Р. Р. ЧУГАЕВ

Гидравлика

Для студентов ВУЗОВ

Р. Р. ЧУГАЕВ

Гидравлика

(ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ)

ИЗДАНИЕ 4-е, ДОПОЛНЕННОЕ И ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования в качестве учебника для студентов гидротехнических специальностей высших учебных заведений

ЛЕНИНГРАД
ЭНЕРГОИЗДАТ
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1982

ББК 30.123
Ч-83
УДК 621.22.01(075.8)

Рецензент *С. В. Избаш*

РОМАН РОМАНОВИЧ ЧУГАЕВ

ГИДРАВЛИКА

Редактор *Б. И. Леонова*
Художественный редактор *Д. Р. Стеванович*
Технический редактор *А. Г. Рябкина*
Корректоры *Е. В. Багно, С. Ф. Здобнова*
Переплет художника *В. В. Белякова*
ИБ № 2482 («Энергия»)

Сдано в набор 01.09.81. Подписано в печать 26.05.82. М-22093. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура «Таймс». Офсетная печать. Усл. печ. л. 54,6. Усл. кр.-отт. 109,2. Уч.-изд. л. 62,5. Тираж 53 000 экз. Заказ 55. Цена 2 р. 50 к.

Ленинградское отделение Энергоиздата. 191041, Ленинград, Марсово поле, 1.

Ор... Трудового ... градское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитет... по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Чугаев Р. Р.

Ч-83 Гидравлика: Учебник для вузов. — 4-е изд., доп. и перераб. — Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. — 672 с., ил.

В пер. 2 р. 50 к.

Содержание соо...ствует программе курса для гидротехнических специальностей, утвержденной МВи... . Учебник дополнен сведениями, необходимыми для выполнения расчетно-графических работ (справочные данные и т. п.), материалами практических (аудиторных) занятий, факультативными сведениями для наиболее успевающих студентов и аспирантов. Третье издание вышло в 1975 г. Настоящее издание обновлено и переработано.

Для студентов вузов гидротехнических специальностей.

Ч $\frac{3302000000\text{-}075}{051(01)\text{-}82}$ 75-82

ББК 30.123
605

ПРЕДИСЛОВИЕ

(содержащее необходимые методические указания, относящиеся к общему построению предлагаемого курса и представляющие интерес для преподавателей, которые будут пользоваться настоящим учебником)

Предлагаемый учебник составлен на основании нашего многолетнего опыта проектирования гидротехнических сооружений, а также преподавания курса «Гидравлики» и курса «Гидротехнические сооружения» на гидротехническом факультете (ГТФ) Ленинградского ордена Ленина политехнического института (ЛПИ) имени М. И. Калинина. Данный учебник издавался ЛПИ в 1960 г. и затем издательством «Энергия» – в 1963 г., в 1970 г., в 1971 г.[1] и в 1975 г.

Книга содержит: 1) материал собственно учебника (полный курс лекций), т. е. теоретические вопросы, которые студент должен изучить и по которым он должен сдать экзамены; объем этого материала составляет около 375–400 страниц; 2) вспомогательный материал, *набранный мелким шрифтом*, не выносимый на экзамены: справочные данные, примеры расчетов, задачи, материалы практических занятий, некоторые факультативные сведения, представляющие интерес, например, для аспирантов.

Предлагаемый учебник рассчитан на изучение курса гидравлики в течение трех семестров (при трех экзаменах, что имеет место на ГТФ ЛПИ). Как видно, готовясь к одному из трех экзаменов, студент должен изучить около 130 страниц текста данной книги, что, как показывает длительный опыт, является для студентов посильным (при условии нормальной работы студента в течение семестра).

В ряде втузов строительного профиля гидравлика изучается в течение только двух семестров; в частности, двухсеместровый курс гидравлики предусматривается на специальности водоснабжение и канализация. При таком изучении гидравлики объем «собственно учебника» не должен превышать 250–270 страниц. Надо отметить, что данная книга составлена с расчетом возможности сократить ее до двухсеместрового объема при двух экзаменах. Такое сокращение при изучении курса можно выполнить, исключив из него главы 12, 13, 14, 15, 18 и 19, а также разделы глав: 7, В; 9, А; 9, В и конец главы 17 (начиная с § 17-12).

В данной книге (учебнике для студентов) излагаются только основы гидравлики. Поэтому она не может полностью заменить руководство для практических расчетов, необходимое при проектировании тех или других сооружений и устройств.

Материал, включаемый в курс, мы стремились подобрать таким образом, чтобы в результате его изучения студент получил *необходимое развитие*, на основе которого он в дальнейшем мог бы уже совершенно самостоятельно

[1] В 1971 г. книга была опубликована с опечатками, сделанными не по вине автора (см. Гидротехническое строительство, 1972, № 5, с. 26).

разобрать и изучить по возможности любой новый вопрос гидравлики, встретившийся в его будущей инженерной практике.

Специальные гидравлические расчеты, выполнение которых требует знания конструкции и работы гидротехнических сооружений, нами исключались из курса гидравлики и относились к таким специальным курсам, как «Гидротехнические сооружения», «Использование водной энергии» и т. п. Именно под таким углом зрения проводилась увязка общетехнической дисциплины «Гидравлика» с профилирующими (специальными) дисциплинами, в частности, с курсом «Гидротехнические сооружения».

Как дополнительно поясняется в главе 1 (см. также § 3-1), мы считаем, что внутри единой науки «Механика жидкости» необходимо в настоящее время различать два принципиально разных научных направления:[1]

а) *«дифференциальное»* направление, когда мы интересуемся скоростями и давлениями в отдельных точках потока, причем сам поток жидкости представляем как векторное поле скоростей и скалярное поле давлений;

б) *«интегральное»* направление, когда мы не интересуемся отмеченными выше полями скоростей и давлений, причем оперируем осредненными и интегральными характеристиками потока (средней скоростью в плоском живом сечении, полной величиной расхода для этого сечения и т. п.).

Естественно, что «дифференциальное» направление требует изложения курса в *векторной форме*; «интегральное» же направление – в *«безвекторной» форме*.

Как известно, некоторые технические специальности, в связи с их спецификой, требуют курсов механики жидкости, в которых существенно сочетаются оба отмеченные выше научные направления. В этом случае построение единого курса «Технической механики жидкости» значительно осложняется.

Что касается нашего курса гидравлики, составленного для гидротехнических специальностей, то в нем мы почти исключительно придерживаемся второго (интегрального) научного направления, излагая все в «безвекторной» форме. Только в порядке исключения в отдельных местах курса мы затрагиваем «дифференциальное направление» (в частности, это направление в несколько расширенной форме используется при рассмотрении резкоизменяющегося ламинарного движения грунтовых вод).

Несколько условно мы в дальнейшем для упрощения речи позволяем себе пользоваться следующими терминами:

«математической механикой жидкости» или *«математической гидромеханикой»* мы именуем направление, в котором используется только дифференциальное представление механики жидкости или это представление имеет превалирующее значение;

«технической механикой жидкости» или *«технической гидромеханикой»* мы именуем научное направление, в котором используется только интегральное представление механики жидкости, или это представление имеет превалирующее значение.

Придерживаясь такой точки зрения и отождествляя термины «гидравлика», «техническая механика жидкости» и «техническая гидромеханика»[2], мы в нашем курсе не считали нужным без какой-либо практической надобности обременять

---

[1] Более подробно по этому вопросу см. нашу статью (Сборник научно-методических статей по гидравлике, вып. 4. – М.: Высшая школа, 1980).

[2] Именно эта точка зрения была единогласно принята на семинаре-совещании заведующих кафедрами гидравлики втузов [illegible], состоявшемся 11–12 ноября 1976 г. (см. Сборник научно-методических статей по гидравлике, вып. 1. – М.: Высшая школа, 1977).

наш курс сведениями, заимствованными из другого курса — курса математической гидромеханики, что часто в настоящее время делают некоторые авторы. Наш опыт преподавания гидравлики показал, что «простые», на первый взгляд, вопросы гидравлики достаточно хорошо усваиваются студентами только с большим трудом. Излишне же усложняя эти вопросы ч и с т о ф о р м а л ь н ы м использованием математического аппарата, мы при этом еще более затрудним изучение ф и з и ч е с к и х о с н о в г и д р а в л и к и, которые студент-гидротехник прежде всего должен твердо усвоить и ясно себе представлять. Говоря таким образом, мы вместе с тем не отрицаем пользы соответствующей тренировки студентов в области формального использования математического аппарата; однако возможности для такой тренировки (не в ущерб изучению физической сущности явлений) в современных условиях весьма ограничены.[1]

Само собой разумеется, что предлагаемый курс гидравлики строится нами на основе только тех сведений по математике и теоретической механике, которые предусматриваются учебными программами (для гидротехнических специальностей втузов по указанным дисциплинам). При этом мы стремились придать изложению книги такой характер, который позволил бы студентам изучать гидравлику по предлагаемой книге *с меньшей затратой труда и времени, чем по конспектам своих лекций*.

При составлении курса гидравлики естественно возникает вопрос о последовательности изложения отдельных разделов данной дисциплины. Решение этого вопроса затрудняется тем, что в технической механике жидкости (в гидравлике) дается несколько различных классификаций движения жидкости, в связи с чем и общее построение курса, вообще говоря, может выполняться по-разному. Как видно будет из дальнейшего, нами при изложении практической части гидродинамики турбулентного потока была принята следующая система: вначале мы освещали так называемое плавно изменяющееся движение жидкости (где имеется свой законченный метод исследования), а затем резко изменяющееся движение жидкости (где также имеется свой особый подход к решению соответствующих задач). Такие вопросы, как ламинарное движение грунтовых вод, случай взвесенесущих потоков, ветровые волны, а также вопросы физического моделирования гидравлических явлений, пришлось излагать в конце книги как отдельные, как бы дополнительные, статьи к курсу.

Заметим, что разные главы курса гидравлики в отношении методики их преподавания носят сплошь и рядом совершенно различный характер. Например, раздел гидростатики в отношении методики его преподавания приближается к курсу теоретической механики; здесь при изучении соответствующего материала рационально проводить аудиторные практические занятия, решать небольшие задачи и т. п. Наряду с этим изучение таких разделов, как движение воды в каналах, сопряжение бьефов и т. п., вовсе не требует проведения аудиторных практических занятий; в этом случае для закрепления знаний студенту необходимо выполнять самостоятельные работы расчетного характера.

В курсе гидравлики встречаются также разделы, которые носят исключительно теоретический характер, как, например, основы теории моделирования гидравлических явлений и т. п. В связи со сказанным материалы практических

---

[1] Говоря о математике, необходимо учитывать, что в этой науке, как известно, изучаются так называемые м а т е м а т и ч е с к и е м о д е л и, т. е. структуры, системы (иногда абстрактные), между элементами которых имеются те или другие логические связи. Для точного и краткого описания упомянутых логических связей был создан специальный так называемый «математический язык» («математическая речь»), т. е. *«математический аппарат»*. Этот аппарат, как известно, не следует смешивать с существом самой науки математики, отождествляя при этом знание «математического аппарата» со способностью логически, т. е. математически, мыслить.

занятий в нашем курсе даются только в конце некоторых глав, причем эти материалы по своему характеру и построению различны в разных случаях. Стремиться здесь к какому-либо шаблону нет надобности.

В конце каждой главы приводится перечень соответствующих литературных источников, в которых более подробно освещаются вопросы, затронутые в учебнике. Само собой разумеется, что студент должен не только изучить основы гидравлики, но и иметь представление о той литературе, которая существует в данной области. В списки литературы мы вовсе не включали каких-либо журнальных научно-исследовательских статей, а, как правило, помещали только хорошо известные и общедоступные книги в виде монографий, руководств для проектирования и расчета, учебных пособий и т. п.

Было замечено, что студенты сравнительно легко усваивают те сведения, которые в той или иной мере поясняются в книге при помощи чертежей (а не только литературным текстом). Именно поэтому в книге приводится относительно много графического материала, причем наиболее важные чертежи, равно как и наиболее важные формулы, на которые учащимся следует обратить особое внимание, в тексте книги специально выделены: номера рисунков и формулы подчеркнуты тонкой линией, а некоторые особенно важные формулы взяты в рамку. Говоря о чертежах, необходимо учитывать, что ряд чертежей пришлось выполнять в искаженном масштабе (см., например, рис. 1-11 и др.) или в виде даже условных (часто безмасштабных) схем, на что, разумеется, следует обращать внимание студентов.

В книге имеется значительное количество сносок. Такое положение объясняется тем, что в них приводится, как правило, необязательный материал, которым нет основания перегружать основной текст; вместе с тем этот материал представляет интерес для читателя, желающего вникнуть в суть вопроса более глубоко.

При изложении курса гидравлики естественно возникает вопрос об используемой терминологии, об определениях различных понятий, а также о буквенных обозначениях соответствующих величин. В связи с составлением данного учебника, нами специально разрабатывалось возможное решение этого весьма важного вопроса, причем результаты этой разработки после многократного их рецензирования и консультаций со многими специалистами (относящимися к разным научным школам), были опубликованы в виде толкового словаря гидравлических терминов.[1] При выполнении этой работы мы убедились, что профессионалы, работающие в области технической гидромеханики, и профессионалы, работающие в области математической гидромеханики, достаточно часто используют различную терминологию и разные определения для одних и тех же понятий. Оказалось, что единства терминологии и определений для различных профессий добиться практически невозможно (что, впрочем, достаточно хорошо известно). В качестве примера здесь можно привести определение для понятия «жидкость»: в математической гидромеханике жидкость всегда определяется как сплошная среда; в технической же гидромеханике мы жидкостью называем физическое тело, обладающее определенными свойствами (сплошную же среду мы рассматриваем только как модель жидкости, которой в настоящее время удобно пользоваться); идеальной жидкостью инженеры называют «воображаемую жидкость,

[1] См. Р. Р. Чугаев. Гидравлические термины. – М.: Высшая школа, 1974. В этой брошюре приводится более 800 гидравлических терминов (на русском и немецком языках). При этом даются также рекомендуемые буквенные обозначения различных величин (представляющих интерес для лиц, работающих в области гидротехнических специальностей).

при любом движении которой отсутствуют силы трения»;[1] эту же идеальную жидкость специалисты в области математической гидромеханики определяют совсем другими словами, например, они пишут так:[2] «Назовем идеальной жидкостью ... такую среду, в которой вектор напряжений p_n на любой площадке с нормалью n ортогонален площадке, т. е. p_n параллелен n».

Читая около 10 лет педагогам-гидравликам (вгузов СССР) методику преподавания гидравлики,[3] мы обращаем внимание слушателей, в частности, на следующие три обстоятельства, которые необходимо иметь в виду и при использовании предлагаемого нами учебника (как, впрочем, и других учебников):[4]

1-е обстоятельство: в курсе гидравлики встречаются иногда представления и понятия, которые в связи с отсутствием времени, не удается разъяснять студентам подробно и совершенно точно; объяснять эти представления и понятия приходится в некоторой мере схематично (упрощенно, условно), что требует большого искусства;

2-е обстоятельство: естественно, что материал курса гидравлики с течением времени совершенствуется; часть его стареет и отмирает; вместе с тем в курсе гидравлики появляются различные современные, более совершенные трактовки различных вопросов; опыт показывает, что устаревший материал иногда задерживается в отдельных новых книгах (проникая в них в силу как бы своей «инерции»), причем в современных условиях такой устаревший материал иногда может выглядеть даже как ошибочный. В качестве примеров таких устаревших («ошибочных») фрагментов курса гидравлики (достаточно часто встречающихся в современной литературе) можно привести следующие: 1) освещение зависимости Ньютона о силе внутреннего трения [см. формулу (4-22)] без оговорки, что эта формула справедлива только для прямолинейного движения и только для «площадки действия», расположенной вдоль линий тока [в плоскости живого сечения силы трения также имеют место, хотя, согласно формуле (4-22), они оказываются равными нулю]; 2) ошибочную запись уравнения Бернулли [см. формулу (3-69)] для элементарной струйки реальной жидкости без члена $\pm \Delta E$, т. е. без учета «диффузии» энергии через боковую поверхность струйки; 3) встречающиеся высказывания, согласно которым движение реальной жидкости в общем случае осуществляется в сторону меньшего давления, а не в сторону меньшего напора (при определенном заданном пути движения); 4) отсутствие указаний на то, что в обычном случае потери напора обусловливаются только работой сил трения (а «не ударом» или «вихреобразованием» и т. п.; см. § 4-1); 5) указания на то, что жидкость ни при каких условиях не может выдерживать больших растягивающих напряжений; 6) отсутствие указания на то, что в обычных условиях давление в жидкости не может быть меньше «давления насыщенных паров»; 7) отсутствие указаний на то, что «гидродинамическое давление», в отличие от «гидростатического давления» есть величина фиктивная (см. § 3-1). Подобных примеров можно

---

[1] Иногда здесь добавляют еще, что такая жидкость «является абсолютно несжимаемой».

[2] См. Л. И. Седов. Механика сплошной среды, т. 1. – М.: Наука, 1976, с. 159.

[3] При кафедре гидравлики ЛПИ, руководимой нами, открыта гидравлическая специальность на факультете повышения квалификации преподавателей.

[4] Более подробно по вопросам преподавания гидравлики см. брошюру: Р. Р. Чугаев. О формировании специальностей на факультете втуза и преподавании общетехнических дисциплин: (учебное пособие для слушателей факультета повышения квалификации преподавателей). – Л.: изд. ЛПИ, 1977. См. также наши статьи в Сборнике научно-методических статей по гидравлике, выпуски 1, 2 и 3. – М.: Высшая школа, 1977, 1979, 1980.

привести много. Дополнительно следует отметить, что совершенствуя аппарат гидравлики, нам в ближайшее время при рассмотрении вопросов гидростатики (во второй главе курса), по всей видимости, придется вовсе опустить понятие «напора». Это понятие необходимо будет сохранить исключительно как «принадлежность» уравнения Бернулли, которое по существу не относится к гидростатике. Что же касается $H = z + p/\gamma$, то эту величину в гидростатике, как мы себе представляем, придется в будущем трактовать только как «суммарную потенциальную функцию» двух векторных силовых полей (см. § 2-8, п. 4); сил тяжести и градиентов давления (напомнив при этом в главе второй очень важное понятие потенциальной функции);

3-е обстоятельство: известно, что точность исходной информации и точность самого расчета (выполняемого на основе этой информации) должны соответствовать друг другу; в связи с этим, например, замена величины γ произведением (ρg)[1] с методической точки зрения может быть оправдана только при условии, если наши гидравлические расчеты имеют точность, большую или равную той точности, с которой устанавливается величина g для земной поверхности.[2]

* * *

В предисловиях к предыдущим изданиям данного учебника мы отмечали целый ряд лиц, которые своими советами позволили улучшить качество нашего учебника.

При подготовке к печати настоящего издания, отражающего современную школу гидравлики ЛПИ, мы использовали отдельные частные замечания сотрудников кафедры гидравлики ЛПИ: В. Т. Орлова, А. Д. Гиргидова, А. А. Турсунова, Н. А. Яковлева, Е. Н. Кожевниковой, Г. Н. Косяковой, Б. А. Дергачева, В. П. Троицкого, Ю. В. Кокорина, В. В. Лебедева. Подготовку к печати этого издания, связанную с некоторой переработкой текста предыдущего издания и с составлением ряда новых фрагментов текста, нам помогла осуществить Е. А. Чугаева. Всем перечисленным лицам, а также Т. А. Виноградовой, оказавшей большую помощь при оформлении рукописи, приношу искреннюю благодарность. Приношу также благодарность рецензенту С. В. Избашу за ряд сделанных им замечаний.

Все пожелания и замечания просьба направлять по адресу: 191041, Ленинград, Д-41, Марсово поле, 1, Ленинградское отделение Энергоиздата.

Р. Р. Чугаев

---

[1] Об обозначениях γ, ρ и g — см. стр. 13.

[2] Известно, что точность гидравлических расчетов составляет обычно 3–5%; величина g (входящая обычным множителем в соответствующие зависимости) изменяется на земной поверхности в пределах 0,5%. Естественно, что в этих условиях, заменяя величину γ выражением ρg, мы как бы требуем учета изменяемости величины g, причем делаем грубую методическую ошибку, дезориентируя студентов.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРАВЛИКУ

§ 1-1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАУКИ «ГИДРАВЛИКА»

При решении различных проблем часто приходится встречаться с вопросом о движении различных жидкостей, а также с вопросом о силовом (механическом) воздействии жидкости на те или другие поверхности и на обтекаемые ею твердые тела.

Исследование этих вопросов постепенно привело к созданию обширной науки, которую следует назвать «механикой жидкого тела», или «механикой жидкости», или (если пользоваться греческими словами) «гидромеханикой». Само собой разумеется, что механика жидкости (гидромеханика) разделяется на статику (гидростатику), кинематику и гидродинамику.

Можно сказать, что в механике жидкости (в гидромеханике) изучаются законы равновесия и движения различных жидкостей; очевидно, что в ней должны даваться также и способы практического приложения этих законов, т. е. разрабатываться соответствующие методы гидромеханических расчетов различных конструкций, устройств и т. п.

Существенно подчеркнуть, что механика жидкости (гидромеханика) в силу целого ряда причин развивалась за рубежом и у нас в России, а затем и в , по двум направлениям:

1) по направлению, свойственному т е х н и ч е с к и м наукам (изучаемым в технических учебных заведениях), и

2) по направлению чисто м а т е м а т и ч е с к о м у (с использованием обширного и относительно сложного математического аппарата, изучаемого главным образом в университетах).[1]

В связи со сказанным создалось положение, когда в области единой науки механики жидкости мы оказались вынужденными различать как бы две разные науки (строго говоря, два разных метода исследования): «техническую механику жидкости» («техническую гидромеханику»),[2] называемую часто «гидравликой» и изучаемую в технических учебных заведениях, и «математическую механику жидкости» («математическую гидромеханику»), изучаемую главным образом в университетах.

Различие между этими науками, имеющими один и тот же объект исследования, в частности, заключается в следующем.[3]

---

[1] Подробно по этому вопросу см. § 1-8.

[2] Надо учитывать, что техническая гидромеханика является, вообще говоря, частным видом прикладной гидромеханики (охватывающей интересы не только техники, но, например, и медицины, биологии и т. п.)

