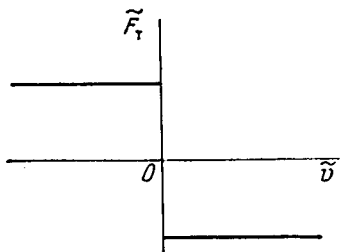


Рис. 4

где f_0 — значение коэффициента трения покоя при $\tilde{v} = 0$, f_1 , f_2 и f_3 — экспериментальные коэффициенты, которые могут быть и положительными, и отрицательными.

Например, экспериментальные исследования трения в направляющих суппорта металлорежущего станка показывают, что при увеличении скорости скольжения от нуля сила трения сначала уменьшается, а затем медленно увеличивается.

При жидкостном трении сила трения определяется из формулы Ньютона

$$\tilde{F}_\tau = \mu S \frac{du}{dy},$$

где F_τ — сила сдвига (внутреннего трения), которую надо приложить к слою жидкости площадью S для того, чтобы этот слой двигался относительно соседнего слоя со скоростью du при расстоянии между слоями dy . Коэффициент пропорциональности μ называется *динамической вязкостью* и в системе СИ имеет размерность Н·с/м² или кг/(м·с). Если производную du/dy , называемую *градиентом скорости*, принять равной $\tilde{v}/h$, где $\tilde{v}$ — относительная скорость скольжения трущихся поверхностей, h — величина зазора, то формула для определения модуля силы трения F_τ при жидкостном трении получит вид

$$F_\tau = \mu S \frac{v}{h}$$

или

$$F_{\tau} = bv, \quad (1.32)$$

где $b = \mu S/h$ — постоянный коэффициент, называемый *коэффициентом вязкого сопротивления* (кратко — *коэффициентом сопротивления*).

Линейная характеристика силы трения (1.32), полученная из условий жидкостного трения, справедлива только при полном разделении трущихся поверхностей слоя смазки. Однако ее часто используют при полужидкостном и даже при граничном трении из-за тех упрощений в динамических расчетах, которые дает применение линейной характеристики силы трения.

Силы трения в кинематических парах. При определении направления силы трения скольжения в кинематических парах механизма надо различать силу трения $F_{\tau ij}$, действующую на звено i со стороны звена j , и силу трения $F_{\tau ji}$, действующую на звено j со стороны звена i (рис. 5)*). Например, для поступательной пары сила $F_{\tau ij}$ направлена противоположно скорости звена i

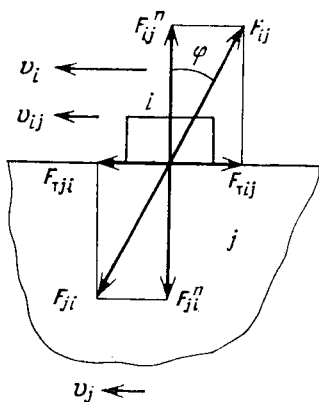


Рис. 5

относительно звена j , т. е. скорости v_{ij} , а сила $F_{\tau ji}$ — противоположно скорости v_{ji} .

В абсолютном движении относительно стойки сила трения может быть как силой сопротивления, так и силой движущей. В случае, показанном на рис. 5, при $v_i > v_j$ сила трения $F_{\tau ij}$ есть сила сопротивления, а сила трения $F_{\tau ji}$ — сила движущая. Другими словами, звено i увлекает звено j , а звено j тормозит звено i . Сумма работ обеих сил, однако, всегда отрицательна. В рассматриваемом примере эта сумма имеет значение

$$-F_{\tau ij}v_i + F_{\tau ji}v_j = F_{\tau ij}(v_j - v_i) < 0.$$

*) В индексах сил и моментах пар сил сначала идет индекс звена, на которое действует сила. Аналогично в индексах скоростей и ускорений сначала идет индекс звена, к которому относится эта скорость или ускорение.

Трение всегда сопровождается диссипацией (рассеянием) энергии, так как суммарная работа обеих сил трения ($F_{\tau ij}$ и $F_{\tau ji}$), т. е. работа сил трения в относительном движении, переходит в тепло и рассеивается. На этом основании силы трения называют *диссипативными*.

Иногда силу F_{ij}^n , которая направлена по нормали к трущимся поверхностям, складывают с силой трения $F_{\tau ij}$ и получают силу F_{ij} , называемую *полной реакцией*. Угол φ , который полная реакция F_{ij} составляет с нормальной составляющей F_{ij}^n , называется *углом трения*. Из формулы (1.30)

$$\frac{F_{\tau ij}}{F_{ij}^n} = f, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg} \varphi = f.$$

При малых значениях коэффициента трения угол трения $\varphi \approx f$.

Для вращательной пары с зазором сила трения $F_{\tau ij}$ приложена в точке касания K и направлена противоположно относительной скорости v_{ij} . Полная реакция F_{ij} отклонена на угол трения φ от нормали к соприкасающимся элементам пары и при любом положении точки касания K направлена по касательной к кругу трения радиуса ρ с центром в точке O_i (рис. 6). Этот круг называется *кругом трения*. Из треугольника BO_iK радиус круга трения

$$\rho = r_a \sin \varphi \approx r_a f,$$

где r_a — радиус цапфы, т. е. той части звена i , на которой расположены элементы вращательной пары.

При исследовании динамики шарнирных механизмов с учетом трения иногда удобнее считать полную реакцию F_{ij} проходящей через центр O_i . Тогда дополнительно надо учесть момент сил трения $M_{\tau ij}$, определяемый по условию

$$M_{\tau ij} = F_{ij} r_a f \quad (1.33)$$

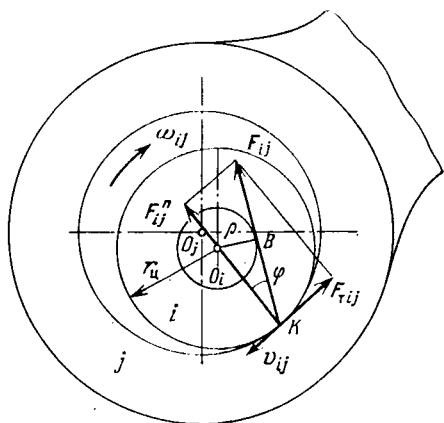


Рис. 6

и направленный противоположно относительной угловой скорости $\tilde{\omega}_{ij}$. Коэффициент трения в этой формуле должен определяться из экспериментальных данных для вращательной пары. Если же используются данные, полученные из опытов с плоскими поверхностями, то надо иметь в виду, что для трения цилиндрических поверхностей с внутренним касанием коэффициент трения получается больше, чем для плоских поверхностей.

В высших парах возможно взаимное качение звеньев. *Сопротивление качению звеньев* выражают моментом M_{kij} , модуль которого определяется по формуле

$$M_{kij} = kF_{ij}^n \quad (1.34)$$

где k — коэффициент сопротивления качения, имеющий размерность длины (обычно см), F_{ij}^n — модуль результирующей силы нормальных давлений на поверхности трения. Направление момента M_{kij} противоположно направлению относительной скорости, имеющей аналогичный индекс. Например, момент сил сопротивления качению M_{kij} , действующих на звено i со стороны звена j , направлен противоположно угловой скорости $\tilde{\omega}_{ij}$ звена i по отношению к звену j .

§ 4. Характеристики сил упругости

Силы упругости, возникающие при деформации звеньев механизма или присоединенных к ним пружин, в большинстве случаев имеют линейные характеристики, выражаемые при растяжении — сжатии зависимостью

$$F = cx, \quad (1.35)$$

где F — модуль силы упругости, c — коэффициент жесткости, x — линейная деформация.

При кручении аналогично имеем

$$M = c\varphi, \quad (1.36)$$

где M — модуль момента сил упругости *), φ — угловая деформация.

*) Момент внутренних сил упругости при кручении называется *крутящим моментом*. В общем случае он изменяется по длине вала. Момент внешних сил, вызывающих кручение вала, называется *вращающим моментом*.

Вместо коэффициента жесткости иногда указывается обратная величина, называемая *коэффициентом податливости*:

$$e = 1/c. \quad (1.37)$$

Для типовых звеньев (зубчатых колес, цилиндрических и призматических стержней и др.) и отдельных их частей (шарикоподшипников, резьбовых соединений и др.) имеются справочные данные, в которых содержатся формулы для определения коэффициентов жесткости и податливости или же возможные диапазоны их изменения. Например, для цилиндрического участка вала податливость при кручении может быть определена по формуле

$$e = \frac{l}{GJ}, \quad (1.38)$$

где l — длина участка вала, G — модуль сдвига, J — полярный момент инерции.

Для цилиндрического стержня податливость при растяжении — сжатии определяется по аналогичной формуле

$$e = \frac{l}{ES}, \quad (1.39)$$

где l — длина стержня, S — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости.

Примером расчетной формулы, полученной из экспериментов, может служить формула для определения податливости резьбового соединения

$$e = \frac{0,5 \div 1,0}{S} \frac{\text{мкм}}{\text{Н}}, \quad (1.40)$$

где S — площадь одного витка в см^2 .

Сила упругости пружины, испытывающей растяжение или сжатие, связана с деформацией x , отсчитываемой от начального положения, линейной зависимостью

$$F = c(b + x) = F_0 + cx, \quad (1.41)$$

где b — постоянная величина (монтажная деформация), численно равная отношению модуля силы упругости пружины в начальном положении F_0 к коэффициенту жесткости c .

Линейная характеристика силы упругости $F(x)$ для металлов (прямая 1 на рис. 7, а) сохраняется лишь до некоторого значения деформации x , по достижении которого нарушается пропорциональность между силой упругости и деформацией, т. е. постоянство коэффициента жесткости c . Переменный коэффициент жесткости, который возрастает с увеличением силы $\tilde{F}$, наблюдается при

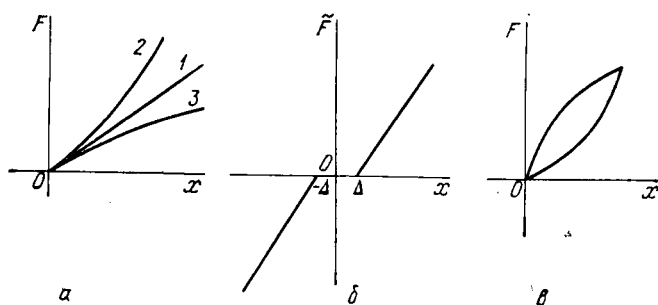


Рис. 7

резиновых элементах. В этом случае характеристику силы упругости $F(x)$ называют *жесткой* (кривая 2 на рис. 7, а). Такую же характеристику имеют силы упругости, действующие на элементы высших пар, так как при точечном или линейном контакте рабочих поверхностей контактная жесткость возрастает с ростом нагрузки. *Мягкую* характеристику (кривая 3 на рис. 7, а) часто имеют звенья, выполненные из полимеров. Кроме того, иногда для получения требуемых динамических характеристик вводят в состав механизма специальные демпфирующие устройства и конические пружины с нелинейными характеристиками типа кривых 2 и 3.

Существенно нелинейными являются характеристики типа *зазор* (рис. 7, б). При перемещении элемента кинематической пары в пределах зазора $\pm\Delta$ сила упругости $\tilde{F}$ равна нулю, а затем изменяется по линейному или нелинейному закону.

В некоторых случаях деформации звеньев механизма сопровождаются заметной диссипацией (рассеянием) энергии, связанной с учетом сил неупругого сопротивления. Тогда график $F(x)$ имеет две ветви, причем верхняя ветвь соответствует нагрузке, а нижняя — разгрузке (рис. 7, в). Контур, образованный этими ветвями, на-

зывается *петлей гистерезиса*. Площадь, расположенная внутри петли гистерезиса, пропорциональна работе, затраченной за один цикл на преодоление сил неупругого сопротивления. Отношение этой работы к работе, затраченной на деформацию, называется *коэффициентом рассеяния*.

§ 5. Характеристики импульсных и ударных сил

Импульсная сила. *Импульсом силы* $F(t)$ называется сумма произведений $F(t)dt$ — элементарных импульсов. При непрерывном изменении силы на участке $0 \leq t \leq \tau$ импульс силы выражается в виде интеграла

$$S = \int_0^{\tau} F(t) dt. \quad (1.42)$$

Импульсной силой называют силу, которая действует кратковременно на участке времени $0 \leq t \leq \tau$, т. е. удовлетворяет условиям

$$F(t) \neq 0 \text{ при } 0 \leq t \leq \tau, \quad F(t) = 0 \text{ при } t > \tau, \quad (1.43)$$

где τ — длительность импульса.

Действие импульсной силы обычно повторяется через равные или неравные промежутки времени.

Характеристики ударных сил. Если максимальное значение импульсной силы достаточно большое по сравнению с максимальными значениями других сил, действующих на звенья механизма, то ее называют *ударной силой*, а промежуток времени τ — *длительностью удара*. Вид функции, определяющей характеристику ударной силы во времени, называется *формой удара*. На рис. 8 показаны типовые формы удара: *мгновенный импульс* (рис. 8, а), *прямоугольный импульс* (рис. 8, б), *полуволна синусоиды* (рис. 8, в) и *отрицательная экспонента* (рис. 8, г).

Дельта-функция. Мгновенный импульс соответствует классическому удару, при котором за бесконечно малый промежуток времени dt ударная сила $F(t)$ стремится к бесконечности. Однако импульс ударной силы имеет при этом конечное значение S . Для аналитического описания мгновенного импульса используют *единичную импульсную функцию* или *дельта-функцию* $\delta(t)$, которая равна

нулю всюду, кроме точки $t=0$; в этой точке она обращается в бесконечность, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.44)$$

Эти свойства дельта-функции можно наглядно пояснить, если рассматривать ее как предел функции

$$\rho(t, \beta) = \frac{\beta}{\pi(\beta^2 t^2 + 1)}$$

при $\beta \rightarrow \infty$.

При $t=0$ функция $\rho(t, \beta) = \beta/\pi$, т. е. при $\beta \rightarrow \infty$ функция $\rho(t, \beta)$ в точке $t=0$ стремится к бесконечно-

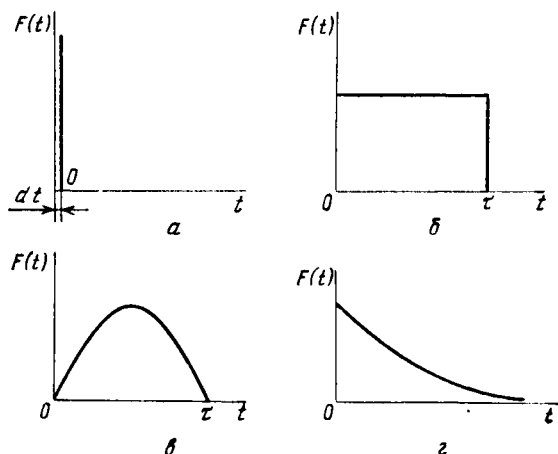


Рис. 8

сти. В любой другой точке при $\beta \rightarrow \infty$ функция $\rho(t, \beta)$ стремится к нулю.

На рис. 9 показаны графики функций $\rho(t, \beta)$ при значениях $\beta = 1, 2$ и 10 . С увеличением β получаем при $\beta \rightarrow \infty$ график дельта-функции $\delta(t)$, условно изображенной на рис. 8, а.

Площадь, заключенная между осью абсцисс и функцией $\rho(t, \beta)$ на рис. 9, выражается интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, \beta) dt = \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\beta^2 t^2 + 1}.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1/\beta^2} = \frac{\pi}{\beta},$$

получаем для любого значения β

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, \beta) dt = 1,$$

что совпадает с интегралом (1.44) для дельта-функции $\delta(t)$. Этот интеграл можно рассматривать также как значение мгновенного импульса ударной силы $\delta(t)$, обращаемой в бесконечность в точке $t=0$ и равной нулю

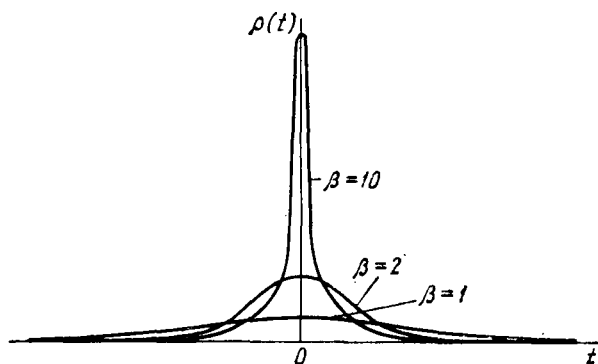


Рис. 9

во всех других точках. Если же требуется получить мгновенный импульс, равный S , то следует рассмотреть предел функции $S\rho(t, \beta)$ при $\beta \rightarrow \infty$. Тогда получаем функцию $S\delta(t)$, которая также равна нулю всюду, кроме точки $t=0$. В этой точке $S\delta(t)$ стремится к бесконечности, но мгновенный импульс, равный интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} S\delta(t) dt = S, \quad (1.45)$$

имеет конечную величину.

Иногда удобнее считать, что дельта-функция обращается в нуль не при $t=0$, а при $t=t_0$. Тогда она обозначается через $\delta(t-t_0)$ и определяется как функция,

равная нулю при всех значениях t , кроме значения $t = t_0$, при котором она обращается в бесконечность, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (1.46)$$

Глава II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 6. Уравнения движения механизмов с одной степенью свободы

Обобщенные координаты механизма. Положение твердого тела, свободно движущегося в пространстве, полностью определяется шестью независимыми координатами, за которые можно принять три координаты начала подвижной системы координат, связанной с телом, и три угла Эйлера, определяющие расположение осей подвижной системы координат относительно неподвижной. Их принято называть обобщенными, так как они определяют положение всего твердого тела. Аналогично *обобщенными координатами механизма* называют независимые между собой координаты, определяющие положения всех звеньев механизма относительно стойки (неподвижного звена).

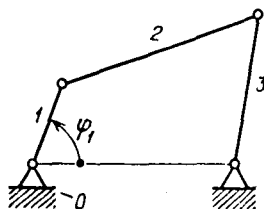


Рис. 10

Например, в механизме шарнирного четырехзвенника (рис. 10) за обобщенную координату можно принять угол поворота кривошипа φ_1 , так как положение звена 1, определяемое этим углом, определяет также положения

всех других подвижных звеньев механизма. Большинство механизмов имеет одну обобщенную координату, но могут быть случаи, когда число обобщенных координат механизма достаточно велико. Оно может быть даже более шести, т. е. более числа обобщенных координат свободного твердого тела.

Начальные звенья. За обобщенные координаты механизма можно взять любые переменные координаты звеньев. Звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат механизма, называется

начальным звеном. Происхождение термина связано с тем, что определение положений всех звеньев механизма начинается с определения положений начальных звеньев.

В механизме с одной обобщенной координатой — одно начальное звено, и за обобщенную координату обычно принимается или угловая координата вращающегося звена, или линейная координата прямолинейно движущегося звена. Начальное звено не обязательно совпадает с входным звеном. Можно за начальное звено взять выходное звено или даже промежуточное, если при этом упрощается анализ механизма. В механизме с двумя обобщенными координатами могут быть или два начальных звена, если за обобщенные координаты приняты координаты двух различных звеньев, или одно начальное звено, если оно образует со стойкой двухподвижную пару.

Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (уравнение кинетической энергии). Для определения законов движения начальных звеньев по заданным силам используются уравнения, называемые уравнениями движения механизма. Число этих уравнений равно числу степеней свободы механизма, которое в механизмах с голономными связями совпадает с числом обобщенных координат *).

Уравнения движения механизма могут быть представлены в различных формах. Для механизмов с одной степенью свободы одна из наиболее простых форм получается на основании теоремы об изменении кинетической энергии

$$\sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i0} = \sum_{k=1}^m A_{k\tau} \quad (2.1)$$

где T_i , T_{i0} — кинетическая энергия звена i соответственно в начале и в конце рассматриваемого промежутка времени; A_k — работа каждой из внешних и внутренних сил, действующих на звенья механизма, за этот промежуток времени; n — число подвижных звеньев; m — число сил.

Уравнение (2.1) можно получить также после интегрирования дифференциальных уравнений движения

*) К голономным связям принадлежат все геометрические связи и те дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы,

звеньев механизма. На этом основании (2.1) называют *уравнением движения механизма в форме интеграла энергии* *).

Приведение сил и масс в плоских механизмах. Уравнение (2.1) представляется довольно громоздким даже для плоских механизмов с небольшим числом звеньев вследствие необходимости производить суммирование по n звеньям и m силам. Для механизмов с одной степенью свободы можно получить более простую форму записи этого уравнения, при которой все операции суммирования выполняются заранее. С этой целью заменим уравнение движения механизма (2.1) тождественным ему уравнением движения одного звена (или одной точки звена), которое движется так, что его обобщенная координата совпадает в любой момент времени с обобщенной координатой механизма.

Пусть, например, начальное звено механизма совершает вращательное движение. Тогда уравнение движения механизма (2.1) можно заменить тождественным ему уравнением движения одного вращающегося звена,

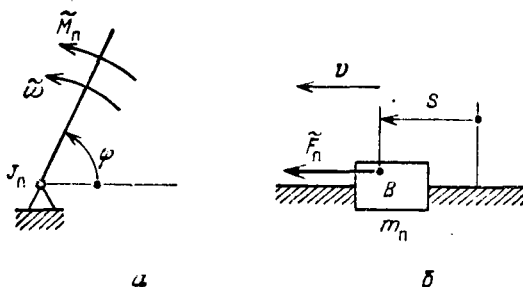


Рис. 11

называемого *звеном приведения* (рис. 11, а). Момент инерции этого звена относительно оси вращения обозначим через J_n и назовем *приведенным моментом инерции*. Примем также, что на звено приведения действует пара сил с моментом $\tilde{M}_n$, который называется *приведенным*

*) Дифференциальные уравнения звеньев содержат вторые производные от координат по времени. После интегрирования получаются уравнения, содержащие только координаты и их производные. Эти уравнения называются *первыми интегралами*. Одно из них, получаемое из теоремы об изменении кинетической энергии, называют *интегралом энергии*.

моментом сил *). Полученная расчетная схема называется *одномассной динамической моделью механизма*. Покажем, что всегда можно определить такие величины J_{π} и M_{π} , при которых уравнение движения звена привода окажется тождественным уравнению движения механизма и, следовательно, обобщенная координата звена привода будет совпадать с обобщенной координатой механизма в любой момент времени.

Напишем уравнение движения звена привода в форме интеграла энергии для некоторого конечного промежутка времени, за который обобщенная координата изменяется от φ_0 до φ , а приведенный момент инерции (в общем случае — величина переменная) — от $J_{\pi 0}$ до J_{π} :

$$\frac{J_{\pi} \omega^2}{2} - \frac{J_{\pi 0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \widetilde{M}_{\pi} d\varphi, \quad (2.2)$$

где ω — модуль угловой скорости звена привода, которая должна по условию привода совпадать с угловой скоростью начального звена; ω_0 — значение ω при $\varphi = \varphi_0$.

Для того чтобы уравнения (2.1) и (2.2) были тождественными, необходимо и достаточно выполнения двух условий:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \widetilde{M}_{\pi} d\varphi = \sum_{k=1}^m A_{k\pi} \quad (2.3)$$

$$\frac{J_{\pi} \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{i\pi} \quad (2.4)$$

причем, если удовлетворяется уравнение (2.4), справедливое для любого момента времени, то удовлетворяется и уравнение

$$\frac{J_{\pi 0} \omega_0^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{i0}.$$

Из (2.3) можно найти приведенный момент сил M_{π} , а из (2.4) — приведенный момент инерции J_{π} .

*) О знаке $\sim$ (тильда) см. сноску на с. 8.

Приведенным моментом сил называется момент пары сил, условно приложенной к звену приведения и определяемой из равенства элементарной работы этой пары сил элементарной работе сил и пар сил, действующих на звенья механизма. Равенство элементарных работ одновременно означает равенство их мощностей:

$$\widetilde{M}_\pi \widetilde{\omega} = \sum_{k=1}^m N_k, \quad (2.5)$$

где N_k — мощность силы (пары сил), действующей на звено механизма.

Обозначим через v_k скорость точки приложения силы F_k , действующей на звено механизма, и через $\widetilde{\omega}_k$ — угловую скорость звена механизма, на которое действует пара сил с моментом M_k . Этот момент считаем положительным, если его направление совпадает с направлением угловой скорости $\widetilde{\omega}_k$, и отрицательным, если эти направления противоположны. Тогда из (2.5) получаем формулу для вычисления приведенного момента сил

$$\widetilde{M}_\pi = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{\widetilde{\omega}} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + \widetilde{M}_k \frac{\widetilde{\omega}_k}{\widetilde{\omega}} \right]. \quad (2.6)$$

Указанная сумма может быть и положительной, и отрицательной, т. е. приведенный момент сил есть скалярная величина. Знак минус указывает, что момент $\widetilde{M}_\pi$ направлен противоположно угловой скорости $\widetilde{\omega}$ звена приведения. Приведенный момент сил, определяемый по формуле (2.6), можно рассматривать также как обобщенную силу по Лагранжу *).

Иногда отдельно приводят силы движущие, силы сопротивления, силы тяжести, силы трения и т. п. Формула (2.6) остается справедливой во всех случаях, надо только указывать, какие силы были выбраны за приводимые.

Из уравнения (2.4) следует, что *приведенный момент инерции* можно определить как момент инерции, который должно обладать звено приведения относительно оси его вращения, чтобы кинетическая энергия этого зве-

*) Обобщенной силой по Лагранжу называется скалярная величина, равная отношению суммы возможных работ сил, приложенных к механической системе, при изменении только данной обобщенной координаты, к вариации этой координаты.

на равнялась кинетической энергии всех звеньев механизма.

При плоском движении кинетическая энергия звена

$$T_i = \frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2}, \quad (2.7)$$

где m_i — масса звена i , v_{Si} — модуль скорости центра масс звена i , ω_i — модуль угловой скорости звена i , J_{Si} — момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Подставляя это значение в (2.4) и производя преобразования, получаем

$$J_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{\omega} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Если начальное звено совершает прямолинейное движение, то динамическая модель механизма представляет собой материальную точку B с массой m_{Π} (*приведенной массой*), которая движется под действием силы F_{Π} , называемой *приведенной силой*, так, что обобщенная координата s этой точки совпадает с обобщенной координатой механизма в любой момент времени (рис. 11, б). Формулы для приведенной силы и приведенной массы имеют вид, аналогичный (2.6) и (2.8):

$$\tilde{F}_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{v} \cos (\widehat{F_k, v_k}) + \tilde{M}_k \frac{\tilde{\omega}_k}{v} \right], \quad (2.9)$$

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{v} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right], \quad (2.10)$$

где v — модуль скорости прямолинейно движущегося начального звена.

Приведенную силу также можно рассматривать как скалярную величину, совпадающую с обобщенной силой по Лагранжу. Знак минус при определении приведенной силы по формуле (2.9) указывает, что при изображении этой силы вектором его направление надо считать противоположным направлению скорости прямолинейно движущегося начального звена.

В общем случае динамической модели механизма с одной степенью свободы за *точку приведения*, т. е. точку, в которой сосредоточивается приведенная масса, можно выбрать любую точку механизма. Поэтому *приведенной массой механизма* называют массу, которую надо сосредоточить в данной точке механизма (точке приведения), чтобы кинетическая энергия этой материальной точки равнялась кинетической энергии всех звеньев механизма. Соответственно *приведенной силой* называют силу, условно приложенную к точке приведения и определяемую из равенства элементарной работы сил и пар сил, действующих на звенья механизма.

Приведенный момент сил и приведенный момент инерции (или приведенная сила и приведенная масса) не зависят от угловой скорости звена приведения (или скорости точки приведения), так как в формулы для их определения входят только отношения скоростей. Например, если угловая скорость звена приведения $\tilde{\omega}$ изменяется в ν раз, то во столько же раз изменяются ν_k , ν_{s_i} и $\tilde{\omega}_i$, а их отношения к $\tilde{\omega}$ остаются неизменными. Отсюда следует, что приведение сил и масс (определение $\tilde{M}_n$, J_n или $\tilde{F}_n$, m_n) можно выполнить, не зная еще угловой скорости звена приведения, т. е. до решения уравнения движения.

Приведенная масса может быть переменной величиной, если отношения скоростей, входящих в формулу (2.10), являются переменными величинами, зависящими от положения звеньев. Однако точку приведения с переменной приведенной массой нельзя рассматривать как модель тела переменной массы. Изменение приведенной массы отражает лишь изменение кинетической энергии звеньев механизма с постоянными массами.

Итак, после приведения сил и масс уравнение движения механизма в форме интеграла энергии имеет вид

$$\frac{J_n \omega^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{M}_n d\varphi, \quad (2.11)$$

если за звено приведения выбрано вращающееся начальное звено, имеющее обобщенную координату φ . Если за звено приведения выбрано начальное звено, совершающее прямолинейное движение с обобщенной координатой

той s , то уравнение движения механизма имеет вид

$$\frac{m_{\Pi} v^2}{2} - \frac{m_{\Pi 0} v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s \tilde{F}_{\Pi} ds. \quad (2.12)$$

Определение приведенных сил и моментов сил по теореме Жуковского. Теорема Жуковского формулируется следующим образом: Если силу, приложенную к какой-либо точке звена плоского механизма, перенести параллельно самой себе в одноименную точку повернутого на 90° плана скоростей, то момент этой силы относительно полюса плана скоростей будет пропорционален ее мощности.

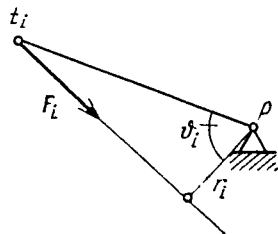


Рис. 12

Пусть, например, сила F_i , приложенная в точке T_i механизма, перенесена без изменения ее направления в точку t_i повернутого на 90° плана скоростей (рис. 12). Тогда момент силы относительно полюса

$$M_p(F_i) = \tilde{F}_i r_i \equiv F_i \frac{v_i}{\mu_v} \cos(\widehat{F_i, v_i}),$$

так как угол θ_i между отрезком (pt_i) , изображающим скорость v_i точки приложения силы F_i , и плечом r_i равен углу $\widehat{F_i, v_i}$ вследствие взаимной перпендикулярности сторон.

Отсюда следует условие теоремы Жуковского

$$M_p(F_i) = N_i / \mu_v, \quad (2.13)$$

где N_i — мощность силы F_i .

Если на звено действует пара сил, то на повернутый план скоростей надо переносить каждую составляющую этой пары отдельно.

Мощность приведенной силы F_{Π} равна сумме мощностей сил и пар сил, приложенных к звеньям механизма. На основании теоремы Жуковского это условие равносильно равенству момента приведенной силы и суммы моментов приводимых сил относительно полюса повернутого плана скоростей:

$$M_p(\tilde{F}_{\Pi}) = \sum_{k=1}^m M_p(F_k). \quad (2.14)$$

Пусть, например, для данного положения звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 13, а) требуется определить приведенный к звену 1 момент сил $\tilde{M}_n$ от силы F , действующей на ползун 3. Строим повернутый на 90° план скоростей (рис. 13, б) и переносим на него силу F в точку с. Приведенный момент сил $\tilde{M}_n$ представляем

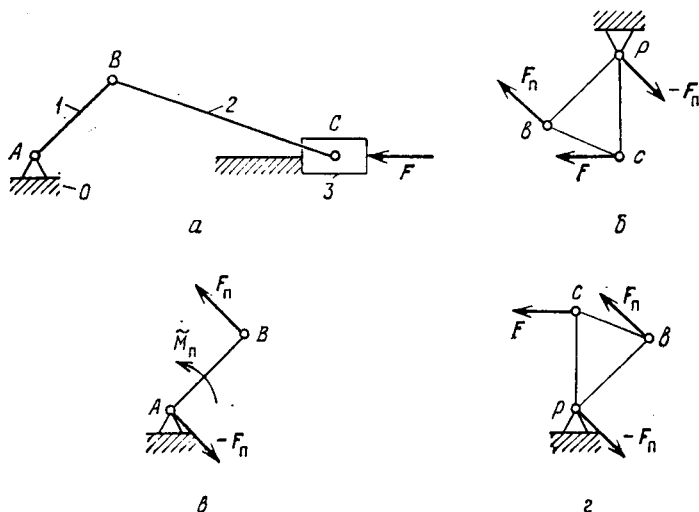


Рис. 13

в виде пары сил F_n и $-F_n$, приложенных в точках A и B и направленных перпендикулярно отрезку AB (рис. 13, в), причем знак направления силы F_n должен быть выбран так, чтобы на повернутом плане скоростей моменты силы F_n и силы F относительно полюса p были одинаковыми (условие равенства мощностей этих сил). Модуль силы F_n находится из условия (2.14): $F_n(pb) = F(pc)$ и, следовательно, модуль приведенного момента сил

$$\tilde{M}_n = Fl_{AB}(pc)/(pb). \quad (2.15)$$

Знак приведенного момента сил $\tilde{M}_n$ определяется по знаку момента силы F_n относительно точки A на плане механизма.

Повернутый план скоростей может быть построен в двух вариантах (рис. 13, б и г). В обоих случаях сила F_n на плане механизма имеет одно и то же направление, что доказывает независимость определения силы F_n и

приведенного момента сил M_n от направления угловой скорости звена I . Заметим также, что знаки моментов сил на повернутом плане скоростей и на плане механизма могут не совпадать.

Кинетическая энергия пространственного механизма. Приведение сил и масс целесообразно выполнять при динамическом анализе не только плоских, но и пространственных механизмов. Для определения приведенной массы (приведенного момента инерции) надо знать выражение кинетической энергии звена, совершающего пространственное движение.

Свяжем со звеном i центральную систему координат x_i, y_i, z_i , т. е. систему с началом координат в центре масс S_i , и обозначим через $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$ моменты инерции звена относительно координатных осей, а через $J_{x_i y_i}, J_{y_i z_i}, J_{z_i x_i}$ — центробежные моменты инерции. Кроме того, считаем известными скорость центра масс звена v_{S_i} и проекции мгновенной угловой скорости при сферическом движении звена относительно центра масс на указанные координатные оси: $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$.

Тогда кинетическая энергия звена i будет равна сумме кинетической энергии в поступательном движении по траектории центра масс со скоростью v_{S_i} и кинетической энергии при сферическом движении вокруг центра масс:

$$T_i = \frac{1}{2} \left(m_i v_{S_i}^2 + J_{x_i} \omega_{x_i}^2 + J_{y_i} \omega_{y_i}^2 + J_{z_i} \omega_{z_i}^2 \right) - J_{x_i y_i} \tilde{\omega}_{x_i} \tilde{\omega}_{y_i} - J_{y_i z_i} \tilde{\omega}_{y_i} \tilde{\omega}_{z_i} - J_{z_i x_i} \tilde{\omega}_{z_i} \tilde{\omega}_{x_i}. \quad (2.16)$$

Координатные оси x_i, y_i, z_i всегда могут быть выбраны так, что все центробежные моменты инерции обратятся в нуль. Координатные оси, удовлетворяющие этому условию, называются *главными осями инерции*. В дальнейшем всегда считаем, что оси координат, связанные со звеньями, являются главными центральными осями инерции.

Приведение сил и масс в пространственных механизмах. Из условия равенства кинетической энергии звена приведения и кинетической энергии всех звеньев получаем с учетом (2.16) приведенный момент инерции

$$J_n = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega} \right)^2 + J_{x_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{\omega} \right)^2 + J_{y_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega} \right)^2 + J_{z_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{\omega} \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

где ω — модуль угловой скорости начального звена (звена приведения).

Приведенный момент сил находится из равенства мощности приведенной пары сил сумме мощностей сил и пар сил, действующих на звенья механизма:

$$\tilde{M}_\Pi = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{\omega} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + M_k \frac{\omega_k}{\omega} \cos(\widehat{M_k, \omega_k}) \right], \quad (2.18)$$

где v_k — скорость точки приложения силы F_k , ω_k — угловая скорость звена, на которое действует пара сил с моментом M_k .

Аналогично для прямолинейного движения находим приведенную массу и приведенную силу:

$$m_\Pi = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{v} \right)^2 + J_{xi} \left(\frac{\omega_{xi}}{v} \right)^2 + J_{vi} \left(\frac{\omega_{vi}}{v} \right)^2 + J_{zi} \left(\frac{\omega_{zi}}{v} \right)^2 \right]; \quad (2.19)$$

$$\tilde{F}_\Pi = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{v} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + M_k \frac{\omega_k}{v} \cos(\widehat{M_k, \omega_k}) \right], \quad (2.20)$$

где v — модуль скорости прямолинейно движущегося начального звена (звена приведения).

Дифференциальное уравнение движения механизма. Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии используется преимущественно в случаях, когда приведенные силы зависят от положений звеньев. В других случаях используется дифференциальное уравнение движения механизма, которое можно получить из уравнения кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = dA.$$

При вращающемся начальном звене после приведения сил и масс имеем

$$d \left(\frac{J_\Pi \omega^2}{2} \right) = \tilde{M}_\Pi d\varphi \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_\Pi \omega^2}{2} \right) = \tilde{M}_\Pi.$$

Отсюда после дифференцирования по углу поворота φ получаем уравнение движения механизма

$$J_\Pi \ddot{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_\Pi}{d\varphi} = \tilde{M}_\Pi, \quad (2.21)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — угловое ускорение начального звена (звена приведения).

Уравнение (2.21) можно получить также из уравнения Лагранжа 2-го рода, которое после приведения сил и масс имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \tilde{M}_{\Pi},$$

где $T = J_{\Pi} \omega^2 / 2$.

После дифференцирования получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = J_{\Pi} \tilde{\omega}, \quad \frac{d}{dt} (J_{\Pi} \tilde{\omega}) = J_{\Pi} \tilde{\varepsilon} + \omega^2 \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}.$$

Подставляя выражения для производных в уравнение Лагранжа, вновь получаем уравнение (2.21).

Аналогичный вид имеет дифференциальное уравнение движения механизма при прямолинейно движущемся начальном звене:

$$\tilde{F}_{\Pi} = m_{\Pi} \ddot{s} + \frac{\dot{s}^2}{2} \frac{dm_{\Pi}}{d\varphi}, \quad (2.22)$$

где s — перемещение прямолинейно движущегося начального звена *).

Обычно приведенный момент сил (обобщенная сила) зависит только от времени, пути и от обобщенной скорости (производной от обобщенной координаты по времени), и тогда дифференциальное уравнение движения механизма имеет второй порядок относительно обобщенной координаты. Однако в некоторых механизмах, например, в механизмах с электроприводом, при учете его динамической характеристики, приведенный момент сил зависит от третьей производной обобщенной координаты по времени **), и тогда дифференциальное уравнение движения механизма имеет третий порядок.

*) Точка над буквой означает первую производную по времени, две точки — вторую производную и т. д.

**) См. § 10.

§ 7. Уравнения движения механизмов с учетом трения

Приведенная сила трения и приведенный момент сил трения. Приведенной силой трения F_τ называется сила, условно приложенная в точке приведения и определяемая из равенства элементарной работы этой силы элементарной работе всех сил трения в механизме. Аналогично определяется *приведенный момент сил трения* M_τ , как момент пары сил, условно приложенной к звену приведения и определяемой из равенства элементарной работы всех сил трения. Из формул (2.6) и (2.9) имеем:

$$M_\tau = N_\tau / \omega, \quad (2.23)$$

$$F_\tau = N_\tau / v, \quad (2.24)$$

где N_τ — мощность всех сил трения в механизме, называемая *потерями мощности на трение*, или, сокращенно, *потерями на трение*, так как работа, совершаемая силами трения, переходит в тепло и рассеивается.

Силы трения в механизмах зависят от реакций в кинематических парах. Следовательно, для того чтобы определить потери на трение и приведенную силу трения, входящую в уравнение движения механизма, надо в общем случае решить задачу об определении реакций в кинематических парах, т. е. задачу силового анализа.

Силовой анализ с учетом трения. При силовом анализе направления относительных скоростей во всех кинематических парах считаются заданными. Поэтому в уравнения равновесия с учетом сил инерции (уравнения

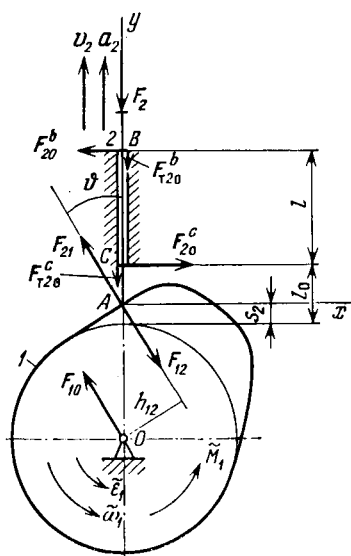


Рис. 14

кинетостатики) силы трения входят с известным знаком в отличие от искомых реакций. Поясним эту особенность силового анализа с учетом сил трения на примере кулачкового механизма. Кулачок 1 (рис. 14) приводит в движение выходное звено 2, соприкасаясь с ним

по сферической поверхности малого радиуса (практически в точке, лежащей на оси выходного звена). Трение учитываем только в направляющих поступательной пары, причем считаем, что вследствие достаточного зазора в этой паре звено 2 при его перекосе касается направляющих в двух точках B и C , отстоящих на расстояние l^*).

При силовом анализе считаем заданными: угловые скорость ω_1 и ускорение ε_1 звена 1, скорость v_2 и ускорение a_2 звена 2, момент инерции J_1 звена 1 относительно оси его вращения, массу m_2 звена 2, размеры l и l_0 , коэффициент трения f , внешнюю силу F_2 , действующую на звено 2, и угол давления ϑ , т. е. угол между силой давления F_{21} на звено 2 со стороны звена 1 и скоростью точки приложения этой силы. Требуется определить реакции F_{21} , F_{20}^b , F_{20}^c и F_{10} .

Уравнения кинестатического равновесия звена 2 при указанных на рисунке направлениях реакций записываем в виде уравнений проекций на оси Ax и Ay и уравнения моментов относительно точки A :

$$-F_{20}^b + F_{20}^c - F_{21} \sin \vartheta = 0, \quad (2.25)$$

$$-f(F_{20}^b + F_{20}^c) + F_{21} \cos \vartheta - F_2 - m_2 \tilde{a}_2 = 0, \quad (2.26)$$

$$F_{20}^b (l + l_0 - s_2) - F_{20}^c (l_0 - s_2) = 0. \quad (2.27)$$

Из (2.27) имеем $F_{20}^c = F_{20}^b (l + l_0 - s_2) / (l_0 - s_2)$. Подставляя значение F_{20}^c в (2.25), находим

$$F_{20}^b = F_{21} \frac{(l_0 - s_2) \sin \vartheta}{l}.$$

Наконец, из уравнения (2.26) получаем

$$F_{21} = \frac{F_2 + m_2 \tilde{a}_2}{\cos \vartheta - f \left[1 + \frac{2}{l} (l_0 - s_2) \right] \sin \vartheta}, \quad (2.28)$$

Как видно, величины F_{20}^b , F_{20}^c при $F_{21} > 0$ имеют знак плюс, т. е. направления реакций были выбраны правильно. Если бы величина F_{20}^b (или F_{20}^c) получилась отрицательной, то следовало бы изменить направление соответствующей реакции на противоположное. При этом систему уравнений (2.25) — (2.27) пришлось бы решать

*) При малых зазорах давление выходного звена на стойку распределяется по закону треугольника, и расчетная длина направляющей $l_p = 2l/3$.

зависимо, так как в уравнениях (2.25) и (2.27) знак перед F_{20}^b (или F_{20}^c) изменился бы, а в (2.26) остался прежним из-за неизменности направления сил трения.

Реакция на кулачок со стороны стойки F_{10} находится из соотношения $F_{10} = -F_{12} = F_{21}$, а уравнение моментов относительно точки O дает тождество

$$\tilde{M}_1 - J_1 \tilde{\varepsilon}_1 - F_{12} h_{12} = 0, \quad (2.29)$$

если закон движения начального звена, принятый при определении сил инерции, соответствует заданным внешним силам.

Самоторможение. При действии сил трения в кинематической паре возможен случай, когда относительное движение звена в требуемом направлении не может начаться независимо от значения движущей силы. Этот случай называют *самоторможением*.

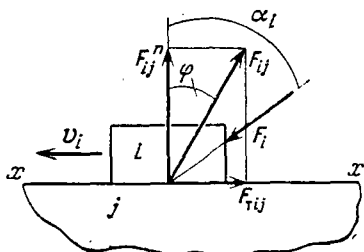


Рис. 15

Пусть, например, на звено i , движущееся по неподвижной направляющей j , действует сила F_i , которая составляет со скоростью v_i угол $90^\circ - \alpha_i$ (рис. 15). При

$\alpha_i > \varphi$ звено i движется ускоренно в направлении, указанном вектором v_i , так как проекция силы F_i на ось xx больше силы трения F_{tij} . При $\alpha_i < \varphi$ звено i движется замедленно, если в начальный момент оно двигалось со скоростью v_i . Если же начальная скорость равна нулю, то движение звена не может начаться независимо от значения движущей силы. При $\alpha_i = \varphi$ возможно равномерное движение звена i со скоростью v_i . Однако при начальной скорости, равной нулю, движение также не может начаться. Отсюда следует, что условие самоторможения выражается неравенством $\alpha_i \leq \varphi$, т. е. при самоторможении направление движущей силы проходит внутри угла трения. В большинстве механизмов самоторможение недопустимо, но в некоторых случаях оно используется для предотвращения самопроизвольного движения в обратном направлении (домкраты, подъемные механизмы и др.).

В кулачковом механизме (рис. 14) самоторможение наступает при условии, что знаменатель в формуле

(2.28) обращается в нуль. Тогда при любом значении силы F_2 модуль реакции F_{12} (силы, движущей звено 2) стремится к бесконечности. Условие самоторможения рассматриваемого механизма выражается соотношением

$$\cos \vartheta \leq f \left[1 + \frac{2}{l} (l_0 - s_2) \right] \sin \vartheta$$

или

$$\operatorname{tg} \vartheta \geq \frac{l}{f [l + 2(l_0 - s_2)]}. \quad (2.30)$$

При достаточно большой длине l условие самоторможения имеет вид: $\operatorname{tg} \vartheta \geq 1/f$ или $\vartheta \geq 90^\circ - \varphi$, где φ — угол трения.

Кинетостатический метод составления уравнений движения механизма с учетом трения. Общий метод составления уравнений движения механизма с учетом трения, применимый к механизмам с любым числом степеней свободы, состоит в том, что уравнения движения механизма получаются из уравнений кинетостатического равновесия начальных звеньев, если при силовом анализе с учетом трения ускорения точек звеньев считать неизвестными.

Составление этих уравнений поясним на примере кулачкового механизма (рис. 14), в котором условие равновесия сил, действующих на кулачок, дает уравнение (2.29). Чтобы получить уравнение движения механизма с учетом трения в поступательной паре, достаточно подставить в (2.29) значение реакции $\tilde{F}_{21} = -F_{12}$ из (2.28) и, кроме того, выразить ускорение $\ddot{a}_2$ через угловые скорость $\tilde{\omega}_1$ и ускорение ε_1 звена 1.

По правилам дифференцирования сложной функции (функции от функции) имеем

$$\tilde{v}_2 = \frac{ds_2}{dt} \equiv \frac{ds_2}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt},$$

где φ_1 — угол поворота кулачка (обобщенная координата механизма).

Отсюда

$$\tilde{v}_2 = s_2' \tilde{\omega}_1, \quad (2.31)$$

где $s_2' = ds_2/d\varphi_1 \equiv \tilde{v}_2/\tilde{\omega}_1$ — аналог скорости звена 2 *).

*) Первая производная по обобщенной координате обозначается штрихом, вторая производная — двумя штрихами и т. д.

Дифференцирование по времени соотношения (2.31) дает

$$\tilde{a}_2 = \frac{ds'_2}{dt} \tilde{\omega}_1 + s'_2 \tilde{\epsilon}_1 \quad \text{или} \quad \tilde{a}_2 = s''_2 \omega_1^2 + s'_2 \tilde{\epsilon}_1. \quad (2.32)$$

Для определения аналога скорости s'_2 используем построение треугольника скоростей pa_1a_2 (рис. 16) по уравнению

$$\mathbf{v}_{A_2} = \mathbf{v}_{A_1} + \mathbf{v}_{A_2A_1},$$

где $\mathbf{v}_{A_2} = \mathbf{v}_2$ — скорость точки A на звене 2, $\mathbf{v}_{A_1}$ — скорость

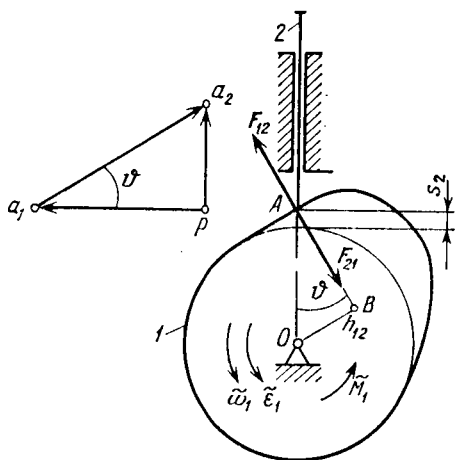


Рис. 16

точки A на звене 1, $\mathbf{v}_{A_2A_1}$ — относительная скорость, направленная по касательной к профилю кулачка.

Отсюда при $\tilde{v}_{A_1} = l_{OA} \tilde{\omega}_1$

$$\tilde{v}_2 = l_{OA} \tilde{\omega}_1 \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{или} \quad s'_2 = l_{OA} \operatorname{tg} \vartheta. \quad (2.33)$$

Плечо силы $F_{21} = -F_{12}$ находится из треугольника OBA :

$$h_{12} = l_{OA} \sin \vartheta \quad \text{или} \quad h_{12} = s'_2 \cos \vartheta. \quad (2.34)$$

Уравнение движения механизма получаем из уравнения (2.29) после подстановок $F_{12} = F_{21}$, $\tilde{a}_2$ и h_{12} по

формулам (2.28), (2.32) и (2.34):

$$\tilde{M}_1 - J\tilde{\varepsilon}_1 - s_2' \cos \vartheta \frac{F_2 + m_2 (\ddot{s}_2 \omega_1^2 + \dot{s}_2 \tilde{\varepsilon}_1)}{\cos \vartheta - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \sin \vartheta} = 0.$$

Это уравнение можно представить в форме, аналогичной форме уравнения Лагранжа (2.24):

$$\left[J_1 + m_2 \frac{(\dot{s}_2')^2}{1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta} \right] \tilde{\varepsilon}_1 + \frac{\omega_1^2}{2} \frac{2m_2 \dot{s}_2' \ddot{s}_2}{1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta} = \tilde{M}_1 - F_2 \frac{\dot{s}_2'}{1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta}. \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) может быть также получено путем приведения сил и масс с учетом КПД механизма.

Коэффициент полезного действия механизма. Под коэффициентом полезного действия (КПД) механической системы понимают отношение полезной работы к затраченной за один и тот же промежуток времени. В применении к механизмам различают цикловой и мгновенный КПД механизма в зависимости от промежутка времени, за который вычисляется КПД.

Цикловой КПД механизма вычисляется за такой минимальный промежуток времени, по истечении которого кинетическая энергия и обобщенная скорость (производная обобщенной координаты по времени) возвращаются к исходным значениям. Движение механизма, при котором его кинетическая энергия и обобщенная скорость являются периодическими функциями времени, называется *установившимся* и, соответственно, цикловой КПД можно определить как отношение полезной работы к работе движущих сил за время цикла установившегося движения. Если под полезной работой понимать работу движущих сил A_d за вычетом работы A_r , затраченной на преодоление сил трения, то цикловой КПД при ведомом звене i и ведомом звене j

$$\eta_{ij} = (A_d - A_r) / A_d. \quad (2.36)$$

Мгновенный КПД механизма вычисляется за бесконечно малый промежуток времени, и потому вместо

отношения работ берется отношение мощностей

$$\eta_{ij} = -N_j/N_i, \quad (2.37)$$

где N_j — мощность внешних сил сопротивления на ведомом звене j , N_i — мощность внешних сил на ведущем звене i . Указанные мощности должны определяться из условий статического равновесия механизма, т. е. без учета сил инерции.

Если ведущее звено вращается с угловой скоростью $\tilde{\omega}_i$, то $N_i = \tilde{M}_i \tilde{\omega}_i$, где $\tilde{M}_i$ — момент движущих сил, определяемый с учетом трения, а $N_j = -\tilde{M}_j^0 \tilde{\omega}_i$, где $\tilde{M}_j^0$ — момент движущих сил, определяемый без учета трения. Тогда

$$\eta_{ij} = \tilde{M}_i^0 / \tilde{M}_i. \quad (2.38)$$

Формула (2.38) удобна для вычислений, так как достаточно найти аналитическое выражение момента движущих сил $\tilde{M}_i$, а выражение момента $\tilde{M}_i^0$ получается из него приравниванием нулю коэффициентов, учитывающих трение.

При ведущем звене, движущемся прямолинейно, мгновенный КПД механизма определяется через отношение сил по формуле, аналогичной (2.38):

$$\eta_{ij} = \tilde{F}_i^0 / \tilde{F}_i. \quad (2.39)$$

При постоянном мгновенном КПД его значение совпадает с цикловым КПД, за исключением особого случая равенства нулю работы внешних сил сопротивления, когда формулы (2.38) и (2.39) приводят к неопределенности типа «нуль, деленный на нуль». В этом случае как цикловой, так и мгновенный КПД будем считать равными нулю. Мгновенный КПД равен также нулю при самоторможении. Например, для кулачкового механизма, показанного на рис. 14, момент движущих сил $\tilde{M}_1$, определяемый из условий статического равновесия, т. е. без учета сил инерции, в соответствии с (2.28) и (2.29) имеет значение

$$\tilde{M}_1 = \frac{F_2 h_{12}}{\cos \vartheta - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \sin \vartheta}.$$

Без учета трения, т. е. при $f = 0$, момент движущих сил $\tilde{M}_1^0 = F_2 h_{12} / \cos \vartheta$ и, следовательно, мгновенный КПД

механизма

$$\eta_{12} = 1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta. \quad (2.40)$$

Отсюда получаем, что самоторможение ($\eta_{12} = 0$) наступает при условии

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{l}{f(l + 2l_0 - 2s_2)},$$

которое совпадает с условием (2.30). При дальнейшем увеличении угла давления или коэффициента трения мгновенный КПД становится отрицательным, что соответствует перемене знака мощности внешних сил, действующих на звено 2. В нашем примере при $\eta_{12} < 0$ для возможности равномерного или ускоренного движения надо, чтобы внешняя сила F_2 , действующая на звено 2, была направлена по скорости v_2 , т. е. оба звена (1 и 2) должны быть ведущими. Аналогично в самотормозящем винтовом механизме грузоподъемного устройства движение груза вниз возможно лишь при одновременном действии движущей силы, приложенной к винту, и движущей пары сил, приложенной к гайке винта.

Общий КПД (цикловой или мгновенный) последовательно соединенных механизмов равен произведению КПД отдельных механизмов. Необходимо только следить за тем, чтобы трение в каждой кинематической паре учитывалось один раз.

Приведение сил и масс с учетом КПД. Для кулачкового механизма, показанного на рис. 14, мгновенный КПД η_{12} при ведущем кулачке определяется по формуле (2.40). Следовательно, коэффициент при ε_1 в уравнении движения механизма (2.35) можно представить формулой

$$J_{\pi} = J_1 + m_2 \frac{(s_2')^2}{\eta_{12}}, \quad (2.41)$$

где J_{π} — приведенный момент инерции с учетом трения.

Если КПД η_{12} считать постоянным, т. е. пренебречь отклонениями угла давления ϑ от его среднего значения, то дифференцирование выражения (2.41) по углу поворота кулачка дает

$$\frac{dJ_{\pi}}{d\varphi_1} = \frac{2m_2 s_2' s_2''}{\eta_{12}}, \quad (2.42)$$

Правую часть уравнения (2.35) можно представить как приведенный момент сил с учетом трения

$$\tilde{M}_n = \tilde{M}_1 - F_2 \frac{s_2'}{\eta_{12}}. \quad (2.43)$$

Подставляя в левую часть уравнения (2.35) выражения (2.41) и (2.42), получаем уравнение движения механизма в форме уравнения Лагранжа

$$J_n \ddot{\epsilon}_1 + \frac{\omega_1^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi_1} = \tilde{M}_n,$$

в котором трение учитывается через КПД при определении приведенного момента инерции (2.41) и приведенного момента сил (2.43). Следует обратить внимание на то, что КПД учитывается и в приведенном моменте сил, и в приведенном моменте инерции, так как силы трения в кинематических парах зависят не только от внешних сил, но и от сил инерции. Если приводимая внешняя сила (или сила инерции) является движущей силой, то соответствующий член в выражениях приведенных сил и масс умножается на КПД, если — силой сопротивления, то — делится. Это утверждение справедливо для тех механизмов, в которых силы трения зависят от реакций в кинематических парах. Если же трение приближается к жидкостному и сила трения в кинематической паре зависит от относительной скорости ее элементов, то при составлении уравнений движения механизма трение учитывается посредством приведенной силы трения.

§ 8. Уравнения движения механизмов с несколькими степенями свободы

Уравнения Лагранжа 2-го рода. Для механизмов с несколькими степенями свободы при голономных связях уравнения движения механизмов составляют обычно в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.44)$$

где T — кинетическая энергия системы, s — число обобщенных координат, которое в голономных системах сов-

падает с числом степеней свободы, q_i — обобщенные координаты, Q_i — обобщенные силы.

Обобщенные силы будем определять из условия равенства элементарных работ этих сил на возможных перемещениях, совпадающих с вариациями *) обобщенных координат, работе внешних сил, приложенных к звеньям механизма, на возможных перемещениях их точек приложения:

$$\sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^m (F_{jx} \delta x_j + F_{jy} \delta y_j + F_{jz} \delta z_j), \quad (2.45)$$

где F_{jx} , F_{jy} , F_{jz} — проекции внешних сил F_j на неподвижные координатные оси x , y , z ; δx_j , δy_j , δz_j — проекции возможных перемещений точек приложения этих сил на оси x , y , z , равные вариациям координат этих точек.

Иногда удобнее определять элементарную работу всех внешних сил при изменении только одной обобщенной координаты q_i и фиксированных значениях других обобщенных координат. Тогда:

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta y_j = \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta z_j = \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \delta q_i$$

и условие (2.45) принимает вид

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right). \quad (2.46)$$

Отсюда следует обычное определение обобщенной силы по Лагранжу как скалярной величины, равной отношению суммы возможных работ сил, приложенных к механической системе, при изменении только данной обобщенной координаты, к вариации этой координаты. Для обобщенной координаты, имеющей размерность длины, соответствующая ей обобщенная сила имеет размерность силы, а для обобщенной координаты, выраженной в радианах, — размерность момента сил. Обобщенную силу, имеющую размерность момента сил, будем называть также *обобщенным моментом сил*. В механизмах с одной степенью свободы обобщенная сила совпадает с приведенной силой, а обобщенный момент сил — с приведенным моментом сил.

*) Для функции, зависящей от времени t и аргументов x_i , *вариацией* называется изменение функции при бесконечно малых изменениях аргументов x_i и фиксированном значении времени t .

Иногда силы, зависящие только от обобщенных координат (силы упругости, силы тяжести и др.), не вводят в выражение для обобщенных сил, а учитывают их влияние через изменение потенциальной энергии системы Π . Тогда уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.47)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.48)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Силы трения можно учесть при составлении уравнений Лагранжа только в тех случаях, когда они не зависят от реакций в кинематических парах и могут быть введены в выражения для обобщенных сил. При исследовании колебаний в машинах часто считают, что силы трения пропорциональны обобщенным скоростям $\dot{q}_i$. Тогда их можно ввести в левую часть уравнений Лагранжа через диссипативную функцию Рэлея

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.49)$$

где b_{ij} — постоянные коэффициенты.

Уравнения Лагранжа с учетом диссипативной функции и потенциальной энергии имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.50)$$

Обобщенную координату, которая не входит явно в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, называют *циклической*. Соответствующие им уравнения Лагранжа упрощаются и могут быть непосредственно проинтегрированы относительно циклических координат.

Составление уравнений движения однорядного зубчатого дифференциала. Уравнения движения механизма с двумя степенями свободы, показанного на рис. 17, можно получить из уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \tilde{M}_{\pi 1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_H} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = \tilde{M}_{\pi H}$$

где φ_1, φ_H — углы поворота звеньев 1 и H , принятые за обобщенные координаты; $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_H$ — угловые скорости звеньев 1 и H ; T — кинетическая энергия механизма; $M_{\varphi_1}, M_{\varphi_H}$ — обобщенные моменты сил.

Кинетическая энергия механизма при уравнивании звеньев имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + K J_2 \omega_2^2 + K m_2 R_H^2 \omega_H^2 + J_H \omega_H^2 + J_3 \omega_3^2),$$

где J_1, J_2, J_3, J_H — моменты инерции звеньев 1, 2, 3, H относительно осей, проходящих через центры масс звеньев перпендикулярно плоскости движения; K — число сателлитов, т. е. зубчатых колес 2, совершающих планетарное движение, m — масса одного сателлита; R_H — радиус траектории центра сателлита.

Угол поворота зубчатого колеса 3 есть функция двух обобщенных координат φ_1 и φ_H :

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_H).$$

Дифференцирование по времени указанной функции двух переменных дает соотношение между угловыми скоростями $\dot{\omega}_3, \dot{\omega}_1$ и $\dot{\omega}_H$ звеньев 3, 1 и H :

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \dot{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_H} \dot{\omega}_H.$$

Частная производная $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_1$ представляет собой передаточное отношение, т. е. отношение угловых скоростей, для звеньев 3 и 1, определяемое при неизменном угле φ_H (остановленном звене H). Аналогично частная производная $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_H$ есть передаточное отношение для звеньев 3 и H при неизменном угле φ_1 .

Введем обозначения:

$$u_{31}^{(H)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1}, \quad u_{3H}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_H},$$

причем верхний индекс в скобках указывает, какое звено принимается неподвижным при определении передаточного отношения.

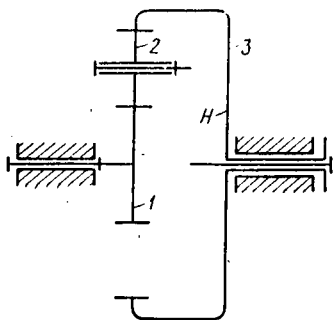


Рис. 17

точного отношения *). Тогда соотношение между угловыми скоростями $\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_H$ принимает вид

$$\tilde{\omega}_3 = u_{31}^{(H)} \tilde{\omega}_1 + u_{3H}^{(1)} \tilde{\omega}_H.$$

Угловая скорость $\tilde{\omega}_2$ находится из аналогичного соотношения

$$\tilde{\omega}_2 = u_{21}^{(H)} \tilde{\omega}_1 + u_{2H}^{(1)} \tilde{\omega}_H.$$

Подставляя значения $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ в выражение кинетической энергии и группируя члены, получаем

$$2T = J_{11}\omega_1^2 + 2J_{1H}\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_H + J_{HH}\omega_H^2,$$

где

$$J_{11} = J_1 + KJ_2[u_{21}^{(H)}]^2 + J_3[u_{31}^{(H)}]^2,$$

$$J_{1H} = KJ_2u_{21}^{(H)}u_{2H}^{(1)} + J_3u_{31}^{(H)}u_{3H}^{(1)},$$

$$J_{HH} = KJ_2[u_{2H}^{(1)}]^2 + Km_2R_H^2 + J_H + J_3[u_{3H}^{(1)}]^2.$$

Коэффициенты J_{11} , J_{1H} , J_{HH} называют *инерционными коэффициентами*. В рассматриваемом механизме они не зависят от углов φ_1 и φ_H . Отсюда $\partial T / \partial \varphi_1 = 0$ и $\partial T / \partial \varphi_H = 0$.

Дифференцирование выражения кинетической энергии по угловым скоростям ω_1 и ω_H дает

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_1} = J_{11}\tilde{\omega}_1 + J_{1H}\tilde{\omega}_H, \quad \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_H} = J_{1H}\tilde{\omega}_1 + J_{HH}\tilde{\omega}_H.$$

Дифференцируя эти соотношения по времени, получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_1} = J_{11}\tilde{\epsilon}_1 + J_{1H}\tilde{\epsilon}_H, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_H} = J_{1H}\tilde{\epsilon}_1 + J_{HH}\tilde{\epsilon}_H,$$

где $\tilde{\epsilon}_1$, $\tilde{\epsilon}_H$ — угловые ускорения звеньев I и H .

Следовательно, уравнения движения механизма имеют вид

$$J_{11}\tilde{\epsilon}_1 + J_{1H}\tilde{\epsilon}_H = \tilde{M}_{\pi 1}, \quad J_{1H}\tilde{\epsilon}_1 + J_{HH}\tilde{\epsilon}_H = \tilde{M}'_{\pi H}.$$

*) Передаточное отношение $u_{kl} = \tilde{\omega}_k / \tilde{\omega}_l$ считается положительным, если угловые скорости $\tilde{\omega}_k$ и $\tilde{\omega}_l$ имеют одинаковые знаки, и отрицательным, если они противоположны.

Обобщенный момент сил $\tilde{M}_{\pi 1}$ находится из условия равенства его элементарной работы на возможном перемещении работе всех сил, приложенных к звеньям механизма, при остановленном звене H . Если внешние силы действуют только на звенья 1, 3 и H в виде пар сил с моментами $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_3$ и $\tilde{M}_H$, то это условие, выраженное через мощности сил, имеет вид

$$\tilde{M}_{\pi 1} \tilde{\omega}_1 = \tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1 + \tilde{M}_3 \tilde{\omega}_3^{(H)} \quad \text{или} \quad \tilde{M}_{\pi 1} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 u_{31}^{(H)}.$$

Аналогично при остановленном звене 1 получаем

$$\tilde{M}_{\pi H} \tilde{\omega}_H = \tilde{M}_H \tilde{\omega}_H + \tilde{M}_3 \tilde{\omega}_3^{(1)} \quad \text{или} \quad \tilde{M}_{\pi H} = \tilde{M}_H + \tilde{M}_3 u_{3H}^{(1)}.$$

Система уравнений движения зубчатого дифференциала может быть также представлена в виде, разрешенном относительно угловых ускорений $\tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\varepsilon}_2$:

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\tilde{M}_{\pi 1} J_{HH} - \tilde{M}_{\pi H} J_{1H}}{J_{11} J_{HH} - J_{1H}^2}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\tilde{M}_{\pi H} J_{11} - \tilde{M}_{\pi 1} J_{1H}}{J_{11} J_{HH} - J_{1H}^2}.$$

Составление уравнений движения шарнирного механизма с двумя степенями свободы. В зубчатом дифференциале инерционные коэффициенты при указанных допущениях были постоянными. Теперь рассмотрим составление уравнений движения механизма с переменными инерционными коэффициентами, зависящими от положений звеньев, на примере плоского шарнирного семизвенника с двумя степенями свободы (рис. 18).

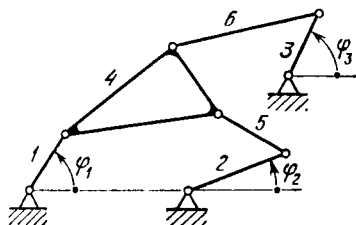


Рис. 18

Принимая за обобщенные координаты углы поворота φ_1 и φ_2 звеньев 1 и 2, получаем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \tilde{M}_{\pi 1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \tilde{M}_{\pi 2},$$

где $\tilde{M}_{\pi 1}$ и $\tilde{M}_{\pi 2}$ — обобщенные моменты сил.

Кинетическую энергию механизма T определяем в предположении, что звенья 1, 2 и 3 уравновешены, а мас-

сами и моментами инерции звеньев 4, 5 и 6 можно пренебречь:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2),$$

где J_1, J_2, J_3 — моменты инерции звеньев 1, 2 и 3 относительно осей вращения; $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ — угловые скорости звеньев 1, 2 и 3.

Угол поворота φ_3 звена 3 есть функция углов поворота φ_1 и φ_2 звеньев 1 и 2:

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_2).$$

Дифференцирование этого соотношения по времени дает значение угловой скорости звена 3:

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2,$$

где частные производные $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_1$ и $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_2$ представляют собой передаточные отношения от звена 3 к звеньям 1 и 2.

Введем обозначения

$$u_{31}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1}, \quad u_{32}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2},$$

причем верхний индекс в скобках указывает, что для частной производной $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_1$ надо считать неизменным угол φ_2 , а для частной производной $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_2$ — угол φ_1 .

Следовательно, как и в зубчатых дифференциалах, угловые скорости $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ связаны соотношением

$$\tilde{\omega}_3 = u_{31}^{(2)} \tilde{\omega}_1 + u_{32}^{(1)} \tilde{\omega}_2,$$

причем передаточное отношение $u_{31}^{(2)}$ определяется при остановленном звене 2, а $u_{32}^{(1)}$ — при остановленном звене 1, т. е. задача об определении передаточных отношений $u_{31}^{(2)}$ и $u_{32}^{(1)}$ сводится к известной задаче кинематического анализа плоских шарнирных механизмов с одной степенью свободы. Заметим только, что в отличие от зубчатых дифференциалов передаточные отношения $u_{31}^{(2)}$ и $u_{32}^{(1)}$ будут переменными величинами, зависящими от углов φ_1 и φ_2 .

После подстановки угловой скорости $\tilde{\omega}_3$ в выражение кинетической энергии получаем

$$2T = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 [u_{31}^{(2)}]^2 \omega_1^2 + J_3 [u_{32}^{(1)}]^2 \omega_2^2 + \\ + 2J_3 u_{31}^{(2)} u_{32}^{(1)} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$$

или

$$2T = J_{11} \omega_1^2 + 2J_{12} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + J_{22} \omega_2^2,$$

где

$$J_{11} = J_1 + J_3 [u_{31}^{(2)}]^2, \quad J_{12} = J_3 u_{31}^{(2)} u_{32}^{(1)}, \quad J_{22} = J_2 + J_3 [u_{32}^{(1)}]^2.$$

Дифференцирование выражения кинетической энергии по углам φ_1 и φ_2 дает

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \omega_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} \omega_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2.$$

Инерционные коэффициенты зависят от передаточных отношений $u_{31}^{(2)}$ и $u_{32}^{(1)}$, которые, в свою очередь, зависят от углов φ_1 и φ_2 . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} &= 2J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} &= 2J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} &= J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_1} + J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} &= 2J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2}, & \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} &= 2J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2}, \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} &= J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2} + J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Дифференцирование выражения кинетической энергии по угловым скоростям $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ с последующим дифференцированием по времени дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_1} &= J_{11} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \frac{dJ_{11}}{dt} \tilde{\omega}_1 + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \frac{dJ_{12}}{dt} \tilde{\omega}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_2} &= J_{22} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \frac{dJ_{22}}{dt} \tilde{\omega}_2 + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \frac{dJ_{12}}{dt} \tilde{\omega}_1. \end{aligned}$$

Производные от инерционных коэффициентов по времени находим с учетом того, что они зависят от углов φ_1 и φ_2 :

$$\frac{dJ_{11}}{dt} = \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2,$$

$$\frac{dJ_{12}}{dt} = \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2,$$

$$\frac{dJ_{22}}{dt} = \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2.$$

Подставляя значения производных в уравнения Лагранжа, получаем

$$J_{11} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \left(\frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \right) \omega_2^2 = \tilde{M}_{11},$$

$$J_{22} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \left(\frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \right) \omega_2^2 = \tilde{M}_{22}.$$

Производные от инерционных коэффициентов по углам φ_1 и φ_2 определяются по формулам (2.51). Частные производные, входящие в эти формулы, находятся дифференцированием функции $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2}, \quad \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}, \quad \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_2^2}.$$

Иногда предпочтительней дифференцировать функцию $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_2)$, представленную в неявном виде

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0.$$

Тогда

$$u_{31}^{(2)} = - \frac{\partial \Phi / \partial \varphi_1}{\partial \Phi / \partial \varphi_3}, \quad u_{32}^{(1)} = - \frac{\partial \Phi / \partial \varphi_2}{\partial \Phi / \partial \varphi_3},$$

$$\frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1} = - \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} u_{31}^{(2)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_3^2} [u_{31}^{(2)}]^2}{\partial \Phi / \partial \varphi_3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_1} &= \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2} = \\ &= - \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3} u_{31}^{(2)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} u_{32}^{(1)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_3^2} u_{31}^{(2)} u_{32}^{(1)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}}{\partial \Phi / \partial \varphi_3}, \\ \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2} &= - \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3} u_{32}^{(1)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_3^2} [u_{32}^{(1)}]^2}{\partial \Phi / \partial \varphi_3}. \end{aligned}$$

Обобщенный момент сил $\tilde{M}_{\pi 1}$ находится из условия равенства его элементарной работы на возможном перемещении работе всех сил, приложенных к звеньям механизма, при остановленном звене 2. Если внешние силы действуют только на звенья 1, 2 и 3 в виде пар сил с моментами $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ и $\tilde{M}_3$, то это условие, выраженное через мощности сил, имеет вид

$$\tilde{M}_{\pi 1} \tilde{\omega}_1 = \tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1 + \tilde{M}_3 \omega_3^{(2)} \text{ или } \tilde{M}_{\pi 1} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 u_{31}^{(2)}.$$

Аналогично при остановленном звене 1 получаем

$$\tilde{M}_{\pi 2} = \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 u_{32}^{(1)}.$$

§ 9. Уравнения движения механизмов с неголономными связями

Неголономные связи в механизмах. Для механических систем *связями* называются ограничения, налагаемые на положения и скорости точек, которые должны выполняться при любых, действующих на систему силах. Уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек механической системы и их скорости (первые производные от координат по времени), называются *уравнениями связи*.

В большинстве случаев кинематические пары в механизмах накладывают *геометрические связи*, т. е. связи, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы (и, может быть, время). Однако в механизмах могут быть и *дифференциальные связи*, т. е. связи, уравнения которых содержат координаты точек и производные от этих координат по времени (и, может быть, время). При этом важно знать, может ли быть проинтегрирована система уравнений дифференци-

альной связи. Если да, то после интегрирования получаем уравнения, содержащие только координаты точек системы (иногда и время) и, следовательно, в этом случае дифференциальная связь приводится к геометрической. Если уравнения дифференциальной связи не интегрируются, то связь называется *неголономной*.

Пример неголономной связи во фрикционной бесступенчатой передаче. На рис. 19 показана схема механизма, в котором отношение угловых скоростей звеньев 1

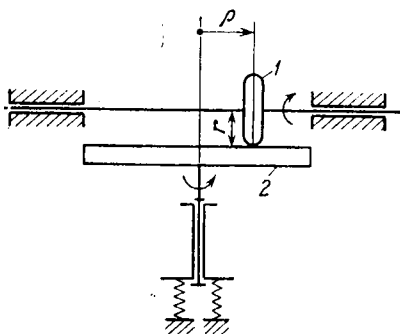


Рис. 19

и 2 может бесступенчато изменяться путем изменения расстояния ρ от оси фрикционного диска 2 до точки контакта с роликом 1. Условие отсутствия скольжения во фрикционной паре дает уравнение дифференциальной связи

$$r\dot{\varphi}_1 - \rho\dot{\varphi}_2 = 0, \quad (2.52)$$

где φ_1 , φ_2 — углы поворота звеньев 1 и 2, r — радиус ролика 1.

Отсюда

$$\rho = r\dot{\varphi}_1/\dot{\varphi}_2,$$

т. е. если считать угловую скорость звена 2 постоянной, то при выполнении условия (2.52) значение ρ показывает производную угла φ_1 по времени t . При автоматическом управлении величиной ρ угловую скорость $\dot{\varphi}_2$ нельзя считать постоянной, и тогда уравнение (2.52) дает дифференциальную связь между обобщенными координатами φ_1 , φ_2 и ρ .

В дифференциалах уравнение (2.52) имеет вид

$$r d\varphi_1 - \rho d\varphi_2 = 0.$$

Это уравнение при переменной величине ρ , являющейся неизвестной функцией времени, не интегрируется и, следовательно, выражает неголономную связь.

Число степеней свободы механизма с неголономными связями. Предположим, что в механизме с s обобщенными координатами имеется l идеальных голономных связей и m неголономных связей, заданных линейными соотношениями между обобщенными скоростями (производными обобщенных координат по времени):

$$\sum_{i=1}^s A_{\sigma i} \dot{q}_i + A_{\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m. \quad (2.53)$$

Коэффициенты A_{σ} могут зависеть от всех q_i и от времени t .

Число степеней свободы, т. е. число независимых возможных перемещений, в неголономных механизмах равно разности между числом обобщенных координат s и числом уравнений неголономных связей m , так как каждое уравнение неголономных связей связывает между собой вариации обобщенных координат

$$W = s - m. \quad (2.54)$$

Число уравнений движения механизма по-прежнему считаем равным числу степеней свободы механизма. Те обобщенные координаты, которые определяются из уравнений движения механизма, условно назовем *независимыми*. Остальные координаты, которые назовем *зависимыми*, находятся из уравнений неголономных связей.

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями. Для составления уравнений движения механизма с неголономными связями нельзя использовать обычные уравнения Лагранжа второго рода, а следует применять их обобщение, известное под названием *уравнений Лагранжа с неопределенными множителями*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 A_{1i} + \dots + \lambda_m A_{mi}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.55)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — неопределенные множители, $A_{1i}, \dots, A_{mi}$ — коэффициенты неголономных связей (2.53).