[3] Более подробно этот вопрос освещается в § 3-1.

В технической механике жидкости (гидравлике) при решении различных практических задач широко используются те или иные допущения и предположения, упрощающие рассматриваемый вопрос. Достаточно часто гидравлические решения основываются на результатах экспериментов, и потому в технической механике жидкости приводят относительно много различных эмпирических и полуэмпирических формул. При этом стремятся к оценке только главных характеристик изучаемого явления и часто оперируют теми или иными интегральными и осредненными величинами, которые дают достаточную для технических приложений характеристику рассматриваемых явлений; например, в технической механике жидкости часто пользуются понятием средней скорости движения жидкости в том или другом поперечном сечении потока и т. п. По своему характеру техническая механика близка к известным дисциплинам – строительной механике и сопротивлению материалов, в которых под тем же углом зрения изучаются вопросы механики твердого тела. Следует учитывать, что гидравлика, являясь общетехнической дисциплиной, должна рассматриваться как *«профессиональная физика жидкого тела»*, в которой, в частности, даются основы соответствующих гидромеханических расчетов, используемых при проектировании инженерных сооружений, конструкций, а также надлежащих технологических процессов.

В математической механике жидкости, как было отмечено, широко используется относительно сложный математический аппарат, не изучаемый в технических вузах. Этот аппарат прилагается также к несколько упрощенным схемам движения жидкости. Однако в этом методе исследования мы все же не прибегаем к различного рода допущениям и не оперируем различными осредненными величинами в такой мере, как в технической механике жидкости. Решения, получаемые в математической гидромеханике, оказываются более строгими в математическом отношении. По своему характеру математическая механика жидкости сходна (чисто формально) с математической теорией упругости (рассматривающей вопросы механики твердого тела), изучаемой в университетах.

Как показал опыт, методы математической механики жидкости сплошь и рядом оказываются столь сложными, что громадное большинство практических задач, следуя этим методам, решить невозможно.[1] Этим и объясняется возникновение и развитие технической, прикладной науки – технической механики жидкости, т. е. гидравлики, которая стремится дать приближенные ответы на все те вопросы, связанные с движущейся или покоящейся жидкостью, которые ставит перед нами практика.

Можно сказать, что в технической гидромеханике (в гидравлике) приближенно решаются сложные задачи при помощи простых методов. В математической же гидромеханике относительно точно решаются только некоторые простейшие задачи при помощи сложных методов. Надо, впрочем, отметить, что в последнее время мы все чаще сталкиваемся с вопросами, которые приходится решать, сочетая методы технической и математической гидромеханики, причем иногда бывает трудно провести границу между этими двумя науками (вернее, между этими двумя методами, используемыми в области механики жидкости).

Необходимо отметить, что техническая механика жидкости (гидравлика), представляющая собой обширную самостоятельную, сложившуюся техническую науку, включает в себя много различных разделов, касающихся отдельных сторон рассматриваемой проблемы. Разумеется, эти разделы должны излагаться в курсах «Технической механики жидкости» для разных технических специальностей

---

[1] Заметим, однако, что в связи с применением ЭВМ в последнее время круг задач, решаемых методами математической механики жидкости, расширился.

различно. Например, для строительных специальностей приходится более подробно освещать те процессы, которые имеют место при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений; для машиностроительных специальностей – те процессы, с которыми мы сталкиваемся при проектировании и эксплуатации машин и т. д.

Из сказанного выше видно, что термины «гидравлика», «техническая гидромеханика» и «техническая механика жидкости» следует рассматривать как имеющие одинаковое значение (как бы синонимы). Необходимо учитывать, что само слово «гидравлика» произошло от слияния двух греческих слов, из которых первое значит «вода», а второе – «труба», «канал», «струя». Как видно, ранее считали, что гидравлика занимается изучением движения или покоя только воды. Однако в настоящее время термин «гидравлика» (а также «гидромеханика») понимается в более широком смысле: мы предполагаем, что объектом изучения в гидравлике является л ю б а я ж и д к о с т ь (а не только вода).

§ 1-2. ЖИДКОСТЬ

Как известно, различают твердые, жидкие и газообразные тела, а также плазму. При изменении давления или температуры жидкое тело может переходить в твердое или газообразное. Например, при очень высоких давлениях в обычной воде образуются кристаллы льда; наоборот, при снижении давления в жидкости могут появиться пузырьки, заполненные паром (газом).

Жидкость есть физическое тело, обладающее двумя особыми свойствами:

1) она весьма мало изменяет свой объем при изменении давления или температуры; в этом отношении жидкость сходна с твердым телом;

2) она обладает т е к у ч е с т ь ю, благодаря чему жидкость не имеет собственной формы и принимает форму того сосуда, в котором она находится; в этом отношении жидкость отличается от твердого тела и является сходной с газом.

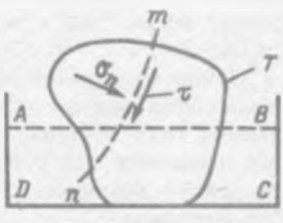


Рис. 1-1. Напряжения нормальное (σ_n) и касательное (τ)

С тем чтобы пояснить свойство т е к у ч е с т и жидкого тела, покажем на рис. 1-1 т в е р д о е тело T. В этом теле под действием, например, собственного веса должны возникнуть соответствующие напряжения. Если наметить произвольное сечение mn данного тела, то в этом сечении, так же как и в любом другом сечении, (исключая, разумеется, сечения, совпадающие с траекториями главных напряжений), помимо нормальных напряжений σ_n, будут возникать еще к а с а т е л ь н ы е н а п р я ж е н и я τ, т. е. напряжения, действующие в д о л ь намеченного сечения (касательно к нему).

Представим себе далее, что тело T, находясь в покое, приобрело такое состояние своего вещества, при котором оно оказывается неспособным воспринимать касательные напряжения τ, вызываемые, например, собственным весом. При этом, очевидно, тело T под действием собственного веса начнет р а с т е к а т ь с я и в конечном счете примет форму сосуда $ABCD$.

Как видно, *текучесть рассматриваемого тела обусловливается тем, что оно в покоящемся состоянии не способно сопротивляться внутренним касательным усилиям*, т. е. усилиям, действующим вдоль поверхностей сдвига.

Можно сказать, что в т о р о е свойство жидкости (см. выше п. 2) заключается в том, что *жидкость, в отличие от твердого тела, находясь в покое, не может иметь касательных напряжений*, и именно поэтому она принимает форму сосуда, в котором заключена.

Поскольку газ также обладает свойством текучести, то многие теоретические положения, разработанные применительно к жидкому телу, могут быть распространены и на случай газообразных тел. Однако в нашем курсе гидравлики вопрос о газе рассматривать не будем. Этому вопросу посвящается особая дисциплина, называемая «аэромеханикой» («механикой газа»).

Говоря далее только о жидкости, как пример ее, часто будем иметь в виду воду, которая характеризуется двумя упомянутыми свойствами (текучестью и малой сжимаемостью под действием силы).

Надо сказать, что в природе встречаются так называемые аномальные жидкости (краски, некоторые смазочные масла, суспензии и т. п.), которые в покоящемся состоянии могут иметь небольшие касательные напряжения. Эти «жидкости» мы поясним весьма кратко в конце нашего курса (см. гл. 20).

§ 1-3. ПОНЯТИЯ РЕАЛЬНОЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ВЯЗКОСТЬ

Как показывает опыт, жидкости, встречающиеся в природе, т. е. реальные жидкости, столь мало изменяют свой объем при обычном изменении давления и температуры (см. § 1-4), что этим изменением объема практически можно пренебрегать. Поэтому в гидравлике жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемое тело (здесь приходится делать исключение только при изучении одного вопроса – вопроса о так называемом гидравлическом ударе, когда даже малую сжимаемость жидкости приходится учитывать; см. гл. 9).

Выше было подчеркнуто, что в покоящейся жидкости касательные напряжения всегда отсутствуют. В движущейся жидкости, как показывают исследования, касательные напряжения обычно имеют место: именно при движении жидкости по поверхностям скольжения жидких слоев друг по другу[1] возникает трение, которое и уравновешивает внутренние касательные силы.

Свойство жидкости, обусловливающее возникновение в ней при ее движении касательных напряжений («напряжений трения»), называется вязкостью.

В практике встречаются случаи, когда силы трения, возникающие благодаря вязкости, оказываются небольшими сравнительно с другими силами, действующими на жидкость. В этих частных случаях вязкостью можно пренебречь и считать, что в движущейся жидкости касательные напряжения отсутствуют так же, как и в покоящейся жидкости.

При аналитических исследованиях часто пользуются понятием идеальной жидкости. Идеальной жидкостью называют воображаемую жидкость, которая характеризуется:

а) абсолютной неизменяемостью объема (при изменении давления и температуры);

б) полным отсутствием вязкости, т. е. сил трения при любом ее движении.

Идеальная жидкость, в отличие от реальной («вязкой») жидкости, в природе, разумеется, не существует. Ее создают в воображении как некоторую приближенную модель реальной жидкости.

Из сказанного выше ясно, что:

1) при изучении покоящейся жидкости нет надобности различать реальную и идеальную жидкости;

2) при изучении же движения жидкости очень часто приходится считаться с различием между двумя названными жидкостями: в случае реальной жидкости необходимо дополнительно учитывать силы трения, т. е. вязкость.

---

[1] Точнее говоря, на поверхности соприкасания жидких слоев друг с другом.

§ 1-4. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Многие физические свойства жидкостей изучаются в общей физике, а не в гидравлике. Гидравлика, представляя собой особый раздел профессиональной физики, занимается вопросами механики жидкости. Разумеется, при рассмотрении таких вопросов приходится интересоваться численными характеристиками различных свойств разных жидкостей.

1. Плотность жидкости ρ; вес единицы объема жидкости γ.

Возьмем некоторый объем V жидкости, имеющий массу M и вес G.

Как известно, плотностью жидкости ρ называется отношение массы M к объему V:

$$\rho = \frac{M}{V}, \tag{1-1}$$

следовательно,

$$M = \rho V. \tag{1-1'}$$

Введем обозначение:

$$\gamma = \frac{G}{V}, \tag{1-2}$$

где γ – есть вес единицы объема жидкости (ранее эту величину называли «удельным весом» или «объемным весом»); как видно

$$G = \gamma V. \tag{1-2'}$$

Нам известно, что

$$G = gM, \tag{1-3}$$

где g – ускорение свободного падения тела (ускорение силы тяжести).

Подставляя в (1-3) выражение (1-1') и (1-2'), имеем:

$$\gamma V = g\rho V, \tag{1-4}$$

откуда получаем следующую важную зависимость:[1]

$$\boxed{\rho = \frac{\gamma}{g}; \ \gamma = \rho g.} \tag{1-5}$$

Величины ρ и γ являются числами именованными:

$$\rho = \frac{[M^3]}{[L]}; \quad \gamma = \frac{[F]}{[L^3]} = \frac{[M]}{[T^2L^2]}, \tag{1-6}$$

где M, L, F, T – символы соответственно массы, длины, силы и времени.

Численные значения ρ и γ для воды и некоторых других жидкостей [при различной температуре t в градусах Цельсия (°C) приводятся в табл. 1-1]. Зависимостью ρ от давления, действующего на поверхность жидкости, и зависимостью γ от указанного давления, а также от величины g (имеющей место на поверхности земли) в этой таблице пренебрегаем. Здесь мы учитываем, в частности, что значение величины g на земной поверхности изменяется менее, чем на 0,5 %; вместе с тем точность обычных гидравлических расчетов[2] составляет достаточно часто 3–5 % и более. Именно поэтому значение величины g при выполнении гидравлических расчетов, относящихся к гидротехнической специальности, следует считать постоянным: $g = 9{,}8$ м/с^2 = const.

---

[1] В рамку заключены особенно важные формулы.

[2] Необходимо всегда руководствоваться правилом (которое недопустимо нарушать): точность исходной информации должна соответствовать точности расчета, выполняемого на основе этой информации.

Плотность ρ и вес, отнесенный к единице объема жидкости («удельный вес»), γ некоторых жидкостей

Название жидкости	t, °C	ρ, кг/м³	γ	
			кН/м³	кгс/м³
Вода	0	999,87	9,80537	999,87
	4	1000,00	9,80665	1000,00
	10	999,73	9,80400	999,73
	20	998,23	9,78929	998,23
	30	995,67	9,76419	995,67
	40	992,24	9,73055	992,24
	50	988,07	9,68966	998,07
Морская вода	15	1020 – 1030	10,00278 – 10,10085	1020 – 1030
Ацетон	15	790	7,74725	790
Бензин	15	680 – 740	6,66852 – 7,25692	680 – 740
Глицерин (безводный)	20	1260	12,2364	1260
Керосин	15	790 – 820	7,74725 – 8,04145	790 – 820
Масло веретенное	20	889	8,71811	889
Масло машинное	20	898	8,80637	898
Масло минеральное	15	890 – 960	8,72792 – 9,41438	890 – 960
Масло трансформаторное	20	887	8,69850	887
Нефть натуральная	15	700 – 900	6,86465 – 8,82598	700 – 900
Ртуть	0	13596	133,331	13596
Ртуть	20	13546	132,841	13546
Скипидар	18	870	8,53178	870
Спирт метиловый	15	810	7,94339	810
Спирт этиловый	15 – 18	790	7,74725	790
Чугун расплавленный	1200	7000	68,6465	7000
Эфир этиловый	15 – 18	740	7,25692	740

Для пресной чистой воды γ практически (после некоторого округления) равно:

$$\gamma = 10 \text{ кН/м}^3$$

(или $\gamma = 1$ тс/м³ $= 1000$ кгс/м³ $= 0{,}001$ кгс/см³ $= 1$ гс/см³).

2. С ж и м а е м о с т ь (или объемная упругость) **жидкости**. Представим себе некоторый объем жидкости V, который при повышении на Δp внешнего всестороннего давления (напряжения), действующего на него, уменьшается (снижается) на ΔV.

У п р у г о й с ж и м а е м о с т ь ю ж и д к о с т и называется способность её принимать свой прежний объем V после снятия внешней нагрузки Δp.

При небольших значениях Δp относительное изменение объема $\Delta V/V$ прямо пропорционально Δp. В соответствии с этим в качестве м е р ы у п р у г о г о с ж а т и я ж и д к о с т и принимают величину

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V},$$

причем K называют м о д у л е м о б ъ е м н о й у п р у г о с т и ж и д к о с т и. Для воды (в обычных условиях) $K = 22 \cdot 10^5$ кПа, т. е. $K \approx 220$ кН/см² или $K \approx 22\,000$ кгс/см².

3. С о п р о т и в л е н и е ж и д к о с т и р а с т я г и в а ю щ и м у с и л и я м. Особыми физическими опытами было показано, что покоящаяся жидкость (в частности, вода, ртуть) иногда способна сопротивляться очень большим

растягивающим усилиям; например, вода в определенных условиях может выдерживать растягивающие напряжения до $2{,}8 \cdot 10^4$ кПа (≈ 280 кгс/см^2), не подвергаясь разрыву [1-3].

Такого рода сопротивление растягивающим усилиям получается только, когда жидкость находится в особых условиях, не имеющих места в обыденной жизни. В § 1-5 будет отмечено, что жидкость в обычных условиях даже при наличии сжимающих напряжений, приближающихся к нулю, начинает уже обращаться в пар, т. е. перестает существовать.

Имея это в виду, в гидравлике считают, что жидкость вовсе не способна сопротивляться растягивающим усилиям.

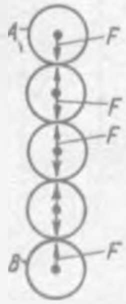


Рис. 1-2. Условная схема взаимного притяжения тел

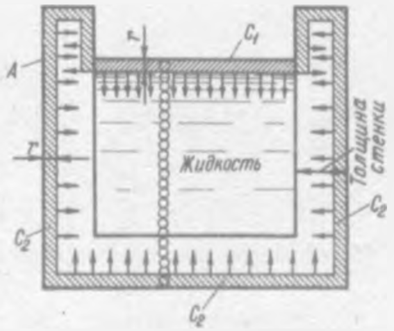


Рис. 1-3. Молекулярное давление
C_1 – поверхностный слой жидкости, обусловливающий молекулярное давление

4. Сопротивление движущейся жидкости касательным усилиям. Выше было отмечено, что в движущейся реальной жидкости обычно возникают силы трения. Эти силы уравновешивают внутренние касательные усилия, возникающие в жидкости под действием внешних сил. Величина сил трения зависит как от рода жидкости, так и от скорости относительного перемещения частиц жидкости. Этот вопрос подробно разъясняется далее на стр. 134 – 138; там же попутно приводятся соответствующие численные характеристики так называемой вязкости жидкости, от которой зависит величина сил трения.

5. Молекулярное давление. Жидкость состоит из молекул, которые при определенных условиях с некоторой силой притягиваются друг к другу.[1]

Если представить ряд шариков (рис. 1-2), притягивающихся друг к другу с силой F, то ясно, что все они, за исключением крайних (A и B), будут находиться в безразличном состоянии: две силы F, приложенные к каждому внутреннему шарику (со стороны соседних), взаимно уравновешиваются. Что касается крайних шариков A и B, то на каждый из них будет действовать только одна внешняя сила F, причем ясно, что весь «столбик», образованный взаимно притягивающимися шариками (рис. 1-2), должен быть сжат силой F.

Имея в виду условную схему на рис. 1-2, можно утверждать, что жидкость, находящаяся в сосуде (рис. 1-3), должна быть сжата своим поверхностным слоем C_1, толщина которого равна радиусу r молекулярного действия. Напомним, что радиус r есть расстояние от центра данной молекулы до точки, где сила притяжения, вызываемая этой молекулой, пренебрежимо мала. Величина r весьма мала.

[1] Физическая сторона возникновения этих сил притяжения нас в гидравлике не должна интересовать.

Давление, развиваемое тонким поверхностным слоем C_1 [который действует подобно поршню (прессу), приложенному к поверхности жидкости], как показали соответствующие опыты и расчеты, оказывается весьма большим, например для воды оно достигает примерно $11 \cdot 10^5$ кПа (11000 атм). Это давление называется молекулярным давлением.[1]

Малая сжимаемость жидкости, о чем говорилось ранее, и объясняется тем, что в большинстве случаев внешние силы сравнительно с молекулярным давлением являются незначительными.

Важно обратить внимание на следующие обстоятельства.

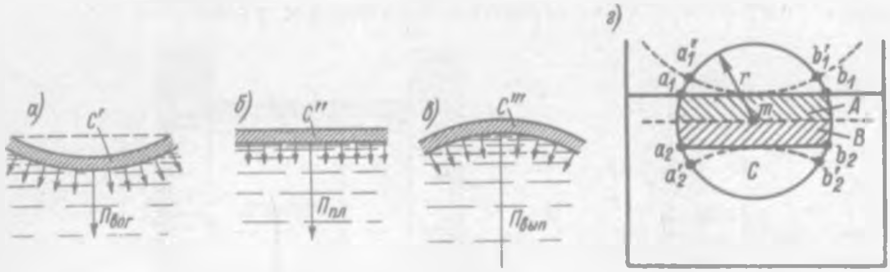


Рис. 1-4. Молекулярное давление поверхностной пленки различной кривизны ($П_{вог} < П_{пл} < П_{вып}$)

а) Считая, что поверхностный слой C_1 жидкости (рис. 1-3)[2] является совокупностью притягивающихся молекул A (рис. 1-2), можно доказать (основываясь на самых простых соображениях механики), что молекулярное давление $П_{пл}$, развиваемое плоской поверхностной пленкой C'' (равное для воды $11 \cdot 10^5$ кПа, т. е. 11000 кгс/с^2 = 11000 атм; рис. 1-4, *б*), всегда должно быть меньше молекулярного давления $П_{вып}$, развиваемого выпуклой поверхностной пленкой C''' (рис. 1-4, *в*), и больше молекулярного давления $П_{вог}$, развиваемого вогнутой поверхностной пленкой C' (рис. 1-4, *а*):

$$П_{вог} < П_{пл} < П_{вып}.$$

Это положение в курсах общей физики доказывается (для «плоской задачи») следующим образом.

Рассматриваем молекулу жидкости m, находящуюся вблизи свободной поверхности жидкости a_1b_1 (рис. 1-4, *г*). Другие молекулы, находящиеся в пределах окружности, описанной радиусом молекулярного действия r (см. чертеж), притягивают рассматриваемую молекулу m. Притяжением молекул воздуха пренебрегаем.

Силы притяжения, приложенные к молекуле m со стороны молекул, находящихся в области A (см. чертеж), уравновешиваются силами притяжения молекул, находящихся в области B (симметричной области A). Как видно, можно считать, что рассматриваемая молекула притягивается книзу только теми молекулами, которые находятся в области C, ограниченной сверху горизонтальной линией a_2b_2 (в случае плоской свободной поверхности a_1b_1) или кривой a_2b_2' (в случае вогнутой свободной поверхности $a_1'b_1'$).

Так как площадь C, ограниченная сверху линией a_2b_2, всегда больше, чем площадь C, ограниченная сверху линией $a_2'b_2$, то заключаем, что $П_{вог} < П_{пл}$ (поскольку сила притяжения F должна возрастать с возрастанием объема области C, охватывающей те молекулы, которые притягивают молекулу m книзу).

---

[1] Как видно, можно условно считать, что упомянутый весьма тонкий молекулярный слой образован как бы очень тяжелой жидкостью («вес» которой и вызывает отмеченное большое давление в 11000 атм.). Учитывая это, легко понять причину, в силу которой, например, стальная иголка, рассматриваемая в курсах физики, может плавать на поверхности воды.

[2] Рисунки 1-3 – 1-7 (как и многие другие) представляет собой безмасштабные схемы.

Рассуждая аналогично, получаем, что $П_{пл} < П_{вып}$.

б) Молекулы жидкости, покоящейся в сосуде *А* (рис. 1-3), следует рассматривать в совокупности с частицами (атомами или ионами) того материала, из которого выполнены стенки сосуда *А*. При этом легко понять, что система «жидкость – стенки сосуда» будет равномерно сжата поверхностными слоями **со всех сторон** (см. заштрихованные поверхностные слои: жидкости C_1 и материала стенок сосуда C_2).

Отсюда вытекает следующее: молекулярное давление, как бы оно ни было велико, не может разрушить сосуд, в котором находится жидкость. Это давление **внешне не проявляется и не может быть измерено каким-либо простым**

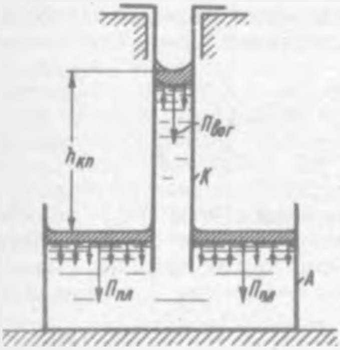


Рис. 1-5. Капиллярное поднятие, обусловливаемое разностью молекулярных давлений ($П_{пл} - П_{вог}$)

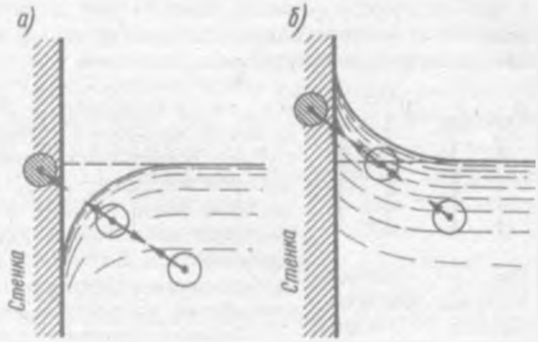


Рис. 1-6. «Несмачиваемая» (*а*) и «смачиваемая» (*б*) стенки

прибором. В связи с этим, говоря о давлении внутри жидкости или о давлении жидкости на ту или другую стенку, мы далее не будем учитывать молекулярного давления, считая, что оно **как бы совсем не существует**. Исключение здесь будет составлять только вопрос о капиллярности (см. п. 6).

Выше в п. 3 было отмечено, что в жидкости иногда могут возникнуть **растягивающие** усилия. Подчеркнем теперь, что такое растяжение следует понимать только как снижение молекулярного сжимающего давления, обусловленного плоской поверхностной пленкой.

6. **Капиллярное поднятие жидкости**. Вопросы капиллярности являются весьма существенными в области гидротехники.

Покажем на рис. 1-5 сосуд *А*, наполненный жидкостью, и капиллярную трубку *К*, один конец которой опущен в жидкость. Выше было показано, что жидкость в сосуде находится под давлением $П_{пл}$ (развиваемым своим собственным плоским поверхностным слоем).

Обратимся теперь к рассмотрению жидкости в капиллярной трубке. Как видно из рис. 1-6, в районе примыкания поверхности жидкости к стенке трубки можем получить одну из следующих картин:

если взаимное притяжение двух молекул жидкости велико сравнительно с притяжением молекул жидкости к частице твердой стенки, то получаем схему рис. 1-6, *а* (случай «несмачиваемой стенки»);

если же взаимное притяжение двух молекул жидкости мало сравнительно с притяжением молекул жидкости к частице твердой стенки, то получаем схему на рис. 1-6, *б* (случай «смачиваемой стенки»).

В том случае, когда диаметр трубки уменьшается, противоположные стенки трубки сближаются, причем схема на рис. 1-6, *а* приводит нас к выпуклой поверхностной пленке – **к выпуклому мениску** (рис. 1-7, *а*); схема же на рис. 1-6, *б* – к вогнутой поверхностной пленке, т. е. к вогнутому мениску в трубке (рис. 1-7, *б*).

Имея это в виду, можем сказать, что если на поверхность жидкости в сосуде (рис. 1-5) наложен как бы поршень (пресс), развивающий давление $П_{пл}$ (для жидк

$П_{пл} = 110$ кПа)[1], то на поверхность жидкости в трубке наложен поршень, развивающий давление или $П_{вып}$ или $П_{вог}$ (рис. 1-5).

Под действием разности давлений $П_{пл}$ и $П_{вог}$ и происходит поднятие жидкости в «смачиваемой» трубке на высоту $h_{к.п}$ (рис. 1-5); под действием же разности давлений $П_{вып}$ и $П_{пл}$ происходит опускание жидкости в «несмачиваемой» трубке.

Жидкость, находящаяся в трубке (рис. 1-5) и расположенная выше уровня жидкости в сосуде, называется капиллярной, в отличие от остальной жидкости, которая иногда называется здесь гравитационной. Надо подчеркнуть, что никакого различия между капиллярной и гравитационной жидкостями в отношении их физических свойств нет. Законы равновесия и движения жидкости совершенно одинаковы для капиллярной и гравитационной областей. Единственное отличие капиллярной жидкости от гравитационной заключается в том, что первая названная жидкость сжимается несколько меньшим поверхностным молекулярным давлением.

Рис. 1-7. Мениск в случае «несмачиваемой» (*а*) и «смачиваемой» (*б*) трубки

Величина $h_{к.п}$, показанная на рис. 1-5, называется максимальной (для данного диаметра трубки) высотой капиллярного поднятия жидкости в трубке. Чем меньше диаметр капилляра, тем сильнее искривляется мениск и тем значительнее молекулярное давление в капилляре ($П_{вог}$ или $П_{вып}$) отличается от молекулярного давления в сосуде ($П_{пл}$). В соответствии с этим при уменьшении диаметра капиллярной трубки высота $h_{к.п}$ на рис. 1-5 должна увеличиваться. В случае, когда высота трубки меньше $h_{к.п}$, высота капиллярного поднятия будет равна возвышению верха трубки над горизонтом жидкости в сосуде.

Помимо изложенного выше объяснения причин капиллярности, в литературе часто приводится и иная (условная) точка зрения на данный вопрос, в основу которой кладется представление о гипотетической (предположительной, в данном случае несуществующей) силе так называемого поверхностного натяжения. Здесь предполагается, что поясненное выше молекулярное давление обусловливается не взаимным притяжением молекул (см. выше), а натяжением («поверхностным натяжением») некоторой несуществующей (воображаемой) упругой пленки, обтягивающей рассматриваемый объем жидкости; при этом сила растяжения («натяжения») этой пленки принимается такой, чтобы она вызвала реально существующие силы поверхностного молекулярного давления, обусловленные взаимным притяжением молекул (притяжением, которое в этом случае исключается из непосредственного рассмотрения). Как видно, гипотетическое поверхностное натяжение имитируют силы взаимного притяжения молекул, которые в отличие от «поверхностного натяжения» реально существуют. При этом, исходя из этих сил (зная величину молекулярного давления), можно решать (вовсе не используя условное понятие «поверхностного натяжения») все интересующие нас практические задачи на основании обычных правил механики.

Важно подчеркнуть, что непосредственно на внутренней поверхности капиллярной трубки (диаметром D), по-видимому, образуется весьма тонкий слой воды (толщиной δ, измеряемый, возможно, долями миллиметра), механические характеристики которого отличны от механических характеристик обычной воды. Согласно модели, предлагаемой отдельными специалистами, указанный слой может быть назван слоем *«твердой воды»*. Считают, что такая твердая вода, рассматриваемая как сплошная среда, способна, находясь в покое, выдерживать (в отличие от обычной воды) касательные напряжения τ. Отсюда ясно, что в соответствии с отмеченной моделью, когда $D < 2\delta$, вода в тонкой трубке при определенных условиях не в состоянии будет двигаться (преодолевая касательные напряжения τ). В таких условиях подобные трубки не должны пропускать воду.

[1] Что соответствует в старой системе единиц $\approx 11\,000$ атм.

§ 1-5. ОСОБЫЕ СОСТОЯНИЯ ЖИДКОСТИ

В практике гидротехнического строительства приходится сталкиваться со случаями, когда жидкость (вода) начинает приобретать особые состояния: или при движении жидкости к ней начинают присоединяться газообразные или твердые тела, или она сама начинает переходить в твердое или газообразное состояние.

Рассмотрим эти два случая (имея в виду воду, как пример жидкости).

1-й случай. Присоединение к движущейся жидкости газообразных и твердых тел.

1. Аэрация потока. Если к потоку воды, движущейся с большими скоростями, имеется доступ наружного воздуха, то поток может насыщаться проникающими в него снаружи пузырьками воздуха. В результате получается смесь воды и пузырьков воздуха (получаем так называемую двухфазную систему). Такое явление называется аэрацией потока.[1]

2. Захват потоком наносов. Если водный поток имеет размываемое русло (например, русло, образованное мелким песком), то, как показывает опыт, при достаточно больших скоростях движения воды поток начинает насыщаться песчинками, которые движутся вместе с водой во взвешенном состоянии. Здесь также получаем двухфазную систему. Обычно, помимо взвешенных песчинок, имеются еще песчинки, перемещающиеся непосредственно по дну русла.

2-й случай. Переход воды в твердое или газообразное состояние.

1. Образование в воде кристаллов льда. При повышении давления или при снижении температуры в воде могут зарождаться кристаллы льда, причем вместо однородной жидкой среды получаем двухфазную систему (вода плюс лед).

2. Образование в воде областей (разрывов), заполненных воздухом и парами воды. Кипение и кавитация [1-5]. Обычно в воде содержится растворенный воздух. Как известно из курса физики, при снижении давления p в жидкости или при повышении ее температуры $t°$ такой воздух начинает выделяться из отдельных элементарных объемов воды, причем в воде образуются разрывы (воздушные «пузыри»). В результате сплошность воды нарушается: до тех пор, пока пузыри воздуха не выйдут из нее через ее свободную поверхность, будем иметь двухфазную систему (вода плюс воздушные пузыри).

Рассмотрим далее воду, не содержащую растворенного воздуха.

Обозначим через $p_{н.п}$ давление паров воды, насыщающих то пространство, в котором они находятся. Величину $p_{н.п}$ обычно называют «давлением насыщенных паров». Известно, что $p_{н.п}$ зависит от температуры $t°$ паров:

$$p_{н.п} = f(t°) \tag{1-7}$$

Численные значения $p_{н.п}$ для паров воды (в зависимости от $t°$) следующие:

$t°$, С	0	25	50	75	100	125	150
$p_{н.п}$, кПа	0,6	3,2	12,6	39,2	103,2	237,0	485,0
$p_{н.п}$, кгс/см²	0,006	0,032	0,126	0,392	1,032	2,370	4,850

Как видно, с увеличением $t°$ увеличивается и $p_{н.п}$.

Предположим, что мы имеем некоторый объем воды, сплошность которого не нарушена. Обозначим давление в этой воде через p и температуру ее через $t°$.

[1] Аэрацией также называют и растворение воздуха в воде.

Представим себе далее, что в силу тех или других причин температура t° начинает увеличиваться или давление p – уменьшаться. Очевидно, в связи с этим в некоторый момент времени можем получить соотношение:

$$p < p_{н.п}. \tag{1-8}$$

Как показывает опыт, при таком соотношении в обычных условиях внутри рассматриваемого объема воды возникают пузырьки, заполненные «насыщенными парами» воды. При этом мы получаем двухфазную систему (вода плюс пузырьки пара). Чтобы заставить эти пузырьки захлопнуться (закрыться), необходимо добиться соотношения:

$$p > p_{н.п}, \tag{1-9}$$

т. е. необходимо на достаточную величину или повысить давление p, или понизить давление $p_{н\,п}$ (за счет снижения температуры t°).

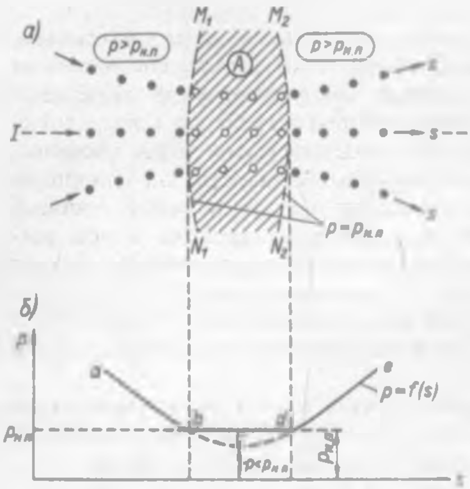


Рис. 1-8. Явление кавитации

M_1N_1 – место раскрытия пузырьков пара; M_2N_2 – место захлопывания их

Появление в воде пузырьков пара (а если вода предварительно не была очищена от растворенного в ней воздуха, то – паровоздушных пузырьков) называется *кавитацией* (от латинского слова «пустота»).

Можно различать (условно) как бы два разных явления, возникающих при соотношении (1-8):

а) к и п е н и е в о д ы, когда кавитационные пузырьки (паровые или паровоздушные), возникающие в воде, всплывают и выходят из жидкости через ее свободную поверхность;

б) к а в и т а ц и ю (п р и о т с у т с т в и и к и п е н и я), когда упомянутые пузырьки, возникающие в д в и ж у щ е й с я воде, не выходят из нее, а з а х л о п ы в а ю т с я (закрываются) в н у т р и п о т о к а в о д ы.

Чтобы дополнительно пояснить явление кавитации (при отсутствии кипения) представим на рис. 1-8, *а* поток воды, давление вдоль которого (вдоль линии *I – I*), согласно правилам гидравлики (см. ниже), должно измениться, как показано кривой *abcde* на рис. 1-8, *б*. В зоне *А* потока, заштрихованной на рисунке, давление $p < p_{н\,п}$. Линии M_1N_1 и M_2N_2 являются границами этой зоны; во всех точках этих границ $p = p_{н\,п}$.

В элементарных объемах воды, движущихся в направлении стрелок, при пересечении ими границы M_1N_1 возникнут пузырьки пара; в самой зоне *А* будем иметь двухфазную систему; в районе границы M_2N_2, как показывает опыт, пузырьки пара, попадая в область, где $p > p_{н\,п}$, о ч е н ь б ы с т р о и с б о л ь ш о й с и л о й з а х л о п ы в а ю т с я, причем за линией M_2N_2 получаем сплошную среду (такую же, как и перед линией M_1N_1).

Существенно подчеркнуть, что появление в воде пузырьков пара (разрывов) в районе зоны *А* (рис. 1-8, *а*) п р е п я т с т в у е т с н и ж е н и ю д а в л е н и я в э т о й з о н е д о в е л и ч и н ы, м е н ь ш е й $p_{н\,п}$. В с л е д с т в и е п о я в л е н и я п у з ы р ь к о в п а р а вместо кривой *abcde* (рис. 1-8, *б*) получаем кривую *abde*, показанную сплошной линией (на участке *bd* – горизонтальной).

Следует считать, что п р а к т и ч е с к и д а в л е н и е p в в о д е, в силу сказанного, не может быть меньше величины $p_{н\,п}$.

Упомянутое выше захлопывание пузырьков пара в районе границы M_2N_2 сопровождается сильными ударами, которые иногда способствуют постепенному разрушению поверхности твердых стенок, ограничивающих поток.[1] Такое разрушение твердых стенок называется кавитационной эрозией.

§ 1-6. МОДЕЛЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ПРИ РЕШЕНИИ ВОПРОСОВ МЕХАНИКИ (В ЧАСТНОСТИ, МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ). СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЖИДКОСТЬ. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖИДКОСТИ

Однородная жидкость, которую мы далее, как правило, и рассматриваем, представляет собой не сплошное (не непрерывное) тело, а тело, состоящее из молекул, расположенных на некотором (весьма небольшом) расстоянии друг от друга. Как видно, жидкость имеет, строго говоря, прерывную (дискретную) структуру. Однако при решении различных гидромеханических задач пренебрегают отмеченным обстоятельством и рассматривают жидкость как сплошную (непрерывную) среду – континуум (от лат. continuum – непрерывное, сплошное). Как видно, при рассмотрении жидкости поступают так же, как и при рассмотрении твердых тел (в строительной механике) или при рассмотрении сыпучих тел (песка – в механике грунта).

Модель сплошной среды имеет свою теорию, одинаково применимую (разумеется до определенного предела) и к твердым, и к сыпучим телам, и к жидкости.

Выше мы видели, что только в редких случаях жидкость получает существенные разрывы (см. § 1-5). Однако часто и такие разрывы мы исключаем из рассмотрения, причем и здесь пользуемся моделью сплошной среды.

Существенно подчеркнуть, что заменив для расчета жидкость сплошной средой, мы приписываем этой сплошной среде те механические свойства, которые были найдены экспериментальным путем для действительной жидкости (в данном случае – для воды); при этом, оперируя сплошной средой, обладающей указанными физическими (механическими) свойствами, мы такое воображаемое тело всюду далее условно называем жидкостью (водой).[2]

Что касается сил, действующих на воду (рассматриваемую в виде описанной сплошной среды), то их необходимо разделить на две различные группы: внутренние силы, именуемые иногда усилиями, и внешние силы. Внутренними силами называются силы взаимодействия между материальными точками (частицами) жидкости (рассматривая жидкость, как сплошную среду, мы, разумеется, имеем право говорить о «частицах» жидкости, т. е. об элементарных объемах жидкости). Внешние силы – суть силы, приложенные к частицам рассматриваемого объема жидкости со стороны других

---

[1] Можно думать, что большая сила удара обусловливается здесь тем, что при захлопывании парового пузырька мгновенно исчезает (снимается) молекулярное давление с поверхностей воды, ограничивающих паровой пузырек; см. § 1-4, п. 5, где отмечается, что это давление равно, например, 110 кПа (т. е. ≈11 000 атм.). Исчезновение поверхностной пленки с некоторым сдвигом во времени по отношению к полному исчезновению пузырька, по-видимому, и обусловливает удар большой силы (вызванный расширением жидкости, с которой снято большое сжимающее усилие).

[2] Считая жидкость, как правило, практически несжимаемой, мы, естественно, и сплошную среду (как модель) также полагаем несжимаемой (исключение здесь составляет только вопрос о гидравлическом ударе; см. § 9-8 – 9-12).

вещественных тел (или физических полей), в частности, со стороны жидкости, окружающей рассматриваемый ее объем.

Внешние силы, действующие на данный объем жидкости, в свою очередь, могут быть разделены также на две группы:

1) Силы массовые. Эти силы действуют на все частицы, составляющие рассматриваемый объем жидкости: величина этих сил пропорциональна массе жидкости. В случае однородной жидкости, т. е. жидкости, имеющей всюду одинаковую плотность ($\rho = \text{const}$), величина массовых сил будет пропорциональна также объему жидкости; поэтому при $\rho = \text{const}$ массовые силы можно называть объемными силами (что мы далее и будем делать). К числу объемных сил относится собственный вес жидкости; силы инерции жидкости также можно рассматривать как внешние объемные силы. Интенсивность (плотность распределения) объемных сил в различных точках пространства, занятого жидкостью, в общем случае может быть разной. В частном случае, когда интенсивность действия объемных сил одинакова во всех точках пространства, занятого жидкостью, величина объемной силы F, приложенной к данному объему V жидкости, равна

$$F = M\phi \text{ или } F = V\phi_0, \tag{1-10}$$

где M — масса объема V жидкости; ϕ и ϕ_0 — интенсивность (плотность распределения) рассматриваемой внешней силы, причем ϕ_0 является удельной объемной силой, отнесенной к единице объема жидкости и ϕ — удельной объемной силой, отнесенной к единице массы жидкости (по существу величина ϕ представляет собой ускорение, которым характеризуется рассматриваемое поле объемных сил).

2) Силы поверхностные. Эти силы приложены к поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости, выделенный, например, внутри покоящейся или движущейся жидкости (см. объем $ABCD$ жидкости на рис. 1-9). При равномерном распределении этих сил по данной поверхности величина их пропорциональна площади этой поверхности. К числу таких сил относятся, например, атмосферное давление, действующее на так называемую свободную поверхность жидкости, а также силы трения, о которых говорили в § 1-3 (действующие по поверхности, намеченной внутри жидкости). Изучая механическое действие жидкости на поверхность какого-либо твердого тела, можно говорить о реакции этой поверхности, т. е. реактивной силе, приложенной к жидкости со стороны твердого тела. Такая сила также должна рассматриваться как внешняя поверхностная сила (по отношению к объему жидкости, ограниченному поверхностью упомянутого твердого тела). В общем случае плотность распределения поверхностной силы (т. е. напряжение) в различных точках рассматриваемой поверхности может быть различной. В частном случае, когда поверхностная сила P распределяется равномерно по рассматриваемой поверхности площадью S, величина этой силы

$$P = S\sigma, \tag{1-11}$$

где σ — напряжение, вызываемое рассматриваемой внешней поверхностной силой. Из дальнейшего будет видно, что напряжения σ внешней поверхностной силы в некоторых случаях (например, в случае движущейся реальной жидкости со скоростью v) оказываются не ортогональными к площадкам mn, на которые они действуют (см. рис. 1-9). В этом случае напряжение σ можем разложить на две составляющие: а) нормальную составляющую, которую можно назвать нормальным напряжением $\sigma_н$, и б) касательную составляющую, которую можно назвать касательным напряжением τ.

Само собой разумеется, что при изучении сил, действующих на жидкое тело, так называемые сосредоточенные силы должны исключаться из рассмотрения.

Что касается напряженного состояния жидкости, рассматриваемой как сплошная среда, то этот вопрос легко себе представить на основе тех сведений, которые сообщались, например, в курсе сопротивления материалов применительно к твердому телу.