Иногда уравнения (2.55) называют *уравнениями Рауса — Феррерса*, в работах которых было дано указанное обобщение уравнений Лагранжа.

Общее число уравнений (2.53) и (2.55) равно $s + m$, т. е. больше числа степеней свободы на $2m$. Однако число неизвестных, входящих в эти уравнения, также равно $s + m$ (s обобщенных координат и m неопределенных множителей), и полученная система уравнений при небольшом числе уравнений связей решается без особых затруднений, так как дополнительные неизвестные (неопределенные множители) входят в уравнения линейно.

Пусть, например, в механизме фрикционной бесступенчатой передачи (рис. 19) передаточное отношение u_{21} есть заданная функция времени, определяемая изменением величины ρ . Тогда уравнение связи (2.52) принимает вид уравнения неголономной связи

$$u_{21}(t) \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0. \quad (2.56)$$

Положения звеньев механизма при переменной величине u_{21} определяются тремя координатами: ρ , φ_1 и φ_2 . Однако число обобщенных координат равно двум: φ_1 и φ_2 , так как в нашем случае ρ есть заданная функция времени. Уравнение связи (2.56) не уменьшает числа обобщенных координат, так как оно накладывает ограничения только на скорости $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ (или на бесконечно малые перемещения $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$), но не на положения звеньев (координаты φ_1 и φ_2).

Число степеней свободы механизма по формуле (2.54) равно разности между числом обобщенных координат и числом неголономных связей

$$W = 2 - 1.$$

Следовательно, должно быть одно уравнение движения механизма, которое можно получить из системы трех уравнений: двух уравнений Лагранжа с неопределенным множителем и уравнения неголономной связи.

В выражении кинетической энергии T достаточно учесть члены, характеризующие вращательное движение звеньев 1 и 2, считая моменты инерции этих звеньев J_1 и J_2 постоянными:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2).$$

Выполняя дифференцирование в левых частях уравнений (2.55) и присоединяя уравнение связи (2.56), получаем систему трех уравнений для определения неизвестных φ_1 , φ_2 и λ :

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= \tilde{M}_1 + \lambda u_{21}, & J_2 \ddot{\varphi}_2 &= \tilde{M}_2 - \lambda, \\ u_{21} \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ — обобщенные моменты сил.

Если за независимую обобщенную координату принять φ_1 , то уравнение движения механизма относительно этой координаты найдется из системы (2.57) после исключения неизвестных φ_2 и λ .

Дифференцирование третьего уравнения системы (2.57) дает соотношение

$$\dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + u_{21} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Первые два уравнения системы (2.57) принимают вид

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = \tilde{M}_1 + \lambda u_{21}, \quad J_2 (\dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + u_{21} \ddot{\varphi}_1) = \tilde{M}_2 - \lambda.$$

Исключение неопределенного множителя λ дает уравнение движения механизма относительно обобщенной координаты φ_1 :

$$(J_1 + J_2 u_{21}^2) \ddot{\varphi}_1 + J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 = \tilde{M}_1 + u_{21} \tilde{M}_2. \quad (2.58)$$

Решение этого уравнения дает зависимость $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. Обобщенная координата φ_2 находится из уравнения неголономной связи или же из уравнения движения механизма относительно обобщенной координаты φ_2 , которое получается аналогичным путем из системы (2.57):

$$(J_2 + J_1 u_{12}^2) \ddot{\varphi}_2 + J_1 u_{12} \dot{u}_{12} \dot{\varphi}_2 = \tilde{M}_1 u_{12} + \tilde{M}_2.$$

Посмотрим теперь, можно ли было применить обычное уравнение Лагранжа второго рода, принимая за обобщенную координату угол φ_1 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \tilde{M}_1 + u_{21} \tilde{M}_2.$$

Кинетическая энергия механизма с учетом неголономной связи (2.56)

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 u_{21}^2 \dot{\varphi}_1^2).$$

Выполняя дифференцирование, получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_1 \dot{\varphi}_1 + J_2 u_{21}^2 \dot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_1 \ddot{\varphi}_1 + 2J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + J_2 u_{21}^2 \ddot{\varphi}_1.$$

Следовательно, уравнение Лагранжа второго рода при обобщенной координате φ_1 имеет вид

$$(J_1 + u_{21}^2 J_2) \ddot{\varphi}_1 + 2J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 = \tilde{M}_1 + u_{21} \tilde{M}_2. \quad (2.59)$$

Сравнивая уравнения (2.58) и (2.59), видим, что применение уравнения Лагранжа второго рода без неопределенного множителя привело к увеличению в два раза второго члена левой части уравнения, т. е. к существенной ошибке в вычислительной процедуре.

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями применимы и при нелинейных неголономных связях первого порядка, уравнения которых обычно представляются в неявном виде

$$\varphi_\sigma(q_i, \dot{q}_i, t) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m.$$

При нелинейных связях коэффициенты неголономных связей в уравнениях (2.55) должны быть заменены на $\partial \varphi_\sigma / \partial q_i$. Заметим также, что уравнения Лагранжа с неопределенными множителями, как и все другие уравнения динамики неголономных систем, справедливы и для голономных систем.

Уравнения Аппеля. Применение уравнений Лагранжа с неопределенными множителями при составлении уравнений движения механизма с неголономными связями приводит к необходимости совместного решения системы уравнений, число которых превышает число степеней свободы на удвоенное число неголономных связей. Поэтому для изучения динамики механических систем с неголономными связями неоднократно предлагались дифференциальные уравнения, применение которых позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений. Из этих уравнений рассмотрим лишь уравнения Аппеля.

При составлении уравнений Аппеля уравнения неголономных связей записываются в форме, при которой производные от зависимых обобщенных координат q_α

стоят в левых частях уравнений:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{i=1}^{s-m} b_{\alpha i} \dot{q}_i + b_\alpha, \quad \alpha = s-m+1, \dots, s. \quad (2.60)$$

Уравнения Аппеля составляются только для независимых обобщенных координат, число которых равно числу степеней свободы $s-m$:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{\alpha=s-m+1}^s Q_\alpha b_{\alpha i}, \quad i = 1, \dots, s-m, \quad (2.61)$$

где S — энергия ускорений, Q_i , Q_α — обобщенные силы, отнесенные соответственно к координатам q_i и q_α .

Общее число совместно решаемых уравнений Аппеля (2.61) и уравнений связей (2.60) равно $s-m+m=s$, т. е. равно числу обобщенных координат.

Энергия ускорений, иначе называемая *функцией Гиббса*, в общем случае для системы N материальных частиц с массами m_v и координатами x_v выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} m_v \ddot{x}_v^2.$$

Например, при вращательном движении звена энергия ускорений имеет вид

$$S = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^4}{2}.$$

Составление аналитического выражения энергии ускорения для общего случая движения твердого тела представляется довольно громоздким, и в этом состоит недостаток уравнений Аппеля.

Для фрикционной бесступенчатой передачи, рассмотренной выше, уравнение Аппеля (2.61), отнесенное к обобщенной координате φ_1 , имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}_1} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 u_{21}.$$

В это уравнение входит лишь частная производная от энергии ускорения по переменной величине $\dot{\varphi}_1$. Поэтому вместо полного выражения энергии ускорения достаточно записать ту ее часть S^* , которая содержит

члены, зависящие явно или неявно от ускорения $\ddot{\varphi}_1$:

$$S^* = \frac{1}{2} (J_1 \ddot{\varphi}_1^2 + J_2 \ddot{\varphi}_2^2).$$

Имея в виду, что $\partial S^*/\partial \ddot{\varphi}_1 = \partial S/\partial \ddot{\varphi}_1$, и присоединяя к уравнению Аппеля уравнение неголономной связи, получаем систему двух дифференциальных уравнений для определения обобщенных координат φ_1 и φ_2 :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (J_1 \ddot{\varphi}_1^2 + J_2 \ddot{\varphi}_2^2)}{\partial \ddot{\varphi}_1} = \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2 u_{21}, \quad u_{21} \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0. \quad (2.62)$$

Дифференцирование второго уравнения системы (2.62) дает

$$u_{21} \dot{\varphi}_1 + u_{21} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Из этого уравнения находим $\ddot{\varphi}_2$ и подставляем в первое уравнение системы (2.62). Выполнив дифференцирование, получаем уравнение движения механизма относительно обобщенной координаты φ_1 в форме уравнения (2.58).

Кинетостатический принцип составления уравнений движения механизма. Из условия кинетостатического равновесия (второго закона Ньютона) звеньев 1 и 2 имеем:

$$\widetilde{M}_1 - F_r r - J_1 \ddot{\varphi}_1 = 0, \quad M_2 + F_r \rho - J_2 \ddot{\varphi}_2 = 0, \quad (2.63)$$

где F_r — сила трения покоя (сила сцепления), действующая в плоскости контакта трущихся тел. Для звена 1 сила F_r является силой сопротивления, а для звена 2 — движущей силой. Исключая F_r из уравнений (2.63), получаем

$$\widetilde{M}_1 \rho - J_1 \ddot{\varphi}_1 \rho + \widetilde{M}_2 r - J_2 \ddot{\varphi}_2 r = 0.$$

Это уравнение с учетом передаточного отношения $u_{21} = r/\rho$ преобразуется к виду

$$\widetilde{M}_1 - J_1 \ddot{\varphi}_1 + \widetilde{M}_2 u_{21} - J_2 \ddot{\varphi}_2 u_{21} = 0$$

или

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 u_{21} = \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2 u_{21}. \quad (2.64)$$

Дифференцирование уравнения неголономной связи (2.56) дает

$$\dot{u}_{21}\dot{\varphi}_1 + u_{21}\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0. \quad (2.65)$$

Подставляя это соотношение в уравнение (2.63), опять приходим к уравнению (2.58), полученному с применением уравнений Лагранжа с неопределенными множителями. Кроме того, сравнение уравнений (2.57) и (2.63) показывает, что члены, содержащие неопределенные множители в уравнениях Лагранжа, могут рассматриваться как обобщенные реакции неголономных связей.

§ 10. Уравнения движения механизмов с электроприводом

Уравнения Лагранжа — Максвелла. Механизмы с электроприводом можно рассматривать как электромеханические системы. Для исследования их динамики методически наиболее удобными являются уравнения Лагранжа — Максвелла, которые имеют форму уравнений Лагранжа второго рода и позволяют автоматически получать не только уравнения движения механической части системы, но и связанные с ними уравнения электрической части.

Составление этих уравнений предполагает, что состояние электромеханической системы описывается обобщенными координатами механической части, число которых в голономных системах равно числу степеней свободы механизма, и обобщенными координатами электрической части, определяющими состояние электрической части системы.

Обобщенные механические координаты обозначим через q_i , где $i = 1, \dots, n$, а число n равно числу степеней свободы механизма. За обобщенные механические координаты, как и раньше, будем принимать линейные или угловые координаты звеньев.

Обобщенные электрические координаты обозначим через x_k , где $k = 1, \dots, m$, а число m равно числу электрических степеней свободы. За обобщенные электрические координаты будем выбирать количества электричества.

Производные по времени от обобщенных механических координат дают обобщенные скорости $\dot{q}_i$, а произ-

водные по времени от обобщенных электрических координат дают обобщенные токи κ .

Уравнения Лагранжа — Максвелла для голономных систем имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i, & i &= 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\kappa}_k} - \frac{\partial L}{\partial \kappa_k} &= Q_k, & k &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.66)$$

В этих уравнениях L — функция Лагранжа — Максвелла, равная сумме «электрической» функции Лагранжа L_e и «механической» функции Лагранжа L_m :

$$L = L_e + L_m.$$

«Механическая» функция Лагранжа, как обычно, равна разности кинетической энергии T и потенциальной энергии Π :

$$L_m = T - \Pi,$$

а «электрическая» функция Лагранжа для механизмов с электроприводом совпадает с магнитной энергией системы

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{\infty} L_{rs} i_r i_s,$$

где r и s — индексы независимых электрических контуров (витков, обмоток), по которым протекают токи i_r и i_s ; L_{rs} при $r \neq s$ — взаимная индуктивность (коэффициент взаимной индукции), а при $r = s$ — индуктивность (коэффициент самоиндукции).

Обобщенная сила Q_i определяется как скалярная величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил.

Обобщенная «сила» Q_k определяется по аналогии с Q_i как скалярная величина, равная коэффициенту при вариации данной «электрической» обобщенной координаты в выражении работы δA электрических сил, т. е. из выражения

$$\delta A = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{r,s=1}^{\infty} (E_{r,s} - R_{r,s} i_{r,s}) \right] \delta \kappa_k,$$

где $E_{r,s}$ — э. д. с. контура, $R_{r,s}$ — электрическое сопротивление контура.

Уравнение движения механизма с приводом от электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Пусть электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением приводит в движение входное звено механизма, для которого приведенный момент инерции J_{π} и приведенный момент сил $\bar{M}_{\pi}$ — заданные функции угла поворота якоря (ротора) электродвигателя φ .

Обозначим индуктивности обмоток возбуждения и якоря через $L_{\text{в}}$, $L_{\text{я}}$, взаимную индуктивность через $L_{\text{в я}} = L_{\text{я в}}$, токи в обмотках возбуждения и якоря соответственно через $i_{\text{в}}$ и $i_{\text{я}}$. Тогда функция Лагранжа — Максвелла получает вид

$$L = \frac{1}{2} (L_{\text{в}} i_{\text{в}}^2 + L_{\text{я}} i_{\text{я}}^2 + 2L_{\text{в я}} i_{\text{в}} i_{\text{я}} + J_{\pi} \dot{\varphi}^2).$$

Если считать ток в обмотке возбуждения постоянным, то состояние рассматриваемой электромеханической системы определяется двумя обобщенными координатами φ и $i_{\text{я}}$, которые могут быть найдены как функции времени из уравнений Лагранжа — Максвелла

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \bar{M}_{\pi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_{\text{я}}} = U - i_{\text{я}} R_{\text{я}},$$

где U — напряжение, приложенное к обмотке якоря, $R_{\text{я}}$ — сопротивление этой обмотки.

При дифференцировании функции Лагранжа — Максвелла будем считать индуктивности $L_{\text{я}}$ и $L_{\text{в}}$ постоянными, а взаимную индуктивность $L_{\text{в я}}$ — зависящей от угла поворота якоря φ .

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= J_{\pi} \dot{\varphi}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= J_{\pi} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{\pi}}{d\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_{\text{я}}} &= L_{\text{я}} i_{\text{я}} + L_{\text{в я}} i_{\text{в}}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_{\text{я}}} &= L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + \frac{L_{\text{в я}}}{d\varphi} \dot{\varphi} i_{\text{в}}. \end{aligned}$$

Теперь уравнения Лагранжа — Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} J_{\pi} \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{\pi}}{d\varphi} - \frac{dL_{\text{в я}}}{d\varphi} i_{\text{в}} i_{\text{я}} &= \bar{M}_{\pi}, \\ L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + \frac{dL_{\text{в я}}}{d\varphi} i_{\text{в}} \dot{\varphi} &= U - i_{\text{я}} R_{\text{я}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Совместное решение этих двух уравнений дает иско-
мые функции $\varphi = \varphi(t)$ и $i_a = i_a(t)$.

Из системы уравнений (2.67) можно найти статиче-
скую характеристику двигателя. С этой целью положим
 $\ddot{\varphi} = 0$, $dJ_{\pi}/d\varphi = 0$ и $di_a/dt = 0$. Тогда из первого уравне-
ния системы (2.67) получим

$$M_d = K i_a i_a, \quad (2.68)$$

где $K = L_{\pi\pi}/d\varphi$ для существующих конструкций электро-
двигателей постоянного тока может считаться постоянной
величиной.

Из второго уравнения системы (2.67) при тех же
предположениях

$$i_a = \frac{U - K i_a \dot{\varphi}}{R_a}, \quad (2.69)$$

где $K i_a \dot{\varphi}$ — генераторная э. д. с., возникающая в обмотке
якоря.

Обозначая угловую скорость якоря $\dot{\varphi}$ через $\tilde{\omega}$, из со-
отношений (2.68) и (2.69) получаем

$$M_d = a - b \tilde{\omega}, \quad (2.70)$$

где $a = UK i_a / R_a$, $b = (K i_a)^2 / R_a$.

Итак, при постоянном токе возбуждения статическая
характеристика двигателя постоянного тока с независи-
мым возбуждением представляется в виде линейной за-
висимости между движущим моментом M_d и угловой
скоростью $\tilde{\omega}$ в форме, аналогичной статической харак-
теристике асинхронного двигателя (1.11).

Несмотря на то, что эта зависимость справедлива
лишь при постоянной силе тока в обмотке якоря, она
часто употребляется при исследовании динамики меха-
низмов с электроприводом. Чтобы оценить погрешность,
допускаемую при использовании статической характери-
стики двигателя, сравним упрощенное решение, получае-
мое из уравнения движения механизма, в котором дви-
жущий момент определяется по статической характери-
стике, с более точным решением, получаемым из систе-
мы уравнений (2.67).

При сравнении получаемых решений приведенный
момент сил M_n будем считать приведенным моментом
сил сопротивления M_c . Кроме того, для простоты срав-

нения примем $J_{\pi} = \text{const}$. Тогда упрощенное решение можно найти из первого уравнения системы (2.67) после подстановки выражения движущего момента из (2.70):

$$J_{\pi} \ddot{\omega} = a - b\tilde{\omega} + \tilde{M}_c. \quad (2.71)$$

Для более точного решения надо решать систему уравнений (2.67), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$J_{\pi} \ddot{\omega} - K i_{\text{в}} i_{\text{я}} = \tilde{M}_c, \quad L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + K i_{\text{в}} \tilde{\omega} = U - i_{\text{я}} R_{\text{я}}. \quad (2.72)$$

Для того чтобы исключить из этих уравнений функцию $i_{\text{я}} = i_{\text{я}}(t)$, находим ее величину из первого уравнения:

$$i_{\text{я}} = \frac{J_{\pi} \ddot{\omega} - \tilde{M}_c}{K i_{\text{в}}}, \quad (2.73)$$

а производную $di_{\text{я}}/dt$ из второго уравнения. Эта производная с учетом (2.73) имеет вид

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{UK i_{\text{в}} - R_{\text{я}} J_{\pi} \ddot{\omega} + R_{\text{я}} \tilde{M}_c - (K i_{\text{в}})^2 \tilde{\omega}}{L_{\text{я}} K i_{\text{в}}},$$

Подставляя сюда значения коэффициентов a и b статической характеристики двигателя (2.70), получаем после преобразований

$$\frac{di_{\text{я}}}{dt} = \frac{a - J_{\pi} \ddot{\omega} + \tilde{M}_c - b\tilde{\omega}}{L_{\text{я}} K i_{\text{в}}} R_{\text{я}}. \quad (2.74)$$

После дифференцирования первого уравнения системы (2.72) по времени имеем

$$J_{\pi} \ddot{\omega} - K i_{\text{в}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} = \dot{\tilde{M}}_c.$$

Подставляя выражение $di_{\text{я}}/dt$ из (2.74), получаем уравнение движения механизма с приводом от электродвигателя при постоянном приведенном моменте инерции:

$$\frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} (J_{\pi} \ddot{\omega} - \dot{\tilde{M}}_c) + J_{\pi} \ddot{\omega} = a - b\tilde{\omega} + \tilde{M}_c. \quad (2.75)$$

Это уравнение можно назвать также *уравнением движения механизма с электроприводом* при учете динами-

ческой характеристики двигателя. Оно отличается от уравнения (2.71), составленного с учетом только статической характеристики двигателя, дополнительным членом в левой части, который зависит от отношения L_n/R_n

и производной по времени от функции $(J_n \dot{\omega} - \tilde{M}_c)$. Этот дополнительный член называют иногда *электромагнитной силой инерции*. Заметим, что учет электромагнитной силы инерции повышает порядок дифференциального уравнения движения механизма на единицу. Относительно угловой скорости $\dot{\omega}$ уравнение (2.71) есть уравнение первого порядка, а уравнение (2.75) — второго. Соответственно уравнение (2.71) относительно обобщенной координаты q есть уравнение второго порядка, а уравнение (2.75) — третьего.

Все полученные результаты справедливы и для механизмов с приводом от электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением.

Глава III. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 11. Типовые линейные уравнения движения механизмов с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение движения механизма с одной степенью свободы. Условимся в левой части линейного дифференциального уравнения движения механизма с одной степенью свободы записывать члены, содержащие обобщенную координату q и ее производные по времени $\dot{q}$ и $\ddot{q}$, а в правой части — составляющую обобщенной силы, зависящую от времени $Q(t)$:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (3.1)$$

где a — инерционный коэффициент (приведенная масса при линейной обобщенной координате или приведенный момент инерции при угловой обобщенной координате), b — приведенный коэффициент сопротивления, c — приведенный коэффициент жесткости.

При определении приведенного коэффициента сопротивления b в общем случае учитываются не только силы трения, зависящие от относительной скорости трущихся поверхностей (трение, близкое к жидкостному), но и дру-

гие силы сопротивления, которые зависят от обобщенной скорости $\dot{q}$. При определении приведенного коэффициента жесткости c учитываются не только силы упругости, но и другие силы, линейно зависящие от обобщенной координаты q . Постоянные члены входят в выражение составляющей обобщенной силы $Q(t)$.

Безразмерное уравнение движения механизма. Для рассмотрения не отдельного, частного механизма, а группы механизмов переменные, входящие в уравнение движения механизма, представляют в безразмерной форме. За модули измерения обобщенной координаты и обобщенной силы принимают их средние, номинальные или максимальные значения q_c и Q_c . Безразмерные переменные обозначим через $y = q/q_c$ и $x = Q(t)/Q_c$. Тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx, \quad (3.2)$$

где постоянные коэффициенты $T_2 = \sqrt{a/c}$ и $T_1 = b/c$ имеют размерность времени и потому называются *постоянными времени*; $k = Q_c/(cq_c)$ — передаточный коэффициент или коэффициент усиления.

Изменения обобщенных координат (перемещения точек звеньев) происходят в механизмах под действием заданных сил. Поэтому переменную x (безразмерную силу) при исследовании динамики механизмов часто называют *входной величиной*, а переменную y (безразмерное перемещение) — *выходной величиной* или *откликом системы*. Иногда переменную y называют также *реакцией системы* на воздействие x .

Типовые линейные уравнения движения механизмов с постоянными коэффициентами. При частных значениях постоянных времени T_1 и T_2 получаем частные виды уравнения (3.2). Среди них выделим типовые уравнения, часто встречающиеся при рассмотрении динамики механизмов:

*уравнение первого порядка аperiodического типа *)*

$$T_1 \dot{y} + y = kx; \quad (3.3)$$

*) В теории автоматического управления говорят не о типе уравнений, а о «динамических звеньях», движение которых описывается данным уравнением. Например: аperiodическое звено, колебательное звено и т. д.

уравнение второго порядка аperiодического типа

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx, \quad \text{где } T_1 \geq 2T_2; \quad (3.4)$$

уравнение колебательного типа

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx, \quad \text{где } T_1 < 2T_2; \quad (3.5)$$

уравнение консервативного типа

$$T_2^2 \ddot{y} + y = kx. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.3) и (3.4) называются *уравнениями аperiодического типа* потому, что при $x = 0$ выходная величина y изменяется во времени монотонно в отличие от уравнения колебательного типа (3.5), в котором y периодически возрастает и убывает. Уравнение (3.6), частный случай уравнения (3.5), названо *консервативным*, так как в нем отсутствует член, зависящий от скорости и выражающий действие диссипативных сил.

§ 12. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *Однородным дифференциальным уравнением* называется дифференциальное уравнение без правой части. Линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \quad (3.7)$$

Общее решение этого уравнения есть сумма слагаемых, вид которых определяется значениями корней характеристического уравнения

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0. \quad (3.8)$$

Каждому вещественному корню r_j соответствует слагаемое

$$y_j = C_j e^{r_j t}, \quad (3.9)$$

каждой паре сопряженных комплексных корней $r_k = \alpha_k \pm i\lambda_k$ — слагаемое

$$y_k = e^{\alpha_k t} (C_{1k} \cos \lambda_k t + C_{2k} \sin \lambda_k t) \quad (3.10)$$

или

$$y_k = C_k e^{\alpha_k t} \sin(\lambda_k t + \theta_k), \quad (3.11)$$

где

$$C_k = \sqrt{C_{1k}^2 + C_{2k}^2}, \quad \theta_k = \arctg \frac{C_{1k}}{C_{2k}}.$$

В случае кратных корней кратности k вместо произвольных постоянных имеем полиномы $P(t)$ степени $k-1$. Например, при $n=2$ и $r_1=r_2=r$ получаем

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{rt}. \quad (3.12)$$

К однородному дифференциальному уравнению можно привести уравнение с постоянной величиной в правой части:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = d$$

путем подстановки

$$y = y_1 + \frac{d}{a_n}. \quad (3.13)$$

Имея в виду, что $\dot{y} = \dot{y}_1$, $\ddot{y} = \ddot{y}_1$ и т. д., после подстановки получаем

$$a_0 \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_1 \frac{d^{(n-1)} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_1}{dt} + a_n y_1 = 0.$$

Операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, т. е. уравнения с правой частью, может быть представлено суммой

$$y = y_1 + y_2,$$

где y_1 — решение однородного уравнения, y_2 — частное решение уравнения с правой частью. В задачах динамики механизмов частное решение y_2 зависит от характеристик обобщенных сил, и отыскание его часто представляется затруднительным. Поэтому для решения линейных дифференциальных уравнений с правой частью предпочитают *операторный* (по другой терминологии — *операционный*) *метод решения*, основанный на применении *преобразования Лапласа*.

Идея этого метода применительно к решению системы дифференциальных уравнений с заданными функциями

$x_i(t)$ и неизвестными $y_i(t)$ состоит в том, что функции $x_i(t)$ и $y_i(t)$, называемые *оригиналами*, по определенному правилу (правилу преобразования Лапласа) заменяются функциями $X_i(s)$ и $Y_i(s)$ комплексного переменного s , которые называются *изображениями* данных функций (оригиналов). В результате этой замены уравнение, дифференциальное относительно $x_i(t)$ и $y_i(t)$, превращается в алгебраическое относительно $X_i(s)$ и $Y_i(s)$. После решения алгебраических уравнений, т. е. после нахождения функций $Y_i(s)$ по известным функциям $X_i(s)$, возвращаемся к оригиналам $y_i(t)$ и получаем искомое решение.

Оригинал $f(t)$ связан с изображением $F(s)$ соотношением (преобразованием Лапласа)

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

где $s = c + bi$; c и b — постоянные.

Подставляя в это соотношение простейшие функции и вычисляя интеграл $F(s)$, получаем табл. 1, по которой можно находить изображение по оригиналу и наоборот. В табл. 1 кроме изображений простейших функций даны изображения тех функций, которые являются решениями дифференциальных уравнений движения, часто встречающихся в динамике механизмов.

При переходе от оригинала к изображению надо также учитывать свойства линейности этого перехода:

$$\begin{aligned} L[f_1(t) + f_2(t)] &= F_1(s) + F_2(s), \\ L[kf(t)] &= kF(s), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где L — символ перехода от оригинала к изображению.

При дифференцировании оригинала используются формулы:

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f_0(t), \quad (3.15)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2 F(s) - [sf_0(t) + \dot{f}_0(t)], \quad (3.16)$$

$$L\left[\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right] = s^3 F(s) - [s^2 f_0(t) + s\dot{f}_0(t) + \ddot{f}_0(t)], \quad (3.17)$$

где $f_0(t)$, $\dot{f}_0(t)$ и $\ddot{f}_0(t)$ — значения $f(t)$, $\dot{f}(t)$ и $\ddot{f}(t)$ при $t = 0$.

Т а б л и ц а 1

Номер по порядку	Оригинал ($t > 0$)	Изображение
1	k	$\frac{k}{s}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$
4	$\cos \lambda t$	$\frac{s}{s^2 + \lambda^2}$
5	$t \sin \lambda t$	$\frac{2\lambda s}{(s^2 + \lambda^2)^2}$
6	$\sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t$	$\frac{2\lambda^3}{(s^2 + \lambda^2)^2}$
7	$\lambda t - \sin \lambda t$	$\frac{\lambda^3}{s^2 (s^2 + \lambda^2)}$
8	$\cos \omega t - \cos \lambda t$	$\frac{s(\lambda^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \lambda^2)}$
9	$\lambda \sin \omega t - \omega \sin \lambda t$	$\frac{\lambda \omega (\lambda^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \lambda^2)}$
10	$e^{-\gamma t} \sin \lambda_* t$	$\frac{\lambda_*}{s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 + \lambda_*^2}$
11	$e^{-\gamma t} \cos \lambda_* t$	$\frac{s + \gamma}{s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 + \lambda_*^2}$
12	$e^{-\gamma t} \omega \sin(\lambda_* t + \theta_1) +$ $+ \lambda_* \sin(\omega t - \theta_2)$ $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2\gamma \lambda_*}{\gamma^2 - \lambda_*^2 - \omega^2}$ $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2\gamma \omega}{\gamma^2 + \lambda_*^2 - \omega^2}$	$\lambda_* \omega R / [(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 + \lambda_*^2)]$ $R = [(\gamma^2 + \lambda_*^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}$

§ 13. Решение линейных уравнений движения при свободных колебаниях

Основные термины и определения теории механических колебаний. *Механическими колебаниями* (сокращенно — *колебаниями*) называют движение механической системы, при котором хотя бы одна из обобщенных координат или их производных поочередно возрастает и убывает во времени. Различают *свободные колебания*, происходящие без переменного внешнего воздействия и поступления энергии извне, и *вынужденные*, вызванные и поддерживаемые переменной во времени внешней силой (*вынуждающей силой*).

Колебания называются *периодическими*, если состояние механической системы, определяемое значениями обобщенных координат и их производных, повторяется через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени, через который повторяется состояние механической системы, называется *периодом колебаний*. Величина, обратная периоду колебаний, называется *частотой колебаний*. Если период колебаний t_k измерять в секундах, то частота колебаний $f = 1/t_k$ получается в герцах (Гц) с размерностью 1/с. Иначе частоту колебаний можно определить как число периодов в единицу времени. При свободных колебаниях частота зависит только от собственных свойств системы (но не от сил) и поэтому называется *собственной частотой*.

Простейшим видом периодических колебаний являются гармонические колебания, при которых обобщенная координата механической системы q прямо пропорциональна синусу от аргумента, линейно зависящего от времени:

$$q = A \sin(\omega t + \theta),$$

где A — *амплитуда*, ω — *угловая частота*, $\omega t + \theta$ — *фаза*, θ — *начальная фаза*.

Угловая частота гармонических колебаний связана с периодом колебаний t_k соотношением $\omega = 2\pi/t_k$ или $\omega = 2\pi f$, где f — частота в Гц. Иначе — угловая частота есть число периодов в 2π единиц времени. Происхождение термина «угловая частота» связано с представлением гармонических колебаний в виде изменения проекции на ось y вектора длиной A , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω (рис. 20). Начальная фаза θ определяет положение вектора при $t = 0$. В дальнейшем, если не ого-

ворено, под термином «частота» понимается угловая частота.

Общее решение уравнения движения колебательного типа при свободных колебаниях. При исследовании колебаний в механизмах предпочитают в уравнении движения иметь коэффициент при старшей производной, равный единице. Тогда уравнение движения (3.1) принимает вид

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \lambda^2 q = Q(t)/a, \quad (3.18)$$

где $\gamma = b/(2a)$ — коэффициент демпфирования, $\lambda^2 = c/a$ — квадрат собственной частоты. Соответственно безразмерное уравнение движения колебательного типа (3.5) получает вид

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1 x, \quad (3.19)$$

где

$$y = q/q_c, \quad x = Q(t)/Q_c, \\ k_1 = Q_c/(aq_c).$$

При свободных колебаниях ($x = 0$) характеристическое уравнение (3.8)

$$r^2 + 2\gamma r + \lambda^2 = 0$$

имеет при $\gamma < \lambda$ пару сопряженных комплексных корней

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}.$$

Общее решение уравнения (3.19) согласно (3.10) и (3.11) имеет вид

$$y = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \lambda_* t + C_2 \sin \lambda_* t) \quad (3.20)$$

или

$$y = C e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta), \quad (3.21)$$

где $\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}$; C_1, C_2 (или C, θ) — постоянные, определяемые из начальных условий.

При начальных условиях ($t = 0, y = y_0, \dot{y} = \dot{y}_0$) постоянные C_1 и C_2 имеют значения

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = (\dot{y}_0 + \gamma y_0)/\lambda_*.$$

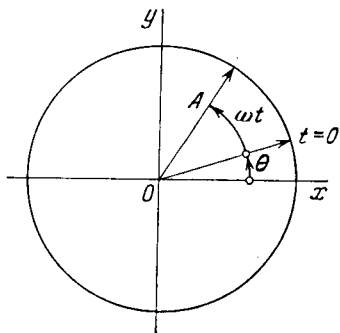


Рис. 20

При тех же начальных условиях постоянные C и θ имеют значения

$$C = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + \gamma y_0)^2}{\lambda_*^2}}; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \lambda_*}{y_0 + \gamma y_0}.$$

Для уравнения консервативного типа, т. е. при $\gamma = 0$, имеем

$$y = y_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} \sin \lambda t$$

или

$$y = A \sin(\lambda t + \theta), \quad (3.22)$$

где

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\lambda^2}}; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \lambda}{\dot{y}_0}.$$

Следовательно, в этом случае колебания являются гармоническими и частота колебаний λ есть собственная частота механизма.

Для уравнения колебательного типа при $\gamma \neq 0$ решение (3.21) может быть записано в виде

$$y = A_* \sin(\lambda_* t + \theta), \quad (3.23)$$

$$\text{где } A_* = e^{-\gamma t} \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + \gamma y_0)^2}{\lambda_*^2}}; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \lambda_*}{y_0 + \gamma y_0}.$$

Переменный коэффициент A_* , называемый *амплитудой затухающих колебаний*, уменьшается до нуля при $t \rightarrow \infty$, так как показатель степени при e — отрицательный. Уменьшение амплитуды характеризуется *логарифмическим декрементом*, под которым понимается натуральный логарифм отношения двух последовательных максимальных (минимальных) значений амплитуды затухающих колебаний.

Затухающие колебания, описываемые уравнением (3.23), не являются периодическими, так как амплитуда A_* есть функция времени. Однако значения функции $\sin(\lambda_* t + \theta)$ повторяются через равные промежутки времени $t_* = 2\pi/\lambda_*$. Величину t_* можно назвать условным периодом линейных затухающих колебаний. Соответственно постоянную величину

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}$$

называют частотой линейных затухающих колебаний или собственной частотой механизма с демпфированием. С увеличением коэффициента демпфирования γ амплитуда A_* уменьшается, и при $\gamma \geq \lambda$ (или $b^2 \geq 4ac$) уравнение движения переходит в уравнение аperiодического типа. Значение коэффициента демпфирования, при превышении которого в механизме не возникают колебания, называют критическим коэффициентом демпфирования

$$\gamma_k = \lambda \equiv \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (3.24)$$

Решение уравнения колебательного типа при ступенчатом изменении обобщенной силы. Свободные колебания могут быть и при постоянной обобщенной силе, если в начальный момент времени был скачок модуля этой силы от Q_0 до Q_c . Тогда уравнение движения (3.18) приводит

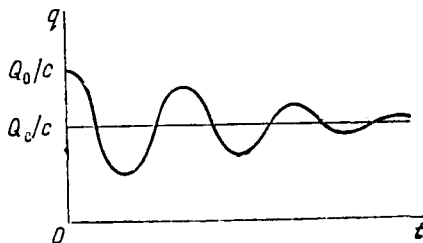


Рис. 21

к однородному относительно новой переменной q_1 подстановкой типа (3.13)

$$q = q_1 + \frac{Q_c}{c}. \quad (3.25)$$

Если движение начинается из положения статического равновесия, то начальные условия имеют вид: $q_0 = Q_0/c$, $\dot{q}_0 = 0$. После перехода к новой переменной q_1 получаем

$$q_{10} = q_0 - \frac{Q_c}{c}, \quad \dot{q}_{10} = 0.$$

Подставляя значения q_{10} и $\dot{q}_{10}$ в решение (3.23) при $y = q_1$, $y_0 = q_{10}$, $\dot{y}_0 = 0$ и учитывая подстановку (3.25), находим решение уравнения (3.18) при ступенчатом

изменении обобщенной силы

$$q = A_* \sin(\lambda_* t + \theta) + \frac{Q_c}{c}, \quad (3.26)$$

где $A_* = e^{-\gamma t} \frac{Q_0 - Q_c}{c} \frac{\lambda}{\lambda_*}$, $\theta = \arctg \frac{\lambda_*}{\gamma}$.

При $t \rightarrow \infty$ обобщенная координата q стремится к значению $q_c = Q_c/c$, соответствующему новому положению равновесия (рис. 21).

§ 14. Решение линейных уравнений движения при вынужденных колебаниях

Решения уравнения движения консервативного типа при гармоническом возбуждении. Колебания могут возбуждаться или приложением внешних сил, переменных во времени и не зависящих от состояния системы (*силовое возбуждение*), или сообщением извне принудительного движения каким-либо точкам системы (*кинематическое возбуждение*). Силовое возбуждение колебаний вызывается, например, переменной силой, изменяющейся во времени по синусоидальному закону (*гармоническое возбуждение*). Кинематическое возбуждение колебаний вызывается, например, движением профиля кулачка, воздействующего на упругое выходное звено, или движением стойки механизма, совершающей колебания по заданному (известному) закону.

Пусть безразмерная обобщенная сила в уравнении (3.19) $x = \sin \omega t$. Изображение этой функции по табл. 1 (п. 3 с заменой λ на ω)

$$X = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Обозначая через Y изображение функции y , получаем по формулам (3.15) и (3.16) при начальных условиях ($t = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$):

$$L\dot{y} = sY - y_0, \quad L\ddot{y} = s^2 Y - sy_0 - \dot{y}_0.$$

Тогда уравнение (3.19) при $\gamma = 0$ и $x = \sin \omega t$ после замены оригиналов их изображениями принимает вид

$$s^2 Y - sy_0 - \dot{y}_0 + \lambda^2 Y = k_1 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 + \lambda^2} + k_1 \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \lambda^2)}.$$

Обратный переход к оригиналу y по табл. 1 (п. 3, 4 п 9) дает

$$y = y_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{k_1 \omega}{\lambda(\lambda^2 - \omega^2)} \sin \lambda t + \frac{k_1}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (3.27)$$

Решение (3.27) представляет собой сумму четырех слагаемых. Первые два слагаемых описывают свободные колебания с частотой λ . При нулевых начальных условиях $y_0 = \dot{y}_0 = 0$ эти слагаемые равны нулю. Третье слагаемое описывает гармонические колебания, происходящие с собственной частотой λ , но с амплитудой, зависящей от частоты вынуждающей силы. Эти колебания сопровождают вынужденные, и их называют *свободными сопровождающими колебаниями*. Четвертое слагаемое описывает вынужденные колебания с частотой ω и амплитудой

$$A = \frac{k_1}{\lambda^2 - \omega^2}. \quad (3.28)$$

При $\omega < \lambda$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой ωt вынуждающей силы, при $\omega > \lambda$ четвертое слагаемое в решении (3.27) должно иметь вид

$$\frac{k_1}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \pi),$$

т. е. фаза вынужденных колебаний противоположна фазе вынуждающей силы. Отсюда следует, что амплитуда вынужденных колебаний при любых соотношениях между ω и λ определяется выражением

$$A = \frac{k_1}{|\lambda^2 - \omega^2|}. \quad (3.29)$$

Решение уравнения колебательного типа при гармоническом возбуждении. При $\gamma \neq 0$ и $x = \sin \omega t$ уравнение (3.19) после замены оригиналов их изображениями имеет вид

$$s^2 Y - sy_0 - \dot{y}_0 + 2\gamma s Y - 2\gamma y_0 + \lambda^2 Y = k_1 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{sy_0 + \dot{y}_0 + 2\gamma y_0}{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2} + k_1 \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2)}.$$

Обратный переход к оригиналу y по табл. 1 (п. 10, 11, 12) дает

$$y = e^{-\gamma t} \left(y_0 \cos \lambda_* t + \frac{\gamma y_0 + \dot{y}_0}{\lambda_*} \sin \lambda_* t \right) + e^{-\gamma t} \frac{k_1 \omega}{\lambda_* R} \sin(\lambda_* t + \theta_1) + \frac{k_1}{R} \sin(\omega t - \theta_2), \quad (3.30)$$

где $\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}$, $R = \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$,

$$\theta_1 = \arctg \frac{2\gamma \lambda_*}{\gamma^2 - \lambda_*^2 + \omega^2}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{2\gamma \omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

С течением времени свободные и сопровождающие колебания затухают, и амплитуда колебаний, называемых *установившимися (стационарными)*, определяется выражением

$$A = \frac{k_1}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (3.31)$$

Метод комплексных амплитуд. Во многих механизмах внешние силы, действующие на звенья механизма, являются периодическими функциями времени, которые посредством разложения в ряды Фурье могут быть представлены в виде суммы гармоник различных частот. Для решения линейных уравнений движения при этих воздействиях (силах) используется принцип суперпозиции, согласно которому искомое решение является суммой решений, получаемых от воздействия каждой гармоники. В свою очередь каждая гармоника обобщенной силы с частотой ω представляется суммой двух членов, один из которых пропорционален $\cos \omega t$, а другой — $\sin \omega t$. В предыдущем примере было показано, что вынуждающая сила, пропорциональная $\sin \omega t$, после затухания свободных колебаний приводит к гармоническим колебаниям по закону $A \sin(\omega t - \theta_2)$, где θ_2 — сдвиг фаз между силой и перемещением. Аналогично при вынуждающей силе, пропорциональной $\cos \omega t$, получаем гармонические колебания по закону $A \cos(\omega t - \theta_2)$. Оба случая можно объединить, если безразмерную вынуждающую силу считать

комплексной величиной

$$x(i\omega) = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

или в показательной форме

$$x(i\omega) = e^{i\omega t}. \quad (3.32)$$

Безразмерную обобщенную координату также представим комплексной величиной

$$y(i\omega) = A e^{i(\omega t + \theta)}, \quad (3.33)$$

где A — амплитуда гармонических колебаний, θ — начальная фаза.

Комплексную величину (3.33) можно преобразовать к виду

$$y(i\omega) = A e^{i\theta} e^{i\omega t}$$

или

$$y(i\omega) = A(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (3.34)$$

где $A(i\omega) = A e^{i\theta}$ — *комплексная амплитуда гармонических колебаний*, т. е. комплексная величина, модуль которой равен амплитуде, а аргумент — начальной фазе гармонических колебаний.

Из сопоставлений формул (3.32) и (3.33) следует, что угол θ равен сдвигу фаз между перемещением $y(i\omega)$ и вынуждающей силой $x(i\omega)$, так как начальная фаза в выражении для $x(i\omega)$ принята равной нулю. В общем случае начальная фаза для $x(i\omega)$ может отличаться от нуля, и тогда аналогично комплексной амплитуде гармонических колебаний вводится *комплексная амплитуда вынуждающей силы*. Однако принимать начальные фазы, отличные от нуля, для вынуждающих сил целесообразно только в случаях, когда на систему действуют несколько сил, отличающихся по фазе.

Использование комплексных величин в показательной форме для решения линейных уравнений движения покажем на примере решения уравнения (3.19), в котором действительные величины x и y заменим на комплексные величины $x(i\omega)$ и $y(i\omega)$:

$$\ddot{y}(i\omega) + 2\gamma\dot{y}(i\omega) + \lambda^2 y(i\omega) = k_1 x(i\omega). \quad (3.35)$$

Частное решение уравнения (3.35) при $x(i\omega)$ по выражению (3.32) ищем в виде $y(i\omega)$ по (3.34). В этом случае

$$\dot{y}(i\omega) = i\omega A(i\omega) e^{i\omega t}; \quad \ddot{y}(i\omega) = (i\omega)^2 A(i\omega) e^{i\omega t}.$$

После подстановки выражений для $x(i\omega)$, $y(i\omega)$, $\dot{y}(i\omega)$ и $\ddot{y}(i\omega)$ в уравнение (3.35) и сокращения всех членов на $e^{i\omega t}$ получаем

$$-A(i\omega)\omega^2 + 2\gamma A(i\omega) + \lambda^2 A(i\omega) = k_1. \quad (3.36)$$

Заметим, что уравнение (3.36) получается из исходного дифференциального уравнения (3.35) заменой оператора дифференцирования d/dt множителем $i\omega$ и оператора d^2/dt^2 множителем $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Кроме того, переменные $x(i\omega)$ и $y(i\omega)$ заменяются их амплитудами. В результате этих замен дифференциальное уравнение (3.35) переходит в алгебраическое относительно комплексной амплитуды $A(i\omega)$. Решая алгебраическое уравнение (3.36), получаем

$$A(i\omega) = \frac{k_1}{-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2}. \quad (3.37)$$

Для того чтобы отделить действительную часть от мнимой, умножаем числитель и знаменатель соотношения (3.37) на комплексное число, сопряженное со знаменателем, т. е. на $\lambda^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega$, и получаем

$$A(i\omega) = k_1 \frac{\lambda^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

или

$$A(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = k_1 \frac{\lambda^2 - \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \quad V(\omega) = k_1 \frac{-2\gamma\omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Модуль комплексной амплитуды дает амплитуду гармонических колебаний

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{k_1}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Начальная фаза гармонических колебаний находится из соотношения

$$\theta = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{-2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Следовательно, искомое решение уравнения (3.35) в комплексном виде:

$$y(i\omega) = k_1 \frac{e^{i(\omega t - \theta)}}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

или

$$y(i\omega) = k_1 \frac{\cos(\omega t - \theta) + i \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}},$$

где $\theta = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}$.

Действительная часть этого решения дает решение уравнения (3.19) при $x = \cos \omega t$:

$$y = k_1 \frac{\cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \text{где } \theta = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Мнимая часть соответственно дает решение уравнения (3.19) при $x = \sin \omega t$:

$$y = k_1 \frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \text{где } \theta = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Это решение совпадает с решением (3.30) при $\theta = 0$, после затухания свободных колебаний.

§ 15. Решение линейных уравнений движения с переменными коэффициентами

Уравнения движения многих механизмов могут быть представлены линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. К этим механизмам в первую очередь относятся те механизмы, для которых инерционные коэффициенты (приведенные массы и моменты инерции), входящие в выражение кинетической энергии, представлены переменными величинами. Однако переменные коэффициенты в дифференциальном уравнении движения механизма могут появиться и при постоянной приведенной массе, если на механизм действуют силы, зависящие одновременно от положения звеньев и от времени.

Линейное дифференциальное уравнение, не содержащее первую производную. Пусть, например, дифференциальное уравнение движения механизма с одной степенью свободы представлено уравнением

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = F(t), \quad (3.38)$$

где q — обобщенная координата механизма.

Это уравнение может быть приведено к дифференциальному уравнению, не содержащему первой производной,

если применить подстановку

$$q = E(t)y,$$

где $E(t) = \exp \left[- \int_0^t n(t) dt \right] \quad (\exp u = e^u).$

Тогда

$$\dot{q} = E(t)[\dot{y} - n(t)y],$$

$$\ddot{q} = E(t)[\ddot{y} - 2n(t)\dot{y} + n^2(t)y - \dot{n}(t)y].$$

Подставляя значения q , $\dot{q}$, $\ddot{q}$ в уравнение (3.38) и поделив обе части этого уравнения на $E(t) \neq 0$, получаем

$$\ddot{y} + p^2(t)y = f(t), \quad (3.39)$$

где

$$p^2(t) = k^2(t) - n^2(t) - \dot{n}(t),$$

$$f(t) = F(t) \exp \left[\int_0^t n(t) dt \right].$$

Уравнение Матье. К частным видам уравнения (3.39) относится уравнение Матье, в котором $f(t)$ есть периодическая функция, а $p^2(t)$ — гармоническая функция. Например, при исследовании динамики шарнирных механизмов с упругими звеньями уравнения движения в некоторых случаях приводятся к уравнению Матье

$$\ddot{y} + (a - 2d \cos 2t)y = f(t), \quad (3.40)$$

где a, d — постоянные величины.

Общее решение уравнения Матье может быть получено с применением специальных функций Матье или же посредством разложения в ряды Фурье.

Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса, Бриллюэна). При исследовании периодических движений в механизмах могут быть случаи, когда в уравнении движения типа (3.39) функции $p^2(t)$ и $f(t)$ медленно изменяются во времени. Тогда функцию $p(t)$ по аналогии с уравнением консервативного типа (3.6) можно рассматривать как медленно изменяющуюся собственную частоту. При этом допущении приближенное решение однородного уравнения

$$\ddot{y} + p^2(t)y = 0 \quad (3.41)$$

разыскивается в виде

$$y = p^{-0,5} \left(C_1 \cos \int p dt + C_2 \sin \int p dt \right). \quad (3.42)$$

Отсюда

$$\dot{y} = -0,5p^{-1,5}\dot{p}\left(C_1 \cos \int p dt + C_2 \sin \int p dt\right) + \\ + p^{0,5}\left(-C_1 \sin \int p dt + C_2 \cos \int p dt\right),$$

или

$$\dot{y} = -0,5p^{-1}\dot{p}y - p^{0,5}\left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt\right); \\ \ddot{y} = 0,5p^{-2}\dot{p}y - 0,5p^{-1}\ddot{p}y - 0,5p^{-1}\dot{p}\dot{y} - \\ - 0,5p^{-0,5}\dot{p}\left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt\right) - \\ - p^{1,5}\left(C_1 \cos \int p dt + C_2 \sin \int p dt\right),$$

или

$$\ddot{y} = 0,5p^{-2}\dot{p}^2y - 0,5p^{-1}\ddot{p}y + 0,25p^{-2}\dot{p}^2y + \\ + 0,5p^{-0,5}\dot{p}\left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt\right) - \\ - 0,5p^{-0,5}\dot{p}\left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt\right) - p^2y.$$

Следовательно,

$$\ddot{y} + (p^2 - 0,75p^{-2}\dot{p}^2 + 0,5p^{-1}\ddot{p})y = 0. \quad (3.43)$$

Сравнивая уравнения (3.41) и (3.43), видим, что выражение (3.42) может быть приближенно принято за решение уравнения (3.41), если

$$-0,75p^{-2}\dot{p}^2 + 0,5p^{-1}\ddot{p} \approx 0$$

или

$$\left| \frac{0,5\ddot{p}}{p^3} - 0,75 \left(\frac{\dot{p}}{p^2} \right)^2 \right| \ll 1. \quad (3.44)$$

Постоянные C_1 и C_2 в выражении (3.42) находятся из начальных условий $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$:

$$y_0 = p_0^{-0,5}C_1, \quad \dot{y}_0 = -0,5p_0^{-1}\dot{p}_0y_0 + C_2p_0^{0,5},$$

где $p_0 = p(0)$ и $\dot{p}_0 = \dot{p}(0)$.

Отсюда

$$C_1 = p_0^{0,5}y_0, \quad C_2 = \dot{y}_0p_0^{-0,5} + 0,5p_0^{-1,5}\dot{p}_0y_0,$$

и приближенное решение однородного уравнения (3.41)

припускает вид

$$y = \sqrt{\frac{p_0}{p}} y_0 \cos \int_0^t p dt + \frac{1}{\sqrt{p p_0}} \left(\dot{y}_0 + \frac{0,5 \dot{p}_0}{p_0} y_0 \right) \sin \int_0^t p dt, \quad (3.45)$$

Приближенное решение неоднородного уравнения (3.40) может быть представлено как сумма решения (3.45) и частного решения

$$y_* = \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{p(\tau)}} \sin \int_{\tau}^t p(\xi) d\xi d\tau,$$

где ξ — переменная интегрирования [6].

Глава IV. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 16. Линеаризация нелинейных характеристик сил

Линеаризация на малых участках характеристики. При малых перемещениях x нелинейная характеристика силы $F(x)$ может быть линеаризована в окрестности некоторой величины $x = x_0$, находящейся внутри рассматри-

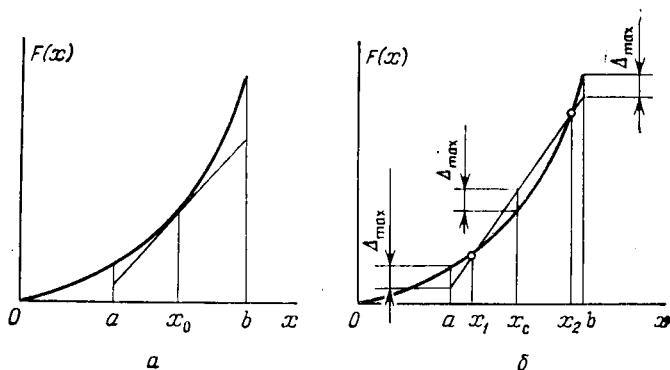


Рис. 22

ваемого отрезка $[a, b]$ изменения x , на основании разложения функции $F(x)$ в ряд Тейлора по степеням отклонения $\Delta(x)$ (рис. 22, а). Ограничиваясь первыми двумя

членами этого ряда, получаем

$$F(x_0 + \Delta x) \approx F(x_0) + F'(x_0)\Delta x, \quad (4.1)$$

где $F'(x)$ — производная от $F(x)$ по x .

Геометрическое условие (4.1) означает, что на нелинейной характеристике в окрестности точки $x = x_0$ кривая $F(x)$ замещается отрезком касательной в этой точке.

Линеаризация на больших участках характеристики. В этом случае для замены кривой $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ прямой линией следует применять методы приближения функций, которые в курсах теории механизмов и машин рассматриваются при изложении методов синтеза механизмов [14]. Здесь же ограничимся изложением двух простейших способов. По первому способу на отрезке $[a, b]$ ближе к его концам выбираются две точки с абсциссами x_1 и x_2 , и через эти точки проводится искомая прямая, замещающая характеристику на выбранном отрезке (рис. 22, б). Этот способ соответствует линейному интерполированию кривой по двум точкам

$$F(x_1) = kx_1 + d, \quad F(x_2) = kx_2 + d, \quad (4.2)$$

где k — угловой коэффициент прямой, d — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

Из линейной системы (4.2) находим величины k и d , определяющие искомую линеаризацию на участке $[a, b]$:

$$F(x) = kx + d.$$

При произвольном выборе абсцисс x_1 и x_2 отклонение прямой линии от заданной кривой по концам отрезка $[a, b]$ и максимальное отклонение внутри этого отрезка в общем случае оказываются не равными между собой. Путем изменения абсцисс x_1 и x_2 можно достичь равенства указанных отклонений, и тогда на основании теории равномерного (наилучшего) приближения функций максимальное отклонение будет минимальным (приближение по Чебышеву). Отсюда следует второй способ линеаризации, который приводит к решению системы четырех уравнений:

$$\begin{aligned} F(a) &= ka + d + \Delta_{\max}, \\ F(x_c) &= kx_c + d - \Delta_{\max}, \\ F(b) &= kb + d + \Delta_{\max}, \\ F'(x_c) &= k, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\Delta_{\max}$ — максимальная величина отклонения прямой от заданной кривой, x_c — абсцисса точки кривой $F(x)$ внутри отрезка $[a, b]$, в которой достигается величина $\Delta_{\max}$ (см. рис. 22, б).

Вместо решения системы (4.3) можно с достаточной точностью воспользоваться графическим построением искомой прямой по условию равенства максимальных отклонений с последовательным чередованием знаков. При аналитическом определении коэффициентов k и d можно также применить условия квадратического приближения, при котором минимизируется среднеквадратическое отклонение.

§ 17. Метод гармонического баланса и метод Галеркина

Метод гармонического баланса. Линеаризация отдельных членов нелинейного уравнения движения механизма позволяет привести его к линейному виду, но получаемые при этом приближенные решения оказываются близкими к точным только в тех пределах изменения обобщенных координат и скоростей, которые были приняты при линеаризации. Обычно эти пределы соответствуют малым колебаниям около положения равновесия, и потому методы линеаризации, рассмотренные в предыдущем параграфе, как правило, не пригодны для исследования периодических движений с достаточно широкими пределами изменения обобщенных координат и скоростей. В этих случаях удобнее методы, основанные на приближенной замене нелинейного уравнения движения механизма линейным уравнением определенного типа, решение которого предположительно является близким к искомому решению.

Рассмотрим, например, нелинейное уравнение движения второго порядка

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t), \quad (4.4)$$

где q — обобщенная координата, $F(t)$ — функция с периодом T и угловой частотой $\omega = 2\pi/T$.

Предположим, что решение уравнения (4.4) будет периодическим с угловой частотой ω . Тогда наиболее простой формой этого решения будет решение, соответствующее гармоническому движению с угловой частотой ω :

$$q^* = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t. \quad (4.5)$$

Требуется найти коэффициенты a_0 , a_1 и b_1 , при которых решение (4.5) будет близко к точному решению уравнения (4.4). С этой целью представим функции $f(q, \dot{q})$ и $F(t)$ в виде усеченных рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(q, \dot{q}) &\approx \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t, \\ F(t) &\approx A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(q, \dot{q}) dt, & A_0 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) dt, \\ \alpha_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(q, \dot{q}) \cos \omega t dt, & A_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \cos \omega t dt, \\ \beta_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(q, \dot{q}) \sin \omega t dt, & B_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение (4.4) приближенные выражения (4.6), полагая

$$\begin{aligned} q &= q^*, & \dot{q} &= -a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t, \\ \ddot{q} &= -a_1 \omega^2 \cos \omega t - b_1 \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда, приравнявая коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в левой и правой частях уравнения (4.4), получаем систему уравнений для определения неизвестных a_0 , a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi, -a_1 \omega \sin \psi + b_1 \omega \cos \psi) d\psi &= A_0, \\ -a_1 \omega^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi, -a_1 \omega \sin \psi + & \\ + b_1 \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi &= A_1, \\ -b_1 \omega^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi, -a_1 \omega \sin \psi + & \\ + b_1 \omega \cos \psi) \sin \psi d\psi &= B_1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\psi = \omega t$.

Метод Галеркина. Приближенное решение нелинейного уравнения, получаемое по методу гармонического баланса, будет близко к точному только при условии, что

форма предполагаемого решения выбрана удачно, т. е. движение близко к гармоническому. Большие возможности для выбора формы предполагаемого решения уравнения (4.4) предоставляет *метод Галеркина*, согласно которому искомое приближенное решение можно выбирать из семейства функций, зависящих от l независимых параметров:

$$q^* = q^*(t, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad (4.9)$$

причем все функции, принадлежащие этому семейству, являются периодическими с периодом T , равным периоду функции $F(t)$ в уравнении (4.4).

Для вывода условий, которым должны удовлетворять параметры $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, рассмотрим соотношение

$$\int_0^T \{ \ddot{q}(t) + f[q(t), \dot{q}(t)] - F(t) \} [q_1(t) - q(t)] dt = 0, \quad (4.10)$$

где q — точное периодическое решение уравнения (4.4) с периодом T , q_1 — произвольная непрерывная периодическая функция того же периода.

Справедливость этого соотношения следует из того, что выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю. На основании принципа Гамильтона — Остроградского можно утверждать и обратное: если условие (4.10) выполняется для любой непрерывной функции $q_1(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$|q_1(t) - q(t)| < \mu,$$

где μ — любое заданное сколь угодно малое положительное число, то q — точное периодическое решение уравнения (4.4).

Обозначим через $\gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0$ значения параметров функции (4.9), соответствующие искомому приближенному решению. Тогда бесконечно близким к этому решению функциям q_1^* должны соответствовать бесконечно близкие значения параметров, т. е.

$$q_1^*(t) = q_1(t, \gamma_1^0 + \delta\gamma_1 + \dots + \gamma_l^0 + \delta\gamma_l),$$

где $\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_l$ — вариации параметров.

Следовательно, с точностью до малых высшего порядка

$$q_1^* - q^*(t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)}{\partial \gamma_i} \delta\gamma_i,$$

и соотношение (4.10) принимает вид

$$\int_0^T \{ \ddot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0) + \\ + f[q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0), \dot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)] - F(t) \} \times \\ \times \sum_{i=1}^l \frac{\partial q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)}{\partial \gamma_i} \delta \gamma_i dt = 0. \quad (4.11)$$

Соотношение (4.11), справедливое при любых комбинациях $\delta \gamma_i$, дает систему уравнений для определения неизвестных параметров γ_i , если последовательно считать все вариации $\delta \gamma_i$ равными нулю, кроме одной $\delta \gamma_k$:

$$\int_0^T \{ \ddot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0) + \\ + f[q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0), \dot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)] - F(t) \} \times \\ \times \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_k}(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0) dt = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (4.12)$$

Пример. Нелинейное уравнение, приближенное решение которого разыскивается, имеет вид

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t),$$

где $F(t)$ — периодическая функция с периодом T и угловой частотой $\omega = 2\pi/T$.

Предполагается, что движение будет близким к гармоническому и приближенное решение представляется функцией

$$q^* = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t,$$

т. е. искомые параметры γ_i для семейства функций (4.9) имеют значения $\gamma_1 = a_0$, $\gamma_2 = a_1$, $\gamma_3 = b_1$. Частные производные, входящие в уравнение (4.12):

$$\frac{\partial q^*}{\partial \gamma_1} = 1, \quad \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_2} = \cos \omega t, \quad \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_3} = \sin \omega t.$$

Следовательно, уравнения (4.12) для определения параметров a_0 , a_1 и b_1 с учетом соотношения (4.7) имеют

ВИД:

$$\int_0^{2\pi/\omega} [-\omega^2 (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + \\ + f(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, -a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t) - \\ - F(t)] dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} [-\omega^2 (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + \\ + f(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, -a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t) - \\ - F(t)] \cos \omega t dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} [-\omega^2 (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + \\ + f(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, -a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t) - \\ - F(t)] \sin \omega t dt = 0.$$

Система этих уравнений совпадает с системой (4.8), если сделать замену переменной интегрирования $\psi = \omega t$ и принять во внимание значения интегралов:

$$\int_0^{2\pi} (a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi) d\psi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi) \cos \psi d\psi = a_1 \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} (a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi) \sin \psi d\psi = b_1 \pi,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} F(t) dt = A_0 \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} F(t) \cos \omega t dt = A_1 \frac{\pi}{\omega},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} F(t) \sin \omega t dt = B_1 \frac{\pi}{\omega}.$$

Из приведенного примера видно, что метод гармонического баланса может рассматриваться как частный случай метода Галеркина.

§ 18. Метод малого параметра

Квазилинейные уравнения движения механизмов. Метод малого параметра или метод Пуанкаре применяется для исследования тех уравнений движения механизма, которые содержат малый параметр μ и имеют периодическое решение, когда этот параметр равен нулю. Из этих уравнений наибольшее значение имеют *квазилинейные уравнения*, в которые нелинейные члены входят умноженными на малый параметр μ . Происхождение термина связано с тем, что при $\mu = 0$ уравнение движения обращается в линейное, решение которого при соблюдении определенных условий близко к решению нелинейного уравнения и может быть уточнено путем введения малых поправок. Линейное уравнение, получаемое при $\mu = 0$, называется *порождающим*.

Определение периодических решений линейных дифференциальных уравнений. Для определения периодических решений квазилинейных уравнений надо в первую очередь знать периодические решения порождающих уравнений. В задачах динамики механизмов порождающее уравнение обычно имеет вид

$$\ddot{y} + a^2 y = f(t). \quad (4.13)$$

Для существования периодического решения необходимо, чтобы $f(t)$ была периодической функцией. Без ограничения общности можно считать период функции $f(t)$ равным 2π , так как при периоде, равном T , всегда можно перейти к новой независимой переменной $t_1 = 2\pi t/T$, при которой период становится равным 2π .

Условие периодичности решения уравнения (4.13) имеет вид

$$y(2\pi) = y(0), \quad \dot{y}(2\pi) = \dot{y}(0). \quad (4.14)$$

Из уравнений (4.14) можно найти две постоянные интегрирования в общем решении уравнения (4.13). Однако при этом приходится делать довольно громоздкие вычисления. Более простым является способ, основанный на разложении функции $f(t)$ в искомого периодического

решения $y(t)$ в ряды Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt), \quad (4.15)$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt, \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin nt dt. \end{aligned}$$

Для того чтобы определить неизвестные коэффициенты a_0, a_n, b_n по коэффициентам A_0, A_n, B_n заданной функции $f(t)$, дифференцируем ряд (4.16) почленно два раза и подставляем в уравнение (4.13):

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos nt + b_n \sin nt) + \\ + a^2 \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right] = f(t). \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты в левой части уравнения их значениям в разложении в ряд функции $f(t)$, получаем

$$a_0 = \frac{A_0}{a^2}, \quad a_n = \frac{A_n}{a^2 - n^2}, \quad b_n = \frac{B_n}{a^2 - n^2},$$

т. е. коэффициенты искомого периодического решения уравнения (4.13) отличаются от коэффициентов разложения в ряд функции $f(t)$ только множителем, не зависящим от t и монотонно стремящимся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Если коэффициент a мало отличается от некоторого целого числа n , то при $A_n \neq 0$ или $B_n \neq 0$ имеем резонанс, заключающийся в резком возрастании коэффициента a_n или b_n . Если же $a = n$ и хотя бы один из коэффици-

ентов A_n или B_n не равен нулю, то периодического решения нет, так как в общем решении уравнения (4.13) появляется непериодическое слагаемое вида $t(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Отсюда следует, что при $a = n$ периодическое решение уравнения (4.13) существует лишь в случае отсутствия в правой части членов $a_n \cos nt + b_n \sin nt$, т. е. при выполнении условий

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0. \quad (4.17)$$

Применение метода малого параметра для квазилинейных уравнений, в которых правая часть есть явная функция времени. Пусть квазилинейное уравнение имеет вид

$$\ddot{y} + a^2 y = f(t) + \mu F(t, y, \dot{y}, \mu). \quad (4.18)$$

Периодическое решение этого уравнения ищем в виде ряда

$$y(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots + \mu^n y_n(t) + \dots \quad (4.19)$$

Функцию $F(t, y, \dot{y}, \mu)$ также представляем в виде ряда по степеням $y - y_0$, $\dot{y} - \dot{y}_0$ и μ :

$$\begin{aligned} F(t, y, \dot{y}, \mu) = & F(t, y_0, \dot{y}_0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{\substack{y=y_0 \\ \dot{y}=\dot{y}_0 \\ \mu=0}} (y - y_0) + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_{\substack{y=y_0 \\ \dot{y}=\dot{y}_0 \\ \mu=0}} (\dot{y} - \dot{y}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{y=y_0 \\ \dot{y}=\dot{y}_0 \\ \mu=0}} \mu + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Дифференцируя ряд (4.19) почленно два раза, получаем

$$\ddot{y}(t, \mu) = \ddot{y}_0(t) + \mu \ddot{y}_1(t) + \dots + \mu^n \ddot{y}_n(t) + \dots \quad (4.21)$$

Подставляя разложения (4.19) — (4.21) в уравнение (4.18) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях уравнения, получаем

систему уравнений для определения функций $y_0, y_1, \dots$:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_0 + a^2 y_0 &= f(t), \\ \ddot{y}_1 + a^2 y_1 &= F(t, y_0, \dot{y}_0, 0), \\ \ddot{y}_2 + a^2 y_2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{\substack{y=y_0 \\ \dot{y}=\dot{y}_0 \\ \mu=0}} y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_{\substack{y=y_0 \\ \dot{y}=\dot{y}_0 \\ \mu=0}} \dot{y}_1.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Система линейных уравнений (4.22) решается последовательно, начиная с первого уравнения, которое совпадает с порождающим уравнением. При решении каждого из уравнений отыскиваются только периодические решения одним из указанных ранее способов. Возможные периоды решения могут быть лишь равными или кратными периоду правой части.

Применение метода малого параметра для автономных систем. Автономной системой уравнений будем называть систему, составленную из уравнений, в которых правая часть не зависит явно от времени. Пусть, например, имеем нелинейное уравнение

$$\ddot{y} + a^2 y = \mu F(y, \dot{y}, \mu). \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) можно рассматривать как частный случай уравнения (4.18). Однако нахождение приближенного решения уравнения (4.23) более сложно из-за того, что в отличие от предыдущего случая нам заранее не известен период искомого решения. Если правая часть явно зависит от t , то периоды решений могут быть лишь равными или кратными периоду правой части. Если же правая часть не содержит t , то возможно существование решений любого периода, который, вообще говоря, оказывается зависящим от параметра μ .

Для отыскания искомого периода решения уравнения (4.23) преобразуем его заменой независимого переменного t на t_1 к виду

$$\frac{d^2 y}{dt_1^2} + y = \mu F_1(y, \dot{y}, \mu). \quad (4.24)$$

Примем, что решение порождающего уравнения имеет период, равный 2π . Тогда периодическое решение уравнения (4.23), если оно существует, будет иметь период

$2\pi + \gamma(\mu)$. Разлагая $\gamma(\mu)$ в ряд, получаем

$$2\pi + \gamma(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots), \quad (4.25)$$

где h_n — постоянные величины, подлежащие определению.

Чтобы свести задачу об определении периодического решения автономного уравнения (4.23) к ранее рассмотренной задаче для неавтономного уравнения (4.18), перейдем к новому независимому переменному t_2 так, чтобы периодическое решение уравнения (4.24) имело период не $2\pi + \gamma(\mu)$, а постоянный период 2π . Замена переменных производится по соотношению

$$t_1 = t_2(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots). \quad (4.26)$$

Сравнение соотношений (4.25) и (4.26) показывает, что при изменении t_1 от 0 до $2\pi + \gamma(\mu)$ новое переменное t_2 изменяется от 0 до 2π . После замены переменных уравнение (4.24) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt_2^2} + (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 y = \\ = \mu(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 \times \\ \times F_1\left(y, \frac{dy/dt_2}{1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n}, \mu\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Периодическое решение этого уравнения ищем в виде $y(t_2, \mu) = y_0(t_2) + \mu y_1(t_2) + \dots + \mu^n y_n(t_2) + \dots$, (4.28)

где $y_n(t_2)$ — периодические функции аргумента t_2 периода 2π .

Подставляя (4.28) в уравнение (4.27) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_0}{dt_2^2} + y_0 &= 0, \\ \frac{d^2 y_1}{dt_2^2} + y_1 &= -2h_1 y_0 + F_1(y_0, \dot{y}_0, 0), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Из первого уравнения системы (4.29) находим

$$y_0 = C \cos(t_2 - t_0).$$

Второе уравнение системы (4.29) тогда получает вид

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = -2h_1 \cos(t_2 - t_0) + F_1 [C \cos(t_2 - t_0), -C \sin(t_2 - t_0), 0]. \quad (4.30)$$

Для того чтобы это уравнение имело периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы в его правой части отсутствовали вековые (резонирующие) члены. Это условие приводит к соотношениям (4.17), которые для уравнения (4.30) имеют вид

$$\int_0^{2\pi} F_1 [C \cos(t_2 - t_0), -C \sin(t_2 - t_0), 0] \sin(t_2 - t_0) dt_2 = 0, \\ -2h_1 C + \frac{1}{\pi} [C \cos(t_2 - t_0), \\ -C \sin(t_2 - t_0), 0] \cos(t_2 - t_0) dt_2 = 0. \quad (4.31)$$

Из первого уравнения системы (4.31) находим постоянную C для порождающего уравнения $y_0 = C \cos(t_2 - t_0)$, а из второго h_1 . Тогда искомый период периодического решения уравнения (4.23)

$$2\pi + \gamma(\mu) \approx 2\pi(1 + h_1 \mu).$$

Зная C и h_1 , можно определить следующее приближение $y_1(t_2)$ из уравнения (4.30) и, если необходимо, найти приближения $y_2(t_2)$, $y_3(t_2)$ из аналогичных уравнений системы (4.29).

§ 19. Метод медленно меняющихся параметров

Для многих механизмов в рабочем режиме движения пачкальных звеньев могут быть близкими к стационарным, т. е. не зависящими от времени. Эти движения могут, в частности, рассматриваться как гармонические с медленно меняющимися параметрами (амплитудами, фазами и т. п.). Тогда для отыскания приближенных решений нелинейных уравнений движения и исследования их устойчивости применим *метод медленно меняющихся параметров* или *метод Ван-дер-Поля*, основанный на усреднении медленно меняющихся параметров за каждый цикл движения.

Пусть, например, нелинейное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = F(y, \dot{y}). \quad (4.32)$$

Как и в методе малого параметра, считаем, что функция $F(y, \dot{y})$ состоит из малых нелинейных членов. Тогда решение уравнения (4.32) естественно искать в виде

$$y = A \cos(\omega t + \theta), \quad (4.33)$$

но в отличие от решения порождающего уравнения величины A и θ считаем функциями времени, т. е. амплитуда A и начальная фаза θ должны медленно изменяться от цикла к циклу.

Параметры A и θ примем за новые неизвестные функции (вместо функции y), причем кроме уравнения, получаемого из (4.32) после подстановки в него функции y из соотношения (4.33), надо иметь для определенности еще одно соотношение, связывающее параметры A и θ . В качестве такого соотношения примем

$$A \cos(\omega t + \theta) - A \dot{\theta} \sin(\omega t + \theta) = 0. \quad (4.34)$$

Дифференцируя выражение (4.33) при переменных A и θ , получаем

$$\dot{y} = \dot{A} \cos(\omega t + \theta) - A \dot{\theta} \sin(\omega t + \theta) - A \omega \sin(\omega t + \theta).$$

С учетом соотношения (4.34) получаем

$$\dot{y} = -A \omega \sin(\omega t + \theta). \quad (4.35)$$

Следовательно, условие (4.34) эквивалентно такому выбору A и θ , при котором для $\dot{y}$ получается выражение, совпадающее с выражением $\dot{y}$ для постоянных A и θ .

Дифференцирование выражения (4.35) дает

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & -\dot{A} \omega \sin(\omega t + \theta) - A \omega^2 \cos(\omega t + \theta) - \\ & - A \omega \dot{\theta} \cos(\omega t + \theta). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Подставляя выражения (4.33), (4.35) и (4.36) в уравнение (4.32), получаем

$$\begin{aligned} -\dot{A} \omega \sin(\omega t + \theta) - A \omega \dot{\theta} \cos(\omega t + \theta) = \\ = F[A \cos(\omega t + \theta), -A \omega \sin(\omega t + \theta)]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Уравнения (4.34) и (4.37) могут быть представлены в виде, разрешенном относительно производных $\dot{A}$ и $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{1}{\omega} F [A \cos(\omega t + \theta), -A\omega \sin(\omega t + \theta)] \sin(\omega t + \theta), \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{A\omega} F [A \cos(\omega t + \theta), -A\omega \sin(\omega t + \theta)] \cos(\omega t + \theta).\end{aligned}\quad (4.38)$$

Для решения этих уравнений предполагаем, что за один период $2\pi/\omega$ ввиду медленности изменения величин A и θ их производные по времени $\dot{A}$ и $\dot{\theta}$ можно считать постоянными и равными средним значениям:

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi, -A\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ \Psi(A) &= -\frac{1}{2\pi A\omega} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi, -A\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi,\end{aligned}\quad (4.39)$$

где $\psi = \omega t + \theta$.

При вычислении интегралов в выражениях (4.39) амплитуда A считается постоянной. После установления вида функций $\Phi(A)$ и $\Psi(A)$ получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{A} = \Phi(A), \quad \dot{\theta} = \Psi(A). \quad (4.40)$$

§ 20. Метод точечных преобразований

Фазовая плоскость. Движение механизма с одной степенью свободы в любой момент времени определяется значениями его обобщенной координаты q и обобщенной скорости $\dot{q}$. Скалярные величины q и $\dot{q}$ можно рассматривать как декартовы координаты точки в плоской системе координат $x = q$, $y = \dot{q}$ (рис. 23). Эта точка называется *изображающей*, а плоскость xy — *фазовой плоскостью*. При движении звеньев механизма величины q и $\dot{q}$ изменяются, и соответственно меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий, описывающих возможные движения звеньев механизма, называется *фазовым портретом* (*фазовой диаграммой*).

Применительно к уравнениям движения механизма не выше второго порядка уравнение фазовой траектории можно получить, если заменить уравнение движения механизма эквивалентной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно $x = q$ и $y = \dot{q} = \dot{x}$:

$$y = \dot{x}, \quad \dot{y} = f(x, y). \quad (4.41)$$

Интегрирование этой системы дает зависимость $y = y(x)$, т. е. уравнение фазовой траектории. Заметим,

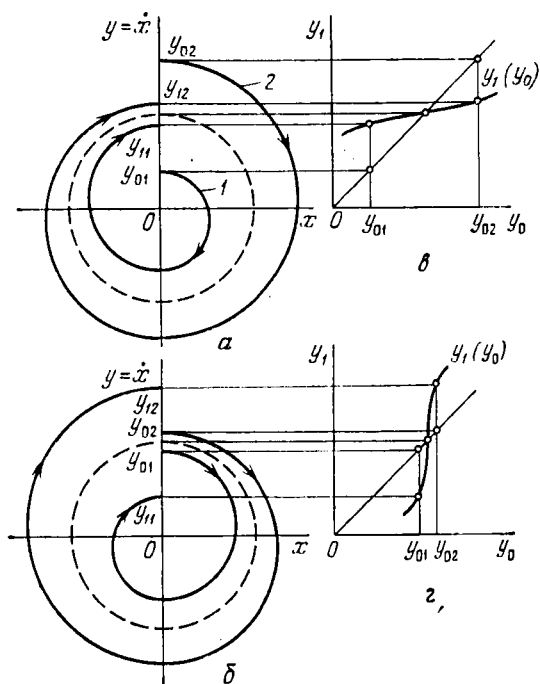


Рис. 23

что система (4.41) является автономной, т. е. не зависит от времени. При колебательных движениях величины x и y не выходят за некоторые пределы, и весь фазовый портрет занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Предельный цикл. На участке переходного режима (разгона или торможения) фазовая траектория изображается незамкнутой кривой. При установившемся дви-

жении, т. е. движении с повторяющимся циклом изменения обобщенной скорости $\dot{q}$ в зависимости от обобщенной координаты q , фазовая траектория изображается замкнутой кривой.