Имеем объем V жидкости, напряженный некоторыми сжимающими его силами.[1] Выделяем в нем у рассматриваемой точки M элементарный объем δV, причем у точки M намечаем элементарную площадку $m-n$ («площадку действия») определенной ориентировки (т. е. определенного наклона).[2]

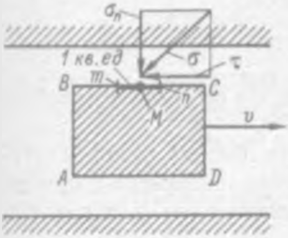


Рис. 1-9. Объем $ABCD$, выделенный внутри жидкости (движущейся со скоростью v); σ — напряжение поверхностной силы, действующей на грань BC

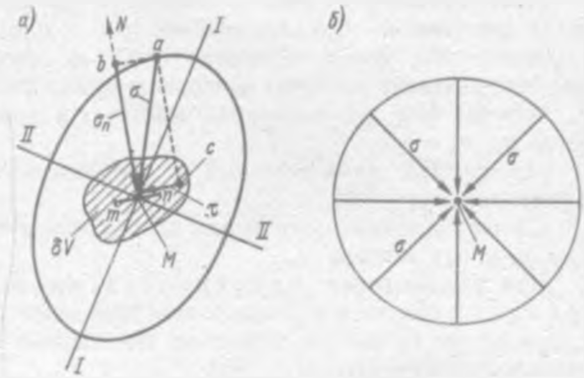


Рис. 1-10. Напряжение в заданной точке M сплошной среды: a — эллипс напряжений, $б$ — «шаровая поверхность напряжений» (σ = const; $\tau = 0$)
($I - I$) и ($II - II$) — главные оси деформации; ($m - n$) — произвольно ориентированная «площадка действия», намеченная в точке M; σ_n и τ — нормальное и касательное напряжения в точке M для «площадки действия» $m - n$

Напряжение в точке M, принадлежащей площадке $m-n$ (площадью равной, например, 1 кв. ед.), обозначим через σ. Это напряжение, как известно, представляет собой векторную величину (рис. 1-9), причем данная величина с изменением ориентировки (угла наклона) площадки $m-n$ должна в общем случае изменять и свое значение (модуль) и свое направление (по отношению к площадке действия). Обозначим, как то было сказано выше (рис. 1-9):

а) нормальное (к площадке действия) напряжение через σ_n;

б) касательное (к площадке действия) напряжение через τ.

---

[1] Выше мы условились не рассматривать особые случаи жидкости, когда она подвергается растяжению. Исключая далее из рассмотрения растягивающие напряжения, сжимающие напряжения будем считать положительными (как это делается, например, всюду в курсах механики грунта и других случаях, характеризуемых полным отсутствием растягивающих напряжений; подробнее см. сноску на стр. 33).

[2] Далее нам придется часто пользоваться выражением: «элементарная площадка», намеченная внутри жидкости, и «элементарный объем» жидкости. «Элементарной площадкой» будем называть весьма малую площадку, удовлетворяющую условию: соответствующие координаты (x, y, z) ее точек, также как и величины p и u (см. далее § 3-1), относящиеся к этим точкам, отличаются друг от друга на бесконечно малую величину. «Элементарный объем» определяется аналогично.

Известно, что для данной точки M сплошной напряженной среды можно построить, рассматривая плоскую задачу, так называемый эллипс напряжений (эллипс Ляме), при помощи которого поясняется, как в зависимости от ориентировки площадки действия $m-n$ изменяются напряжения σ, σ_n и τ, относящиеся к рассматриваемой точке M.

Такой эллипс напряжений показан на рис. 1-10, *а*. Взаимно ортогональные оси $I-I$ и $II-II$ эллипса будем называть главными осями деформаций элементарного объема δV.[1] Известно, что касательные напряжения τ для «площадок действия», ортогональных к главным осям $I-I$ и $II-II$ равны нулю: $\tau_{I-I} = \tau_{II-II} = 0$; нормальные напряжения для этих площадок называются главными напряжениями и обозначаются через σ_1 (большее напряжение) и через σ_2 (меньшее напряжение).

Рассматривая для точки M некоторую произвольно ориентированную площадку действия $m-n$, имеем для нее (рис. 1-10, *а*):

вектор Ma, конец которого (точка a) лежит на эллипсе; этот вектор дает нам значение (модуль) и направление напряжения σ; $\sigma = Ma$;

нормаль MN, вдоль которой действует в данной точке нормальное напряжение σ_n; $\sigma_n = Mb$;

отрезок Mc, ортогональный к нормали MN, выражающий касательное напряжение τ; $\tau = Mc$.

Следует запомнить, что эллипс напряжений очерчивается по концу вектора σ, а не по концу вектора σ_n.

При рассмотрении пространственной задачи вместо эллипса напряжений получаем в общем случае трехосный эллипсоид напряжений, причем в этом случае будем иметь уже не два главных напряжения (σ_1 и σ_2), а три главных напряжения (σ_1, σ_2, σ_3).

Известно, что в частном случае, когда в рассматриваемом напряженном теле отсутствуют касательные напряжения (такой случай может иметь место, например, когда данное твердое тело является невесомым, причем оно подвергнуто всестороннему равномерному сжатию) эллипсоид напряжений обращается в шаровую поверхность (рис. 1-10, *б*). Следовательно, *при отсутствии касательных напряжений (в рассматриваемом теле) значение (модуль) полного напряжения в любой точке данного тела не зависит от ориентировки площадки действия.*

§ 1-7. СОСТАВ КУРСА ГИДРАВЛИКИ

ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ГИДРАВЛИКИ

Курс гидравлики (технической механики жидкости) разбивается на два раздела: гидростатику, где рассматривается покоящаяся жидкость и гидродинамику, где изучается движущаяся жидкость.[2]

Раздел, посвященный гидростатике, сравнительно невелик (глава 2). Что касается раздела гидродинамики, то он, в свою очередь, разбивается на две основные части.

---

[1] Напомним, что в каждой точке напряженного тела существуют три взаимно ортогональных элемента, которые и после деформации остаются взаимно ортогональными. Вдоль этих элементов и направлены главные оси деформации. Главные оси деформации в случае однородного изотропного тела совпадают с главными осями эллипса напряжений (эллипса напряженного состояния в рассматриваемой точке).

[2] В разделе «Гидродинамика» мы в некоторой мере освещаем и вопросы кинематики (т. е. «геометрии движения») жидкости.

строительства. Этот аппарат также находит широкое применение при проектировании систем водоснабжения и канализации, гидравлических машин и т. п.

Следует подчеркнуть, что в учебном курсе гидравлики даются только основы этой дисциплины. Дальнейшее развитие основ гидравлики и практические приложения их, тесно связанные с проектированием и конструированием сооружений, приходится излагать в таких учебных курсах, как, например, «Гидротехнические сооружения» [1-8; 1-9], «Использование водной энергии» [1-2], «Инженерная мелиорация», «Водный транспорт» [1-4], «Водоснабжение» [1-1] и др.

§ 1-8. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ ГИДРАВЛИКИ И ОБ ЕЕ ОСНОВОПОЛОЖНИКАХ [1]

Зарождение отдельных представлений из области гидравлики следует отнести еще к глубокой древности, ко времени гидротехнических работ, проводившихся древними народами, населявшими Египет, Вавилон, Месопотамию, Индию, Китай и другие страны. Однако прошло много веков и даже тысячелетий, прежде чем начали появляться отдельные, вначале не связанные друг с другом, попытки выполнить научные обобщения тех или других наблюдений, относящихся к гидравлическим явлениям. В далекой древности гидравлика являлась только ремеслом без каких-либо научных основ.

Период Древней Греции. В Греции еще за 250 лет до н. э. начали появляться трактаты, в которых уже выполнялись достаточно серьезные для того времени теоретические обобщения отдельных вопросов механики жидкости. Математик и механик того времени Архимед (ок. 287–212 гг. до н. э.) оставил после себя анализ вопросов гидростатики и плавания. За истекшее время к труду Архимеда, посвященному гидростатике, мало что удалось добавить.

Представитель древнегреческой школы Ктезибий (II или I век до н. э.) изобрел пожарный насос, водяные часы и некоторые другие гидравлические устройства. Герону Александрийскому (вероятно, I век н. э.) принадлежит описание сифона, водяного органа, автомата для отпуска жидкости и т. п.

Период Древнего Рима. Римляне заимствовали многое у греков. В Древнем Риме строились сложные для того времени гидротехнические сооружения: акведуки, системы водоснабжения и т. п. В своих сочинениях римский инженер-строитель Фронтин (40–103 г. н. э.) указывает, что во времена Траяна в Риме было 9 водопроводов, причем общая длина водопроводных линий составляла 436 км. Можно предполагать, что римляне уже обращали внимание на наличие связи между площадью живого сечения и уклоном дна русла, на сопротивление движению воды в трубах, на неразрывность движения жидкости. Например, Фронтин писал, что количество воды, поступившей в трубу, должно равняться количеству воды, вытекающей из нее.

Период Средних веков. Этот период, длившийся после падения Римской империи около тысячи лет, характеризуется, как принято считать, регрессом, в частности, и в области механики жидкости.

Эпоха Возрождения. В течение второй половины XV века и в XVI веке начали развиваться экспериментальные исследования (см. ниже), постепенно опровергавшие схоластические воззрения, поддерживаемые католической церковью. В этот период в Италии появилась гениальная личность – Леонардо да Винчи (1452–1519), который, как известно, вел свои научные (экспериментальные и теоретические) исследования в самых различных областях; в частности, Леонардо изучал принцип работы гидравлического пресса, аэродинамику летательных аппаратов, образование водо-

---

[1] Здесь приводятся исторические предпосылки, послужившие основой для создания современного курса технической механики жидкости (гидравлики), относящегося к инженерно-строительной, гидротехнической специальности (подробнее см. [1-10]). Эти исторические предпосылки освещаются нами только в рамках до периода 1920–1930 гг. (т. е. в пределах так называемой «исторической давности»); при этом мы имели в виду, что дальнейшее развитие гидравлики, которое осуществлялось уже нашими современниками, достаточно полно будет отражено в самом курсе гидравлики. В этом параграфе нам, естественно, пришлось пользоваться отдельными терминами и понятиями, с которыми читатель ознакомится только при изучении материала, излагаемого ниже.

воротных областей, отражение и интерференцию волн, истечение жидкости через отверстия и водосливы и другие гидравлические вопросы. Он изобрел центробежный насос, парашют, анемометр. Различные работы Леонардо отражены в сохранившихся 7 тыс. страниц его рукописей, хранящихся в библиотеках Лондона, Виндзора, Парижа, Милана и Турина. По-видимому, справедливо будет признать, что Леонардо да Винчи является основоположником механики жидкости.

К периоду Возрождения относятся работы нидерландского математика – инженера Симона Стевина (1548–1620), определившего величину гидростатического давления на плоскую фигуру и объяснившего «гидростатический парадокс». В этот период великий итальянский физик, механик и астроном Галилео Галилей (1564–1642) показал, что гидравлические сопротивления возрастают с увеличением скорости и с возрастанием плотности жидкой среды; он разъяснял также вопрос о вакууме.

Период XVII века и начало XVIII века. В это время механика жидкости все еще находилась в зачаточном состоянии. Вместе с тем здесь можно отметить имена следующих ученых, способствовавших ее развитию: Кастелли (1577–1644) – преподаватель математики в Пизе и Риме – в ясной форме изложивший принцип неразрывности; Торричелли (1608–1647) – выдающийся математик и физик – дал формулу расчета скорости истечения жидкости из отверстия и изобрел ртутный барометр; Паскаль (1623–1662) – выдающийся французский математик и физик – установивший, что значение гидростатического давления не зависит от ориентировки площадки действия, кроме того, он окончательно решил и обосновал вопрос о вакууме; Ньютон (1643 н. ст. – 1727) – гениальный английский физик, механик, астроном и математик – давший наряду с решением ряда гидравлических вопросов приближенное описание законов внутреннего трения жидкости.

Середина и конец XVIII века. Формируются теоретические основы современной механики жидкости. Анализируя соответствующий исторический материал, можно видеть, что вопрос о вакууме осознавался человечеством на протяжении 2 тыс. лет (от Аристотеля, неправильно осветившего этот вопрос, до Паскаля); вопрос о неразрывности движения жидкости – на протяжении 1,5 тыс. лет (от Фронтина до Кастелли). Такое положение объясняется тем, что прежде чем уяснить подобные вопросы (с современной точки зрения достаточно простые), следовало предварительно ясно себе представить основные положения физики и механики, которые в наше время люди усваивают с детского возраста: вопрос о силе тяжести и всемирном тяготении, вопрос о скорости и ускорении, о давлении атмосферы и т. п. Только освоив такие представления, можно легко разобраться в «элементарных» положениях механики жидкости. Однако решение всех этих вопросов физики и механики являлось весьма трудной задачей: на пути раскрытия их стояла католическая церковь, различные предрассудки, а также существовавшие метафизические объяснения различных явлений (например, говорили, что снаряд летит в воздухе потому, что тот, кто отлил его, ввел в него известную силу, которая и обусловливает движение снаряда; Аристотель учил, что летящую стрелу приводит в движение воздух и т. п.).

И вот к середине XVIII века трудами ряда ученых (Галилея, Коперника, Кеплера, Паскаля, Декарта, Гука, Ньютона, Лейбница, Ломоносова, Клеро и многих других) указанные препятствия, наконец, были в значительной мере преодолены. После этого относительно быстро начали создаваться современные научные основы механики жидкости. Эти научные основы были заложены тремя учеными XVIII века: Даниилом Бернулли, Эйлером и Д'Аламбером.

Д. Бернулли (1700–1782) – выдающийся физик и математик – родился в Гронингене (Голландия). С 1725 по 1733 г. жил в Петербурге, являлся профессором и членом Петербургской Академии наук. В Петербурге он написал свой знаменитый труд «Гидродинамика», который был впоследствии опубликован (в 1738 г.) в г. Страсбурге. В этом труде он осветил ряд основополагающих гидравлических вопросов и в частности объяснил физический смысл слагаемых, входящих в современное уравнение установившегося движения (идеальной жидкости), носящее его имя.

Л. Эйлер (1707–1783) – великий математик, механик и физик – родился в г. Базеле (Швейцария). Жил в Петербурге с 1727 до 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни. Был членом Петербургской Академии наук. Умер в Петербурге. Могила его находится в Ленинградском некрополе. Эйлер не только подытожил и обобщил в безупречной математической форме работы предшествующих авторов, но составил известные дифференциальные уравнения движения и относительного равновесия жидкости, носящие его имя, а также опубликовал целый ряд оригинальных решений гидравлических задач, широко используя созданный к тому времени математический аппарат.

Ж. Д'Аламбер (1717–1783) – математик и философ; член Парижской, французской и других Академий наук, а также Петербургской Академии наук (с 1764 г.). Опубликовал ряд трактатов, относящихся к равновесию и движению жидкости; предполагают, что Д'Аламбер первый отметил возможность кавитации жидкости.

В указанный период существенный вклад в дело развития механики жидкости внесли также два выдающихся французских математика того времени: Ж. Лагранж (1736–1813), который ввел понятие потенциала скорости и исследовал волны малой высоты, и П. Лаплас (1749–1827), создавший, в частности, особую теорию волн на поверхности жидкости.

Середина и конец XVIII века. Зарождается техническое (прикладное) направление механики жидкости. Наряду с учеными Л. Эйлером, Д. Бернулли, Д'Аламбером и др., сформулировавшими основы современной механики жидкости, в середине и в конце XVIII в. во Франции начала постепенно образовываться особая школа – школа ученых-инженеров, которые стали формировать механику, как прикладную (техническую) науку. Рассматривая гидравлику, как отрасль техники, а не математики, представители этой школы ввели преподавание механики жидкости в технических учебных заведениях. К концу XVIII в. французская школа стала основной гидравлической школой в области технических наук.

Яркими представителями этой школы явились: А. Пито (1695–1771) – инженер-гидротехник, член Парижской Академии наук, изобретатель «прибора Пито»; А. Шези (1718–1798) – директор Французской школы мостов и дорог (Эколь де Пон э Шоссе), сформулировавший параметры подобия потоков и обосновавший формулу, носящую его имя; Ж. Борда (1733–1799) – военный инженер, который занимался вопросами истечения жидкостей из отверстий и нашел потери напора при резком расширении потока; П. Дюбуа (1734–1809) – инженер-гидротехник и военный инженер, составивший обобщающий труд «Принципы гидравлики».

Техническое направление механики жидкости развивалось и в других странах. Здесь можно отметить итальянского профессора Д. Вентури (1746–1822) и немецкого ученого-инженера Р. Вольтмана (1757–1837).

В результате деятельности ученых-инженеров техническая механика жидкости (гидравлика) обогатилась изобретением соответствующей измерительной аппаратуры (пьезометрами, трубками Пито, вертушками Вольтмана и т. п.); идеей использования материальных (вещественных) моделей тех или других гидравлических явлений для их изучения и для проектирования соответствующих инженерных сооружений; идеей теоретического построения приближенных расчетных зависимостей с уточнением таких зависимостей при помощи введения в них эмпирических коэффициентов.

Вне зависимости от формирования технической механики жидкости в странах Западной Европы гениальный русский ученый М. В. Ломоносов (1711–1765), учитывая рост промышленности и строительства в России, начал также развивать механику жидкости в техническом направлении.

Развитие технической механики жидкости (гидравлики) в XIX в. за рубежом. Зародившееся во Франции техническое (гидравлическое) направление механики жидкости быстро начало развиваться как в самой Франции, так и в других странах. В этот период в той или другой мере были разработаны или решены следующие проблемы: основы теории плавно изменяющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах (Беланже, Кориолис, Сен-Венан, Дюпюи, Буден, Бресс, Буссинеск); вопрос о гидравлическом прыжке (Бидоне, Беланже, Бресс, Буссинеск); экспериментальное определение параметров, входящих в формулу Шези (Базен, Маннинг, Гангилье, Куттер); составление эмпирических и полуэмпирических формул для определения гидравлических сопротивлений в различных случаях (Кулон, Хаген, Сен-Венан, Пуазейль, Дарси, Вейсбах, Буссинеск); открытие двух режимов движения жидкости (Хаген, Рейнольдс); получение так называемых уравнений Навье–Стокса, а также уравнений Рейнольдса на основе использования модели осредненного турбулентного потока (Сен-Венан, Рейнольдс, Буссинеск); установление принципов гидродинамического подобия, а также критериев подобия (Коши, Риич, Фруд, Гельмгольц, Рейнольдс); основы учения о движении грунтовых вод (Дарси, Дюпюи, Буссинеск); теория волн (Герстнер, Сен-Венан, Риич, Фруд, Стокс, Гельмгольц, Базен, Буссинеск); вопросы истечения жидкости через водосливы и отверстия (Беланже, Кирхгоф, Базен, Буссинеск, Борда, Вейсбах). В этот период изучались также взвесенесущие потоки (Фарг, Дюпюи), неустановившееся движение (Сен-Венан, Буссинеск, Дюпюи).

Зарождение и развитие технической механики жидкости (гидравлики) в XIX в. в России. Прикладное, инженерное направление механики жидкости, зародившееся у нас еще в работах М. В. Ломоносова (см. выше), стало развиваться в России в XIX в. в стенах Петербургского института инженеров путей сообщения. В этом институте долгое время существовала единственная гидравлическая школа России. Ученые этого института только в начале своей деятельности следовали французской гидравлической школе. Здесь можно прежде всего упомянуть П. П. Мельникова (1804–1880) – инженера путей сообщения, профессора прикладной механики, почетного члена Петербургской Академии наук, Министра путей сообщения, который создал первый на русском языке курс «Основания практической гидравлики...», а также организовал в 1855 г. первую в России учебную гидравлическую лабораторию. Преемниками П. П. Мельникова являлись профессора того же института В. С. Глухов, Н. М. Соколов, П. Н. Котляревский, Ф. Е. Максименко и Г. К. Мерчинг. Они опубликовали ряд трудов, относящихся к технической механике жидкости (гидравлике), в которых обобщили соответствующие исследования, выполненные в стенах института инженеров путей сообщения.

Большой вклад внесли в развитие гидравлики следующие русские ученые и инженеры: Н. П. Петров (1836–1920) – выдающийся русский ученый-инженер, почетный член Петербургской Академии наук (инженер-генерал-лейтенант, товарищ Министра путей сообщения), который в своем труде «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» (1883 г.) впервые сформулировал законы трения при наличии смазки; Н. Е. Жуковский (1847–1921) – великий русский ученый, профессор Московского высшего технического училища и Московского университета, член-корреспондент Петербургской Академии наук, создатель теории гидравлического удара, исследовавший также многие другие вопросы механики жидкости; И. С. Громека (1851–1889) – профессор Казанского университета, разрабатывавший теорию капиллярных явлений и заложивший основы теории, так называемых, винтовых потоков.

Развитие технической механики жидкости (гидравлики) в области инженерно-строительных специальностей в течение первых десятилетий XX века. В начале XX в. в гидравлике наметилось много самых различных научных направлений, которые можно классифицировать по разным признакам, например:

а) по виду рассматриваемой текучей среды; здесь можно различать воду, воздух, нефть, разные двухфазные жидкости, так называемые, неньютоновские и аномальные жидкости, электропроводящую или магнитную среду, плазму; сюда можно отнести стратифицированные потоки и т. п.;

б) в зависимости от отрасли техники или отрасли знаний, где используется аппарат гидромеханики, можно различать: аэронавтику, судостроение, гидромашиностроение, инженерно-строительное дело (в частности, гидротехнику), баллистику, гидроавтоматику, химическую технологию, метеорологию, океанологию и т. п.;

в) можно различать отдельные гидромеханические теории, которые иногда полагаются в основу решения задач, относящихся к различным областям техники (см. выше п. б): теорию турбулентности; задачи неустановившегося, в частности, волнового движения; теорию смазки и ламинарного движения; теорию движения жидкости (в частности, нефти и газа) в пористых средах и т. п.

В связи со сказанным в начале XX в. (да и в конце XIX в.) из технической механики жидкости начали выделяться отдельные иногда в значительной мере изолированные друг от друга направления, которые приходится рассматривать отдельно. Ниже, касаясь только инженерно-строительного направления гидравлики, осветим главнейшие работы, относящиеся к этому направлению и выполненные в период до 20–30-х годов настоящего столетия.

Ф. Форхгеймер (1852–1933) – немецкий профессор – рассмотрел гидравлические сопротивления, волны перемещения, колебания горизонтов воды в уравнительных резервуарах ГЭС, некоторые виды деформаций песчаных русел. Особенно важны исследования Форхгеймера в области вопросов фильтрации.

М. Вебер (1871—1951) — немецкий профессор — придал принципам гидродинамического подобия современные формы.

Л. Прандтль (1875—1953) — немецкий профессор, инженер — разработал (наряду с Тейлором и Карманом) полуэмпирическую теорию турбулентности; исследовал гидравлические сопротивления в трубах. С именем Прандтля связан ряд понятий из области механики жидкости. Работы Прандтля в области теории пограничного слоя явились основополагающими.

М. А. Великанов (1879—1964) — советский ученый, член-корреспондент АН СССР — разрабатывал теорию турбулентности, исследовал движение наносов и русловые деформации, предложил так называемую гравитационную теорию движения взвешенных наносов.