Изменения начальных условий или закона изменения сил, действующих на звенья механизма, отражаются на фазовой плоскости переходом изображающей точки на другую фазовую траекторию. Если все фазовые траектории, расположенные в окрестности изолированной замкнутой траектории, неограниченно приближаются к ней, то такая замкнутая траектория называется *устойчивым предельным циклом* (кривая, показанная штриховой линией на рис. 23, а). *Неустойчивым предельным циклом* называется изолированная замкнутая траектория, от которой удаляются все расположенные в ее окрестности другие фазовые траектории (кривая, показанная штриховой линией на рис. 23, б). Возможен также случай, когда фазовые траектории по одну сторону предельного цикла приближаются к нему, а по другую отходят.

Диаграмма точечного отображения. Изучение поведения отдельной траектории в фазовой плоскости может быть заменено изучением последовательности точек пересечения ее с выбранной полупрямой, в качестве которой чаще всего выбирают положительную полуось y . Если изображающая точка, взятая на полуоси y , после оборота относительно начала координат снова попадает на эту полуось, то в зависимости от динамических свойств механизма она может оказаться выше и ниже первоначального положения или снова вернуться в него. Например, для траектории 1 изображающая точка из положения y_{01} переходит в положение y_{11} , для траектории 2 — из положения y_{02} в положение y_{12} и т. д. Изображающая точка, расположенная на предельном цикле, возвращается в исходное положение.

Диаграммой точечного отображения называется зависимость ординат точек пересечения фазовых траекторий с полуосью y_1 от ординат y_0 исходного положения точки (рис. 23, в). По этой диаграмме можно судить о числе предельных циклов и их устойчивости, если дополнительно провести на ней прямую $y_1 = y_0$. Число предельных циклов равно числу точек пересечения прямой $y_1 = y_0$ с кривой $y_1 = y_1(y_0)$. Точки пересечения позволяют также выделить из фазовых траекторий предельные циклы. Для устойчивых предельных циклов производная dy_1/dy_0

меньше единицы, а для неустойчивых — больше единицы (рис. 23, г).

В некоторых случаях удобнее рассматривать последовательности точек пересечения фазовых траекторий с другими прямыми. Если исходные положения изображающих точек лежат на прямой I , а положения, наблюдаемые после оборота относительно начала координат, на прямой II , то говорят о *точечном отображении прямой I в прямую II* . Диаграммы точечного отображения, показанные на рис. 23, в и г, соответствуют точечному отображению положительной полуоси y в самое себя.

Для механизмов с несколькими степенями свободы изображающая точка должна рассматриваться в фазовом пространстве обобщенных координат и скоростей. Тогда для изучения многомерных фазовых траекторий применяется общая теория точечных преобразований поверхностей.

§ 21. Численные и графоаналитические методы

Решение нелинейного уравнения движения механизма при силах, зависящих от положения звеньев. Пусть приведенный момент сил M_n задан как функция обобщенной координаты φ (угла поворота начального звена). Приведенный момент инерции J_n также есть заданная функция той же координаты φ . Тогда для определения закона движения начального звена удобно применить уравнение движения в форме интеграла энергии (2.11)

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{M}_n d\varphi = \frac{1}{2} (J_n \omega^2 - J_{n0} \omega_0^2) \quad (4.42)$$

с начальными условиями $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$.

Из уравнения движения механизма непосредственно получаем угловую скорость начального звена как функцию обобщенной координаты φ :

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{2}{J_n} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{M}_n d\varphi + \frac{J_{n0}}{J_n} \omega_0^2} \quad (4.43)$$

В некоторых случаях интеграл в подкоренном выражении может быть представлен в конечном виде. Тогда после интегрирования получаем функцию $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\varphi)$, т. е.,

уравнение фазовой траектории. В других случаях применяют графическое или численное интегрирование и получают функцию $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\varphi)$ или в виде графика, или в виде ряда последовательных значений при изменении угла φ от φ_0 до некоторого значения, определяющего конец рассматриваемого этапа движения.

Для того чтобы найти закон движения начального звена, представим известную нам теперь функцию (4.43) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{\omega}(\varphi).$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\tilde{\omega}(\varphi)}. \quad (4.44)$$

Это интегрирование также выполняется графическим или численным методом. В результате находим функцию $t = t(\varphi)$, зная которую можно найти искомую функцию

$$\varphi = \varphi(t). \quad (4.45)$$

Если требуется найти угловое ускорение начального звена, то, продифференцировав функцию $\tilde{\omega}(\varphi)$ по обобщенной координате φ , т. е. определив аналог углового ускорения $d\tilde{\omega}/d\varphi$, находим угловое ускорение

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} \tilde{\omega}. \quad (4.46)$$

Указанный путь определения функции (4.45) оказывается невозможным, если $\tilde{\omega}_0 = 0$. Тогда на участке от $\varphi = \varphi_0$ до $\varphi = \varphi_1$ применяется дифференциальное уравнение движения (2.21). Из этого уравнения при $\varphi = \varphi_0$ и $\tilde{\omega} = 0$ получаем

$$\tilde{\varepsilon}(\varphi_0) = \frac{\tilde{M}_n(\varphi_0)}{J_n(\varphi_0)}.$$

При достаточно малом приращении времени Δt для вычисления $\tilde{\omega}_1$ и φ_1 , т. е. следующей точки функции $\varphi(t)$, применяются формулы равноускоренного движения:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\varepsilon}_1(\varphi_0) \Delta t, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}(\varphi_0) \Delta t^2.$$

Далее можно вычислять интеграл (4.44) в пределах от φ_1 до φ или же продолжить решение дифференциального уравнения (2.21) любым численным методом.

При больших объемах вычислений можно воспользоваться усовершенствованными приемами интегрирования дифференциальных уравнений, излагаемыми в курсах вычислительной техники.

Графоаналитический метод Виттенбауэра. Характеристики сил, действующих на звенья механизма, как правило, известны лишь приближенно и часто задаются в графическом виде. Поэтому наряду с численными методами интегрирования уравнений движения механизма применяются также графические и графоаналитические методы, которые, однако, всегда могут быть переведены на аналитический язык, пригодный для вычислений на ЭВМ. Из этих методов рассмотрим только *метод Виттенбауэра*, который позволяет при силах, зависящих от положений звеньев, в наглядной форме показать, как изменяется угловая скорость начального звена и кинетическая энергия механизма при изменении приведенного момента инерции.

Рассмотрим, например, установившееся движение с периодом, равным 2π . На вращающееся начальное звено действует постоянный движущий момент сил M_d . Приведенный к этому звену момент всех других внешних сил M_n есть заданная функция угла поворота начального звена φ . Требуется определить закон движения начального звена, если известно значение угловой скорости этого звена $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$ при $\varphi = 0$.

Решение задачи начинаем с построения графиков $M_d(\varphi)$ и $M_n(\varphi)$ (рис. 24, а), причем для удобства последующего определения приращений кинетической энергии откладываем M_n вверх от оси абсцисс, если M_n — момент сил сопротивления, и вниз, если M_n — движущий момент. Постоянный движущий момент сил M_d находим из условия установившегося движения

$$\tilde{M}_d 2\pi + \int_0^{2\pi} \tilde{M}_n d\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \tilde{M}_d = \mu_M \mu_\varphi \frac{F}{2\pi},$$

где μ_M и μ_φ — масштабные коэффициенты моментов сил и углов поворота, равные отношениям этих моментов и углов к отрезкам, изображающих их значения на графиках; F — площадь, заключенная между осью абсцисс и

графиком $M_n(\varphi)$, причем площадь, расположенная ниже оси абсцисс, должна вычитаться из площади, расположенной выше оси абсцисс.

Уравнение движения (2.11) для участка, где M_n — момент сил сопротивления M_c , может быть представлено:

$$\Delta T = \int_0^{\varphi} (M_d - M_c) d\varphi, \quad (4.47)$$

где ΔT — приращение кинетической энергии по отношению к начальному положению при $\varphi = 0$.

Для того чтобы уравнение (4.47) было справедливо и для участка, где M_n — движущий момент, надо на этом участке считать $M_c = -M_n$.

По уравнению (4.47) строим график приращений кинетической энергии ΔT как функции угла φ (рис. 24, б).

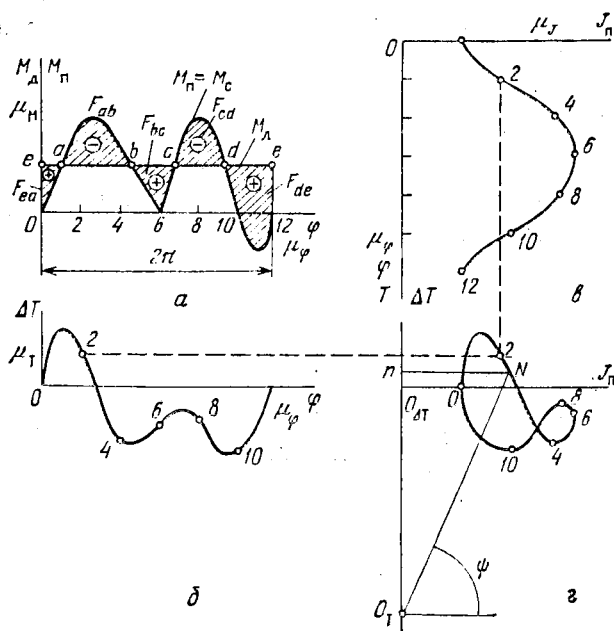


Рис. 24

Для этого измеряем площадь F_{oi} (мм^2), заключенную между графиками M_d и M_c в пределах от $\varphi = 0$ до текущего значения $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, \dots, 12$), считая эту площадь положительной при $M_d > M_c$ и отрицательной при $M_d <$

$< M_c$. С учетом масштабных коэффициентов получаем $\Delta T = F_{oi} \mu_M \mu_\varphi$. Построение графика рекомендуется начинать с нахождения экстремумов ΔT , которые получаются в точках пересечения графиков M_d и M_c , т. е. в точках a, b, c и d . Сначала подсчитываем площади $F_{ea}, F_{ab}, F_{bc}, F_{cd}, F_{da}$. Сумма этих площадей с учетом их знаков должна равняться нулю. Затем находим ординаты графика в точках экстремумов:

$$y_a = F_{ea} / \mu_T, \quad y_b = (F_{ea} - F_{ab}) / \mu_T,$$

$$y_c = (F_{ea} - F_{ab} + F_{bc}) / \mu_T, \quad y_d = (F_{ea} - F_{ab} + F_{bc} - F_{cd}) / \mu_T$$

или

$$y_d = -F_{dc} / \mu_T,$$

где μ_T — масштабный коэффициент приращения кинетической энергии. После построения экстремумов можно дополнительно вычислить ординаты графика в других точках по формуле

$$y_{oi} = F_{oi} \mu_M \mu_\varphi / \mu_T.$$

Далее по (2.8) для исследуемого механизма строим график зависимости приведенного момента инерции J_n от угла φ , причем с целью упрощения последующего исключения переменной φ из графиков $J_n(\varphi)$ и $\Delta T(\varphi)$ располагаем координатные оси, как показано на рис. 24, в. Пересечение горизонталей, проведенных из точек графика $\Delta T(\varphi)$ с вертикалями, проведенными из точек графика $J_n(\varphi)$ (рис. 24, г), дает график зависимости приращения кинетической энергии ΔT от приведенного момента инерции J_n , называемый *диаграммой Виттенбауэра*. По ней можно определить угловую скорость $\dot{\omega}$ начального звена в любом положении механизма, если известно значение $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0$ при $\varphi = 0$.

Если отложить значение кинетической энергии при $\varphi = 0$ от начала координат графика $\Delta T(J_n)$ вниз по оси ординат, то полученная точка O_T определит начало координат графика $T(J_n)$. Луч, соединяющий любую точку диаграммы Виттенбауэра с началом координат O_T , образует с осью абсцисс угол ψ , тангенс которого пропорционален квадрату угловой скорости $\dot{\omega}$. Для доказательства этого положения найдем из прямоугольного треугольника $O_T n N$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{T / \mu_T}{J_n / \mu_J}$$

и, учитывая, что $T = J_n \omega^2 / 2$, получим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega^2. \quad (4.48)$$

Если точка O_T располагается в пределах чертежа, то, пользуясь (4.48), можно найти искомую зависимость $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\varphi)$ и далее закон движения начального звена, как было показано ранее.

Дельта-метод решения нелинейных уравнений движения механизма. При силах, зависящих от времени, положений и скоростей точек звеньев механизма, используется графоаналитический дельта-метод, который поясним на примере решения уравнения движения механизма, имеющего вид

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) + k^2 y = F(t). \quad (4.49)$$

Примем за независимую переменную безразмерное время $\tau = kt$ и обозначим через v производную $dy/d\tau$. Тогда

$$\dot{y} = kv; \quad \ddot{y} = k^2 \frac{dv}{d\tau} \equiv k^2 v \frac{dv}{dy},$$

и уравнение (4.49) преобразуется к виду

$$v \frac{dv}{dy} + \frac{f(y, kv)}{k^2} + y = \frac{\tilde{F}(t)}{k^2}$$

или

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\delta(y, v, t) - y}{v}, \quad (4.50)$$

где

$$\delta(y, v, t) = \frac{\tilde{F}(t) - f(y, kv)}{k^2}. \quad (4.51)$$

Функцию $\delta(y, v, t)$ для малых интервалов времени можно считать постоянной. Но если считать, что δ (отсюда название способа) — величина постоянная, то в дифференциальном уравнении (4.50) переменные разделяются: $v dv = (\delta - y) dy$, и после интегрирования получаем $v^2 = 2\delta y - y^2 + C$.

Это уравнение может быть представлено как уравнение окружности

$$v^2 + (\delta - y)^2 = R^2, \quad (4.52)$$

где $R^2 = C + \delta^2$.

Зависимость между v и y или, что то же, между $\dot{y}/k$ и y , получаемая из решения уравнения (4.50), дает на фазовой плоскости с координатами v и y фазовую траекторию $v(y)$. Из (4.52) следует, что для малого интервала времени отрезок фазовой траектории представляет собой дугу окружности с центром в точке $y = \delta$, $v = 0$. На этом основании можно фазовую траекторию приближенно заменить ломаной, состоящей из дуг окружностей, радиусы которых определяются графически или по (4.52).

Пусть, например, построение фазовой траектории начинается из точки B_k с координатами (v_k, y_k) , которой

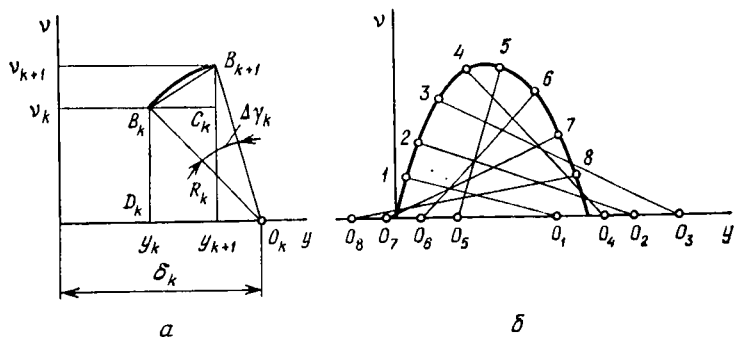


Рис. 25

соответствует время $t = t_k$ (рис. 25, а). По (4.51) вычисляем значение $\delta_k(y_k, v_k, t_k)$, чем и определяется абсцисса центра окружности O_k . Радиус окружности можно вычислить по (4.52)

$$R_k = \sqrt{v_k^2 + (\delta_k - y_k)^2}.$$

Чтобы получить следующую точку B_{k+1} фазовой траектории, надо через точку B_k провести дугу окружности радиусом R_k из центра O_k . Протяженность дуги $B_k B_{k+1}$ определяется из условия, что для малых приращений времени Δt_k дугу окружности можно принять равной длине хорды $B_k B_{k+1}$. Эту длину находим из условия подобия треугольников $O_k B_k D_k$ и $B_k C_k B_{k+1}$, считая, что угол при вершине B_k в $\Delta O_k B_k B_{k+1}$ приближенно равен $\pi/2$:

$$\frac{C_k B_k}{B_k B_{k+1}} = \frac{B_k D_k}{O_k B_k}.$$

Полагая, что отрезок $B_k B_{k+1}$ приближенно равен дуге $R_k \Delta \gamma_k$, получаем

$$\frac{\Delta y_k}{R_k \Delta \gamma_k} = \frac{v_k}{R_k}.$$

Отсюда

$$\Delta y_k = \Delta \gamma_k v_k. \quad (4.53)$$

При малых приращениях времени Δt_k приращение Δy_k можно считать пропорциональным производной $\dot{y}_k$ в точке B_k :

$$\Delta y_k \approx \dot{y}_k \Delta t_k = k v_k \Delta t_k. \quad (4.54)$$

Из (4.53) и (4.54) следует

$$\Delta \gamma_k = k \Delta t_k \equiv \Delta \tau. \quad (4.55)$$

При малых значениях $\Delta \gamma_k$ для определения искомой точки B_{k+1} фазовой траектории можно восстановить перпендикуляр к отрезку $O_k B_k$ в точке B_k и отложить на нем отрезок $B_k B_{k+1} = R_k k \Delta t_k$. Для построения следующих точек фазовой траектории надо найти значения y_{k+1} и v_{k+1} в точке B_{k+1} . Эти значения можно получить непосредственным измерением на чертеже или же вычислить по формулам

$$y_{k+1} = y_k + v_k \Delta \gamma_k, \quad v_{k+1} = v_k + k \Delta t_k \sqrt{R_k^2 - v_k^2}.$$

После определения y_{k+1} и v_{k+1} все построения или вычисления повторяются. На рис. 25, б показано построение фазовой траектории по точкам B_k при $k = 1, \dots, 8$. Центры заменяющих окружностей располагаются на оси абсцисс в точках O_k . Искомое решение уравнения (4.49) находится интегрированием соотношения $\dot{y} = kv(y)$, т. е. сначала определяется функция $t = t(y)$ из условия

$$t = \int_{y_0}^y \frac{dy}{kv(y)^2}$$

а затем и функция $y = y(t)$.

Глава V. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЗМОВ

§ 22. Кинематические и динамические передаточные функции

Кинематические передаточные функции. *Кинематической передаточной функцией нулевого порядка*, или, иначе, *функцией положения*, в механизмах с одной степенью свободы называется функциональная зависимость между обобщенными (угловыми или линейными) координатами выходного и входного звеньев. Первая производная функции положения по обобщенной координате механизма называется *кинематической передаточной функцией первого порядка* (*передаточным отношением*), вторая производная — *кинематической передаточной функцией второго порядка* и т. д.

Кинематические передаточные функции не зависят от закона движения входного звена и являются собственными характеристиками механизма, так как при данном значении обобщенной координаты механизма они зависят только от параметров кинематической схемы. Связи между кинематическими характеристиками (скоростями и ускорениями различных порядков) и кинематическими передаточными функциями устанавливаются последовательным дифференцированием функции положения по правилам дифференцирования сложных функций (функций от функций).

Пусть, например, положение входного звена определяется углом поворота φ , а выходного звена — углом поворота ψ . Тогда после дифференцирования функции положения $\psi(\varphi)$ по времени получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

или в других обозначениях

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}' \dot{\varphi}, \quad (5.1)$$

т. е. угловая скорость выходного звена $\dot{\psi}$ равна произведению кинематической передаточной функции первого порядка (аналога угловой скорости или передаточного отношения) на угловую скорость входного звена,

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

или в других обозначениях

$$\ddot{\psi} = \psi'' \dot{\varphi}^2 + \psi' \ddot{\varphi}, \quad (5.2)$$

где $\ddot{\psi}$ — угловое ускорение выходного звена, ψ'' — кинематическая передаточная функция второго порядка (аналог углового ускорения), $\ddot{\varphi}$ — угловое ускорение входного звена.

Аналогичные соотношения между кинематическими характеристиками механизма и кинематическими передаточными функциями получаются при прямолинейно движущемся звене.

Динамическая передаточная функция. Кинематические передаточные функции определяют только кинематические свойства механизмов. Динамические свойства механизма при линейных уравнениях движения определяются динамической передаточной функцией, которая является собственной характеристикой механизма, не зависящей от начальных условий и от сил, действующих на звенья механизма.

Динамической передаточной функцией механизма $W(s)$ называется отношение изображения по Лапласу выходной величины $y(t)$ в линейном уравнении движения механизма (безразмерной обобщенной координаты) к изображению входной величины $x(t)$ в том же уравнении (безразмерной обобщенной силы) при нулевых начальных условиях.

Обозначая через $Y(s)$ и $X(s)$ изображения функций $y(t)$ и $x(t)$, получаем

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (5.3)$$

Пусть, например, линейное уравнение движения механизма представлено уравнением (3.1):

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t)$$

или в безразмерном виде (3.2)

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx,$$

где $y = q/q_c$, $T_2^2 = a/(cq_c)$, $T_1 = b/(cq_c)$, $k = Q_c/(cq_c)$.

Подставляя в это уравнение изображения по Лапласу $\ddot{y}$, $\dot{y}$ и x с учетом (3.15) и (3.16), получаем

$$T_2^2 [s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0] + T_1 [sY(s) - y_0] + Y(s) = kX(s),$$

где y_0 , $\dot{y}_0$ — начальные значения функции y и ее первой производной по времени. Отсюда

$$Y(s) = \frac{T_2^2 (sy_0 + \dot{y}_0) + T_1 y_0 + kX(s)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

Динамическая передаточная функция, определяемая как отношение $Y(s)$ к $X(s)$ при нулевых начальных условиях ($y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$),

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \equiv \frac{Q_c/q_c}{as^2 + bs + c}, \quad (5.4)$$

не зависит от закона изменения безразмерной обобщенной силы $x(t)$ и начальных условий и, следовательно, является собственной характеристикой механизма, определяющей его динамические свойства. Другими словами, динамическая передаточная функция характеризует вид левой части дифференциального уравнения движения механизма.

Зная динамическую передаточную функцию механизма, можно при любом заданном законе изменения обобщенной силы найти изображение безразмерной обобщенной силы $X(s)$ и затем найти изображение безразмерного перемещения $Y(s)$ из условия

$$Y(s) = W(s)X(s)$$

при нулевых начальных условиях. Искомая функция $y(t)$ после этого находится непосредственно по справочным таблицам оригиналов и изображений. Если начальные условия отличаются от нулевых ($t = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$), то можно использовать замену переменных

$$z = y - \dot{y}_0 t - y_0$$

или же определять изображение $Y(s)$ с учетом начальных условий. В рассматриваемом примере

$$Y(s) = W(s) + \frac{T_2^2 (sy_0 + \dot{y}_0) + T_1 y_0}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

Следовательно, если уравнение движения механизма представлено линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то динамическая передаточная функция полностью определяет динамические свойства механизма при любых заданных законах изменения сил. Отсюда и происходит ее название. В теории автоматического регулирования употребляется только термин *передаточная функция* без указания слова *динамическая*, так как в отличие от теории механизмов, в теории регулирования не рассматриваются кинематические передаточные функции. Иногда для сокращения текста можно опускать прилагательные «кинематическая» и «динамическая», если очевидно, о какой передаточной функции идет речь.

Если безразмерное уравнение движения механизма представлено в форме (3.19)

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1 x,$$

то, подставляя в него изображения функций $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y и x при нулевых начальных условиях, получаем

$$(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2) Y(s) = k_1 X(s).$$

Отсюда динамическая передаточная функция для рассматриваемого примера

$$W(s) = \frac{k_1}{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2} \equiv \frac{Q_c/q_c}{as^2 + bs + c}, \quad (5.5)$$

т. е. для безразмерных уравнений движения (3.2) и (3.19) динамическая передаточная функция имеет один и тот же вид, а ее значения являются безразмерными величинами.

Иногда динамическую передаточную функцию определяют из линейного уравнения движения (3.1) в размерном виде как отношение изображения по Лапласу обобщенной координаты $q(t)$ к изображению обобщенной силы $Q(t)$. Тогда размерная динамическая передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \equiv \frac{1}{a(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2)}, \quad (5.6)$$

и размерность ее значений определяется размерностью отношения $q(t)/Q(t)$.

§ 23. Переходные функции

Единичная ступенчатая функция. Динамические свойства механизмов можно оценивать по виду решений безразмерных уравнений движения при типовых законах изменения обобщенной силы. В простейшем случае обобщенная сила (приведенная сила или приведенный момент сил) является постоянной. Пусть, например, приведенный момент сил M_n имеет постоянное значение M_0 . В задачах динамики механизмов время $t > 0$, и поэтому закон изменения приведенного момента сил во времени можно представить функцией

$$M_n = M_0 [1],$$

где $[1]$ — условная запись единичной ступенчатой функции (рис. 26), обладающей свойствами:

$$[1] = 1 \quad \text{при } t > 0,$$

$$[1] = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Переходная функция механизма. В общем случае *переходной функцией механизма* называют решение безразмерного уравнения движения механизма с одной степенью свободы при определенном законе изменения обобщенной силы. В дальнейшем будем называть переходной функцией механизма только решение безразмерного уравнения движения механизма $h(t)$ при единичном ступенчатом изменении безразмерной обобщенной силы $x(t)$ и нулевых начальных условиях.

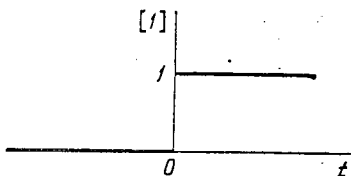


Рис. 26

Например, для уравнения движения колебательного типа (3.19) из решения (3.26) при нулевых начальных условиях получаем

$$h(t) = \frac{Q_c}{q_c c} \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_*} e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta) \right], \quad (5.7)$$

где $\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_*}{\gamma}$.

Импульсная переходная функция. Переходная функция характеризует динамику механизма при ступенчатом изменении обобщенной силы. Если уменьшать продолжи-

тельность действия этой силы, то в пределе получим импульсную силу с мгновенным импульсом. При этом единичная ступенчатая сила переходит в *единичную импульсную силу*, аналитическое описание которой выражается дельта-функцией δ :

$$\delta = 0 \quad \text{при} \quad t \neq t_0, \quad \delta \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t = t_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Соответственно переходная функция обращается в *импульсную переходную функцию*, под которой понимается решение безразмерного уравнения движения механизма $h_n(t)$ при безразмерной обобщенной силе $x(t)$, равной единичной импульсной силе.

Импульсная переходная функция $h_n(t)$ равна производной по времени от переходной функции $h(t)$:

$$h_n(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Это соотношение следует из свойств дельта-функции, которая может рассматриваться как производная по времени от единичной ступенчатой функции.

Импульсная переходная функция характеризует динамические свойства механизма при воздействии импульсных или ударных сил. Кроме того, ее можно использовать для определения переходной функции при произвольной безразмерной силе $x(t)$, если ее рассматривать как непрерывную совокупность мгновенных импульсов.

§ 24. Частотные характеристики

Частотная передаточная функция. Переходные функции дают представление о поведении системы в переходных режимах. Для оценки установившихся режимов удобно рассматривать поведение системы при гармонических воздействиях, так как динамические характеристики при этих воздействиях легко определяются экспериментальным путем. Кроме того, во многих механизмах внешние силы, действующие на звенья механизма, могут быть с достаточной точностью представлены в виде сумм гармоник различных частот.

Пусть гармоническая вынуждающая сила изменяется по закону

$$Q(i\omega) = A_1 e^{i(\omega t + \theta_1)}$$

или

$$Q(i\omega) = A_1(i\omega) e^{i\omega t},$$

где $A_1(i\omega) = A_1 e^{i\theta_1}$ — комплексная амплитуда гармонической вынуждающей силы.

Тогда обобщенная координата q , определяемая из линейного уравнения движения, будет тоже гармонической функцией той же частоты ω , но с измененной амплитудой и фазой, причем эти изменения зависят от типа уравнения движения, от постоянных параметров механизма и от частоты ω :

$$q(t) = A_2 e^{i(\omega t + \theta_2)}$$

или

$$q(i\omega) = A_2(i\omega) e^{i\omega t},$$

где $A_2(i\omega) = A_2 e^{i\theta_2}$ — комплексная амплитуда гармонических колебаний.

Отношение комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы называется *частотной передаточной функцией*

$$W(i\omega) = \frac{A_2(i\omega)}{A_1(i\omega)}. \quad (5.8)$$

Например, для механизма, уравнение движения которого представлено уравнением (3.35) при $x(i\omega) = e^{i\omega t}$, комплексная амплитуда вынужденных гармонических колебаний $A_2(i\omega)$ находится из (3.37) умножением на q_c . Принимая $Q_c = A_1$, получаем, что $k_1 q_c = A_1/a$ и, следовательно,

$$A_2(i\omega) = \frac{A_1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)}.$$

Частотная передаточная функция по условию (5.8)

$$W(i\omega) = \frac{1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)} \equiv \frac{1}{-a\omega^2 + bi\omega + c}. \quad (5.9)$$

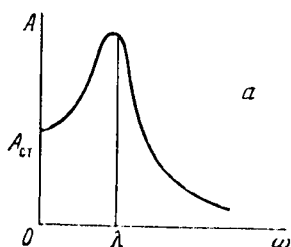
Сравнение выражений (5.9) и (5.6) показывает, что частотная передаточная функция получается из динамической передаточной функции заменой комплексной переменной s на чисто мнимую величину $i\omega$. Другими словами, переход от динамической передаточной функции $W(s)$ к частотной передаточной функции $W(i\omega)$ соот-

ветствует переходу от преобразования Лапласа при $\sigma = 0$ к преобразованию Фурье. Это заключение справедливо и для тех случаев, когда динамическая передаточная функция и комплексные амплитуды определяются в безразмерных величинах.

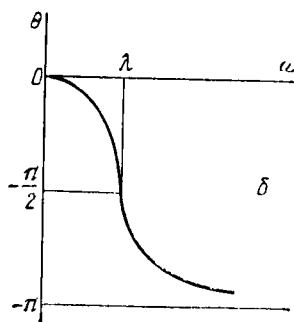
Амплитудно-частотная характеристика. Частотными характеристиками называются динамические характеристики гармонических вынужденных колебаний, зависящие от частоты гармонического возбуждения. Наиболее употребительной является *амплитудно-частотная характеристика*, под которой понимается зависимость амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического возбуждения.

Например, для механизма, уравнение движения которого представлено уравнением (3.1) при $Q(t) = A_1 \sin \omega t$, амплитуда вынужденных гармонических колебаний A_2 находится из (3.31) умножением на q_c . Принимая $Q_c = A_1$, получаем, что $k_1 q_c = A_1/a$ и, следовательно, размерная амплитуда

$$A_2 = \frac{A_1}{a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (5.10)$$



a



delta

Рис. 27

Для того чтобы амплитудно-частотная характеристика была собственной характеристикой механизма, не зависящей от амплитуды гармонического возбуждения, обычно изображают ее в виде зависимости $A(\omega) = A_2/A_1$. На рис. 27, а показан график $A(\omega)$ для фиксированного значения $\gamma < \lambda$. При $\omega = 0$ значение амплитуды A равно статическому перемещению от единичной силы: $A_{ст} = 1/c$. При $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда

A стремится к нулю. Максимальное значение A достигается при $\omega = \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma^2}$, т. е. вблизи $\omega = \lambda$.

Фазо-частотная характеристика. Зависимость разности фаз между гармоническими вынужденными колебаниями и гармоническим возбуждением от его частоты называется *фазо-частотной характеристикой*. Обычно начальная

фаза гармонического возбуждения принимается равной нулю. Тогда фазо-частотная характеристика изображает зависимость начальной фазы гармонических вынужденных колебаний θ от частоты ω . На рис. 27, б показана эта характеристика для рассматриваемого примера при

$$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика. Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики можно объединить в единую характеристику, которая изображается годографом вектора, модуль которого равен амплитуде вынужденных гармонических колебаний A , а угол, отсчитываемый от положительного направления абсцисс против хода часовой стрелки, равен начальной фазе θ (рис. 28). Этот годограф обычно строится на комплексной плоскости, и тогда комплексная величина, модуль которой равен амплитуде, а аргумент начальной фазе гармонических колебаний, дает комплексную амплитуду $A(i\omega)$. Соответственно *амплитудно-фазовой частотной* характеристикой называется зависимость комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического возбуждения.

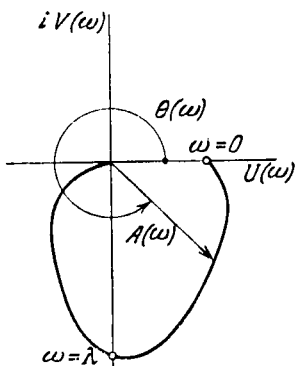


Рис. 28

Действительная (вещественная) часть комплексной амплитуды $A(i\omega)$ обозначается через $U(\omega)$, а мнимая — через $iV(\omega)$:

$$A(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega).$$

Переход от частотных характеристик $A(\omega)$ и $\theta(\omega)$ к характеристикам $U(\omega)$ и $V(\omega)$ и обратно производится по соотношениям:

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \theta(\omega), \quad V(\omega) = A(\omega) \sin \theta(\omega),$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

В рассматриваемом примере:

$$U(\omega) = \frac{\lambda^2 - \omega^2}{a[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}, \quad V(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{a[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}.$$

Для того чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика была собственной характеристикой механизма, зависящей только от типа уравнения движения механизма и его параметров, ее строят в виде годографа частотной передаточной функции, представляющей собой отношение комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний $A_2(i\omega)$ к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы $A_1(i\omega)$.

$$W(i\omega) = \frac{A_2(i\omega)}{A_1(i\omega)}.$$

Тогда модуль этого годографа согласно правилам деления комплексных величин равен отношению действительных амплитуд гармонических колебаний и вынуждающей силы, а угол, составляемый вектором годографа с положительным направлением оси абсцисс, равен разности фаз перемещения и силы.

В рассматриваемом примере амплитуда вынуждающей силы равна действительной величине A_1 , а начальная фаза равна нулю. Частотная передаточная функция

$$W(i\omega) = \frac{1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)}.$$

После отделения действительной части от мнимой, умножением числителя и знаменателя на $\lambda^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega$ получаем

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = \frac{\lambda^2 - \omega^2}{a[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}, \quad V(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{a[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}.$$

Следовательно,

$$A(\omega) = \frac{1}{a\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \theta(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2},$$

т. е. модуль и аргумент частотной передаточной функции дают соответственно амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, если принято условие $A = A_2/A_1$.

При построении частотных характеристик $A(\omega)$ и $\theta(\omega)$ для того чтобы охватить больший диапазон частот, откладывают по оси абсцисс частоту в логарифмическом масштабе. Соответствующие характеристики называются *логарифмическими частотными характеристиками*. При построении логарифмической амплитудно-частотной характеристики по оси ординат откладывают обычно величину $L = 20 \lg A$.

Резонансные частоты. Из графика амплитудно-частотной характеристики, показанного на рис. 27, а, видно, что амплитуда вынужденных колебаний увеличивается по мере приближения частоты гармонического возбуждения ω к собственной частоте λ . Вынужденные колебания, соответствующие одному из максимумов амплитудно-частотной характеристики, называются *резонансными колебаниями (резонансом)*. Частота, при которой наступает резонанс, называется *резонансной частотой*. Несколько максимумов амплитудно-частотной характеристики и, следовательно, несколько резонансных частот наблюдаются в механизмах с несколькими степенями свободы.

Например, для амплитудно-частотной характеристики, показанной на рис. 27, а, резонансная частота $\omega_p = \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma^2}$ и амплитуда колебаний при резонансе имеет значение

$$A_p = \frac{A_1}{a2\gamma\sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}}.$$

При $\gamma = 0$, т. е. при отсутствии трения, резонансная частота $\omega_p = \lambda$ и $A_p \rightarrow \infty$. К тому же результату можно прийти путем решения уравнения движения консервативного типа при условии, что частота вынужденных колебаний равна собственной частоте механизма.

Например, для безразмерного уравнения движения механизма (3.19) при $\omega = \lambda$ и $\gamma = 0$ имеем

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = k_1 \sin \lambda t.$$

Заменяя оригиналы их изображениями, получаем

$$s^2 Y - sy_0 - \dot{y}_0 + \lambda^2 Y = k_1 \frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 + \lambda^2} + k_1 \frac{\lambda}{(s^2 + \lambda^2)^2}.$$

Обратный переход к оригиналам по табл. 1 (п. 3, 4 и 6) дает

$$y = y_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{k_1}{2\lambda^2} (\sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t),$$

т. е. в отличие от решения (3.30) при $\omega \neq \lambda$ слагаемое, выражающее выпущенные колебания, представлено *векковым* (резонансным) членом, который по абсолютной величине неограниченно возрастает во времени, если в системе нет сопротивлений трения.

Коэффициент динамичности. Коэффициентом динамичности (иногда коэффициентом динамического усиления) в общем смысле слова называют отношение какой-либо величины, характеризующей динамику системы, к значению этой величины в статике. Наиболее употребительным является коэффициент динамичности по перемещениям. При силовом возбуждении коэффициентом динамичности по перемещениям называют отношение амплитуды гармонических выпущенных колебаний к статическому перемещению под действием силы, равной амплитуде силового гармонического возбуждения.

Например, при изменении обобщенной силы по синусоидальному закону $Q(t) = A_1 \sin \omega t$ амплитуда гармонических выпущенных колебаний определяется выражением (5.10):

$$A_2 = \frac{A_1}{a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Амплитуда гармонического возбуждения, т. е. амплитуда изменения обобщенной силы, равна A_1 . Перемещение, вызываемое действием этого момента, равно A_1/c , где c — коэффициент жесткости. Следовательно, коэффициент динамичности по перемещениям при $\lambda^2 = c/a$:

$$K_{\text{дин}} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

На рис. 29, а показаны резонансные кривые, выражающие зависимость коэффициента динамичности от частотного отношения, равного отношению частоты выпущенных колебаний к собственной частоте, при нескольких значениях коэффициента демпфирования γ .

При кинематическом возбуждении коэффициент динамичности по перемещениям равен отношению ампли-

туды вынужденных колебаний к амплитуде возбуждения, если оно принято гармоническим. При других видах кинематического возбуждения предпочитают определять коэффициент динамичности по ускорениям, под которым понимается отношение максимального модуля ускорения

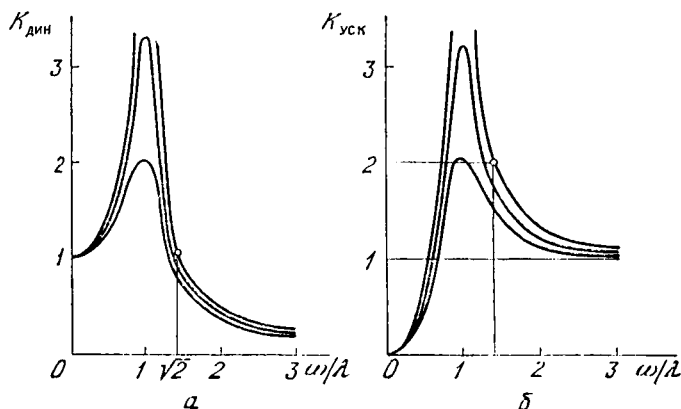


Рис. 29

выходного звена с учетом упругости звеньев механизма к максимальному модулю ускорения этого же звена без учета упругости звеньев.

В рассматриваемом примере максимальный модуль ускорения выходного звена при вынужденных колебаниях

$$\ddot{q}_{\max} = \frac{A_1 \omega^2}{a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Без учета упругости звеньев $\ddot{q}_{\max} = A_1/a$. Следовательно, коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = K_{\text{дин}} \frac{\omega^2}{\lambda^2}.$$

На рис. 29, б показаны графики зависимости коэффициента динамичности по ускорениям от частотного отношения ω/λ , соответствующие резонансным кривым, показанным на рис. 29, а. Коэффициент динамичности по перемещениям без учета сил трения ($\gamma = 0$) равен 1 при $\omega/\lambda = \sqrt{2}$ и при $\omega/\lambda \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Коэффициент

динамичности по ускорениям для $\gamma = 0$ равен 2 при $\omega/\lambda = \sqrt{2}$ и при $\omega/\lambda \rightarrow \infty$ стремится к 1.

Коэффициент динамичности по ускорениям можно рассматривать также как отношение максимальных значений силы инерции выходного звена с учетом упругости звеньев механизма и без учета упругости. Аналогично вводится коэффициент динамичности по силам как отношение максимальных значений какой-либо силы или момента сил (например, момента сил на валу выходного звена) с учетом упругости звеньев и без учета упругости.

Динамическая жесткость. Динамической жесткостью называется отношение амплитуды гармонической вынуждающей силы к амплитуде гармонических вынужденных колебаний. Величина, обратная динамической жесткости, называется динамической податливостью. В рассматриваемом примере динамическая жесткость D равна отношению амплитуды A_1 гармонической составляющей обобщенной силы $Q(t)$ к амплитуде A_2 вызываемого ею перемещения

$$D = \frac{A_1}{A_2} \equiv a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

При $\gamma = 0$ и $\omega = 0$ динамическая жесткость $D = a\lambda^2 \equiv c$ совпадает со статической жесткостью, характеризующей коэффициентом жесткости c . В отличие от статической динамическая жесткость зависит от частоты вынуждающей силы и, следовательно, является частотной характеристикой механизма.

В тех случаях, когда между силой и перемещением есть сдвиг фаз, определяют комплексную динамическую жесткость как отношение амплитуды гармонической вынуждающей силы к комплексной амплитуде вынужденных колебаний. В рассматриваемом примере комплексная амплитуда

$$A_2(i\omega) = \frac{A_1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)}.$$

Следовательно, комплексная динамическая жесткость

$$D(i\omega) = a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2).$$

Модуль этой комплексной величины

$$D = a\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

совпадает с выражением для динамической жесткости,

Величина, обратная комплексной динамической жесткости, называется *комплексной динамической податливостью*. По определению комплексная динамическая податливость совпадает с частотной передаточной функцией. В рассматриваемом примере

$$\frac{1}{D(i\omega)} = \frac{1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)} \equiv W(i\omega).$$

§ 25. Критерии устойчивости движений в механизмах

Условие устойчивости движений. Предположим, что под действием внешних сил звенья механизма совершают некоторое движение, которое будем называть *невозмущенным*. Значения обобщенных координат механизма, найденные решением уравнений движения для невозмущенного движения, обозначим через $y_i(t)$, где $i = 1, \dots, s$. Если в некоторый момент времени происходит внезапное изменение внешней силы или какого-либо параметра механизма, которое вызывает соответствующее изменение обобщенных скоростей или ускорений, то дальнейшее движение звеньев может рассматриваться как движение с измененными начальными условиями. При этом движении, называемом *возмущенным*, обобщенные координаты механизма будут определяться теми же уравнениями, но с измененными начальными условиями, а значения этих координат $y_{\text{в}}$ будут связаны с их значениями при невозмущенном движении соотношением

$$y_{\text{в}} = y_i + y_{\text{с}}.$$

Движение механизма называется *асимптотически устойчивым*, если при $t \rightarrow \infty$ значения $y_{\text{с}}$ стремятся к нулю, и *неустойчивым*, если хотя бы одно из значений $y_{\text{с}}$ неограниченно возрастает. Если значения $y_{\text{с}}$ стремятся к некоторым конечным значениям, то движение механизма называется *нейтрально устойчивым*.

Для исследования устойчивости движения механизма предположим, что система линейных уравнений движения механизма приведена к одному дифференциальному уравнению порядка n относительно обобщенной координаты y . Тогда $y_{\text{в}} = y + y_{\text{с}}$, где $y_{\text{с}}$ есть решение соответствующего однородного дифференциального уравнения при начальных условиях, соответствующих моменту возмущения.

Как уже указывалось, общее решение однородного уравнения есть сумма слагаемых, вид которых определяется значениями корней характеристического уравнения. Если в этом решении какое-нибудь его слагаемое неограниченно возрастает по абсолютной величине, то возрастет и вся сумма в целом. Приписывая во внимание значения показателей степени в слагаемых (3.9) и (3.10), получаем, что присутствие одного положительного вещественного корня r , или одной пары сопряженных комплексных корней с положительной вещественной частью $\alpha_k > 0$ оказывается достаточным, чтобы значения y_0 неограниченно возрастали. Следовательно, для асимптотической устойчивости движения звеньев механизма необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.

Среди корней характеристического уравнения может быть корень, равный нулю, т. е. $r_1 = 0$, или пара чисто мнимых корней $\pm i\lambda_k$. Если при этом вещественные части всех остальных корней отрицательные, то общее решение будет иметь постоянное слагаемое или гармоническое слагаемое с постоянной амплитудой. В этом случае механизм будет нейтрально устойчив.

Корни характеристического уравнения для исследования устойчивости движения удобно изображать в виде точек на комплексной плоскости. Тогда условие устойчивости при линейных уравнениях движения формулируется как условие расположения всех корней характеристического уравнения слева от мнимой оси комплексной плоскости. Если хотя бы один вещественный корень или одна пара сопряженных комплексных корней находится справа от мнимой оси, то механизм неустойчив. Мнимая ось является границей устойчивости.

Полученное условие устойчивости справедливо не только для линейных, но и для линеаризованных уравнений независимо от членов выше первого порядка малости. В этих случаях говорят об устойчивости движения по первому приближению (теорема Ляпунова). Однако в случае нулевых или чисто мнимых корней линеаризованного уравнения требуется дополнительное исследование устойчивости.

Алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица. Сформулированное условие устойчивости движения требует нахождения корней характеристического уравнения, что становится затруднительным, если это уравнение

выше третьего порядка. Поэтому неоднократно предлагались критерии устойчивости в виде определенных правил, следуя которым можно определить устойчивость движения, минуя вычисление корней.

Критерии устойчивости подразделяют на *алгебраические* и *частотные*. К алгебраическим принадлежат критерии Рауса (1875) и критерий Гурвица (1895). Оба критерия основаны на рассмотрении числовых значений коэффициентов характеристического уравнения, которое принято записывать в следующем виде:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Предварительно заметим, что уравнения движения первого и второго порядка устойчивы, если все коэффициенты характеристического уравнения больше нуля. Для уравнений более высокого порядка положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Если все коэффициенты уравнения положительные, то все его вещественные корни отрицательные, но среди комплексных корней могут быть и корни с положительной вещественной частью.

При равенстве нулю коэффициента a_n движение механизма соответствует границе устойчивости. При равенстве нулю какого-либо другого коэффициента движению механизма либо на границе устойчивости, либо неустойчиво.

Для более детального исследования соотношений между коэффициентами характеристического уравнения Раус предложил составлять таблицу, названную впоследствии его именем (табл. 2).

Первая строка таблицы содержит четные коэффициенты характеристического уравнения, вторая строка — нечетные коэффициенты. В последующих строках записывают вычисления по указанным в них формулам. Всего в таблице заполняют $n + 1$ строк.

Критерий Рауса формулируется следующим образом: *для того чтобы движение было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели одинаковый знак*. Обычно характеристическое уравнение приводят к виду, когда $a_0 > 0$. Тогда для устойчивости движения все остальные коэффициенты первого столбца также должны быть положительными, т. е. $c_{i1} > 0$, $i = 2, 3, \dots, n + 1$.

Т а б л и ц а 2

Номер строк	Вспомогательные коэффициенты	Номер столбца			
		1	2	3	...
1	—	$c_{11}=a_0$	$c_{12}=a_2$	$c_{13}=a_4$	...
2	—	$c_{21}=a_1$	$c_{22}=a_3$	$c_{23}=a_5$	...
3	$r_3=\frac{c_{11}}{c_{21}}$	$c_{31}=$ $=c_{12}-r_3c_{22}$	$c_{32}=$ $=c_{13}-r_3c_{23}$	$c_{33}=$ $=c_{14}-r_3c_{24}$	...
...	...	...	...	...	...
i	$r_i=\frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$	$c_{i1}=c_{i-2,2}-$ $-r_i c_{i-1,2}$	$c_{i2}=c_{i-2,3}-$ $-r_i c_{i-1,3}$	$c_{i3}=c_{i-2,4}-$ $-r_i c_{i-1,4}$	...
...	...	...	...	...	...

Если один из коэффициентов первого столбца равен нулю, а остальные — положительные, то характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней (граница устойчивости).

Критерий Гурвица получается из критерия Рауса и для уравнений не выше пятого порядка оказывается проще. Для того чтобы применить критерий Гурвица, составляют таблицу из коэффициентов характеристического уравнения

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n.
 \end{array} \quad (5.11)$$

По диагонали таблицы от левого верхнего угла выписывают коэффициенты, начиная с a_1 до a_n . Затем каждый столбец таблицы дополняют так, чтобы вверх от диагонали индексы коэффициентов увеличивались, а вниз — уменьшались. Вместо коэффициентов с индексом меньше 0 и больше n пишут ноль.

Критерий Гурвица формулируется так: движение устойчиво, если при $a_0 > 0$ положительны n определите-

лей Гурвица, получаемых из (5.11), т. е.

$$\begin{aligned} a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Движение соответствует границе устойчивости, если $\Delta_n = 0$. Для $n = 2$ условием устойчивости является лишь положительность коэффициентов характеристического уравнения. Для $n = 3$ должны удовлетворяться следующие неравенства:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, \dots, 3), \quad a_1 a_2 > a_0 a_3. \quad (5.12)$$

Для $n = 4$:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, \dots, 4), \quad a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4. \quad (5.13)$$

Для $n = 5$:

$$\begin{aligned} a_i > 0 \quad (i = 0, \dots, 5), \quad a_1 a_2 > a_0 a_3, \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) > (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Частотные критерии устойчивости Найквиста и Михайлова. К частотным критериям устойчивости принадлежат критерии Найквиста (1932) и Михайлова (1938). Оба критерия используются преимущественно при исследовании систем автоматического регулирования, так как позволяют учесть влияние обратных связей на устойчивость регулирования. Однако и при исследовании устойчивости движений в механизмах они могут быть полезны, в особенности в тех случаях, когда требуется установить, в каких пределах можно изменять тот или иной параметр механизма.

Критерий Михайлова, как и критерий Рауса и Гурвица, основан на рассмотрении характеристического уравнения. С этой целью на комплексной плоскости строится годограф характеристического вектора $R(i\omega)$, который получается из характеристического полинома

$$R = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n$$

путем подстановки $r = i\omega$:

$$R(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (i\omega) + a_n = X \pm iY,$$

где

$$X = a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \dots,$$

$$Y = \omega (a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \dots).$$

Кривую, которую описывает конец вектора $R(i\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до ∞ , называют *годографом Михайлова*. Годограф начинается при

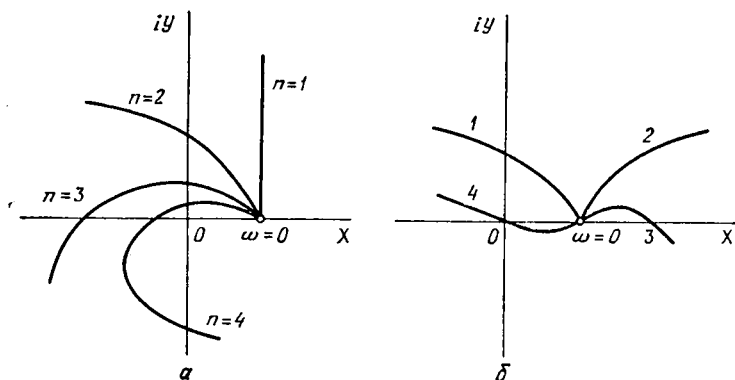


Рис. 30

$\omega = 0$ на вещественной оси в точке a_n и при $\omega = \infty$ уходит в бесконечность в квадранте, соответствующем порядку характеристического уравнения. Для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до ∞ годограф Михайлова начинался на положительной вещественной полуоси и обошел в положительном направлении (против хода часовой стрелки) последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль.

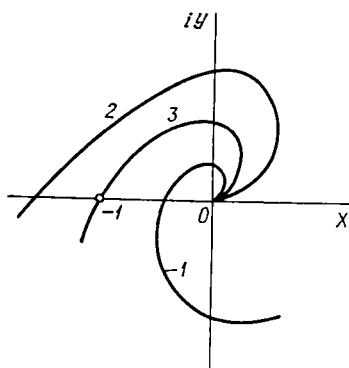


Рис. 31

На рис. 30, а показаны годографы Михайлова устойчивых систем 1-го — 4-го порядков с равными значениями коэффициента a_n . При четном n годограф уходит в бесконечность вдоль оси X , а при нечетном n — вдоль оси Y .

На рис. 30, б показаны годографы неустойчивых систем 4-го порядка для случаев, когда характеристический полином имеет один вещественный корень (кривая 1), два положительных вещественных корня (кривая 2), два комплексных сопряженных корня с положительной вещественной частью (кривая 3), два чисто мнимых корня и положительный вещественный корень (кривая 4).

При использовании критерия Найквиста устойчивость системы определяется по амплитудно-фазовой частотной характеристике, построенной в виде годографа частотной передаточной функции $W(i\omega)$. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (годограф $W(i\omega)$) не охватывала точку с координатами $[-1, i0]$ при изменении ω от 0 до ∞ .

На рис. 31 показаны три случая: система устойчива (кривая 1), система неустойчива (кривая 2), система на границе устойчивости (кривая 3).

Глава VI. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

§ 26. Вероятностные характеристики случайных величин

Случайные величины. *Случайной величиной* называется переменная величина, значения которой зависят от случая. Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. Дискретная случайная величина U принимает конечное число значений u_k при $k=1, \dots, s$ или счетное число значений u_k при $k=1, \dots$ *). Непрерывная случайная величина может принимать любые значения в некотором интервале.

Вероятность случайной величины. Пусть проведено N измерений случайной величины U . При достаточно большом числе N значения случайной величины u_k , если ее рассматривать как дискретную ($k=1, \dots, s$), будут повторяться. Число повторений значения u_k обозначим через v_k . Отношение числа повторений значения u_k дискрет-

*) Здесь и далее случайные величины обозначены прописными буквами; их реализации (выборочные значения) — соответствующими строчными буквами.

ной случайной величины к общему числу ее значений N назовем *вероятностью* $P(u_k)$ значения u_k при данном числе всех значений N^*):

$$P(u_k) = \frac{v_k}{N}. \quad (6.1)$$

Из формулы (6.1) следует, что вероятность есть безразмерная величина, лежащая в пределах от 0 до 1. С увеличением числа всех значений дискретной случайной величины вероятность $P(u_k)$ для каждого значения u_k стремится к своему предельному значению. Иногда только это значение и называют вероятностью, а отношение (6.1) при данном числе N называют *частотой события* или *частотностью*.

Вероятность того, что дискретная случайная величина U может принять одно из двух значений u_1 и u_2 , равна сумме вероятностей этих значений:

$$P(u_1, u_2) = P(u_1) + P(u_2). \quad (6.2)$$

Сумма вероятностей всех измеренных значений равна 1, так как сумма чисел повторений v_k равна общему числу измерений N :

$$\sum_{k=1}^s P(u_k) = 1. \quad (6.3)$$

Плотность вероятности. Дискретная случайная величина полностью определяется значениями вероятностей $P(u_k)$ при $k=1, \dots, s$. Для непрерывной случайной величины U такой способ ее определения непригоден, так как вероятность того, что она примет заданное значение u_k , равна нулю. Это положение следует из формулы (6.1) при условии, что число возможных случаев N бесконечно. Однако вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, заключенное в пределах от u до $u + du$, уже отлична от нуля и может быть представлена в виде дифференциала, называемого *элементом вероятности* распределения непрерывной случайной величины:

$$P(u \leq U \leq u + du) = f(u) du, \quad (6.4)$$

где $f(u)$ — плотность вероятности. Размерность плотности

*) P — знак вероятности.

вероятности равна единице, деленной на размерность случайной величины.

Суммирование элементов вероятности на участке от u_1 до u_2 дает вероятность того, что непрерывная случайная величина U примет какое-либо значение в интервале от u_1 до u_2 :

$$P(u_1 \leq U \leq u_2) = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du. \quad (6.5)$$

Отсюда следует, что задание плотности вероятности $f(u)$ определяет вероятность появления значений u случайной величины U , т. е. дает распределение всех наблюдаемых или измеряемых значений случайной величины U в зависимости от значений u . Другой возможный путь определения вероятностей случайной величины состоит в задании функции распределения.

Функция распределения. *Функцией распределения вероятности* (сокращенно, *функцией распределения*) случайной величины U называется вероятность того, что ее значение не превышает u :

$$F(u) = P(U < u). \quad (6.6)$$

Если непрерывная случайная функция U определена на интервале $(-\infty < u < \infty)$, то функция распределения

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(u) du \quad (6.7)$$

с увеличением u может только возрастать от $F(-\infty) = 0$ до $F(\infty) = 1$. Первое условие следует непосредственно из интеграла (6.7), а второе условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \quad (6.8)$$

означает, что любое заданное значение u лежит в пределах от $-\infty$ до ∞ и, следовательно, вероятность его попадания в этот интервал равна 1.

Из соотношения (6.7) между плотностью вероятности $f(u)$ и функцией распределения $F(u)$ следует

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du}, \quad (6.9)$$

т. е. плотность вероятности есть производная от функ-

ции распределения по аргументу u . На рис. 32, а показан график функции распределения $F(u)$ и на рис. 32, б — соответствующий ей график плотности вероятности.

Математическое ожидание. Для оценки среднего значения случайной величины принимают средневзвешенное

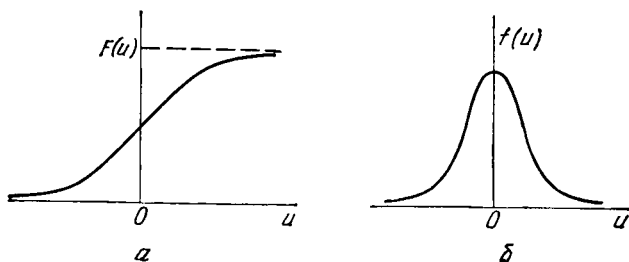


Рис. 32

значение при весах, равных вероятности каждой из реализаций случайной величины. Это среднее значение называют также *средневероятностным*. Для дискретной случайной величины U с учетом того, что сумма вероятностей (весов) равна 1, средневероятностное значение m_u вычисляется по формуле

$$m_u = \sum_{k=1}^s u_k P(u_k), \quad (6.10)$$

где u_k — реализация случайной величины U , $P(u_k)$ — вероятность этой реализации.

Операцию вычисления средневероятностного значения называют вероятностным осреднением и обозначают угловыми скобками. Тогда формула (6.10) принимает вид

$$\langle U \rangle = \sum_{k=1}^s u_k P(u_k). \quad (6.11)$$

Иногда средневероятностное значение какой-либо величины называют *математическим ожиданием*, и соответственно оператор математического ожидания обозначают через M (или E). Для непрерывной случайной величины U с плотностью вероятности $f(u)$ средневероятностное значение (математическое ожидание) получается из формулы (6.11) предельным переходом:

$$m_u = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du. \quad (6.12)$$

Дисперсия случайной величины. В качестве меры рассеяния реализаций случайной величины (дисперсии) принимается средневероятностное значение квадрата отклонения реализации u от математического ожидания (средневероятностного значения случайной величины).

Для дискретной случайной величины U дисперсия σ_u^2 выражается суммой

$$\sigma_u^2 = \sum_{k=1}^s (u_k - m_u)^2 P(u_k). \quad (6.13)$$

Для непрерывной случайной величины имеем

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_u)^2 f(u) du. \quad (6.14)$$

Оператор вычисления дисперсии иногда обозначают через D . Например, $\sigma_u^2 = D(u)$. Неотрицательное значение квадратного корня из дисперсии, обозначаемое через σ_u , называется *стандартным* или *средним квадратическим отклонением*.

Нормальное распределение. В задачах теории механизмов и машин наиболее часто встречающимся распределением случайной величины является *нормальное распределение* (распределение по Гауссу), при котором плотность вероятности имеет вид

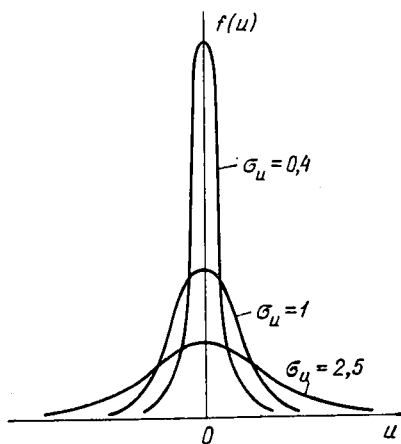


Рис. 33

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-m_u)^2}{2\sigma_u^2}}. \quad (6.15)$$

На рис. 33 показаны кривые нормального распределения при $m_u = 0$ и $\sigma_u = 0,4; 1,0; 2,5$.

§ 27. Вероятностные характеристики случайных функций

Случайные функции. Случайной функцией $U(t)$ называется функция вещественного параметра t , значения которой являются случайными величинами. Иначе случайную функцию можно определить как совокупность случайных величин, зависящих от одного вещественного параметра t . Случайную функцию $U(t)$ времени t называют также *случайным процессом*. Например, на рис. 34

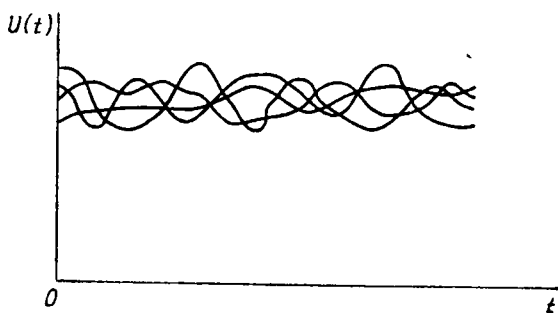


Рис. 34

показаны графики зависимости силы сопротивления от времени, которые записаны для одного и того же режима движения звеньев механизма, но отличаются между собой в зависимости от случайных изменений силы сопротивления. Эти графики могут рассматриваться как реализации $u(t)$ случайного процесса $U(t)$. Для каждого момента времени $t_1, \dots, t_n$ значения случайного процесса $U(t)$, которые обозначим через $u_1, \dots, u_n$, можно рассматривать как реализации случайных величин $U(t_1), \dots, U(t_n)$. Тогда случайный процесс $U(t)$ представится как совокупность случайных величин $U(t_1), \dots, U(t_n)$. Эта совокупность может быть как дискретной, так и непрерывной.

Функции распределения случайного процесса. Для заданного момента времени t_1 функция распределения случайного процесса $U(t)$ называется *одномерной* и определяется так же, как и функция распределения случайной величины, т. е. как вероятность того, что значение $U(t_1)$ не превышает u_1 :

$$F(u_1, t_1) = P[U(t_1) \leq u_1], \quad (6.16)$$

где u_1 — любая реализация случайного процесса $U(t)$ при $t = t_1$.

Для любого момента времени t одномерная функция распределения случайного процесса $U(t)$ есть функция двух переменных u и t , удовлетворяющая условию

$$F(u, t) = P[U(t) < u]. \quad (6.17)$$

Двумерная функция распределения случайного процесса определяется для двух моментов времени t_1 и t_2 как вероятность того, что значение $U(t_1)$ не превышает u_1 , а значение $U(t_2)$ не превышает u_2 :

$$F(u_1, t_1, u_2, t_2) = P[U(t_1) < u_1; U(t_2) < u_2]. \quad (6.18)$$

Аналогично составляются n -мерные (или совместные) функции распределения случайного процесса.

Плотности вероятности случайного процесса. Одномерная плотность вероятности случайного процесса $U(t)$ определяется как частная производная по аргументу u одномерной функции распределения

$$f(u, t) = \frac{\partial F(u, t)}{\partial u}. \quad (6.19)$$

Для заданного момента времени t_1 имеем

$$f(u_1, t_1) du_1 = P(u_1 \leq U(t_1) < u_1 + du_1). \quad (6.20)$$

Связь между одномерными плотностью вероятности и функцией распределения по аналогии с формулой (6.7) имеет вид

$$F(u, t) = \int_{-\infty}^u f(u, t) du. \quad (6.21)$$

Предельное значение одномерной функции распределения случайного процесса при $u \rightarrow \infty$ равно 1, так как в заданных пределах изменения u и t встречается любое значение $U(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u, t) du = 1. \quad (6.22)$$

Двумерная плотность вероятности равна смешанной частной производной от двумерной функции распределения по аргументам u_1 и u_2 :

$$f(u_1, t_1; u_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(u_1, t_1; u_2, t_2)}{\partial u_1 \partial u_2}. \quad (6.23)$$

Для двух заданных моментов времени t_1 и t_2 имеем:
 $f(u_1, t_1; u_2, t_2) =$

$$= P[u_1 \leq U(t_1) < u_1 + du_1; u_2 \leq U(t_2) < u_2 + du_2]. \quad (6.24)$$

Двумерная функция распределения связана с двумерной плотностью вероятности соотношением

$$F(u_1, t_1; u_2, t_2) = \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} f(u_1, t_1; u_2, t_2) du_2 du_1. \quad (6.25)$$

Предельное значение двумерной функции распределения при $u \rightarrow \infty$, выраженное через двумерную плотность вероятности, также равно 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, t_1; u_2, t_2) du_1 du_2 = 1. \quad (6.26)$$

Аналогично составляются n -мерные (или совместные) плотности вероятности случайного процесса.

Математическое ожидание случайного процесса. Для вычисления средневременного значения (математического ожидания) случайного процесса $U(t)$ в момент времени t_1 можно воспользоваться формулой (6.12)

$$m_u(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 f(u_1, t_1) du_{11},$$

где $f(u_1, t_1)$ — одномерная плотность вероятности при $t = t_1$.

Математическое ожидание случайного процесса $U(t)$ при любом значении t есть функция времени t :

$$m_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u, t) du, \quad (6.27)$$

где $f(u, t)$ — одномерная плотность вероятности.

Дисперсия случайного процесса. Для вычисления дисперсии случайного процесса $U(t)$, как функции времени t , можно воспользоваться формулой, аналогичной формуле (6.14):

$$\sigma_u^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u - m_u)^2 f(u, t) du. \quad (6.28)$$

Корреляционная функция случайного процесса. Для характеристики случайных процессов кроме средневре-

постного значения (математического ожидания) и квадрата отклонения от этого значения (дисперсии) надо еще знать, существует ли связь между вероятностными характеристиками случайного процесса в моменты времени t и $t + \tau$. Эта связь устанавливается *корреляционной функцией*

$$K_u(t_1, t_2) = \langle [U(t_1) - m_u(t_1)][U(t_2) - m_u(t_2)] \rangle, \quad (6.29)$$

т. е. корреляционная функция есть средневероятностное значение произведения отклонений случайного процесса от его средневероятностного значения в любые два момента времени.

Для непрерывной случайной величины корреляционная функция выражается через двумерную плотность вероятности:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u_1 - m_u(t_1)][u_2 - m_u(t_2)] f(u_1, t_1; u_2, t_2) du_2 du_1. \quad (6.30)$$

При $t_2 = t_1$ корреляционная функция совпадает с дисперсией и формула (6.30) переходит в (6.28).

Вспомогательный случайный процесс $U^0(t) = U(t) - \langle U(t) \rangle$ называют *центрированным*. Тогда формулы (6.29) и (6.30) принимают вид:

$$K_u(t_1, t_2) = \langle U^0(t_1) U^0(t_2) \rangle, \\ K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1^0(t_1) u_2^0(t_2) f(u_1^0, t_1; u_2^0, t_2) du_2^0 du_1^0.$$

§ 28. Основные виды случайных процессов

Стационарный случайный процесс. Случайный процесс называется *стационарным*, если все его вероятностные характеристики инвариантны относительно выбора начала времени, т. е. не изменяются при сдвиге времени. Реальный случайный процесс приближенно может считаться стационарным, если его характеристики изменяются во времени достаточно медленно. В дальнейшем рассматриваются только те задачи динамики машин при случайных воздействиях, для решения которых достаточно знать математические ожидания случайных функций и корреляционные функции. Поэтому условия стационар-

ности случайного процесса можно для этих задач принять менее строгими, а именно, случайный процесс $U(t)$ будем считать стационарным, если его математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$m_u(t) = m_u = \text{const}, \quad K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2 - t_1) \equiv K_u(\tau).$$

При $\tau = 0$ корреляционная функция переходит в дисперсию

$$\sigma_u^2 = K_u(0) = \text{const}.$$

Отсюда следует, что $K_u \geq 0$. Кроме того, согласно определению $K_u(\tau) = K_u(-\tau)$, т. е. корреляционная функция стационарного процесса есть четная функция от τ . С увеличением τ корреляционная функция стационарного процесса уменьшается: $K_u(\tau) \leq K(0)$, так как при достаточно большом τ функции $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t + \tau)$ могут считаться независимыми и среднеевероятностное значение их произведения приближается к нулю.

Эргодический случайный процесс. Стационарный случайный процесс $U(t)$ называется *эргодическим*, если одна его реализация $u(t)$ содержит всю информацию о вероятностных свойствах процесса. Особенность этого процесса состоит в возможности замены осреднения по множеству реализаций осреднением по времени:

$$\langle U(t) \rangle = m_u \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt, \quad (6.31)$$

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [u(t) - m_u][u(t + \tau) - m_u] dt. \quad (6.32)$$

Принадлежность стационарного случайного процесса к эргодическим процессам устанавливается обычно путем обработки экспериментальных данных по нескольким реализациям.

Нормальный случайный процесс. Случайный процесс $U(t)$ называется *нормальным* или *гауссовым*, если его n -мерная плотность вероятности при любых значениях $t_1, \dots, t_n$ и любом n является нормальным распределением. Одномерная плотность вероятности нормального

распределения по аналогии с (6.15) имеет вид

$$f(u, t) = \frac{1}{\sigma_u(t) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[u(t) - m_u(t)]^2}{2\sigma_u^2(t)}} \quad (6.33)$$

где $m_u(t)$ — математическое ожидание, σ_u^2 — дисперсия.

Белый шум. Стационарный случайный процесс $U(t)$, который характеризуется тем, что в нем отсутствует какая-либо взаимная связь между предыдущими и последующими значениями $u(t)$, называется *абсолютно случайным процессом* или *белым шумом*. Для этого процесса корреляционная функция равна нулю при всех значениях τ , кроме $\tau = 0$, когда она стремится к бесконечности. Отсюда следует, что корреляционную функцию можно представить в виде

$$K_u(\tau) = b\delta(\tau), \quad (6.34)$$

где b — постоянный множитель, характеризующий интенсивность белого шума, $\delta(\tau)$ — дельта-функция, т. е. функция, равная нулю при всех значениях τ , кроме $\tau = 0$, при котором она обращается в бесконечность, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

§ 29. Определение вероятностных характеристик обобщенных координат механизма по заданным вероятностным характеристикам внешних сил

Задачи исследования динамики механизмов при случайных воздействиях. Первая задача состоит в отыскании вероятностных характеристик обобщенных координат механизма по заданным вероятностным характеристикам обобщенных (приведенных) сил. При решении этой задачи используются стохастические дифференциальные уравнения движения механизма, в которых обобщенные координаты и обобщенные силы являются случайными функциями.

Вторая задача — обратная по отношению к первой — состоит в определении вероятностных характеристик обобщенных сил по известным вероятностным характеристикам

кам обобщенных координат, которые обычно находятся из эксперимента.

Третья задача заключается в построении уравнения движения механизма и определении его коэффициентов по известным вероятностным характеристикам обобщенных сил и обобщенных координат. Эту задачу называют *задачей идентификации*. Иногда форму уравнения движения и часть его параметров считают известными. Тогда цель идентификации состоит в отыскании остальных параметров. Такая задача ставится в технической диагностике.

Во всех трех задачах коэффициенты (параметры) уравнений движения механизма могут быть также случайными функциями.

Соотношения между вероятностными характеристиками обобщенных сил и обобщенных координат в линейных уравнениях движения. При решении первой задачи исследования динамики механизмов с одной степенью свободы при случайных воздействиях ограничимся рассмотрением линейного уравнения движения механизма, которое представим в безразмерной форме

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx,$$

где x — безразмерная обобщенная сила, y — безразмерная обобщенная координата, T_1 , T_2 — постоянные времени, k — передаточный коэффициент.

Примем, что T_1 , T_2 и k — постоянные величины, x и y — случайные процессы ($U_x(t)$ и $U_y(t)$). Тогда каждой реализации случайного процесса $U_x(t)$ соответствует реализация случайного процесса $U_y(t)$, определяемого из уравнения

$$T_2^2 \ddot{u}_y + T_1 \dot{u}_y + u_y = k u_x, \quad (6.35)$$

Если случайный процесс $U_x(t)$ есть стационарный процесс с математическим ожиданием m_{u_x} и корреляционной функцией $K_{u_x}(\tau)$, то случайный процесс $U_y(t)$ также будет стационарным, но с другими вероятностными характеристиками m_{u_y} и $K_{u_y}(\tau)$. Для стационарных процессов средневероятностные значения функций $\ddot{u}_y$ и $\dot{u}_y$ равны нулю, а математическое ожидание (средневероятностное значение u_y) m_{u_y} определяется из соотношения

$$m_{u_y} = k m_{u_x}. \quad (6.36)$$

Чтобы найти соотношение, связывающее корреляционные функции $K_{u_y}(\tau)$ и $K_{u_x}(\tau)$, предварительно введем в рассмотрение другую вероятностную характеристику, называемую *спектральной плотностью стационарного случайного процесса*, которая получается из корреляционной функции преобразованием Фурье.

Преобразование Фурье. При разложении функции $f(t)$ в ряд Фурье с периодом T угловые частоты гармоник имеют дискретные значения $\omega_1 = 2\pi/T$, $\omega_2 = 4\pi/T$, ..., т. е. они образуют точечный спектр частот. При $T \rightarrow \infty$ ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с непрерывным спектром частот. Комплексная форма интеграла Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right) d\omega, \quad (6.37)$$

где ω — угловая частота, ξ — переменная интегрирования.

Обозначим комплексную величину, стоящую в скобках, через $F(i\omega)$ и заменим переменную интегрирования ξ на t :

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.38)$$

Эта формула выражает преобразование действительной функции $f(t)$ в комплексную функцию $F(i\omega)$ и называется *преобразованием Фурье*. Оно может рассматриваться как частный случай преобразования Лапласа при $s = i\omega$, отличаясь лишь пределами интегрирования (от $-\infty$ до ∞). Обратный переход от функции $F(i\omega)$ к функции $f(t)$ выполняется по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.39)$$

Для четной функции $f(t)$ формулы (6.38) и (6.39) принимают вид:

$$F_c(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (6.40)$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (6.41)$$

В этом случае действительная функция $f(t)$ преобразуется в действительную функцию $F_c(\omega)$, которая называется *косинус-преобразованием* для данной функции $f(t)$.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса. Корреляционная функция $K_u(t)$ стационарного случайного процесса есть функция четная, и потому ее спектральная плотность определяется по (1.27):

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_u(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (6.42)$$

При $\tau = 0$ корреляционная функция дает дисперсию σ_u^2 , которая для стационарного процесса является постоянной. Поэтому спектральную плотность (6.42) называют также *спектральной плотностью дисперсии стационарного случайного процесса* (кратко — *спектральной плотностью случайного процесса*).

На основании свойств косинус-преобразования Фурье при $F_c(\omega) = \pi S(\omega)$ корреляционная функция $K_u(\tau)$ может быть выражена через ее спектральную плотность

$$K_u(\tau) = \int_0^{\infty} S_u(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (6.43)$$

Следовательно, дисперсия стационарного случайного процесса

$$\sigma_u^2 = \int_0^{\infty} S_u(\omega) d\omega. \quad (6.44)$$

Отсюда следует физический смысл спектральной плотности $S_u(\omega)$ как функции, которая описывает распределение дисперсий гармоник, составляющих случайный процесс, по частотам непрерывного спектра. Заметим также, что, согласно (6.44), дисперсия стационарного случайного процесса равна площади графика $S_u(\omega)$ в пределах от 0 до ∞ .

Соотношения (6.42) и (6.43) дают возможность найти спектральную плотность дисперсии $S_u(\omega)$ по известной корреляционной функции $K_u(\tau)$ и наоборот. Пусть, например, в ограниченном диапазоне частот ($0 < \omega < \omega_0$) спектральная плотность дисперсии равна постоянной величине S_0 , а вне указанного диапазона равна нулю (рис. 35, а). В этом случае случайный процесс принято

называть *ограниченным белым шумом*. Из (6.44) следует, что площадь графика $S_u(\omega)$ равна дисперсии σ_u^2 и, следовательно, $\sigma_u^2 = S_0 \omega_0$. Корреляционная функция определяется по соотношению (6.43)

$$K_u(\tau) = \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma_u^2}{\omega_0} \cos \omega \tau d\omega \equiv \frac{\sigma_u^2}{\omega_0 \tau} \sin \omega_0 \tau,$$

или

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{\tau} \sin \omega_0 \tau.$$

График функции $K_u(\tau)$ показан на рис. 35, б.