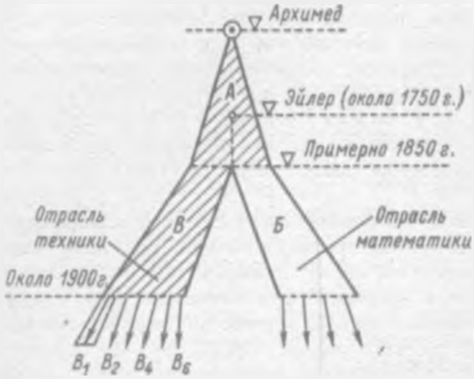


Рис. 1-12. Общая схема формирования (во времени) механики жидкости

А — механика жидкости; *Б* — математическая механика жидкости; *В* — техническая механика жидкости (гидравлика); B_1, B_2, ..., B_6 — отдельные направления курсов гидравлики (гидротехническое, гидромашинное, судостроительное и т. п.)

Б. А. Бахметев (1880—1951) — русский ученый, инженер путей сообщения — работая в Петербургском политехническом институте, заложил основы современной русской гидравлической школы, опубликовав ряд книг, в которых осветил различные разделы гидравлики. Б. А. Бахметев решил в достаточно общей форме задачу об интегрировании дифференциального уравнения неравномерного движения в призматических руслах.

Блазиус (р. 1883) — немецкий ученый — впервые показал, что для «гладких труб» коэффициент сопротивления зависит только от одного параметра — числа Рейнольдса.

Н. Н. Павловский (1886—1937) — советский ученый, академик, инженер путей сообщения — в 1922 г. опубликовал основы математической теории фильтрации воды в грунтах; предложил метод электромоделирования фильтрационных потоков (метод ЭГДА); издал первый в России «Гидравлический справочник» и монографию по основам гидравлики; решил ряд гидравлических задач, относящихся к инженерно-строительной гидравлике. Н. Н. Павловский создал научно-педагогическую школу в области гидравлики на базе общеинститутской кафедры гидравлики Ленинградского политехнического института.

Н. М. Бернадский (1882—1935) — советский ученый, инженер путей сообщения — впервые связал определение тепловых потерь с полем скоростей в прудах-охладителях; предложил важную модель «планового потока», нашедшую себе широкое применение.

К 20—30-м годам XX в. была создана обширная лабораторная база, на основе которой решались самые различные вопросы гидравлики. Равным образом были проведены также обширные натурные (полевые) наблюдения, позволившие составить соответствующие эмпирические формулы или откорректировать (применительно к реальным условиям) формулы, полученные для различных идеализированных схем теоретическим путем. Перечислим только некоторых ученых, принявших участие в этого рода деятельности: П. П. Мельников (см. выше), Энгельс (1854—1945), Ребок (1864—1950), Кох (1852—1923), В. Е. Тимонов (1862—1936), И. Г. Есьман (1868—1955), Шаффернак (1881—1951), Феллениус (р. 1876), Мейер-Петер (р. 1883), Гибсон (р. 1878), Скобей (р. 1880), Кеннеди (1851—1920), Н. Н. Павловский (см. выше).

Большой вклад в формирование технической механики жидкости внесли наши отечественные ученые, особенно после Великой Октябрьской социалистической революции, когда забота о развитии науки стала государственным делом Советской республики.

Общая схема формирования (во времени) механики жидкости. Как видно из рис. 1-12, в соответствии со всем сказанным выше, можно считать (с некоторым приближением), что наука о механике жидкости (в современном представлении этого понятия) зародилась в трудах Архимеда. Примерно к середине XIX в. данная наука (см. область *А* на рисунке) получила значительное развитие, причем в этот период времени произошло разделение механики жидкости на два различных направления (см. § 1-1): «математическую механику жидкости» (см. область *Б*) и «техническую механику жидкости» (см. область *В*).

Как отмечают (например, Г. Рауз и С. Инце в своей известной книге «История гидравлики»),[1] математическая механика жидкости зародилась еще в трудах Л. Эйлера (в середине XVIII в.). Что касается технической механики жидкости (гидравлики), то это направление механики, как выше было сказано, начало развиваться главным образом в работах французских ученых-инженеров.

Важно подчеркнуть, что на рубеже начала XIX в. техническая механика жидкости начала в свою очередь расчленяться на отдельные направления (см. на рисунке стрелки B_1, B_2, B_3, ...). К таким отдельным направлениям можно отнести, например, инженерно-строительную (гидротехническую) гидравлику, гидромашинную гидравлику, судостроительную гидравлику, нефтяную и газовую гидравлику и т. п. Разумеется, теоретические основы этих отдельных гидравлик являются в значительной мере общими; вместе с тем чисто прикладные части таких курсов оказываются существенно различными.

Заметим, что вопрос о разделении механики (в частности, механики жидкости) на различные направления достаточно часто подчеркивается в литературе. Например, А. Н. Боголюбов пишет:[2] «В результате современная механика разделилась на много направлений, которые сливаются, с одной стороны, с математической, с другой — с различными направлениями техники (такое промежуточное положение между чистой абстракцией и конкретной практикой было характерно для механики со времен ее зарождения)».[3]

Некоторые общие выводы, вытекающие из рассмотрения исторического материала:

1. Разработка проблем гидравлики (технической механики жидкости), в частности, инженерно-строительного направления, всегда диктовалась необходимостью решения тех или других практических задач, выдвигаемых жизнью и связанных с развитием материальной базы нашего общества.

2. Отдельные казалось бы элементарные представления механики жидкости осваивались человечеством, как мы видели, иногда в течение весьма продолжительного времени (см., например, отмеченные выше вопросы о вакууме и уравнения неразрывности движения жидкости, которые решались в течение тысячелетий).

3. Теоретические основы технической механики жидкости (гидравлики) начали интенсивно развиваться только в середине XVIII в., после того как рядом зарубежных и отечественных ученых были сформулированы основополагающие законы физики и общей механики, а также был разработан соответствующий математический аппарат, позволяющий достаточно точно и кратко выражать соответствующие зависимости механики.

4. По-видимому, некоторые положения гидромеханики на протяжении столетий повторно открывались и разрабатывались по нескольку раз.

5. Иногда, в конечном счете, отдельным ученым история приписывает то, что они не предлагали и «забывает» о том, что они сделали. Например, Фруд не предлагал «числа Фруда» и никогда им не пользовался (широко известно, что «число Фруда» было предложено Риичем).

---

[1] H. Rouse, S. Ince. History of hydraulics. USA, 1957.

[2] А. Н. Боголюбов. Механика в истории человечества. — М.: Наука, 1978.

[3] Не безынтересно дополнительно отметить, что А. Н. Боголюбов (см. предыдущую сноску) пишет: «Развитие механики в Западной Европе в течение 1000 лет происходит двумя различными путями, которые почти не пересекаются...» Такое положение, если относить его к современным условиям, по-видимому, должно свидетельствовать о наличии принципиально различных подходов к решению задач механики жидкости (см. рис. 1-12), с одной стороны, у инженеров-ученых, формирующих технические науки, и, с другой стороны, у ученых-математиков, разрабатывающих чисто математические решения задач механики.

6. Многие уравнения и формулы, связанные в настоящее время с именами разл ученых, были даны этими учеными совсем не в том виде, в каком они фигурı в современной литературе; примеров таких «именных зависимостей» можно при целый ряд: формула Шези, формула Торричелли и т. д.

В начале XX в. ведущая роль в области технической механики жидкости (ги лики) перешла от старой французской гидравлической школы к немецкой школе, кот возглавил ряд видных немецких ученых. Однако после Великой Октябрьской с листической революции в связи с бурным развитием в нашей стране гидротехниче строительства в СССР был создан целый ряд научно-исследовательских институтов, рабатывавших различные гидромеханические проблемы; было организовано также шое число втузов инженерно-строительного, в частности, гидротехнического проф Если в дореволюционное время в России почти отсутствовали печатные изд посвященные гидравлическим и гидротехническим вопросам, то в послереволюциоı период у нас появилась обширная литература (журналы, труды институтов, моно фии, руководства для проектирования и т. п.), освещающая самые различные стор технической гидромеханики; при этом в скором времени наша отечественная гидрав выдвинулась на одно из первых мест в мире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1-1. **Абрамов Н. Н.** Водоснабжение. – М.: Стройиздат, 1967.

1-2. **Гидроэнергетические установки.**/Под ред. Д. С. Щавелева. – Л.: Энергоиздат, 1

1-3. **Корнфельд М.** Упругость и прочность жидкостей. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1951.

1-4. **Михайлов А. В.** Внутренние водные пути. – М.: Стройиздат, 1973.

1-5. **Перник А. А.** Проблемы кавитации. – Л.: Судостроение, 1966.

1-6. **Справочник** по гидравлическим расчетам./Под ред. П. Г. Киселева. – М.: Энері 1972.

1-7. **Чугаев Р. Р.** Гидравлические термины. – М.: Высшая школа, 1974.

1-8. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения: Водосливные плотины. – М.: Высш школа, 1978.

1-9. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения: Глухие плотины. – М.: Высш школа, 1975.

1-10. **Чугаев Р. Р.** Развитие и формирование технической механики жидкос (гидравлики). – Л.: Изд. ЛПИ имени М. И. Калинина, 1975.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГИДРОСТАТИКА

§ 2-1. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ («СУММАРНОЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ»). СВОЙСТВА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В гидростатике изучается жидкость, находящаяся в покое. В § 1-2 было отмечено, что касательные напряжения в покоящейся жидкости всегда равны нулю ($\tau = 0$). В § 1-4 п. 3 мы исключили возможность существования в жидкости (покоящейся или движущейся) растягивающих напряжений. Поэтому, мы должны считать, рассматривая покоящуюся жидкость, что в любой ее точке мы можем иметь только нормальные напряжения: $\sigma = \sigma_n$ (см. конец § 1-6).

Основным понятием гидростатики является понятие *гидростатического давления в данной точке покоящейся жидкости*. Это давление принято обозначать буквой p и для краткости именовать просто *«гидростатическим давлением»*.

В случае покоящейся жидкости *гидростатическим давлением p в данной точке называют скалярную величину, равную модулю (значению) напряжения σ в рассматриваемой точке:*

$$p = |\sigma|, \tag{2-1}$$

где $|\sigma|$ – модуль напряжения σ (независящий от ориентировки – от угла наклона – площадки действия, намечаемой в рассматриваемой точке; см. рис. 1-10, *б*, относящийся к случаю, когда $\tau = 0$).[1] Имея это в виду, иногда говорят, что гидростатическое давление в данной точке представляет собой «шаровой тензор»; при этом несколько условно отмечают, что в случае гидростатики любая точка (т. е. элементарная частица жидкости) со всех сторон «сжата одинаково» (что обычно не имеет места в случае гидродинамики; см. далее § 3-1).

Поясним еще гидростатическое давление p следующим образом.

Представим на рис. 2-1 произвольный объем покоящейся жидкости. Наметим внутри этого объема точку M и проведем через нее произвольную поверхность AB. Такая поверхность рассечет данный объем жидкости на два отсека: I и II. Выделим у точки M на поверхности AB некоторую площадь S.

Через поверхность AB будет передаваться сила давления со стороны отсека I на отсек II. Часть этой силы, обозначаемая нами через P, должна приходиться на выделенную площадь S.

Сила P, действующая на всю рассматриваемую площадь S, называется силой гидростатического давления (или суммарным гидростатическим давлением).

Сила P по отношению к отсеку II является в н е ш н е й п о в е р х н о с т н о й силой; по отношению же ко всему объему жидкости, состоящему из двух отсеков (I и II), она является силой внутренней. Силе P отвечает реакция (той же величины, что и сила P), действующая со стороны отсека II на отсек I. Поэтому силу P следует рассматривать, как силу п а р н у ю.

Разделив модуль (значение) $|P|$ на S, получим

$$\frac{|P|}{S} = p_{ср}, \tag{2-2}$$

где величина $p_{ср}$ представляет значение той силы, которая приходится в с р е д н е м на единицу рассматриваемой площади S; $p_{ср}$ называют с р е д н и м гидростатическим давлением.

---

[1] Напомним, что сжимающие напряжения мы условились считать положительными. В математической механике жидкости (так же как и в математической теории упругости) принято (условно) с ж и м а ю щ и е напряжения давления на какую-либо поверхность считать о т р и ц а т е л ь н ы м и (а растягивающие напряжения «давления» – положительными). Однако мы (как и многие другие авторы, занимающиеся техническими науками) не соблюдаем этого условного «математического правила» по следующим причинам. Рассматривая различные материалы, прочность которых приходится рассчитывать, видим, что материалы, сопротивляющиеся т о л ь к о р а с т я ж е н и ю, практически отсутствуют; материалов же, сопротивляющихся и растяжению, и сжатию, не так много; главным образом, инженерам-гидротехникам приходится сталкиваться с материалами, которые практически сопротивляются только сжатию (вода, грунт, бетон). Известно, что почти вся литература, например, по механике грунтов представлена согласно принятому нами правилу. Соблюдая это правило, мы избавляемся от неувязок, возникающих при расчете, например, стальных конструкций, на которые действует давление грунта (принимаемое положительным) или давление воды; мы здесь избавляемся также от условности (принятой в области математической механики), согласно которой термин «напряжение давления» той или другой силы не должен использоваться.

Если теперь представить, что в формуле (2-2) площадь S стремится к н (так, однако, чтобы точка M всегда находилась внутри контура площадк стягиваемого в точку), то величина $p_{ср}$ будет стремиться к определенн пределу. Этот предел выражает модуль (значение) напря ния σ, а следовательно, и значение p в намеченн точке M:

$$p = \lim_{S \to 0}\left(\frac{|P|}{S}\right). \qquad (2$$

Из (2-2) и (2-3) видно, что величины $p_{ср}$ и p имеют размерно силы, деленной на площадь (например, кН/м^2, тс/м^2, кгс/см^2 и т. п.).[1]

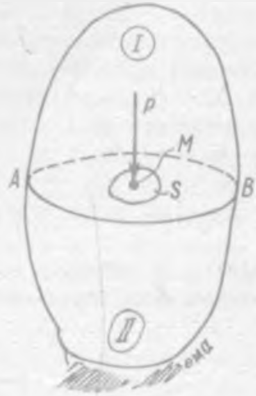


Рис. 2-1. Схема по-коящейся жидкости

P – сила, действующая со стороны I отсека жидкости на площадку S, принадлежащую II отсеку

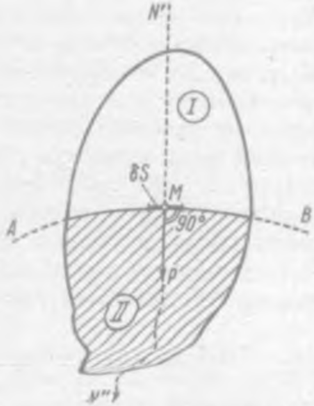


Рис. 2-2. Гидростатическое давление p (см. точку M)

MN'' – внутренняя нормаль

Из всего сказанного выше можно видеть, что гидростатическое напряже ние σ и гидростатическое давление p обладают двумя свойствами:

1°. Первое свойство. *Напряжение σ, модулем которого является p, действу нормально к площадке действия и является сжимающим, т. е. оно направле внутрь того объема жидкости (или твердого тела, ограничивающего жидкость который мы рассматриваем.)*

На рис. 2-2 представлен некоторый объем жидкости, находящийся в поко рассеченный поверхностью AB на два отсека I и II. Как отмечалось выше отсек I будет с некоторой силой давить на поверхность AB отсека II; с такой же силой, но обратной по направлению, отсек II будет давить на поверхность AB отсека I.

Условимся далее рассматривать *только отсек II, покрытый на* чертеже *штриховкой. При* этом нам придется интересоваться первой названной силой, т. е. силой, приложенной к отсеку II (со стороны отсека I).

Наметим на поверхности AB точку M и выделим у этой точки элементарную площадку действия δS, совпадающую с поверхностью AB. Проведем

[1] В связи с указанной размерностью p, эту скалярную величину в настоящее время предложено измерять «паскалями».

к площадке δS нормаль $N'N''$. Линии MN' и MN'' принято называть нормалями, соответственно внешней и внутренней.

Как видно, согласно первому свойству, гидростатическое напряжение σ всегда направлено, как показано на рисунке, по нормали внутренней, т. е. внутрь того тела, давление на которое мы рассматриваем.

2°. Второе свойство. *Гидростатическое давление p в данной точке не зависит от ориентировки, т. е. от угла наклона площадки действия.*

На рис. 2-3 представлен объем покоящейся жидкости, заключенной, например, в сосуде. Наметим внутри жидкости произвольную точку M; через эту точку проведем несколько поверхностей (*1-1*, *2-2* и т. д.); как видно, каждая из этих поверхностей разбивает рассматриваемый объем жидкости на два отсека: *I* и *II*. Выделим далее у точки M ряд площадок действия (δS_1, δS_2 и т. д.), лежащих соответственно на поверхностях *1-1*, *2-2* и т. д.; как видно, все эти площадки имеют различную ориентировку. Условимся теперь рассматривать давление, приходящееся со стороны отсека *I* на отсек *II*; при этом давление p в точке M для различных площадок действия (δS_1, δS_2 и т. д.) обозначим соответственно p_1, p_2 и т. д.

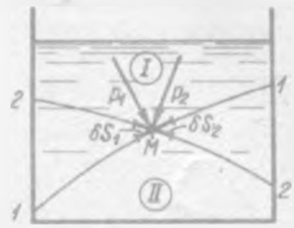


Рис. 2-3. Значение гидростатического давления в точке M ($p_1 = p_2$)

Согласно первому свойству, напряжение σ в точке M должно быть нормально к соответствующим площадкам действия; согласно же второму свойству давление p (p_1, p_2, ...), т. е. длины векторов, показанных на рисунке, должны быть одинаковы:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots \tag{2-4}$$

Как известно, для твердого тела в общем случае такое соотношение не имеет места.

§ 2-2. О НЕЗАВИСИМОСТИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ p ОТ ОРИЕНТИРОВКИ ПЛОЩАДКИ, НАМЕЧЕННОЙ В ДАННОЙ ТОЧКЕ ПРОСТРАНСТВА (В УСЛОВИЯХ, КОГДА В ЖИДКОСТИ ОТСУТСТВУЮТ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ)

Как мы видели, второе свойство гидростатического давления (о независимости p от ориентировки площадки действия) вытекает из теории сплошной среды (см. рис. 1-10, *б*). Вместе с тем справедливость этого свойства может быть доказана непосредственно в результате нижеследующих рассуждений.

Возьмем внутри покоящейся жидкости произвольную точку A (рис. 2-4) и выделим у этой точки элементарный объем жидкости в виде прямой треугольной призмы ABC (на чертеже ABC — основание призмы, сама призма расположена перпендикулярно к чертежу).

Обозначим через α произвольный угол наклона грани BC к горизонту. Наметив оси координат, как показано на чертеже, обозначим через dx, dz и dl длины сторон основания призмы; через dy — высоту призмы; все эти величины считаем бесконечно малыми.

Покажем теперь у точки A три элементарные площадки различной ориентировки:[1] S_x, S_z, S_n; площадка S_n параллельна грани BC; наклон ее к горизонту определится произвольным углом α. Давление в точке A для этих площадок соответственно

---

[1] Для упрощения рисунка вместо dS пишем просто S, аналогично поступаем ниже и с силами, т. е. вместо dP пишем P.

будет: p_x, p_z, p_n. При этом среднее гидростатическое давление для граней AB, A и BC должно быть записано в виде:

$$(p_x + \varepsilon_x) \text{ — для грани } AB,$$
$$(p_z + \varepsilon_z) \text{ — для грани } AC,$$
$$(p_n + \varepsilon_n) \text{ — для грани } BC,$$

где ε_x, ε_z, ε_n — величины бесконечно малые, которыми следует пренебрегать. Средн давление, например, для грани AB отличается от давления p_x в точке A на бесконеч малую величину потому, что величина p_x изменяется вдоль оси Az непрерывн расстояние же dz бесконечно мало. Таким образом, можно утверждать, что величин p_x, p_z и p_n выражают также и средние гидростатические давления для соответствующ боковых граней призмы.

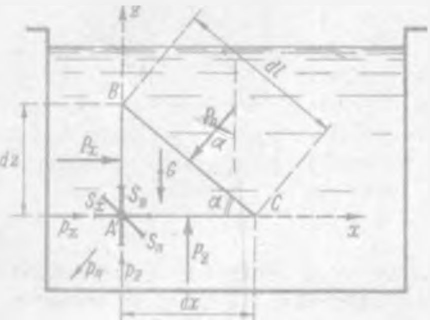


Рис. 2-4. Независимость значения величины p от ориентировки площадки S, намеченной в точке A

Выделенная призма ABC находится равновесии под действием следующих сил

1) сил P_x, P_z, P_n гидростатического да ления со стороны окружающей жидкост действующего на боковые грани призм (нормально к ним), причем

$$P_x = p_x\, dz\, dy;\; P_z = p_z\, dx\, dy;\; P_n = p_n\, dl\, dy; \quad (2\text{-}$$

2) сил P_y гидростатического давлен со стороны окружающей жидкости, действ ющего на торцовые грани ABC призмы; сил P_y нормальны к плоскости чертежа и на не не показаны;

3) объемной внешней силы G; под с лой G, в частности, можно подразумеват собственный вес выделенной призмы.

Объемная сила G будет величі ной 3-го порядка малости, в то время ка поверхностные силы P будут величі нами 2-го порядка малости. Действительно, для получения объемной силы G величин этой силы, отнесенную к единице объема (конечную величину), приходится умножат на объем призмы, т. е. на $\left(\frac{1}{2}\, dx\, dy\, dz\right)$; для получения же поверхностных сил средні гидростатические давления (конечные величины) мы умножали [см. (2-5)] на площад боковых граней, т. е. на $(dz\, dy)$; $(dx\, dy)$; $(dl\, dy)$. Поэтому силой G следует пренебрегат и считать, что выделенная элементарная призма ABC находится в равновесии по действием только внешних поверхностных сил P_x, P_z, P_n, P_y.