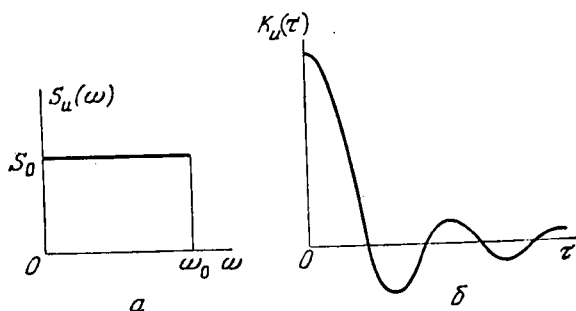


Рис. 35

Связь между спектральными плотностями дисперсий обобщенных сил и обобщенных координат для линейных уравнений движения. При гармонических вынужденных колебаниях комплексные амплитуды гармонической вынуждающей силы $A_1(i\omega)$ и обобщенной координаты $A_2(i\omega)$ связаны соотношением

$$A_2(i\omega) = W(i\omega) A_1(i\omega),$$

где $W(i\omega)$ — частотная передаточная функция.

Действительные амплитуды вынуждающей силы A_1 и обобщенной координаты A_2 связаны аналогичным соотношением

$$A_2 = |W(i\omega)| A_1.$$

Это соотношение сохраняется и при случайных обобщенных силах, т. е. амплитуда случайных гармонических колебаний равна амплитуде случайной вынуждающей

силы, умноженной на модуль частотной передаточной функции. Соответственно дисперсия обобщенной координаты $\sigma_{u_y}^2$ равна дисперсии обобщенной силы $\sigma_{u_x}^2$, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной функции

$$\sigma_{u_y}^2 = |W(i\omega)|^2 \sigma_{u_x}^2.$$

По аналогичному соотношению преобразуются спектральные плотности обобщенной координаты S_{u_y} и обобщенной силы S_{u_x} :

$$S_{u_y}(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_{u_x}(\omega). \quad (6.45)$$

После определения спектральной плотности вероятности S_{u_y} можно найти корреляционную функцию K_{u_y} по соотношению (6.43) и дисперсию $\sigma_{u_y}^2$ по (6.44).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

Глава VII. ФРИКЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

§ 30. Колебания, вызываемые скачком силы трения

Колебания в тормозах. Замечено, что при торможении вращающегося или прямолинейно движущегося звена прижатием тормозной колодки, которая может иметь малые упругие перемещения, возникают колебания колодки относительно положения статического равновесия. В первом приближении возникновение этих колебаний можно объяснить скачком силы трения при переходе от покоя к движению.

Пусть, например, ползун массой m (рис. 36, а) лежит на шероховатой поверхности, движущейся с постоянной скоростью v_0 ; z — смещение ползуна от положения, при котором пружины не натянуты и не сжаты; c — коэффициент жесткости (суммарный для двух пружин). Наличие силы трения приводит к тому, что поверхность при движении сначала увлекает за собой ползун, и как только сила упругости пружины $F_{\text{пр}} = cz$ становится равной максимальной силе трения покоя $\bar{F}_{\text{тп}}$, происходит срыв ползуна, а сила трения скачком падает до значения силы трения скольжения $F_{\text{т}}$. Скачок силы трения $\Delta F = \bar{F}_{\text{тп}} - F_{\text{т}}$ вызывает упругие колебания ползуна, которые называют *релаксационными*, так как после срыва ползуна сила упругости пружины некоторое время продолжает расти, а затем ослабевает (релаксирует).

До срыва ползун движется равномерно со скоростью $\dot{z} = v_0$. После срыва его движение определяется уравнением

$$m\ddot{z} = F_{\text{т}} - cz \quad (7.1)$$

при начальных условиях $t = 0$, $z = z_{\text{п}}$, $\dot{z} = v_0$, где $z_{\text{п}} = F_{\text{тп}}/c$ — смещение ползуна в момент срыва.

Введем безразмерное перемещение $y = z/z_0$, где $z_0 = F_{\text{т}}/c$ — статическое перемещение пружины под действием

силы F_7 . Тогда уравнение движения (7.1) получает вид

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \lambda^2,$$

где $\lambda = \sqrt{c/m}$ — собственная частота системы.

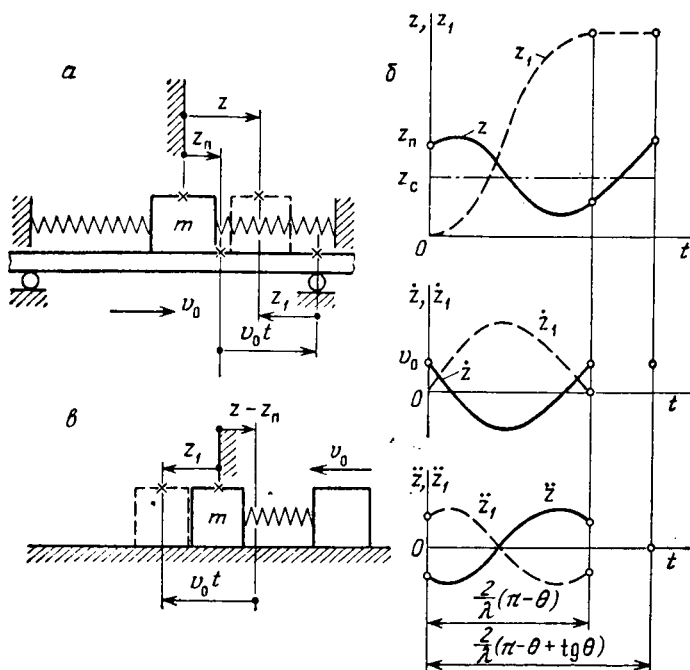


Рис. 36

Подстановкой $y = y_1 + 1$ это уравнение приводится к однородному, решение которого по (3.22) имеет вид

$$y = C \sin(\lambda t + \theta) + 1,$$

где

$$C = \sqrt{(y_0 - 1)^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\lambda^2}}, \quad \theta = \arctg \frac{(y_0 - 1)\lambda}{\dot{y}_0}.$$

Возвращаясь к переменной z , при начальных условиях $y_0 = z_n/z_c$ и $\dot{y}_0 = v_0/z_c$ получаем

$$z = C_z \sin(\lambda t + \theta) + z_c, \quad (7.2)$$

где $C_z = \sqrt{(z_n - z_c)^2 + \frac{v_0^2}{\lambda^2}}, \quad \theta = \arctg \frac{(z_n - z_c)\lambda}{v_0}.$

Отсюда скорость и ускорение ползуна

$$\dot{z} = \lambda C_z \cos(\lambda t + \theta), \quad \ddot{z} = -\lambda^2 C_z \sin(\lambda t + \theta).$$

На рис. 36, б показаны графики изменения z , $\dot{z}$ и $\ddot{z}$ в зависимости от времени t , причем график $z(t)$ дает также в другом масштабе график изменения силы упругости пружины. Штрихпунктирной линией показано значение z положения статического равновесия. В отличие от обычных гармонических колебаний еще до истечения времени, равного периоду колебаний с собственной частотой, скорость ползуна, достигнув значения v_0 , перестает возрастать, несмотря на то, что ускорение ползуна в этот момент времени остается положительным. Скорость ползуна не может превысить скорость движущейся поверхности v_0 , так как при $\dot{z} > v_0$ изменяется знак относительной скорости $\dot{z} - v_0$ и, следовательно, изменяется направление силы трения, которая из силы, движущей для ползуна, превращается в силу сопротивления. В этот момент времени движущаяся со скоростью v_0 плоскость подхватывает ползун, их относительное движение прекращается и сила трения вновь становится силой трения покоя до следующего срыва ползуна.

Прерывистое движение ползуна в направляющих. Динамическая модель, показанная на рис. 36, а, путем обращения движения приводится к модели, соответствующей медленным движениям ползуна в направляющих металлорежущих станков и некоторых приборов (рис. 36, в). Предполагается, что на ползун действует только сила трения в направляющих и сила упругости пружины $F_{\text{пр}}$, которая имитирует влияние упругости звеньев. Правый конец пружины движется с постоянной скоростью v_0 , а ее левый конец получает перемещение z_1 , отсчитываемое от положения, соответствующего началу движения ползуна массы m . Коэффициент жесткости пружины обозначен через c .

Как и в предыдущем примере, считаем, что сила трения покоя $F_{\text{тр}}$ больше силы трения скольжения $F_{\text{т}}$. Начало движения ползуна (срыв) произойдет, когда сила упругости пружины станет равной $F_{\text{тр}}$. В момент времени t сила упругости пружины, которая является движущей, имеет значение $F_{\text{пр}} = F_{\text{тр}} - c(z_1 - v_0 t)$, а сила трения $F_{\text{т}}$ является силой сопротивления. Поэтому дифференциальное уравнение движения ползуна имеет вид

$$m\ddot{z}_1 = F_{\text{тр}} - c(z_1 - v_0 t) - F_{\text{т}}. \quad (7.3)$$

Из условий обращения движения видно, что перемещение ползуна z_1 в модели по рис. 36, в равно относительно перемещению ползуна по плоскости в модели по рис. 36, а:

$$z_1 = v_0 t - z + z_n. \quad (7.4)$$

Уравнение движения (7.3) после замены переменной z_1 на z по условию (7.4) совпадает с уравнением (7.1). Поэтому решение уравнения (7.3) находим из решения (7.2) после подстановки (7.4):

$$z_1 = v_0 t + z_n - z_0 - C_z \sin(\lambda t + \theta), \quad (7.5)$$

где

$$C_z = \sqrt{(z_n - z_0)^2 + \frac{v_0^2}{\lambda^2}}, \quad \theta = \arctg \frac{(z_n - z_0)\lambda}{v_0}.$$

После дифференцирования по времени имеем

$$\dot{z}_1 = v_0 - \lambda C_z \cos(\lambda t + \theta), \quad \ddot{z} = \lambda^2 C_z \sin(\lambda t + \theta).$$

Графики z_1 , $\dot{z}_1$ и $\ddot{z}_1$ показаны на рис. 36, б штриховыми линиями. Сравнение движения ползуна в двух рассмотренных случаях показывает, что участку совместного движения ползуна (колодки тормоза) и плоскости с постоянной скоростью v_0 соответствует выстой ползуна в направляющих, моменту срыва колодки — момент начала движения ползуна после выстоя и т. д.

Автоколебания. Автоколебаниями называют незатухающие колебания, поддерживаемые поступлением энергии от неколебательного источника, которое регулируется движением самой системы. Под регулированием поступления энергии понимается, что силы, подводимые к системе от источника энергии, меняются во времени в зависимости от самого движения системы и при отсутствии движения равны нулю.

В рассмотренном примере источником энергии неколебательного характера является движение плоскости с постоянной скоростью v_0 . Энергия, доставляемая этим источником в систему, равна работе сил трения. Регулирование поступления энергии в зависимости от движения системы выражается изменением силы трения, которая при отсутствии движения равна нулю, а во время движения изменяется от $F_{\text{тр}}$ до F_r (скачок силы трения). Фазовая траектория $\dot{z}(z)$ при автоколебаниях, вызываемых скачком силы трения, имеет вид замкнутой кривой, повторяющейся во времени (рис. 37, а).

Иногда к указанным признакам автоколебаний добавляют еще условие, что характеристики движения (например, амплитуды и начальные фазы при гармонических колебаниях) определяются свойствами системы и не зависят от начальных условий. В рассмотренном примере начальные условия для уравнения движения

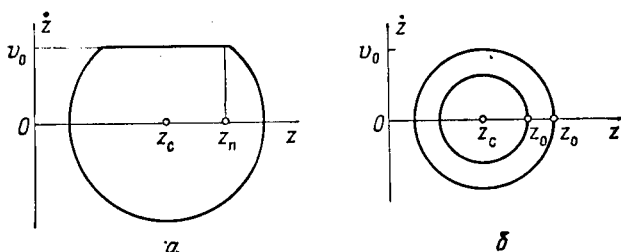


Рис. 37

(7.1), т. е. условия $t = 0$, $z = F_{\text{тр}}/c$, $\dot{z} = v_0$ зависят только от значений силы трения покоя $F_{\text{тр}}$, постоянной скорости движения поверхности v_0 и коэффициента жесткости c , которые являются собственными характеристиками механизма.

Свободные фрикционные колебания при отсутствии скачка силы трения. Незатухающие фрикционные колебания в механизме по рис. 36, а возникают также при равенстве сил трения покоя и движения $F_{\text{тр}} = F_{\text{т}}$, если вследствие случайного толчка ползун будет выведен из положения статического равновесия $z_c = F_{\text{т}}/c$ в положение, определяемое координатой z_0 . После толчка движение ползуна описывается уравнением (7.1), а его решение отличается от решения (7.2) лишь постоянными C и θ , которые находятся из начальных условий $t = 0$, $z = z_0$, $\dot{z} = 0$:

$$z_0 = z_c + C \sin \theta, \quad 0 = \lambda C \cos \theta.$$

Отсюда $\theta = \pi/2$, $C = z_0 - z_c$, и следовательно:

$$z = z_0 - (z_0 - z_c) \cos \lambda t, \quad \dot{z} = \lambda (z_0 - z_c) \sin \lambda t.$$

На рис. 37, б показаны фазовые траектории для двух значений z_0 , удовлетворяющих условию $\dot{z}_{\text{max}} < v_0$ или, что то же, $\lambda(z_0 - z_c) < v_0$. Как и в предыдущем случае, незатухающие колебания поддерживаются за счет энергии от источника неколебательного характера, т. е. от поверх-

ности, движущейся с постоянной скоростью v_0 , но амплитуды этих колебаний и максимальные значения скорости $\dot{z}$ зависят от начальных условий. На этом основании их следует считать свободными колебаниями.

§ 31. Колебания при силах трения, зависящих от скорости скольжения

В предыдущих примерах предполагалось, что сила трения не зависит от скорости скольжения. Теперь покажем, что учет зависимости силы трения от скорости скольжения позволяет выявить такие режимы движения, которые не обнаруживаются при постоянной силе трения.

Рассмотрим, например, возможные режимы колебаний ползуна, прижатого к поверхности, движущейся с постоянной скоростью (см. рис. 36, а) при условии, что зависимость силы трения F_T от скорости скольжения $\tilde{v}_c = v_0 - \dot{z}$ представлена экспериментальной кривой (рис. 38, а), на которой можно отметить значение скорости скольжения $\tilde{v}_m$, соответствующее минимуму силы

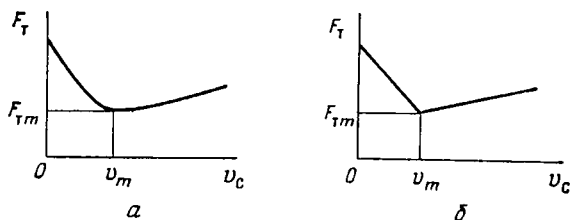


Рис. 38

трения. Если сила трения уменьшается с увеличением скорости скольжения, то характеристику силы трения на этом участке будем называть *падающей*, если увеличивается, то *возрастающей*. Для выявления особенностей режимов движения ползуна достаточно заменить реальную характеристику силы трения ее приближенным выражением, получаемым при линеаризации участков с возрастающей и убывающей силой трения (рис. 38, б).

Обозначим через F_{Tm} модуль силы F_T при скорости скольжения $\tilde{v}_m$, определяющей границу между падающей и возрастающей характеристикой. Тогда для возрастающей характеристики $F_T = F_{Tm} + k_v(\tilde{v}_0 - \dot{z} - \tilde{v}_m)$, где k_v — положительный коэффициент, определяющий наклон воз-

растающей характеристики. Соответственно для падающей характеристики $F_\tau = F_{\tau m} + k_n(\tilde{v}_m - \tilde{v}_0 + \dot{z})$, где k_n — положительный коэффициент, определяющий наклон падающей характеристики.

Предположим, что вследствие случайного толчка ползун выведен из положения статического равновесия, определяемого координатой $z_0 = F_{\tau 0}/c$, где $F_{\tau 0}$ — модуль силы трения при скорости скольжения, равной $\tilde{v}_0$, т. е. при $\dot{z} = 0$. Тогда ползун будет совершать колебания, характер которых зависит от соотношения между скоростями $\tilde{v}_0$ и $\tilde{v}_m$. При $v_0 > v_m$ начало движения ползуна соответствует силе трения для возрастающей характеристики, и уравнение движения ползуна имеет вид

$$m\ddot{z} - k_n \dot{z} + cz = F_{\tau 0}. \quad (7.6)$$

При $v_0 < v_m$, т. е. для падающей характеристики, имеем

$$m\ddot{z} - k_n \dot{z} + cz = F_{\tau 0}. \quad (7.7)$$

Уравнения (7.6) и (7.7) отличаются знаком члена, содержащего $\dot{z}$. Если эти уравнения считать уравнениями возмущенного движения, то по знакам коэффициентов их характеристических уравнений можно судить об устойчивости движения. При возрастающей характеристике силы трения все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Этого признака (см. § 25) достаточно для установления асимптотической устойчивости систем, движение которых описывается уравнениями не выше второго порядка. При падающей характеристике возможно получение неустойчивых режимов, так как в характеристическом уравнении имеется отрицательный коэффициент. Такое же заключение можно сделать, решая уравнения (7.6) и (7.7). Для этого введем безразмерное перемещение $y = z/z_0$. Тогда уравнение (7.6) принимает вид

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = 1, \quad (7.8)$$

где $T_2^2 = m/c$, $T_1 = k_n/c$.

При $T_1 > 2T_2$ уравнение (7.8) относится к аperiodическому типу, а при $T_1 < 2T_2$ — к колебательному. Для обычных характеристик сил трения коэффициент k_n имеет небольшую величину и $T_1 < 2T_2$, т. е. уравнение (7.8) принадлежит к колебательному типу и может быть

представлено в виде уравнения (3.19)

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1 x,$$

где $2\gamma = k_b/m$, $\lambda^2 = c/m$, $k_1 = \lambda^2$, $x = 1$.

После подстановки $y = y_1 + 1$ оно приводится к однородному, решение которого по (3.23) с учетом указанной подстановки имеет вид

$$y = Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta) + 1,$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad C = \sqrt{(y_0 - 1)^2 + \frac{[\dot{y}_0 + \gamma(y_0 - 1)]^2}{\lambda_*^2}},$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{(y_0 - 1)\lambda_*}{\dot{y}_0 + \gamma(y_0 - 1)}.$$

Возвращаясь к переменной z при начальных условиях $y_0 = z_0/z_c$, $\dot{y}_0 = 0$, получаем

$$z = C_z e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta) + z_c, \quad (7.9)$$

где

$$C_z = \frac{z_0 - z_c}{\lambda_*} \lambda_*, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_*}{\gamma}.$$

Из формулы (7.9) видно, что ползун совершает затухающие колебания, так как показатель степени при числе e имеет знак минус, и потому коэффициент при $\sin(\lambda_* t + \theta)$ с увеличением времени t стремится к нулю. Скорость ползуна $\dot{z}$ получаем дифференцированием (7.9) по времени:

$$\dot{z} = C_z e^{-\gamma t} [\lambda_* \cos(\lambda_* t + \theta) - \gamma \sin(\lambda_* t + \theta)]. \quad (7.10)$$

Исключая время t из (7.9) и (7.10), получаем зависимость $\dot{z}(z)$, графическое изображение которой на фазовой плоскости, т. е. в координатах z и $\dot{z}$, представляется спиралью, стремящейся к точке $(z_c, 0)$ статического равновесия (рис. 39, а). Указанная спираль называется *фазовой траекторией*, а точка $(z_c, 0)$ есть особая точка этой траектории, называемая *устойчивым фокусом*. Штриховой линией показана замкнутая фазовая траектория для незатухающих колебаний при $\gamma = 0$ и начальных условиях $z = z_0$, $\dot{z} = 0$.

Другой характер движения получится при падающей характеристике силы трения. В решении уравнения (7.7) показатель степени при числе e имеет знак плюс, и поэтому коэффициент при $\sin(\lambda_* t + \theta)$ с увеличением времени стремится к бесконечности, т. е. амплитуды колебаний возрастают по показательному закону. Графическое изображение зависимости $\dot{z}(z)$ на фазовой плоскости

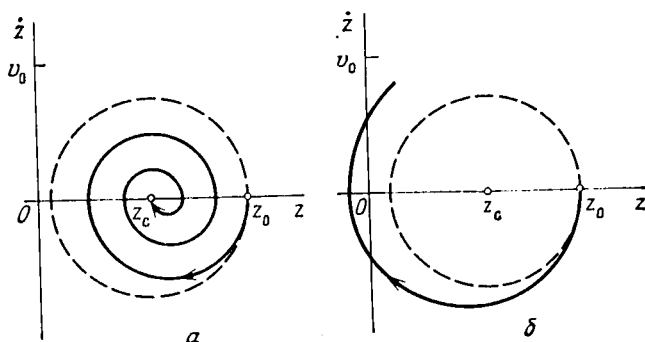


Рис. 39

представляется спиралью (рис. 39, б), которая проходит через точку $(z_0, 0)$ и может рассматриваться выходящей из точки $(z_c, 0)$ статического равновесия при $t \rightarrow \infty$. Точка $(z_c, 0)$ в этом случае называется *неустойчивым фокусом*. Штриховой линией показана замкнутая фазовая траектория для незатухающих колебаний при $\gamma = 0$ и при начальных условиях $z = z_0, \dot{z} = 0$.

Следовательно, как и было показано ранее, из условий устойчивости движения при падающей характеристике силы трения система неустойчива, и после любого сколь угодно малого возмущения происходит самовозбуждение колебаний с возрастающими амплитудами. Однако это возрастание не будет происходить неограниченно, так как одновременно увеличивается скорость $\dot{z}$ и при $\dot{z} = v_0$ скорость скольжения становится равной нулю (перемена знака силы трения). При обратном ходе ползуна возможен также переход на участок возрастающей характеристики силы трения.

Эффект возрастания амплитуд при падающей характеристике силы трения, т. е. раскачка колебаний, показывает, что не всегда наличие трения способствует демп-

фированию колебаний. Иногда даже употребляют в этих случаях термин «сила отрицательного трения», который нельзя признать удачным. Сила трения может совпадать по направлению с вектором скорости в абсолютном движении и, следовательно, быть силой движущей. Но в относительном движении трущихся поверхностей она всегда (по определению) направлена против относительной скорости. Эффект возрастания амплитуд при падающей характеристике силы трения объясняется не особым направлением этой силы, а тем, что при увеличении относительной скорости сила трения уменьшается.

Итак, при фрикционных колебаниях ползуна, взаимодействующего с движущейся поверхностью, в зависимости от характеристик сил трения можно наблюдать три режима: незатухающие колебания (включая автоколебания), затухающие колебания и колебания с возрастающими амплитудами. На фазовой плоскости этим режимам соответствуют фазовые траектории в виде замкнутой кривой, спирали, накручивающейся на особую точку, и спирали, выходящей из особой точки. Фазовую траекторию при незатухающих колебаниях можно рассматривать как граничный или предельный случай по отношению к режимам с затухающими или возрастающими амплитудами.

Глава VIII. КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ С УПРУГИМИ МУФТАМИ И ВАЛАМИ

§ 32. Колебания в механизмах с упругой муфтой

Характеристики сил в упругих муфтах. На рис. 40 показана одна из конструкций упругой муфты, в которой полумуфты 1 и 2 соединены упругими элементами 3, допускающими относительное угловое смещение полумуфт. В первом приближении характеристику сил упругости в муфте можно считать линейной:

$$M_{\varphi} = c\varphi, \quad (8.1)$$

где M_{φ} — момент сил упругости, c — коэффициент жесткости, φ — угловое смещение полумуфт.

При деформации упругих элементов происходит рассеяние (диссипация) энергии в муфте, которое зависит от скорости деформации. Для малых угловых смещений

ф момент диссипативных сил M_r пропорционален $\dot{\varphi}$:

$$M_r = -b\dot{\varphi}. \quad (8.2)$$

Уравнения движения механизма с упругой муфтой. На рис. 41 с применением условного обозначения упругой муфты показана динамическая модель механизма,

в котором вал двигателя Д соединен через упругую муфту с валом рабочей машины М. Углы поворота вала двигателя и вала машины обозначены соответственно через

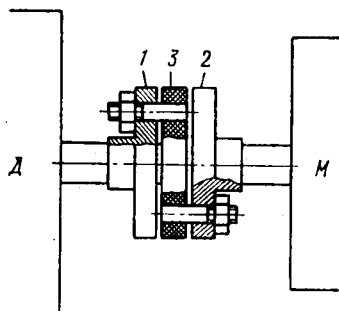


Рис. 40

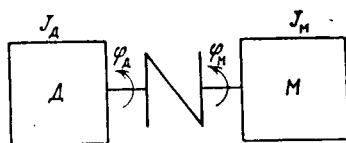


Рис. 41

φ_d и φ_m . Приведенный к валу рабочей машины момент инерции J_m и момент инерции подвижных частей двигателя J_d считаем постоянными. Число степеней свободы механизма равно двум, так как каждое упругое звено увеличивает общее число степеней свободы механизма на единицу.

Обозначим через M_d приведенный к валу двигателя момент движущих сил и через M_c — модуль момента сил сопротивления, приведенных к входному валу машины. Тогда уравнения движения при обобщенных координатах φ_d и φ_m имеют вид:

$$J_d \ddot{\varphi}_d = M_d - c\varphi - b\dot{\varphi}, \quad (8.3)$$

$$J_m \ddot{\varphi}_m = c\varphi + b\dot{\varphi} - M_c, \quad (8.4)$$

где $\varphi = \varphi_d - \varphi_m$ — угловое смещение полумуфты.

При достаточно большой мощности двигателя закон движения его ротора $\varphi_d(t)$ может считаться не зависящим от изменения M_c и J_m . Тогда при известной зависимости $\varphi_d(t)$ уравнение (8.4) записывается в виде

$$J_m \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M_c + J_m \ddot{\varphi}_d, \quad (8.5)$$

т. е. может быть решено относительно углового смещения φ независимо от уравнения (8.3), которое в этом случае служит для определения движущего момента M_d , соответствующего принятой зависимости $\varphi_d(t)$.

Для двигателей с жесткой характеристикой, у которых угловая скорость ротора мало изменяется при изменении нагрузки, часто считают угловую скорость $\dot{\varphi}_d$ постоянной. Тогда уравнение движения механизма с линейной упругой муфтой имеет вид

$$J_m \ddot{\varphi} + b \dot{\varphi} + c \varphi = M_c. \quad (8.6)$$

В этом случае движение звена с приведенным моментом инерции J_m можно рассматривать как состоящее из основного движения с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_d$ и дополнительного движения со скоростью $\dot{\varphi}$, которая обычно имеет колебательный характер. Иногда говорят, что динамическая модель имеет одну колебательную степень свободы, так как вторая степень свободы определяет движение всех частей системы с одной и той же угловой скоростью.

Колебания в механизмах с линейной упругой муфтой. Предположим, что модуль приведенного момента сил сопротивления изменяется по закону

$$M_c = M_1 + H \sin \omega t, \quad (8.7)$$

где M_1 — среднее значение M_c , H — амплитуда его колебаний относительно среднего значения. Для общего случая изменения приведенного момента сил выражение (8.7) можно рассматривать как приближенное выражение, получаемое при удержании первых двух членов разложения в ряд Фурье.

Подставим M_c в уравнение движения (8.6) и сделаем замену переменных

$$\varphi = y + \frac{M_1}{c}.$$

Тогда уравнение движения (8.6) преобразуется к виду уравнения колебательного типа

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \lambda^2 y = k_1 \sin \omega t,$$

где $2\gamma = b/J_m$, $\lambda^2 = c/J_m$, $k_1 = H/J_m$.

Решение этого уравнения после возврата к перемещенной φ получаем из (3.30) при начальных условиях $t = 0$,

$$y = 0, \dot{y} = 0:$$

$$\varphi = \frac{M_1}{c} - \frac{M_1}{c} e^{-\gamma t} \frac{\lambda}{\lambda_*} \sin(\lambda_* t + \theta) + \\ + e^{-\gamma t} A \frac{\omega}{\lambda_*} \sin(\lambda_* t + \theta_1) + A \sin(\omega t - \theta_2), \quad (8.8)$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_*}{\gamma}, \quad \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\lambda_*}{\gamma^2 - \lambda_*^2 + \omega^2}, \\ \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}, \quad A = \frac{H}{J_M \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Следовательно, при постоянной угловой скорости двигателя φ_d угол поворота входного вала машины φ_m представляется суммой $\varphi_m = \varphi_d t - \varphi$, где угловое смещение полумуфт φ характеризуется колебаниями относительно положения $\varphi_c = M_1/c$. В режиме разгона кроме вынужденных колебаний с угловой частотой ω и амплитудой A наблюдаются свободные и сопровождающие колебания с угловой частотой λ_* , которые с течением времени затухают, так как показатель при величине e имеет отрицательное значение. В режиме установившегося движения остаются только вынужденные колебания, называемые стационарными, так как амплитуда A и угловая частота ω не зависят от времени:

$$\varphi = \frac{M_1}{c} + A \sin(\omega t - \theta_2). \quad (8.9)$$

В качестве основной динамической характеристики механизма с упругой муфтой принимают *коэффициент динамичности по силам* (иначе — *коэффициент передачи сил*), определяемый как отношение максимального значения вращающего момента на входном валу машины с учетом упругости муфты к максимальному значению того же момента без учета упругости муфты в режиме установившегося движения, т. е. при стационарных колебаниях, определяемых решением (8.9). Полагая $\dot{\varphi} = 0$, находим вращающий момент на входном валу машин

$$M_a = b\dot{\varphi} + c\varphi. \quad (8.10)$$

Дифференцирование по времени выражения (8.9) дает

$$\dot{\varphi} = A\omega \cos(\omega t - \theta_2). \quad (8.11)$$

Подставляя в формулу (8.10) угловое смещение полу-
муфт из (8.9) и производную $\dot{\varphi}$ из (8.11), получаем

$$M_s = M_1 + A[c \sin(\omega t - \theta_2) + \omega b \cos(\omega t - \theta_2)]. \quad (8.12)$$

Выражение (8.12) преобразуется к виду

$$M_s = M_1 + Ac \cos^{-1} \varepsilon \sin(\omega t - \theta_2 + \varepsilon), \quad (8.13)$$

если принять $\operatorname{tg} \varepsilon = 2\gamma\omega/\lambda^2$.

Максимальное значение вращающего момента M_s :

$$(M_s)_{\max} = M_1 + Ac \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}},$$

где

$$A = \frac{H}{J_m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Максимальное значение того же момента при жестком соединении вала двигателя с входным валом машины равно максимальному по модулю значению приведенного момента сил сопротивления

$$M_{\max} = M_1 + H.$$

Коэффициент динамичности по силам

$$K_c = \frac{M_1 + Ac \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}}{M_1 + H}.$$

При $M_1 = 0$ имеем

$$K_c = K_{\text{дин}} \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}, \quad (8.14)$$

где $K_{\text{дин}} = A/(H/c)$ — коэффициент динамичности по перемещениям, равный отношению амплитуды вынужденных колебаний к максимальному статическому перемещению под действием переменной составляющей момента M_c .

Подставляя в формулу (8.14) значение A из (8.8), получаем

$$K_c = \sqrt{\frac{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)^2 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}}. \quad (8.15)$$

При отсутствии демпфирования ($\gamma = 0$) коэффициент динамичности по силам совпадает с коэффициентом динамичности по перемещениям.

На рис. 42 изображен график зависимости коэффициента динамичности по силам K_c от отношения частот

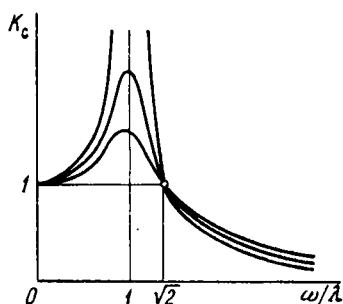


Рис. 42

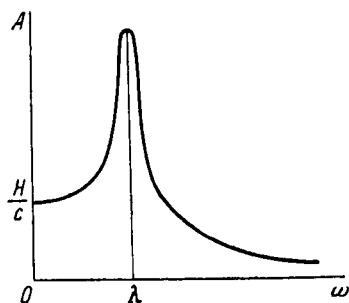


Рис. 43

ω/λ при нескольких значениях γ . Все кривые $K_c(\omega/\lambda)$ независимо от значения γ , характеризующего демпфирование, пересекаются в точке с координатами $(\sqrt{2}, 1)$. Отсюда следует, что максимальный вращающий момент на входном валу машины при упругой муфте будет меньше, чем при жесткой муфте, если выполнено условие $K_c < 1$, которое приводит к соотношению между угловой частотой вынуждающего момента ω и собственной частотой λ :

$$\frac{\omega}{\lambda} > \sqrt{2}. \quad (8.16)$$

Величину, обратную коэффициенту динамичности по силам, называют *коэффициентом эффективности виброзащиты* $K_{эф}$, который должен быть больше 1.

На рис. 43 показана амплитудно-частотная характеристика механизма с упругой муфтой при малом демпфировании, из которой следует, что в режимах разбега и

выбега могут возникнуть резонансные колебания, если угловая скорость установившегося движения $\omega_{уст}$ больше собственной частоты λ .

Колебания в механизме с нелинейной упругой муфтой. Особенности динамики механизма с нелинейной упругой муфтой поясним на примере исследования муфты, для которой коэффициент жесткости представлен выражением

$$c = c_0 + c_1 \varphi^2. \quad (8.17)$$

Тогда уравнение движения (8.6) при $b = 0$ и $M_0 = M_1 + H \sin \omega t$ имеет вид

$$J_m \ddot{\varphi} + (c_0 + c_1 \varphi^2) \varphi = M_1 + H \sin \omega t. \quad (8.18)$$

Линеаризацию выражения (8.17) на отрезке $(-A, A)$ выполним по методу Чебышева из условия равенства предельных отклонений с чередующимися знаками (рис. 44). Тогда ордината искомой прямой $c_{пп}$ и отклонение Δ_{max} могут быть найдены из системы уравнений:

$$c_{пп} = c_0 + \Delta_{max},$$

$$c_{пп} + \Delta_{max} = c_0 + c_1 A^2.$$

Отсюда

$$c_{пп} = c_0 + 0,5c_1 A^2. \quad (8.19)$$

Подстановка приближенного выражения коэффициента жесткости (8.19) в уравнение движения (8.18) дает

$$J_m \ddot{\varphi} + (c_0 + 0,5c_1 A^2) \varphi = M_1 + H \sin \omega t. \quad (8.20)$$

После замены переменных по условию $\varphi = y + (M_1/c_{пп})$ приводим уравнение движения (8.20) к виду линейного уравнения консервативного типа

$$\ddot{y} + \lambda_{пп}^2 y = \frac{H}{J_m} \sin \omega t, \quad (8.21)$$

где

$$\lambda_{пп}^2 = (c_0 + 0,5c_1 A^2)/J_m. \quad (8.22)$$

Амплитуду вынужденных колебаний, описываемых уравнением (8.21) при $\omega \neq \lambda$, получим из решения (8.8)

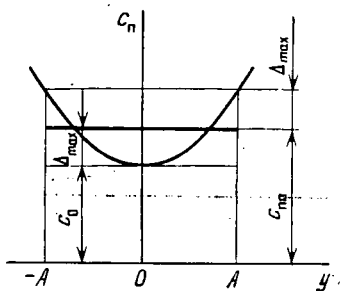


Рис. 44

при $\gamma = 0$:

$$A = \frac{H}{J_m |\lambda_n^2 - \omega^2|}.$$

Подстановка значения λ_n^2 из (8.22) при $\omega < \lambda$ приводит к алгебраическому уравнению третьей степени для определения амплитуды A :

$$A(c_0 + 0,5c_1 A^2 - \omega^2 J_m) = H.$$

Следовательно, если искать решение уравнения (8.21) в виде $y = A \sin \omega t$, то возможно получение трех различных амплитуд при одной и той же частоте ω . Возможность возникновения нескольких периодических режимов при одной и той же вынуждающей силе составляет характерную особенность нелинейных систем. На рис. 45, а показана зависимость амплитуды A от частоты ω , или амплитудно-частотная характеристика для случая, когда коэффициент жесткости увеличивается при увеличении силы. Штриховой линией показана *скелетная кривая* — график зависимости между частотой и амплитудой свободных колебаний. Сравнение полученной амплитудно-частотной характеристики с той же характеристикой при линейном упругом звене (см. рис. 43) показывает, что нелинейность упругого звена приводит к возникновению

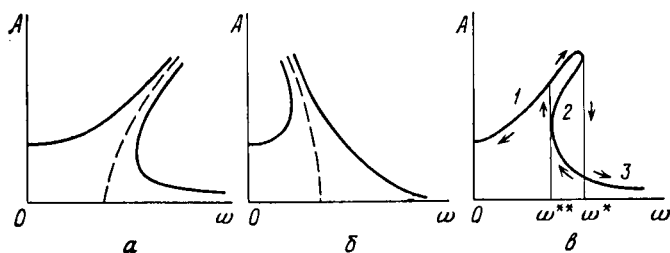


Рис. 45

колебаний с большой амплитудой при частотах вынуждающей силы, превышающих собственную частоту (затягивание резонанса в область высоких частот).

Если коэффициент жесткости уменьшается с увеличением силы, то наклон скелетной кривой и амплитудно-частотной характеристики направлен к оси A (рис. 45, б), что приводит к затягиванию резонанса в область низких частот. При учете трения в кинематических парах ампли-

туда колебаний при резонансе имеет конечную величину и обе ветви амплитудно-частотной характеристики смыкаются (рис. 45, в).

С наклоном амплитудно-частотной характеристики и возможностью существования нескольких режимов движения связана другая особенность нелинейных систем — срыв амплитуды. Представим себе, что частота ω увеличивается начиная от некоторого значения, расположенного на ветви 1 (рис. 45, в). Частота может увеличиваться до значения $\omega = \omega^*$. При этом значении частоты происходит срыв амплитуды и переход на ветвь 3. Если частота ω уменьшается от некоторого значения, соответствующего ветви 3, то срыв амплитуды и переход на ветвь 1 происходят при значении $\omega = \omega^{**}$. Отсюда следует, что ветвь 2 соответствует неустойчивым режимам.

Кроме рассмотренных колебательных режимов с частотой, равной частоте вынуждающей силы ω , в нелинейных системах возможно возникновение режимов с частотами, кратными ω . Колебания с высшими частотами (2ω , 3ω , ...) называются *супергармоническими*, колебания с низшими частотами ($\omega/2$, $\omega/3$, ...) — *субгармоническими*, колебания с частотой ω — *основными*. Исследование супергармонических и субгармонических колебаний производится обычно с применением приближенных методов, основанных на разложении периодических функций в ряды Фурье.

§ 33. Колебания в механизмах с упругими валами

Приведение жесткостей упругих звеньев механизма. Приведенным коэффициентом жесткости кинематической цепи называется коэффициент жесткости звена приведения, имеющего ту же потенциальную энергию, что и заменяемая кинематическая цепь. Обратная величина называется *приведенным коэффициентом податливости*.

Пусть, например, кинематическая цепь состоит из n последовательно соединенных пар зубчатых колес с упругими валами. Обозначим через c_i коэффициент жесткости звена i и через c_n — приведенный коэффициент жесткости. Если вращающие моменты M_i для звена i и M_n для звена приведения выражают только моменты сил упругости: $M_i = c_i \Delta \varphi_i$, $M_n = c_n \Delta \varphi_n$ (где $\Delta \varphi_i$ — угол закручивания звена i , $\Delta \varphi_n$ — угол закручивания звена приведения),

то условие равенства потенциальной энергии до и после приведения имеет вид:

$$\frac{c_n \Delta \varphi_n^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i \Delta \varphi_i^2}{2} \quad \text{или} \quad \tilde{M}_n \Delta \varphi_n = \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i \Delta \varphi_i. \quad (8.23)$$

Вращающие моменты $\tilde{M}_n$ и $\tilde{M}_i$ связаны с передаточным отношением

$$u_{ni} \equiv \frac{\tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_i} = \frac{\tilde{M}_i}{\tilde{M}_n}, \quad (8.24)$$

где $\tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}_i$ — угловые скорости звена приведения и звена i . Из (8.23) и (8.24) с учетом выражений для $\tilde{M}_i$ и $\tilde{M}_n$ получаем

$$\tilde{M}_n \frac{\tilde{M}_n}{c_n} = \sum_{i=1}^n M_n u_{ni} \frac{\tilde{M}_n u_{ni}}{c_i}.$$

Отсюда находим приведенный коэффициент податливости $e_n = 1/c_n$:

$$\frac{1}{c_n} = \sum_{i=1}^n \frac{u_{ni}^2}{c_i} \quad \text{или} \quad e_n = \sum_{i=1}^n e_i u_{ni}^2. \quad (8.25)$$

Колебания в механизмах с одним линейным упругим звеном. *Линейным упругим звеном* назовем звено с постоянным приведенным коэффициентом жесткости. На рис. 46, а показана динамическая модель механизма в

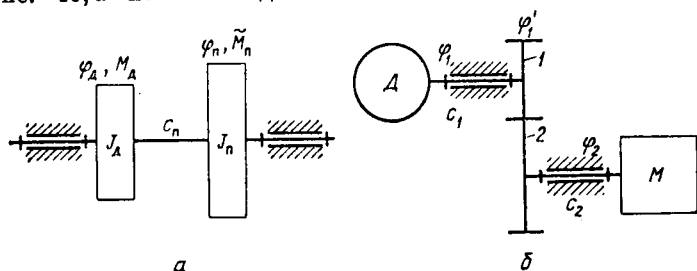


Рис. 46

виде двух вращающихся звеньев с приведенными моментами инерции J_A и J_n , между которыми помещено линейное упругое звено с приведенным коэффициентом жесткости c_n . За обобщенные координаты примем угол поворота левого конца упругого звена φ_A , который обычно равен углу поворота двигателя, и угол поворота правого

конца упругого звена φ_n . Если считать, что к левому концу упругого звена приложен движущий момент M_d , а к правому концу — приведенный момент M_n , то при постоянных J_d и J_n уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\varphi}_d &= M_d - c_n (\varphi_d - \varphi_n), \\ J_n \ddot{\varphi}_n &= M_n + c_n (\varphi_d - \varphi_n). \end{aligned} \quad (8.26)$$

При достаточно большой мощности двигателя угловую скорость его ротора $\dot{\varphi}_d = \tilde{\omega}$ можно считать постоянной. Тогда $\varphi_d = \tilde{\omega}t$, и второе уравнение системы (8.26) может быть решено независимо от первого. Кроме того, учитывая, что угол φ_n мало отличается от угла φ_d , удобнее взять за обобщенную координату вместо φ_d разность $\varphi = \varphi_n - \varphi_d$. Второе уравнение системы (8.26) принимает вид

$$J_n \ddot{\varphi} + c_n \varphi = M_n. \quad (8.27)$$

Первое уравнение системы (8.26) служит в этом случае только для определения движущего момента M_d , при котором выполняется заданный закон равномерного движения ротора двигателя. Как и в механизме с упругой муфтой, движение звена с приведенным моментом инерции J_n можно рассматривать состоящим из основного движения с постоянной угловой скоростью $\tilde{\omega}$ и дополнительного движения со скоростью $\dot{\varphi}$, которая обычно имеет колебательный характер.

На рис. 46, б показала схема одного из механизмов, динамическая модель которого приводится к двухмассной системе с одним линейным упругим звеном. Механизм предназначен для передачи вращения от вала двигателя Д к валу машины М. Коэффициенты жесткости этих валов обозначены через c_1 и c_2 . К звену 1 со стороны двигателя приложен движущий момент M_d , а к звену 2 со стороны машины — момент сопротивления M_c . Приведенный к валу двигателя момент инерции J_d определяется с учетом всех движущихся частей двигателя, а приведенный к валу машины момент инерции J_m — с учетом движущихся частей машины. Моменты инерции зубчатых колес считаем малыми по сравнению с моментами инерции J_d и J_m .

Уравнение движения звена I при постоянном J_d имеет вид

$$J_d \ddot{\varphi}_d = \tilde{M}_d - c_1 (\varphi_1 - \varphi'_1), \quad (8.28)$$

где φ_1 — угол поворота левого конца вала 1 , φ'_1 — угол поворота правого конца. Аналогично уравнение движения звена 2 при постоянном J_m :

$$J_m \ddot{\varphi}_2 = c_2 (\varphi'_2 - \varphi_2) + \tilde{M}_{c_2} \quad (8.29)$$

где φ'_2 — угол поворота левого конца вала 2 , φ_2 — угол поворота правого конца.

Отношение моментов сил упругости для зубчатых колес равно обратному отношению угловых скоростей, т. е.

$$\frac{c_1 (\varphi_1 - \varphi'_1)}{c_2 (\varphi'_2 - \varphi_2)} = u_{21},$$

отсюда

$$\varphi'_1 = \frac{c_1 \varphi_1 + c_2 u_{21} \varphi_2}{c_1 + c_2 u_{21}^2}, \quad \varphi'_2 = \varphi'_1 u_{21}.$$

Подставляя значения углов φ'_1 и φ'_2 в (8.28) и (8.29), получаем систему уравнений (8.26) при соотношениях

$$\varphi_d = \varphi_1, \quad \varphi_n = \varphi_2 u_{12}, \quad J_n = J_m u_{21}^2, \\ \tilde{M}_n = \tilde{M}_c u_{21}, \quad c_n = c_2 c_1 / (c_1 u_{21}^2 + c_2).$$

Из этих соотношений видно, что приведение сил и масс к звену I выполняется, как и в механизмах с одной степенью свободы. Приведение жесткостей выполняется по формуле (8.25).

Если силы трения в кинематических парах механизма зависят от реакций, то при составлении уравнений движения механизма с упругими валами они учитываются введением мгновенного КПД в приведенный момент инерции J_n и в приведенный момент сил M_n . Если же трение в кинематических парах приближается к жидкостному, т. е. зависит только от относительной скорости элементов пары, то его учитывают через приведенный момент сил трения $\tilde{M}_{\text{тр}}$.

В рассматриваемом примере

$$\tilde{M}_{\text{тр}} = b_1 \dot{\varphi}_1 + b_2 \dot{\varphi}_2 u_{21} \quad \text{или} \quad M_{\text{тр}} = b_n \dot{\varphi}_1, \quad (8.30)$$

где b_1, b_2 — коэффициенты сопротивления в подшипниках валов 1 и 2, $b_n = b_1 + b_2 u_{21}^2$ — приведенный (эквивалентный) коэффициент сопротивления.

Трение в подшипниках валов 1 и 2 отнесем к правому концу вала 1. Тогда уравнения движения (8.26) принимают вид:

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\varphi}_d &= M_d - c_n (\varphi_d - \varphi_n), \\ J_n \ddot{\varphi}_n &= M_n + c_n (\varphi_d - \varphi_n) - b_n \dot{\varphi}_n. \end{aligned} \quad (8.31)$$

При постоянной угловой скорости ротора двигателя $\dot{\varphi}_d$ и при $\varphi_n = \varphi_d + \varphi$ второе уравнение системы (8.31) преобразуется к виду

$$J_n \ddot{\varphi} + b_n \dot{\varphi} + c_n \varphi = M_n - b_n \dot{\varphi}_d. \quad (8.32)$$

В безразмерной форме это уравнение приводится к уравнению колебательного типа (8.6) и, следовательно, все результаты, полученные при рассмотрении колебаний в механизме с упругой муфтой, распространяются на механизм с упругими валами, если его динамика может быть исследована на основании двухмассной динамической модели (см. рис. 46, а) в предположении постоянства угловой скорости двигателя.

Колебания в механизмах с последовательно соединенными упругими звеньями. Последовательное соединение жестких звеньев (зубчатых колес, маховиков и т. п.), соединенных упругими элементами (упругими валами и муфтами), называют *цепной системой*. Общее число степеней свободы цепной системы равно сумме числа степеней свободы механизма с жесткими звеньями и числа упругих элементов. Например, число степеней свободы зубчатого механизма (см. рис. 46, б) при двух упругих валах равно 3. Для анализа динамики этого механизма в первом приближении можно рассматривать двухмассную динамическую модель, которая при постоянной скорости вала двигателя имеет одну колебательную степень свободы и соответственно одну собственную частоту. Однако при анализе резонансных режимов такое рассмотрение может оказаться недопустимым, так как резонанс может наступить при других значениях собственных частот, число которых равно числу степеней свободы.

Метод определения собственных частот многомассных систем покажем на примере *трехмассной динамической модели*, состоящей из трех звеньев с моментами инерции

J_1, J_2, J_3 , соединенных упругими элементами, имеющими коэффициенты жесткости c_1 и c_2 (рис. 47). За обобщенные координаты примем углы поворота валов в сечениях A (или B), C (или D) и E (или F): φ_1, φ_2 и φ_3 . Урав-

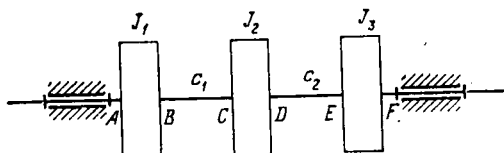


Рис. 47

нения движения при отсутствии внешних сил и диссипации энергии имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Частное решение системы уравнений (8.33) ищем в виде $\varphi_1 = A_1 \sin(\lambda t + \theta)$, $\varphi_2 = A_2 \sin(\lambda t + \theta)$, $\varphi_3 = A_3 \sin(\lambda t + \theta)$, т. е. предполагаем, что в системе могут происходить колебания, при которых все обобщенные координаты изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой, а фазы колебаний либо совпадают, либо отличаются на π .

Подставив это решение в (8.33), получим после сокращения всех членов на $\sin(\lambda t + \theta)$ систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -J_1 \lambda^2 A_1 + c_1 (A_1 - A_2) &= 0, \\ -J_2 \lambda^2 A_2 - c_1 (A_1 - A_2) + c_2 (A_2 - A_3) &= 0, \\ -J_3 \lambda^2 A_3 + c_2 (A_3 - A_2) &= 0. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Система уравнений (8.34), однородных относительно неизвестных амплитуд A_1, A_2 и A_3 , может иметь решение, отличное от нулевого, только в случае, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_1 - J_1 \lambda^2 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - J_2 \lambda^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - J_3 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получаем *частотное уравнение*, т. е. уравнение для определения собственных частот

$$-(J_1 + J_2 + J_3)\lambda^2 + (J_1J_2e_1 + J_1J_3e_2 + J_1J_3e_1 + J_2J_3e_2)\lambda^4 - J_1J_2J_3e_1e_2\lambda^6 = 0. \quad (8.35)$$

где $e_1 = 1/c_1$, $e_2 = 1/c_2$ — коэффициенты податливости.

Нулевой корень означает возможность вращения всей системы как одного целого. Корни этого уравнения, отличные от нуля и расположенные в порядке возрастания, образуют *спектр собственных частот*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Каждому корню соответствует частное решение вида $\varphi_i = A_i \sin(\lambda_i t + \theta_i)$, а общее решение представит сумму этих решений

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_{11} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_2 &= A_{21} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{22} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{23} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_3 &= A_{31} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{32} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{33} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \end{aligned} \quad (8.36)$$

где второй индекс в обозначениях амплитуд означает номера корней λ_1 , λ_2 , λ_3 , которым соответствуют амплитуды A_{11} , A_{21} , A_{31} .

Вследствие однородности системы уравнений (8.34) относительно амплитуд A_{11} , A_{21} , A_{31} для каждого корня λ_1 , λ_2 , λ_3 можно выразить все амплитуды через какую-либо одну из них. Например, для колебания с частотой λ_1 выразим амплитуды A_{21} и A_{31} через A_{11} . Из уравнений (8.34) при $\lambda = \lambda_1$ имеем:

$$\kappa_{21} \equiv \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{c_1 - J_1 \lambda_1^2}{c_1}, \quad \kappa_{31} \equiv \frac{A_{31}}{A_{11}} = \frac{c_1 - J_1 \lambda_1^2}{c_1 (c_2 - J_3 \lambda_1^2)} c_{21} \quad (8.37)$$

где κ_{21} , κ_{31} — *коэффициенты формы* для колебаний с частотой λ_1 . Совокупность коэффициентов форм называется *собственной формой*. Число собственных форм равно числу собственных частот, т. е. числу степеней свободы. Для колебаний с частотами λ_2 и λ_3 коэффициенты форм κ_{22} , κ_{32} и κ_{23} , κ_{33} находятся по формулам (8.37) с заменой λ_1 на λ_2 и λ_3 .

Общее решение системы уравнений (8.33) с помощью

коэффициентов форм записывается в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_{11} \sin(\lambda_1 t_1 + \theta_1) + A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_2 &= \kappa_{21} A_{11} \sin(\lambda_1 t_1 + \theta_1) + \kappa_{22} A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + \\ &\quad + \kappa_{23} A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \quad (8.38) \\ \varphi_3 &= \kappa_{31} A_{11} \sin(\lambda_1 t_1 + \theta_1) + \kappa_{32} A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + \\ &\quad + \kappa_{33} A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3).\end{aligned}$$

Уравнения (8.38) содержат 6 постоянных (A_{11} , A_{12} , A_{13} , θ_1 , θ_2 , θ_3), которые определяются из начальных условий. При произвольно заданных начальных условиях обобщенные координаты изменяются по *полигармоническому закону*. Специальным выбором начальных условий можно достичь того, что все обобщенные координаты будут изменяться по гармоническому закону с одной и той же частотой λ_1 (или λ_2 , или λ_3), а фазы колебаний либо совпадают, либо отличаются на π (*главные колебания*). Отношения амплитуд при главных колебаниях образуют собственную форму, соответствующую частоте колебаний.

Метод матриц переноса. Теперь рассмотрим решение задачи об определении спектра собственных частот для динамической модели, показанной на рис. 47, по методу матриц переноса.

Метод основан на том, что динамическая модель рассматривается как совокупность последовательно соединенных участков, для которых справедливы линейные зависимости между амплитудами сил и перемещений на входе и выходе из участка. При гармонических колебаниях с частотой λ эти зависимости имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi_b &= s_{11}(\lambda) \varphi_a + s_{12}(\lambda) \bar{M}_a, \\ \bar{M}_b &= s_{21}(\lambda) \varphi_a + s_{22}(\lambda) \bar{M}_a,\end{aligned}\quad (8.39)$$

где φ_a , φ_b — амплитуды перемещений на входе и на выходе, $\bar{M}_a$, $\bar{M}_b$ — амплитуды сил (моментов) на входе и на выходе, s_{11} , s_{12} , s_{21} , s_{22} — коэффициенты, зависящие от масс и жесткостей на входе рассматриваемого участка и от частоты λ . Матрица, образованная коэффициентами правых частей уравнений (8.39), называется *матрицей переноса* (иногда *фундаментальной матрицей*):

$$S_{ab}(\lambda) = \begin{vmatrix} s_{11}(\lambda) & s_{12}(\lambda) \\ s_{21}(\lambda) & s_{22}(\lambda) \end{vmatrix}. \quad (8.40)$$

Для динамической модели, показанной на рис. 47, имеем 5 участков. На участках AB , CD и EF амплитуды перемещений на входе и выходе совпадают (жесткие элементы), а амплитуды моментов отличаются на величину амплитуды момента сил инерции. Например, для участка AB зависимости (8.39) имеют вид

$$\varphi_b = \varphi_a, \quad M_b = -J_1 \lambda^2 \varphi_a + M_a.$$

Отсюда получаем матрицу переноса для участка AB

$$S_{AB} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_1 \lambda^2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Аналогично для участков CD и EF :

$$S_{CD} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_2 \lambda^2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad S_{EF} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_3 \lambda^2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Для участка BC зависимости (8.39) имеют вид

$$\varphi_b = \varphi_a + \frac{\tilde{M}_a}{c_1}, \quad \tilde{M}_b = \tilde{M}_a.$$

Отсюда получаем матрицы переноса

$$S_{BC} = \begin{Bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad S_{DE} = \begin{Bmatrix} 1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

где $e_1 = 1/c_1$, $e_2 = 1/c_2$ — коэффициенты податливости.

Матрица переноса для всей системы находится как произведение матриц переноса отдельных участков

$$S_{AF} = S_{EF} S_{DE} S_{CD} S_{BC} S_{AB}.$$

Умножая матрицы по правилу «строка на столбец» и возвращаясь к записи соотношений типа (8.39), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_F = & [(1 - J_1 e_1 \lambda^2)(1 - J_2 e_2 \lambda^2) - J_1 e_2 \lambda^2] \varphi_A + \\ & + (e_1 + e_2 - e_1 e_2 J_2 \lambda^2) M_A, \\ M_F = & [-(J_1 + J_2 + J_3) \lambda^2 + \\ & + (J_1 J_2 e_1 + J_1 J_3 e_2 + J_1 J_3 e_1 + J_2 J_3 e_2) \lambda^4 - J_1 J_2 J_3 e_1 e_2 \lambda^6] \varphi_A + \\ & + [(1 - J_2 e_1 \lambda^2)(1 - J_3 e_2 \lambda^2) - J_3 e_1 \lambda^2] M_A. \end{aligned} \quad (8.41)$$

При свободных концах системы $M_A = M_F = 0$. Тогда из первого уравнения системы (8.41) получаем соотношение между углами поворота φ_F и φ_A , а из второго — частотное уравнение, которое совпадает с уравнением (8.35). Коэффициенты формы паходятся из соотношений (8.39), записанных для отдельных участков.

Глава IX. КОЛЕБАНИЯ В РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМАХ

§ 34. Колебания в шарнирном четырехзвеннике с упругими звеньями

Определение приведенного коэффициента жесткости для плоского шарнирного четырехзвенника. В механизме шарнирного четырехзвенника (рис. 48, а) считаем, что внешние силы приложены только к звеньям 1 и 3 и представлены парами сил с моментами M_d и M_3 . Инерцией

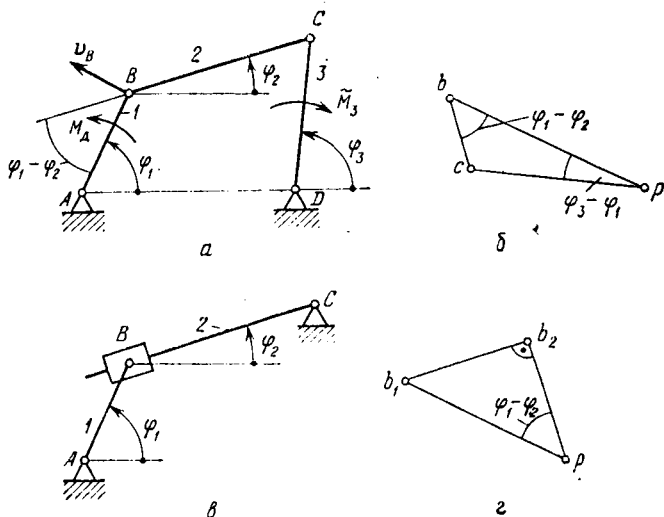


Рис. 48

шатуна 2 пренебрегаем, и, следовательно, реакции, действующие на него со стороны звеньев 1 и 3, направлены по линии BC . В этом случае шатун испытывает только деформации растяжения — сжатия и его коэффициент податливости можно определить по формуле для цилиндрических стержней: $e_2 = l_2 / (ES)$, где l_2 — длина шатуна, E — модуль упругости, S — площадь поперечного сечения шатуна. Коэффициент податливости вала звена 1 определяем, учитывая только деформации кручения: $e_1 = l_1 / (GJ_{p1})$, где l_1 — длина участка вала звена 1, на котором определяется угол закручивания, G — модуль сдвига, J_{p1} — полярный момент инерции вала звена 1. Аналогично для вала звена 3: $e_3 = l_3 / (GJ_{p3})$.

Если принять звено 1 за звено приведения, то приведенный к нему коэффициент податливости определится по формуле (8.25), которая для данного механизма имеет вид

$$e_n = e_1 + e_2 \kappa_{12}^2 + e_3 u_{13}^2 \quad (9.1)$$

где κ_{12} — передаточное отношение, равное отношению угловой скорости звена 1 к проекции скорости v_B на линию BC , u_{13} — передаточное отношение, равное отношению угловой скорости звена 1 к угловой скорости звена 3.

Для определения передаточных отношений κ_{12} и u_{13} строим план скоростей шарнирного четырехзвенника (рис. 48, б). Из этого плана, построенного с произвольным масштабным коэффициентом μ_v , определяем передаточное отношение u_{13} как отношение угловых скоростей ω_1 и ω_3 :

$$u_{13} = \frac{(pb) \mu_v / l_{AB}}{(pc) \mu_v / l_{CD}} = \frac{(pb) l_{CD}}{(pc) l_{AB}}.$$

Отношение $(pb)/(pc)$ можно вычислить из косоугольного треугольника pbc по теореме синусов

$$\frac{(pb)}{(pc)} = \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где углы φ_2 и φ_3 как функции угла φ_1 находятся из решения задачи об определении положений звеньев шарнирного четырехзвенника. Отсюда

$$u_{13} = \frac{l_{CD} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (9.2)$$

Для того чтобы определить отношение κ_{12} , также надо построить план скоростей, но не механизма шарнирного четырехзвенника, а кулисного механизма, который получается при закреплении звена 3 и введении дополнительного ползуна, позволяющего изменять длину шатуна BC , т. е. сообщать ему перемещение, равное его упругой деформации (рис. 48, в).

План скоростей для этого механизма, построенный с произвольным масштабным коэффициентом, показан на рис. 48, г. Элементарное перемещение звена 1 пропорционально его угловой скорости, а элементарное перемещение звена 2 в направлении его деформации — скорости

перемещения дополнительного ползуна относительно кулисы. Следовательно,

$$\kappa_{12} = \frac{(pb_1) \mu_v / l_{AB}}{(b_1 b_2) \mu_v} \equiv \frac{(pb_1)}{l_{AB} (b_1 b_2)}.$$

Отношение $(pb_1)/(b_1 b_2)$ можно вычислить из прямоугольного треугольника $pb_2 b_1$:

$$\frac{(pb_1)}{(b_1 b_2)} = \frac{1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Отсюда

$$\kappa_{12} = \frac{1}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (9.3)$$

С учетом формул (9.1)–(9.3) получаем выражение приведенной податливости e_n как функции угла поворота φ_1 :

$$e_n = e_1 + \frac{e_2 + e_3 l_{CD}^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (9.4)$$

Приведенный коэффициент жесткости находится как величина обратная приведенному коэффициенту податливости:

$$c_n = \frac{l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{e_1 l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + e_2 + e_3 l_{CD}^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (9.5)$$

Уравнения движения шарнирного четырехзвенника с упругими звеньями. После определения приведенного коэффициента жесткости c_n приходим опять к двухмассной динамической модели, показанной на рис. 46, а, но приведенный коэффициент жесткости теперь уже является переменной величиной, зависящей от угла поворота φ_1 .

Дифференциальные уравнения движения для этой модели составляем в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_d} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_d} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_d} = \tilde{M}_d, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \tilde{M}_{n1}, \quad (9.6)$$

где φ_d — угол поворота левой массы, равный углу поворота вала двигателя, φ_1 — угол поворота правой массы, равный углу поворота звена 1, $\tilde{M}_d = M_1$ — момент сил на валу двигателя, $\tilde{M}_{n1}$ — приведенный к звену 1 момент сил, приложенных к звену 3. В рассматриваемом случае $M_{n1} = M_{31}$.

При составлении аналитического выражения кинетической энергии механизма T учитываем только моменты инерции вращающихся звеньев J_1 и J_3 :

$$T = \frac{J_d \dot{\varphi}_d^2}{2} + \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_3 \dot{\varphi}_3^2}{2} \quad \text{или} \quad T = \frac{J_d \dot{\varphi}_d^2}{2} + \frac{J_{п1} \dot{\varphi}_1^2}{2},$$

где $J_{п1} = J_1 + J_3 u_{31}^2$ — приведенный к звену 1 момент инерции шарнирного четырехзвенника, J_d — приведенный момент инерции движущихся частей двигателя, который считаем постоянным.

Потенциальная энергия механизма Π определяется выражением

$$\Pi = \frac{c_n (\varphi_d - \varphi_1)^2}{2}.$$

Выполняя дифференцирование в уравнениях (9.6), получаем

$$J_d \ddot{\varphi}_d + c_n (\varphi_d - \varphi_1) = \tilde{M}_d, \quad (9.7)$$

$$J_{п1} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \frac{dJ_{п1}}{d\varphi_1} - c_n (\varphi_d - \varphi_1) + \frac{1}{2} (\varphi_d - \varphi_1)^2 \frac{dc_n}{d\varphi_1} = \tilde{M}_3 u_{31}.$$

Система нелинейных уравнений движения с переменными коэффициентами (9.7) решается численными методами по малым участкам движения. При постоянной скорости вала двигателя φ_d второе уравнение системы (9.7) решается независимо от первого и определяет колебания, происходящие от упругости звеньев механизма.

§ 35. Малые колебания в рычажных механизмах приборов

Малые колебания в механизме шарнирного четырехзвенника. При постоянных u_{12} и u_{13} , т. е. при малых перемещениях звеньев, уравнения движения шарнирного четырехзвенника (9.7) принимают вид:

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\varphi}_d &= \tilde{M}_d - c_n (\varphi_d - \varphi_1), \\ (J_1 + J_3 u_{31}^2) \ddot{\varphi}_1 &= \tilde{M}_3 u_{31} + c_n (\varphi_d - \varphi_1). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Пусть, например, звено 3 шарнирного четырехзвенника соединено с указателем регистрирующего прибора.

Звено 1 приводится в движение от двигателя, момент инерции которого значительно превышает моменты инерции J_1 и J_3 . При переводе указателя из одного положения в другое вал двигателя останавливается в новом положении практически мгновенно, а звенья механизма и указатель совершают малые колебания относительно положения равновесия. Из уравнений (9.8) при $\varphi_d = \text{const}$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_d$ получаем

$$(J_1 + J_3 u_{31}^2) \ddot{\varphi} + c_{\text{п}} \varphi = \tilde{M}_3 u_{31}, \quad (9.9)$$

или

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = 0,$$

$$\text{где } y = \varphi - \frac{\tilde{M}_3 u_{31}}{c_{\text{п}}}, \quad \lambda^2 = \frac{c_{\text{п}}}{J_1 + J_3 u_{31}^2}.$$

При начальных условиях $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$ решение уравнения (9.9) согласно (3.22) имеет вид

$$\varphi = \frac{\tilde{M}_3 u_{31}}{c_{\text{п}}} + \left(\varphi_0 - \frac{\tilde{M}_3 u_{31}}{c_{\text{п}}} \right) \cos \lambda t,$$

т. е. указатель совершает гармонические колебания с собственной частотой λ , значение которой зависит от передаточных отношений u_{12} и u_{13} .

Колебания в рычажном механизме прибора при вибрирующей стойке. На рис. 49 показан кривошипно-ползунный механизм, применяемый в указательных и регистрирующих приборах для преобразования движения ползуна 3, связанного с измерительным устройством, во вращательное движение стрелки 1. Каждому положению ползуна соответствует определенное значение измеряемой величины, которое указывается стрелкой на шкале прибора. Это соответствие нарушается, если стойка вибрирует. Тогда стрелка 1 совершает малые колебания относительно среднего положения, которое может не совпа-

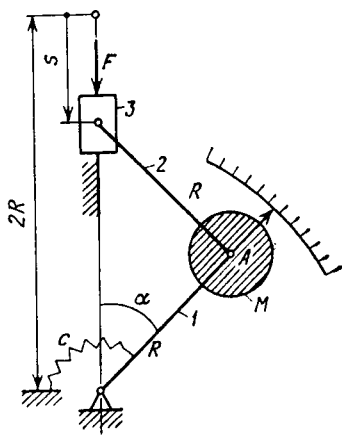


Рис. 49

дать с положением, соответствующим статическому равновесию.

Обозначим через α_0 значение угла α , определяющего положение стрелки 1 при отсутствии вибрации стойки, и через α_d среднее значение угла α при колебаниях стрелки. Разность $\alpha_d - \alpha_0$ дает динамическую ошибку в показаниях прибора. Такая же ошибка получается в случае, если к ползуну механизма, звенья которого находились в положении статического равновесия, приложить периодически изменяющуюся силу F .

Положение устойчивого статического равновесия звеньев механизма соответствует минимуму потенциальной энергии. При определении потенциальной энергии механизма Π учитываем только массу M , сосредоточенную в точке A , и упругость пружины c , помещенной между стойкой и стрелкой 1:

$$\Pi = \Pi_0 + MgR \cos \alpha + \frac{1}{2} c \alpha^2, \quad (9.10)$$

где α — обобщенная координата механизма, Π_0 — постоянное значение потенциальной энергии, определяемое началом отсчета, c — коэффициент угловой (крутильной) жесткости пружины, R — длина звеньев 1 и 2.

Двукратное дифференцирование выражения потенциальной энергии по обобщенной координате дает

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = -MgR \sin \alpha + c\alpha, \quad \frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = -MgR \cos \alpha + c.$$

При $c > MgR \cos \alpha$ положение устойчивого равновесия характеризуется корнем уравнения

$$-MgR \sin \alpha_0 + c\alpha_0 = 0. \quad (9.11)$$

При определении кинетической энергии механизма T учитываем только энергию сосредоточенной массы M :

$$T = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\alpha}^2.$$

Исследуем сначала свободные колебания механизма около положения статического равновесия, принимая за обобщенную координату отклонение

$$q_0 = \alpha_0 - \alpha. \quad (9.12)$$

Тогда выражение потенциальной энергии (9.10) принимает вид

$$\Pi = \Pi_0 + MgR \cos(\alpha_0 - q_c) + \frac{1}{2} c (\alpha_0 - q_c)^2.$$

Из разложения в ряд Маклорена в окрестности значения $q_c = 0$ получаем приближенное выражение потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi(0) + \Pi'(0) q_c + \frac{1}{2} \Pi''(0) q_c^2,$$

где штрихи обозначают дифференцирование по q_c .

В дальнейшем полагаем $\Pi(0) = 0$, что соответствует изменению начала отсчета потенциальной энергии. Величина $\Pi'(0)$ также равна нулю по условию (9.11). Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2} (-MgR \cos \alpha_0 + c) q_c^2,$$

т. е. приведенный коэффициент жесткости c_n имеет вид

$$c_n = -MgR \cos \alpha_0 + c.$$

Уравнение движения механизма при свободных колебаниях имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} = - \frac{d\Pi}{dq_c}$$

или

$$MR^2 \ddot{q}_c = -c_n q_c.$$

Следовательно, собственная частота механизма

$$\lambda = \sqrt{\frac{-MgR \cos \alpha_0 + c}{MR^2}}$$

зависит от положения статического равновесия.

При исследовании вынужденных колебаний представим обобщенную координату в виде суммы

$$q = q_c + q_d,$$

где q_d — дополнительное перемещение, вызываемое периодически изменяющейся силой F .

Подставляя значение q_c из соотношения (9.12), получаем

$$q = \alpha_0 - \alpha + q_d.$$

При малых колебаниях можно заменить переменную величину $\alpha_0 + q_d$ ее средним значением

$$\alpha_d = \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha_0 + q_d) dt,$$

где T — период колебаний. Тогда $q = \alpha_d - \alpha$, и вынужденные колебания можно рассматривать как колебания относительно положения динамического равновесия, определяемого углом α_d .

Уравнение движения механизма в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = - \frac{d\Pi}{dq} + \tilde{M}_n, \quad (9.13)$$

где $\tilde{M}_n$ — приведенный к звену 1 момент от силы F .

При равенстве длин звеньев 1 и 2 перемещение ползуна связано с углом поворота α соотношением $s = 2R - 2R \cos \alpha$. Отсюда передаточное отношение $ds/d\alpha = 2R \sin \alpha$.

Приведенный момент $\tilde{M}_n$ находим из условия

$$\tilde{M}_n = \tilde{F} \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{или} \quad M_n = \tilde{F} 2R \sin(\alpha_d - q).$$

Приближенное значение приведенного момента M_n получаем из разложения в степенной ряд в окрестности $q = 0$:

$$\tilde{M}_n = F 2R (-\sin \alpha_d + q \cos \alpha_d).$$

Приближенное значение потенциальной энергии находим также из разложения в ряд в окрестности $q = 0$ или, что то же, при $\alpha = \alpha_d$:

$$\Pi = (-MgR \sin \alpha_d + c \alpha_d) q + \frac{1}{2} (-MgR \cos \alpha_d + c) q^2.$$

Отсюда

$$\frac{d\Pi}{dq} = -MgR \sin \alpha_d + c \alpha_d + (-MgR \cos \alpha_d + c) q.$$

Подставляя выражения для T , $\tilde{M}_n$ и $d\Pi/dq$ в уравнение (9.13), получаем уравнение малых колебаний механизма при действии вынуждающей периодической силы F :

$$\begin{aligned} MR^2 \ddot{q} + (c - MgR \cos \alpha_d - 2RF \cos \alpha_d) q = \\ = MgR \sin \alpha_d - c \alpha_d - 2RF \sin \alpha_d. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Полученное линейное уравнение с периодическим коэффициентом приводится к неоднородному уравнению Хилла. Если сила F изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

то уравнение (9.14) приводится к неоднородному уравнению Матье (3.40)

$$\ddot{q} + (a - 2d \cos \omega t) q = f(t), \quad (9.15)$$

где

$$a = \frac{c}{MR^2} - \frac{g \cos \alpha_d}{R}, \quad d = \frac{F_0 \cos \alpha_d}{MR},$$

$$f(t) = \frac{MgR \sin \alpha_d - c\alpha_d - 2RF_0 \sin \alpha_d \cos \omega t}{MR^2}.$$

По уравнению (9.15) можно исследовать устойчивость движения, используя свойства коэффициентов уравнения Матье. При этом исследовании достаточно предположить, что положение динамического равновесия, т. е. значение угла α_d , находится в пределах рабочего диапазона. Для определения самой величины α_d , характеризующей динамическую ошибку механизма («увод» стрелки прибора), можно использовать приближенный метод, основанный на близости величин α_0 и α_d [11].

К рассмотрению уравнения (9.15) приводится также задача о влиянии возвратно-поступательной вибрации стойки по гармоническому закону в направлении, совпадающем с направлением движения ползуна.

§ 36. Самосинхронизация механизмов на вибрирующем основании

Синхронизация механизмов. Под *синхронизацией* механизмов понимается установление одинаковой (или кратной) средней угловой скорости или частоты колебаний вращающихся звеньев нескольких механизмов, установленных на общем основании. Различают *принудительную синхронизацию*, когда синхронизация движения звеньев достигается с помощью дополнительных связей (например, зубчатых колес), и *самосинхронизацию*, когда она устанавливается на основании динамических свойств механизмов без введения дополнительных связей. Наибольшее распространение в технике имеет самосинхронизация вибровозбудителей, т. е. устройств для создания

направленных колебаний, при условии, что они установлены на общем основании, совершающем малые упругие колебания. В этом случае требуемая синхронность движения вибровозбудителей достигается вследствие взаимодействия их с вибрирующим основанием без каких-либо дополнительных устройств, что упрощает конструкцию многих вибрационных машин (конвейеров, питателей, грохотов, дробилок, мельниц и др.).

Самосинхронизация механизмов может быть не только полезной, но и вредной. Например, если на одном фундаменте располагаются несколько машин с неуравновешенными массами вращающихся звеньев (роторов), то при синхронном движении роторов неуравновешенности от отдельных машин складываются, и колебания общего фундамента могут превзойти допустимые пределы. Однако при правильном выборе параметров механизмов, влияющих на условия самосинхронизации, можно обеспечить взаимную компенсацию неуравновешенных сил отдельных механизмов и тем самым снизить уровень колебаний.

Уравнения движения системы двух вибровозбудителей, установленных на вибрирующем основании с одной поступательной степенью свободы. На рис. 50 показана динамическая модель системы, состоящей из двух дебалансных вибровозбудителей (неуравновешенных роторов) 1 и 2, установленных на общей платформе 3. Платформа

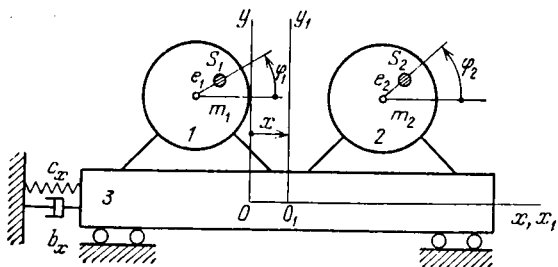


Рис. 50

может совершать малые упругие колебания вдоль оси Ox , которым соответствуют коэффициент жесткости c_x и коэффициент сопротивления b_x . Вибровозбудители приводятся во вращение от асинхронных электродвигателей. Неуравновешенность ротора вибровозбудителя 1 характеризуется массой m_1 , расположенной на расстоянии e_1 от

оси вращения. Соответственно для вибровозбудителя 2 имеем: m_2 и e_2 . Неподвижная система координат xOy и система координат, связанная с платформой x_1Oy_1 , выбраны так, что они совпадают в положении, при котором сила упругости равна нулю.

Примем за обобщенные координаты системы смещение платформы x и углы поворота роторов φ_1 и φ_2 . Тогда выражение кинетической энергии системы запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[m_x \dot{x}^2 + \sum_{i=1}^2 (J_i \dot{\varphi}_i^2 + m_i v_{S_i}^2) \right], \quad i = 1, 2,$$

где m_x — масса платформы, m_i и J_i — соответственно масса и момент инерции i -го вибровозбудителя относительно оси, проходящей через его центр масс S_i , v_{S_i} — скорость центра масс S_i , определяемая из соотношений

$$v_{S_i}^2 = (\dot{x} - e_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i)^2 + e_i^2 \dot{\varphi}_i^2 \cos^2 \varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя эти соотношения в выражение кинетической энергии, получаем

$$T = \frac{1}{2} m_{\Pi} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 J_{\Pi i} \dot{\varphi}_i^2 - \dot{x} \sum_{i=1}^2 m_i e_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2,$$

где $m_{\Pi} = m_x + m_1 + m_2$, $J_{\Pi 1} = J_1 + m_1 e_1^2$, $J_{\Pi 2} = J_2 + m_2 e_2^2$.

Выражение поступательной энергии имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c_x x^2 + \sum_{i=1}^2 m_i e_i g (1 + \sin \varphi_i),$$

где g — ускорение силы тяжести.

Уравнения Лагранжа второго рода запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + Q_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x,$$

где Q_1 , Q_2 и Q_x — обобщенные неконсервативные силы, соответствующие координатам φ_1 , φ_2 и x .

Примем, что на роторы вибровозбудителей действуют постоянные моменты сил сопротивления $\bar{M}_{c1}$ и $\bar{M}_{c2}$, а дви-

жающие моменты определяются по статическим характеристикам электродвигателей $M_{д1} = a_1 - b_1 \dot{\varphi}_1$ и $M_{д2} = a_2 - b_2 \dot{\varphi}_2$. Тогда обобщенные силы находятся из соотношений

$$Q_1 = a_1 - b_1 \dot{\varphi}_1 - M_{с1}, \quad Q_2 = a_2 - b_2 \dot{\varphi}_2 - M_{с2}, \quad Q_x = -b_x \dot{x},$$

и уравнения движения рассматриваемой системы получают вид

$$J_{пi} \ddot{\varphi}_i = a_i - b_i \dot{\varphi}_i - M_{сi} + m_i e_i (\ddot{x} \sin \varphi_i - g \cos \varphi_i), \quad i = 1, 2, \quad (9.16)$$

$$m_{п} \ddot{x} + b_x \dot{x} + c_x x = \sum_{i=1}^2 m_i e_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i).$$

Для решения этой системы уравнений по методу малого параметра примем, что в первом приближении роторы вибровозбудителей вращаются равномерно с угловой скоростью, модуль которой равен ω . Кроме того, примем, что член $b_x \dot{x}$ в третьем уравнении системы мал по сравнению с другими членами этого уравнения. При указанных допущениях в систему уравнений (9.16) можно ввести малый параметр μ :

$$J_{пi} \ddot{\varphi}_i + b_i (\dot{\varphi}_i - \omega) = \mu [a_i - M_{сi} + m_i e_i (\ddot{x} \sin \varphi_i - g \cos \varphi_i)],$$

$$m_{п} \ddot{x} + c_x x = \sum_{i=1}^2 m_i e_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i) - \mu b'_x \dot{x}$$

где $\mu b'_x = b_x$.

Порождающая система уравнений ($\mu = 0$) имеет вид

$$J_{п1} \ddot{\varphi}_1^0 + b_1 (\dot{\varphi}_1^0 - \omega) = 0,$$

$$J_{п2} \ddot{\varphi}_2^0 + b_2 (\dot{\varphi}_2^0 - \omega) = 0,$$

$$\ddot{x}^0 + \lambda^2 x^0 =$$

$$= \frac{m_1}{m_{п}} e_1 \left(\ddot{\varphi}_1^0 \sin \varphi_1^0 + \dot{\varphi}_1^0{}^2 \cos \varphi_1^0 \right) + \frac{m_2}{m_{п}} e_2 \left(\ddot{\varphi}_2^0 \sin \varphi_2^0 + \dot{\varphi}_2^0{}^2 \cos \varphi_2^0 \right),$$

где $\varphi_1^0, \varphi_2^0, x^0$ — значения переменных φ_1, φ_2, x при $\mu = 0$, $\lambda^2 = c_x/m_{п}$ — квадрат собственной частоты системы.

Из первых двух уравнений порождающей системы после интегрирования получаем:

$$\varphi_1^0 = \omega t + \theta_1, \quad \varphi_2^0 = \omega t + \theta_2.$$

Следовательно, третье уравнение порождающей системы может быть записано в виде

$$\ddot{x}^0 + \lambda^2 x^0 = \omega^2 \left[\frac{m_1}{m_{\Pi}} e_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \frac{m_2}{m_{\Pi}} e_2 \cos(\omega t + \theta_2) \right].$$

Решение этого уравнения получаем из (3.30) при $k_1 = \omega^2$ и $\gamma = 0$, если на основании принципа независимости действия сил (суперпозиции) сложить решения, получаемые для сил, пропорциональных $\cos(\omega t + \theta_1)$ и $\cos(\omega t + \theta_2)$:

$$x^0 = \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[\frac{m_1}{m_{\Pi}} e_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \frac{m_2}{m_{\Pi}} e_2 \cos(\omega t + \theta_2) \right].$$

В работе [3] показано, что указанные синхронные решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $x(t)$ действительно существуют и дальнейших приближений с учетом малого параметра μ не требуется, если соблюдены равенства:

$$M_{\text{изб}1} + M_{\text{в}} = 0, \quad M_{\text{изб}2} - M_{\text{в}} = 0, \quad (9.17)$$

где избыточные моменты $M_{\text{изб}1}$, $M_{\text{изб}2}$ и вибрационный момент $M_{\text{в}}$ для указанной системы из двух вибровозбудителей определяются из соотношений

$$M_{\text{изб}1} = a_1 - b_1 \omega - M_{\text{с}1}, \quad M_{\text{изб}2} = a_2 - b_2 \omega - M_{\text{с}2},$$

$$M_{\text{в}} = -\frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\omega^2 - \lambda^2} \frac{m_1 e_1 m_2 e_2}{m_{\Pi}} \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

Вибрационные моменты при любом числе вибровозбудителей можно рассматривать как дополнительные средние моменты, действующие на неуравновешенные роторы вследствие колебаний основания, на котором они установлены. Возникновение этих моментов является проявлением «вибрационной связи», которая, например, в уравнениях движения (9.16) выражается членами $m_1 e_1 \ddot{x} \sin \varphi_1$ и $m_2 e_2 \ddot{x} \sin \varphi_2$. Сумма вибрационных моментов равна нулю, так как они не изменяют общего баланса энергии в системе, а лишь перераспределяют подводимую к системе энергию между отдельными вибровозбудителями таким образом, что обеспечивается их синхронное вращение независимо от значений избыточных моментов.

Угловая скорость синхронного вращения ω и сдвиг фаз $\theta = \theta_1 - \theta_2$ находим из уравнений (9.17) после подстановки в них выражений для $M_{изб1}$, $M_{изб2}$ и M_B :

$$\omega = \frac{a_1 - M_{c1} + a_2 - M_{c2}}{b_1 + b_2} s$$

$$\sin \theta = - \frac{M_{изб1}}{A_B \operatorname{sgn}(\omega^2 - \lambda^2)} \equiv \frac{M_{изб2}}{A_B \operatorname{sgn}(\omega^2 - \lambda^2)}^{\dagger}$$

где

$$A_B = \frac{\omega^4}{\omega^2 - \lambda^2} \frac{m_1 e_1 m_2 e_2}{2m_{II}}.$$

Из выражения для $\sin \theta$ следует условие самосинхронизации

$$|M_{изб1}| = |M_{изб2}| < A_B,$$

т. е. модули избыточных моментов не должны превышать максимального значения (амплитуды) вибрационного момента.

Эффект самосинхронизации может иметь место даже в случае, когда двигатель одного из вибровозбудителей выключен из сети. Например, при $M_{изб1} = -M_{c1}$ из условия самосинхронизации получаем

$$|M_{c1}| < A_B,$$

т. е. для самосинхронизации необходимо только, чтобы момент сопротивления вращению ротора выключенного вибровозбудителя не превышал максимального значения вибрационного момента. Эффект вращения вибровозбудителя при выключенном двигателе посредством колебаний его оси называется *эффектом вибрационного поддержания неуравновешенного ротора*.

§ 37. Колебания в механизме центробежного вибровозбудителя с двигателем ограниченной мощности

Центробежный вибровозбудитель. При рассмотрении упругих колебаний в механизме для передачи вращения от двигателя к валу рабочей машины (см. рис. 46, б) считалось, что угловая скорость ротора двигателя может быть принята постоянной. Это утверждение справедливо в тех случаях, когда двигатель практически имеет неограниченный запас мощности, и потому изменения сил,

действующих на звенья механизма, не оказывают влияния на установившуюся скорость вращения ротора двигателя. При ограниченной мощности двигателя его характеристика должна учитываться при исследовании динамики всего механизма. Особенно ярко это влияние может проявляться на режимах движения, близких к резонансным. Такие режимы характерны для механизмов вибровозбудителей, т. е. устройств для создания направленных колебаний.

На рис. 51 показана схема одного из простейших центробежных вибровозбудителей, который состоит из звена с массой m_2 , упругой связи с коэффициентом жесткости c и неуравновешенной массы m_1 , приводимой во вращение от двигателя с моментом инерции J_d . Колебания звена с массой m_2 в направлении оси x могут рассматриваться как колебания, вынуждаемые той составляющей силы инерции, которая направлена вдоль оси x и изменяется по гармоническому закону. Соответственно механизм центробежного вибровозбудителя называют *колебательной системой с инерционным возбуждением*.

Уравнения движения вибровозбудителя с двигателем ограниченной мощности. При составлении уравнений движения примем, что движение массы m_1 происходит в горизонтальной плоскости, а сила трения в паре «ползун-стойка» определяется выражением $F_r = -b\dot{x}$. Кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} (m_2 \dot{x}^2 + J_d \dot{\varphi}^2 + m_1 v_A^2),$$

где

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}r\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Введем обозначения: $m = m_1 + m_2$, $J = J_d + m_1 r^2$. Тогда

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - m_1 \dot{x}r\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Потенциальная энергия механизма

$$\Pi = \frac{1}{2} c x^2.$$

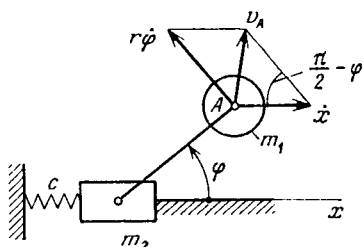


Рис. 51

Характеристику двигателя считаем заданной в виде $M_d = M_d(\dot{\varphi})$. Уравнения движения получаем из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - m_1 r \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_1 r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= -cx - b\dot{x}, \\ J\ddot{\varphi} - m_1 r \ddot{x} \sin \varphi &= M_d(\dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (9.18)$$

В отличие от уравнений движения, составленных для двухмассной динамической модели с двигателем неограниченной мощности, уравнения (9.18) должны решаться совместно. Их можно записать также в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda^2 x &= h_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi + h_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - h\dot{x}, \\ \ddot{\varphi} &= L(\dot{\varphi}) + h_2 \ddot{x} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где $\lambda^2 = c/m$, $h = b/m$, $h_1 = m_1 r/m$, $h_2 = m_1 r/J$, $L(\dot{\varphi}) = M_d(\dot{\varphi})/J$.

Приведение уравнений движения к стандартной форме по методу медленно меняющихся параметров. Из уравнений (9.19) следует, что при малых значениях коэффициентов h_1 , h_2 и медленно изменяющейся величине $L(\dot{\varphi})$ можно приближенно считать, что перемещение x изменяется по закону, близкому к гармоническому, а ускорение $\ddot{\varphi}$ имеет малую величину. Тогда, как и в § 19, искомое решение для переменной x будем искать в форме

$$x = A \cos(\varphi + \theta), \quad (9.20)$$

где A и θ — медленно меняющиеся параметры, связанные соотношением

$$\dot{x} = -A\lambda \sin(\varphi + \theta). \quad (9.21)$$

Угловую скорость вращения вала двигателя обозначим через $\tilde{\omega} = d\varphi/dt$. Новые переменные A , θ и $\tilde{\omega}$ будут медленно изменяющимися величинами.

Производная $\dot{x}$ может быть также найдена дифференцированием выражения (9.20):

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\varphi + \theta) - (\tilde{\omega} + \dot{\theta}) A \sin(\varphi + \theta). \quad (9.22)$$

Приравнявая правые части соотношений (9.21) и (9.22), получаем

$$\dot{A} \cos(\varphi + \theta) - \dot{\theta} A \sin(\varphi + \theta) = (\tilde{\omega} - \lambda) A \sin(\varphi + \theta). \quad (9.23)$$

Дифференцирование выражения (9.21) дает

$$\ddot{x} = -\dot{A}\lambda \sin(\varphi + \theta) - (\tilde{\omega} + \dot{\theta})A\lambda \cos(\varphi + \theta). \quad (9.24)$$

Система уравнений движения (9.19) с учетом выражений (9.20), (9.21) и (9.24) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{A}\lambda \sin(\varphi + \theta) - \dot{\theta}A\lambda \cos(\varphi + \theta) + A\lambda(\lambda - \omega)\cos(\varphi + \theta) = \\ = h_1\tilde{\omega} \sin \varphi + h_1\omega^2 \cos \varphi + A\lambda h \sin(\varphi + \theta), \end{aligned} \quad (9.25)$$

$$\tilde{\omega} = L(\tilde{\omega}) - h_2[\dot{A}\lambda \sin(\varphi + \theta) + (\tilde{\omega} + \dot{\theta})A\lambda \cos(\varphi + \theta)] \sin \varphi. \quad (9.26)$$

Система уравнений (9.23), (9.25) и (9.26) для определения $\dot{A}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{\omega}$ может быть упрощена отбрасыванием членов второго порядка малости: $h_1\omega$, $h_2\dot{A}$ и $h_2\dot{\theta}$. Кроме того, уравнения (9.23) и (9.25) разрешим относительно $\dot{A}$ и $\dot{\theta}$. Тогда получаем систему трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= L(\tilde{\omega}) - Ah_2\lambda\tilde{\omega} \cos(\varphi + \theta) \sin \varphi, \\ \dot{A} &= -\frac{1}{\lambda} [h_1\omega^2 \cos \varphi + A\lambda h \sin(\varphi + \theta)] \sin(\varphi + \theta), \\ \dot{\theta} &= \lambda - \tilde{\omega} - \frac{1}{A\lambda} [h_1\omega^2 \cos \varphi + A\lambda h \sin(\varphi + \theta)] \cos(\varphi + \theta). \end{aligned}$$

Эту систему можно привести к стандартной форме метода медленно меняющихся параметров, принимая за независимую переменную угол φ и используя соотношение $d\varphi = \omega dt$:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\varphi} &= \frac{1}{\tilde{\omega}} [L(\tilde{\omega}) - Ah_2\lambda\tilde{\omega} \cos(\varphi + \theta) \sin \varphi], \\ \frac{dA}{d\varphi} &= -\frac{1}{\lambda\tilde{\omega}} [h_1\omega^2 \cos \varphi + A\lambda h \sin(\varphi + \theta)] \sin(\varphi + \theta), \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\lambda - \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} - \frac{1}{A\lambda\tilde{\omega}} [h_1\omega^2 \cos \varphi + A\lambda h \sin(\varphi + \theta)] \cos(\varphi + \theta). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Исследование стационарных режимов движения. Система уравнений (9.27) может быть подвергнута дальнейшему упрощению, если принять во внимание, что за один период изменения угла φ от 0 до 2π величины $\tilde{\omega}$,

A и θ изменяются очень мало, и их производные по углу поворота φ можно считать равными их средним значениям:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} &= \frac{1}{2\pi\tilde{\omega}} \int_0^{2\pi} L(\tilde{\omega}) d\varphi - \frac{Ah_2\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \theta) \sin \varphi d\varphi, \\ \frac{dA}{d\varphi} &= -\frac{h_1\tilde{\omega}}{2\pi\lambda} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin(\varphi + \theta) d\varphi - \frac{Ah}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi + \theta) d\theta, \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{2\pi\tilde{\omega}} \int_0^{2\pi} (\lambda - \tilde{\omega}) d\varphi - \frac{h_1\tilde{\omega}}{2\pi A\lambda} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(\varphi + \theta) d\varphi - \\ &\quad - \frac{h}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \theta) \cos(\varphi + \theta) d\varphi.\end{aligned}$$

При выполнении операции усреднения величины $\tilde{\omega}$, A и θ считаем постоянными. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2},$$

получаем после интегрирования

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} &= \frac{1}{\tilde{\omega}} \left[L(\tilde{\omega}) + \frac{h_2}{2} A\lambda\tilde{\omega} \sin \theta \right], \\ \frac{dA}{d\varphi} &= -\frac{h_1\tilde{\omega}}{2\lambda} \sin \theta - \frac{Ah}{2\tilde{\omega}}, \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\lambda - \tilde{\omega} - \frac{h_1\omega^2}{2A\lambda} \cos \theta \right).\end{aligned}\tag{9.28}$$

Система приближенных уравнений (9.28) может быть использована для определения переменных $\tilde{\omega}$, A и θ в переходных режимах путем численного интегрирования. В дальнейшем ограничимся исследованием стационарных режимов движения, под которыми будем понимать режимы движения при постоянных значениях величин $\tilde{\omega}$, A и θ , т. е. при постоянной угловой скорости двигателя и гармонических колебаний ползуна вибровозбудителя.

Условия существования стационарных режимов:

$$d\tilde{\omega}/d\varphi = 0, \quad dA/d\varphi = 0, \quad d\theta/d\varphi = 0.$$

При этих условиях уравнения стационарных режимов движения имеют вид

$$\begin{aligned} L(\tilde{\omega}) + \frac{h_2}{2} A \lambda \tilde{\omega} \sin \theta &= 0, \\ hA + \frac{h_1 \omega^2}{\lambda} \sin \theta &= 0, \\ \lambda - \tilde{\omega} - \frac{h_1 \omega^2}{2A\lambda} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Отсюда находим амплитуду и начальную фазу колебаний:

$$A = \frac{h_1 \omega^2}{\sqrt{4\lambda^2 (\lambda - \tilde{\omega})^2 + \lambda^2 h^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{h}{2(\tilde{\omega} - \lambda)}.$$

Подставляя значения постоянных h , h_1 и h_2 , выраженные через параметры механизма, получаем:

$$A = \frac{m_1}{m} \frac{r \omega^2}{\sqrt{4\lambda^2 (\lambda - \tilde{\omega})^2 + \lambda^2 b^2/m^2}}, \quad (9.30)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{m(\tilde{\omega} - \lambda)}. \quad (9.31)$$

Угловую скорость вала двигателя $\tilde{\omega}$, которую приближенно можно считать угловой частотой вынужденных колебаний, находим из первого уравнения системы (9.29)

$$L(\tilde{\omega}) - \frac{h_2 h}{2\tilde{\omega} h_1} A^2 \lambda^2 = 0,$$

или

$$M_d(\tilde{\omega}) - \frac{b}{2\tilde{\omega}} A^2 \lambda^2 = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения амплитуды A по формуле (9.30), получаем

$$M_d(\tilde{\omega}) - S(\tilde{\omega}) = 0, \quad (9.32)$$

где

$$S(\tilde{\omega}) = \frac{b}{2} \left(\frac{m_1}{m} \right)^2 \frac{r^2 \tilde{\omega}^3}{4(\lambda - \tilde{\omega})^2 + b^2/m^2}. \quad (9.33)$$

Условия прохождения через резонанс. Уравнение (9.32) может иметь один или несколько корней, определяющих значение угловой скорости двигателя в стационарном режиме. На рис. 52 изображен график величины $S(\tilde{\omega})$ для некоторой комбинации постоянных параметров

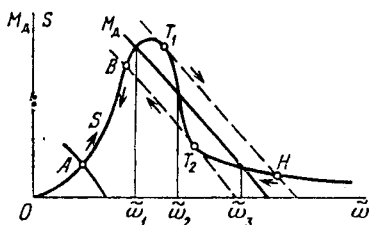


Рис. 52

механизма b , m_1 , m , λ^2 и r^2 . Искомые корни уравнения (9.32) найдутся в пересечении графика $S(\tilde{\omega})$ с характеристикой двигателя $M_d(\tilde{\omega})$.

Для характеристики $M_d(\omega)$, показанной сплошной линией на рис. 52, получают три точки пересечения и соответственно три корня уравнения (9.32): ω_1 , ω_2 и ω_3 .

Исследование устойчивости движения показывает, что при расположении точек пересечения на участке OT_1 или $T_2\infty$ движение устойчиво, а на участке T_1T_2 — неустойчиво [13].

Регулировка частоты колебаний, создаваемых центробежным вибровозбудителем с двигателем постоянного тока, выполняется изменением тока в цепи возбуждения. Характеристики, получаемые при различных значениях тока, называются *регулируемыми характеристиками*. На рис. 52 штриховыми линиями показаны две характеристики, одна из которых касается кривой $S(\tilde{\omega})$ в точке T_1 , а другая — в точке T_2 . Исследование устойчивости движения вибровозбудителя при регулируемых характеристиках, расположенных между указанными граничными кривыми, позволяет объяснить экспериментально наблюдаемое явление «срыва» колебаний при прохождении через резонанс.

Пусть, например, угловая скорость двигателя постепенно увеличивается, начиная от некоторого значения, соответствующего точке A пересечения кривых $M_d(\tilde{\omega})$ и $S(\tilde{\omega})$ на участке OT_1 . После достижения граничной регулируемой характеристики в точке T_1 колебания быстро («скачком» или «срывом») переходят на другой стационарный режим, соответствующий точке H пересечения той же граничной характеристики с кривой $S(\tilde{\omega})$. При дальнейшем увеличении угловой скорости $\tilde{\omega}$ наблю-

даются стационарные режимы, при которых точка пересечения кривых $M_d(\tilde{\omega})$ и $S(\tilde{\omega})$ удаляется вправо. Следовательно, при таком увеличении скорости двигателя выпадают все режимы стационарных движений, соответствующие участку T_1H кривой $S(\tilde{\omega})$.

При уменьшении скорости двигателя, начиная, например, от режима, соответствующего точке H , стационарные устойчивые режимы будут получаться до тех пор, пока точка пересечения кривых $M_d(\tilde{\omega})$ и $S(\tilde{\omega})$ не совпадает с точкой T_2 . Тогда опять произойдет «срыв» колебаний, так как граничная регулировочная характеристика, кроме точки касания T_2 , имеет еще точку пересечения B с кривой $S(\tilde{\omega})$.

При дальнейшем уменьшении скорости двигателя точка пересечения кривых $M_d(\tilde{\omega})$ и $S(\tilde{\omega})$ движется по кривой $S(\tilde{\omega})$ влево. Следовательно, при уменьшении скорости двигателя могут выпасть все режимы стационарных движений, соответствующие участку T_2B кривой $S(\tilde{\omega})$.

Глава X. КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ РЕГУЛЯТОРОВ СКОРОСТИ

§ 38. Колебания в механизме регулятора скорости с тахогенератором

Механизм регулятора скорости с тахогенератором. На рис. 53 показана схема регулирования угловой скорости вала теплового двигателя с использованием тахогенератора I , т. е. электрического генератора постоянного тока, который дает напряжение U , пропорциональное угловой скорости вала регулируемой машины. Одна клемма тахогенератора соединена с усилителем 2 , а другая — с щеткой потенциометра 3 , находящегося под действием напряжения постоянного тока электрической сети. В результате такого соединения в усилитель 2 подается разность напряжений $U - U_n$. Щетка потенциометра устанавливается так, чтобы напряжение U_n было равно U при заданном значении скорости установившегося движения. Тогда разность напряжений $U - U_n$ при установившемся движении равна нулю, а шток электромагнита 4 остается неподвижным.

При увеличении или уменьшении угловой скорости вала регулируемой машины вследствие изменения сил сопротивления соответственно увеличивается или уменьшается напряжение U , на клеммах усилителя появляется

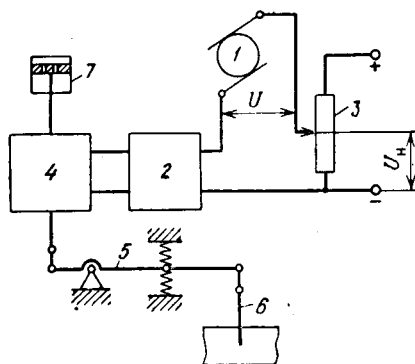


Рис. 53

напряжение $U - U_n$, и шток электромагнита 4 поднимается или опускается, воздействуя через рычажную систему 5 на заслонку 6 в трубопроводе, подводящем рабочее вещество (топливо) в двигатель. Перемещение заслонки 6 вызовет изменение проходного сечения трубопровода. С уменьшением или увеличением этого сечения

изменяется количество топлива, поступающего в двигатель, и соответственно изменяется движущий момент, т. е. восстанавливается равенство работ сил движущих и сил сопротивления, необходимое для установившегося движения. Для гашения возможных колебаний штока электромагнита к нему присоединен демпфер 7.

Уравнения движения регулятора скорости с тахогенератором. Положения звеньев регулируемой машины и регулятора с тахогенератором определяются двумя независимыми обобщенными координатами, за которые примем угол поворота вала регулируемой машины φ и перемещение штока электромагнита x , которое отсчитывается от положения, соответствующего номинальной угловой скорости вала машины $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_n$, при которой напряжение на клеммах тахогенератора $U = U_n$.

Кинетическую энергию системы примем равной

$$T = \frac{1}{2} (J_n \dot{\omega}^2 + m_n \dot{x}^2), \quad (10.1)$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость вала регулируемой машины, J_n — приведенный к этому валу момент инерции звеньев, m_n — приведенная к штоку электромагнита масса.

Приведенный момент инерции J_n определяем по (2.8), считая неподвижным шток электромагнита, а приведем-

ную массу m_n — по (2.10), считая неподвижным вал регулируемой машины. В дальнейшем J_n и m_n считаем постоянными. Тогда уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа имеют вид:

$$J_n \ddot{\omega} = M_d + M_c, \quad m_n \ddot{x} = F_d + F_c, \quad (10.2)$$

где M_d , M_c — приведенные к валу машины моменты сил движущих и сил сопротивления, F_d , F_c — приведенные к штоку электромагнита сила движущая и сила сопротивления.

Приведенный движущий момент M_d зависит от положения заслонки b , т. е. от подачи топлива в двигатель. С достаточной для практики точностью M_d можно считать линейно зависящим от перемещения x :

$$M_d = M_n - k_m x, \quad (10.3)$$

где M_n — номинальное значение движущего момента при $x = 0$, k_m — постоянный коэффициент.

Приведенная движущая сила F_d зависит от напряжения $U - U_n$, поступающего на клеммы усилителя $\mathcal{Z}$. Это напряжение в свою очередь зависит от разности $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_n$. В первом приближении указанные зависимости можно считать линейными, и тогда приведенная движущая сила найдется из соотношения

$$F_d = k_F (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_n). \quad (10.4)$$

Приведенная сила сопротивления F_c складывается из силы пружины $F_{np} = -cx$ (c — приведенный коэффициент жесткости пружины) и силы вязкого сопротивления в демпфере $F_r = -b\dot{x}$:

$$F_c = -cx - b\dot{x}. \quad (10.5)$$

С учетом (10.3) — (10.5) система уравнений движения (10.2) принимает вид

$$J_n \ddot{\omega} = M_n - k_m x - M_c, \quad (10.6)$$

$$m_n \ddot{x} = k_F (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_n) - cx - b\dot{x}. \quad (10.7)$$

Для решения этой системы уравнений относительно переменной x дифференцируем по времени обе части (10.7):

$$m_n \dddot{x} = k_F \dot{\omega} - c\dot{x} - b\ddot{x}.$$

Подставляя сюда значение $\tilde{\omega}$ из (10.6), получаем

$$J_n m_n \ddot{x} + J_n b \ddot{x} + J_n c \dot{x} + k_F k_m x = k_F M_n - k_F M_c. \quad (10.8)$$

Статическая устойчивость регулятора скорости с тахогенератором. Исследование динамики регулятора начинается с построения его характеристики, под которой понимается графическое изображение зависимостей $F_d = F_d(x)$ и $F_c = F_c(x)$ при установившемся движении, т. е. при $\dot{\omega} = 0$, $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. В этом случае

$$F_d = k_F(\tilde{\omega}_y - \tilde{\omega}_n), \quad F_c = cx,$$

где $\tilde{\omega}_y$ — установившаяся угловая скорость вала машины, в общем случае отличающаяся от номинальной.

Зависимость $F_c(x)$ изображается наклонной прямой, проходящей через начало координат, а зависимость $F_d(x)$ — прямыми, параллельными оси абсцисс, причем каждая из этих прямых соответствует определенному значению $\tilde{\omega}_y$. На рис. 54 изображена одна из этих прямых для $\tilde{\omega}_y > \tilde{\omega}_n$. Точка пересечения прямых, изображающих F_d и F_c , вызывает величину $x = x_y$, при которой рычажная система регулятора для данного значения $\tilde{\omega}_y$

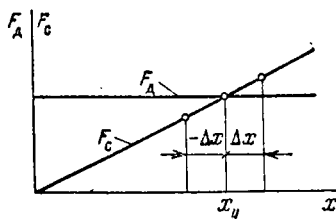


Рис. 54

находится в равновесии под действием силы пружины и силы, действующей со стороны штока электромагнита.

По характеристике регулятора можно судить о его статической устойчивости, т. е. способности звеньев регулятора возвращаться в исходное равновесное положение, если при установившемся движении с определенной угловой скоростью $\tilde{\omega}_y$ заслонка 6 и рычажная система 5 с пружинами будут выведены из этого положения. Для рассматриваемого регулятора при положительном приращении $\Delta x = x - x_y$ сила пружины $F_{np} = F_c$ оказывается больше силы, действующей со стороны штока электромагнита при неизменном значении $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$, что приводит к уменьшению x и возврату в исходное положение, когда сила пружины равна силе со стороны штока электромагнита. При отрицательном приращении Δx сила пружины меньше силы со стороны штока электромагнита,

что приводит к увеличению x и возврату в исходное положение. Следовательно, регулятор с тахогенератором, характеристика которого показана на рис. 54, статически устойчив.

Динамическая устойчивость регулятора скорости с тахогенератором. Статически устойчивый регулятор может оказаться динамически неустойчивым. Для проверки устойчивости движения воспользуемся критерием Гурвица. С этой целью приведем уравнение (10.8) к однородному путем подстановки

$$x = x_1 + \frac{M_n - M_0}{k_m} \quad (10.9)$$

считая момент сил сопротивления M_0 постоянным или равным нулю (сброс нагрузки). Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0, \quad (10.10)$$

где $a_0 = J_n m_n$, $a_1 = J_n b$, $a_2 = J_n c$, $a_3 = k_F k_m$. Для того чтобы система была устойчивой, кроме положительности всех коэффициентов характеристического уравнения дополнительно должно удовлетворяться условие (5.12): $a_1 a_2 > a_0 a_3$. В рассматриваемом случае коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_3 положительны, а условие (5.12) приводит к неравенству

$$b J_n c - m_n k_F k_m > 0. \quad (10.11)$$

Из условия (10.11) следует, что при $b = 0$ (нет демпфера) система неустойчива. Обычно стремятся удовлетворить условию (10.11) подбором коэффициента b (реже — увеличением приведенного момента инерции или коэффициента жесткости пружины).

Колебания в механизме регулятора скорости с тахогенератором. Решение системы уравнений движения (10.6) и (10.7) начинается с решения линейного дифференциального уравнения третьего порядка (10.8). При постоянном моменте сил сопротивления M_0 для решения соответствующего однородного уравнения находим сначала корни характеристического уравнения (10.10). В зависимости от значений a_0 , a_1 , a_2 и a_3 могут быть четыре случая: 1) один корень действительный и два мнимых, 2) три действительных различных корня, 3) три совпавших нулевых корня, 4) из трех действительных корней два совпали. Колебания в механизме будут только в первом случае распределения корней.

Обозначим действительный корень характеристического уравнения (10.10) через r_1 и сопряженные комплексные корни через $r_2 = \alpha + i\lambda$, $r_3 = \alpha - i\lambda$. Тогда с учетом формул (3.9), (3.10) и подстановки (10.9) получаем решение уравнения (10.8)

$$x = \frac{M_n - M_c}{k_m} + C_1 e^{r_1 t} + e^{\alpha t} (C_2 \cos \lambda t + C_3 \sin \lambda t), \quad (10.12)$$

где постоянные C_1 , C_2 и C_3 находятся из начальных условий ($t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\ddot{x} = \ddot{x}_0$).

Если удовлетворено условие устойчивости (10.11), то r_1 и α выражаются отрицательными числами. Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$ второй член решения (10.12) стремится к нулю, а третий член описывает затухающие колебания. Подставляя решение (10.12) в уравнение (10.6), получаем

$$\ddot{\omega} = -\frac{k_m}{J_n} [C_1 e^{r_1 t} + e^{\alpha t} (C_2 \cos \lambda t + C_3 \sin \lambda t)],$$

т. е. угловое ускорение вала машины $\ddot{\omega}$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а угловая скорость $\dot{\omega}$ — к установившемуся значению $\dot{\omega}_r$.

§ 39. Колебания в механизме центробежного регулятора

Механизм центробежного регулятора скорости. На рис. 55 показан механизм регулирования угловой скорости вала теплового двигателя с использованием центробежного маятника в виде двух тяжелых шаров 1, соединенных посредством стержней (рычагов) с валом регулятора 2 и его муфтой 3, на которую действует пружина 4. Вал регулятора, а следовательно, и шары получают вращение от вала двигателя (обычно через зубчатую передачу). При увеличении скорости вращения шары расходятся, и муфта регулятора поднимается, при уменьшении — опускается, воздействуя через рычажную систему 5 на заслонку 6, которая изменяет площадь проходного сечения трубопровода, подводящего рабочее вещество (топливо) в двигатель.

Уравнения движения центробежного регулятора. При составлении выражения кинетической энергии регулятора будем учитывать только постоянный приведенный

момент инерции J_n звеньев машины, приведенный к валу двигателя, и массу шаров m . За обобщенные координаты примем угол поворота φ вала двигателя и перемещение муфты регулятора z , отсчитываемое от положения, соответствующего номинальной скорости вала двигателя $\tilde{\omega}_n$.

Если рычажный механизм центробежного регулятора выполнить как симметричный равнозвездный кривошипно-ползунный механизм ($l_{AB} = l_{BC} = l_{BD}$), то точка D относительно отрезка AC движется по прямой, перпендикулярной ему и проходящей через точку C . При указанных соотношениях между длинами звеньев механизма центр шара D в вертикальном направлении перемещается, как и муфта, на величину z .

Кроме того, считаем, что расстояния от точек A и C до оси регулятора малы по сравнению с длиной $l_{AD} = d$. Тогда из $\triangle ACD$ следует, что расстояние от центра шара до оси регулятора x и перемещение z связаны соотношением

$$x^2 = d^2 - (z_0 - z)^2. \quad (10.13)$$

Абсолютная скорость центра шара v_D может быть выражена через ее проекции в неподвижной системе координат

$$v_D^2 = (x\dot{\omega})^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2, \quad (10.14)$$

где $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ — угловая скорость вала двигателя, $u = \omega_p / \tilde{\omega}$ — передаточное отношение, равное отношению угловой скорости вала регулятора к угловой скорости вала двигателя.

Из соотношения (10.13) имеем

$$x\dot{x} = (z_0 - z)\dot{z}.$$

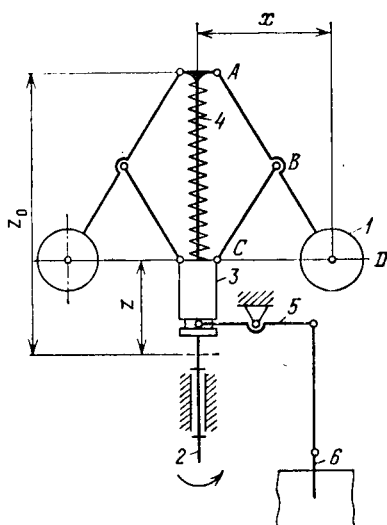


Рис. 55

Отсюда

$$\dot{x}^2 = \dot{z}^2 \frac{(z_0 - z)^2}{d^2 - (z_0 - z)^2}.$$

Следовательно, скорость v_D есть функция обобщенной координаты z и угловой скорости ω :

$$v_D^2 = u^2 \omega^2 [d^2 - (z_0 - z)^2] + \dot{z}^2 \frac{d^2}{d^2 - (z_0 - z)^2}.$$

Кинетическая энергия системы найдется из выражения $2T = J_{\Pi} \omega^2 + m v_D^2$ или

$$2T = J_{\Pi} \omega^2 + m u^2 \omega^2 [d^2 - (z_0 - z)^2] + \frac{m d^2 \dot{z}^2}{d^2 - (z_0 - z)^2}. \quad (10.15)$$

Уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} = \tilde{M}_{\Pi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = \tilde{F}_{\Pi},$$

где $\tilde{M}_{\Pi}$ — приведенный к валу двигателя момент внешних сил, $\tilde{F}_{\Pi}$ — приведенная к муфте регулятора внешняя сила.

Выполняя дифференцирование, получаем:

$$J_{\Pi} \ddot{\omega} + m u^2 [d^2 - (z_0 - z)^2] \ddot{\omega} + 2 m u^2 \dot{\omega} (z_0 - z) \dot{z} = \tilde{M}_{\Pi}, \quad (10.16)$$

$$\frac{m d^2}{d^2 - (z_0 - z)^2} \ddot{z} - \dot{z}^2 \frac{m d^2 (z_0 - z)}{[d^2 - (z_0 - z)^2]^2} - m u^2 \omega^2 (z_0 - z) = \tilde{F}_{\Pi}. \quad (10.17)$$

Статическая устойчивость центробежного регулятора. Для исследования статической устойчивости регулятора надо в уравнениях (10.16), (10.17) принять $\dot{\omega} = 0$, $\ddot{\omega} = 0$ и $\dot{z} = 0$. Тогда из уравнения (10.17) получаем

$$-m u^2 \omega^2 (z_0 - z) = \tilde{F}_{\Pi}. \quad (10.18)$$

Уравнение (10.18) можно представить также в виде $\tilde{F}_{\Pi} + \bar{F}_{\Pi} = 0$, где $\bar{F}_{\Pi}$ — приведенная к муфте регулятора сила инерции шаров. На рис. 56 показана характеристика регулятора, т. е. зависимость $\bar{F}_{\Pi}(z)$. Для центробежного маятника с равными длинами звеньев эта зависимость изображается прямой линией. На том же рис. 56

показана зависимость $F_n(z)$ для заданного значения $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$. Точка пересечения этого графика с характеристикой $F_n(z)$ определяет положение муфты, т. е. перемещение $z = z_y$, соответствующее угловой скорости $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$.

По характеристике регулятора можно судить о его статической устойчивости. Пусть, например, муфта регулятора при установившемся движении $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$ была выведена из положения равновесия, и перемещение z_y получило положительное приращение Δz . Тогда приведенная сила F_n оказывается по модулю больше приведенной силы инерции F_n . Если считать, что при этом угловая скорость $\tilde{\omega}$ не изменяется, то под действием силы F_n муфта регулятора вернется в исходное положение, что следует из (10.18). При отрицательном приращении Δz муфта регулятора также возвращается в исходное положение и, следовательно, регулятор статически устойчив.

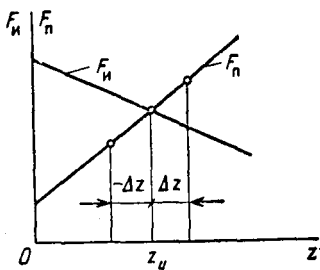


Рис. 58

Статически устойчивый регулятор может оказаться динамически неустойчивым. Исследование устойчивости движения системы, описываемой нелинейными уравнениями (10.16) и (10.17), представляет значительные трудности. Однако в большинстве случаев достаточно установить, является ли система динамически устойчивой при малых изменениях обобщенной координаты z и угловой скорости $\tilde{\omega}$. Тогда уравнения (10.16) и (10.17) могут быть сведены к одному линейному уравнению, для которого устойчивость движения проверяется по критерию Гурвица.

Глава XI. КОЛЕБАНИЯ В КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМАХ

§ 40. Уравнения движения кулачкового механизма с упругим толкателем

Одномассная динамическая модель кулачкового механизма с упругим толкателем. Для исследования колебаний в кулачковом механизме с упругим толкателем (выходным звеном) достаточно рассмотреть одномассовую

динамическую модель (рис. 57), так как жесткость кулачкового вала обычно больше жесткости толкателя. Кроме того, угловую скорость кулачка ω будем считать постоянной. При этих условиях динамика механизма определяется дифференциальным уравнением движения массы толкателя m , которая считается сосредоточенной в одной точке (верхнем конце толкателя). Действие сил упругости толкателя представлено пружиной, помещенной между массой m и кулачком. На массу m действует внешняя сила F и сила трения F_r , пропорциональная скорости верхнего конца толкателя. Нижний конец толкателя (пружины) движется в контакте с кулачком, т. е. перемещение нижнего конца толкателя s , отсчитываемое от наинизшего положения, определяется профилем кулачка. Перемещение верхнего конца толкателя y вследствие упругости толкателя отличается от перемещения s .

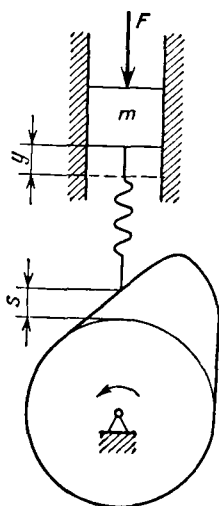


Рис. 57

Уравнение движения кулачкового механизма с упругим прямолинейно движущимся толкателем. Для динамической модели, показанной на рис. 57, имеем

$$m\ddot{y} = c(s - y) - b\dot{y} - F, \quad (11.1)$$

где b — коэффициент сопротивления, c — коэффициент жесткости толкателя.

Из уравнения (11.1) получаем

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = cs - F. \quad (11.2)$$

Величина s , входящая в правую часть уравнения движения (11.2), полностью определяется профилем кулачка и является заданной функцией времени. Функцию $s(t)$ называют *кинематическим возбуждением*, так как от ее вида зависит характер упругих колебаний.

Перемещения s и y мало отличаются по модулю, и потому, как и при рассмотрении колебаний в механизмах с упругими валами, удобнее за обобщенную координату принять разность

$$q = y - s. \quad (11.3)$$

Тогда уравнение движения кулачкового механизма с упругим толкателем принимает вид

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\ddot{s} - b\dot{s} - F \quad (11.4)$$

или

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \lambda^2 q = -\ddot{s} - 2\gamma\dot{s} - \frac{F}{m}, \quad (11.5)$$

где $\gamma = b/(2m)$ — коэффициент демпфирования, $\lambda = \sqrt{c/m}$ — собственная частота механизма.

При $\gamma < \lambda$ уравнение (11.5) является линейным уравнением движения колебательного типа, решение которого зависит от вида правой части, т. е. от закона изменения силы F и от производных $\dot{s}$ и $\ddot{s}$, определяемых профилем кулачка. Эти производные связаны с угловой скоростью кулачка ω соотношениями

$$\dot{s} = \tilde{\omega} \frac{ds}{d\varphi}, \quad \ddot{s} = \omega^2 \frac{d^2s}{d\varphi^2}, \quad (11.6)$$

где φ — угол поворота кулачка.

При сравнении характеристик упругих колебаний толкателя, получаемых при типовых законах движения нижнего конца толкателя $s(t)$, обычно принимают $F = 0$ (чисто инерционная нагрузка) и $\gamma = 0$ (отсутствие трения). Тогда уравнение движения (11.5) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\ddot{s}. \quad (11.7)$$

Уравнение движения кулачкового механизма с упругим вращающимся толкателем (коромыслом). При вращающемся толкателе обобщенная координата q определяется выражением $q = \psi_v - \psi$, где ψ_v — угол поворота упругого толкателя, ψ — угол поворота жесткого толкателя, зависящий только от профиля кулачка. Уравнение движения (11.7) в этом случае преобразуется к виду

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\ddot{\psi},$$

где $\lambda^2 = c/J$, c — крутильная жесткость вала толкателя, J — момент инерции толкателя относительно оси вращения.

§ 41. Типовые законы движения выходного звена в кулачковых механизмах

Фазы движения выходного звена кулачкового механизма. На рис. 58 показана типичная для машин-автоматов зависимость между перемещением толкателя s и углом поворота кулачка φ . В соответствии с видом графика $s(\varphi)$ участок на угле φ_n называется *фазой подъема*, а на угле φ_o — *фазой опускания*. Между ними могут

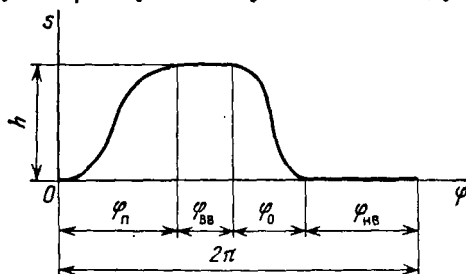


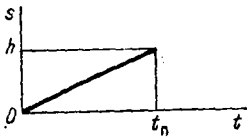
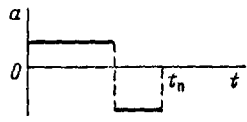
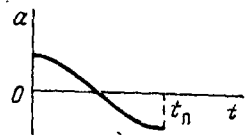
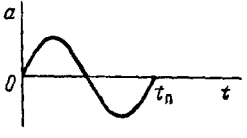
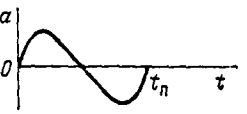
Рис. 58

быть фазы выстоя: $\varphi_{вв}$ — *верхний выстой*, $\varphi_{нв}$ — *нижний выстой*. При равномерном вращении кулачка график $s(\varphi)$ в другом масштабе дает график $s(t)$. В этом случае время прохождения фазы подъема обозначается через t_n , фазы опускания — t_o , фазы верхнего выстоя — $t_{вв}$, фазы нижнего выстоя — $t_{нв}$.

Для многих кулачковых механизмов условия выполнения технологического процесса определяют только фазовые углы поворота кулачка. Внутри же каждой фазы подъема и опускания зависимость перемещения выходного звена от угла поворота кулачка или от времени может выбираться различной в соответствии с дополнительными условиями.

Безразмерные коэффициенты типовых законов движения выходного звена в кулачковых механизмах. Законы движения выходных звеньев, удовлетворяющих одним и тем же граничным условиям, сравнивают при помощи безразмерных коэффициентов, выражающих кинематические и динамические характеристики механизма. Пусть, например, для закона движения толкателя кулачкового механизма $s = s(t)$ заданы граничные условия: в начале фазы подъема $t=0$ и $s=0$, в конце фазы $t=t_n$ и $s=h$. Тогда максимальные скорость и ускорение

Таблица 3

Законы движения	График	Безразмерные коэффициенты	
		$\delta_{\max}$	$\xi_{\max}$
Постоянная скорость		1	∞
Постоянное ускорение		2	4
Косинусоидальное ускорение		1,57	4,93
Синусоидальное ускорение		2	6,28
Полином пятой степени		1,88	5,77

толкателя $v_{\max}$ и $a_{\max}$ характеризуются безразмерными коэффициентами

$$\delta_{\max} = \frac{v_{\max}}{h/t_n}, \quad \xi_{\max} = \frac{a_{\max}}{h/t_n^2}.$$

В табл. 3 приведены некоторые употребительные законы движения с указанием коэффициентов $\delta_{\max}$ и $\xi_{\max}$, получаемых без учета упругости толкателя. Для кулач-

ково-коромысловых механизмов вместо s и h должны быть углы поворота коромысла ψ и $\psi_{\max}$. Безразмерные коэффициенты имеют те же значения и характеризуют максимальные угловую скорость и ускорение коромысла.

Простейшим законом движения является *закон постоянной скорости* (равномерное движение), при котором максимальная скорость толкателя имеет наименьшее значение. Но в начале и в конце движения происходят жесткие удары.

Жестких ударов можно избежать, используя *закон постоянного ускорения*, при котором толкатель сначала движется равноускоренно, а затем равнозамедленно. Однако при переходе от равноускоренного к равнозамедленному движению мгновенно изменяется направление ускорения, а следовательно, и силы инерции (мягкий удар), что приводит к упругим колебаниям и к увеличению динамических нагрузок.

Избежать мгновенного изменения ускорения по направлению можно, применяя *закон косинусоидального ускорения*, при котором в начале и в конце движения, если далее следует выстой, происходит изменение ускорения только по модулю.

Наконец, можно найти законы изменения ускорения, в которых нет скачков изменения скоростей и ускорения. Например, в табл. 3 показан закон движения с ускорением, изменяющимся по синусоиде, и один из тех законов движения, в которых зависимость перемещения от времени представлена в виде степенного полинома.

§ 42. Колебания в кулачковом механизме при законе постоянного ускорения

Колебания в кулачковом механизме на участке разбега. На рис. 59 показаны графики перемещения, скорости и ускорения нижнего конца толкателя на фазе подъема при условии, что время разбега с постоянным положительным ускорением равно времени выбега с постоянным отрицательным ускорением. В этом случае текущие значения перемещения s , скорости $\dot{s}$ и ускорения $\ddot{s}$ на участке разбега ($0 \leq t \leq 0,5t_u$) выражаются формулами:

$$s = \frac{a_u t^2}{2}, \quad \dot{s} = a_u t, \quad \ddot{s} = a_u, \quad (11.8)$$

где $a_{\Pi} = 4h/t_{\Pi}^2$ — постоянное ускорение, выражаемое через ход толкателя h и время подъема t .

Уравнение движения механизма на участке разбега имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -a_{\Pi}. \quad (11.9)$$

Это уравнение приводится к однородному после подстановки

$$q = q_1 - \frac{a_{\Pi}}{\lambda^2}.$$

Решение однородного уравнения находится по формуле (3.10) при $\alpha_k = 0$:

$$q_1 = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t.$$

Возвращаясь к переменной q , получаем

$$q = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t - \frac{a_{\Pi}}{\lambda^2}.$$

Из начальных условий ($t=0$, $q_0=0$, $\dot{q}_0=0$) имеем $C_1 = a_{\Pi}/\lambda^2$ и $C_2 = 0$. Следовательно, на участке разбега

$$q = \frac{a_{\Pi}}{\lambda^2} (\cos \lambda t - 1), \quad \dot{q} = -\frac{a_{\Pi}}{\lambda} \sin \lambda t, \quad \ddot{q} = -a_{\Pi} \cos \lambda t. \quad (11.10)$$

Для верхнего конца толкателя с учетом формул (11.3) и (11.8):

$$y = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos \lambda t - 1}{\lambda^2} \right) a_{\Pi}, \quad \dot{y} = \left(t - \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \right) a_{\Pi}, \quad (11.11)$$

$$\ddot{y} = (1 - \cos \lambda t) a_{\Pi}.$$

Коэффициент динамичности на участке разбега. Максимальное ускорение толкателя с учетом его упругости на участке разбега $|\ddot{y}|_{\max} = 2a_{\Pi}$. Отсюда коэффициент

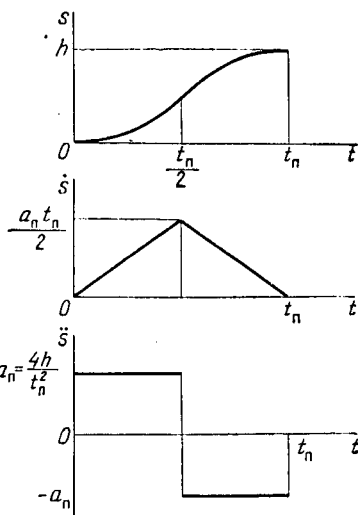


Рис. 59

динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\text{max}}}{a_{\text{п}}} = 2,$$

т. е. разрыв непрерывности в графике ускорений $\ddot{s}(t)$, при котором сила инерции толкателя скачком изменяется по модулю, приводит к увеличению максимального ускорения толкателя в два раза, если учесть его упругие колебания.

Колебания на участке выбега. Для участка выбега уравнение движения механизма

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = a_{\text{п}}$$

отличается от уравнения (11.9) только знаком в правой части и соответственно его решение имеет вид

$$q = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + \frac{a_{\text{п}}}{\lambda^2}.$$

Для определения постоянных интегрирования примем, что в начале участка выбега $t = 0$, $q = q_0$ и $\dot{q} = \dot{q}_0$. Тогда $q_0 = C_1 + \frac{a_{\text{п}}}{\lambda^2}$ и $\dot{q}_0 = \lambda C_2$ или $C_1 = q_0 - \frac{a_{\text{п}}}{\lambda^2}$ и $C_2 = \dot{q}_0 / \lambda$.

Возвращаясь к прежнему отсчету времени, получаем

$$q = q_0 \cos \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}) + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}) + \frac{a_{\text{п}}}{\lambda^2} [1 - \cos \lambda (t - 0,5t_{\text{п}})], \quad (11.12)$$

$$\dot{q} = -\lambda q_0 \sin \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}) + \dot{q}_0 \cos \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}) + \frac{a_{\text{п}}}{\lambda} \sin \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}), \quad (11.13)$$

$$\ddot{q} = (a_{\text{п}} - \lambda^2 q_0) \cos \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}) - \lambda \dot{q}_0 \sin \lambda (t - 0,5t_{\text{п}}). \quad (11.14)$$

Коэффициент динамичности на участке выбега. Из формулы (11.14) следует, что максимальное значение $\ddot{q}$, а следовательно, и коэффициент динамичности по ускорениям на участке выбега зависят от значений q и $\dot{q}$ в начале выбега. Например, если упругие колебания на участке разбега вследствие трения успевают затухнуть к моменту времени $t = 0,5t_{\text{п}}$, то $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$ и ускорение

толкателя с учетом его упругости на участке выбега

$$\ddot{y} = -a_{\pi} + a_{\pi} \cos \lambda(t - 0,5t_{\pi}).$$

Максимальное значение модуля этого ускорения $|\ddot{y}|_{\max} = 2a_{\pi}$ и коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\max}}{a_{\pi}} = 2.$$

Если затухание колебаний отсутствует, то значения q_0 и $\dot{q}_0$ для начала участка выбега могут быть найдены из формул (11.10), в которых надо положить $0,5t_{\pi} = mt_c + \alpha t_c$, где m — целое число, равное числу периодов

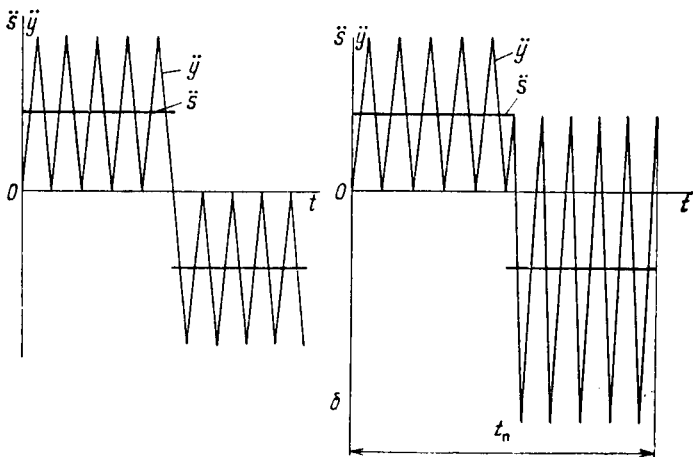


Рис. 60

t_c колебаний с собственной частотой λ , укладывающихся на отрезке от $t=0$ до $t=0,5t_{\pi}$. Отсюда

$$t_c = \frac{t_{\pi}}{2(m + \alpha)} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{4\pi}{t_{\pi}}(m + \alpha).$$

При $\alpha = 0$, т. е. при $\lambda \cdot 0,5t_{\pi} = 2\pi m$, из формул (11.10) имеем: $q_0 = 0$ и $\dot{q}_0 = 0$. В этом случае опять получаем $K_{\text{уск}} = 2$. На рис. 60, а показаны соответствующие графики $\ddot{s}$ и $\ddot{y}$.

При $\alpha = 0,5$, т. е. при $\lambda \cdot 0,5t_{\pi} = 2\pi m + \pi$, имеем:

$$q_0 = -2 \frac{a_{\pi}}{\lambda^2}, \quad \dot{q}_0 = 0, \quad \ddot{q} = 3a_{\pi} \cos \lambda(t - 0,5t_{\pi}),$$

$$\ddot{y} = -a_{\pi} + 3a_{\pi} \cos \lambda(t - 0,5t_{\pi}).$$

В этом случае коэффициент динамичности по ускорениям имеет наибольшее значение

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\text{max}}}{a_{\text{п}}} = 4,$$

т. е. суммируется влияние скачков ускорений $\ddot{s}(t)$ от $a_{\text{п}}$ до 0 и от 0 до $-a_{\text{п}}$.

В промежуточных случаях, например, при $\alpha = 0,25$ имеем: $q_0 = -\frac{a_{\text{п}}}{\lambda^2}$, $\dot{q}_0 = -\frac{a_{\text{п}}}{\lambda}$, $\ddot{y} = -a_{\text{п}} + 2a_{\text{п}} \cos \lambda(t - 0,5t_{\text{п}}) + a_{\text{п}} \sin \lambda(t - 0,5t_{\text{п}})$, и коэффициент динамичности по ускорениям принимает промежуточное значение

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\text{max}}}{a_{\text{п}}} = 3.$$

На рис. 60, б показаны для этого случая графики $\ddot{s}$ и $\ddot{y}$.

§ 43. Колебания в кулачковом механизме при косинусоидальном законе изменения ускорения толкателя

Колебания при $\lambda > \omega$. При косинусоидальном законе изменения ускорения толкателя перемещение s , скорость $\dot{s}$ и ускорение $\ddot{s}$ толкателя без учета его упругости выражаются формулами:

$$s = \frac{h}{2} (1 - \cos \omega t), \quad \dot{s} = \frac{h\omega}{2} \sin \omega t, \quad \ddot{s} = \frac{h\omega^2}{2} \cos \omega t, \quad (11.15)$$

где $\omega = \pi/t_{\text{п}}$.

Уравнение движения механизма (11.7) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\frac{h\omega^2}{2} \cos \omega t. \quad (11.16)$$

Для решения этого уравнения по операторному методу заменяем в нем оригинал q его изображением Q . Изображение производной $\ddot{q}$ находим по формуле (3.16) при нулевых начальных условиях и $s = s_{\text{п}}$, а изображение функции $\cos \omega t$ берем из табл. 1 (п. 4 при $\lambda = \omega$ и

$s = s_n$)*). Тогда дифференциальное уравнение (11.16) преобразуется в алгебраическое относительно изображения Q :

$$s_n^2 Q + \lambda^2 Q = -\frac{h\omega^2}{2} \frac{s_n}{(s_n^2 + \omega^2)}.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{h\omega^2}{2} \frac{s_n}{(s_n^2 + \lambda^2)(s_n^2 + \omega^2)}.$$

Обратный переход к оригиналу q по табл. 1 (п. 8 при $s = s_n$) дает решение уравнения (11.16)

$$q = \frac{h\omega^2}{2(\lambda^2 - \omega^2)} (\cos \lambda t - \cos \omega t). \quad (11.17)$$

Перемещение верхнего конца толкателя с учетом его упругости $y = s + q$ находим с использованием формул (11.15) и (11.17)

$$y = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \lambda t - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \omega t \right).$$

Двукратное дифференцирование по времени дает

$$\ddot{y} = \frac{h\omega^2 n^2}{2(n^2 - 1)} (\cos \omega t - \cos n\omega t), \quad (11.18)$$

$$\text{где } n = \frac{\lambda}{\omega} = \frac{2t_n}{t_c},$$

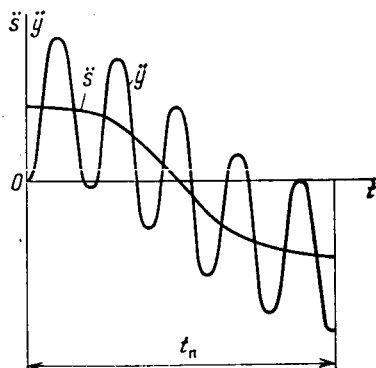


Рис. 61

Если n — целое четное число, то $n/2$ дает число периодов t_c колебаний с собственной частотой λ , укладывающихся на отрезке от $t=0$ до $t=t_n$. Если n — целое нечетное число, то на отрезке от $t=0$ до $t=t_n$ укладывается $n/2$ периодов t_c и один полупериод. На рис. 61 показаны графики ускорения толкателя без учета упругости $\ddot{s}$ и с учетом упругости $\ddot{y}$ при $n=10$.

Коэффициент динамичности при $\lambda > \omega$. В отличие от закона постоянного ускорения при косинусоидальном изменении ускорения коэффициент динамичности по уско-

*) В преобразованиях Лапласа s_n — комплексная величина,

рениям зависит от собственной частоты механизма λ . Из формул (11.15) и (11.18) следует

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\max}}{|\ddot{s}|_{\max}} = \frac{n^2}{n^2 - 1} |\cos \omega t - \cos n\omega t|_{\max},$$

где $\omega = \pi/t_n$, $n = \lambda/\omega$.

Обычно в кулачковых механизмах $n > 1$, и тогда с увеличением n , т. е. с повышением жесткости толкателя (или с увеличением времени подъема t_n) коэффициент динамичности по ускорениям стремится к значению $K_{\text{уск}} = 2$.

Колебания при $\lambda = \omega$. В этом случае уравнение движения (11.7) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\frac{h\lambda^2}{2} \cos \lambda t. \quad (11.19)$$

Для решения этого уравнения по операторному методу переходим от оригинала q к изображению Q . Изображение $\dot{q}$ находим по формуле (3.16) при нулевых начальных условиях, а изображение функции $\cos \lambda t$ берем из табл. 1 (п. 4 при $s = s_n$):

$$s_n^2 Q + \lambda^2 Q = -\frac{h\lambda^2}{2} \frac{s_n}{s_n^2 + \lambda^2}.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{h\lambda^2}{2} \frac{s_n}{(s_n^2 + \lambda^2)^2}.$$

Искомое решение дифференциального уравнения (11.19) находим обратным переходом от изображения Q к оригиналу q по табл. 1 (п. 5)

$$q = -\frac{h\lambda}{4} t \sin \lambda t.$$

Двукратное дифференцирование дает

$$\ddot{q} = -\frac{h\lambda^3}{4} (-\lambda t \sin \lambda t + 2 \cos \lambda t).$$

Ускорение толкателя с учетом его упругости

$$\ddot{y} = \ddot{s} + \ddot{q} = \frac{h\lambda^3}{4} t \sin \lambda t \quad \text{или} \quad \ddot{y} = \frac{h\pi^3}{4t_n'} t \sin \pi \frac{t}{t_n}.$$

Как и в случае резонанса, максимальные значения ускорения $\ddot{y}$ увеличиваются со временем t , но только до $t = t_n$, при котором $\lambda t = \pi$.

Коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = \frac{\pi}{2t_n} \left| t \sin \pi \frac{t}{t_n} \right|_{\text{max}}.$$

При $0 \leq t \leq t_n$ получаем $K_{\text{уск}} \approx 0,9$. При $n < 1$ коэффициент динамичности по ускорениям также меньше единицы, т. е. при малой жесткости толкателя и, следовательно, при низких значениях собственной частоты механизма возможно уменьшение инерционной нагрузки на толкатель за счет его упругости. Это свойство кулачкового механизма, которое можно назвать виброзащитным свойством, проявляется только в тех случаях, когда одновременно с уменьшением собственной частоты механизма уменьшается и время t_n .

§ 44. Колебания в кулачковых механизмах

при законах движения толкателя без мягких ударов

Колебания в кулачковом механизме при законе синусоидального ускорения. Пусть нижний конец толкателя при перемещении h за время t_n движется по закону синусоидального ускорения

$$s = \frac{h}{2\pi} (\omega t - \sin \omega t), \quad \dot{s} = \frac{h\omega}{2\pi} (1 - \cos \omega t), \quad \ddot{s} = \frac{h\omega^2}{2\pi} \sin \omega t, \quad (11.20)$$

где $\omega = 2\pi/t_n$.

Тогда уравнение движения (11.7) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\frac{h\omega^2}{2\pi} \sin \omega t. \quad (11.21)$$

Для решения этого уравнения по операторному методу заменяем в нем оригинал q его изображением Q . Изображение $\dot{q}$ находим по (3.16) при нулевых начальных условиях, а изображение функции $\sin \omega t$ берем из табл. 1 (п. 3 с заменой λ на ω и s на s_n). Тогда дифференциальное уравнение (11.21) преобразуется в алгебраическое относительно изображения Q :

$$s_n^2 Q + \lambda^2 Q = -\frac{h\omega^2}{2\pi} \frac{\omega}{s_n^2 + \omega^2}.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{h\omega^3}{2\pi} \cdot \frac{1}{(s_n^2 + \lambda^2)(s_n^2 + \omega^2)}.$$

Искомое решение дифференциального уравнения (11.21) находим обратным переходом от изображения Q к оригиналу q по табл. 1 (п. 9)

$$q = \frac{h\omega^3}{2\pi\lambda(\lambda^2 - \omega^2)} (\omega \sin \lambda t - \lambda \sin \omega t). \quad (11.22)$$

Перемещение верхнего конца толкателя с учетом его упругости на основании (11.3), (11.20) и (11.22):

$$y = \frac{h}{2\pi} \left[\omega t + \frac{\omega^3}{\lambda(\lambda^2 - \omega^2)} \sin \lambda t - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t \right].$$

Двукратное дифференцирование по времени дает

$$\ddot{y} = \frac{h\omega^2\lambda}{2\pi(\lambda^2 - \omega^2)} (\lambda \sin \omega t - \omega \sin \lambda t).$$

Коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\text{max}}}{|\ddot{s}|_{\text{max}}} \equiv \frac{n}{n^2 - 1} |n \sin \omega t - \sin \lambda t|_{\text{max}},$$

где $n = \frac{\lambda}{\omega} = \frac{t_{\text{п}}}{t_{\text{с}}}$.

При достаточно большом n коэффициент динамичности для рассматриваемого движения очень мало отличается от 1. Аналогичный вывод получается для закона изменения ускорения в виде полинома пятой степени (табл. 3, п. 5) и для всех других законов с плавным изменением ускорения.

Колебания в кулачковом механизме при законе изменения ускорения толкателя по трапеции. Если нарушается плавность изменения ускорения нижнего конца толкателя и на графике $\dot{s}(t)$ появляются точки излома, в которых происходит скачок ускорения второго поряд-

ка $\ddot{s}(t)$, то коэффициент динамичности по ускорениям может в некоторых случаях заметно превышать единицу. Пусть, например, закон изменения ускорения нижнего конца толкателя $\ddot{s}(t)$ изображается графиком, состоя-

щим из двух трапеций (рис. 62). Этот закон получен из закона постоянного ускорения (см. рис. 59) добавлением линейных участков, устраняющих скачки ускорения первого порядка. Обозначим постоянное ускорение через a_n , а продолжительность первого линейного участка через t_r . Тогда уравнение движения (11.7) для этого участка получает вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\frac{a_n}{t_r} t, \quad (11.23)$$

Для преобразования этого дифференциального уравнения в алгебраическое относительно изображения Q функции $q(t)$ используем формулу (3.16) и табл. 1 (п. 2 при $s = s_n$). При нулевых начальных условиях имеем

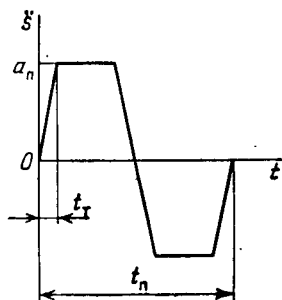


Рис. 62

$$s_n^2 Q + \lambda^2 Q = -\frac{a_n}{t_r} \frac{1}{s_n^2}.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{a_n}{t_r} \frac{1}{s_n^2 (s_n^2 + \lambda^2)}.$$

Искомое решение уравнения (11.23) находим обратным переходом от изображения к оригиналу по табл. 2 (п. 7):

$$q = -\frac{a_n}{\lambda^3 t_r} (\lambda t - \sin \lambda t). \quad (11.24)$$

Дифференцирование по времени дает

$$\dot{q} = \frac{a_n}{\lambda^2 t_r} (\cos \lambda t - 1). \quad (11.25)$$

Для второго линейного участка с постоянным ускорением a_n уравнение движения (11.7) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -a_n. \quad (11.26)$$

Примем за новое начало отсчета времени конец первого линейного участка. Тогда после приведения этого уравнения к однородному и применения формулы (3.22)

получаем его общее решение

$$q = C \sin(\lambda t + \theta) - \frac{a_n}{\lambda^2}. \quad (11.27)$$

При начальных условиях ($t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$) имеем:

$$q_0 = C \sin \theta - \frac{a_n}{\lambda^2}, \quad \dot{q}_0 = \lambda C \cos \theta.$$

Отсюда

$$C = \sqrt{\left(q_0 + \frac{a_n}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\lambda^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \left(q_0 + \frac{a_n}{\lambda^2}\right) \frac{\lambda}{\dot{q}_0}.$$

Введем обозначение $m = t_r/t_c$. Тогда из формул (11.24) и (11.25) при $t = t_r$ получаем:

$$q_0 = \frac{a_n}{\lambda^2} \left(\frac{\sin 2\pi m}{2\pi m} - 1 \right), \quad \dot{q}_0 = \frac{a_n}{\lambda 2\pi m} (\cos 2\pi m - 1).$$

Следовательно,

$$C = \frac{a_n}{\lambda^2} \sqrt{\left(\frac{\sin 2\pi m}{2\pi m}\right)^2 + \left(\frac{\cos 2\pi m - 1}{2\pi m}\right)^2}$$

или

$$C = \frac{a_n \sqrt{2 - 2 \cos 2\pi m}}{\lambda^2 2\pi m}.$$

Используя формулу для синуса половинного угла, получаем

$$C = \frac{a_n \sin \pi m}{\lambda^2 \pi m}. \quad (11.28)$$

После двукратного дифференцирования (11.27) и подстановки из (11.28) находим

$$\ddot{q} = -a_n \frac{\sin \pi m}{\pi m} \sin(\lambda t + \theta).$$

Ускорение толкателя с учетом его упругости

$$\ddot{y} = a_n \left[1 - \frac{\sin \pi m}{\pi m} \sin(\lambda t + \theta) \right].$$

Коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = 1 + \frac{|\sin \pi m|}{\pi m}.$$

Отсюда следует, что при законах движения с трапециевидным законом изменения ускорения нельзя брать малые значения m . Например, при $m = 0,5$ коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = 1 + \frac{1}{0,5\pi} \approx 1,64.$$

§ 45. Синтез кулачковых механизмов с учетом упругости звеньев

При больших нагрузках и высоких скоростях движения деформации звеньев оказывают заметное влияние на кинематические и динамические характеристики механизма. Это изменение характеристик необходимо учитывать при определении профиля кулачка в быстроходных кулачковых механизмах. Для кулачкового механизма с упругим толкателем, динамическая модель которого была показана на рис. 57, требуемый профиль кулачка должен удовлетворять условию, получаемому из уравнения движения (11.1) при $b = 0$:

$$s = \frac{F}{c} + y + \frac{m}{c} \ddot{y}. \quad (11.29)$$

Это условие накладывает ограничения на выбор закона движения выходного звена кулачкового механизма, т. е. на выбор функции $y = y(t)$. Рассмотрим, например, выбор функции $y = y(t)$, обеспечивающей отсутствие скачков скоростей и ускорений толкателя (отсутствие жестких и мягких ударов). С этой целью продифференцируем (11.29) дважды по времени, считая силу сопротивления постоянной:

$$\dot{s} = \dot{y} + \frac{m}{c} \ddot{\dot{y}} \quad (11.30)$$

$$\ddot{s} = \ddot{y} + \frac{m}{c} \ddot{\ddot{y}}. \quad (11.31)$$

Из (11.30) следует, что во избежание жестких ударов при упругом толкателе надо выбирать такие законы движения его верхнего конца, при которых функции $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ непрерывны и равны нулю в крайних положениях толкателя. Поставленным условиям может удовлетворить закон движения в виде степенного многочлена (полинома)

седьмой степени

$$y = (ak^4 + bk^5 + ck^6 + dk^7)/h \quad (11.32)$$

при $k = t/t_n$, если определить коэффициенты полинома из граничных условий:

$$y = \dot{y} = \ddot{y} = \dddot{y} = 0 \quad \text{при } k = 0,$$

$$y = h, \quad \dot{y} = \ddot{y} = \dddot{y} = 0 \quad \text{при } k = 1.$$

Дифференцируя полином (11.32) по времени, получаем:

$$\dot{y} = (4ak^3 + 5bk^4 + 6ck^5 + 7dk^6)h/t_n,$$

$$\ddot{y} = (12ak^2 + 20bk^3 + 30ck^4 + 42dk^5)h/t_n^2,$$

$$\dddot{y} = (24ak + 60bk^2 + 120ck^3 + 210dk^4)h/t_n^3.$$

Граничные условия для $k = 0$ удовлетворяются при любых значениях искомых коэффициентов. Граничные условия для $k = 1$ дают линейную систему уравнений:

$$a + b + c + d = 1,$$

$$4a + 5b + 6c + 7d = 0,$$

$$12a + 20b + 30c + 42d = 0,$$

$$24a + 60b + 120c + 210d = 0.$$

Определив коэффициенты полинома из этой системы, получаем

$$y = (35k^4 - 84k^5 + 70k^6 - 20k^7)h. \quad (11.33)$$

Если надо избежать не только жестких, но и мягких ударов, то, согласно уравнениям (11.30) и (11.31), надо выбирать законы движения, удовлетворяющие граничным условиям:

$$y = \dot{y} = \ddot{y} = \dddot{y} = 0 \quad \text{при } k = 0,$$

$$y = h, \quad \dot{y} = \ddot{y} = \dddot{y} = 0 \quad \text{при } k = 1.$$

Полином, удовлетворяющий этим условиям, имеет вид

$$y = (126k^3 - 420k^4 + 540k^5 - 315k^6 + 70k^7)h. \quad (11.34)$$

Кулачок, профиль которого определен по функции $s = s(t)$ в соответствии с уравнением (11.29) при условии, что закон движения $y = y(t)$ представляет степен-

ную функцию, называется *полидинамическим кулачком*. Название показывает, что для определения профиля кулачка используются полиномы, составляемые с учетом динамики выходного звена. Заметим только, что при использовании уравнения (11.29) обязательно выбирать закон движения $y = y(t)$ в виде степенной функции. Можно использовать и другие функции, удовлетворяющие указанным граничным условиям. Во всех случаях изготовление этих кулачков требует очень высокой точности.

Для кулачкового механизма с упругим вращающимся толкателем (коромыслом) уравнение (11.29) преобразуется к виду

$$\psi = \frac{M}{c} + \psi_y + \frac{J}{c} \ddot{\psi}_y, \quad (11.35)$$

где ψ — угол поворота жесткого коромысла, по которому строится профиль кулачка, ψ_y — угол поворота упругого коромысла, J — момент инерции коромысла относительно оси вращения, c — крутильная жесткость вала коромысла, M — модуль момента сил сопротивления.

Уравнение (11.35) аналогично уравнению (11.29). Поэтому все выводы, относящиеся к выбору закона движения упругого коромысла, полностью совпадают с рассмотренными выше выводами для упругого прямолинейно движущегося толкателя.

Глава XII. ВИБРАЦИОННЫЕ ТРАНСПОРТЕРЫ

§ 46. Безударные вибрационные транспортеры

Колебания в машинах имеют полезное применение в тех случаях, когда колебания (по другой терминологии — *вибрация*) используются для выполнения технологического процесса или для его интенсификации, или для повышения качества выполняемой работы. Соответственно *вибрационной машиной* называется машина, исполнительному органу которой сообщают вибрацию для осуществления или интенсификации выполняемого процесса или повышения качества выполняемой работы *).

*) ГОСТ 24346—80. Вибрация. Термины и определения.— М.: Издательство стандартов, 1980.

Вибрационная машина, предназначенная для транспортирования грузов или сыпучих материалов, называется *вибрационным транспортером*.

Действие вибрационного транспортера основано на том, что рабочий орган машины в начале и в конце каждого цикла колебаний занимает одно и то же положение, а транспортируемый груз в каждом цикле продвигается вперед относительно рабочего органа. В безударных вибрационных транспортерах это продвижение происходит без удара о рабочий орган. В простейшем безударном вибрационном транспортере груз массой m лежит на плоскости рабочего органа машины, который

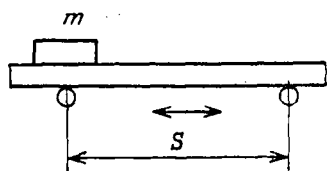


Рис. 63

совершает горизонтальные колебания с размахом S (рис. 63). Груз прижат к плоскости силой тяжести mg , которая вызывает силу трения, препятствующую перемещению груза относительно рабочего органа. Максимальное значение силы трения равно fmg , где f — коэффициент трения покоя. Если принять коэффициент трения движения равным коэффициенту трения покоя, то при относительном перемещении груза по плоскости сила трения сохраняет постоянное значение, равное fmg , и уравнение движения груза при его перемещении вперед (на рис. 63 слева направо) имеет вид

$$ma_r = -fmg,$$

где a_r — ускорение груза.