Имея это в виду, можем утверждать, что суммы проекций сил P_x, P_z, P_n и P на оси Ax и Az должны равняться нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} P_x - P_n \sin\alpha = 0; \\ P_z - P_n \cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя в эти выражения зависимости (2-5), имеем

$$\left.\begin{aligned} p_x\, dz\, dy - p_n\, dl\, dy \sin\alpha = 0; \\ p_z\, dx\, dy - p_n\, dl\, dy \cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}6$$

Учитывая, что $dl \cdot \sin\alpha = dz$ и $dl \cdot \cos\alpha = dx$, из (2-6) окончательно получаем:

$$p_n = p_x = p_z. \quad (2\text{-}7$$

Таким образом, p_n оказывается равным $p_x = p_z$, какой бы угол α мы не задали.

Если теперь дополнительно учесть, что призму ABC (вместе со скрепленным с нею осями координат) можно как угодно располагать (ориентировать) в точке A то справедливость высказанного выше свойства делается очевидной.

Таким образом, мы еще раз убеждаемся в том, что при отсутствии в рас сматриваемом теле касательных напряжений величина (значение) давлени (напряжения) в любой точке данного тела не зависит от ориентировки (от угла наклона «площадки действия».

§ 2-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОКОЯ (РАВНОВЕСИЯ) ЖИДКОСТИ

Рассмотрим покоящуюся жидкость (рис. 2-5), на которую действует та или иная внешняя объемная сила (не обязательно сила тяжести). В § 1-6 через ϕ мы обозначили объемную силу, действующую на единицу массы рассматриваемой жидкости. Обозначим теперь через ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z проекции силы ϕ на оси Ox, Oy, Oz.

В общем случае давление p в разных точках покоящейся жидкости будет различным:

$$p = f(x, y, z) \tag{2-8}$$

Для того чтобы установить связь между давлением p и координатами точек, а также величиной ϕ, поступаем следующим образом.

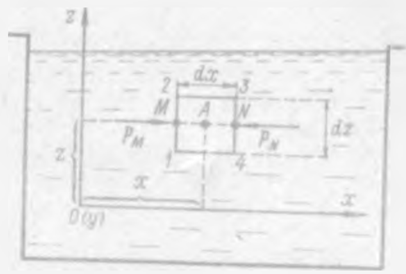


Рис. 2-5. К выводу уравнений (2-14). На жидкость действуют любые объемные силы

Наметив оси координат Ox и Oz, выделяем элементарный объем покоящейся жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда $1-2-3-4$; стороны параллелепипеда dx и dz, а также dy (перпендикулярную к плоскости чертежа) считаем бесконечно малыми.

В центре параллелепипеда намечаем точку A с координатами x, y и z. Давление в этой точке обозначаем через p. Проведя через точку A линию MN, параллельную оси Ox, можем утверждать, что в общем случае гидростатическое давление будет непрерывно изменяться вдоль этой линии. Изменение гидростатического давления, приходящееся на единицу длины линии MN, может быть представлено частной производной $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Используя $\frac{\partial p}{\partial x}$, выразим давления в точках M и N в виде

$$\left.\begin{aligned} p_M &= p - \frac{1}{2}dx\frac{\partial p}{\partial x}; \\ p_N &= p + \frac{1}{2}dx\frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

где второе слагаемое правых частей равенств (2-9) выражает изменение давления p на длине $\frac{1}{2}dx$.

Далее рассуждаем следующим образом:

а) выясняем все силы, действующие на элементарный параллелепипед;

б) эти силы проектируем на ось Ox; поскольку рассматриваемый параллелепипед находится в покое, то сумму проекций найденных сил приравниваем нулю, в результате получаем 1-е дифференциальное уравнение;

в) для получения 2-го и 3-го дифференциальных уравнений проектируем все силы, действующие на параллелепипед, соответственно на оси Oy и Oz.

Идя по указанному пути, даем вывод только 1-го дифференциального уравнения.

1. Силы, действующие на параллелепипед $1-2-3-4$:

а) объемная сила равна

$$\phi\,(dx\,dy\,dz)\,\rho, \tag{2-10}$$

где $(dx\,dy\,dz)\,\rho$ — масса жидкости, образующей параллелепипед $1-2-3-4$; проекция этой силы на Ox равна

$$\phi_x (dx\,dy\,dz)\,\rho; \tag{2-11}$$

б) поверхностные силы: проекция на ось Ox разности сил давления на грани $1-4$ и $2-3$ равна нулю; проекция на Ox разности сил давления на грани $1-2$ и $3-4$ равна:

$$P_M - P_N = p_M (dz\,dy) - p_N (dz\,dy) = \left(p - \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x}\right) dy\,dz - \\ - \left(p + \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x}\right) dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\,dy\,dz. \tag{2-12}$$

Как видно, полученная р а з н о с т ь поверхностных сил является величиной 3-го порядка малости, так же как и величина объемных сил, выраженная формулой (2-11).

2. Сумма проекций всех сил на ось Ox равна

$$\phi_x (dx\,dy\,dz)\,\rho - \frac{\partial p}{\partial x}(dx\,dy\,dz) = 0. \tag{2-13}$$

Так выглядит первое уравнение; остальные два пишем по аналогии с первым. Найденные три дифференциальных уравнения (отнесенные к единице массы жидкости) имеют окончательный вид:

$$\phi_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \phi_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \phi_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{2-14}$$

Эти уравнения были получены Л. Эйлером в 1755 г.

§ 2-4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОКОЯ (РАВНОВЕСИЯ) ЖИДКОСТИ

Умножаем 1-е дифференциальное уравнение (2-14) на dx, 2-е на dy и 3-е на dz. После этого складываем левые и правые части этих уравнений:

$$\phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0. \tag{2-15}$$

Так как давление в точке p есть функция только координат:

$$p = f(x, y, z), \tag{2-16}$$

то можно утверждать, что выражение, входящее в равенство (2-15) и заключенное в скобки, является полным дифференциалом p, т. е. это выражение равно dp. Поэтому уравнение (2-15) можно переписать в виде

$$dp = \rho\,(\phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz). \tag{2-17}$$

Далее рассуждаем следующим образом.

Если левая часть (2-17) является полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат, то, следовательно, и правая часть (2-17) должна являться полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат. Учитывая, что плотность жидкости $\rho = \text{const}$, можно на основании сказанного утверждать, что выражение, входящее в (2-17) и заключенное в скобки, является также полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат. Обозначим эту последнюю функцию через U, причем $U = f(x, y, z)$. Тогда вместо (2-17) можем написать

$$dp = \rho\,dU, \tag{2-18}$$

где

$$dU = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz. \quad (2\text{-}19)$$

С другой стороны, полный дифференциал dU можно представить как сумму частных дифференциалов:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \quad (2\text{-}20)$$

Сопоставляя (2-19) и (2-20), видим, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \phi_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \phi_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \phi_z. \quad (2\text{-}21)$$

Так как U есть функция только координат и так как частные производные ее по координатам дают соответствующие проекции (ϕ_x; ϕ_y; ϕ_z) объемной силы, отнесенной к единице массы, то, следовательно, U является потенциальной функцией. Объемная же сила ϕ, удовлетворяющая условиям (2-21), является силой, имеющей потенциал. Из сказанного ясно, что однородная несжимаемая жидкость (для которой $\rho = \text{const}$) *может находиться в покое под действием только таких сил, которые имеют потенциал.*

Интегрируя (2-18), получаем

$$p = \rho U + C, \quad (2\text{-}22)$$

где C — постоянная интегрирования.

Чтобы определить C, рассматриваем некоторую точку жидкости, для которой известны p и U:

$$p = p_0; \ U = U_0. \quad (2\text{-}23)$$

Для этой точки (2-22) перепишется в виде

$$p_0 = \rho U_0 + C, \quad (2\text{-}24)$$

откуда

$$C = p_0 - \rho U_0. \quad (2\text{-}25)$$

Подставляя (2-25) в (2-22), получаем

$$p = \rho U + p_0 - \rho U_0 \quad (2\text{-}26)$$

или окончательно

$$p = p_0 + \rho(U - U_0). \quad (2\text{-}27)$$

Формула (2-27) дает давление в точке для случая, когда $\rho = \text{const}$, причем на жидкость действует любая система объемных сил, имеющих потенциал.

Понятие потенциальной функции. Пространство, в котором происходит какое-либо физическое явление, называется физическим полем.

Различают поля: 1) скалярные, например поле температур; 2) векторные, например поле сил или поле скоростей.

Поле какого-либо скаляра

$$\psi = f(x, y, z)$$

может быть представлено линиями (или поверхностями) $\psi = \text{const}$; например, поле температур t° можно представить линиями (или поверхностями) $t^\circ = \text{const}$.

Оперировать векторным полем значительно сложнее, чем скалярным. Поэтому векторное поле (например, поле сил) при его изучении заменяют особым скалярным полем. При этом такое скалярное поле представляют линиями равного значения особой функции U, называемой потенциальной функцией, или просто потенциалом (потенциалом тех векторов, поле которых мы изучаем; можно различать потенциал сил, потенциал скоростей и т. п.). U является скалярной величиной.

Функция U (потенциал) обладает следующими свойствами:

а) *она зависит только от координат x, y, z (и иногда от времени);*

б) *частные производные U по координатам, взятые в различных точках скалярного поля, должны давать величины проекций рассматриваемых векторов в соответствующих точках векторного поля.*

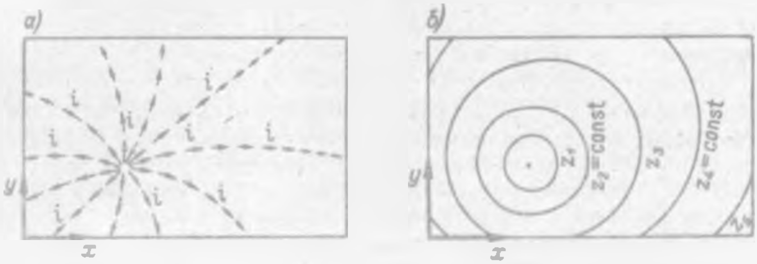


Рис. 2-6. Замена векторного поля (*а*) уклонов i земной поверхности скалярным полем (*б*) отметок земной поверхности

Рассмотрим для примера рельеф поверхности земли. В каждой точке этого рельефа имеется некоторый уклон земной поверхности, который можно представить вектором, направленным вдоль линии наибольшего ската. В связи с этим рельеф поверхности земли можно рассматривать как поле уклонов i (поле векторов, выражающих уклоны; рис. 2-6, *а*).

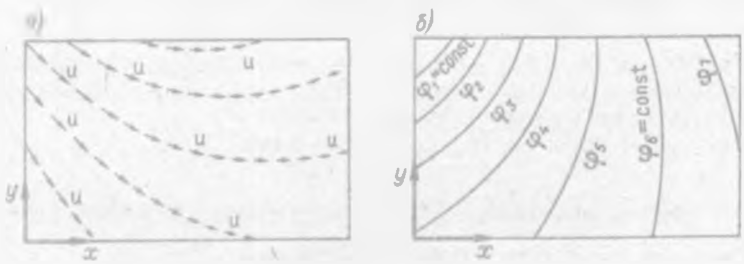


Рис. 2-7. Векторное поле (*а*) скоростей и скалярное поле (*б*) потенциальной функции φ поля скоростей

Обозначим теперь через z отметку поверхности земли и проведем на плане нашего рельефа горизонтали, т. е. линии z = const (рис. 2-6, *б*). Очевидно, отметка z зависит только от координат x и y; кроме того величина z обладает еще следующим свойством:[1]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -i_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -i_y,$$

где i_x и i_y — компоненты i.

---

[1] Чтобы в приводимых соотношениях избавиться от минуса и тем самым упростить запись этих соотношений, вместо функции z можно пользоваться функцией $z' = -z$.

Отсюда ясно, *что скалярная величина z является потенциальной функцией векторного поля уклонов i*. Хорошо известно, что в практике рельеф местности всегда представляют именно эквипотенциалами $z = \text{const}$, причем из рассмотрения этих линий (горизонталей) легко можно установить значение и направление вектора i в любой точке земной поверхности.

Выше, имея векторное поле объемных сил ϕ (отнесенных к единице массы), мы ввели в рассмотрение скаляр U (потенциал векторного поля объемных сил).

Далее нам часто придется сталкиваться с векторным полем скоростей u (рис. 2-7, *а*). В этих случаях мы будем иногда заменять такое поле скалярным полем, характеризующимся потенциалом скорости φ (рис. 2-7, *б*).

Подчеркнем, что не каждое векторное поле может быть представлено (описано) потенциальной функцией. Имеются такие векторные поля, которые не имеют потенциала. Изучение таких полей в значительной мере затрудняется. При рассмотрении векторных полей, имеющих потенциальную функцию, сталкиваемся с особой математической задачей об отыскании этой функции (см. с. 80).

§ 2-5. ВЕЛИЧИНА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО ОДНОЙ ОБЪЕМНОЙ СИЛЫ – СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Будем рассматривать как в этом параграфе, так и в последующих (за исключением § 2-9), жидкость, на которую действует только одна объемная сила – сила тяжести.

Представим на рис. 2-8 закрытый сосуд, в котором находится жидкость. Обозначим через p_0 **внешнее поверхностное давление** (т.е. давление на свободную поверхность жидкости). Возьмем оси координат, как показано на чертеже, и наметим точку m, у которой выделим **единицу массы** тяжелой жидкости. К этой единице массы приложена объемная сила ϕ.

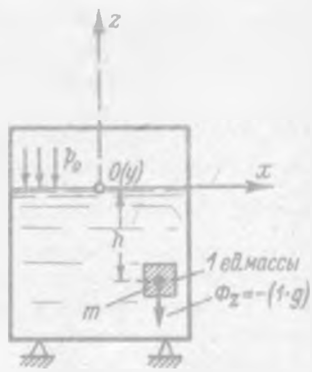


Рис. 2-8. Давление p для «тяжелой жидкости»

В случае, когда объемными силами, действующими на жидкость, являются только силы тяжести, имеем

$$\phi_x = 0, \ \phi_y = 0, \ \phi_z = -g, \tag{2-28}$$

где g – ускорение силы тяжести; ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z – проекции силы ϕ на оси координат.

Величина dp выражается зависимостью (2-18), где dU в нашем случае будет равно [см. (2-19)]:

$$dU = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz = -g\,dz. \tag{2-29}$$

Подставляя (2-29) в (2-18) [или (2-28) в (2-14)], можем написать:

$$dp = -\rho g\,dz. \tag{2-30}$$

Интегрируя (2-30), имеем

$$p = -\rho g z + C \tag{2-31}$$

или [см. формулу (1-5)]

$$p = -\gamma z + C, \tag{2-31'}$$

где C – постоянная интегрирования. Для определения C рассмотрим точку на поверхности жидкости (где $z=0$ и $p=p_0$), тогда согласно (2-31') для этой точки

$$C = p_0; \tag{2-32}$$

в результате вместо (2-31') имеем:

$$p = p_0 - \gamma z. \tag{2-33}$$

Обозначим через h заглубление точки m под свободной поверхностью жидкости:

$$h = -z; \tag{2-34}$$

тогда (2-33) окончательно можно переписать в виде:

$$p = p_0 + \gamma h, \tag{2-35}$$

где p является абсолютным давлением в рассматриваемой точке; p_0 — внешнее поверхностное давление.[1]

Величина

$$\gamma h = p_в \text{ (обозначение)}, \tag{2-36}$$

в формуле (2-35) может быть названа весовым давлением: как видно, $p_в$ представляет собой ту часть абсолютного давления p, которая обусловлена весом самой жидкости.

Из рассмотрения (2-35) заключаем, что *абсолютное давление в точке равно сумме внешнего поверхностного давления и весового давления.*

Из (2-35) также ясно, что *на сколько увеличивается внешнее поверхностное давление p_0, на столько же должно увеличиться и абсолютное давление в данной точке.*

Если сосуд открыт, то

$$p_0 = p_a,$$

где p_a — атмосферное давление; при этом вместо (2-35) имеем:

$$p = p_a + \gamma h. \tag{2-37}$$

Назовем избыточным (сверхатмосферным) давлением величину превышения абсолютного давления в точке над атмосферным давлением, т. е. разность $(p - p_a)$. Эту разность также иногда называют манометрическим давлением.

В практике главным образом приходится сталкиваться не с абсолютным давлением, а с избыточным давлением. Имея это в виду, в дальнейшем будем применять следующие обозначения: 1) для избыточного давления p; 2) для абсолютного давления $p_А$.

В соответствии с такого рода изменением обозначений имеем:

$$p = p_А - p_a, \tag{2-38}$$

причем расчетная формула (2-35) принимает вид:

а) для закрытого сосуда

$$\boxed{p_А = p_0 + \gamma h = p_0 + p_в = p_a + p;} \tag{2-39}$$

---

[1] Уравнение (2-35), разумеется, может быть получено и без использования потенциальной функции U [путем интегрирования третьего дифференциального уравнения (2-14)].

б) для открытого сосуда

$$\boxed{p_A = p_a + \gamma h = p_a + p_в = p_a + p,} \tag{2-40}$$

откуда видно, что для открытого сосуда понятия весового и избыточного давлений совпадают:

$$p = p_в = \gamma h; \tag{2-41}$$

для закрытого же сосуда давления p и $p_в$ имеют разную величину:

$$p = p_в + (p_0 - p_a). \tag{2-41'}$$

Как видно, всего имеем пять различных давлений, обозначаемых через p_A, p, $p_в$, p_a и p_0, причем под p_0 условимся понимать абсолютное поверхностное давление.

Говоря далее о силе гидростатического давления P, будем различать:

1) силу абсолютного гидростатического давления P_A;

2) силу избыточного гидростатического давления (сверхатмосферного) P. Последнюю далее часто будем именовать просто силой гидростатического давления P (опуская слово «избыточного»).

§ 2-6. ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЫСОТА

Слово «пьезометрическая» произошло от слияния двух греческих слов, из которых первое значит «давление» и второе – «мера».

1°. Пьезометрическая высота, отвечающая абсолютному давлению в точке. Покажем, что абсолютное давление в точке p_A может быть выражено высотой некоторого столба жидкости. С этой целью на рис. 2-9 представим закрытый сосуд, частично наполненный жидкостью. Наметим в жидкости точку m, к которой приключим запаянную сверху тонкую стеклянную трубку $П_0$.

Будем считать, что в трубке $П_0$ создано полное разрежение (торричеллиева пустота). Тогда под давлением p_A в точке m горизонт жидкости в трубке поднимется на некоторую высоту h_A над точкой m.[1]

Рассматривая точку m, можем написать для нее следующие соотношения:

а) абсолютное гидростатическое давление в точке m со стороны жидкости в сосуде равно

$$p_0 + \gamma h = p_A; \tag{2-42}$$

б) абсолютное гидростатическое давление в точке m со стороны жидкости в трубке равно

$$0 + \gamma h_A. \tag{2-43}$$

Очевидно, величина (2-42) должна равняться величине (2-43), т. е.

$$p_A = \gamma h_A. \tag{2-44}$$

Как видно, зная h_A, легко можно найти p_A.

Величину h_A назовем пьезометрической высотой, отвечающей абсолютному давлению в точке, или просто абсолютной

---

[1] Строго говоря, все пространство над горизонтом жидкости в трубке $П_0$ должно быть заполнено парами жидкости, насыщающими это пространство. Если предположить, что в сосуде и в трубке имеется вода, причем ее температура близка к 0 °С, то давление насыщенных паров оказывается равным (см. § 1-5) 0,6 кПа = 0,6 кН/м² = = 0,006 кгс/см², чем можно пренебречь и считать, что давление на поверхности жидкости в трубке равно нулю.

пьезометрической высотой (иногда h_A называют приведенной высотой).

Из (2-44) имеем

$$\boxed{h_A = \frac{p_A}{\gamma}.} \qquad (2\text{-}45)$$

Можно сказать, что h_A (см. трубку $П_0$) *есть высота такого столба жидкости, который своим весом способен создать давление, равное абсолютному давлению в рассматриваемой точке.* Размерность h_A является размерностью длины; таким образом, абсолютное давление в точке p_A может выражаться единицами длины (длины вертикального столба жидкости с указанием веса γ единицы объема этой жидкости).

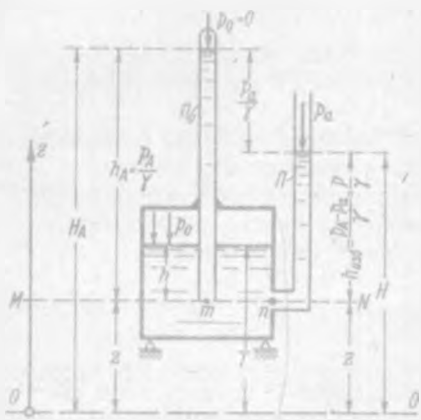


Рис. 2-9. Пьезометрическая высота и потенциальный напор

h_A – абсолютная пьезометрическая высота; $h_{изб}$ – избыточная пьезометрическая высота или просто пьезометрическая высота; z – отметка; H_A – абсолютный потенциальный напор; H – избыточный потенциальный напор или просто потенциальный напор; $O - O$ – плоскость сравнения

Таким образом, имеем два разных способа выражения абсолютного «гидростатического давления в точке» (т. е. «интенсивности гидростатического давления в точке»):

1) единицами $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$, например, кН/м^2, т. е. кПа (или, например, кгс/см^2);

2) единицами длины (единицами высоты) вертикального столба жидкости, характеризуемой определенной величиной γ.

В настоящее время в литературе встречаются еще измерения величины p_A при помощи так называемой «технической атмосферы» (применительно к которой была осуществлена тарировка многих действующих измерительных устройств). Одна техническая атмосфера

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10 \text{ тс/м}^2 = 100 \text{ кН/м}^2 = 100 \text{ кПа},$$

причем она соответствует 10 м вод. ст.[1]

2°. **Пьезометрическая высота, отвечающая избыточному давлению в точке.** Рассмотрим точку n (рис. 2-9); приключим к этой точке тонкую стеклянную трубку $П$ открытого типа. В этой трубке горизонт жидкости, благодаря действию давления p_A в точке n, также поднимется на некоторую высоту $h_{изб}$. Однако $h_{изб}$ будет меньше h_A (относящегося к точке n), так как в случае открытой трубки жидкость в ней будет встречать противодавление со стороны атмосферы.