Отсюда следует, что отрицательное ускорение груза не может превысить по модулю величины fg , и если на участке замедления (выбега) рабочий орган будет иметь модуль ускорения $a_2 > fg$, то груз в своем движении будет опережать рабочий орган.

Пусть, например, рабочий орган приводится в движение от кулачкового механизма, в котором профиль кулачка построен по закону постоянного ускорения при равных временах прямого и обратного ходов (рис. 64, а). При прямом ходе (слева направо) на участке разбега продолжительностью t_1 ускорение рабочего органа $a_1 < fg$, а на участке выбега продолжительностью t_2 модуль ускорения (замедления) $a_2 > fg$, причем отношение $k = a_2/a_1$ выбирается достаточно большим ($k > 4$). При об-

ратном ходе разбег происходит с ускорением a_2 , а выбег с модулем ускорения a_1 .

Продолжительности участков разбега и выбега могут быть выражены через коэффициент k и период колеба-

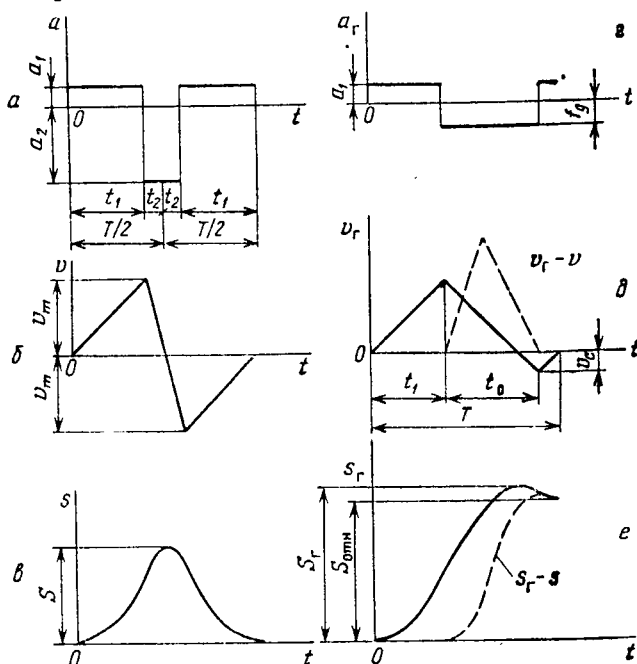


Рис. 64

ний T , если принять во внимание систему уравнений:

$$t_1 + t_2 = T/2, \quad a_1 t_1 - a_2 t_2 = 0.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{k}{1+k} \frac{T}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{1+k} \frac{T}{2}. \quad (12.1)$$

Интегрирование графика ускорений дает формулы для вычисления скорости рабочего органа (рис. 64, б):

$$\begin{aligned} v &= a_1 t & \text{при} & \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ v &= a_1 t_1 - a_2 (t - t_1) & \text{при} & \quad t_1 \leq t \leq t_1 + t_2, \\ v &= a_1 (t - 2t_1 - 2t_2) & \text{при} & \quad t_1 + t_2 \leq t \leq 2(t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Модуль максимальной скорости рабочего органа

$$v_m = a_1 t_1 = a_2 t_2.$$

Интегрирование графика скоростей дает формулы для вычисления перемещений рабочего органа (рис. 64, е)

$$s = a_1 \frac{t^2}{2} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1,$$

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{2} + a_1 t_1 (t - t_1) - a_2 \frac{(t - t_1)^2}{2} \quad \text{при } t_1 \leq t \leq t_1 + 2t_2,$$

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{2} - a_1 t_1 (t - t_1 - 2t_2) + a_1 \frac{(t - t_1 - 2t_2)^2}{2} \quad \text{при } t_1 + 2t_2 \leq t \leq 2(t_1 + t_2).$$

Максимальное перемещение рабочего хода (размах) при $t = t_1 + t_2$

$$S = a_1 t_1 \frac{t_1 + t_2}{2} \quad \text{или} \quad S = v_m T/4. \quad (12.2)$$

Отсюда

$$v_m = 4S/T.$$

Размах колебаний S можно выразить также через период колебаний T , ускорение a_1 и коэффициент $k = a_2/a_1$, если подставить в (12.2) выражения для t_1 и t_2 :

$$S = a_1 \frac{T^2}{8} \frac{k}{1+k}. \quad (12.3)$$

На участке разбега прямого хода продолжительностью t_1 груз движется вместе с рабочим органом без проскальзывания, т. е. $a_r = a_1 < fg$ (рис. 64, з). На участке выбега груз скользит относительно рабочего органа, так как модуль его отрицательного ускорения $a_r = fg$ меньше модуля отрицательного ускорения a_2 . Скольжение прекращается, когда по истечении времени t_0 скорость груза сравняется по модулю со скоростью рабочего органа $v = v_r = v_0$ (рис. 64, д). Из этого условия получаем

$$-v_m + a_1(t_0 - 2t_2) = v_m - fg t_0.$$

Отсюда

$$t_0 = \frac{2v_m + 2a_1 t_2}{a_1 + fg} \quad \text{или} \quad t_0 = \frac{a_1 T}{a_1 + fg}.$$

Общая скорость груза и рабочего органа в момент времени $t = t_0$:

$$v_0 = v_m - fg \frac{a_1 T}{a_1 + fg} \quad \text{или} \quad v_0 = a_1 \left(t_1 - \frac{fg T}{a_1 + fg} \right).$$

При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$v_c \rightarrow fgt_2 \quad \text{или} \quad v_c \rightarrow \frac{fgT}{2(1+k)}.$$

Следовательно, с увеличением коэффициента k скорость v_c стремится к нулю.

Скорость скольжения груза относительно рабочего органа на участке $t_1 \leq t \leq t_1 + 2t_2$

$$v_r - v = v_m - fg(t - t_1) - v_m + a_2(t - t_1)$$

или

$$v_r - v = (a_2 - fg)(t - t_1).$$

Аналогично для участка $t_1 + 2t_2 \leq t \leq t_1 + t_0$

$$v_r - v = v_m - fg(t - t_1) + v_m - a_1(t - t_1 - 2t_2)$$

или

$$v_r - v = 2a_1(t_1 + t_2) - (a_1 + fg)(t - t_1).$$

Максимальная скорость скольжения при $t = t_1 + 2t_2$

$$(v_r - v)_{\max} = 2(a_2 - fg)t_2 \quad \text{или} \quad (v_r - v)_{\max} = \frac{a_2 - fg}{1 + k} T.$$

График зависимости скорости скольжения груза от времени показан на рис. 64, *д* штриховой линией. Площадь, заключенная между этим графиком и осью абсцисс, дает перемещение груза относительно рабочего органа за время t_c :

$$S_{\text{отн}} = (v_r - v)_{\max} \frac{t_c}{2} \quad \text{или} \quad S_{\text{отн}} = \frac{a_1(a_2 - fg)}{2(a_1 + fg)(1 + k)} T^2. \quad (12.4)$$

Перемещение $S_{\text{отн}}$ несколько меньше максимального значения перемещения груза S_r вследствие обратного движения груза после обращения в нуль скорости v_r (рис. 64, *е*). При $a_1 \rightarrow fg$

$$S_{\text{отн}} \rightarrow \frac{1}{4} fg T^2 \frac{k - 1}{k + 1}.$$

Разность $S_r - S_{\text{отн}}$ стремится к нулю при увеличении коэффициента k . На рис. 64, *е* штриховой линией показан график зависимости относительного перемещения $s_r - s$ от времени.

Отношение $S_{\text{отн}}/S$ с учетом (12.3) имеет вид

$$\frac{S_{\text{отн}}}{S} = \frac{(a_2 - fg)t_2}{(a_1 + fg)T} \cdot \frac{8(1 + k)}{k} \quad \text{или} \quad \frac{S_{\text{отн}}}{S} = \frac{a_2 - fg}{a_1 + fg} \cdot \frac{4}{k}.$$

При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$\frac{S_{\text{отн}}}{S} \rightarrow 2 \frac{k-1}{k}.$$

Средняя скорость перемещения груза $v_{\text{ср}} = S_{\text{отн}}/T$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{a_1(a_2 - fg)}{2(a_1 + fg)(1+k)} T. \quad (12.5)$$

При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$v_{\text{ср}} \rightarrow \frac{1}{4} fg T \frac{k-1}{k+1}.$$

Отсюда следует, что средняя скорость перемещения груза при заданных $a_1 = fg$ и $k = a_2/a_1$ увеличивается с увеличением периода T . Однако при этом, согласно (12.3), быстро увеличивается требуемый размах рабочего органа S . Если задаться максимально возможным размахом S_{max} , то из (12.3) при $a_1 = fg$ максимальное значение периода колебаний

$$T_{\text{max}} = 2 \sqrt{\frac{2S_{\text{max}}}{fg} \frac{k+1}{k}}.$$

Пусть, например, коэффициент трения $f = 0.15$, отношение модулей ускорений $k = a_1/a_2 = 8$, перемещение рабочего органа за цикл $S = 0.1$ м.

Ускорение рабочего органа на участке разбега a_1 должно удовлетворять условию $a_1 < fg = 1.47$ м/с. Принимаем $a_1 = 1.2$ м/с. Тогда период колебаний рабочего органа найдется из (12.3)

$$T = \sqrt{\frac{8S}{a_1} \frac{1+k}{k}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.1 \cdot 9}{1.2 \cdot 8}} = 0.866 \text{ с.}$$

Относительное перемещение груза по (12.4)

$$S_{\text{отн}} = \frac{1.2 \cdot (8 \cdot 1.2 - 1.47)}{2(1.2 + 1.47) \cdot 9} 0.866^2 = 0.152 \text{ м.}$$

Средняя скорость перемещения груза по (12.5)

$$v_{\text{ср}} = \frac{0.152}{0.866} = 0.176 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Частота колебаний в герцах, т. е. число ходов в секунду

$$\nu = \frac{1}{T} = 1.16 \text{ Гц,}$$

Для увеличения средней скорости перемещения груза при тех же значениях a_1 и k надо увеличить перемещение рабочего органа S . С этой целью обычно вместо кулачкового механизма используют кулисный механизм с ускоренным обратным ходом. Однако скорость перемещения груза остается небольшой, и для ее увеличения переходят к вибрационным транспортерам с подбрасыванием груза.

§ 47. Вибрационные транспортеры с подбрасыванием груза

Если перемещаемый материал, который условно назовем грузом, допускает подбрасывание с последующим ударом о поверхность рабочего органа, то можно получить большую скорость перемещения груза по сравнению с безударными вибрационными транспортерами. Увеличение скорости перемещения груза в вибрационном транспортере с подбрасыванием груза объясняется тем, что горизонтальное перемещение груза в этих транспортерах происходит при свободном полете груза в отличие от безударных транспортеров, в которых груз всегда находится в контакте с рабочим органом.

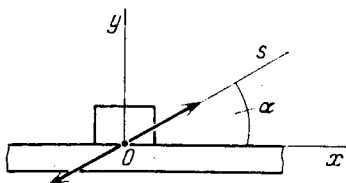


Рис. 65

На рис. 65 показана схема вибрационного транспортера, в котором рабочий орган совершает колебания, направленные под углом α к горизонту, по гармоническому закону

$$s = A \sin \omega t,$$

где A — амплитуда, ω — угловая частота, t — время.

Вертикальная и горизонтальная составляющие движения рабочего органа определяются соотношениями

$$y = A \sin \alpha \sin \omega t, \quad x = A \cos \alpha \sin \omega t. \quad (12.6)$$

Дифференцирование по времени дает:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A \omega \sin \alpha \cos \omega t, & \ddot{y} &= -A \omega^2 \sin \alpha \sin \omega t, \\ \dot{x} &= A \omega \cos \alpha \cos \omega t, & \ddot{x} &= -A \omega^2 \cos \alpha \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Рассмотрим сначала вертикальное движение груза после отрыва его от рабочего органа, которое происходит

в момент времени t_1 , когда вертикальное ускорение $\ddot{y}$ по абсолютной величине становится равным ускорению силы тяжести g :

$$A\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t_1 = g.$$

Основным параметром вибрационного транспортера указанного типа является безразмерный коэффициент режима вибрации

$$k_B = \frac{A\omega^2 \sin \alpha}{g}. \quad (12.8)$$

Этот коэффициент показывает, во сколько раз максимум вертикальной составляющей ускорения рабочего органа $\ddot{y}_{\max}$ больше ускорения силы тяжести. Момент времени t_1 , при котором происходит отрыв груза, связан с коэффициентом режима вибрации соотношением

$$\sin \omega t_1 = \frac{1}{k_B}. \quad (12.9)$$

Свободный полет груза в вертикальном направлении описывается уравнением

$$y_r = y_0 + \dot{y}_0(t - t_1) - g \frac{(t - t_1)^2}{2}, \quad (12.10)$$

где y_r — вертикальное перемещение груза, y_0 — начальное положение груза в момент отрыва от рабочего органа, $\dot{y}_0$ — начальная скорость груза в этот же момент.

Из соотношений (12.6) и (12.7) получаем

$$y_0 = A \sin \alpha \sin \omega t_1, \quad \dot{y}_0 = A\omega \sin \alpha \cos \omega t_1.$$

Подставляя значения y_0 и $\dot{y}_0$ в уравнение (12.10) и принимая во внимание (12.8) и (12.9), имеем

$$y_r = \frac{g}{\omega^2} + \frac{g k_B \cos \omega t_1}{\omega} (t - t_1) - \frac{g}{2} (t - t_1)^2.$$

Момент времени t_2 падения груза на рабочий орган находим из условия $y = y_r$:

$$A \sin \alpha \sin \omega t_2 = \frac{g}{\omega^2} + \frac{g k_B \cos \omega t_1}{\omega} (t_2 - t_1) - \frac{g}{2} (t_2 - t_1)^2. \quad (12.11)$$

Введем обозначение

$$\omega = \frac{\omega}{2} (t_2 - t_1). \quad (12.12)$$

Тогда условие (12.11) принимает вид

$$\text{или } A \sin \alpha \sin(2w + \omega t_1) = \frac{g}{\omega^2} + \frac{2wgk_b}{\omega^2} \cos \omega t_1 - \frac{2gw^2}{\omega^2} \sin(2w + \omega t_1) = \sin \omega t_1 + 2w \cos \omega t_1 - 2w^2 \sin \omega t_1. \quad (12.13)$$

Из квадратного уравнения (12.13) при известном значении ωt_1 находим w и затем t_2 из (12.12). В момент времени t_2 происходит удар, и если нет отскока, груз движется в контакте с рабочим органом до нового отрыва при $t = t_1 + 2\pi/\omega$. На рис. 66 штриховой линией показан график $y_r(t)$ при $t_2 < t_1 + 2\pi/\omega$. При $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega$ наблюдается режим непрерывного подбрасывания. Для этого режима $w = \pi$. Подставляя $w = \pi$ в уравнение (12.13), находим значение ωt_1^* , при котором будет режим непрерывного подбрасывания:

$$\sin \omega t_1^* = \sin \omega t_1^* + 2\pi \cos \omega t_1^* - 2\pi^2 \sin \omega t_1^* \quad \text{или} \quad \text{tg } \omega t_1^* = \frac{1}{\pi}.$$

Безразмерный коэффициент режима вибрации при непрерывном подбрасывании

$$k_b^* = \frac{1}{\sin \omega t_1^*} \quad \text{или} \quad k_b = \sqrt{\pi^2 + 1} \approx 3,3.$$

В промышленных вибрационных транспортерах обычно принимают $2 < k_b < 2,8$. Горизонтальная скорость груза при свободном полете сохраняется постоянной и равной горизонтальной составляющей рабочего органа в момент отрыва груза

$$v_r = A\omega \cos \alpha \cos \omega t_1 \quad \text{или} \quad v_r = A\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{k_b^2 - 1}}{k_b}. \quad (12.14)$$

После удара груз некоторое время находится в контакте с рабочим органом, т. е. горизонтальная составляющая скорости груза $v_r = \dot{x}$ по соотношениям (12.7). Вследствие относительной кратковременности контакта груза с рабочим органом считают, что горизонтальную скорость груза можно принять постоянной и равной скорости v_r с поправочным коэффициентом b , зависящим от вида перемещаемого материала:

$$v = bA\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{k_b^2 - 1}}{k_b}.$$

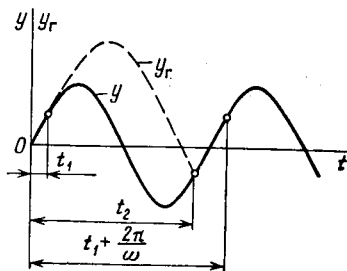


Рис. 66

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

УРАВНОВЕШИВАНИЕ И ЗАЩИТА ОТ ВИБРАЦИИ

Глава XIII. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС В МЕХАНИЗМАХ И МАШИНАХ

§ 48. Уравновешивание вращающихся звеньев

Статическое уравновешивание вращающихся звеньев. При вращении звена на его опоры действуют динамические реакции, т. е. реакции, зависящие от ускорений (иначе — от сил инерции). Для полного устранения этих реакций необходимо, чтобы главный вектор F_n и главный момент сил инерции M_n были равны нулю в любой момент движения:

$$F_n = 0, \quad (13.1)$$

$$M_n = 0. \quad (13.2)$$

Иногда ограничиваются выполнением только условия (13.1), которое равносильно условию постоянства положения центра масс звена или, что то же, условию расположения центра масс на оси вращения звена. Распределение массы вращающегося звена, переводящее его центр масс на ось вращения, называется *статическим уравновешиванием вращающегося звена*.

Необходимость статического уравновешивания быстро вращающихся звеньев поясним числовым примером. Пусть масса звена $m = 10$ кг (сила тяжести ~ 100 Н), постоянная угловая скорость $\omega = 1000$ рад/с (частота вращения ≈ 9500 об/мин), смещение центра масс от оси вращения $r_s = 0,0001$ м. Тогда модуль силы инерции $F_n = mr_s\omega^2 = 10 \cdot 0,0001 \cdot 1000^2 = 1000$ Н, т. е. даже при малом смещении центра масс сила инерции превосходит силу тяжести в 10 раз. Соответственно возрастут реакции в опорах звена. Кроме того, следует учесть, что в отличие от сил тяжести силы инерции, а следовательно и динамические реакции, имеют переменные направления и могут вызвать нежелательные колебания звеньев.

За меру статической неуравновешенности, или статического дисбаланса, принимают статический момент масс звена относительно оси вращения $\Delta = mgr_s$. Эту неуравновешенность называют *статической*, так как ее можно обнаружить статическим испытанием. С этой целью звено цилиндрической формы устанавливают на два горизонтальных ножа (бруска). Если центр масс расположен на оси цилиндра, то звено будет находиться в равновесии при любом положении, в противном случае оно будет двигаться, пока не займет положения устойчивого равновесия, при котором центр масс имеет наинизшее расположение.

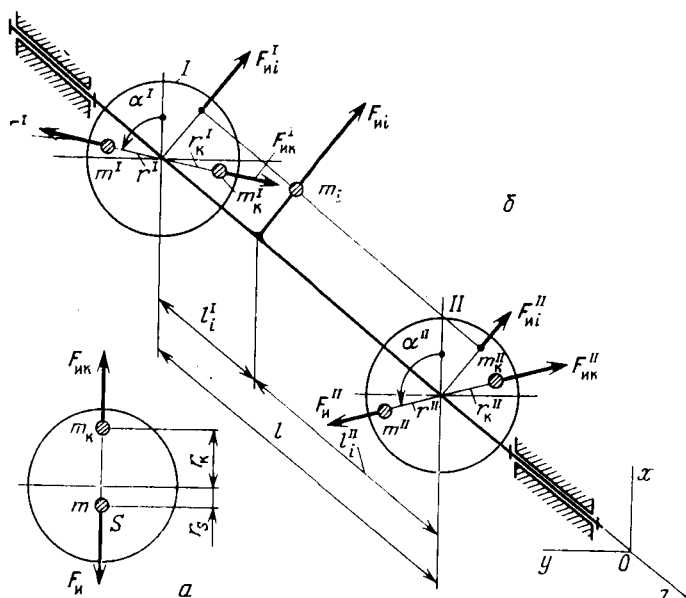


Рис. 67

Для статического уравновешивания надо в направлении, противоположном центру масс, установить *корректирующую массу* m_k на расстоянии r_k от оси вращения (рис. 67, а). Если будет выполнено условие

$$m_k r_k = -m r_s, \quad (13.3)$$

то при вращении звена сила инерции корректирующей массы окажется равной и противоположной силе инерции

$F_{\text{я}}$ неуравновешенного звена. Результирующая сила инерции при этом условии равна нулю. Условие (13.3) достигается обычно путем проб. Иногда установку корректирующей массы заменяют удалением (например высверливанием) массы m_k . В этом случае центр удаляемой массы и центр масс звена располагаются по одну сторону от оси вращения.

По условию (13.3) определяют также размеры противовеса, если неуравновешенность звена может быть найдена по чертежу.

Полное уравнивание вращающегося звена. Статического уравнивания достаточно только для звеньев, имеющих малую протяженность вдоль оси вращения (шкивы, маховики и т. п.). Для звеньев другой формы (например, для валов) должны быть выполнены оба условия уравниваемости звена — (13.1) и (13.2). В этом случае полностью устраняется давление на стойку от сил инерции. Распределение масс вращающегося звена, устраняющее давление от сил инерции этого звена на стойку, называется *полным уравниванием вращающегося звена*. Если звено считать абсолютно твердым телом, то при этом условии ось вращения совмещается с одной из главных осей инерции.

Покажем, что полное уравнивание можно выполнить установкой корректирующих масс в двух произвольно выбранных плоскостях I и II , называемых *плоскостями коррекции* (рис. 67, б). При равномерном вращении звена с угловой скоростью ω элементарной i -й массе m_i соответствует элементарная сила инерции

$$F_{\text{я}i} = r_i \omega^2 m_i,$$

где r_i — радиус-вектор элементарной массы m_i . Разложим силу $F_{\text{я}i}$ на две параллельные составляющие в плоскостях коррекции I и II :

$$F_{\text{я}i}^I = F_{\text{я}i} l_i^I / l, \quad F_{\text{я}i}^{II} = F_{\text{я}i} l_i^{II} / l$$

и просуммируем эти составляющие для i масс. Тогда получим, что все элементарные силы инерции свелись к двум силам:

$$F_{\text{я}}^I = \sum_i F_{\text{я}i}^I, \quad F_{\text{я}}^{II} = \sum_i F_{\text{я}i}^{II}$$

расположенным в плоскостях коррекции под углами α^I и α^{II} к оси x . Эти силы отличаются между собой как по модулю, так и по направлению. Иногда говорят, что они образуют неуравновешенный крест, т. е. скрещиваются.

Силы F_{κ}^I и F_{κ}^{II} могут быть представлены как силы инерции масс m^I и m^{II} , находящихся на расстояниях r^I и r^{II} от оси вращения. Тогда за меру полной неуравновешенности можно принять дисбаланс:

$$D^I = m^I r^I, \quad D^{II} = m^{II} r^{II},$$

которые отличаются от центробежных сил инерции постоянным множителем, равным квадрату угловой скорости звена.

Корректирующие массы должны быть выбраны так, чтобы их силы инерции F_{κ}^I и F_{κ}^{II} уравнивали силы F_{κ}^I и F_{κ}^{II} , т. е. были им равны и противоположно направлены. Значения этих масс m_{κ}^I и m_{κ}^{II} выбираются из условий:

$$m_{\kappa}^I r_{\kappa}^I = m^I r^I, \quad m_{\kappa}^{II} r_{\kappa}^{II} = m^{II} r^{II},$$

и углы их расположения по соотношениям:

$$\alpha_{\kappa}^I = \alpha^I + \pi, \quad \alpha_{\kappa}^{II} = \alpha^{II} + \pi.$$

Установку корректирующих масс можно заменить удалением масс m_{κ}^I и m_{κ}^{II} . Тогда $\alpha_{\kappa}^I = \alpha^I$ и $\alpha_{\kappa}^{II} = \alpha^{II}$.

Для некоторых вращающихся звеньев, например для коленчатых валов двигателей, корректирующие массы выполняют в виде противовесов, размеры которых находят расчетным путем из обычных условий равновесия сил, так как расположение неуравновешенных масс может быть найдено непосредственно по чертежу. Однако в большинстве случаев неуравновешенность вращающегося звена (ротора) может быть найдена только экспериментальным путем на специальных устройствах, называемых *балансирующими станками*.

Балансировка жестких роторов. Все конструкции балансируемых станков подразделяются на станки рамного типа, в которых опоры ротора расположены на общей подвижной раме, и станки с независимыми опорами.

На рис. 68 показана схема балансирующего станка рамного типа, в котором ось ротора вместе с рамой мо-

жет колебаться вокруг оси O под действием неуравновешенных масс. Балансируемый ротор устанавливается на раме так, чтобы одна из плоскостей коррекции (например плоскость II) совпала с плоскостью, содержащей ось колебаний рамы O . Тогда амплитуда колебаний рамы,

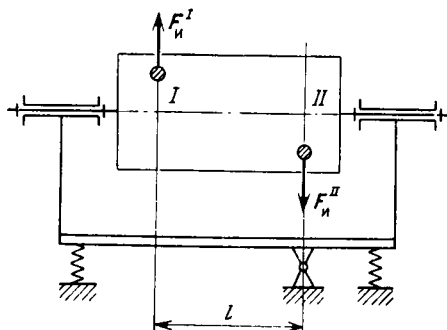


Рис. 68

измеряемая обычно при резонансе, зависит только от дисбаланса в плоскости коррекции I . Вынуждающий момент $\bar{M}$ равен моменту силы инерции F_I^I относительно оси O :

$$\bar{M} = m^I r^I l \omega^2 \cos \tilde{\omega} t, \quad (13.4)$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость вращения ротора, l — расстояние между плоскостями коррекции.

Амплитуду вынужденных колебаний рамы A можно считать пропорциональной амплитуде вынуждающего момента

$$A = k m^I r^I l \omega^2, \quad (13.5)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Для определения дисбаланса в плоскости I проводят три испытания с измерением амплитуд вынужденных колебаний рамы. При первом испытании определяется амплитуда A ; при втором испытании в плоскости коррекции I устанавливается в произвольном месте корректирующая масса с дисбалансом $m_k r_k$, что соответствует появлению дополнительной силы инерции $F_{ик}$. Суммарная сила инерции $F_{и1} = F_I^I + F_{ик}$ дает амплитуду A_1 . После измерения этой амплитуды корректирующую массу перемещают на 180° при том же значении r_k и проводят

третье испытание, которое дает амплитуду A_2 , соответствующую силе инерции $F_{и2} = F_{и1}^I - F_{ик}$. На рис. 69 построены векторы $F_{и1} = F_{и1}^I + F_{ик}$ и $F_{и2} = F_{и1}^I - F_{ик}$. Из этого построения следует, что для уравновешивания силы инерции $F_{и1}^I$ надо повернуть вектор силы инерции корректирующей массы на угол α_k против хода часовой стрелки и, кроме того, изменить величину $m_k r_k$ так, чтобы было выполнено условие $F_{ик} = -F_{и1}^I$.

Учитывая, что для всех указанных сил инерции коэффициент пропорциональности между их модулями и амплитудами один и тот же, можно рассматривать построение по рис. 69, а как геометрическое суммирование

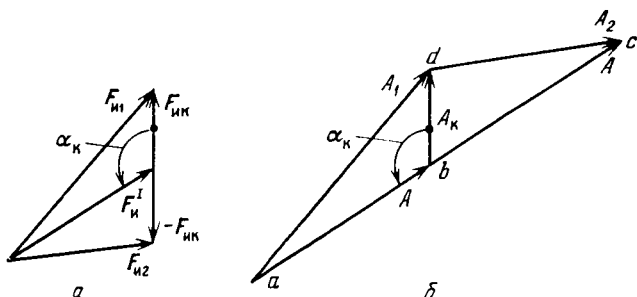


Рис. 69

амплитуд $A_1 = A + A_k$ и $A_2 = A - A_k$, где A_k — амплитуда силы инерции $F_{ик}$. Это суммирование может быть представлено двумя треугольниками abd и bcd с общей стороной bd (рис. 69, б). Отсюда следует, что для определения неизвестной амплитуды A_k достаточно отложить в произвольном направлении отрезок ac , равный удвоенной амплитуде A , найти точку d из условия $ad = A_1$ и $cd = A_2$ и соединить точку d с точкой b . Одновременно определяется угол α_k . Для аналитического определения A_k и α_k можно воспользоваться соотношениями

$$A_k = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 - 2A^2}{2}}, \quad \cos \alpha_k = \frac{A^2 + A_k^2 - A_1^2}{2AA_k}.$$

Следовательно, в плоскости коррекции I надо установить корректирующую массу с дисбалансом $m_k r_k A/A_k$ под углом α_k или $\pi + \alpha_k$ к первоначальному расположению корректирующей массы с дисбалансом $m_k r_k$. Выбор

из двух возможных значений этого угла производится на основании пробных испытаний.

Аналогично устраняется дисбаланс в плоскости коррекции II . Необходимо только установить ротор в опорах станка так, чтобы ось качания рамы лежала в плоскости коррекции I .

Необходимость перекалывания ротора в процессе балансировки является недостатком указанной конструкции балансировочного станка. Кроме того, не всегда удается расположить плоскости коррекции так, чтобы их можно было совместить с осью качания рамы. От этого недостатка избавлены конструкции станков, в которых исключение влияния дисбалансов одной из плоскостей коррекции или, иначе, *операция разделения плоскостей коррекции*, выполняется не путем перекалывания ротора, а путем использования соотношений, связывающих амплитуды колебаний опор с величинами дисбалансов в плоскостях коррекции.

Для вывода этих соотношений рассмотрим, например, балансировочный станок, в котором при вращении ротора его ось может поворачиваться в горизонтальной плоскости (рис. 70). Если учитывать только действие

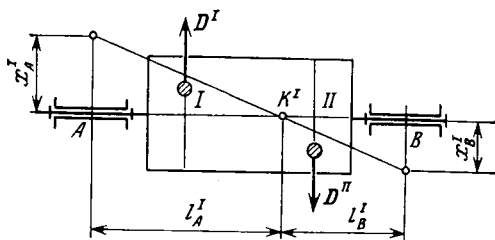


Рис. 70

дисбаланса D^I в плоскости коррекции I , то приближенно можно считать, что колебания ротора происходят вокруг центра качения K^I , и отношение амплитуд колебаний подшипников A и B , вызываемых действием дисбаланса D^I , равно постоянной величине

$$\frac{x_B^I}{x_A^I} = \frac{l_B^I}{l_A^I} = \kappa^I. \quad (13.6)$$

Аналогично, если учитывать только действие дисбаланса D^{II} в плоскости коррекции II , то колебания ротора

вокруг центра качания будут происходить с постоянным отношением амплитуд

$$\frac{x_A^{\text{II}}}{x_B^{\text{II}}} = \kappa^{\text{II}}. \quad (13.7)$$

Для линейных колебательных систем справедлив принцип независимости действия сил, и следовательно, перемещение каждой опоры равно сумме перемещений, вызываемых дисбалансами в плоскостях коррекций I и II (принцип суперпозиции). Эти перемещения и их амплитуды надо рассматривать как векторы вследствие того, что дисбалансы D^{I} и D^{II} в общем случае образуют неуравновешенный крест, т. е. скрещиваются. Векторные суммы амплитуд колебаний опор имеют вид

$$x_A = x_A^{\text{I}} + x_A^{\text{II}}, \quad x_B = x_B^{\text{I}} + x_B^{\text{II}}.$$

Учитывая (13.6) и (13.7) и принимая во внимание, что направления векторов x_A^{I} и x_B^{I} , а также векторов x_A^{II} и x_B^{II} противоположны, получаем

$$x_A = x_A^{\text{I}} - \kappa^{\text{II}} x_B^{\text{II}}, \quad x_B = -\kappa^{\text{I}} x_A^{\text{I}} + x_B^{\text{II}}.$$

Из этой системы уравнений находим составляющие амплитуд колебаний в опорах A и B, зависящие соответственно от дисбалансов в плоскостях коррекции I и II:

$$\begin{aligned} x_A^{\text{I}} &= (x_A + \kappa^{\text{II}} x_B) / (1 - \kappa^{\text{I}} \kappa^{\text{II}}), \\ x_B^{\text{II}} &= (\kappa^{\text{I}} x_A + x_B) / (1 - \kappa^{\text{I}} \kappa^{\text{II}}). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Вектор x_A^{I} пропорционален силе инерции F_A^{I} и имеет то же направление. Поэтому искомая корректирующая масса в плоскости коррекции I определяется соотношением

$$m_k r_k^{\text{I}} = k_1 x_A^{\text{I}},$$

где k^{I} — коэффициент пропорциональности для данного станка. Аналогично для корректирующей массы в плоскости коррекции II

$$m_k r_k^{\text{II}} = k^{\text{II}} x_B^{\text{II}},$$

где k^{II} — коэффициент пропорциональности.

Автоматическая балансировка. Для автоматического выполнения операций по устранению дисбалансов в

плоскостях коррекции используются балансировочные станки, не требующие перекалывания ротора в опорах, например станок, показанный на рис. 70.

Измерительное устройство этого станка состоит из генераторов опорных сигналов, цепи разделения плоскостей коррекции и индикаторов дисбаланса. *Генератор опорного сигнала* преобразует колебания опор или силу давления на опоры в электрический сигнал, дающий сведения о векторе x_A или x_B . *Цепь разделения плоскостей коррекции* преобразует сигналы x_A и x_B в сигналы x_A^I и x_B^I , каждый из которых зависит только от одного дисбаланса. *Индикатор дисбаланса* по значению вектора x_A^I или x_B^I дает сведения о необходимой корректирующей массе и ее расположении.

Исполнительные органы автоматического балансировочного станка действуют по сигналам, поступающим от измерительного устройства, и служат для удаления части материала ротора сверлением или фрезерованием после его остановки или же мгновенной наплавкой материала без остановки ротора (взрыв проволочек в магнитном поле). Без остановки ротора возможно также устранение дисбаланса с помощью лазера, испаряющего часть материала.

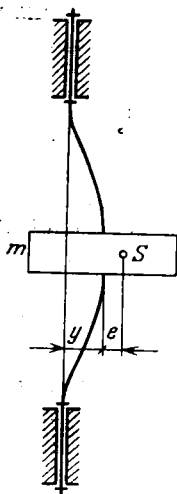


Рис. 71

Гибкие роторы. Если расстояние между опорами ротора значительно больше его диаметра, то при определении допустимых дисбалансов следует принимать во внимание деформации изгиба ротора или его вала. Для установления основных соотношений между деформациями изгиба и дисбалансом рассмотрим простейший случай вертикального вала, на котором укреплен диск массой m (рис. 71). Центр масс S смещен от оси вала на величину e . Массой вала пренебрегаем. При вращении вала с угловой скоростью ω центробежная сила инерции диска вызывает изгиб вала. Обозначим через y прогиб вала в сечении, где укреплен диск. Этот прогиб связан с модулем силы инерции $F_n = m(e + y)\omega^2$ соотношением

$$y = \delta, m(e + y)\omega^2, \quad (13.9)$$

где δ_1 — прогиб от единичной силы в данном сечении. Отсюда

$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{1}{\delta_1 m} - \omega^2}. \quad (13.10)$$

Угловая скорость вала, при которой знаменатель выражения (13.10) обращается в нуль, а следовательно, прогиб $y \rightarrow \infty$, называется *критической угловой скоростью*

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{\delta_1 m}}. \quad (13.11)$$

Критическую угловую скорость вращения вала можно рассматривать так же, как собственную частоту системы «вал — диск», а состояние вала при $\omega = \omega_k$ считать резонансным. Если учесть силы сопротивления, то при критической угловой скорости прогиб y не стремится к бесконечности, а имеет хотя и большую, но конечную величину. Из (13.10) имеем

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что при $\omega < \omega_k$ (докритический, или дорезонансный, режим) $y > 0$, а при $\omega > \omega_k$ (закритический, или зарезонансный, режим) $y < 0$, т. е. в закритическом режиме прогиб y получается отрицательным или, что то же, сдвиг фаз между колебаниями вынуждающей силы и собственными колебаниями равен π . В закритическом режиме прогиб y уменьшается с увеличением угловой скорости ω и при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к смещению e . Центробежная сила инерции в закритическом режиме определяется соотношением

$$F_n = m(e - y)\omega^2,$$

т. е. дисбаланс уменьшается с увеличением угловой скорости.

Вал, работающий при угловой скорости, меньшей критической, принято называть *жестким*, а при угловой скорости, большей критической, — *гибким*. Если на валу укреплено несколько дисков, то колебательная система «вал — диски» имеет несколько степеней свободы, и тогда должно быть несколько критических (резонансных) уг-

ловых скоростей. Наименьшая из этих скоростей называется *первой резонансной* *).

Особенность балансировки гибкого ротора состоит в том, что плоскости коррекции не могут быть выбраны произвольно. По методическим указаниям к ГОСТу 22061-76 можно установить расчетом оптимальные плоскости коррекции. Корректирующие массы, установленные в оптимальных плоскостях коррекции, вызывают в теле ротора минимальные изгибающие моменты и позволяют при балансировке на частоте вращения ниже первой резонансной сохранить достигнутую уравновешенность в широком диапазоне частот вращения.

§ 49. Уравновешивание масс механизма

Условия уравновешивания масс механизма. *Уравновешенным механизмом* называется механизм, для которого главный вектор и главный момент сил давления стойки на фундамент (или опору стойки) остаются постоянными при заданном движении начальных звеньев. Цель уравновешивания механизмов — устранение переменных воздействий на фундамент, вызывающих нежелательные колебания как самого фундамента, так и здания, в котором он находится. Транспортные машины не имеют фундамента, но они также должны быть уравновешены во избежание колебаний звеньев механизма, возникающих вследствие переменного воздействия на стойку со стороны ее опоры (дороги, грунта, пола и т. п.).

Обозначим: F_ϕ и M_ϕ — главный вектор и главный момент сил давления фундамента на стойку, F и M — главный вектор и главный момент всех других сил, внешних по отношению к механизму, F_π и M_π — главный вектор и главный момент сил инерции звеньев механизма. Тогда для механизма в целом имеем:

$$F + F_\pi + F_\phi = 0, \quad M + M_\pi + M_\phi = 0.$$

*) С учетом того, что при балансировке роторов принимается во внимание упругость опор, ГОСТ 19534-70 дает следующее определение жестких и гибких роторов: «К жестким роторам относятся роторы, у которых после балансировки в двух произвольно выбранных плоскостях коррекции на частоте вращения ниже первой резонансной системы «ротор — опоры» значения остаточных дисбалансов в плоскостях опор не превышают допустимых значений на эксплуатационных частотах вращения. Все остальные роторы относятся к гибким».

Отсюда условия уравнивания механизма, т. е. условия постоянства F_ϕ и M_ϕ , принимают вид:

$$F + F_\pi = \text{const}, \quad (13.12)$$

$$M + M_\pi = \text{const}. \quad (13.13)$$

Удовлетворить этим условиям путем распределения масс звеньев или путем введения дополнительных внешних сил удастся только в очень редких случаях. Обычно для обеспечения приближенного постоянства F_ϕ и M_ϕ принимают частные условия:

$$F_\pi = 0, \quad (13.14)$$

$$M_\pi = 0, \quad (13.15)$$

которым можно удовлетворить подбором масс звеньев и установкой противовесов. Эти условия равносильны условиям (13.12) и (13.13) при постоянных F и M .

Распределение масс звеньев, устраняющее давление стойки на фундамент (или опору стойки) от сил инерции звеньев механизма, называется *уравниванием масс механизма*.

Статическое уравнивание масс плоских механизмов по методу заменяющих масс. При уравнивании масс плоских механизмов часто ограничиваются выполнением условия (13.14), при котором равен нулю только главный вектор сил инерции звеньев механизма. Это условие равносильно требованию постоянства положения центра масс звеньев механизма относительно стойки. Распределение масс звеньев механизма, переводящее его центр масс в точку, неподвижную относительно стойки, называется *статическим уравниванием масс механизма*.

Наиболее наглядное и простое решение задачи статического уравнивания масс плоских механизмов получается по методу заменяющих масс. В плоском движении системой заменяющих масс называется система сосредоточенных масс $m_1, \dots, m_n$, которая обладает той же массой m , тем же расположением центра масс и тем же моментом инерции, что и заменяемое твердое тело. Свяжем со звеном систему координат Sxy , поместив ее начало в центр масс звена. Тогда для четырех замещающих

масс имеем:

$$\left. \begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= m, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + m_3(x_3^2 + y_3^2) + m_4(x_4^2 + y_4^2) = J_S. \quad (13.17)$$

Если выполнены условия (13.16), то размещение заменяющих масс называется *статическим*; если дополнительно выполнено и условие (13.17), — *динамическим*.

При статическом размещении масс главный вектор сил инерции заменяющей системы равен главному вектору сил инерции звена. При динамическом размещении равны также и главные моменты сил инерции.

Статическое уравнивание масс шарнирного четырехзвенника по методу заменяющих масс. В частных случаях число заменяющих масс может быть меньше четырех. Например, статическое

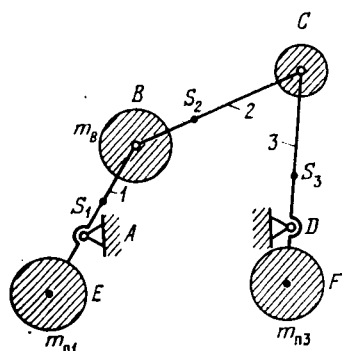


Рис. 72

размещение можно выполнить по двум точкам, лежащим на одной прямой с центром масс. При расположении центра масс между массами m_1 и m_2 из уравнений (13.16) получаем:

$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 l_1 - m_2 l_2 = 0.$$

Отсюда

$$m_1 = m \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad m_2 = m \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Воспользуемся этими формулами для статического уравнивания шарнирного четырехзвенника $ABCD$, у которого центры масс звеньев S_1 , S_2 и S_3 лежат на линиях, соединяющих центры шарниров (рис. 72). Массу звена I заменим двумя массами, сосредоточенными в точках A и B , причем для решения задачи надо определить только массу, сосредоточенную в точке B :

$$m_B = m_1 l_{AS_1} / l_{AB}.$$

Аналогично заменяем массу звена 3 массами, сосредоточенными в точках C и D , и определяем массу, сосредоточенную в точке C :

$$m_{C3} = m_3 l_{DS_3} / l_{CD}.$$

Массу m_2 звена 2 заменяем массами, сосредоточенными в точках B и C :

$$m_{B2} = m_2 l_{CS_2} / l_{BC}, \quad m_{C2} = m_2 l_{BS_2} / l_{BC}.$$

В результате замены получаем только две подвижные массы, сосредоточенные в точках B и C : $m_B = m_{B1} + m_{B2}$, $m_C = m_{C3} + m_{C2}$. Чтобы уравновесить силы инерции замещающих масс m_B и m_C , достаточно установить на звеньях 1 и 3 противовесы с массами $m_{п1}$ и $m_{п3}$, удовлетворяющие условиям:

$$m_{п1} l_{AE} = m_B l_{AB}, \quad (13.18)$$

$$m_{п3} l_{DF} = m_C l_{CD}, \quad (13.19)$$

где l_{AE} и l_{DF} — расстояния от центров A и D до центров масс противовесов E и F .

Статическое уравновешивание шарнирного четырехзвенника по методу главных векторов. Метод главных векторов основан на использовании формулы для определения положения центра масс подвижных звеньев механизма. Для механизма шарнирного четырехзвенника эта формула имеет вид

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2} + m_3 \mathbf{r}_{S3}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (13.20)$$

где m_1, m_2, m_3 — массы звеньев 1, 2, 3; $\mathbf{r}_{S1}, \mathbf{r}_{S2}, \mathbf{r}_{S3}$ — радиусы-векторы центров масс, которые можно выразить через векторы, имеющие направления отрезков, изображающих звенья механизма:

$$\mathbf{r}_{S1} = l_{AS_1}, \quad \mathbf{r}_{S2} = l_{AB} + l_{BS_2}, \quad \mathbf{r}_{S3} = l_{AB} + l_{BC} + l_{CS_3}.$$

После подстановки этих выражений в формулу (13.20) и группировки членов получаем

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3, \quad (13.21)$$

где векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ и $\mathbf{h}_3$, называемые *главными векторами*

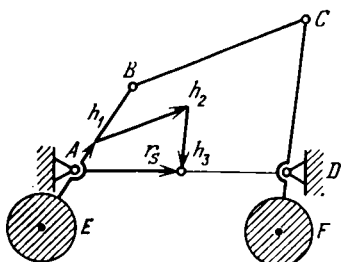
звеньев, определяются по соотношениям

$$h_1 = \frac{m_1 l_{AS_1} + (m_2 + m_3) l_{AB}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$h_2 = \frac{m_2 l_{BS_2} + m_3 l_{BC}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$h_3 = \frac{m_3 l_{CS_3}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Условие неподвижности общего центра масс подвижных звеньев механизма, необходимое для статического уравновешивания механизма, выполняется, если четырехугольник, образованный векторами h_1 , h_2 , h_3 и r_s , подобен четырехугольнику $ABCD$ (рис. 73). Из условия подобия имеем



$$\frac{h_1}{l_{AB}} = \frac{h_2}{l_{BC}} = \frac{h_3}{l_{CD}}. \quad (13.22)$$

Рис. 73

Модули главных векторов при указанном на рис. 73 расположении противовесов определяются по соотношениям

$$h_1 = \frac{1}{m} [m_1 l_{AS_1} - m_{п1} l_{AE} + (m_2 + m_3 + m_{п3}) l_{AB}],$$

$$h_2 = \frac{1}{m} [m_2 l_{BS_2} + (m_3 + m_{п3}) l_{BC}],$$

$$h_3 = \frac{1}{m} (m_3 l_{CS_3} + m_{п3} l_{CF}),$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_{п1} + m_{п3}$.

Подстановка h_1 и h_2 в первое из уравнений (13.22) дает условие для определения массы противовеса $m_{п1}$ и расстояния l_{AE} :

$$m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} - m_{п1} \frac{l_{AE}}{l_{AB}} + m_2 + m_3 + m_{п3} = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} +$$

$$+ m_3 + m_{п3}.$$

Отсюда

$$m_{п1} l_{AE} = \left(m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} \right) l_{AB}.$$

Это условие совпадает с условием (13.18), полученным по методу заменяющих масс.

Подстановка h_2 и h_3 во второе уравнение (13.22) дает условие для определения массы противовеса $m_{пз}$ и расстояния l_{DF} :

$$m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3 + m_{пз} = m_3 \frac{l_{CS_3}}{l_{CD}} + m_{пз} \frac{l_{CF}}{l_{CD}}.$$

Отсюда

$$m_{пз} l_{DF} = \left(m_3 \frac{l_{DS_3}}{l_{CD}} + m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} \right) l_{CD}.$$

Это условие совпадает с условием (13.19), полученным по методу заменяющих масс.

Уравновешивание вертикальной составляющей суммарной силы инерции кривошипно-ползунного механизма. В некоторых случаях уравновешивание масс механизма приводит к неконструктивному расположению

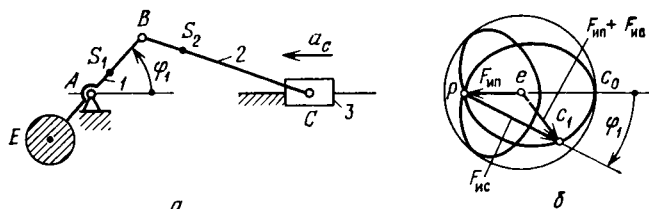


Рис. 74

противовесов. Например, для статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма необходимо поставить противовесы не только на кривошип, но и на шатун. Если ограничиться одним противовесом, установленным на кривошипе (рис. 74, а), то возникает задача о приближенном статическом уравновешивании масс механизма, которую можно решить статическим размещением масс звеньев в точках В и С. Массу, сосредоточенную в точке А, как неподвижную, не учитываем. В точке В сосредоточена масса m_B , получающаяся от размещения масс кривошипа и шатуна:

$$m_B = m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \frac{l_{CS_2}}{l_{BC}}.$$

В точке C сосредоточена масса m_c , равная сумме массы ползуна и части массы шатуна:

$$m_c = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3.$$

Сила инерции массы m_B полностью уравновешивается противовесом с центром масс в точке E при выполнении условия

$$m_{п1} l_{AE} = m_B l_{AB}.$$

Остается неуравновешенной только сила инерции от массы m_c , которая направлена вдоль движения шатуна. В некоторых случаях эта сила не оказывает вредных влияний на фундамент, и тогда такое частичное уравновешивание допустимо. Если же требуется уменьшить воздействие силы инерции от массы m_c , то масса противовеса с центром масс в точке E кривошипа увеличивается на величину $m_{п2}$, определяемую из условий получения наименьшей величины неуравновешенной силы инерции.

Приближенное уравновешивание силы инерции ползуна кривошипно-ползунного механизма. Для решения поставленной задачи естественно применить наилучшее приближение функций, т. е. такое приближение, при котором максимальное отклонение приближающей функции от заданной имеет минимально возможную величину. В рассматриваемой задаче заданной функцией является сила инерции массы m_c , а приближающей — сила инерции противовеса с массой $m_{п2}$. Условия наилучшего приближения будут выполнены, если отклонение от заданной функции максимальное число раз достигает своих предельных значений с последовательно чередующимися знаками.

Сначала построим годограф силы инерции F_{ic} массы m_c в системе координат, связанной с кривошипом (рис. 74, б). Годограф строим по методу обращения движения, при котором всем звеньям механизма, включая и стойку, сообщается вращение вокруг центра A с угловой скоростью, равной по величине и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа. В обращении движении кривошип неподвижен, а ползун вместе с направляющими вращается вокруг центра A в сторону, противоположную направлению вращения кривошипа.

Выберем точку p за начало годографа и отложим из нее отрезок pc_0 в направлении, противоположном направлению ускорения точки C . Тогда масштабный коэффициент годографа $\mu_F = m_C a_{C_0} / (pc_0)$, где a_{C_0} — модуль ускорения точки C при $\varphi = 0$. Затем проводим из точки p луч под углом $\varphi = \varphi_1$ к направлению движения ползуна, откладывая этот угол в направлении, противоположном вращению кривошипа. На этом луче откладываем вектор силы инерции $F_{ис}$, соответствующий углу φ , и получаем точку c_1 годографа и т. д.

Вектор искомой силы инерции противовеса $F_{ип}$ с массой $m_{п2}$ изобразится постоянным по величине отрезком ep . Положение точки e должно быть выбрано из условий наилучшего приближения. Эти условия выполняются, если выбрать точку e в центре окружности, в которую вписан годограф, так как в этом случае оставшаяся неуравновешенность $F_{ис} + F_{ип}$, изображаемая отрезком ec_1 , максимальное число раз (три раза) достигает своих предельных значений. Измерив отрезок ep , получаем $F_{ип} = \mu_F(ep)$.

Отсюда

$$m_{п2} l_{AE} \omega^2 = m_C a_{C_0} \frac{(ep)}{(pc_0)} \quad \text{или} \quad m_{п2} l_{AE} = m_C \frac{a_{C_0}}{\omega^2} \frac{(ep)}{(pc_0)}.$$

Можно решить эту задачу и по методу квадратичного приближения функций. Тогда точка e должна быть выбрана в центре тяжести годографа, который рассматривается как кривая, представляющая систему точек с равными массами.

Глава XIV. УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ В МЕХАНИЗМАХ И МАШИНАХ

§ 50. Уравновешивание сил на входном звене механизма

Уравновешивающие кулачковые механизмы. Цель уравновешивания сил на входном звене, совершающем обычно вращательное движение, — выравнивание момента сил на валу двигателя. Это выравнивание достигается посредством аккумулирования избыточной энергии механизма, равной разности (по модулю) работ сил движущих и сил сопротивления, с последующей отдачей на-

копленной энергии механизму. В качестве рабочего тела, способного аккумулировать и отдавать энергию, применяются пружины (рис. 75, а), реже — сжатый воздух, действующий на поршень пневмоцилиндра (рис. 75, б). Накопление и отдача энергии в пружине или пневмоцилиндре должны происходить по программе, предусматривающей полное или частичное выравнивание приведенного движущего момента. В качестве программоносителя

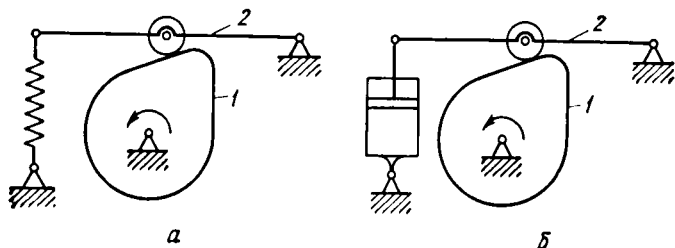


Рис. 75

используют кулачок, который профилируется по требуемому закону изменения силы, создаваемой пружиной или сжатым воздухом, в пневмоцилиндре. Кулачок 1, жестко соединенный с входным звеном механизма (или группы механизмов), коромысло 2 с действующей на него пружиной (или пневмоцилиндром) и стойка О образуют уравновешивающий кулачковый механизм.

Условие уравновешивания сил при кулачке-программоносителе, установленном на входном звене. Дифференциальное уравнение движения механизма при вращающемся входном звене, жестко соединенным с валом двигателя, имеет вид

$$J_{\Pi} \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = \widetilde{M}_d - M_{сз} \quad (14.1)$$

где φ — угол поворота входного звена, J_{Π} — приведенный к этому звену момент инерции, $\widetilde{M}_d$ — момент сил на валу двигателя, $M_{сз}$ — модуль приведенного момента сил сопротивления.

Уравновешивание сил рассмотрим при установившемся движении на участке от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$. Тогда момент $\widetilde{M}_d$ можно представить как сумму среднего значе-

ния $M_{ср}$ и переменного приращения ΔM :

$$M_d = M_{ср} + \Delta M, \quad (14.2)$$

где

$$M_{ср} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_c d\varphi. \quad (14.3)$$

Кроме того, будем считать, что угловая скорость вала двигателя $\dot{\varphi}$ при изменении приведенного момента сил сопротивления остается постоянной (двигатель неограниченной мощности). В этом случае уравнение движения (14.1) с учетом (14.2) принимает вид

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{п}}{d\varphi} = M_{ср} + \Delta M - M_c. \quad (14.4)$$

Для того чтобы момент на валу двигателя M_d имел постоянное значение, равное $M_{ср}$, необходимо выполнить условие

$$M_k = \Delta M \quad \text{или} \quad M_k = M_d - M_{ср}, \quad (14.5)$$

где M_k — приведенный момент сил упругости пружинного или пневматического нагружателя (*корректирующий момент*). Другими словами, переменная составляющая момента ΔM , необходимая для поддержания постоянства угловой скорости $\dot{\varphi}$, должна создаваться не двигателем, а действием пружинного или пневматического нагружателя.

Из (14.4) при условии (14.5) имеем

$$\widetilde{M}_k = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{п}}{d\varphi} + M_c - M_{ср}. \quad (14.6)$$

Определение требуемого закона изменения деформации пружины. На рис. 76 показана характеристика пружины растяжения. Сила упругости пружины $F_{пр}$ связана с деформацией x , отсчитываемой от начального положения, линейной зависимостью

$$F_{пр} = c(b + x), \quad (14.7)$$

где c — коэффициент жесткости, b — монтажная деформация, т. е. постоянная величина, численно равная отношению упругой силы пружины в начальном положении

$F_{\min}$ к коэффициенту жесткости c . Максимальное значение силы пружины $F_{\max}$ при деформации $x_{\max}$ должно быть не больше предельного значения $F_{\text{пред}}$, допускаемого по условиям прочности.

Элементарная работа корректирующего момента M_k равна элементарной работе силы упругости пружины

$$\bar{M}_k d\varphi = \bar{F}_{\text{пр}} dx, \quad (14.8)$$

где $\bar{F}_{\text{пр}}$ имеет знак минус в режиме накопления потенциальной энергии пружины и знак плюс в режиме отдачи накопленной энергии.

Из соотношения (14.8) после интегрирования можно получить зависимость $x(\varphi)$, при которой выполняется заданная программа изменения корректирующего момента M_k . Пусть,

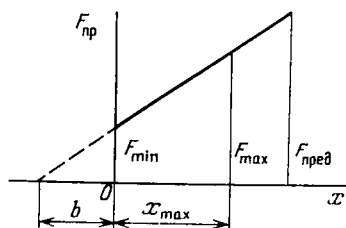


Рис. 76

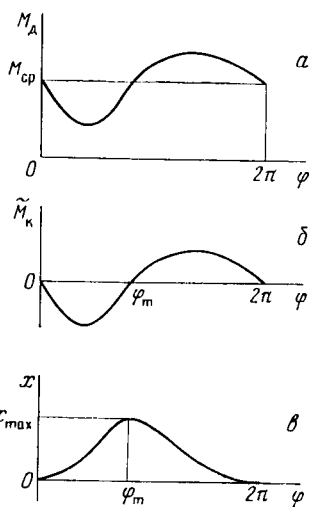


Рис. 77

например, при установившемся движении момент M_d до введения корректирующего момента $\bar{M}_k$ представлен функцией, показанной на рис. 77:

$$M_d(\varphi) = M_c + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi}.$$

Корректирующий момент $\bar{M}_k = M_d - M_c$, где $M_c = M_{\text{ср}}$ — среднее значение момента M_d , имеет знак минус на участке $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$, что соответствует режиму накопления потенциальной энергии пружины (рис. 77, б). На участке $\varphi_m \leq \varphi \leq 2\pi$ корректирующий момент $\bar{M}_k$ положителен и происходит отдача накопленной энергии.

Интегрирование соотношения (14.8) на участке накопления потенциальной энергии приводит к равенству

$$\int_0^{\varphi} \widetilde{M}_K d\varphi = - \int_0^x c(b+x) dx \quad \text{или} \quad A_n = \frac{c}{2} (2bx + x^2),$$

где

$$A_n = - \int_0^{\varphi} \widetilde{M}_K d\varphi. \quad (14.9)$$

Отсюда

$$x = -b + \sqrt{b^2 + \frac{2}{c} A_n}. \quad (14.10)$$

Максимальное значение накопленной потенциальной энергии $A_{\max}$ получается при $x = x_{\max}$:

$$A_{\max} = \frac{c}{2} (2bx_{\max} + x_{\max}^2),$$

где

$$A_{\max} = - \int_0^{\varphi_m} \widetilde{M}_K d\varphi. \quad (14.11)$$

Отсюда следует условие для выбора коэффициента жесткости

$$c = \frac{2A_{\max}}{2bx_{\max} + x_{\max}^2}. \quad (14.12)$$

Подстановка условия (14.12) в (14.10) дает формулу для вычисления перемещений x конца пружины на участке накопления потенциальной энергии (рис. 77, в):

$$x = -b + \sqrt{b^2 + (2bx_{\max} + x_{\max}^2) \frac{A_n}{A_{\max}}}. \quad (14.13)$$

Для участка отдачи потенциальной энергии имеем

$$\int_{\varphi_m}^{\varphi} \widetilde{M}_K d\varphi = \int_x^{x_{\max}} c(b+x) dx \quad \text{или} \quad A_0 = cbx_{\max} + \frac{cx_{\max}^2}{2} - \\ - cbx - \frac{cx^2}{2},$$

где

$$A_0 = \int_{\varphi_m}^{\varphi} \widetilde{M}_K d\varphi. \quad (14.14)$$

Отсюда

$$x = -b + \sqrt{(b + x_{\max})^2 - \frac{2}{c} A_0}. \quad (14.15)$$

По условию установившегося движения максимальное значение отдаваемой потенциальной энергии равно $A_{\max}$, определяемому по (14.11), и следовательно, коэффициент жесткости c находится по (14.12). Подставляя это значение c в (14.15), получаем формулу для вычисления перемещений x конца пружины на участке отдачи потенциальной энергии

$$x = -b + \sqrt{(b + x_{\max})^2 - (2bx_{\max} + x_{\max}^2) \frac{A_0}{A_{\max}}}. \quad (14.16)$$

Если требуемый корректирующий момент M_k за время цикла установившегося движения имеет более двух экстремумов, то указанная процедура вычисления перемещений x повторяется для каждой пары соседних участков накопления и отдачи потенциальной энергии, причем коэффициент жесткости c определяется по наибольшему $A_{\max}$.

Определение координат профиля кулачка. На рис. 78 показан уравновешивающий кулачковый механизм, в котором профиль кулачка определен из условия получения

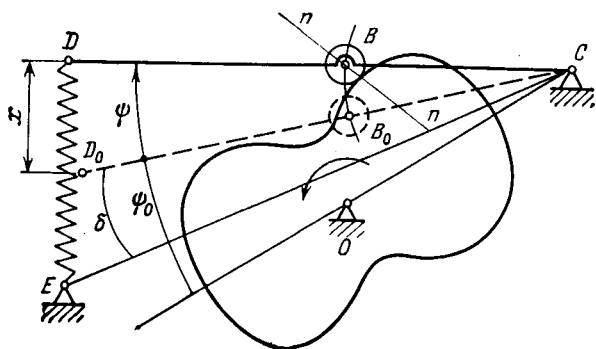


Рис. 78

двух участков накопления и отдачи потенциальной энергии за время цикла установившегося движения при изменении деформации пружины x в соответствии с графиком на рис. 77, в. Вычисление координат профиля кулачка начинается с определения угла поворота коромысла

ψ в зависимости от перемещения x . Для лучшей передачи сил в среднем положении пружины ($x = 0,5x_{\max}$) угол между направлением силы $F_{\text{пр}}$ и коромыслом BC принимается равным 90° . Тогда из $\triangle EDC$ находим $d = l_{CE}$:

$$d = \sqrt{(a + 0,5x_{\max})^2 + (l + l_1)^2},$$

где $a > b$ — конструктивно определяемая величина, зависящая от диаметра проволоки пружины, $l = l_{BC}$ и $l_1 = l_{BD}$.

После определения размера d находим угол δ из $\triangle EDC$ в начальном положении коромысла

$$\cos \delta = \frac{(l + l_1)^2 + d^2 - a^2}{2(l + l_1)d}.$$

Искомый угол ψ находим из $\triangle EDC$:

$$\cos(\delta + \psi) = \frac{(l + l_1)^2 + d^2 - (a + x)^2}{2(l + l_1)d}. \quad (14.17)$$

За полярные координаты точек центрового профиля кулачка (траектории центра ролика в движении относительно кулачка) принимаем радиус-вектор R и угол β , измеряемый между R и начальным радиусом-вектором R_0 . Эти координаты находятся по формулам, известным из теории кулачковых механизмов [14, с. 495]:

$$R = \sqrt{l_0^2 + l^2 - 2l_0 \cos(\psi + \psi_0)}, \quad (14.18)$$

$$\beta = \varphi \pm (\gamma_0 - \gamma), \quad (14.19)$$

где φ — угол поворота кулачка,

$$\psi_0 = \arccos(l_0^2 + l^2 - R_0^2)/(2l_0l),$$

$$\gamma_0 = \arccos(R_0^2 + l_0^2 - l^2)/(2R_0l_0),$$

$$\gamma = \arccos(R^2 + l_0^2 - l^2)/(2Rl_0).$$

В формуле (14.19) берется знак плюс, если на фазе подъема коромысла направления вращения кулачка и коромысла противоположные, и знак минус — если эти направления одинаковые.

При выборе начального радиуса кулачка R_0 следует иметь в виду, что на участке отдачи накопленной потенциальной энергии коромысло кулачкового механизма является ведущим звеном, и угол давления на кулачок

(острый угол между нормалью к профилю nn и скоростью точки B кулачка) увеличивается с увеличением начального радиуса R_0 . Кроме того, при $M_k = 0$ нормаль nn проходит через центр вращения кулачка и угол давления на кулачок равен 90° . Вблизи этого положения кулачка на участке отдачи накопленной энергии располагается нерабочая зона (зона самоторможения), в которой движение кулачка возможно только при увеличении момента на валу двигателя сверх его среднего значения $M_{ср}$.

Синтез уравнивающего кулачкового механизма, присоединенного к входному звену синусного механизма. В синусном механизме (рис. 79) при выбранном направлении отсчета угла поворота φ входного звена 1 перемещение выходного звена 3: $s = r \sin \varphi$, где r — длина

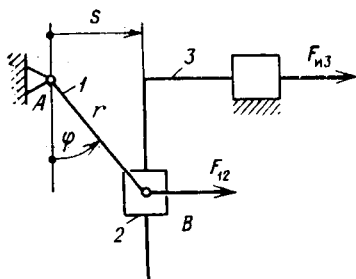


Рис. 79

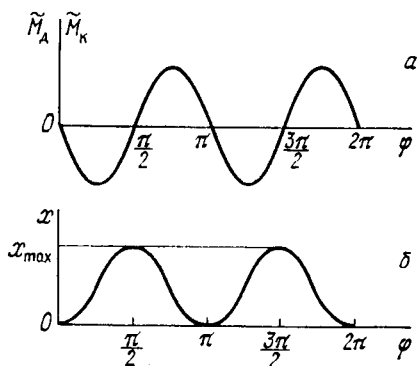


Рис. 80

звена 1 (радиус кривошипа). Скорость и ускорение выходного звена при постоянной скорости входного звена $\dot{\omega} = \dot{\varphi}$: $s = r\omega \cos \varphi$, $\ddot{s} = -r\omega^2 \sin \varphi$. Сила инерции звена 3 $F_{из} = m_3 r \omega^2 \sin \varphi$, где m_3 — масса звена 3.

При $M_c = 0$ (чисто инерционная нагрузка) из уравнений кинестатики, пренебрегая массой звена 2, находим реакцию на звено 1 со стороны звена 2

$$F_{12} = m_3 r \omega^2 \sin \varphi.$$

Следовательно, момент на валу двигателя

$$\tilde{M}_d = -m_3 r^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \text{ или } \tilde{M}_d = -m_3 r^2 \omega^2 \frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

График $M_d(\varphi)$ показан на рис. 80, а, из которого следует, что $M_{ср} = 0$ и $M_n = M_d$. Накопление потенциальной энергии в пружине происходит на двух участках $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$. Отдача накопленной энергии происходит также на двух участках $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ и $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$. Максимальное значение накопленной потенциальной энергии для обоих участков по (14.11)

$$A_{\max} = \int_0^{\pi/2} m_3 r^2 \omega^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \equiv \frac{m_3 r^2 \omega^2}{2}.$$

Для участка накопления потенциальной энергии по (14.9)

$$A_n = \int_0^{\varphi} m_3 r^2 \omega^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \equiv \frac{m_3 r^2 \omega^2}{2} \sin^2 \varphi.$$

Подставляя найденные значения $A_{\max}$ и A_n в (14.13), получаем формулу для вычисления x на участке накопления потенциальной энергии

$$x = -b + \sqrt{b^2 + (2bx_{\max} + x_{\max}^2) \sin^2 \varphi}. \quad (14.20)$$

Для участка отдачи накопленной потенциальной энергии по (14.14) и (14.16) имеем:

$$A_0 = \int_{\pi/2}^{\varphi} m_3 r^2 \omega^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \equiv \frac{m_3 r^2 \omega^2}{2} \cos^2 \varphi,$$

$$x = -b + \sqrt{(b + x_{\max})^2 - (2bx_{\max} + x_{\max}^2) \cos^2 \varphi}. \quad (14.21)$$

На рис. 80, б показан график перемещения x за один цикл установившегося движения. После вычисления перемещения x как функции угла φ находим углы поворота ψ из соотношения (14.17) и полярные координаты профиля кулачка по (14.18) и (14.19).

§ 51. Кулачковые разгрузатели

Уравновешивание сил на выходном звене механизма. Цель уравновешивания сил на выходном звене, совершающем обычно возвратное движение, — выравнивание сил, действующих на выходное звено со стороны смежных звеньев. Это выравнивание уменьшает максимальные

значения реакций в кинематических парах, и потому устройства для выравнивания сил, действующих на выходное звено, называют также *разгружающими устройствами* или *разгрузателями*. Их действие основано на аккумулировании избыточной энергии механизма в пружине или пневмоцилиндре с последующей отдачей накопленной энергии механизму. На рис. 81 показана схема кулачкового разгрузателя, в котором кулачок-программоноситель 1, установленный на выходном звене,

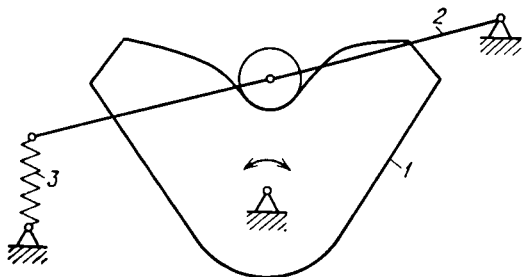


Рис. 81

взаимодействует с пружиной 3 через коромысло 2 и создает корректирующий момент, необходимый для выравнивания сил, действующих на выходное звено. Смена знака корректирующего момента при переходе от накопления энергии к ее отдаче (или наоборот) происходит в положении, когда нормаль к профилю кулачка проходит через центр вращения кулачка. При возвратно-вращательном движении кулачка-программоносителя один и тот же профиль используется как для рабочего, так и для холостого ходов. Отсюда следует, что для полного выравнивания необходимо совпадение значений всех сил (включая и силы инерции) при одном и том же значении угла поворота выходного звена как на рабочем, так и на холостом ходу. В других случаях можно получить только приближенное выравнивание.

Пусть, например, выходное звено механизма совершает возвратно-вращательное движение. Тогда условие кинетостатического равновесия этого звена имеет вид

$$\tilde{M}_d - M_c - J\ddot{\varphi} = 0, \quad (14.22)$$

где φ — угол поворота выходного звена, $\tilde{M}_d$ — результирующий момент сил, действующих на выходное звено

со стороны смежных звеньев (движущий момент), M_c — модуль момента внешних (по отношению к механизму) сил сопротивления, действующих на выходное звено, J — момент инерции выходного звена относительно оси вращения.

Закон изменения углового ускорения $\ddot{\varphi}$ от времени t будем считать заданным. Обычно он определяется в предположении, что угловая скорость входного звена постоянна. Кроме того, считаем, что выходное звено не имеет выстоев в крайних положениях, и цикл его движения состоит из участка рабочего хода продолжительностью T_p и участка холостого хода продолжительностью T_x . Модули моментов сил сопротивления для этих участков соответственно обозначим через M_p и M_x , а средние их значения на угле поворота выходного звена в $\psi_{\max}$ через $\bar{M}_p$ и $\bar{M}_x$:

$$\bar{M}_p = \frac{1}{\psi_{\max}} \int_0^{\psi_{\max}} M_p d\psi, \quad \bar{M}_x = \frac{1}{\psi_{\max}} \int_0^{\psi_{\max}} M_x d\psi.$$

Тогда момент $\bar{M}_d$ можно представить как сумму среднего значения $\bar{M}_p$ (или $\bar{M}_x$) и переменного приращения $\Delta \bar{M}_p$ (или $\Delta \bar{M}_x$), и условие кинестатического равновесия (14.22) принимает вид

$$\bar{M}_p + \Delta \bar{M}_p - M_p - J\ddot{\varphi} = 0, \quad \bar{M}_x + \Delta \bar{M}_x - M_x - J\ddot{\varphi} = 0. \quad (14.23)$$

Для того чтобы момент $\bar{M}_d$ имел постоянное значение $\bar{M}_p$ на участке рабочего хода (или $\bar{M}_x$ на участке холостого хода), необходимо приложить к выходному звену корректирующий момент ΔM_{kp} (или ΔM_{kx}), равный переменной составляющей $\Delta \bar{M}_p$ (или $\Delta \bar{M}_x$). При этом условии из уравнений (14.23) получаем:

$$M_{kp} = \ddot{\varphi} + M_p - \bar{M}_p, \quad M_{kx} = \ddot{\varphi} + M_x - \bar{M}_x. \quad (14.24)$$

Если $M_{kp} \neq M_{kx}$, то полное уравнивание момента $\bar{M}_d$ невозможно и возникает задача приближенного уравнивания с применением одного из методов приближения функций. Обычно используется соотношение

$$\bar{M}_k = \frac{1}{2} (\bar{M}_{kp} + \bar{M}_{kx}), \quad (14.25)$$

которое при симметричных законах изменения $M_{кр}$ и $M_{кх}$ дает равномерное приближение.

После определения корректирующего момента M_k требуемые перемещения x конца пружины и вычисленные координат профиля кулачка производятся в том же порядке, как и при кулачке-программоносителе, установленном на входном звене.

Синтез кулачкового разгрузителя при синусоидальном ускорении выходного звена. Пусть движение выходного звена при $T_p = T_x = T$ (рис. 82, а) описывается во времени t при рабочем ходе уравнением

$$\varphi = \left(k - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi k \right) \varphi_{\max}, \quad (14.26)$$

где $k = t/T$ — безразмерная величина, изменяющаяся от 0 до 1.

При холостом ходе

$$\varphi = \left(1 - k + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi k \right) \varphi_{\max}, \quad (14.27)$$

где $k = (t - T)/T$.

Дифференцирование по времени при $dk = dt/T$ дает

$$\dot{\varphi} = \pm (1 - \cos 2\pi k) \frac{\varphi_{\max}}{T}, \quad (14.28)$$

где знак плюс относится к рабочему ходу, а знак минус — к холостому (рис. 82, б).

Повторное дифференцирование дает (рис. 82, в):

$$\ddot{\varphi} = \pm \frac{2\pi\varphi_{\max}}{T^2} \sin 2\pi k. \quad (14.29)$$

При $M_c = 0$ (чисто инерционная нагрузка) момент M_d равен произведению момента инерции выходного звена относительно оси вращения J на угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ по (14.29)

$$M_d = \pm \frac{J 2\pi \varphi_{\max}}{T^2} \sin 2\pi k. \quad (14.30)$$

Среднее значение этого момента равно нулю и, следовательно, корректирующий момент $\bar{M}_k = M_d$. Для перехода к функции $\bar{M}_k(\varphi)$ задаемся значениями k в пределах от 0 до 1 и вычисляем соответствующие им значения угла φ по (14.26) и корректирующего момента

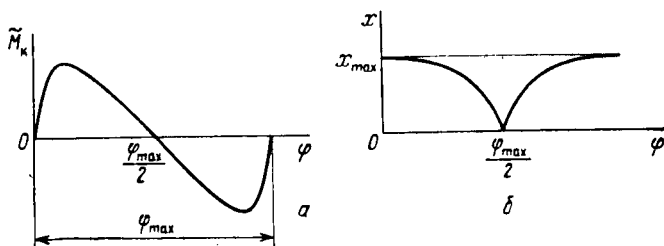


Рис. 83

$\bar{M}_k = M_d$ по (14.30). График функции $\bar{M}_k(\varphi)$ показан на рис. 83, а.

Максимальное значение накопленной энергии (14.11)

$$A_{\max} = \int_0^{\varphi_{\max}/2} \frac{J2\pi\varphi_{\max}}{T^2} \sin 2\pi k d\varphi.$$

Преобразуем этот интеграл, учитывая, что $dk = dt/T$, $d\varphi = \dot{\varphi} dt$ и, следовательно, $d\varphi = \dot{\varphi} T dk$:

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \frac{J2\pi\varphi_{\max}}{T} \int_0^{0,5} \dot{\varphi} \sin 2\pi k dk \equiv \\ &\equiv \frac{J2\pi\varphi_{\max}^2}{T^2} \int_0^{0,5} (1 - \cos 2\pi k) \sin 2\pi k dk. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$A_{\max} = 2J\varphi_{\max}^2/T^2.$$

Текущие значения отдаваемой потенциальной энергии по (14.14)

$$A_0 = \int_0^{\varphi} \frac{J2\pi\varphi_{\max}}{T^2} \sin 2\pi k d\varphi \equiv \frac{J2\pi\varphi_{\max}^2}{T^2} \int_0^k (1 - \cos 2\pi k) \sin 2\pi k dk,$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$A_0 = \frac{J\varphi_{\max}^2}{4T^2} (3 - 4 \cos 2\pi k + \cos 4\pi k).$$

Текущие значения накапливаемой потенциальной энергии по (14.9)

$$\begin{aligned} A_n &= - \int_{\varphi_{\max}/2}^{\varphi} \frac{J2\pi\varphi_{\max}}{T^2} \sin 2\pi k \, d\varphi \equiv \\ &\equiv \frac{J2\pi\varphi_{\max}^2}{T^2} \int_{0,5}^k (1 - \cos 2\pi k) \sin 2\pi k \, dk. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$A_n = \frac{-J\varphi_{\max}^2}{4T^2} (-5 - 4 \cos 2\pi k + \cos 4\pi k).$$

Выбрав параметры пружины b и $x_{\max}$, находим по (14.12) коэффициент жесткости пружины

$$c = \frac{4J\varphi_{\max}^2}{T^2 (2bx_{\max} + x_{\max}^2)}.$$

Перемещения конца пружины x вычисляем по (14.16) и (14.13), подставляя найденные значения $A_{\max}$, A_0 и A_n :

$$\begin{aligned} x &= -b + \\ &+ \sqrt{(b + x_{\max})^2 - \frac{1}{8}(2bx_{\max} + x_{\max}^2)(3 - 4 \cos 2\pi k + \cos 4\pi k)} \\ &\quad \text{при } 0 \leq k \leq 0,5; \\ x &= -b + \\ &+ \sqrt{b^2 + \frac{1}{8}(2bx_{\max} + x_{\max}^2)(-5 - 4 \cos 2\pi k + \cos 4\pi k)} \\ &\quad \text{при } 0,5 \leq k \leq 1. \end{aligned}$$

График $x(\varphi)$ показан на рис. 83, б.

Угол поворота коромысла φ , взаимодействующего с кулачком-программонositeлем (рис. 84), определяется из соотношения (14.17), а полярные координаты центрального профиля кулачка R и β вычисляются по (14.18) и (14.19), если принять за начало отсчета углов φ положение кулачка при $\varphi = \varphi_{\max}/2$.

В рассматриваемом примере установкой кулачка-программонесителя на выходном звене механизма достигается полное уравнивание момента сил инерции

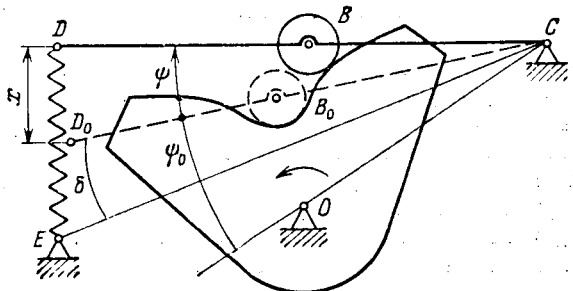


Рис. 84

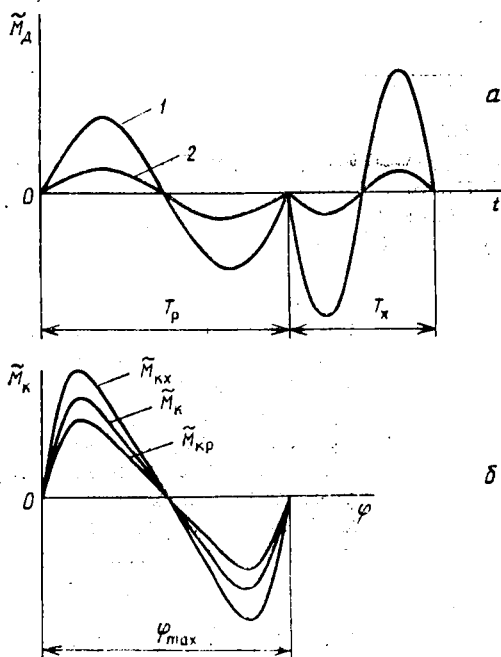


Рис. 85

звена, при котором равен нулю момент $\tilde{M}_d$, действующий на выходное звено со стороны смежных звеньев. Необходимо только иметь в виду, что на участке отдачи энергии, накопленной в пружине, кулачок-программонеси-

тель является ведомым звеном и угол давления на это звено может оказаться больше допустимого вплоть до самоторможения. На участке самоторможения движущий момент должен быть приложен со стороны смежных звеньев.

Если $T_x < T_p$, то при том же синусоидальном законе изменения ускорения выходного звена максимальное ускорение при холостом ходе больше, чем при рабочем, и соответственно больше момент M_d (кривая 1 на рис. 85, а). Корректирующий момент M_k принимается в этом случае равным полусумме корректирующих моментов M_{kx} и M_{kp} на холостом и рабочем ходах (рис. 85, б). Момент M_d на выходном звене после установки кулачка-программонесителя становится равным полуразности корректирующих моментов M_{kx} и M_{kp} (кривая 2 на рис. 85, а).

§ 52. Пружинные разгрузатели

Уравновешивание сил на вращающемся выходном звене при пружинном разгрузателе. Конструкция разгрузателя значительно упрощается, если исключить кулачок, присоединяя пружину непосредственно к выходному звену (рис. 86). При возвратно-вращательном движении выходного звена смена знака корректирующего момента при переходе от накопления энергии к ее отдаче (или наоборот) происходит в положении, когда направление силы упругости пружины проходит через центр вращения выходного звена. В этом случае корректирующий момент M_k , создаваемый силой упругости пружины F_{np} , найдется по условию

$$M_k = F_{np} h, \quad (14.31)$$

где плечо h определяется из $\triangle OAB$:

$$h = \frac{rd \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}}.$$

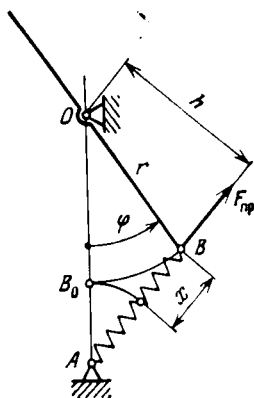


Рис. 86

Перемещение конца пружины x отсчитывается от начального положения, при котором точка B_0 располагается на линии AO и корректирующий момент равен

нулю:

$$x = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi} - d + r. \quad (14.32)$$

Сила упругости пружины по условию (14.7) $F_{\text{пр}} = c(b+x)$, где b — монтажная деформация, равная отношению силы пружины в начальном положении к коэффициенту жесткости c . Следовательно, корректирующий момент M_k по (14.31)

$$\tilde{M}_k = \frac{c(b+x)rd \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}}$$

или с учетом (14.32)

$$\tilde{M}_k = \frac{c(b-d+r)rd \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}} + crd \sin \varphi, \quad (14.33)$$

т. е. корректирующий момент $\tilde{M}_k$ есть нелинейная функция угла φ . Для полного уравнивания (выравнивания) момента $\tilde{M}_d$, действующего на выходное звено со стороны смежных звеньев, необходимо выполнение условий (14.24), которым в общем случае можно удовлетворить только приближенно. Обозначим через $\tilde{M}_{\text{ост}}$ разность между корректирующим моментом, необходимым для полного уравнивания по условиям (14.24), и корректирующим моментом $\tilde{M}_k$ (14.33), который может быть воспроизведен пружинным разгрузателем. Тогда из условий (14.24) имеем

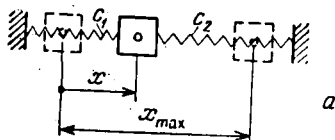
$$\tilde{M}_{\text{ост}} = J\ddot{\varphi} + M_c - \tilde{M}_c - \tilde{M}_k, \quad (14.34)$$

где модуль момента сил сопротивления M_c и его среднее значение $\tilde{M}_c$ равны соответственно для рабочего хода M_p , $\tilde{M}_p$ и M_x , $\tilde{M}_x$, для холостого хода.

Параметры пружинного разгрузателя, входящие в (14.33), должны быть выбраны так, чтобы функция $\tilde{M}_{\text{ост}}$ наименее отклонялась от нуля как на рабочем, так и на холостом ходах. Это условие достигается применением одного из видов приближения функций (интерполирование, квадратическое приближение, наилучшее приближение).

Уравнивание сил на прямолинейно движущемся выходном звене при пружинном разгрузателе. Для выходного звена, совершающего прямолинейное движение (рис. 87, а), корректирующая сила F_k должна изменять свой знак при переходе от участка разбега выходного

звена к участку выбега. Это условие выполняется посредством установки двух пружин сжатия 1 и 2. Сила упругости пружины 1 (рис. 87, б) $F_{пр1} = c_1(b_1 + x_{max} - x)$. Сила упругости пружины 2 (рис. 87, в) $F_{пр2} = -c_2(b_2 + x)$. Сумма этих сил дает корректирующую силу (рис. 87, г):

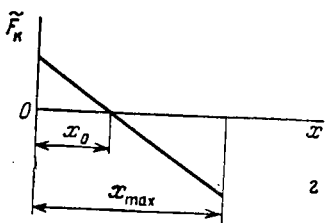
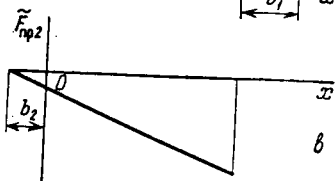
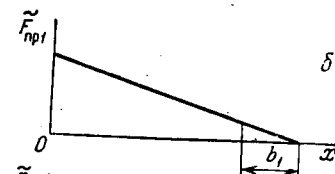


$$F_k = c_1 b_1 - c_2 b_2 + c_1 x_{max} - (c_1 + c_2)x \quad \text{или}$$

$$F_k = (c_1 + c_2)(x_0 - x),$$

где x_0 — значение координаты x при $F_k = 0$, определяемое по условию

$$x_0 = \frac{c_1 b_1 - c_2 b_2 + c_1 x_{max}}{c_1 + c_2}.$$



Если обе пружины имеют одинаковый коэффициент жесткости $c_1 = c_2 = c$, то

$$F_k = 2c(x_0 - x), \quad (14.35)$$

$$\text{где } x_0 = \frac{b_1 - b_2 + x_{max}}{2}.$$

Отсюда видно, что при неравных участках разбега и выбега необходимое значение x_0 достигается подбором величин монтажных деформаций пружин b_1 и b_2 .

Условие уравнивания сил на прямолинейно движущемся выходном звене аналогично условиям (14.24) запишется в виде

$$F_{кр} = m\ddot{x} + F_p - \bar{F}_p, \quad F_{кx} = m\ddot{x} + F_x - \bar{F}_x, \quad (14.36)$$

где m — масса выходного звена, $F_{кр}$, F_p , $\bar{F}_p$ — корректирующая сила, модуль силы сопротивления и среднее значение силы сопротивления на рабочем ходу, $F_{кx}$, F_x , $\bar{F}_x$ — те же величины на холостом ходу.

Обозначим через $F_{ост}$ разность между корректирующей силой, необходимой для полного уравнивания по условиям (14.36), и корректирующей силой пружины (14.35), которая может быть воспроизведена пружинным

разгрузителем. Тогда из условий (14.36) имеем

$$F_{\text{ост}} = m\ddot{x} + F_c - \bar{F}_c - F_k, \quad (14.37)$$

где модуль силы сопротивления F_c и ее среднее значение $\bar{F}_c$ равны соответственно для рабочего хода F_p , $\bar{F}_p$ и F_x , $\bar{F}_x$ — для холостого хода. Параметры пружинного разгрузителя c и x_0 выбираются из условий наименьшего отклонения от нуля функции $F_{\text{ост}}$.

Уравновешивание силы инерции ползуна в синусном механизме. Для синусного механизма (см. рис. 79) при постоянной угловой скорости ω входного звена 1 перемещение ползуна 3 и его ускорение определяются из соотношений: $s = r \sin \omega t$, $\ddot{s} = -r\omega^2 \sin \omega t$, где r — длина звена 1 (радиус кривошипа), t — время. Если пренебречь силой сопротивления F_c , то из условий (14.37) и (14.35) при $x = r + s$ и $x_0 = r$ получим

$$F_{\text{ост}} = mr\omega^2 \sin \omega t + 2cs.$$

Принимая во внимание, что $\sin \omega t = s/r$, получаем

$$F_{\text{ост}} = (m\omega^2 - 2c)s,$$

т. е. при $2c = m\omega^2$ достигается полное уравновешивание силы инерции ползуна 3.

Из уравнений кинестатики в этом случае следует, что реакция на звено 1 со стороны звена 2 и момент M_d равны нулю, т. е. движение ползуна происходит непосредственно под действием силы упругости пружины. Если сила сопротивления $F_c \neq 0$, то $F_{12} = F_c$ и $M_d = = F_c r \cos \varphi$, т. е. уравновешивание силы инерции ползуна 3 дает лишь разгрузку вращательных пар от действия переменной силы инерции ползуна. В обоих случаях, однако, механизм остается неуравновешенным на фундаменте, так как на него действует реакция от силы упругости пружины.

Уравновешивание силы инерции ползуна кривошипно-ползунного механизма. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 88, а) перемещение ползуна s , отсчитываемое от крайнего правого положения,

$$s = r + l - r \cos \varphi - \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi},$$

где φ — угол поворота кривошипа 1, r — длина кривошипа, l — длина шатуна 2. Введем обозначение $\lambda = r/l$. Тогда

$$s = l(\lambda + 1 - \lambda \cos \varphi - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}).$$

Дифференцирование по времени при $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ дает:

$$\dot{s} = r\omega \sin \varphi + \frac{r\lambda\omega \sin 2\varphi}{2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\ddot{s} = r\omega^2 \left[\cos \varphi + \frac{\lambda \cos 2\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\lambda^3 \sin 2\varphi \cos \varphi}{4} \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi} \right].$$

В крайних положениях при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ ускорение ползуна $\ddot{s}$ равно соответственно $r\omega^2(1+\lambda)$ и $-r\omega^2(1-\lambda)$.

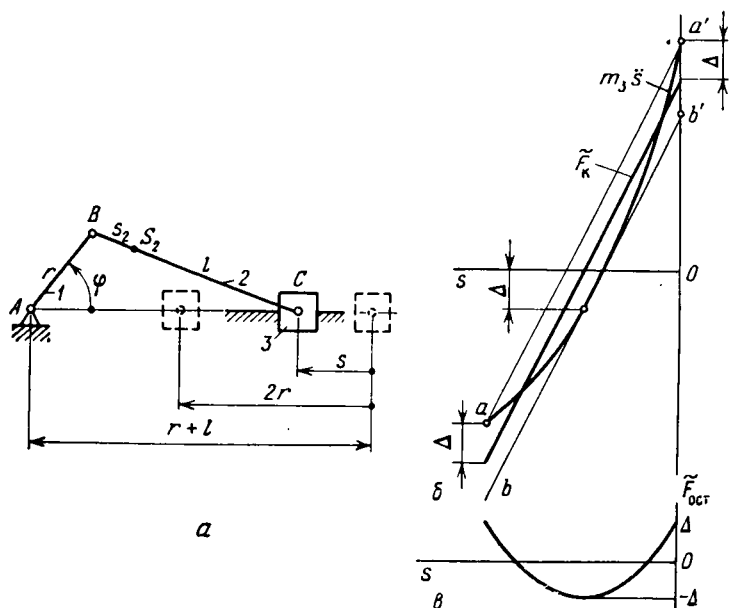


Рис. 88

В среднем положении, т. е. при $\varphi = \pi/2$, ускорение $\ddot{s} = -\lambda r\omega^2 \sqrt{1-\lambda^2}$. На рис. 88, б показан график функции $m_3 \ddot{s}(s)$, где m_3 — масса ползуна. Из условия (14.37) следует, что при $x = s$ и $F_c = 0$:

$$F_{\text{ост}} = m_3 \ddot{s} - F_{\kappa},$$

и, следовательно, параметры $2c$ и x_0 корректирующей силы F_{κ} должны быть выбраны из условий наилучшего приближения функций $m_3 \ddot{s}(s)$ и $F_{\kappa}(s)$. Это приближение

достигается при равенстве предельных отклонений Δ с последовательно чередующимися знаками. Графическое решение задачи об определении искомых параметров $2c$ и x_0 состоит из двух этапов. На первом этапе соединяем точки a и a' графика $m_3\ddot{s}(s)$ и параллельно хорде aa' проводим касательную bb' к этому графику. Расстояние между хордой aa' и касательной bb' , измеренное параллельно оси ординат, обозначим через 2Δ . На втором этапе проводим прямую, изображающую график корректирующей силы $\bar{F}_k(s)$, на равных расстояниях Δ и $-\Delta$ от хорды aa' и касательной bb' . Пересечение этой прямой с осью абсцисс дает параметр x_0 , а тангенс угла наклона к оси абсцисс — параметр $2c$.

Аналитическое определение параметров $2c$, x_0 и предельного отклонения Δ основано на равенстве значений $F_{\text{ост}}$ с последовательно чередующимися знаками по концам интервала и в точке экстремума $F_{\text{ост}}$. Эту точку в первом приближении принимаем при $s=r$, т. е. при $\varphi = \pi/2$. Указанные условия дают систему уравнений:

$$\begin{aligned} m_3 r \omega^2 (1 + \lambda) - 2c x_0 &= \Delta, \\ -m_3 r \omega^2 \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - 2c (x_0 - r) &= -\Delta, \\ -m_3 r \omega^2 (1 - \lambda) - 2c (x_0 - 2r) &= \Delta. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$2c = m_3 \omega^2, \\ x_0 = r - \frac{r\lambda}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - 1 \right), \quad \Delta = m_3 r \omega^2 \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right)$$

Во втором приближении считаем, что экстремум $F_{\text{ост}}$ достигается не в точке $s=r$, а в точке $s=x_0$, где x_0 принимается из первого приближения. Однако, как правило, второго приближения не требуется, если принять во внимание точность изготовления пружин.

На рис. 88, а показан график изменения $F_{\text{ост}} = m_3 \ddot{s} - \bar{F}_k$, получаемый после уравнивания силы инерции ползуна. Величину $F_{\text{ост}}$ можно рассматривать как неуровновешенную часть силы инерции ползуна, которая равна силе, необходимой для движения ползуна с указанным законом изменения ускорения $\ddot{s}$. Если требуется учесть влияние сил инерции шатуна, то для разгрузки кинематических пар целесообразно уравновесить не только силу инерции ползуна, но и составляющую

главного вектора силы инерции шатуна, отнесенную к точке C ползуна [16]. Тогда в предыдущие формулы вместо массы m_2 должна входить масса $m_2 + m_2 s_2/l$, где m_2 — масса шатуна, s_2 — расстояние от точки B до центра масс шатуна S_2 .

Уравновешивание сил инерции толкателя кулачкового механизма. Пусть толкатель кулачкового механизма при равной продолжительности рабочего и холостого ходов движется по закону синусоидального ускорения. Для рабочего хода ($0 \leq t \leq T$) имеем:

$$s = \left(k - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi k\right) s_{\max}, \quad \dot{s} = (1 - \cos 2\pi k) \frac{s_{\max}}{T},$$

$$\ddot{s} = \frac{2\pi s_{\max}}{T^2} \sin 2\pi k,$$

где $k = t/T$, $s_{\max}$ — максимальное значение перемещения s .

Для холостого хода ($T \leq t \leq 2T$) график $\ddot{s}(t)$ симметричен относительно прямой, параллельной оси ординат

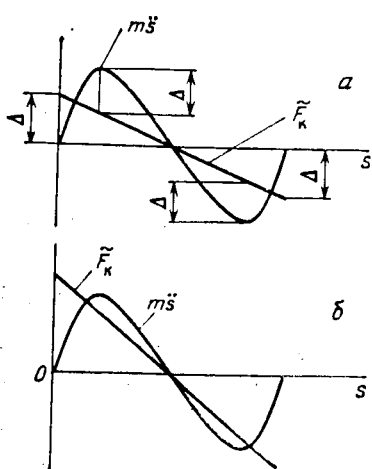


Рис. 89

и проходящей через точку с абсциссой $t = T$. Из условий симметрии графика $\ddot{s}(t)$ получаем, что корректирующая сила F_k как для рабочего, так и для холостого ходов определяется по соотношению

$$F_k = 2c \left(\frac{s_{\max}}{2} - s \right)$$

$$\text{или } \tilde{F}_k = c(s_{\max} - 2s),$$

где c — коэффициент жесткости одной пружины, который можно найти из условий наилучшего приближения функций $\tilde{F}_k$ и

$m\ddot{s}$, принимая массу m равной приведенной массе толкателя.

На рис. 89, а показано графическое определение коэффициента жесткости пружины c из условий равенства предельных отклонений Δ с последовательно чередующи-

мися знаками в четырех точках. Для аналитического определения коэффициента жесткости c и предельного отклонения Δ достаточно составить систему двух уравнений, приближенно считая, что предельное отклонение достигается при $k=0$ и в точке, соответствующей максимуму ускорения $\ddot{s}$, т. е. при $k=0,25$:

$$-cs_{\max} = -\Delta, \quad m \frac{2\pi s_{\max}}{T^2} \sin \frac{\pi}{2} - \\ - c \left(s_{\max} - 0,5s_{\max} + \frac{s_{\max}}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \Delta.$$

Отсюда

$$c = \frac{2\pi^2}{1,5\pi + 1} \frac{m}{T^2} \approx 3,456 \frac{m}{T^2}, \quad \Delta = 3,456 \frac{s_{\max} m}{T^2}.$$

Кроме наилучшего приближения для определения коэффициента жесткости пружины c , можно использовать также квадратическое приближение [8]. Сначала рассмотрим обращение в минимум среднего значения $F_{\text{ост}} = m\ddot{s} - F_k$ по перемещению s , что равносильно обращению в минимум интеграла

$$I = \int_0^{s_{\max}} [m\ddot{s} - c(s_{\max} - 2s)]^2 ds.$$

Из условия минимума, $\partial I / \partial c = 0$, получаем

$$\int_0^{s_{\max}} [m\ddot{s} - c(s_{\max} - 2s)] (s_{\max} - 2s) ds = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_0 - cc_{00} = 0,$$

где

$$\gamma_0 = \int_0^{s_{\max}} m\ddot{s} (s_{\max} - 2s) ds, \quad c_{00} = \int_0^{s_{\max}} (s_{\max} - 2s)^2 ds.$$

Интеграл γ_0 после подстановки $ds = sTdk$ принимает вид

$$\gamma_0 = \int_0^1 m \frac{2\pi s_{\max}^3}{T^2} \left(1 - 2k + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi k \right) (1 - \cos 2\pi k) \sin 2\pi k dk.$$

С учетом формул интегрирования:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin 2\pi k \, dk &= 0, \quad \int_0^1 k \sin 2\pi k \, dk = -\frac{1}{2\pi}, \\ \int_0^1 \sin^2 2\pi k \, dk &= \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \sin 2\pi k \cos 2\pi k \, dk = 0, \\ \int_0^1 k \sin 2\pi k \cos 2\pi k \, dk &= -\frac{1}{8\pi}, \quad \int_0^1 \sin^2 2\pi k \cos 2\pi k \, dk = 0\end{aligned}$$

получаем

$$\gamma_0 = 2,5 s_{\max}^2 \frac{m}{T^2}.$$

Интеграл c_{00} находится непосредственно интегрированием по переменной s :

$$c_{00} = \frac{1}{3} s_{\max}^3.$$

Требуемый коэффициент жесткости пружины $c = \frac{\gamma_0}{c_{00}} =$
 $= 7,5 \frac{m}{T^2}.$

На рис. 89, б показаны графики $m\ddot{s}$ и F_k как функции перемещения s при квадратическом приближении. Из сопоставления графиков на рис. 89, а и б следует, что максимальное значение $F_{\text{ост}}$ при квадратическом приближении больше, чем при наилучшем. Однако в среднем квадратическое приближение дает меньшие значения $F_{\text{ост}}$.

Коэффициент жесткости пружины c можно определить также из условия минимума среднего значения $F_{\text{ост}}$ по времени t , т. е. из условия минимума интеграла

$$I = \int_0^T [m\ddot{s} - c(s_{\max} - 2s)]^2 dt.$$

Из условия минимума, $\partial I / \partial c = 0$, получаем $c = \gamma_0 / c_{00}$, где

$$\gamma_0 = \int_0^T m\ddot{s} (s_{\max} - 2s) dt, \quad c_{00} = \int_0^T (s_{\max} - 2s)^2 dt.$$

Интеграл γ_0 после подстановки $dt = Tdk$ принимает вид

$$\gamma_0 = \int_0^1 m \frac{2\pi s_{\max}^2}{T} \left(1 - 2k + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi k\right) \sin 2\pi k dk.$$

С учетом указанных выше формул интегрирования получаем

$$\gamma_0 = 3s_{\max}^2 \frac{m}{T}.$$

Интеграл c_{00} после подстановки $dt = Tdk$ принимает вид

$$c_{00} = \int_0^1 s_{\max}^2 \left(1 - 2k + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi k\right)^2 Tdk.$$

С учетом указанных выше формул интегрирования получаем

$$c_{00} = \left(\frac{5}{2\pi^2} + \frac{1}{3}\right) s_{\max}^2 T \approx 0,5866 s_{\max}^2 T.$$

Требуемый коэффициент жесткости пружины

$$c = \frac{\gamma_0}{c_{00}} = \frac{18\pi^2}{15 + 2\pi^2} \frac{m}{T^2} \approx 5,11 \frac{m}{T^2}.$$

Отсюда следует, что средние квадратические значения $F_{\text{ост}}$ по времени t и по перемещению s не совпадают.

В заключение отметим, что уравнивающие кулачковые механизмы и разгружающие устройства позволяют уменьшить максимальные значения реакций в кинематических парах или уравновесить переменную составляющую на валу двигателя, но в то же время они могут стать дополнительными источниками упругих колебаний механизма.

Глава XV. ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ

§ 53. Линейный виброизолятор

Виброзащитные системы. Колебания в машинах могут быть полезными, когда само действие машины основано на эффекте колебаний (вибрационные транспортеры, сита, виброударные машины для забивки свай

и т. п.), но чаще они являются нежелательными, так как снижают надежность машин, вызывают шум и оказывают вредное влияние на организм человека.

Характеристики колебательных систем (амплитуды, частоты, силы) могут быть уменьшены или ограничены допускаемыми пределами путем оптимального выбора параметров соответствующей динамической модели. Например, динамические нагрузки в кулачковых механизмах могут быть уменьшены за счет правильного выбора профиля кулачка. В тех случаях, когда путем оптимального выбора параметров не удается снизить уровень колебаний, применяются дополнительные устройства для защиты от вредного действия колебаний — *виброзащитные системы*.

Различают два основных способа защиты от вибрации: виброгашение и виброизоляция. *Виброгашение* основано на присоединении к машине дополнительных колебательных систем, называемых *виброгасителями*, которые создают динамические воздействия, уменьшающие уровень колебаний в машине. *Виброизоляция* основана на разделении исходной системы на две части и в соединении этих частей посредством *виброизоляторов*. Одна из частей является *защищаемым объектом*, а другая — *источником возбуждения*. Во многих случаях масса одной части существенно превышает массу другой части. Тогда движение тела «большой» массы может считаться не зависящим от движения тела «малой» массы. Тело «большой» массы называют *основанием* независимо от того, является ли оно защищаемым объектом или источником возбуждения.

Одноосный виброизолятор. В простейшем случае источник возбуждения и защищаемый объект считаются твердыми телами, движущимися вдоль одной и той же оси. На рис. 90, а показана динамическая модель машины, установленной на фундаменте. Машина с общей массой m является источником возбуждения, а фундамент — защищаемым объектом. Масса фундамента существенно больше массы машины, и потому он считается основанием. Виброизолятор, помещенный между машиной и фундаментом (основанием), имеет приведенный коэффициент жесткости s и приведенный коэффициент сопротивления b .

Приведенный коэффициент жесткости s определяется из условия равенства потенциальной энергии виброизо-

лятора и эквивалентной пружины и в общем случае может быть нелинейной функцией перемещения y , отсчитываемого от положения равновесия, определяемого постоянной составляющей внешней силы $F(t)$. Приведенный коэффициент сопротивления b определяется из условия равенства работ, затрачиваемых на трение

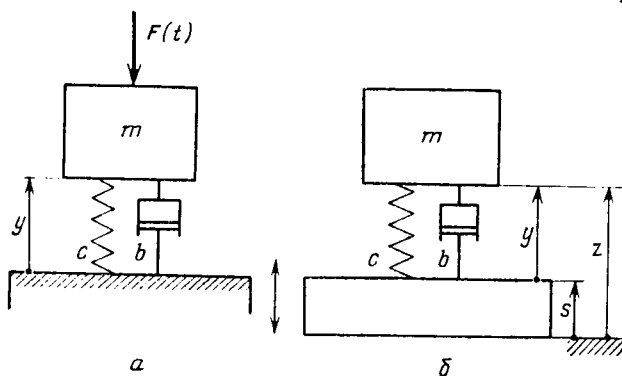


Рис. 90

в виброизоляторе и в эквивалентном демпфере, и в общем случае также может быть нелинейной функцией перемещения y и скорости $\dot{y}$.

Обобщенная (приведенная) реакция виброизолятора $\bar{Q}$ и внешняя сила $F(t)$ направлены вдоль одной и той же оси, совпадающей с направлением перемещения y , и потому виброизолятор называется *одноосным*.

Уравнение движения источника возбуждения, рассматриваемого как твердое тело, при указанных предположениях имеет вид

$$m\ddot{y} = F(t) + \bar{Q}(y, \dot{y}). \quad (15.1)$$

Назначение виброизолятора в этом случае состоит в уменьшении динамической (переменной) составляющей реакции $\bar{Q}$, передаваемой на основание (фундамент) при заданном воздействии переменной силы $F(t)$.

На рис. 90, б показан другой случай, при котором защищаемый объект представлен как твердое тело с массой m , а источником возбуждения является основание, совершающее колебания по закону $s(t)$. Задача виброизоляции здесь состоит в уменьшении динамической составляющей $\bar{Q}$, передаваемой на защищаемый объект.

Уравнение движения защищаемого объекта (механизма или машины) как твердого тела при колебаниях основания имеет вид

$$m[\ddot{y} + \ddot{s}(t)] = \bar{Q}(y, \dot{y}) \quad \text{или} \quad m\ddot{y} = -m\ddot{s}(t) + \bar{Q}(y, \dot{y}). \quad (15.2)$$

Виброзащитные системы, показанные на рис. 90, различают по виду возбуждения колебаний. В первом случае (см. рис. 90, а) колебания вызываются переменной силой $F(t)$ и возбуждение колебаний называется *силовым*. Во втором случае (см. рис. 90, б) колебания вызываются перемещением основания по заданному закону движения и возбуждение колебаний называется *кинематическим*. Уравнение движения (15.2) при кинематическом возбуждении совпадает с уравнением (15.1) при силовом возбуждении, если принять $\ddot{F}(t) = -m\ddot{s}$.

Колебания одноосного виброизолятора при силовом возбуждении. Уравнение движения (15.1) приводится к линейному, если принять, что приведенная реакция виброизолятора $\bar{Q}$ складывается из приведенной силы упругости, линейно зависящей от перемещения, и приведенной силы трения, линейно зависящей от скорости:

$$\bar{Q}(y, \dot{y}) = -cy - b\dot{y}. \quad (15.3)$$

Вводя обозначения $\lambda^2 = c/m$ и $2\gamma = b/m$, приводим уравнение (15.1) к виду

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{F(t)}{m}. \quad (15.4)$$

Пусть, например, внешняя сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону $F(t) = H \sin \omega t$. Тогда уравнение (15.4) имеет вид

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{H}{m} \sin \omega t, \quad (15.5)$$

совпадающий с уравнением (3.19) при $k_1 = H/m$, $x = \sin \omega t$.

Решение этого уравнения для установившихся вынужденных колебаний, т. е. после затухания собственных колебаний, согласно (3.30) получаем в виде

$$y = \frac{H}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta), \quad (15.6)$$

где θ — сдвиг фаз силы и перемещения, определяемый

выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}. \quad (15.7)$$

Дифференцирование выражения (15.6) дает

$$\dot{y} = \frac{H\omega}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta).$$

Подставляя y и $\dot{y}$ в (15.3), получаем силу, передаваемую виброизолятором на основание:

$$\tilde{Q} = -\frac{Hc}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \left[\sin(\omega t - \theta) + \frac{\omega b}{c} \cos(\omega t - \theta) \right]$$

или

$$\tilde{Q} = -K_{\text{дин}} H \left[\sin(\omega t - \theta) + \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2} \cos(\omega t - \theta) \right], \quad (15.8)$$

где $K_{\text{дин}}$ — коэффициент динамичности по перемещениям, равный отношению амплитуды вынужденных колебаний по (15.6) к максимальному перемещению H/c , вызываемому статическим действием силы

$$K_{\text{дин}} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Для определения максимального значения силы $\tilde{Q}$ преобразуем выражение (15.8), используя известное тригонометрическое соотношение

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varepsilon), \quad (15.9)$$

где $\varepsilon = \operatorname{arctg}(b/a)$.

При $a = 1$ и $b = 2\gamma\omega/\lambda^2$ имеем

$$\tilde{Q} = -K_{\text{дин}} H \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2\omega^2}{\lambda^4}} \sin(\omega t - \theta + \varepsilon),$$

где $\varepsilon = \operatorname{arctg}(2\gamma\omega/\lambda^2)$.

Следовательно, максимальное значение силы $\tilde{Q}$ равно

$$Q_{\text{max}} = K_{\text{дин}} H \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2\omega^2}{\lambda^4}}.$$

Отношение наибольшей силы, передаваемой основанию при силовом возбуждении, к амплитуде гармонической вынуждающей силы называется *коэффициентом пе-*

передачи силы K_c , который совпадает с коэффициентом динамичности по силам.

В нашем примере

$$K_c = \frac{Q_{\max}}{H} \equiv K_{\text{дин}} \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{\lambda^4}}$$

$$\text{или } K_c = \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2 v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}}, \quad (15.10)$$

где $v = \omega/\lambda$ — частотное отношение, $\beta = \gamma/\lambda$ — относительное демпфирование.

Коэффициент передачи сил характеризует качество виброзащитной системы. При жестком соединении источника возбуждения (машины) и основания (фундамента) $K_c = 1$; при $K_c < 1$ виброзащитная система эффективна, так как амплитуда силы, действующей на основание, уменьшается; при $K_c > 1$ применение виброизолятора нецелесообразно. График зависимости коэффициента передачи сил совпадает с графиком коэффициента динамичности по силам для механизмов с упругой муфтой (см. рис. 42). Из рассмотрения этого графика следует, что все кривые $K_c(\omega/\lambda)$, независимо от величины относительного демпфирования, пересекаются в точке с координатами $(\sqrt{2}, 1)$. Следовательно, для того чтобы максимальная величина силы $\bar{Q}$, передаваемой на основание, была меньше амплитуды вынуждающей силы, должно быть выполнено условие

$$\frac{\omega}{\lambda} > \sqrt{2}.$$

Обычно принимают $\omega/\lambda \geq 4$. Если сила $F(t)$ представлена суммой гармонических составляющих

$$\tilde{F}(t) = \sum_{k=1}^n F_k \cos(\omega_k t + \theta_k),$$

то под ω надо понимать наименьшую из частот силы ω_k . Отсюда следует, что для улучшения виброзащитных свойств линейного виброизолятора надо уменьшать собственную частоту λ , а следовательно, и коэффициент жесткости c . Подставляя в соотношение $(\omega/\lambda) \geq 4$ величину $\lambda^2 = c/m$, получаем условие для определения коэффициента жесткости

$$c \leq \omega^2 m / 16.$$

Увеличение демпфирования при $(\omega/\lambda) > \sqrt{2}$ ухудшает виброзащитные свойства виброизолятора (см. рис. 42). Поэтому считается достаточным слабое демпфирование, обеспечивающее затухание собственных колебаний.

Для оценки эффективности виброизоляции, кроме коэффициента передачи сил, используют также *коэффициент эффективности вибрационной защиты* *), под которым понимается отношение пикового или среднего квадратического значения величины, характеризующей колебания (перемещения, скорости, ускорения защищаемого объекта или воздействующей на него силы) до введения виброзащиты, к значению той же величины после введения виброзащиты. В рассматриваемом случае, т. е. при силовом возбуждении гармонических колебаний, коэффициент эффективности, определяемый по величине силы, передаваемой на основание, равен отношению амплитуды выпускающей силы к амплитуде силы, действующей на основание:

$$K_{\text{эф}} = \frac{H}{Q_{\text{max}}} \equiv \frac{1}{K_0}. \quad (15.11)$$

Колебания одноосного виброизолятора при кинематическом возбуждении. Рассмотрим теперь случай, когда колеблется основание по закону

$$s = A_s \sin \omega t. \quad (15.12)$$

Если приведенную реакцию виброизолятора определять по (15.3), то уравнение движения (15.2) принимает вид

$$m\ddot{y} = -m\ddot{s} - cy - by,$$

где y — перемещение защищаемого объекта относительно основания.

С учетом соотношения (15.12) получаем

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = A_s \omega^2 \sin \omega t, \quad (15.13)$$

где $2\gamma = b/m$ и $\lambda^2 = c/m$.

Уравнение движения (15.13) совпадает с уравнением (15.5) при условии, что $H = mA_s \omega^2$. Используя решение (15.6) и принимая во внимание, что абсолютное перемещение защищаемого объекта z есть сумма перемещения

*) ГОСТ 24346—80 (СТ СЭВ 1926—79). Вибрация. Термины и определения. — М.: Издательство стандартов, 1980.

основания s и относительного перемещения y , получаем

$$z = \frac{A_s \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta) + A_s \sin \omega t.$$

При слабом демпфировании и $\lambda < \omega$ имеем

$$z = A_s \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \lambda^2} \right] \sin \omega t.$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний защищаемого объекта относительно неподвижной системы координат может быть как угодно малой в случае, если его частота собственных колебаний на виброизоляторе мала по сравнению с частотой колебаний основания.

Коэффициентом передачи при кинематическом возбуждении называют отношение максимального ускорения защищаемого объекта к максимальному ускорению основания, т. е. при кинематическом возбуждении коэффициент передачи совпадает с *коэффициентом динамичности по ускорениям*

$$K_c \equiv K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{z}|_{\max}}{|\ddot{s}|_{\max}}. \quad (15.14)$$

Для определения $\ddot{z}$ предварительно преобразуем выражение z к виду, содержащему только тригонометрические функции аргумента $\omega t - \theta$:

$$z = \frac{A_s \omega^2 \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} + A_s \cos \theta \sin(\omega t - \theta) + A_s \sin \theta \cos(\omega t - \theta). \quad (15.15)$$

Тригонометрические функции $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в соответствии с выражением для $\text{tg } \theta$ (15.7) имеют вид:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{tg } \theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \equiv \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \equiv \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (15.15), получаем

$$z = \frac{A_s}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} [\lambda^2 \sin(\omega t - \theta) + 2\gamma\omega \cos(\omega t - \theta)]$$

или с учетом (15.9)

$$z = A \sin(\omega t - \theta + \varepsilon),$$

где $A = A_s \sqrt{\frac{\lambda^4 + 4\gamma^2 \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\gamma \omega}{\lambda^2}.$

Следовательно, коэффициент передачи при кинематическом возбуждении

$$K_c = \frac{A \omega^2}{A_s \omega^2} \equiv \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2 v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}} \quad (15.16)$$

совпадает с коэффициентом передачи при силовом возбуждении. Из (15.16) следует также, что коэффициент передачи при кинематическом возбуждении можно определять так же, как отношение амплитуды перемещения защищаемого объекта к амплитуде основания.

Различают абсолютный коэффициент передачи, определяемый по (15.16), и относительный коэффициент передачи, определяемый как отношение амплитуды перемещения защищаемого объекта в движении относительно основания к амплитуде основания

$$K_{\text{отн}} = \frac{y_{\max}}{A_s} \equiv \frac{\omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \equiv \frac{v^2}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}}. \quad (15.17)$$

Коэффициент эффективности определяется по абсолютному коэффициенту передачи

$$K_{\text{эф}} = \frac{1}{K_c}. \quad (15.18)$$

Двухкаскадная виброизоляция. При высокочастотных колебаниях, т. е. при $\omega \gg \lambda$, или, что то же, при $v \gg 1$, коэффициент передачи силы по формуле (15.10) принимает значение

$$K_c = \frac{\sqrt{1 + 4\beta^2 v^2}}{v^2}.$$

При отсутствии демпфирования ($\beta = 0$) коэффициент передачи силы $K_c = 1/v^2$, т. е. виброизоляция на высоких частотах, является достаточно эффективной. Однако эффективность виброизоляции на этих частотах может быть еще повышена, если применить двухкаскадную виброизоляцию, схема которой показана на рис. 91 [9].

Уравнения движения системы при силовом гармоническом возбуждении $F = H \sin \omega t$ имеют вид

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (y_1 - y_2) = H \sin \omega t,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_1 (y_1 - y_2) + c_2 y_2 = 0.$$

Установившиеся вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы описываются решением

$$y_1 = A_1 \sin \omega t, \quad y_2 = A_2 \sin \omega t.$$

Подставляя это решение в систему уравнений движения, получаем после сокращения на множитель $\sin \omega t$:

$$-m_1 A_1 \omega^2 + c_1 (A_1 - A_2) = H,$$

$$m_2 A_2 \omega^2 - c_1 (A_1 - A_2) = 0.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{H(c_1 - m_2 \omega^2 + c_2)}{\Delta}; \quad A_2 = \frac{H c_1}{\Delta},$$

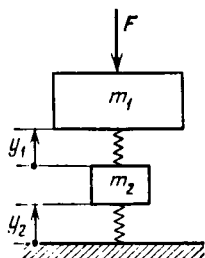


Рис. 91

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов при A_1 и A_2 в системе уравнений движения:

$$\Delta = (c_1 - m_1 \omega^2)(c_1 - m_2 \omega^2 + c_2) - c_1^2.$$

Сила, передаваемая на фундамент, $Q = -c_2 y_2$, а ее максимальное значение $Q_{\max} = c_2 H c_1 / \Delta$. Следовательно, коэффициент передачи силы

$$K_c = \frac{Q_{\max}}{H} = \frac{c_2 c_1}{\Delta}$$

или

$$K_c = \frac{c_2 c_1}{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 [m_1 (c_1 + c_2) + m_2 c_1] + c_2 c_1}.$$

При больших значениях ω имеем

$$K_c \approx \frac{c_2 c_1}{\omega^4 m_1 m_2} = \frac{c_1}{m_1 \omega^2} \cdot \frac{c_2}{m_2 \omega^2},$$

т. е. коэффициент передачи силы при двухкаскадной виброизоляции равен произведению коэффициентов передачи силы для каждого каскада. Отсюда следует, что для повышения эффективности виброизоляции надо удовлетворить условию $c_2 / m_2 < \omega^2$. В частном случае при

$c_1/m_1 = c_2/m_2$ получаем $K_{c2} = K_{c1}^2$, где K_{c2} — коэффициент передачи силы при двухкаскадной виброизоляции, K_{c1} — при однокаскадной.

Учет демпфирования при больших значениях ω не изменяет существенно выводов об эффективности двухкаскадной виброизоляции.

§ 54. Нелинейный виброизолятор

Особенности нелинейного виброизолятора. Возникновение нелинейностей в системах виброизоляции связано в первую очередь с повышением уровня колебаний и увеличением размеров виброизоляторов в современных машинах. Известно, что любой реальный виброизолятор может иметь линейную упругую характеристику только на некотором участке изменения величины деформации. С увеличением силы, действующей на виброизолятор, увеличивается величина его хода (максимального перемещения), и рабочий участок упругой характеристики выходит за пределы линейного участка. При больших величинах сил, действующих на виброизолятор, и необходимости ограничения его хода умышленно приходится выполнять упругую характеристику нелинейной.

При больших нагрузках на виброизолятор нелинейной становится и характеристика эквивалентного демпфера, выражающая зависимость силы сопротивления от скорости перемещения виброизолятора. Эта нелинейность особенно ярко проявляется при увеличении демпфирования, которое становится необходимым в тех случаях, когда не удается избежать резонанса. Уравнение движения защищаемого объекта после его линеаризации обычно имеет вид, сходный с видом уравнения (8.21). Характерной особенностью решения этого уравнения является зависимость квадрата собственной частоты от амплитуды, изображаемой скелетной кривой (см. рис. 45), и, как следствие, наклон амплитудно-частотной характеристики в области резонансных частот. На рис. 92 для одного из типов нелинейных виброизоляторов показана скелетная кривая (штриховая линия) и амплитудно-частотная характеристика 12. В отличие от характеристики, показанной на рис. 45, здесь, кроме основной ветви 1, имеется дополнительная ветвь 2. Поэтому при одной и той же частоте ω может быть несколько установившихся колебательных режимов с различными амплитудами не

только из-за наклона амплитудно-частотной характеристики (частота ω_*), но также из-за дополнительной ветви (частота ω_{**}). Во избежание появления этих режимов увеличивают демпфирование.

Режимы движения с ударами об опоры. Как уже указывалось при рассмотрении линейного виброизолято-

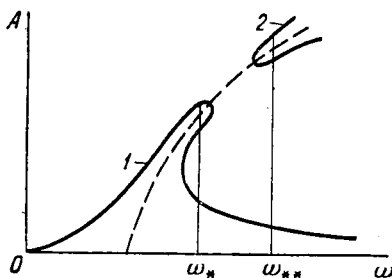


Рис. 92

ра, для повышения эффективности виброзащиты надо уменьшать собственную частоту системы. Это уменьшение может быть достигнуто или увеличением массы m , или уменьшением коэффициента жесткости c . Для увеличения общей массы машины, установленной на фундаменте, иногда вводят дополнительную железобе-

тонную плиту, жестко связанную с машиной. Виброизоляторы в этом случае помещаются между плитой и фундаментом. Чаще, однако, уменьшают коэффициент жесткости виброизоляторов, т. е. увеличивают их податливость.

Увеличение податливости виброизолятора делает его более чувствительным к изменению внешних воздействий. При внезапном увеличении вынуждающей силы или амплитуды кинематического возбуждения податливый виброизолятор начинает совершать колебания с амплитудами, значительно превосходящими допустимые по условиям конструктивного размещения виброизолятора. Для ограничения амплитуд колебаний устанавливаются верхний и нижний упоры, которые в положении статического равновесия виброизолятора находятся на равных расстояниях d от этого положения. В этом случае зависимость реакции виброизолятора Q от относительного перемещения y является нелинейной, так как жесткость упоров значительно больше жесткости пружины (рис. 93).

Расстояние d должно быть выбрано так, чтобы после удара о какой-либо упор не возникал непрерывный режим с ударами об упоры. Условие отсутствия этого режима получим для кинематического возбуждения колебаний без демпфирования, считая, что упоры являются весьма жесткими и удар о них определяется коэффициентом восстановления скорости. Кроме того, считаем, что

за один период колебаний происходит по одному удару о верхний и нижний упоры. Тогда при кинематическом возбуждении с угловой частотой ω график изменения перемещения y при движении между упорами получает вид, показанный на рис. 94, если принять, что момент $t = 0$ совпадает с моментом отскока от нижнего упора.

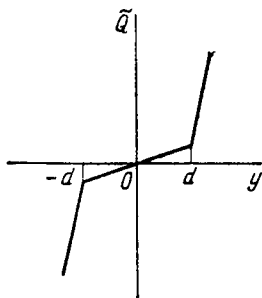


Рис. 93

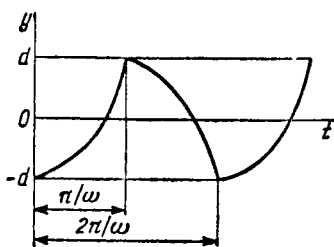


Рис. 94

Для каждого удара скорость после удара равна скорости удара, умноженной на коэффициент восстановления k . Кроме того, из условий симметрии скорость удара о верхний упор равна скорости удара о нижний упор. Отсюда получаем соотношение между скоростью отскока от нижнего упора при $t = 0$ и скоростью удара о верхний упор при $t = \pi/\omega$:

$$(\dot{y})_{t=0} = k(\dot{y})_{t=\pi/\omega}. \quad (15.19)$$

При кинематическом возбуждении по закону $s = A \sin(\omega t + \theta)$ уравнение движения защищаемого объекта между упорами при отсутствии демпфирования имеет вид

$$m(\ddot{y} + \xi) = -cy \quad \text{или} \quad \ddot{y} + \lambda^2 y = A\omega^2 \sin(\omega t + \theta), \quad (15.20)$$

где m — масса защищаемого объекта, $\lambda = \sqrt{c/m}$ — собственная частота виброизолятора.

Частное решение уравнения (15.20) найдем, положив

$$y = A \sin(\omega t + \theta).$$

Двукратное дифференцирование по времени дает

$$\ddot{y} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta).$$

Подставляя выражения для y и $\ddot{y}$ в уравнение (15.20), получаем после сокращений

$$A = \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Общее решение уравнения (15.20) находим как сумму решений однородного уравнения (без правой части) и частного решения:

$$y = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \theta). \quad (15.21)$$

Это решение будет соответствовать показанному на рис. 94 режиму с ударами об упоры, если учесть соотношение (15.19) и граничные условия $t=0$, $y=-d$; $t=\pi/\omega$, $y=d$. Из граничных условий имеем:

$$-d = C_1 + \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \theta,$$

$$d = C_1 \cos \frac{\pi \lambda}{\omega} + C_2 \sin \frac{\pi \lambda}{\omega} + \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\pi + \theta).$$

Отсюда находим постоянные C_1 и C_2 :

$$C_1 = -d - \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \theta, \quad C_2 = -C_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda}{2\omega}.$$

Дифференцирование по времени обеих частей уравнения (15.21) дает

$$\dot{y} = -C_1 \lambda \sin \lambda t + C_2 \lambda \cos \lambda t + \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta).$$

Следовательно, соотношение (15.19) имеет вид

$$C_2 \lambda + \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \theta =$$

$$= k \left[-C_1 \lambda \sin \frac{\pi \lambda}{\omega} + C_2 \lambda \cos \frac{\pi \lambda}{\omega} + \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \cos(\pi + \theta) \right]$$

или

$$(1 + k) \frac{A_s \omega^3}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \theta =$$

$$= C_1 \lambda \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda}{2\omega} - k \sin \frac{\pi \lambda}{\omega} - k \cos \frac{\pi \lambda}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda}{2\omega} \right).$$

Подставляя выражение для C_1 , получаем соотношение между d и θ :

$$d = \frac{-A_s \omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \left[\frac{(1+k) \omega \cos \theta}{\lambda \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda}{2\omega} - k \sin \frac{\pi \lambda}{\omega} - k \cos \frac{\pi \lambda}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda}{2\omega} \right)} + \sin \theta \right],$$

или

$$d = \frac{A_s \omega^2}{\omega^2 - \lambda^2} \left[\frac{(1+k) \omega \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda}{2\omega}}{\lambda (1-k)} \cos \theta + \sin \theta \right]. \quad (15.22)$$

Правая часть соотношения (15.22) есть функция угла θ . Максимальное ее значение d_0 достигается при угле $\theta = \theta_m$, удовлетворяющем условию

$$\frac{d}{d\theta} (B \cos \theta + \sin \theta) = 0,$$

где $B = \frac{(1+k) \omega \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda}{2\omega}}{\lambda (1-k)}.$

Отсюда: $\operatorname{tg} \theta_m = 1/B$, $\cos \theta_m = B/\sqrt{1+B^2}$, $\sin \theta_m = 1/\sqrt{1+B^2}$.

Подставляя значения $\cos \theta_m$ и $\sin \theta_m$ в соотношение (15.22), получаем

$$d_0 = \frac{A_s \omega^2}{\omega^2 - \lambda^2} \sqrt{1+B^2}$$

или

$$d_0 = \frac{A_s \omega^2}{|\omega^2 - \lambda^2|} \sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \frac{\omega^2}{\lambda^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \lambda}{2\omega} + 1}. \quad (15.23)$$

Следовательно, режим с ударами об упоры может быть только при $d \leq d_0$, и во избежание ударов следует выбирать значения зазоров d из условия $d > d_0$. С учетом трения значение d_0 несколько уменьшается. Для уменьшения зазора d рекомендуется уменьшать коэффициент восстановления k , используя материалы с большим поглощением энергии.

§ 55. Виброизоляция при ударном воздействии

В общем случае под ударным воздействием понимается воздействие бесконечно большой силы в течение бесконечно малого интервала времени, вызывающее изменение количества движения системы на конечную ве-

личину. Мерой ударного воздействия считается мгновенный импульс силы

$$S = \lim_{t_y \rightarrow 0} F t_y,$$

где t_y — время удара.

При исследовании ударных воздействий на виброизолятор в первом приближении пренебрегают демпфированием, а коэффициент жесткости считают постоянным. Тогда уравнение движения защищаемого объекта (15.1) можно представить в виде

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \frac{1}{m} \tilde{F}(t),$$

где $\lambda^2 = c/m$.

Пусть в момент $t = \xi$ к покоящейся системе приложен мгновенный импульс S . После приложения импульса система совершает свободные колебания

$$y = C_1 \sin \lambda(t - \xi) + C_2 \cos \lambda(t - \xi). \quad (15.24)$$

В начальный момент времени перемещение $y = 0$, а скорость $\dot{y}$ находится по теореме об изменении количества движения $m\dot{y} = S$. С учетом этих начальных условий получаем: $C_2 = 0$, $C_1 = S/(m\lambda)$. Следовательно, свободные колебания защищаемого объекта после ударного воздействия в рассматриваемом случае совершаются по гармоническому закону

$$y = \frac{S}{m\lambda} \sin \lambda(t - \xi) \quad \text{или} \quad y = R(t, \xi) S, \quad (15.25)$$

где $R(t, \xi) = \sin \lambda(t - \xi)/(m\lambda)$ — функция, описывающая движение, вызываемое единичным импульсом (импульсная реакция системы).

Максимальная величина силы, передаваемой на основание,

$$Q_{\max} = c \frac{S}{m\lambda} \equiv \lambda S, \quad (15.26)$$

т. е. для уменьшения $Q_{\max}$ надо уменьшать собственную частоту. Однако при этом согласно (15.25) увеличивается амплитуда колебаний.

Ударным воздействием при расчете виброизоляторов считается не только мгновенный импульс, но и воздействие сравнительно большой силы за конечный промежуток времени $t = t_y$, называемый *длительностью удара*.

Зависимость силы F , действующей на защищаемый объект, от времени t при ударе называют *формой удара*. Эту зависимость можно представить как бесконечную последовательность элементарных импульсов $\tilde{F}(\xi) d\xi$. Подставив в (15.25) $dS = \tilde{F}(\xi) d\xi$, получим перемещение, вызываемое действием одного элементарного импульса

$$dy = \frac{\tilde{F}(\xi)}{m\lambda} \sin \lambda(t - \xi) d\xi.$$

Суммируя влияние всех элементарных импульсов на участке от 0 до t , получаем

$$y = \frac{1}{m\lambda} \int_0^t \tilde{F}(\xi) \sin \lambda(t - \xi) d\xi. \quad (15.27)$$

Все основные особенности динамики виброизолятора проявляются при простейшей форме удара, называемой *прямоугольной формой*:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t) &= F_m = \text{const} & \text{при } t \leq t_y \\ \tilde{F}(t) &= 0 & \text{при } t > t_y. \end{aligned}$$

При $t \leq t_y$ интегрирование выражения (15.27) дает

$$y = \frac{F_m}{m\lambda} \int_0^t \sin \lambda(t - \xi) d\xi = \frac{F_m}{\lambda^2 m} \cos \lambda(t - \xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t}.$$

Отсюда

$$y = \frac{F_m}{c} (1 - \cos \lambda t). \quad (15.28)$$

При $t > t_y$, разбивая промежуток времени на две части, получим

$$y = \frac{1}{m\lambda} \int_0^{t_y} F(\xi) \sin \lambda(t - \xi) d\xi + \frac{1}{m\lambda} \int_{t_y}^t F(\xi) \sin \lambda(t - \xi) d\xi.$$

Второй интеграл обращается в нуль, так как $F(t) = 0$ при $t > t_y$, а первый интеграл дает

$$y = \frac{F_m}{m\lambda^2} \cos \lambda(t - \xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t_y}.$$

Отсюда

$$y = \frac{F_m}{c} [\cos \lambda(t - t_y) - \cos \lambda t]. \quad (15.29)$$

Силу упругости виброизолятора, передаваемую на основание, получим после умножения на коэффициент жесткости s перемещения y , определяемого по (15.28) и (15.29):

$$Q = F_m(1 - \cos \lambda t) \quad \text{при } t \leq t_y,$$

$$Q = F_m[\cos \lambda(t - t_y) - \cos \lambda t] \quad \text{при } t > t_y.$$

Если $\lambda t_y \geq \pi$, то максимум силы $\tilde{Q}$, равный $2F_m$, достигается при $\lambda t = \pi$. Если же $\lambda t_y < \pi$, то максимум

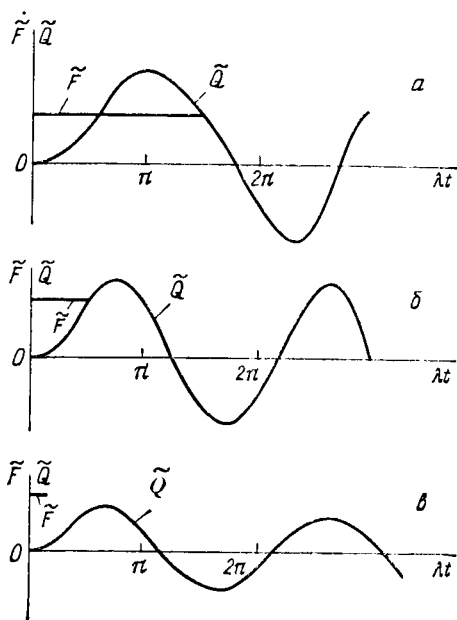


Рис. 95

силы $\tilde{Q}$ достигается при $\lambda t = (\pi + \lambda t_y)/2$ и его величина

$$Q_{\max} = 2F_m \sin \frac{\lambda t_y}{2}.$$

Отношение максимального значения силы, передаваемой на основание, к максимальному значению силы удара $F_{\max}$ называется *коэффициентом динамичности при ударе*

$$K_y = \frac{Q_{\max}}{F_{\max}}.$$

Для удара прямоугольной формы

$$\begin{aligned} K_y &= 2 && \text{при } \lambda t_y \geq \pi, \\ K_y &= 2 \sin \frac{\lambda t_y}{2} && \text{при } \lambda t_y < \pi. \end{aligned} \quad (15.30)$$

Параметры виброизолятора должны быть подобраны так, чтобы коэффициент динамичности при ударе был меньше 1. Из (15.30) следует, что это условие обеспечивается при $\lambda t_y < \pi/3$, т. е. собственную частоту λ для уменьшения силы $Q_{\max}$ надо уменьшать, как и при действии мгновенного импульса.

На рис. 95, а показаны графики сил F и Q для случая, когда $\lambda t_y > \pi$ (*длительный удар*), и максимум силы упругости достигается при $\lambda t_y = \pi$. На рис. 95, б те же графики показаны для случая, когда $\lambda t_y < \pi$ (*короткий удар*), но коэффициент динамичности все же остается больше 1. Наконец, на рис. 95, в показаны графики F и Q для случая $\lambda t_y < \pi/3$, и коэффициент динамичности меньше 1.

§ 56. Виброизоляция при случайном воздействии

Определение вероятностных характеристик перемещений в одноосном виброisolаторе. Перемещения y в одноосном виброisolаторе связаны с изменением силы $F(t)$ дифференциальным уравнением, которое следует из (15.4):

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{1}{m} \tilde{F}(t). \quad (15.31)$$

При случайном воздействии сила $F(t)$ является случайной функцией времени, вероятностные характеристики которой будем считать известными. Требуется определить вероятностные характеристики перемещений, т. е. обобщенной координаты y .

Пусть, например, из опытных данных установлено, что математическое ожидание функции $F(t)$ (средневероятностное значение) может быть представлено функцией

$$F(t) = H \sin \omega t. \quad (15.32)$$

Из тех же опытных данных получено, что спектральная плотность дисперсии S_F равна постоянной величине S_0 в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и равна нулю при $\omega > \omega_0$.

Соответственно дисперсия случайного воздействия $\sigma_{u_F}^2$ по (6.44) равна постоянной величине $S_0\omega_0$ в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и равна нулю при $\omega > \omega_0$. Частота ω_0 иногда называется *частотой среза*.

Переходя к центрированной случайной функции $F^0(t)$, т. е. к функции, значения которой отсчитываются от ее средневероятностного значения (математического ожидания), получаем, что вероятностные характеристики силы $F(t)$ описываются стационарным случайным процессом с математическим ожиданием $m_{u_F} = 0$ и дисперсией $\sigma_{u_F}^2$, равной $S_0\omega_0$ в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и равной нулю при $\omega > \omega_0$ (*ограниченный белый шум*).

Математическое ожидание центрированной случайной функции, выражающей обобщенную координату y , на основании свойств стационарного процесса $m_{u_y} = 0$, т. е. средневероятностное обобщенной координаты y (математическое ожидание нецентрированной случайной функции), определяется решением уравнения (15.31) при $F(t) = H \sin \omega t$.

Согласно (15.6) имеем

$$y = \frac{H}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin(\omega t - \theta). \quad (15.33)$$

Для определения дисперсии этой случайной функции предварительно найдем ее спектральную плотность S_y по (6.45)

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= |W(i\omega)|^2 S_0 \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ S_y(\omega) &= 0 \quad \text{при } \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

Для уравнения движения (15.31) частотная передаточная функция $W(i\omega)$ найдется из соотношения (5.9) при $a = m$:

$$W(i\omega) = \frac{1}{m(-\omega^2 + 2\gamma i + \lambda^2)}$$

$$\text{или } W(i\omega) = \frac{\lambda^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}{m[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}.$$

Модуль частотной передаточной функции

$$|W(i\omega)| = \frac{1}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

В рассматриваемом примере это выражение может быть получено также как отношение амплитуд обобщенной координаты y и силы $F(t)$. Следовательно, спектральная плотность перемещений

$$S_y(\omega) = \frac{S_0}{m^2[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]} \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_0,$$

$$S_y(\omega) = 0 \quad \text{при } \omega > \omega_0.$$

Дисперсия перемещений, т. е. изменений обобщенной координаты y , находится по (6.44)

$$\sigma_{u_y}^2 = \frac{S_0}{m^2} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$\text{или } \sigma_{u_y}^2 = \frac{S_0}{m^2\lambda^4} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma\omega}{\lambda^2}\right)^2}.$$

Принимая во внимание, что $\lambda^2 = c/m$, и вводя обозначение $v = \omega/\lambda$, получаем

$$\sigma_{u_y}^2 = \frac{S_0\lambda}{c^2} \int_0^{\omega_0/\lambda} \frac{dv}{(1 - v^2)^2 + (2\gamma/\lambda)^2 v^2}. \quad (15.34)$$

На рис. 96 показан график изменения дисперсии $\sigma_{u_y}^2$ в зависимости от отношения частоты среза к собственной частоте $v_0 = \omega_0/\lambda$. График построен на основании табличного вычисления интеграла (15.34). Из этого графика следует, что в отличие от дисперсии силы $S_0\omega_0$, которая стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$, дисперсия перемещений стремится к конечной величине

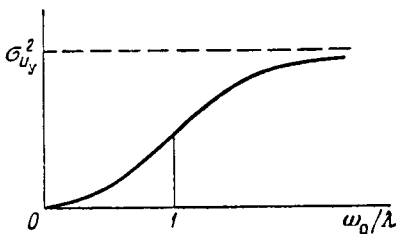


Рис. 96

$$(\sigma_{u_y}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{4} \frac{S_0\lambda^2}{c^2\gamma} \equiv \frac{\pi S_0}{2bc}, \quad (15.35)$$

где b — коэффициент сопротивления в уравнении (15.31).

Максимальная дисперсия перемещений, а следовательно и среднеквадратическое отклонение от значения обобщенной координаты по (15.33), оказывается тем меньше, чем больше жесткость пружины c и коэффициент сопротивления b .

Определение вероятностных характеристик обобщенной скорости. Частотная передаточная функция для обобщенной скорости $W_v(i\omega)$ есть отношение производной по времени комплексной амплитуды гармонических колебаний к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы. В рассматриваемом примере модуль частотной передаточной функции для обобщенной скорости может быть определен как отношение амплитуды обобщенной скорости $\dot{y}$ к амплитуде обобщенной силы H . После дифференцирования по времени выражения (15.33) получаем, что амплитуда обобщенной скорости

$$A_v = \frac{H\omega}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Следовательно, модуль частотной передаточной функции для обобщенной скорости

$$|W_v(i\omega)| = \omega |W(i\omega)|.$$

Спектральная плотность дисперсии обобщенной скорости

$$S_v(\omega) = |W_v(i\omega)|^2 S_F(\omega) \quad \text{или} \quad S_v(\omega) = \omega^2 S_y(\omega).$$

Дисперсия обобщенной скорости

$$\sigma_{u_v}^2 = \int_0^{\omega_0} S_v(\omega) d\omega.$$

После вычисления этого интеграла можно установить, что при $\omega_0 \rightarrow \infty$ дисперсия обобщенной скорости остается ограниченной и стремится к величине

$$(\sigma_{u_v}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{S_0 \lambda^4}{c^2 \gamma} \equiv \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{m b}. \quad (15.36)$$

Максимальная дисперсия обобщенной скорости в отличие от максимальной дисперсии перемещений зависит от массы объекта m .

Определение вероятностных характеристик силы воздействия на основание. Согласно (15.3) сила, передаваемая

мая на основание, или, что то же, приведенная реакция виброизолятора имеет вид

$$\bar{Q} = -cy - b\dot{y}.$$

В рассматриваемом примере модуль частотной передаточной функции для силы $\bar{Q}$ может быть определен как отношение амплитуды силы $\bar{Q}$ к амплитуде обобщенной силы H . Это отношение совпадает с коэффициентом передачи сил при силовом возбуждении. Согласно (15.10) имеем

$$|W_Q(i\omega)| = \sqrt{\frac{\lambda^4 + 4\gamma^2\omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Следовательно, спектральная плотность дисперсии силы $\bar{Q}$ в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$

$$S_Q = |W(i\omega)|^2 S_F \equiv S_0 \frac{\lambda^4 + 4\gamma^2\omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

или

$$S_Q = c^2 S_y + b^2 S_v.$$

Отсюда дисперсия силы Q , передаваемой на основание,

$$\sigma_{u_Q}^2 = c^2 \sigma_{u_y}^2 + b^2 \sigma_{u_v}^2.$$

При $\omega_0 \rightarrow \infty$ после подстановок (15.35) и (15.36) имеем

$$(\sigma_{u_Q}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{\pi S_0}{4} \lambda \left(\frac{\lambda}{\gamma} + 4 \frac{\gamma}{\lambda} \right). \quad (15.37)$$

Из (15.37) видно, что дисперсия силы $\bar{Q}$, передаваемой на основание, зависит от коэффициента демпфирования γ . При $\gamma \rightarrow 0$ и при $\gamma \rightarrow \infty$ дисперсия силы $\bar{Q}$ возрастает неограниченно. Минимальное значение дисперсии силы $\bar{Q}$ имеет при $\gamma = \lambda/2$. В этом случае

$$(\sigma_{u_Q}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \pi S_0 \lambda. \quad (15.38)$$

Следовательно, при случайном возбуждении типа белого шума (это возбуждение иногда называют широкополосным) для уменьшения дисперсии силы, передаваемой на основание, надо выполнить соотношение $\gamma = \lambda/2$ или $b = \lambda m$. Кроме того, согласно (15.38) дисперсия уменьшается с уменьшением собственной частоты λ .

Отсюда следует, что эффективность виброизоляции повышается с уменьшением собственной частоты (уменьшением коэффициента жесткости c) и с увеличением коэффициента демпфирования до значения $\gamma = \lambda/2$.

§ 57. Управляемые системы виброизоляции

Электрогидравлическая виброзащитная система. Управляемыми или активными системами называют те системы виброизоляции, в которых эффективность защиты от колебаний достигается компенсацией вынуждающих сил (управление по возмущению) или перемещений (управление по отклонению). На рис. 97, а показана схема

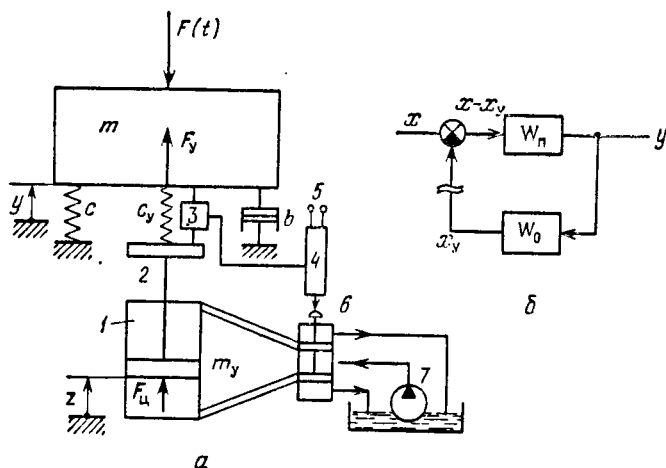


Рис. 97

электрогидравлической виброзащитной системы, предназначенной для уменьшения перемещений y объекта с общей массой m относительно неподвижного основания. Источником возбуждения колебаний является переменная сила $F(t)$. Между объектом и основанием помещен одноосный виброизолятор с приведенным коэффициентом жесткости c и приведенным коэффициентом сопротивления b . Управляющее воздействие F_y создается силовым гидроцилиндром 1, поршень которого действует на объект через упругую прокладку 2 с коэффициентом жесткости c_y . Движение поршня силового гидроцилиндра уп-

равляется по сигналу от датчика 3 относительных перемещений объекта и поршня. Этот сигнал подается в усилитель 4 с электрическим питанием 5. Усилитель вырабатывает сигнал, управляющий движением золотника 6, который регулирует подачу жидкости от насоса 7 в силовой гидроцилиндр. В среднем положении золотника перекрыты оба трубопровода, ведущие в силовой гидроцилиндр. При движении золотника вверх жидкость под давлением поступает в верхнюю полость силового гидроцилиндра и его поршень идет вниз. Соответственно, при движении золотника вниз — поршень идет вверх. Перемещение поршня z вызывает изменение силы упругости $F_y = c_y(y - z)$, действующей на объект со стороны упругой прокладки. При надлежащем выборе параметров виброзащитной системы сила F_y противодействует вынуждающей силе $F(t)$ и уменьшает перемещения y . Эту силу называют *управляющим воздействием*.

Неголономная связь в электрогидравлической виброзащитной системе. За обобщенные координаты системы примем перемещения y и z , отсчитываемые от положения статического равновесия. Переменные y и z связаны уравнением обратной связи, выражающим зависимость скорости поршня $\dot{z}$ от перемещения y . Эта зависимость определяется изменением расхода жидкости Q_p , поступающей в силовой цилиндр через окна золотника:

$$Q_p = S_{\pi} \dot{z}, \quad (15.39)$$

где S_{π} — эффективная площадь поршня.

Допустим, что профиль окон золотника таков, что расход жидкости, поступающей в силовой цилиндр, прямо пропорционален отклонению золотника от среднего положения z_0 :

$$Q_p = k_z \dot{z}_0, \quad (15.40)$$

где k_z — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров золотника.

Кроме того, примем, что электрическая часть системы обеспечивает прямую пропорциональность перемещений золотника и относительных перемещений $\varphi = y - z$, регистрируемых датчиком 3:

$$z_0 = k_{\varphi} (y - z), \quad (15.41)$$

где k_{φ} — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров настройки электрической части. Тогда из

соотношений (15.39), (15.40) и (15.41) имеем

$$\dot{z} = k(y - z), \quad (15.42)$$

где $k = k_z k_\phi / S_\pi$.

Уравнение дифференциальной связи (15.42) не интегрируется, т. е. не может быть сведено к уравнению геометрической связи между y и z . Следовательно, уравнение (15.42) выражает неголономную связь.

Уравнение движения электрогидравлической виброзащитной системы. Для механической системы с неголономными связями число степеней свободы равно разности между числом обобщенных координат и числом уравнений неголономных связей. В рассматриваемой системе две обобщенные координаты (y и z) и одно уравнение неголономной связи (15.42). Следовательно, число степеней свободы равно единице. Число уравнений движения неголономной системы принимается равным числу степеней свободы, т. е. для электрогидравлической системы должно быть одно уравнение движения, которое можно составить или относительно обобщенной координаты y , или относительно обобщенной координаты z .

Для составления уравнений движения неголономной системы, как уже указывалось в § 9, нельзя использовать обычные уравнения Лагранжа второго рода, а следует применять их обобщение, известное под названием уравнений Лагранжа с неопределенными множителями, или же пользоваться уравнениями кинетостатики. В рассматриваемой системе уравнения кинетостатики для массы m и для поршня силового гидроцилиндра имеют вид

$$F(t) - cy - c_r(y - z) - b\dot{y} - m\ddot{y} = 0, \quad (15.43)$$

$$c_r(y - z) - F_\pi - m_r\ddot{z} = 0, \quad (15.44)$$

где m_y — масса поршня и жестко связанных с ним частей, F_π — сила давления жидкости на поршень.

Система уравнений (15.42), (15.43) и (15.44) связывает три переменные величины: y , z и F_π . Заметим, что сила давления на поршень F_π является переменной даже при постоянном давлении жидкости на выходе из насоса, так как уравнение неголономной связи (15.42) выполняется только при соответствующем изменении перепада давления между золотником и силовым гидроцилиндром. На этом основании силу F_π можно назвать также реакцией неголономной связи,

Для составления уравнения движения относительно координаты y удобно применить подстановку $\varphi = y - z$. Тогда система уравнений (15.42), (15.43) и (15.44) принимает вид

$$\ddot{y} - \ddot{\varphi} = k\varphi, \quad (15.45)$$

$$F(t) - cy - c_y\varphi - b\dot{y} - m\ddot{y} = 0, \quad (15.46)$$

$$c_y\varphi - F_n - m_y k\varphi = 0. \quad (15.47)$$

Из уравнения (15.46) имеем

$$c_y\varphi = F(t) - cy - b\dot{y} - m\ddot{y}. \quad (15.48)$$

После дифференцирования по времени обеих частей этого уравнения получаем

$$c_y\dot{\varphi} = \dot{F}(t) - c\dot{y} - b\ddot{y} - m\ddot{\ddot{y}}. \quad (15.49)$$

Подставляя φ и $\dot{\varphi}$ из (15.48) и (15.49) в уравнение (15.45), получаем уравнение движения системы относительно координаты y в виде линейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$m\ddot{\ddot{y}} + (b + km)\ddot{\ddot{y}} + (c + c_y + kb)\dot{\ddot{y}} + cky = kF(t) + \dot{F}(t). \quad (15.50)$$

После определения переменной y из уравнения движения (15.50) находим переменную φ из уравнения (15.45) и силу давления на поршень F_n из (15.47).

Для решения уравнения (15.50) по операторному методу выполняем преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях, обозначая изображение переменной y через Y и переменной $\dot{F}(t)$ через X :

$$[ms^3 + (b + km)s^2 + (c + c_y + bk)s + ck]Y = (k + s)X$$

или

$$Y = W X,$$

где динамическая передаточная функция

$$W = \frac{k + s}{ms^3 + (b + km)s^2 + (c + c_y + bk)s + ck}. \quad (15.51)$$

Пусть, например, сила $F(t)$ изменяется по закону $F = H \sin \omega t$. Тогда по табл. 1 (п. 3 с заменой λ на ω)

получаем изображение силы $F(t)$:

$$X = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Изображение функции y находим умножением X на передаточную функцию W :

$$Y = \frac{\omega(k+s)}{(s^2 + \omega^2)[ms^3 + (b+km)s^2 + (c+c_y+bk)s + ck]}.$$

Для отыскания оригинала y по его изображению Y можно использовать подробные таблицы оригиналов и изображений, аналогичные табл. 1*). Однако для оценки эффективности управляемой виброзащитной системы нет надобности иметь решение уравнения движения для каждого возможного закона изменения силы $F(t)$. Предпочтительнее оценивать эффективность управляемой виброзащитной системы по критерию, пригодному для любого закона изменения силы $F(t)$.

Коэффициент эффективности управляемой виброзащитной системы. Для линейной системы, т. е. системы, движение которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений, коэффициентом эффективности управляемой виброзащитной системы называется модуль отношения комплексной амплитуды перемещения $y^0(i\omega)$ в системе без управляющего воздействия к комплексной амплитуде перемещения $y(i\omega)$ в той же системе при управляющем воздействии

$$K_{\text{эф}} = \left| \frac{y^0(i\omega)}{y(i\omega)} \right| \quad \text{или} \quad K_{\text{эф}} = \left| \frac{W^0(i\omega)}{W(i\omega)} \right|, \quad (15.52)$$

где $W(i\omega)$ — частотная передаточная функция системы с управляющим воздействием, $W^0(i\omega)$ — частотная передаточная функция той же системы без управляющего воздействия.

Как указывалось ранее**), частотная передаточная функция получается из динамической передаточной функции заменой комплексной величины s на $i\omega$. Для рассматриваемой системы

$$W(i\omega) = \frac{k + i\omega}{m(i\omega)^3 + (b+km)(i\omega)^2 + (c+c_y+bk)(i\omega) + ck}$$

*) Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — М.: Высшая школа, 1965.

**) См. с. 119.

или

$$W(i\omega) = \frac{k + i\omega}{ck - (b + km)\omega^2 + i\omega(c + c_y + bk - m\omega^2)}.$$

После умножения числителя и знаменателя на комплексное число, сопряженное знаменателю, получаем

$$W(i\omega) = \frac{(k + i\omega)(\Delta_1 - i\omega\Delta_2)}{\Delta_1^2 + \omega^2\Delta_2^2},$$

где $\Delta_1 = ck - (b + km)\omega^2$, $\Delta_2 = c + c_y + bk - m\omega^2$.