Рассматривая точку n, можем сказать, что:

а) со стороны жидкости в сосуде на точку n действует давление

$$p_A = p_0 + \gamma h; \qquad (2\text{-}46)$$

б) со стороны жидкости в трубке на точку n действует давление

$$p_a + \gamma h_{изб}. \qquad (2\text{-}47)$$

---

[1] Однако, определяя избыточное давление как сверхатмосферное (§ 2-5) и вакуум как недостаток давления до атмосферного (§ 2-7), под атмосферным давлением следует понимать давление, соответствующее не одной технической атмосфере, а атмосфере реально существующей в рассматриваемом месте и в рассматриваемый момент времени.

Так как давления слева и справа на точку должны быть равными, то получаем:

$$p_A = p_a + \gamma h_{изб}, \tag{2-48}$$

откуда

$$\boxed{h_{изб} = \frac{p_A - p_a}{\gamma} = \frac{p}{\gamma},} \tag{2-49}$$

где p – избыточное давление в точке n.

Величина $h_{изб}$ называется *пьезометрической высотой, отвечающей избыточному давлению в точке*, или избыточной пьезометрической высотой или просто *пьезометрической высотой*. Как видно, пьезометрическая высота $h_{изб}$, в отличие от пьезометрической высоты h_A, *выражает лишь разность давлений*: $p_A - p_a$. Трубки $П_0$ и $П$ называются *пьезометрами* соответственно закрытого и открытого типа.

Легко доказать следующие два положения:

1) разность высот стояния горизонтов жидкости в трубках $П_0$ и $П$ всегда равна p_a/γ;

2) в случае открытого сосуда, когда $p_0 = p_a$, величина $h_{изб} = h$, где h – заглубление данной точки под уровнем жидкости в сосуде.

§ 2-7. ВАКУУМ

Выше рассматривался случай, когда абсолютное давление в точке больше атмосферного. Обратимся теперь к случаю, когда $p_A < p_a$. Положим, что таким давлением характеризуется точка m, показанная на рис. 2-10. Давление в точке m при условии $p_A < p_a$ можно измерить с помощью так называемого *обратного пьезометра*, или, что то же, *вакуумметра*, представляющего собой изогнутую трубку V.

Очевидно, горизонт жидкости в такой трубке опустится ниже точки m; заглубление точки m по отношению к горизонту жидкости в трубке V будет *отрицательным* ($h_{вак}$ на рис. 2-10).

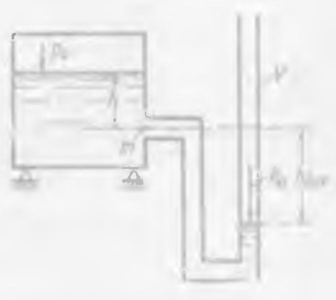


Рис. 2-10. Вакуум

$h_{вак}$ – вакуумметрическая высота или высота вакуума

Можно сказать, что:

а) давление в точке m со стороны жидкости в сосуде равно

$$p_A = p_0 + \gamma h; \tag{2-50}$$

б) давление в точке m со стороны жидкости в трубке V равно

$$p_a - \gamma h_{вак}. \tag{2-51}$$

Соединяя знаком равенства два приведенных выражения, получим:

$$p_A = p_a - \gamma h_{вак}, \tag{2-52}$$

откуда

$$\boxed{h_{вак} = \frac{p_a - p_A}{\gamma} = -\frac{p}{\gamma}.} \tag{2-53}$$

Величину $h_{вак}$ называют *вакуумметрической высотой* или *высотой вакуума*. Как видно, $h_{вак}$ характеризует разность двух давлений: атмосферного и абсолютного давления в точке m. Именно эта разность, а не само давление, называется *вакуумом* (от латинского слова vacuum «пустота»). Можно сказать, что *вакуум в данной точке жидкости есть недостаток давления в этой точке до атмосферного.* Иногда вакуумом называют также состояние жидкости, когда давление в ней менее атмосферного.

Величина вакуума может выражаться тремя способами:

1) единицами $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$, например, кН/м^2, т. е. кПа (или, например, кгс/см^2);

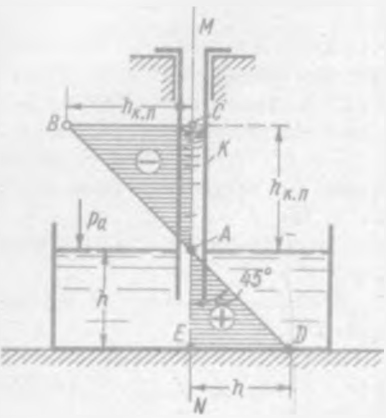


Рис. 2-11. Высота капиллярного поднятия $h_{к.п}$ жидкости в трубке K
Заштрихованы эпюры гидростатического давления: положительного и отрицательного (по отношению к атмосферному давлению)

2) единицами длины (единицами высоты) вертикального столба жидкости, характеризуемой определенной величиной γ;

3) в д о л я х атмосферного давления (в обычных условиях вакуум не может быть больше того давления, которое развивает в данном месте атмосфера).

Если в данной точке вакуум равен, например, 4 м вод. ст., то это значит, что абсолютное давление в этой точке равно 6 м вод. ст.

В § 1-4, п. 6 было рассмотрено поднятие жидкости в капиллярной трубке K (см. рис. 1-5).

Не учитывая вовсе молекулярного давления, можем сказать, что в жидкости, находящейся в капиллярной зоне, должен иметь место вакуум. Эпюра изменения величины $h_{вак}$ вдоль оси $M - N$ капиллярной трубки K (рис. 2-11) выразится треугольником ABC; эпюра же избыточного давления

$$h_{изб} = \frac{p}{\gamma} = \frac{p_A - p_a}{\gamma}$$

для линии AE представится треугольником ADE.

Поскольку в данном случае вакуум образуется за счет разности давлений плоской и вогнутой поверхностных пленок, то он, вообще говоря, может быть и больше одной атмосферы.

§ 2-8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЖИДКОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ НАПОР

1°. Удельная потенциальная энергия жидкости. Жидкость, находящаяся в покое или движении, обладает определенным запасом механической энергии, т. е. способностью производить работу. Покоящаяся жидкость обладает только так называемой п о т е н ц и а л ь н о й э н е р г и е й.[1]

Покажем на рис. 2-9 горизонтальную координатную плоскость OO, которую назовем п л о с к о с т ь ю с р а в н е н и я. На плоскости OO наметим начало оси z, причем эту ось направим вверх. Ординаты z различных точек жидкости будем называть о т м е т к а м и; «отметка» точки есть возвышение ее над плоскостью сравнения. Будем рассматривать точку n жидкости; пьезометрическая высота $h_{изб}$ для этой точки, а также ее отметка z показаны на чертеже.

Выделим у точки n некоторый объем жидкости весом G и приключим к этой точке открытую трубку $П$. Под действием избыточного давления p в точке n объем жидкости весом G поднимается в трубке $П$ на высоту $h_{изб}$ над плоскостью MN и на высоту H над плоскостью сравнения OO (см. рис. 2-9).

[1] Находясь одновременно в двух векторных силовых полях: а) в поле сил тяжести, направленных вертикально вниз и б) в поле градиентов давления («архимедовых сил»), направленных вертикально вверх.

Из сказанного должно быть ясно, что рассматриваемый объем жидкости, сосредоточенный в точке n, может произвести работу:

во-первых, за счет своего падения на плоскость OO с высоты z; эта возможная работа будет

$$(ЭП)_z = zG; \tag{2-54}$$

во-вторых, за счет своего поднятия под давлением p на высоту $h_{изб}$; эта возможная работа будет

$$(ЭП)_p = h_{изб}G. \tag{2-55}$$

Полная работа, которую может произвести объем жидкости весом G,

$$(ЭП) = (ЭП)_z + (ЭП)_p = zG + h_{изб}G. \tag{2-56}$$

Величина $(ЭП)$ и называется потенциальной энергией определенного объема жидкости (в данном случае объема весом G).

Удельной потенциальной энергией $(УЭП)$ называется энергия, отнесенная к единице веса жидкости,[1] находящейся в точке n:

$$(УЭП) = \frac{(ЭП)}{G} = z + h_{изб} = H. \tag{2-57}$$

Как видно, внутри удельной потенциальной энергии (полной) в общем случае следует различать два вида потенциальной энергии:

1) удельную потенциальную энергию положения $(УЭП)_z$, равную z;

2) удельную потенциальную энергию давления $(УЭП)_p$, равную

$$h_{изб} = \frac{p}{\gamma}.$$

2°. Потенциальный напор. В гидравлике слово напор применяется в особом смысле; *напором принято называть удельную энергию жидкости, т. е. меру энергии, принадлежащей единице веса жидкости.*

В соответствии с этим потенциальный напор будет представлять собой величину H [см. формулу (2-57)]; при этом величина z (отметка точки) может быть названа геометрическим напором; величина же $h_{изб}$ (пьезометрическая высота) — напором давления. Достаточно величины H, z, $h_{изб}$ умножить на единицу веса жидкости, и мы при этом получим соответствующие энергии этой единицы веса жидкости.

Можно сказать, что *потенциальный напор* (удельная потенциальная энергия) *слагается из двух напоров*: *геометрического напора* (удельной энергии положения) и *напора давления* (удельной энергии давления).

Все поясненные выше напоры имеют размерность длины и выражаются соответствующими отрезками: H, z, $h_{изб}$ (рис. 2-9).

Следует запомнить, что *с геометрической точки зрения потенциальный напор H в данной точке (например, в точке n) по отношению к какой-либо горизонтальной плоскости сравнения OO представляет собой сумму двух линейных величин: отметки данной точки z и соответствующей ей пьезометрической высоты $h_{изб}$:*

$$\boxed{H = z + h_{изб}} \quad \text{или} \quad \boxed{H = z + \frac{p}{\gamma}.} \tag{2-58}$$

[1] Отнесенная именно к единице веса, а не к единице массы или к единице объема жидкости.

Величина H (представляющая собой превышение над плоскостью сравнения OO уровня жидкости в открытом пьезометре, подключенном к рассматриваемой точке) характеризуется следующей особенностью: *для всех точек покоящейся жидкости величина H одинакова*:

$$H = \text{const (по всему объему)}. \tag{2-59}$$

Для доказательства справедливости этого положения напишем:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} = z + \frac{p_A - p_a}{\gamma} = z + \frac{(p_0 + \gamma h) - p_a}{\gamma} =$$

$$= (z + h) + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_a}{\gamma} = T + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_a}{\gamma} = \text{const}, \tag{2-60}$$

где T – превышение горизонта жидкости в сосуде над плоскостью OO ($T = \text{const}$).

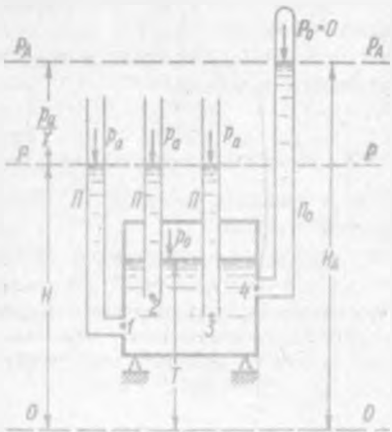


Рис. 2-12. Удельная потенциальная энергия. Потенциальный напор

H – потенциальный напор или удельная потенциальная энергия жидкости; H_A – абсолютный потенциальный напор или абсолютная потенциальная удельная энергия жидкости

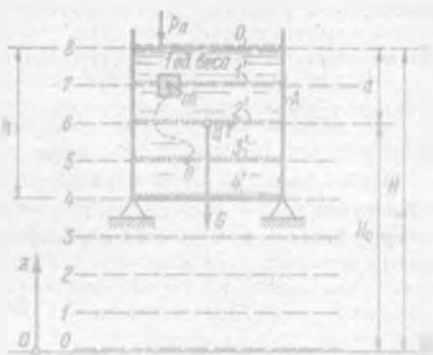


Рис. 2-13. Поле сил тяжести (описываемое потенциальной функцией z) и поле архимедовых сил (описываемых потенциальной функцией p/γ), внутри которых одновременно мысленно перемещается одна единица веса жидкости

——— – $H = z + p/\gamma$ – суммарная потенциальная функция, отнесенная к единице веса жидкости; ··· – $p/\gamma = \text{const}$; – – – – $z = \text{const}$

Возьмем закрытый сосуд (рис. 2-12). Наметим в жидкости ряд точек: *1*, *2*, *3*, *4*, ... К каждой такой точке приключим пьезометр $П$. Основываясь на (2-59), можем утверждать, что *горизонт жидкости во всех пьезометрах должен установиться на одной и той же высоте.*

Отсюда ясно, что по горизонтам жидкости в пьезометрах $П$ можно провести некоторую плоскость PP, которая должна быть горизонтальной. Эта горизонтальная плоскость PP называется пьезометрической плоскостью. Как видно, эта плоскость PP (или, как обычно говорят, пьезометрическая линия $P-P$) возвышается над плоскостью сравнения на величину H.

В заключение подчеркнем следующее: *так как H постоянна для всех точек покоящейся жидкости, то, следовательно, во всех точках такой жидкости полная удельная потенциальная энергия (УЭП) одинакова*:

$$(УЭП) = \text{const (по всему объему)}. \tag{2-61}$$

3°. **Потенциальный напор, отвечающий абсолютному давлению.** Выше при пояснении удельной энергии и напора мы оперировали открытым пьезометром Π. Если бы мы вместо пьезометра Π пользовались закрытым пьезометром Π_0, то вместо потенциального напора H получили бы абсолютный потенциальный напор H_A (см. рис. 2-9 и 2-12). Очевидно, напор H_A должен выражать абсолютную удельную потенциальную энергию, подсчитанную без учета противодавления со стороны атмосферы.

Пьезометрическая линия $P_A - P_A$, определяемая напором H_A, должна возвышаться над пьезометрической линией $P - P$ на высоту, равную p_a/γ.

4°. **Дополнительные замечания о потенциальном напоре.** Представим на рис. 2-13 сосуд A, причем вес всей жидкости, наполняющей этот сосуд, обозначим через G. Наметим на рисунке дополнительно: плоскость сравнения OO и эквипотенциали поля сил тяжести, т. е. линии $z = \text{const}$ (см. линии *0*, *1*, *2*, *3*, ..., *8*, показанные длинными штриховыми линиями).

Как известно из механики, потенциальная энергия (ЭП) жидкости, заполняющей сосуд и находящейся только в поле сил тяжести, равна (относительно плоскости сравнения OO) GH_c, где H_c — возвышение центра тяжести рассматриваемого объема жидкости над плоскостью сравнения. Наша жидкость, падая на плоскость OO, должна произвести работу, равную GH_c. Именно эту работу будем называть собственной потенциальной энергией объема жидкости, заполняющей сосуд и находящейся только в поле сил тяжести; обозначая ее через $(Э\Pi)_{соб}$, имеем:

$$(Э\Pi)_{соб} = GH_c. \tag{А}$$

Выше мы ввели понятие потенциального напора H и определили эту величину как меру энергии, принадлежащей единице веса жидкости. Следует подчеркнуть, что исходя из понятия потенциального напора недопустимо подсчитывать собственную энергию покоящейся жидкости. Действительно, если бы мы попытались это сделать, то для величины $(Э\Pi)_{соб}$ получили бы неправильное выражение:

$$(Э\Pi)_{соб} = GH \; (\neq GH_c). \tag{Б}$$

Вопрос о потенциальном напоре H (о величине удельной потенциальной энергии) надлежит понимать (в связи с дальнейшим рассмотрением вопросов гидродинамики; см., например, § 3-15 и § 9-4) следующим образом.[1]

Рассматриваем жидкость, находящуюся в сосуде A, как некоторую (в данном случае) неподвижную среду. Намечаем в этой среде одну единицу веса жидкости. При этом считаем, что данная единица веса (рис. 2-13) заключена как бы в невесомый контейнер, образованный «стальными» невесомыми стенками, изолирующими эту единицу веса от окружающей жидкости. Далее представляем себе, что данная единица веса жидкости перемещается внутри упомянутой неподвижной среды (например, от точки m до точки n). При этом потенциальный напор H (удельную потенциальную энергию) следует понимать как меру энергии, принадлежащей указанной единице веса жидкости, перемещающейся в окружающей ее неподвижной жидкой среде.

Покажем, что данная движущаяся единица веса жидкости действительно обладает (при определенных поставленных условиях) потенциальной энергией, равной ($H \times$ $\times$ 1 ед. веса). С этой целью прежде всего обратим внимание на следующее существенное обстоятельство.

Неподвижная среда тяжелой жидкости, находящейся в сосуде A, обусловливает существование скалярного поля давлений (p/γ), причем величина $\frac{p}{\gamma} = f(x, y)$ является потенциальной функцией *векторного поля градиентов давления*[2]

---

[1] Подробнее см. Р. Р. Чугаев. Физический смысл отдельных слагаемых уравнения Бернулли для установившегося и неустановившегося движений реальной жидкости. — Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 4. — М.: Высшая школа, 1981.

[2] Отнесенных к единице веса жидкости.

$$J_p = \frac{\partial (p/\gamma)}{\partial z}.$$

Линии равного потенциала $\frac{p}{\gamma} = \text{const}$ показаны на рис. 2-13 пунктиром: первая эквипотенциаль O совпадает[1] с поверхностью жидкости, ее наименование $p/\gamma = 0$; последняя (самая нижняя) эквипотенциаль $4'$ должна совпадать с дном сосуда, ее наименование будет $\frac{p}{\gamma} = h$, где h – глубина воды в сосуде.

Имея в виду сказанное, заключаем, что намеченная нами единица веса жидкости одновременно перемещается в двух разных потенциальных полях:

а) в векторном поле сил тяжести, описываемом потенциальной функцией z;

б) в поле векторов J_p, описываемом потенциальной функцией p/γ.

Как видно, при указанной постановке вопроса сама тяжелая жидкость, находящаяся в сосуде A, интересует нас только как «материал», создающий неподвижное потенциальное поле, описываемое функцией p/γ (внутри которого перемещается выделенная единица веса жидкости).

Легко видеть, что работа данной единицы веса при перемещении ее от точки m до точки n (см. рис. 2-13), равняется:

1) за счет движения ее только в потенциальном поле сил тяжести величине

$$(z_7 - z_5) \times 1 \text{ ед. веса};$$

2) за счет движения ее только в потенциальном поле градиентов давления величине

$$(z_5 - z_7) \times 1 \text{ ед. веса},$$

где z_5 и z_7 – возвышение над плоскостью сравнения соответственно точек n и m.

Как видно, полная работа данной единицы веса, перемещающейся одновременно в двух потенциальных полях,

$$(z_7 - z_5) \times 1{,}0 + (z_5 - z_7) \times 1{,}0 = 0,$$

а следовательно, полная потенциальная энергия единицы веса жидкости, находящейся в любой точке, расположенной внутри сосуда, одинакова и равна величине H (поскольку этой величиной энергии, как видно из рис. 2-13, обладают единицы веса жидкости, расположенные, например, на свободной поверхности жидкости).

Именно указанным образом можно более точно разъяснить вопрос о потенциальной энергии некоторого объема покоящейся жидкости, который одновременно находится в двух различных векторных неподвижных силовых потенциальных полях.

Данный вопрос можно разъяснить еще и следующим образом. Возьмем кубический метр жидкости, заключенный в практически невесомый прочный (например, стальной) контейнер, имеющий кубическую форму. Далее представим себе, что этот контейнер (заполненный тяжелой жидкостью) перемещается в воздухе (т. е. только в поле сил тяжести). Очевидно, работа, выполненная этим контейнером, определится разностью наименований соответствующих линий равного потенциала только поля сил тяжести («начальной» и «конечной» эквипотенциалей). После этого удалим из нашего контейнера жидкость и тем самым сделаем его невесомым. Этот пустой невесомый контейнер будем мысленно перемещать не в воздухе, а в окружающей жидкости, т. е. только в векторном поле градиентов J_p давления. Очевидно, за счет давления жидкости на стенки пустого контейнера сверху и снизу (т. е. за счет архимедовой силы, имеющей свою потенциальную функцию в виде p/γ) мы получим ту же работу, что и выше, когда мы мысленно перемещали данный контейнер в воздухе (в поле сил тяжести). Однако две эти работы

[1] Атмосферное давление не учитываем.

$$J_p = \frac{\partial (p/\gamma)}{\partial z}.$$

иала $\frac{p}{\gamma}$ = const показаны на

ет [1] с поверхностью жидкос
квипотенциаль 4' должна совпа

— глубина воды в сосуде.

заключаем, что намеченная
е т с я в д в у х р а з н ы х п
тяжести, описываемом поте
писываемом потенциальной ф
ной постановке вопроса сама
ует нас только как «матери
аемое функцией p/γ (внутри
и).

а данной единицы веса при
авняется:

олько в потенциальном поле

$$(z_7 - z_5) \times 1 \text{ ед. веса;}$$

только в потенциальном

$$(z_5 - z_7) \times 1 \text{ ед. веса,}$$

плоскостью сравнения соотв
а данной единицы веса, пер
п о л я х,

$$- z_5) \times 1{,}0 + (z_5 - z_7) \times 1{,}0 = 0$$

тенциальная энергия едини
положенной внутри сосуда,
й величиной энергии, как ви
ложенные, например, на свобо
ом можно более точно раз
ъема покоящейся жидкости,
ч н ы х в е к т о р н ы х не

зъяснить еще и следующим
енный в практически невес
кубическую форму. Далее
й жидкостью) перемещается в
Очевидно, работа, выпол
нований соответствующих
«начальной» и «конечной»
йнера жидкость и тем самы
ер будем мысленно перемеща
ь к о в в е к т о р н о м п
т давления жидкости на с
архимедовой силы, имею
м ту же работу, что и выше,
оздухе (в поле сил тяжести)

учитываем.

сил тяжести и работа только в поле сил давления —
т иметь разные знаки, причем сумма этих работ будет

вая вопрос о потенциальной энергии одной единицы веса
сосуде A, мы должны представлять себе воображаемое
веса в окружающей ее жидкости, при этом мы должны
ница веса жидкости о д н о в р е м е н н о п е р е м е щ а е т с я в
ы х п о т е н ц и а л ь н ы х п о л я х:
ж е с т и, описываемом приведенной потенциальной функцией,

о в о й с и л ы, описываемой приведенной потенциальной функ-

ая потенциальная энергия рассматриваемой единицы веса,
ся в д в у х р а з л и ч н ы х с и л о в ы х п о т е н ц и а л ь н ы х
ся (относительно произвольно намеченной плоскости сравне-

$= H$.