Отделяя мнимую часть от действительной, получаем

$$W(i\omega) = U + iV,$$

где

$$U = \frac{k\Delta_1 + \omega^2\Delta_2}{\Delta_1^2 + \omega^2\Delta_2^2}, \quad V = \frac{\omega(\Delta_1 - k\Delta_2)}{\Delta_1^2 + \omega^2\Delta_2^2}.$$

Отсюда

$$|W(i\omega)| = \sqrt{U^2 + V^2} = \frac{\sqrt{(k\Delta_1 + \omega^2\Delta_2)^2 + \omega^2(\Delta_1^2 - k\Delta_2)^2}}{\Delta_1^2 + \omega^2\Delta_2^2}.$$

Уравнение движения системы без управляющего воздействия ($k=0$) относительно перемещения y^0 получается из уравнения (15.43) при $c_y = 0$ и $z = 0$:

$$m\ddot{y}^0 + b\dot{y}^0 + cy^0 = F(t).$$

Динамическая передаточная функция этой системы равна

$$W^0 = \frac{1}{ms^2 + bs + c}.$$

Соответственно частотная передаточная функция имеет вид

$$W^0(i\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ib\omega + c} \quad \text{или} \quad W^0(i\omega) = U^0 + iV^0,$$

$$\text{где} \quad U^0 = \frac{c - m\omega^2}{(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}, \quad V^0 = \frac{-b\omega}{(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2},$$

Отсюда

$$|W^0(i\omega)| = \sqrt{U^{0^2} + V^{0^2}} = \frac{1}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Коэффициент эффективности виброзащиты по (15.52) равен

$$K_{\text{эф}} = \frac{|W^0(i\omega)|}{|W(i\omega)|} \equiv (\Delta_1^2 + \omega^2 \Delta_2^2) \sqrt{\frac{(c - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}{(k\Delta_1 + \omega^2 \Delta_2^2)^2 + \omega^2 (\Delta_1 - k\Delta_2)^2}}, \quad (15.53)$$

где $\Delta_1 = ck - (b + km)\omega^2$, $\Delta_2 = c + c_y + bk - m\omega^2$.

Параметры виброзащитной системы (b , c , c_y , k) должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$K_{\text{эф}} > 1 \quad (15.54)$$

на выбранном диапазоне частоты ω .

Устойчивость движений управляемой виброзащитной системы. Кроме условия эффективности виброзащитной системы (15.54), ее параметры должны также удовлетворять условию устойчивости движений. С этой целью составляем характеристическое уравнение системы. В соответствии с уравнением движения (15.50) имеем

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0,$$

где $a_0 = m$, $a_1 = b + km$, $a_2 = c + c_y + bk$, $a_3 = ck$.

Согласно критерию Гурвица для того, чтобы система была устойчивой, должны удовлетворяться условия: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 > a_0 a_3$. Первые четыре неравенства удовлетворяются, так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Пятое неравенство дает условие

$$(b + km)(c + c_y + bk) > mck. \quad (15.55)$$

Для системы без демпфирования ($b = 0$) это условие получает вид $c + c_y > c$, т. е. для устойчивости движения необходимо иметь упругую прокладку с коэффициентом жесткости c_y .

Структурная схема управляемой виброзащитной системы. Сравнение управляемых виброзащитных систем по критерию эффективности удобно выполнять по структурным схемам, составляемым в предположении, что система описывается линейными уравнениями движения и, следовательно, соотношение между выходом y и входом x для всей системы в целом и для каждой ее части определяется динамической передаточной функцией $W = Y/X$,

где Y и X — изображения по Лапласу функций y и x . На структурной схеме каждое преобразование величин x в y изображается прямоугольником с обозначением соответствующей динамической передаточной функции. Суммирование входов (или выходов) обозначается знаком

ком .

Если какая-либо величина входит со знаком минус, то прилегающая к ней часть обозначения заливается черным . Ответвление какой-либо величины

обозначается знаком .

Структурная схема электрогидравлической виброзащитной системы (рис. 97, б) относится к простейшим схемам автоматического управления с одной обратной связью. В этой схеме входная величина x суммируется (или вычитается) с управляющим воздействием x_y и преобразуется в выходную величину посредством той части системы, которая характеризуется динамической передаточной функцией

$$W_{\Pi} = \frac{Y}{X \pm X_y}, \quad (15.56)$$

где Y , X , X_y — изображения по Лапласу величин y , x , x_y . Величина y затем преобразуется в величину управляющего воздействия x_y посредством той части системы, которая характеризуется динамической передаточной функцией

$$W_o = \frac{X_y}{Y}. \quad (15.57)$$

Это преобразование называют *обратной связью*, так как управляющее воздействие x_y , зависящее от выходной величины y , возвращается на вход системы и суммируется (или вычитается) с величиной x . Обратная связь называется положительной, если x и x_y суммируются, и отрицательной, если x и x_y вычитаются.

Динамическая передаточная функция всей системы

$$W = \frac{Y}{X} \quad (15.58)$$

получается после подстановки в (15.58) изображения Y

из (15.57) и изображения X из (15.56)

$$W = \frac{X_y/W_o}{(Y \mp X_y W_n)/W_n} \equiv \frac{W_n}{1 \mp W_o W_n}. \quad (15.59)$$

Знак минус относится к системам с положительной обратной связью, знак плюс — с отрицательной.

Произведение $W_o W_n$ может быть представлено в виде динамической передаточной функции

$$W_p = W_o W_n \equiv \frac{X_y}{X \pm X_y},$$

которая может быть получена из системы, которая разомкнута в месте, указанном на рис. 97, б волнистыми линиями, причем выходом является управляющее воздействие x_y , а входом — сумма (или разность) $x - x_y$. На этом основании функцию W_p в теории автоматического управления называют передаточной функцией разомкнутой системы, а функцию W — передаточной функцией замкнутой системы.

Для рассматриваемой электрогидравлической виброзащитной системы имеем:

$$x = F(t), \quad x_y = c_y(y - z) \equiv c_y \varphi.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (15.46), получаем

$$(ms^2 + bs + c)Y = X - X_y.$$

Отсюда

$$W_n = \frac{Y}{X - X_y} \equiv \frac{1}{ms^2 + bs + c}. \quad (15.60)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (15.45), имеем

$$sY = k \frac{X_y}{c_y} + s \frac{X_y}{c_y} \quad \text{или} \quad sY = \frac{X_y}{c_y} (k + s).$$

Отсюда

$$W_o = \frac{X_y}{Y} \equiv \frac{c_y s}{s + k}. \quad (15.61)$$

Динамическая передаточная функция по (15.59) имеет вид

$$W = \frac{1}{(ms^2 + bs + c) \left[1 + \frac{c_y s}{(s + k)(ms^2 + bs + c)} \right]}$$

или

$$W = \frac{s + k}{(s + k)(ms^2 + bs + c) + c_y s}.$$

После раскрытия скобок получаем выражение, совпадающее с (15.51).

Для системы без управляющего воздействия $W^0 = W_n$, и, следовательно, коэффициент эффективности виброзащиты с учетом (15.52) имеет вид

$$K_{эф} = \left| \frac{W_n(i\omega)}{W(i\omega)} \right| \equiv |1 + W_0(i\omega) W_n(i\omega)|.$$

После подстановки выражений для $W_n(i\omega)$ по (15.60) и $W_0(i\omega)$ по (15.61) с заменой s на $i\omega$ получаем

$$K_{эф} = \left| 1 + \frac{c_y i\omega}{(i\omega + k)(-m\omega^2 + bi\omega + c)} \right|$$

или

$$K_{эф}^{-1} = \left| \frac{(i\omega + k)(-m\omega^2 + bi\omega + c)}{(i\omega + k)(-m\omega^2 + bi\omega + c) + c_y i\omega} \right|.$$

После отделения действительной части от мнимой и определения модуля полученной комплексной величины приходим опять к выражению (15.53).

Глава XVI. ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

§ 58. Пружинный динамический гаситель

Пружинный динамический гаситель без трения. Простейший виброгаситель, предназначенный для гашения колебаний массы m , вызываемых гармонической силой $F = F_0 \sin \omega t$, состоит из дополнительной массы m_r , соединенной с основной массой m посредством упругого элемента с коэффициентом жесткости c_r (рис. 98, а). Коэффициент жесткости упругого элемента, расположенного между основанием и массой m , равен c . Перемещение y массы m отсчитывается от положения статического равновесия x_0 ; перемещение массы m_r в относительном движении, равное $y_r - y$, где y_r — абсолютное ее перемещение, отсчитывается от положения статического равновесия x_r, x_r .

Уравнения движения указанной двухмассовой динамической модели имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F_0 \sin \omega t - cy + c_r(y_r - y), \\ m_r y_r &= -c_r(y_r - y). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Установившиеся вынужденные колебания с частотой

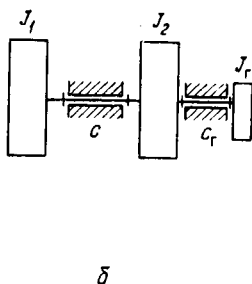
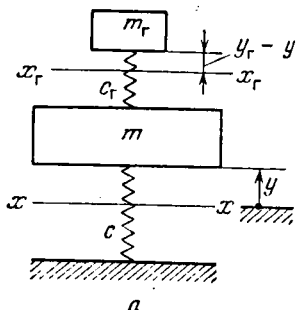


Рис. 98

вынуждающей силы описываются решением

$$y = A \sin \omega t, \quad y_r = A_r \sin \omega t.$$

Подставляя это решение в систему (16.1), получаем два уравнения с двумя неизвестными амплитудами A и A_r :

$$\begin{aligned} (c + c_r - m\omega^2)A - c_r A_r &= F_0, \\ -c_r A + (c_r - m_r \omega^2)A_r &= 0. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Отсюда

$$A = \frac{F_0}{\Delta} (c_r - m_r \omega^2), \quad A_r = \frac{F_0}{\Delta} c_r, \quad (16.3)$$

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов при A и A_r в системе уравнений (16.2):

$$\Delta = (c + c_r - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r^2.$$

При $\Delta = 0$ амплитуды A и A_r стремятся к бесконечности (резонанс), что соответствует совпадению частоты вынуждающей силы ω с одной из собственных частот системы, которые находятся из частотного уравнения (16.4)

$$(c + c_r - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r^2 = 0, \quad (16.4)$$

Если $\Delta \neq 0$, то из соотношений (16.3) можно найти такую частоту ω , при которой $A=0$. Такое состояние системы называют *антирезонансом*, а соответствующую частоту ω_* *антирезонансной*. В нашем случае

$$\omega_* = \sqrt{\frac{c_r}{m_r}},$$

т. е. антирезонансная частота равна собственной частоте дополнительного осциллятора, состоящего из груза с массой m_r и упругого элемента с коэффициентом жесткости c_r .

Явление антирезонанса может быть использовано для виброгашения. Для этого достаточно подобрать массу m_r и коэффициент жесткости c_r так, чтобы при заданной величине ω удовлетворялось равенство

$$\sqrt{\frac{c_r}{m_r}} = \omega. \quad (16.5)$$

Для гашения крутильных колебаний в двухмассовой системе с приведенными моментами инерции J_1, J_2 и приведенным коэффициентом жесткости с аналогично устанавливается дополнительный груз с моментом инерции J_r на валу с коэффициентом жесткости, равным c_r (рис. 98, б). Величины J_r и c_r подбираются по условию

$$\sqrt{\frac{c_r}{J_r}} = \omega.$$

Виброгашение по указанному принципу эффективно только для одной фиксированной частоты вращения. Уже сравнительно небольшое отступление от частоты, определяемой соотношением (16.5), может привести не к уменьшению, а к увеличению амплитуды колебаний. Кроме того, без виброгасителя одна резонансная частота, равная $\omega^* = \sqrt{c_1/m_r}$, а с виброгасителем будет две резонансные частоты, получаемые из решения частотного уравнения (16.4), т. е. увеличивается вероятность возникновения резонансного режима (рис. 99).

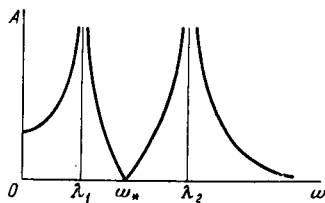


Рис. 99

Пружинный динамический гаситель с трением. Обозначим через b_r коэффициент сопротивления, учитывающий потери энергии при перемещении дополнительной массы m_r относительно основной массы m . Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F(t) - cy - c_r(y - y_r) - b_r(\dot{y} - \dot{y}_r), \\ m_r\ddot{y}_r &= c_r(y - y_r) + b_r(\dot{y} - \dot{y}_r). \end{aligned} \quad (16.6)$$

Для решения этой системы выполняем преобразование Лапласа. Обозначая через Y , Y_r , X изображения функций y , y_r , $F(t)$, получаем при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} ms^2Y &= X - cY - c_r(Y - Y_r) - b_rs(Y - Y_r), \\ m_rs^2Y_r &= c_r(Y - Y_r) + b_rs(Y - Y_r) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (ms^2 + b_rs + c + c_r)Y - (b_rs + c_r)Y_r &= X, \\ (b_rs + c_r)Y - (m_rs^2 + b_rs + c_r)Y_r &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Y &= \frac{m_rs^2 + b_rs + c_r}{(ms^2 + b_rs + c + c_r)(m_rs^2 + b_rs + c_r) - (b_rs + c_r)^2} X, \\ Y_r &= \frac{b_rs + c_r}{(ms^2 + b_rs + c + c_r)(m_rs^2 + b_rs + c_r) - (b_rs + c_r)^2} X. \end{aligned}$$

Следовательно, динамические передаточные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Y}{X} \equiv \frac{m_rs^2 + b_rs + c_r}{(ms^2 + b_rs + c + c_r)(m_rs^2 + b_rs + c_r) - (b_rs + c_r)^2}, \\ W_r &= \frac{Y_r}{X} \equiv \frac{b_rs + c_r}{(ms^2 + b_rs + c + c_r)(m_rs^2 + b_rs + c_r) - (b_rs + c_r)^2}. \end{aligned}$$

При гармоническом возбуждении силой $F(t) = F_0 \sin \omega t$ комплексные амплитуды колебаний $A(i\omega)$ и $A_r(i\omega)$ можно определить через частотные передаточные функции,

$$W(i\omega) = \frac{A(i\omega)}{F_0}, \quad W_r(i\omega) = \frac{A_r(i\omega)}{F_0}.$$

Имея в виду, что частотные передаточные функции получаются из динамических заменой s на $i\omega$, получаем

$$\begin{aligned} A(i\omega) &= \\ &= F_0 \frac{m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r}{[m(i\omega)^2 + b_r i\omega + c + c_r][m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r] - (b_r i\omega + c_r)^2}, \\ A_r(i\omega) &= \\ &= F_0 \frac{b_r i\omega + c_r}{[m(i\omega)^2 + b_r i\omega + c + c_r][m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r] - (b_r i\omega + c_r)^2}. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок имеем:

$$A(i\omega) = F_0 \frac{c_r - m_r \omega^2 + i b_r \omega}{\Delta_1 + i \Delta_2}, \quad A_r(i\omega) = F_0 \frac{c_r + i b_r \omega}{\Delta_1 + i \Delta_2},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (c + c_r - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r^2, \\ \Delta_2 &= b_r \omega (c - m\omega^2 - m_r \omega^2). \end{aligned}$$

Отделяя действительную часть от мнимой, находим

$$A(i\omega) = U + iV, \quad A_r(i\omega) = U_r + iV_r,$$

где

$$\begin{aligned} U &= F_0 \frac{(c_r - m_r \omega^2) \Delta_1 + \Delta_2 b_r \omega}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V = F_0 \frac{b_r \omega \Delta_1 - \Delta_2 (c_r - m_r \omega^2)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \\ U_r &= \frac{c_r \Delta_1 + b_r \omega \Delta_2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V_r = F_0 \frac{b_r \omega \Delta_1 - \Delta_2 c_r}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}. \end{aligned}$$

Отсюда амплитуды A и A_r :

$$A = \sqrt{U^2 + V^2} = F_0 \sqrt{\frac{(c_r - m_r \omega^2)^2 + b_r^2 \omega^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}, \quad (16.7)$$

$$A_r = \sqrt{U_r^2 + V_r^2} = F_0 \sqrt{\frac{c_r^2 + b_r^2 \omega^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}. \quad (16.8)$$

Если подобрать массу m_r и коэффициент жесткости c_r так, чтобы удовлетворялось условие (16.5), то $c_r = m_r \omega_*^2$ и амплитуда колебаний объекта A по соотношению (16.7)

$$A = \frac{b_r \omega_*}{\sqrt{c_r^2 + \Delta_2^2}} F_{0r} \quad (16.9)$$

т. е. для фиксированной частоты вынуждающей силы $\omega = \omega_*$ амплитуда $A \rightarrow 0$ при $b_r \rightarrow 0$.

На рис. 100, а показана амплитудно-частотная характеристика пружинного динамического гасителя с трением. При малых b_r минимум амплитуды A достигается

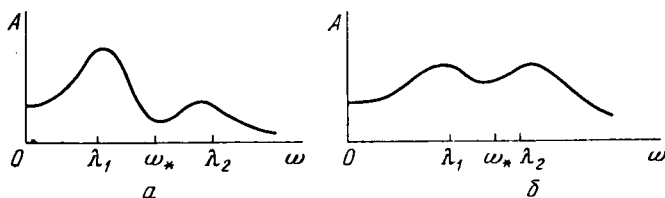


Рис. 100

вблизи $\omega = \omega_*$ и может быть определен по (16.9). Максимумы амплитуды A получаются при частотах, близких к $\omega = \lambda_1$ и $\omega = \lambda_2$, определяемых из частотного уравнения (16.4).

Оптимальная настройка пружинного гасителя с трением. Для уменьшения амплитуды колебаний A не только на фиксированной частоте ω_* , но и на некотором диапазоне частот, выбирают параметры гасителя так, чтобы максимальные значения амплитуды вблизи частот λ_1 и λ_2 были бы равны между собой (рис. 100, б). Приблизительно можно считать, что это условие выполняется при соотношениях [5, с. 339]:

$$c_r = c \frac{\mu}{(1 + \mu)^2} \quad b_r = \sqrt{\frac{3\mu c_r m_r}{2(1 + \mu)}}, \quad \text{где } \mu = m_r/m.$$

§ 59. Маятниковый динамический гаситель

Маятниковый гаситель крутильных колебаний. Для расширения диапазона частот, в котором достигается гашение колебаний, применяют *маятниковые гасители*. Расширение диапазона достигается за счет того, что собственная частота маятника в поле центробежных сил пропорциональна скорости вращения.

На рис. 101 показана схема маятникового гасителя крутильных колебаний вала, вызываемых гармоническим возбуждением $M = M_0 \sin \omega t$. Для гашения колебаний к диску вала на расстоянии r от его оси шарнирно прикреплен маятник с массой m_r , сосредоточенной на конце невесомого стержня длиной l .

Уравнения движения составляем в системе координат Oxy , вращающейся со средней угловой скоростью вала Ω . За обобщенные координаты принимаем угол поворота диска φ , отсчитываемый от оси Ox , и угол качания маятника φ_r , отсчитываемый от направления той же оси. При

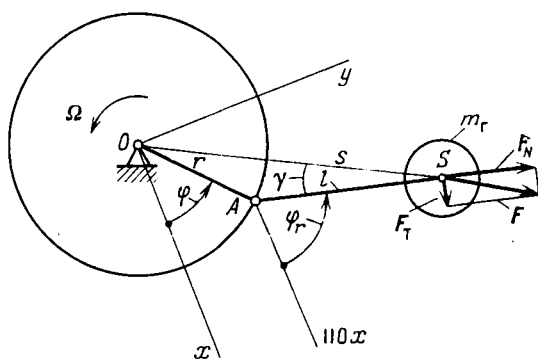


Рис. 101

составлении уравнений движения по кинетостатическому методу учитываем силу инерции массы m_r в абсолютном движении по приближенной формуле $F = m_r s \Omega^2$, где s — расстояние от центра масс маятника до оси вращения диска. Раскладывая эту силу на две составляющие F_N и F_T — вдоль стержня AS и перпендикулярно к нему, получаем:

$$F_N = m_r \Omega^2 s \cos \gamma, \quad F_T = m_r \Omega^2 s \sin \gamma.$$

Из треугольника OAS находим:

$$s \cos \gamma = l + r \cos \psi, \quad s \sin \gamma = r \sin \psi,$$

где $\psi = \varphi_r - \varphi$. При малых колебаниях маятника, считая $\cos \psi \approx 1$, $\sin \psi \approx \psi$, имеем:

$$F_N \approx m_r \Omega^2 (l + r), \quad F_T = m_r \Omega^2 r \psi.$$

Уравнение кинетостатического равновесия диска имеет вид

$$J\ddot{\varphi} - F_N r \sin \psi = M_0 \sin \omega t - c\varphi,$$

где J — момент инерции диска, c — коэффициент крутильной жесткости участка вала между двигателем и диском.

Подставляя приближенное значение F_N и условие $\sin \psi \approx \psi$, получаем первое дифференциальное уравнение движения системы

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi - m_r\Omega^2 r(l+r)(\varphi_r - \varphi) = M_0 \sin \omega t.$$

При составлении второго дифференциального уравнения пренебрегаем малыми кориолисовыми силами; силу инерции в переносном движении учитываем по приближенной формуле $F_{\text{пер}} \approx m_r r \ddot{\varphi}$, а момент составляющей F_T относительно точки подвеса маятника приписываем равным $m_r \Omega^2 r(\varphi_r - \varphi)l$:

$$m_r l^2 \ddot{\varphi}_r + m_r \Omega^2 r l (\varphi_r - \varphi) + m_r \ddot{\varphi} r l = 0.$$

Установившиеся вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы описываются решением

$$\varphi = A \sin \omega t, \quad \varphi_r = A_r \sin \omega t.$$

Подставляя это решение в систему уравнений движения, получаем два уравнения с двумя неизвестными A и A_r :

$$\begin{aligned} [c - J\omega^2 + m_r \Omega^2 r(l+r)]A - m_r \Omega^2 r(l+r)A_r &= M_0, \\ -m_r r l(\Omega^2 + \omega^2)A + m_r l(r\Omega^2 - l\omega^2)A_r &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A = \frac{M_0}{\Delta} m_r l (r\Omega^2 - l\omega^2), \quad A_r = \frac{M_0}{\Delta} m_r r l (\Omega^2 + \omega^2),$$

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов при A и A_r в системе уравнений движения.

Если $\Delta \neq 0$, то из выражения для амплитуды A можно найти антирезонансную частоту ω_* , при которой $A = 0$:

$$\omega_* = \Omega \sqrt{\frac{r}{l}}. \quad (16.10)$$

Следовательно, в маятниковом гасителе в отличие от пружинного динамического гасителя антирезонансная частота пропорциональна угловой скорости вращения вала.

Обозначая через n отношение частоты вынуждающей силы ω к средней угловой скорости вала Ω , получаем из (16.10) условие для выбора параметров гасителя

$$\frac{r}{l} = n^2. \quad (16.11)$$

т. е. гашение колебаний, вызываемых n -й гармоникой

вынуждающего момента, обеспечивается единой настройкой гасителя при любой скорости вращения вала.

Бифилярный подвес маятника. При гашении крутильных колебаний для компенсации изгибающего действия составляющей силы F_N устанавливают два маятника в диаметрально противоположных точках диска (рис. 102, а).

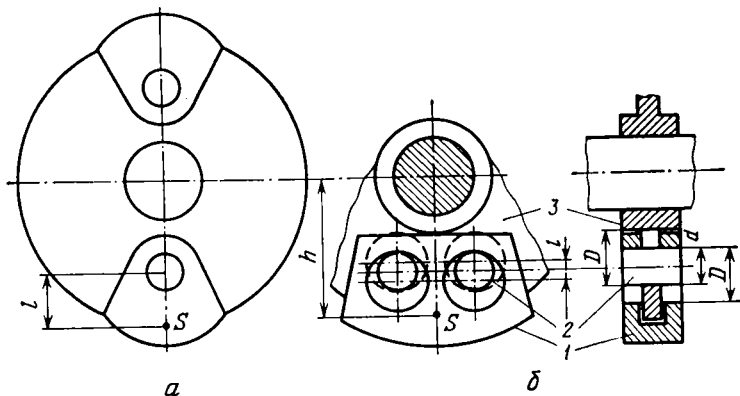


Рис. 102

Создаваемый ими эффект гашения колебаний имеет суммарное действие. Однако эта схема конструктивно удобна, как правило, лишь при $n=1$. С увеличением n длина маятника l существенно уменьшается. При малом l применяется бифилярный подвес (рис. 102, б), при котором в качестве маятника используется противовес 1, укрепленный с помощью роликов 2 на щеке 3 коленчатого вала. Диаметр d роликов меньше, чем диаметр D сверлений в щеке.

Указанное крепление обеспечивает поступательное движение противовеса, при котором все его точки движутся по дугам окружностей равных радиусов $l = D - d$. Радиус крепления маятника-противовеса в этом случае $r = h - l$, где h — расстояние от оси вала до центра масс противовеса, и условие (16.11) для выбора параметров гасителя принимает вид

$$\frac{h - D + d}{D - d} = n^2,$$

Массу гасителя m , выбирают из условия, чтобы при допустимых амплитудах качания создаваемый им момент равнялся n -й гармонике вынуждающего момента.

§ 60. Поглотители колебаний

Поглотитель колебаний с вязким трением. В поглотителях колебаний уменьшение амплитуд защищаемого объекта достигается только за счет демпфирования (рассеяния энергии) при движении гасителя с массой m_r относительно объекта с массой m (рис. 103). В отличие от пружинного гасителя с трением, оптимальная настройка которого при данном m_r определяется двумя независимыми параметрами (c_r , b_r), поглотитель колебаний дает меньший эффект виброгашения, так как его настройка возможна за счет выбора только одного параметра (b_r). Тем не менее поглотители колебаний используются

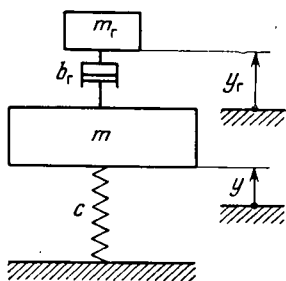


Рис. 103

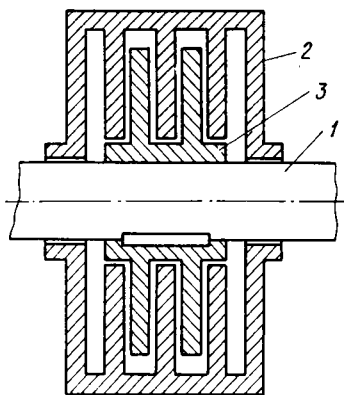


Рис. 104

довольно широко из-за конструктивной простоты и отсутствия в них упругого элемента, склонного к усталостным поломкам.

Уравнения движения поглотителя колебаний с вязким трением получаются из уравнений (16.6) при $c_r = 0$. Соответственно амплитуда колебаний определяется из (16.7) при $c_r = 0$:

$$A = F_0 \sqrt{\frac{m_r^2 \omega_r^2 + b_r^2}{(c - m \omega^2)^2 m_r^2 \omega^2 + b_r^2 (c - m \omega^2 - m_r \omega^2)^2}}. \quad (16.12)$$

Оптимальная настройка поглотителя колебаний с вязким трением в диапазоне частот, включающем собственную частоту системы без трения λ , получается при соот-

ношении [5, с. 343]:

$$b_r = \frac{2m_r \lambda}{\sqrt{2(2 + \mu)(1 + \mu)}}, \quad (16.13)$$

где $\mu = m_r/m$.

При гашении крутильных колебаний в формулах (16.12) и (16.13) вместо масс m и m_r должны быть моменты инерции J и J_r . Кроме того, под F_0 следует понимать амплитуду вынуждающего момента, а под c и b_r — крутильные коэффициенты жесткости и сопротивления. На рис. 104 показана простейшая конструкция поглотителя колебаний с вязким трением для гашения крутильных колебаний вала 1. Гаситель выполнен в виде маховика 2, свободно вращающегося на валу 1. Внутренняя полость гасителя заполнена вязкой жидкостью с целью создания вязкого жидкостного трения между лопатками ступицы 3, жестко соединенной с валом 1, и дисками гасителя 2.

Поглотитель колебаний с сухим трением. Конструкция поглотителя колебаний упрощается, если вместо вязкого трения использовать сухое трение. На рис. 105 показана конструкция поглотителя с сухим трением для гашения крутильных колебаний вала 1. Гаситель 2 выполнен в виде маховика, свободно вращающегося на ступице вала 1. Проскальзывание гасителя относительно ступицы приводит к рассеянию энергии вследствие сухого трения на поверхностях фрикционных дисков 3, помещенных между гасителем и лопатками ступицы. Сила сухого трения регулируется сжатием пружины 4.

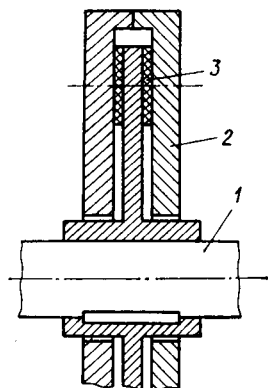


Рис. 105

Уравнения движения системы при гармоническом возбуждении колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} &= M_0 \sin \omega t - M_r \operatorname{sgn}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_r), \\ J_r\ddot{\varphi}_r &= M_r \operatorname{sgn}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_r), \end{aligned} \quad (16.14)$$

где φ , J — угол поворота вала 1 и приведенный к валу 1 момент инерции, φ_r и J_r — угол поворота гасителя 2 и его

момент инерции, M_τ — постоянный момент сил трения, M_0 и ω_0 — амплитуда гармонического возбуждения и его угловая частота.

Система уравнений (16.14) нелинейная, так как в выражение для момента сил трения входит неизвестный знак (sgn) относительной скорости $\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_r$. Для линеаризации момента сил трения применим метод гармонической линеаризации, т. е. определим эквивалентный коэффициент сопротивления b_0 в предположении, что относительное перемещение гасителя 2 и вала 1 ($\psi = \varphi - \varphi_r$) происходит по гармоническому закону

$$\psi = \psi_0 \sin \omega t,$$

где ψ_0 — амплитуда относительных колебаний.

Эквивалентный коэффициент сопротивления определяется из условия равенства рассеянной за цикл (период) энергии при вязком трении с эквивалентным коэффициентом сопротивления рассеянной энергии в системе с сухим трением.

Рассеянная за цикл энергия при вязком трении

$$E_a = \oint b_a \dot{\psi} d\psi \equiv \int_0^T b_a \dot{\psi}^2 dt.$$

Принимая во внимание, что $\dot{\psi} = \psi_0 \omega \cos \omega t$, и выполняя интегрирование, получаем

$$E_a = b_a \psi_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt \equiv b_a \psi_0^2 \omega \pi.$$

Рассеянная за цикл энергия при сухом трении

$$E = 4M_\tau \psi_0.$$

Из условия $E_a = E$ получаем

$$b_a = \frac{4M_\tau}{\pi \psi_0 \omega}. \quad (16.15)$$

Уравнения движения (16.14) после линеаризации имеют вид:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + b_a \dot{\psi} + c\varphi &= M_0 \sin \omega t, \\ J_r(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}) - b_a \dot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Обозначая через Φ , Ψ , X изображения функций φ , ψ , $x = \sin \omega t$, получаем:

$$Js'\Phi + b_0s\Psi + c\Phi = M_0X,$$

$$J_r(s^2\Phi - s^2\Psi) - b_0s\Psi = 0.$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{M_0(J_r s + b_0)}{(Js^2 + c)(J_r s + b_0) + J_r b_0 s^2} X,$$

$$\Psi = \frac{M_0 J_r s}{b_0 J_r s^2 + (J_r s + b_0)(Js^2 + c)} X.$$

Следовательно, динамические передаточные функции имеют вид:

$$W = \frac{\Phi}{X} \equiv \frac{M_0(J_r s + b_0)}{(Js^2 + c)(J_r s + b_0) + J_r b_0 s^2},$$

$$W_0 = \frac{\Psi}{X} \equiv \frac{M_0 J_r s}{b_0 J_r s^2 + (J_r s + b_0)(Js^2 + c)}.$$

Комплексную амплитуду колебаний вала $A(i\omega)$ и комплексную амплитуду относительных колебаний $\psi_0(i\omega)$ можно определить через частотные передаточные функции

$$W(i\omega) = \frac{A(i\omega)}{M_0}, \quad W_0(i\omega) = \frac{\psi_0(i\omega)}{M_0}.$$

Имея в виду, что частотные передаточные функции получаются из динамических заменой s на $i\omega$, получаем

$$A(i\omega) = M_0 \frac{J_r i\omega + b_0}{(-J\omega^2 + c)(J_r i\omega + b_0) - J_r b_0 \omega^2},$$

$$\psi_0(i\omega) = M_0 \frac{J_r i\omega}{-b_0 J_r \omega^2 + (J_r i\omega + b_0)(-J\omega^2 + c)}.$$

После раскрытия скобок получаем:

$$A(i\omega) = M_0 \frac{J_r i\omega + b_0}{b_0 \Delta_1 + i\Delta_2}, \quad \psi_0(i\omega) = M_0 \frac{J_r i\omega}{b_0 \Delta_1 + i\Delta_2},$$

где $\Delta_1 = c - \omega^2(J + J_r)$, $\Delta_2 = J_r \omega(c - J\omega^2)$.

Отделяя действительную часть от мнимой, находим

$$A(i\omega) = U + iV, \quad \psi_0(i\omega) = U_0 + iV_0,$$

где

$$U = M_0 \frac{b_a^2 \Delta_1 + J_r \omega \Delta_2}{b_a^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V = M_0 \frac{b_a (J_r \omega \Delta_1 - \Delta_2)}{b_a^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2},$$

$$U_0 = M_0 \frac{J_r \omega \Delta_2}{b_a^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V_0 = M_0 \frac{b_a J_r \omega \Delta_1}{b_a^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2}.$$

Отсюда амплитуда A и ψ_0 :

$$A = \sqrt{U^2 + V^2} \equiv$$

$$\equiv M_0 \frac{\sqrt{(b_a^2 \Delta_1 + J_r \omega \Delta_2)^2 + b_a^2 (J_r \omega \Delta_1 - \Delta_2)^2}}{b_a^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad (16.17)$$

$$\psi_0 = \sqrt{U_0^2 + V_0^2} \equiv M_0 \frac{J_r \omega}{\sqrt{b_a^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2}}. \quad (16.18)$$

Эквивалентный коэффициент сопротивления b_a , который входит в формулу (16.18), зависит от амплитуды ψ_0 согласно (16.15). Подставляя это значение ψ_0 из (16.15) в формулу (16.18), получаем

$$\psi_0 = \frac{M_0 J_r \omega}{\sqrt{\frac{16 M_T^2 \Delta_1^2}{\pi^2 \psi_0^2 \omega^2} + \Delta_2^2}} \quad \text{или} \quad \psi_0 = \frac{1}{\Delta_2} \sqrt{M_0^2 J_r^2 \omega^2 - \frac{16 M_T^2 \Delta_1^2}{\pi^2 \omega^2}}. \quad (16.19)$$

С увеличением момента сил трения амплитуда относительных колебаний гасителя уменьшается. Запирание поглотителя ($\psi_0 = 0$) наступает при условии

$$M_0^2 J_r^2 \omega^2 = \frac{16 M_T^2 \Delta_1^2}{\pi^2 \omega^2} \quad \text{или} \quad M_T = \frac{\pi M_0 J_r \omega^2}{4 [c - \omega^2 (J + J_r)]}. \quad (16.20)$$

Условие отсутствия запирания выражается условием

$$M_T < \frac{\pi M_0 J_r \omega^2}{4 [c - \omega^2 (J + J_r)]}.$$

Выбрав по этому условию значение момента сил трения M_T , можно найти амплитуду ψ_0 по (16.19) и эквивалентный коэффициент сопротивления b_a по (16.15). Затем находим амплитуду колебаний по (16.17) и коэффициент эффективности поглотителя

$$K_{\text{эф}} = \frac{A_0}{A},$$

где A_0 — амплитуда колебаний вала без поглотителя ($b_3 = 0$):

$$A_0 = \frac{M_0}{c - J\omega^2}.$$

Оптимальный момент сил сухого трения, обеспечивающий максимальное рассеяние энергии за цикл [15]:

$$M_T = \frac{\sqrt{2}}{\pi} J_r \omega^2 A_0.$$

При $c = J\omega^2$, т. е. на резонансной частоте, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_1 = -J_r \omega^2$. В этом случае амплитуда колебаний вала

$$A = M_0 \frac{\sqrt{b_3^2 + J^2 \omega^2}}{b_3 \omega^2 J_r},$$

т. е. при малых b_3 она может быть достаточно большой.

§ 61. Ударные гасители колебаний

Уравнения движения плавающего ударного гасителя колебаний. В ударных гасителях колебаний эффект виброзащиты основывается на рассеянии энергии при соударении гасителя и защищаемого объекта. На рис. 106 показана схема виброзащитной системы с плавающим ударным гасителем колебаний, в которой гаситель в виде шара установлен свободно с зазором 2Δ внутри полости, соединенной с объектом. Уравнения движения этой системы при возбуждении колебаний силой $F(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F(t) - cy - \tilde{R}, \\ m_r \ddot{y}_r &= \tilde{R}, \end{aligned} \quad (16.21)$$

где y — обобщенная координата объекта, y_r — обобщенная координата гасителя, c — коэффициент жесткости, $\tilde{R}$ — реакция на гаситель со стороны объекта.

Реакция $\tilde{R}$ при ударном взаимодействии гасителя и объекта выражается нелинейной функцией перемещения гасителя относительно объекта $z = y - y_r$. В первом приближении эту реакцию можно считать линейно зависящей

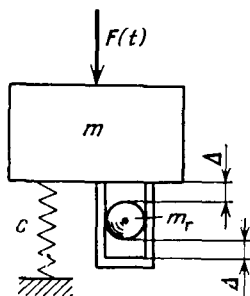


Рис. 106

от z и $\dot{z}$:

$$\bar{R} = c_r z + b_r \dot{z}.$$

Тогда второе уравнение системы (16.21) с учетом соотношения $\ddot{y} = \ddot{z} + \ddot{y}_r$ можно представить в виде

$$m_r \ddot{z} + b_r \dot{z} + c_r z = m_r \ddot{y}. \quad (16.22)$$

Линеаризация упругой составляющей реакции на гаситель. Гармоническая линеаризация упругой составляющей реакции на гаситель, т. е. определение коэффициента c_r , основывается на разложении в ряд Фурье относительного перемещения z упругой составляющей реакции

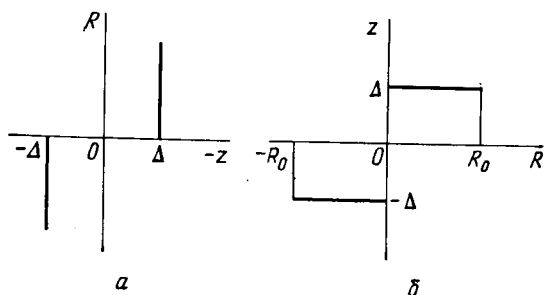


Рис. 107

$\bar{R}$. На рис. 107, *a* показан график зависимости $\bar{R}(z)$, а на рис. 107, *б* — график обратной зависимости $z(R)$

$$z = \Delta \operatorname{sgn} R. \quad (16.23)$$

Реакция $\bar{R}$ есть периодическая функция с периодом T , равным времени между двумя ударами о верхний (или нижний) упор. В первом приближении эту функцию можно считать гармонической с угловой частотой $\omega = 2\pi/T$:

$$\bar{R} = R_0 \sin \omega t,$$

где R_0 — амплитуда реакции $\bar{R}$.

Отсюда

$$z \equiv \frac{\bar{R}}{c_r} = \frac{R_0}{c_r} \sin \omega t. \quad (16.24)$$

Усеченный ряд Фурье функции $z(R)$ по (16.23) имеет вид:

$$z = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z \, d\psi, \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z \cos \psi \, d\psi, \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z \sin \psi \, d\psi,$$

$$\psi = \omega t.$$

Вычисление коэффициентов a_0 , a_1 и b_1 при $z = \Delta \operatorname{sgn} R$ дает

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \Delta \, d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} -\Delta \, d\psi \right) = 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \Delta \cos \psi \, d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} -\Delta \cos \psi \, d\psi \right) = 0,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \Delta \sin \psi \, d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} -\Delta \sin \psi \, d\psi \right) = \frac{4\Delta}{\pi}.$$

Отсюда

$$z = \frac{4\Delta}{\pi} \sin \omega t. \quad (16.25)$$

Приравнявая значения z из (16.24) и (16.25), имеем

$$z_0 = \frac{R_0}{c_r} \equiv \frac{4\Delta}{\pi} \quad \text{или} \quad c_r = \frac{\pi R_0}{4\Delta}. \quad (16.26)$$

Линеаризация диссипативных сил. Гармоническая линеаризация диссипативных сил, т. е. определение коэффициента b_r , основывается на равенстве потери энергии при ударе работе эквивалентной диссипативной силы $b_r \dot{z}$ за время гармонического колебания по закону $z = z_0 \sin \omega t$. Потерю энергии при однократном ударе со скоростью $\dot{z}$ находим по теореме Карно:

$$E = \frac{1-r^2}{2} \frac{m m_r}{m + m_r} \dot{z}^2,$$

где r — коэффициент восстановления скорости при ударе. Принимая, что удары о верхний и нижний упоры происходят при максимальной относительной скорости $\dot{z} = z_0 \omega$, получаем

$$E = (1-r^2) \frac{m m_r}{m + m_r} z_0^2 \omega^2. \quad (16.27)$$

Работа эквивалентной диссипативной силы $b_r \dot{z}$ за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ равна

$$E_r = \int_0^{2\pi/\omega} b_r \dot{z}^2 dt.$$

При $z = z_0 \omega \cos \omega t$ имеем

$$E_r = b_r z_0^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt \equiv \pi b_r z_0^2 \omega. \quad (16.28)$$

Приравнивая значения E и E_r по (16.27) и (16.28), получаем

$$b_r = \frac{(1-r^2) m m_r \omega}{\pi (m + m_r)}. \quad (16.29)$$

Определение амплитуд колебаний. Система уравнений движения (16.21) с учетом (16.22) имеет вид

$$m \ddot{y} + c y + b_r \dot{z} + c_r z = \bar{F}(t),$$

$$m_r \ddot{z} + b_r \dot{z} + c_r z = m_r \ddot{y}.$$

Обозначая через Y, Z, X изображения функций $y, z, \bar{F}(t)$, получаем при нулевых начальных условиях:

$$m s^2 Y + c Y + b_r s Z + c_r Z = X,$$

$$m_r s^2 Z + b_r s Z + c_r Z - m_r s^2 Y = 0$$

или

$$(m s^2 + c) Y + (b_r s + c_r) Z = X,$$

$$-m_r s^2 Y + (m_r s^2 + b_r s + c_r) Z = 0.$$

Отсюда

$$Y = \frac{m_r s^2 + b_r s + c_r}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)} X,$$

$$Z = \frac{m_r s^2}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)} X.$$

Следовательно, динамические передаточные функции:

$$W = \frac{Y}{X} \equiv \frac{m_r s^2 + b_r s + c_r}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)},$$

$$W_z = \frac{Z}{X} \equiv \frac{m_r s^2}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)}.$$

При гармоническом возбуждении силой $F(t) = F_0 \sin \omega t$ комплексные амплитуды колебаний $A(i\omega)$ и $z_0(i\omega)$ можно определить через частотные передаточные функции

$$W(i\omega) = \frac{A(i\omega)}{F_0}, \quad W_z(i\omega) = \frac{z_0(i\omega)}{F_0}.$$

Имея в виду, что частотные передаточные функции получаются из динамических заменой s на $i\omega$, получаем

$$A(i\omega) = \frac{m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r}{[m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r][m(i\omega)^2 + c] + m_r(i\omega)^2(b_r i\omega + c_r)},$$

$$Z_0(i\omega) = \frac{m_r(i\omega)^2}{[m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r][m(i\omega)^2 + c] + m_r(i\omega)^2(b_r i\omega + c_r)}.$$

После раскрытия скобок получаем

$$A(i\omega) = F_0 \frac{c_r - m_r \omega^2 + i b_r \omega}{\Delta_1 + i \Delta_2}, \quad z_0(i\omega) = F_0 \frac{-m_r \omega^2}{\Delta_1 + i \Delta_2},$$

где $\Delta_1 = (c - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r m_r \omega^2$, $\Delta_2 = b_r \omega (c - m\omega^2 - m_r \omega^2)$.

Отделяя действительную часть от мнимой, находим

$$A(i\omega) = U + iV, \quad z_0 = U_z + iV_z,$$

где

$$U = F_0 \frac{(c_r - m_r \omega^2) \Delta_1 + \Delta_2 b_r \omega}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V = F_0 \frac{b_r \omega \Delta_1 - \Delta_2 (c_r - m_r \omega^2)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2},$$

$$U_z = F_0 \frac{-m_r \omega^2 \Delta_1}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V_z = F_0 \frac{m_r \omega^2 \Delta_2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}.$$

Отсюда амплитуды A и z_0 :

$$A = F_0 \sqrt{\frac{(c_r - m_r \omega^2)^2 + b_r^2 \omega^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}} \quad (16.30)$$

$$z_0 = F_0 \frac{m_r \omega^2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}. \quad (16.31)$$

Определение оптимальной настройки гасителя. Из (16.30) и (16.31) следует, что при выполнении условия

$$c_r = m_r \omega^2 \quad (16.32)$$

между амплитудами A и z_0 имеется соотношение

$$\frac{A}{z_0} = \frac{b_r}{m_r \omega}.$$

Подставляя значения z_0 из (16.24) и b_r из (16.29), имеем

$$A = \frac{4\Delta(1-r^2)m}{\pi^2(m+m_r)^2}$$

т. е. при $r \rightarrow 1$ амплитуда колебаний неограниченно уменьшается. Однако это заключение справедливо лишь при условии, что при определении эквивалентных коэффициентов жесткости c_r и сопротивления b_r можно пренебречь амплитудами гармоник с частотами выше основной ω .

Определение оптимальных параметров гасителя. Из условия (16.32) оптимальной настройки гасителя после подстановки значения c_r из (16.26) получаем

$$\frac{\pi R_0}{4\Delta} = m_r \omega^2 \quad \text{или} \quad m_r \Delta = \frac{\pi R_0}{4\omega^2}. \quad (16.33)$$

Пусть, например, вынуждающая сила $F(t)$ вызвана разгоном или торможением вращающейся неуравновешенной массы m_A , установленной с эксцентриситетом e :

$$F(t) = m_A e \omega^2.$$

Тогда из первого уравнения системы (16.21) при малых y и $\ddot{y}$ можно приближенно принять

$$R_0 \approx m_A e \omega^2,$$

и соотношение (16.33) принимает вид

$$m_r \Delta = \frac{\pi}{4} m_A e.$$

т. е. масса m_r и зазор Δ одинаково влияют на настройку плавающего гасителя.

Глава XVII. ЗАЩИТА ЧЕЛОВЕКА ОТ ВИБРАЦИИ

§ 62. Нормирование вибрации, действующей на человека

Характеристики вибрации, определяющие ее действие на человека. *Вибрацией* принято называть механические колебания с малыми перемещениями при частотах более 0,8 Гц. Составляющую перемещения, описывающего вибрацию, называют *виброперемещением*. Первую производ-

ную виброперемещения по времени называют *виброскоростью*, а вторую производную — *виброускорением*. При анализе действия вибрации на человека виброперемещения и их производные относятся к тем элементам машин и сооружений, с которыми соприкасается тело человека (сиденья, платформы, перекрытия зданий, рукоятки механизированного инструмента и т. п.). Действие вибрации на организм человека определяется четырьмя основными характеристиками: *интенсивностью, спектральным составом, направлением действия и длительностью воздействия*.

Показатели интенсивности вибрации. Различают размерные и безразмерные показатели интенсивности вибрации. К размерным показателям относятся амплитудные или среднеквадратические значения виброперемещения, виброскорости и виброускорения, измеренные на рабочем месте.

Среднеквадратическое значение виброперемещения y при гармонических колебаниях определяется по закону $y = A_y \sin \omega t$:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A_y^2 \sin^2 \omega t \, dt}. \quad (17.1)$$

Соответственно среднеквадратические значения виброскорости σ_v и виброускорения σ_a :

$$\sigma_v = \frac{A_v}{\sqrt{2}}, \quad (17.2)$$

$$\sigma_a = \frac{A_a}{\sqrt{2}}, \quad (17.3)$$

где A_v и A_a — амплитуды виброскорости и виброускорения.

К безразмерным показателям интенсивности колебаний относятся *логарифмические уровни*. В общем случае логарифмическим уровнем называется характеристика, сравнивающая две одноименные физические величины, которая пропорциональна десятичному логарифму отношения оцениваемого и исходного значения величины. Для энергетических величин (энергии, мощности и т. п.) логарифмический уровень, измеряемый в белах (Б)*),

*) ГОСТ 24346—80 (СТ СЭВ 1926—79). Вибрация. Термины и определения.— М.: Издательство стандартов, 1980.

$L_w = \lg \frac{w}{w_0}$, или в децибелах (дБ) — $L_w = 10 \lg \frac{w}{w_0}$, где w — оцениваемое значение величины, w_0 — исходное значение величины.

Для перемещения скорости, ускорения, силы и т. п. логарифмический уровень, измеряемый в децибелах, $L_w = 20 \lg \frac{w}{w_0}$. Исходные значения при определении логарифмического уровня колебаний для перемещения $y_0 = 8 \cdot 10^{-12}$ м, для скорости $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ м/с, для ускорения $a_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ м/с². В табл. 4 приведены логарифмические уровни виброскорости в дБ при $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ м/с и

Т а б л и ц а 4

Уровень, дБ	Виброскорость, см/с	Уровень, дБ	Виброскорость, см/с
75	0,028	105	0,89
80	0,05	110	1,58
85	0,89	115	2,81
90	0,158	120	5
95	0,281	125	8,9
100	0,5	130	16

соответствующие им значения виброскорости в см/с = 0,01 м/с.

При гармонических колебаниях с частотой f в герцах имеем: $y = A_y \sin 2\pi ft$, $v = 2\pi f A_y \cos 2\pi ft$, $a = 4\pi^2 f^2 A_y \sin 2\pi ft$. Соответствующие логарифмические уровни колебаний, определяемые по амплитудным значениям:

$$L_y = 20 \lg \frac{A_y}{y_0}, \quad L_v = 20 \lg \frac{2\pi f A_y}{v_0}, \quad L_a = 20 \lg \frac{4\pi^2 f^2 A_y}{a_0}. \quad (17.4)$$

При нормировании вибрации часто указывают только логарифмические уровни виброскорости. Тогда логарифмические уровни виброперемещения и виброускорения в предположении, что колебания — гармонические, можно найти по соотношениям, следующим из (17.4):

$$L_y = L_v + 20 \lg \frac{v_0}{y_0 2\pi f} \equiv L_v + 20 \lg \frac{v_0}{y_0 2\pi} - 20 \lg f,$$

$$L_a = L_v + 20 \lg \frac{2\pi f v_0}{a_0} \equiv L_v - 20 \lg \frac{a_0}{2\pi v_0} + 20 \lg f.$$

При $y_0 = 8 \cdot 10^{-12}$ м, $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ м/с, $a_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ м/с² имеем $L_y = L_v + 60 - 20 \lg f$, $L_a = L_v - 60 - 20 \lg f$.

Показатели спектрального состава вибрации. При нормировании вибрации ее спектральный состав, т. е. совокупность частот гармонических составляющих, оценивается по отдельным полосам частот. *Полосой частот* называется совокупность частот в рассматриваемых пределах, определяемых граничными частотами (верхней и нижней). Полоса частот, у которой отношение верхней граничной частоты к нижней равно 10, называется *декадной полосой* (*декадой*). Если это соотношение равно 2, то полоса частот называется *октавной* (*октавой*). Употребляется также *третьоктавная полоса* (*треть октавы*), у которой отношение верхней граничной частоты к нижней равно $\sqrt[3]{2}$. Для каждой полосы указывается среднегеометрическая частота, равная квадратному корню из произведения граничных частот. В табл. 5 приведены

Т а б л и ц а 5

Среднегеометрические частоты, Гц	Граничные значения частотных полос, Гц		Среднегеометрические частоты, Гц	Граничные значения частотных полос, Гц	
	1/3 октавы	октава		1/3 октавы	октава
0,8	0,7—0,89	0,7—1,4	12,5	11,2—14,1	11—22
1,0	0,89—1,12		16	14,1—17,8	
1,25	1,12—1,4		20	17,8—22,4	
1,6	1,4—1,78	1,4—2,8	25	22,4—28,2	22—44
2,0	1,78—2,24		31,5	28,2—35,5	
2,5	2,24—2,8		40	35,5—44,7	
3,15	2,8—3,5	2,8—5,6	50	44,7—56,2	44—88
4,0	3,5—4,4		63	56,2—70,8	
5,0	4,4—5,6		80	70,8—89,1	
6,3	5,6—7,1	5,6—11,2	100	89,1—112,2	88—177
8,0	7,1—8,9		125	112,2—141,3	
10	8,9—11,2		160	141,3—177,8	

среднегеометрические частоты и соответствующие им граничные частоты в октавных и третьоктавных полосах.

Допустимые значения уровней вибрации. Среднеквадратические значения виброскорости и соответствующие им логарифмические уровни вибрации могут служить нормами к ограничению вибрации. В табл. 6 указаны примерные нормы допустимой виброскорости применительно к ограничению вибрации на рабочих местах обслуживающего персонала, производственного персонала и средств транспорта. В зависимости от места возникновения и характера вибрации нормы допустимой виброскорости установлены для шести групп:

- 1) средства транспорта при движении по местности;
- 2) средства транспорта при движении по специально подготовленным поверхностям производственных помещений и горных выработок (кроме железнодорожного транспорта);

Т а б л и ц а 6

Номер группы	Направление вибрации	Среднеквадратические значения виброскорости, см/с						
		Их уровни, дБ в октавных полосах со среднегеометрическими частотами, Гц, не более						
		1	2	4	8	16	31,5	63
1	По оси z	$\frac{20}{132}$	$\frac{7,1}{123}$	$\frac{2,5}{114}$	$\frac{1,3}{108}$	$\frac{1,1}{107}$	$\frac{1,1}{107}$	$\frac{1,1}{107}$
	По осям x, y	$\frac{6,3}{122}$	$\frac{3,5}{117}$	$\frac{3,2}{116}$	$\frac{3,2}{116}$	$\frac{3,2}{116}$	$\frac{3,2}{116}$	$\frac{3,2}{116}$
2	По осям z, x, y	—	$\frac{3,5}{117}$	$\frac{1,3}{108}$	$\frac{0,63}{102}$	$\frac{0,56}{101}$	$\frac{0,56}{101}$	$\frac{0,56}{101}$
3	По осям z, x, y	—	$\frac{1,3}{108}$	$\frac{0,45}{99}$	$\frac{0,22}{93}$	$\frac{0,2}{92}$	$\frac{0,2}{92}$	$\frac{0,2}{92}$
4	По осям z, x, y	—	$\frac{0,71}{103}$	$\frac{0,25}{94}$	$\frac{0,13}{88}$	$\frac{0,11}{87}$	$\frac{0,11}{87}$	$\frac{0,11}{87}$
5	По осям z, x, y	—	$\frac{0,5}{100}$	$\frac{0,18}{91}$	$\frac{0,089}{85}$	$\frac{0,079}{84}$	$\frac{0,079}{84}$	$\frac{0,079}{84}$
6	По осям z, x, y	—	$\frac{0,18}{91}$	$\frac{0,063}{82}$	$\frac{0,032}{76}$	$\frac{0,028}{75}$	$\frac{0,028}{75}$	$\frac{0,028}{75}$

- 3) постоянные рабочие места в производственных помещениях предприятий;
- 4) служебные помещения на судах;
- 5) склады, столовые и бытовые помещения предприятий;
- 6) лаборатории, конструкторские бюро, вычислительные центры и другие помещения для работников умственного труда.

При определении направлений, по которым нормируется вибрация, считается, что ось z направлена по вертикали. Среднеквадратические значения виброскорости указаны в см/с, т. е. в 10^{-2} м/с. Соответствующие им логарифмические уровни вибрации вычислены при начальном

Таблица 7

Среднегеометрическая частота октавной полосы, Гц	Граничные частоты октавных полос, Гц		Предельно допустимое среднеквадратическое значение виброскорости	
	нижняя	верхняя	см/с	дБ
8	5,6	11,2	5	120
16	11,2	22,4	5	120
31,5	22,4	45	3,5	117
63	45	90	2,5	114
125	90	180	1,8	111
250	180	355	1,2	108
500	355	710	0,9	105
1000	710	1400	0,63	102
2000	1400	2800	0,45	99

значении виброскорости $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ м/с. Допустимые значения виброскорости установлены при продолжительности воздействия в течение восьмичасового рабочего дня.

Для обслуживающего персонала и пассажиров железнодорожного транспорта санитарные нормы по ограничению вибрации установлены Минздравом СССР. Допустимые уровни вибрации при этом несколько ниже указанных в табл. 6, так как длительность воздействия вибрации может быть неограниченной.

При работе операторов с вибрационными ручными машинами, к которым относятся отбойные молотки, трамбовки и т. п., нормируются допустимые среднеквадратические значения виброскорости. В табл. 7 приведены примерные нормы допустимой виброскорости для ручных машин.

§ 63. Поверочный расчет систем виброизоляции человека

Системы виброизоляции человека. Для ограничения вредного действия вибрации наибольшее распространение имеет виброизоляция, при которой снижение уровня вибрации достигается с помощью дополнительных устройств, встраиваемых между источником возбуждения и телом человека. К основным типам устройств для виброизоляции человека принадлежат: 1) поддресоренные сидения (тракторы, сельскохозяйственные машины, строительные дорожные машины, вертолеты), 2) виброизоляционные кабины (буровые станки, пассажирские лифты), 3) виброизолированные платформы (самоходные катки, строительные вибрационные машины). Во всех указанных типах виброизоляционные системы принято разделять на пассивные и активные. В *пассивных системах* виброизоляция достигается путем оптимального выбора параметров ее схемы, которая составляется из комбинаций упругих и демпфирующих звеньев, а также направляющих механизмов и механизмов преобразования движения. В *активных (управляемых) системах* используются дополнительные источники энергии, посредством которых создаются управляющие воздействия, компенсирующие вынуждающие силы или относительные перемещения защищаемого объекта.

Поверочный расчет пассивной системы виброизоляции при гармоническом возбуждении. Поверочный расчет системы виброизоляции состоит в определении ее эффективности. С целью получения сопоставимых результатов поверочного расчета устанавливается рекомендуемая последовательность проверки уровня вибрации рабочего места человека на соответствие требованиям норм, ограничивающих виброперемещения и виброскорости. Для поверочного расчета пассивной системы виброизоляции поддресоренного сидения при заданном кинематическом возбуждении можно предложить несколько динамических моделей, из которых простейшей является модель, показанная на рис. 90, а. В этом случае исходными данными для расчета являются: m — масса поддресоренной части сиденья плюс масса оператора, приходящаяся на сиденье, равная $5/7$ всей его массы; b — коэффициент сопротивления; c — коэффициент жесткости; закон

кинематического возбуждения $s = A_s \sin \omega t$, где s — обобщенная координата основания в абсолютном движении.

Подлежат определению: коэффициент эффективности виброизоляции $K_{\text{эф}}$, среднеквадратическое значение виброскорости σ_v и расстояние d , необходимое для отсутствия ударов об упоры.

Расчет начинается с определения коэффициентов передачи в абсолютном движении K_c по (15.16) и в относительном движении $K_{\text{отн}}$ по (15.17):

$$K_c = \frac{A}{A_s} \equiv \sqrt{\frac{1 + (2\beta v)^2}{(1 - v)^2 + (2\beta v)^2}},$$

$$K_{\text{отн}} = \frac{A_y}{A_s} \equiv \frac{v^2}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + (2\beta v)^2}},$$

где A , A_y — амплитуды виброперемещений в абсолютном и относительном движениях, $v = \omega/\lambda$ — частотное отношение при $\lambda = \sqrt{c/m}$, $\beta = \gamma/\lambda$ — относительное демпфирование при $\gamma = b/2m$.

Отсюда коэффициент эффективности по (15.18) $K_{\text{эф}} = 1/K_c$; амплитуда абсолютного перемещения z сидения $A = A_s K_c$; амплитуда виброскорости $A_v = A\omega$; среднеквадратическое значение виброскорости $\sigma_v = A\omega/\sqrt{2}$; амплитуда относительного перемещения $A_y = AK_{\text{отн}}$; условие отсутствия ударов об упоры $A_y < d$.

Пример. Для защиты человека-оператора от вибрации в транспортной машине применено поддресоренное сидение. Из экспериментальных данных известно, что закон движения основания, на котором укреплено сидение, может быть принят в виде гармонического возбуждения

$$s = 0,0035 \sin(2\pi \cdot 3t) \text{ м.}$$

В соответствии с конструкцией сидения принято: масса поддресоренной части сидения $m_c = 26$ кг, масса оператора, приходящаяся на сидение $m_n = 80 \cdot 5/7 = 57$ кг; коэффициент жесткости $c = 6500$ кг/с², коэффициент сопротивления $b = 700$ кг/с.

Отсюда: масса поддресоренной части сидения с сидящим человеком $m = 26 + 57 = 83$ кг, коэффициент демпфирования $\gamma = 700/166 = 4,22$ 1/с, угловая собственная частота $\lambda = 6500/83 = 8,85$ 1/с, частотное отношение $v = 6\pi/8,85 = 2,13$, относительное демпфирование $\beta = 4,22/8,85 = 0,477$.

Коэффициенты передачи:

$$K = \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot 0,477 \cdot 2,13)^2}{(1 - 2,13)^2 + (2 \cdot 0,477 \cdot 2,13)^2}} = 0,56,$$

$$K_{\text{отн}} = \frac{2,13^2}{\sqrt{(1 - 2,13)^2 + (2 \cdot 0,477 \cdot 2,13)^2}} = 1,11.$$

Коэффициент эффективности виброизоляции $K_{\text{эф}} = 1/0,56 = 1,78$. Амплитуды абсолютного и относительно-го перемещений: $A = 0,0035 \cdot 0,56 = 0,00196$ м, $A_v = 0,0035 \cdot 1,11 = 0,0039$ м.

Следовательно, система виброизоляции снижает амплитуду колебаний сидения в 1,78 раза. Расстояние $2d$ между упорами во избежание ударов должно быть не менее $2A_v \approx 0,008$ м.

Среднеквадратическое значение виброскорости

$$\sigma_v = \frac{0,00196 \cdot 6\pi}{\sqrt{2}} = 0,026 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Частота $f = 3$ Гц находится в октавной полосе со среднегеометрической частотой 4 Гц (табл. 5). Для этой полосы частот допустимое среднеквадратическое значение виброскорости при вертикальных колебаниях сидения транспортных машин равно 0,025 м/с (табл. 6), т. е. практически совпадает с полученным значением σ_v в рассматриваемом примере.

Поверочный расчет пассивной системы виброизоляции при полигармоническом возбуждении. При экспериментальном определении кинематического возбуждения поддресоренных сидений часто наблюдается полигармоническое возбуждение, представляемое суммой гармоник

$$s = \sum_{k=1}^n A_{sk} \sin \omega_k t,$$

где k — номер гармоники. В этом случае для каждой гармоники рассчитывают коэффициенты эффективности и амплитудные значения виброперемещения и виброскорости, как и при рассмотренном выше гармоническом возбуждении. Особенность расчета состоит только в том, что среднеквадратические значения виброскорости вычисляются отдельно для каждой из октавных полос, в которых находятся частоты гармоник, по соотношению

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{h=m} A_k^2 \omega_k^2}$$

где l, m — номера гармоник, попадающих в данную октавную полосу.

После определения среднеквадратических значений виброскорости для каждой октавной полосы они сравниваются с допустимыми по табл. 6.

Поверочный расчет пассивной системы виброизоляции при случайном возбуждении. Для случайного кинематического возбуждения по закону $z = A_s \sin \omega t$ обычно рекомендуется определять из эксперимента спектральную плотность ускорения $\ddot{z}$ в виде аналитического соотношения

$$S_{\ddot{z}}(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_0^2(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\pi \{[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]^2 + 4\alpha^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

где ω — угловая частота кинематического возбуждения, α и β — экспериментальные коэффициенты в 1/с, σ_0 — величина в м/с², вычисляемая при данных α и β по значению спектральной плотности при $\omega = 0$. Например, для подрессоренного сидения, рассмотренного в предыдущем примере, можно принять:

$$\alpha = 1,9 \text{ 1/с}, \quad \beta = 18,1 \text{ 1/с}, \quad \sigma_0 = 2,7 \text{ м/с}^2.$$

Имея в виду, что $\dot{z} = \omega A_s \cos \omega t$, $\ddot{z} = -\omega^2 A_s \sin \omega t$, можно выразить спектральные плотности скорости $S_{\dot{z}}$ и перемещения S_z через спектральную плотность ускорения:

$$S_{\dot{z}} = S_{\ddot{z}}/\omega^2, \quad S_z = S_{\ddot{z}}/\omega^4.$$

Коэффициент передачи $K_c = A/A_s$ вычисляется, как и при детерминированном гармоническом возбуждении по (15.16), и, следовательно, амплитуда виброскорости $A_v = K_c A_s \omega$. Отсюда спектральная плотность виброскорости

$$S_v = K_c^2 \omega^2 S_{\ddot{z}} \equiv K_c^2 S_{\ddot{z}}/\omega^2.$$

Среднеквадратичные значения виброскорости σ_v вычисляются отдельно для каждой из октавных полос по соотношению

$$\sigma_v = \sqrt{\int_{\omega_n}^{\omega_b} S_v d\omega}$$

где ω_n, ω_b — нижняя и верхняя граничные частоты для данной октавной полосы. Например, для первой октавной полосы

$$\sigma_v^{(1)} = \sqrt{\int_{4,39}^{8,72} S_v d\omega}.$$

Полученные среднеквадратические значения виброскорости сравниваются с допустимыми по табл. 6. Если требуется проверить среднеквадратические значения виброускорения с амплитудой $A_a = K\omega^2 A_s$, то вычисляется спектральная плотность виброускорения

$$S_a = K^2 \omega^4 S_{\ddot{z}} \equiv K^2 S_{\ddot{z}}.$$

и затем для каждой октавной полосы находятся среднеквадратические значения виброускорения из соотношения

$$\sigma_a = \sqrt{\int_{\omega_H}^{\omega_B} S_a d\omega}.$$

Вероятность удара P об упоры определяется по табл. 8 в зависимости от значений $u = d/\sigma_y$, где d — половина расстояния ме-

Т а б л и ц а 8

u	P	u	P	u	P
0,1	0,920	0,8	0,424	2,5	0,012
0,2	0,841	1,0	0,317	3,0	0,003
0,4	0,689	1,5	0,134	3,5	0
0,6	0,548	2,0	0,045		

жду упорами, σ_y — среднеквадратическое значение перемещения сидения относительно основания $y = z - s$.

Амплитуда перемещения y находится по коэффициенту передачи в относительном движении $A_y = K_{отн} A_s$, где $K_{отн}$ вычисляется по (15.17). Отсюда спектральная плотность перемещения y :

$$S_y = K_{отн}^2 \frac{S_{..}}{\omega^4}.$$

Среднеквадратическое значение перемещения y определяется на интервале изменения ω от 0 до ∞ :

$$\sigma_y = \sqrt{\int_0^{\infty} S_y d\omega}.$$

После вычисления σ_y находим отношение $u = d/\sigma_y$ и соответствующую ему вероятность удара об упоры по табл. 8. Обычно подбирают значение зазора d так, чтобы выполнялось условие $u > 3,5$, при котором вероятность удара $P = 0$.

Заметим также, что для вычисления интегралов, входящих в соотношения, определяющие среднеквадратические значения перемещений, скоростей и ускорений, имеются достаточно подробные таблицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний.— М.: Высшая школа, 1980.
3. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем.— М.: Наука, 1971.
4. Боголюбов Н. И., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.
5. Вибрации в технике. Справочник, т. 6.— М.: Машиностроение, 1981.
6. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин.— Л.: Машиностроение, 1968.
7. Вульфсон И. И. Динамические расчеты цикловых механизмов.— Л.: Машиностроение, 1976.
8. Вульфсон И. И. Типовые задачи динамики с учетом упругости звеньев.— Л.: Ленингр. политехн. ин-т, 1977.
9. Гаджиева Е. Г., Перминов М. Д. Исследование динамических свойств двухкаскадной подвески с учетом податливости основания // В сб.: Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем.— М.: Наука, 1975.
10. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов.— М.: АН СССР, 1959.
11. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями.— М.: Наука, 1974.
12. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем.— М.: Наука, 1966.
13. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением.— М.: Наука, 1964.
14. Левитский Н. И. Теория механизмов и машин.— М.: Наука, 1979.
15. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.— М.: Наука, 1967.
16. Щетильников В. А. Уравновешивание механизмов.— М.: Машиностроение, 1982.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 152
 Амонтона формула 18
 Амплитуда затухающих колебаний 78
 — комплексная вынуждающей силы 83
 — гармонических колебаний 83
 Антирезонанс 305
 Апелля уравнения 62, 63
- Балансировка жестких роторов 233—237
 Белый шум 143
 — ограниченный 147, 290
- Ван-дер-Поля метод 100—102
 Вариация функции 49
 Векторы эвентьев главные 243, 244
 Вибрация 221, 322
 Вибровозбудитель центробежный 189
 Виброгашение 272
 Виброзащитные системы 271, 272, 294, 296
 Виброизолятор двухкаскадный 279, 280
 — нелинейный 281, 282
 — одноосный 272, 273
 Виброизоляция 272, 285—294
 Виброперемещение 322
 Виброскорость 323
 Виброускорение 323
 Виттенбауэра диаграмма 109
 — метод 107—109
 Возбуждение кинематическое 204
 — колебаний гармоническое 80
 — кинематическое 80, 274
 — полигармоническое 330
 — силовое 80, 274
 Вязкость динамическая 19
- Галеркина метод 91—94
 Гармоника доминирующая 14
 Гаусса распределение 137
 Гиббса функция 63
 Гидропривод 8
 Главные оси инерции 37
 Градиент скорости 19
 Гурвица алгебраический критерий устойчивости 130, 131, 300
- Движение асимптотически неустойчивое 127
 — устойчивое 127
 — возмущенное 127
 — невозмущенное 127
 — нейтрально устойчивое 127
- Декремент колебаний логарифмический 78
 Дельта-метод решения нелинейных уравнений 110—112
 Дельта-функция 25, 118
 Демпфирование относительное 276
 Диаграмма точечного изображения 104
 Динамический гаситель маятниковый 308—310
 — пружинный без трения 303—305
 — с трением 306—308
 — ударный плавающий 317
 Дисбаланс статический 231
 Дисперсия обобщенной скорости 292
 — перемещений 290, 291
 — силы 293
 — случайного процесса 140
 — случайной величины 137
 — стационарного случайного процесса 146
 Длительность удара 286
- Жесткость динамическая 126
 — комплексная 126
 Жуковского теорема 35
- Звено механизма ведомое 8
 — ведущее 8
 — входное 7
 — выходное 8
 — начальное 29
 — приведения 30
- Изображение функции 74
 Импульс сил 25, 26
 — мгновенный 286
- Карно теорема 319
 Колебания 76
 — в кулачковом механизме 208, 212, 215, 216
 — вынужденные 76
 — крутильные 311
 — основные 166
 — периодические 76
 — релаксационные 149
 — свободные 76
 — сопровождающие 81
 — субгармонические 166
 — супергармонические 166
 — установившиеся 82
 Координаты обобщенные 28, 49
 Косинус-преобразование функции 146
 Коэффициент восстановления скорости при ударе 319

- Коэффициент вязкого сопротивления 20
 — демпфирования 77
 — критический 79
 — динамичности 124, 125, 161, 162, 209—212, 278, 288
 — жесткости 22
 — кинематической цепи 166
 — передачи при кинематическом возбуждении 278, 279
 — силы 275, 276, 280
 — податливости 23
 — приведенный 166
 — полезного действия механизма 45
 — режима вибрации 228, 229
 — сопротивления качению 22
 — трения покоя 18
 — скольжения 18
 — эффективности виброзащиты 163, 298
 — виброизоляции 330
 Коэффициенты инерционные 52
 — формы 172
 Кратность пускового момента 11
 Критическое скольжение 10
 Кулачок полидинамический 221
- Лагранжа функция 50
 Лагранжа — Максвелла уравнение 65—67
 Лапласа преобразование 302
 Логарифмические уровни интенсивности колебаний 323
- Масса корректирующая 231
 — приведенная 33, 34
 Математическое ожидание 136
 — — перемещений 289, 290
 — — случайного процесса 140
 Матрица переноса 173
 Матье уравнение 86
 Машина вибрационная 221
 Метод ВКБ 86—98
 — гармонического баланса 90, 91
 — комплексных амплитуд 82
 — малого параметра 95—100
 — матриц переноса 173
 — медленно меняющихся параметров 100—102
 — точечных преобразований 102—105
 Механизм кривошипно-ползунный 86, 245, 265
 — кулачковый 40, 43, 44, 179
 — с упругим толкателем 204
 — уравновешивающий 247, 248
 — однородного зубчатого дифференциала 50, 51
 — регулятора скорости с тахгенератором 195—200
 — с упругим звеном 167, 171
 — упругой муфтой 159
 — уравновешенный 246
 — фрикционной бесступенчатой передачи 58
 — центробежного вибровозбудителя 189
 — регулятора скорости 200—203
 — шарнирного четырехзвенника 28, 175, 242
 — шарнирный с двумя степенями свободы 53
- Михайлова годограф 132
 Михайлова частотный критерий устойчивости 131, 132
 Момент двигателя критический 10
 — инерции приведенный 30, 32
 — сил обобщенный 49
 — приведенный 29, 30
 — трения приведенный 40
 Муфта упругая линейная 158, 159
 — нелинейная 164
- Найквиста частотный критерий устойчивости 131, 133
 Настройка оптимальная поглотителя колебаний 312, 313
 — ударного гасителя 321, 322
 Неуравновешенность статическая 231
 Ньютона формула 19
- Октава 325
 Оригинал 74
- Передаточная функция динамическая 114—117
 — — импульсная 117, 118
 — — кинематическая 113
 Передаточное отношение 176
 Период колебаний 78
 — условный линейных затухающих колебаний 78
 Петля гистерезиса 25
 Плоскость изображающая 102
 — коррекции 232
 — фазовая 102
 Плотность вероятности 136, 137
 — — случайного процесса 139
 — спектральная дисперсии стационарного случайного процесса 146
 — — стационарного случайного процесса 145
 Пневмопривод 8
 Поглотитель колебаний с вязким трением 312, 313
 — — — сухим трением 313—316
 Податливость динамическая 126
 — — комплексная 127
 Полоса частот 325
 Потери мощности на трение 40
 Привод 8
 Процесс случайный 138
 — — нормальный (гауссовый) 142
 — — стационарный 142
 — — центрированный 141
 — — эргодический 142
 Пуанкаре метод (малого параметра) 95—100
- Разгружатели кулачковые 255, 256
 — пружинные 262
 Рауса алгебраический критерий устойчивости 129
 Рауса — Феррера уравнения 60
 Режим генераторный 11
 — двигательный 10
 — противовключения 11
 Резонанс 123
 Роторы гибкие 238, 239
 Рэля диссипативная функция 50
- Самосинхронизация механизмов 183
 Самоторможение 42
 Связи 57

- Связи дифференциальные 57
 Связь неголономная 58
 — обратная 301
 — отрицательная 301
 — положительная 301
 Сила движущая 7
 — импульсная 25
 — инерции электромагнитная 70
 — обобщенная 49
 — приведенная 33
 — сопротивления 7
 — трения покоя 17
 — — — предельная 17
 — — — приведенная 40
 — ударная 25
 Силы диссипативные 21
 — упругости 22
 Синхронизация механизмов 183
 Системы виброизгляции человека 328—333
 Скольжение двигателя 9
 — — критическое 12
 — — номинальное 11
 Скорость двигателя синхронная 9
 — угловая критическая 239
 Сопротивление качению авенъев 22
 Спектр дискретный 15
 — непрерывный 15
 — собственных частот 172
 Спектральная плотность 17
 Станки балансировочные 233
- Точечное отображение 104, 105
 Точка приведения 34
 Транспортёр вибрационный 222, 227
 Трение граничное 18
 — жидкостное 18
 — сухое (кулоново) 18
 — чистое 18
- Угол трения 21
 Удар длительный 289
 — короткий 289
 Уравновешивание вращающегося звена полное 232
 — — — статическое 230
 — масс механизма 241
 — — — статическое 241—245
 Уровни вибрации допустимые 326, 327
- Устойчивость регулятора скорости с тахогенератором динамическая 199
 — — — — статическая 198
 — центробежного регулятора динамическая 202
- Фаза колебаний 76
 — — начальная 76
 Фазовая траектория 102, 156
 Фазовый портрет 102
 Фокус неустойчивый 37
 — устойчивый 156
 Форма удара 287
 Функция корреляционная случайного процесса 141
 — распределения случайного процесса 138
 — случайная 138
 Фурье интеграл 15
 — преобразование 145
- Характеристика амплитудно-фазовая 121
 — амплитудно-частотная 120
 — движущего момента 10, 12
 — фазо-частотная 120
 — частотная 120
 — — логарифмическая 123
 Характеристики регулировочные 194
 Хилла уравнение 183
- Цикл предельный 103
 — — неустойчивый 104
 — — устойчивый 104
 Цепная система 170
- Частота антирезонансная 305
 — вращения электродвигателя номинальная 11
 — — — синхронная 11
 — линейных затухающих колебаний 79
 — резонансная 123
 — собственная 76
 — среза 290
 — угловая 76
- Электропривод 8
 Эффект вибрационного поддержания неуравновешенного ротора 188