чина H не есть удельная потенциальная энергия жидкости (на-
некотором сосуде; см. рис. 2-13), подсчитанная относительно
нения OO в предположении, что на жидкость действуют только
H представляет собой отнесенную к единице веса жидкости
н к ц и ю, описывающую с у м м а р н о е векторное силовое поле,
кести и еще «архимедовыми силами» (точнее говоря, силами
ми давления J_p; см. выше).

ЕСИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ (ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ)

когда на жидкость, помимо объемных сил тяжести, действу-
ъемных сил, например, система центробежных сил инерции.
индрический сосуд,
, причем будем счи-
щается вокруг своей
р а в н о м е р н о,
гловой скоростью
лам трения стенки
ут вначале увлекать
истечении некото-
ть начнет вращаться
угловой скоростью
ш е н и ю к с т е н-
е. Силы трения при
также между жид-
и его дном, будут

т, расположенные,
же, будем считать
щимся сосудом, то
вращающимся осям
же будет находиться
сследования враща-
азанных подвижных
быть применены
лера (2-14).

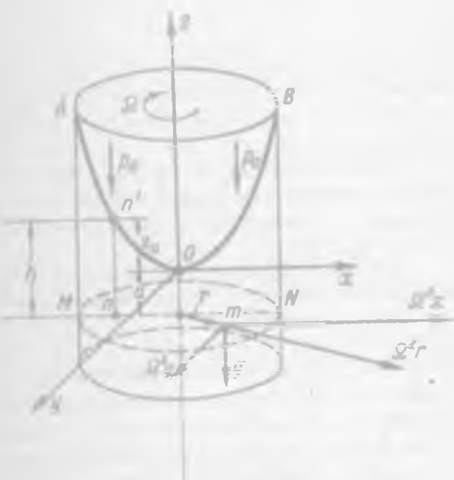


Рис. 2-14. Цилиндрический сосуд, вращающийся относительно вертикальной оси Oz

AOB — свободная поверхность жидкости

химедову силу» при определенной постановке вопроса можно рас-
ъемную.

(работа только в поле сил тяжести и работа только в поле сил давления — архимедовых сил)[1] будут иметь разные знаки, причем сумма этих работ будет равна нулю.

Как видно, рассматривая вопрос о потенциальной энергии одной единицы веса жидкости, находящейся в сосуде A, мы должны представлять себе воображаемое перемещение этой единицы веса в окружающей ее жидкости, при этом мы должны учитывать, что данная единица веса жидкости одновременно перемещается в двух разных силовых потенциальных полях:

1) в поле сил тяжести, описываемом приведенной потенциальной функцией, равной z, и

2) в поле архимедовой силы, описываемой приведенной потенциальной функцией, равной p/γ.

Очевидно, что полная потенциальная энергия рассматриваемой единицы веса, одновременно находящейся в двух различных силовых потенциальных полях, должна равняться (относительно произвольно намеченной плоскости сравнения OO) величине $z + \frac{p}{\gamma} = H$.

Таким образом величина H не есть удельная потенциальная энергия жидкости (находящейся, например, в некотором сосуде; см. рис. 2-13), подсчитанная относительно принятой плоскости сравнения OO в предположении, что на жидкость действуют только силы тяжести. Величина H представляет собой отнесенную к единице веса жидкости потенциальную функцию, описывающую суммарное векторное силовое поле, образованное силами тяжести и еще «архимедовыми силами» (точнее говоря, силами, выражаемыми градиентами давления J_p, см. выше).

§ 2-6. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ (ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ)

Рассмотрим случай, когда на жидкость, помимо объемных сил тяжести, действует еще другая система объемных сил, например, система центробежных сил инерции.

Возьмем круглоцилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, причем будем считать, что этот сосуд вращается вокруг своей вертикальной оси равномерно, т. е. с постоянной угловой скоростью (рис. 2-14). Благодаря силам трения стенки вращающегося сосуда будут вначале увлекать за собой жидкость, а по истечении некоторого времени вся жидкость начнет вращаться вместе с сосудом с той же угловой скоростью Ω, находясь по отношению к стенкам сосуда в покое. Силы трения при этом внутри жидкости, а также между жидкостью, стенками сосуда и его дном, будут отсутствовать.

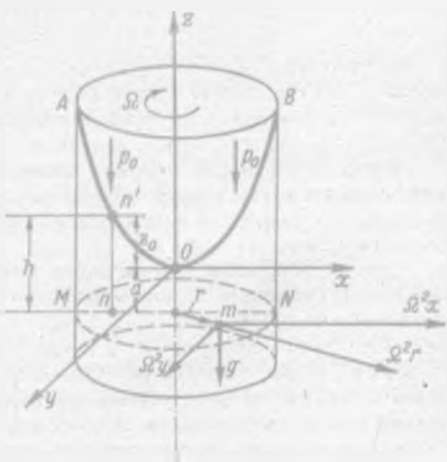


Рис. 2-14. Цилиндрический сосуд, вращающийся относительно вертикальной оси Oz

AOB — свободная поверхность жидкости

Если оси координат, расположенные, как показано на чертеже, будем считать скрепленными с вращающимся сосудом, то по отношению к таким вращающимся осям координат жидкость также будет находиться в покое. Поэтому для исследования вращающейся жидкости при указанных подвижных осях координат могут быть применены известные уравнения Эйлера (2-14).

[1] Известно, что «архимедову силу» при определенной постановке вопроса можно рассматривать как силу объемную.

(работа только в поле сил тяжести и работа только в поле сил давления – архимедовых сил)[1] будут иметь разные знаки, причем сумма этих работ будет равна нулю.

Как видно, рассматривая вопрос о потенциальной энергии одной единицы веса жидкости, находящейся в сосуде A, мы должны представлять себе воображаемое перемещение этой единицы веса в окружающей ее жидкости, при этом мы должны учитывать, что данная единица веса жидкости одновременно перемещается в двух разных силовых потенциальных полях:

1) в поле сил тяжести, описываемом приведенной потенциальной функцией, равной z, и

2) в поле архимедовой силы, описываемой приведенной потенциальной функцией, равной p/γ.

Очевидно, что полная потенциальная энергия рассматриваемой единицы веса, одновременно находящейся в двух различных силовых потенциальных полях, должна равняться (относительно произвольно намеченной плоскости сравнения OO) величине $z + \dfrac{p}{\gamma} = H$.

Таким образом величина H не есть удельная потенциальная энергия жидкости (находящейся, например, в некотором сосуде; см. рис. 2-13), подсчитанная относительно принятой плоскости сравнения OO в предположении, что на жидкость действуют только силы тяжести. Величина H представляет собой отнесенную к единице веса жидкости потенциальную функцию, описывающую суммарное векторное силовое поле, образованное силами тяжести и еще «архимедовыми силами» (точнее говоря, силами, выражаемыми градиентами давления J_p; см. выше).

§ 2-9. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ (ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ)

Рассмотрим случай, когда на жидкость, помимо объемных сил тяжести, действует еще другая система объемных сил, например, система центробежных сил инерции.

Возьмем круглоцилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, причем будем считать, что этот сосуд вращается вокруг своей вертикальной оси равномерно, т. е. с постоянной угловой скоростью (рис. 2-14). Благодаря силам трения стенки вращающегося сосуда будут вначале увлекать за собой жидкость, а по истечении некоторого времени вся жидкость начнет вращаться вместе с сосудом с той же угловой скоростью Ω, находясь по отношению к стенкам сосуда в покое. Силы трения при этом внутри жидкости, а также между жидкостью, стенками сосуда и его дном, будут отсутствовать.

Если оси координат, расположенные, как показано на чертеже, будем считать скрепленными с вращающимся сосудом, то по отношению к таким вращающимся осям координат жидкость также будет находиться в покое. Поэтому для исследования вращающейся жидкости при указанных подвижных осях координат могут быть применены известные уравнения Эйлера (2-14).

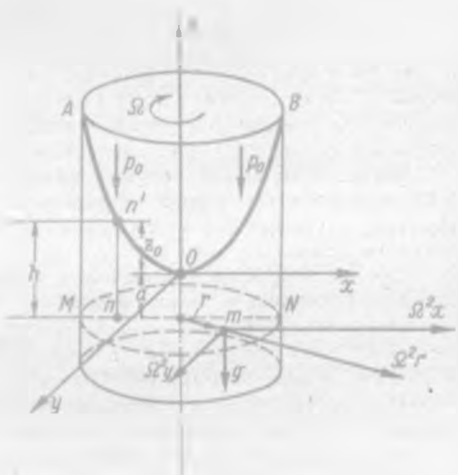


Рис. 2-14. Цилиндрический сосуд, вращающийся относительно вертикальной оси Oz

AOB – свободная поверхность жидкости

---

[1] Известно, что «архимедову силу» при определенной постановке вопроса можно рассматривать как силу объемную.

В эти уравнения входит объемная сила ϕ, действующая на единицу массы жидкости. В данном случае сила ϕ будет слагаться из двух сил: силы тяжести и центробежной силы.

С тем чтобы найти проекцию центробежной силы на оси координат, наметим внутри жидкости точку m и выделим у нее элементарную массу жидкости δM. Масса δM будет вращаться вокруг оси сосуда, двигаясь по окружности, имеющей радиус r и лежащей в плоскости, нормальной к оси сосуда. Центробежная сила, действующая на данную массу, будет

$$I' = \frac{v^2 \delta M}{r} = \frac{\delta M}{r}(\Omega r)^2 = \Omega^2 r \delta M, \tag{2-62}$$

где v – скорость движения массы δM по окружности радиуса r.

Центробежная сила, отнесенная к единице массы жидкости, сосредоточенной в точке m,

$$I = \frac{I'}{\delta M} = \Omega^2 r. \tag{2-63}$$

Эта сила, так же как и сила I', направлена по радиусу от оси сосуда наружу. Проекции силы I (отнесенной к единице массы) на оси координат

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \Omega^2 r \cos(r, x) = \Omega^2 r \frac{x}{r} = \Omega^2 x; \\ I_y &= \Omega^2 r \cos(r, y) = \Omega^2 r \frac{y}{r} = \Omega^2 y; \\ I_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2-64}$$

Проекции объемной силы тяжести, отнесенной к единице массы, выражаются зависимостью (2-28). Складывая объемные силы тяжести и объемные центробежные силы, отнесенные к единице массы, получаем

$$\left.\begin{aligned} \phi_x &= 0 + \Omega^2 x = \Omega^2 x; \\ \phi_y &= 0 + \Omega^2 y = \Omega^2 y; \\ \phi_z &= -g + 0 = -g. \end{aligned}\right\} \tag{2-65}$$

Подставляя (2-65) в (2-17), найдем [1]

$$dp_A = \rho(\Omega^2 x dx + \Omega^2 y dy - g\, dz), \tag{2-66}$$

что после интегрирования дает

$$p_A = \rho\left(\frac{\Omega^2 x^2}{2} + \frac{\Omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C = \frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g z + C. \tag{2-67}$$

Постоянную интегрирования C устанавливаем, написав (2-67) применительно к точке, находящейся в начале координат, для которой $x = y = z = 0$; $p = p_0$. Как видно,

$$C = p_0, \tag{2-68}$$

причем (2-67) перепишется в виде:

$$p_A = p_0 + \frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \gamma z. \tag{2-69}$$

Это последнее уравнение и выражает закон распределения давления в рассматриваемой жидкости. Пользуясь таким уравнением, можно найти поверхности р а в н о г о д а в л е н и я.

Действительно, уравнение поверхности, во всех точках которой давление $p_A = p_i = \text{const}$, запишется в виде

$$\frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \gamma z = p_i - p_0. \tag{2-70}$$

---

[1] В уравнении (2-17) под p подразумевалось абсолютное давление p_A в точке.

Уравнение (2-70) выражает поверхность, являющуюся п а р а б о л о и д о м в р а щ е н и я (с вертикальной осью).

Свободная поверхность жидкости, характеризуемая постоянным давлением $p_i = p_0$[1], представляет собой также параболоид вращения; уравнение ее будет:

$$\frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \gamma z = 0. \tag{2-71}$$

Если учесть, что $x^2 + y^2 = r^2$, то, решив (2-71) относительно z, получим следующее уравнение, по которому легко построить параболу AOB, дающую свободную поверхность:

$$z_0 = \frac{\Omega^2}{2g}r^2, \tag{2-72}$$

где z_0 – ордината кривой AOB.

Распределение давления в горизонтальной плоскости MN, лежащей ниже начала координат на величину a, можно найти, пользуясь (2-69):

$$p_A = p_0 + \frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \gamma a = p_0 + \frac{\rho\Omega^2}{2}r^2 + \gamma a = p_0 + \gamma\left(\frac{\Omega^2}{2g}r^2 + a\right). \tag{2-73}$$

Учитывая (2-72), получаем

$$p_A = p_0 + \gamma(a + z_0) = p_0 + \gamma h, \tag{2-74}$$

где $h = a + z_0$ показано на рис. 2-14.

Таким образом, давление в жидкости, находящейся внутри равномерно вращающегося сосуда, выражается зависимостью того же вида, что и для случая тяжелой покоящейся жидкости [см. (2-39)]; под величиной h здесь надо понимать только заглубление рассматриваемой точки под криволинейной свободной поверхностью.

§ 2-16. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПЛОСКУЮ ФИГУРУ ЛЮБОЙ ФОРМЫ

Представим на рис. 2-15,*а* открытый сосуд, наполненный жидкостью и имеющий плоскую наклонную стенку OM. В плоскости этой стенки наметим оси координат Oz и Ox. Ось Ox направим перпендикулярно к плоскости чертежа.

На стенке сосуда OM наметим некоторую плоскую фигуру любого очертания, имеющую площадь S. Эта фигура на рис. 2-15,*а* будет проектироваться в линию (показанную на чертеже жирно). Представим еще на рис. 2-15,*б* стенку сосуда OM, повернутую относительно оси Oz на 90° (совмещенную с плоскостью чертежа). Ясно, что на рис. 2-15,*б* намеченная плоская фигура будет изображаться без искажения.

В соответствии с первым свойством гидростатического давления (см. § 2-2) можем утверждать, что во всех точках площади S давление жидкости будет направлено нормально к стенке. Отсюда заключаем, что сила абсолютного гидростатического давления P_A, действующая на произвольную плоскую фигуру площадью S, будет также направлена по отношению к стенке нормально (как это показано на рис. 2-15,*а*).

Поставим перед собой цель найти:

а) силу P_A абсолютного гидростатического давления;

б) положение линии действия силы P_A.

---

[1] Учитывая поверхностное давление p_0 со стороны воздушной среды на поверхность жидкости, мы при этом пренебрегали выше силами трения, возникающими между жидкостью и воздушной средой.

1°. Сила P_A. Наметим на рассматриваемой фигуре произвольную точку m, заглубленную под уровнем жидкости на h и имеющую координату z; ясно, что

$$h = z \sin \theta, \tag{2-75}$$

где θ — угол наклона боковой стенки сосуда к горизонту.

У точки m выделим элементарную площадку dS. Сила абсолютного гидростатического давления, действующая на эту площадку,

$$dP_A = p_A \, dS, \tag{2-76}$$

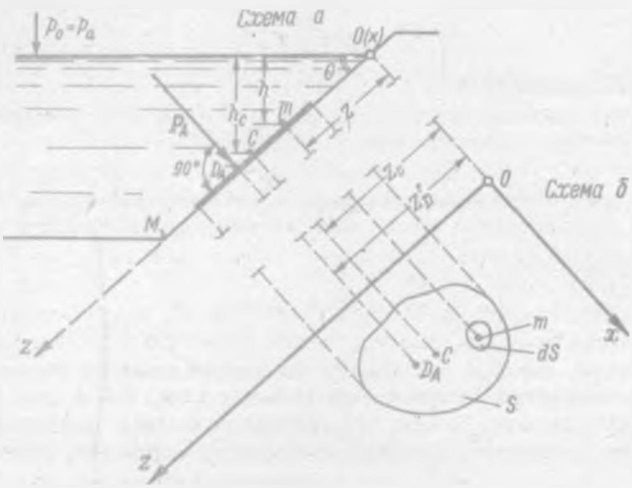


Рис. 2-15. Давление жидкости на плоскую наклонную фигуру площадью S

или, согласно (2-40),

$$dP_A = (p_a + \gamma h) dS = p_a dS + \gamma h \, dS = p_a dS + \gamma z \sin \theta \, dS. \tag{2-77}$$

Интегрируя это выражение по всей площади S, получаем:

$$P_A = p_a \int_S dS + \gamma \sin \theta \int_S z \, dS. \tag{2-78}$$

Ясно, что:

$$\int_S dS = S; \ \int_S z \, dS = (\mathrm{St})_{Ox} = z_C S, \tag{2-79}$$

где $(\mathrm{St})_{Ox}$ — статический момент плоской фигуры относительно оси Ox; z_C — координата центра тяжести (точки C) данной плоской фигуры.

Подставляя (2-79) в (2-78), получаем:

$$P_A = p_a S + \gamma S z_C \sin \theta. \tag{2-80}$$

Так как

$$z_C \sin \theta = h_C,$$

где h_C — заглубление центра тяжести C плоской фигуры под горизонтом жидкости, то

$$P_A = p_a S + \gamma h_C S \tag{2-81}$$

или

$$\boxed{P_A = (p_a + \gamma h_C) S = S (p_A)_C,} \qquad (2\text{-}82)$$

где $(p_A)_C$ – абсолютное гидростатическое давление в точке, являющейся центром тяжести рассматриваемой плоской фигуры.

Формулу (2-81) можно представить еще в виде:

$$P_A = P_a + P, \qquad (2\text{-}83)$$

здесь P_a – сила, обусловленная атмосферным (поверхностным) давлением, передающимся через жидкость на плоскую фигуру:

$$P_a = p_a S; \qquad (2\text{-}84)$$

P – сила избыточного в данном случае весового давления:

$$P = \gamma h_C S = p_C S, \qquad (2\text{-}85)$$

где p_C – избыточное (весовое) давление в центре тяжести фигуры.

Как видно, *сила гидростатического давления (абсолютного или избыточного), действующая на плоскую фигуру любой формы, равна площади этой фигуры, умноженной на соответствующее гидростатическое давление* $[(p_A)_C$ или $p_C]$ *в центре тяжести этой фигуры.*

Точка D_A пересечения линии действия силы P_A с плоскостью, в которой лежит рассматриваемая фигура, называется центром давления силы P_A. Найдем положение точки D_A; этим и определится линия действия силы P_A.

2°. Положение центра давления. Представим на рис. 2-16 деталь предыдущего чертежа. Центр давления силы P_a будет совпадать с центром тяжести фигуры, так как поверхностное давление $p_0 = p_a$, передаваясь через жидкость, равномерно распределяется по рассматриваемой площади. Что касается избыточного давления, то оно распределяется неравномерно по площади фигуры: чем глубже расположена точка фигуры, тем большее давление она испытывает; поэтому центр давления силы P будет лежать ниже центра тяжести фигуры (см. точку D).

Искомая сила P_A является геометрической суммой сил P_a и P. Точка D_A будет лежать между точками C и D; эта точка D_A найдется в результате геометрического сложения сил P_a и P. Таким образом, вопрос сводится к отысканию точки D, определяемой координатой z_D. Зная z_D, мы далее, как указано выше, найдем и величину z'_D, определяющую положение точки D_A.

Расчетную зависимость для величины z_D находят, исходя из следующего условия: сумма моментов составляющих элементарных сил pdS относительно оси Ox равна моменту равнодействующей силы P относительно той же оси Ox.

Имея в виду это условие, можем написать:

$$\int_S (pdS)\, z = P z_D. \qquad (2\text{-}86)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\int_S (\gamma h\, dS)\, z = (\gamma h_C S)\, z_D$$

или

$$\int_S (\gamma \sin\theta\, z\, dS)\, z = (\gamma \sin\theta\, z_C S)\, z_D,$$

откуда

$$z_D = \frac{\int_S z^2\, dS}{S z_C} = \frac{I_{Ox}}{(St)_{ox}}, \qquad (2\text{-}87)$$

где

$$I_{Ox} = \int\limits_S z^2\, dS \qquad (2\text{-}88)$$

момент инерции плоской фигуры относительно оси Ox, а

$$(St)_{ox} = Sz_C \qquad (2\text{-}89)$$

есть, как это уже отмечалось, статический момент плоской фигуры относительно оси Ox.

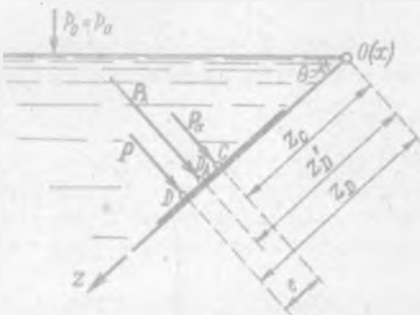


Рис. 2-16. Центр силы гидростатического давления

C – центр тяжести фигуры, D_A – центр давления силы P_A, D – центр давления силы P, e – эксцентриситет силы P

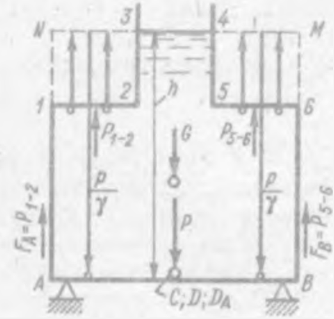


Рис. 2-17. Гидростатическое давление на дно сосуда, наполненного жидкостью

F_A и F_B – усилия, передающиеся дну вертикальными стенками сосуда

Формулу (2-87) можно еще переписать в виде

$$z_D = \frac{I_{Ox}}{(St)_{Ox}} = \frac{I_C + Sz_C^2}{Sz_C} = z_C + \frac{I_C}{Sz_C} \qquad (2\text{-}90)$$

или

$$z_D = z_C + e, \qquad (2\text{-}91)$$

где положительная величина e называется эксцентриситетом. Эксцентриситет

$$e = \frac{I_C}{(St)_{Ox}} = \frac{I_C}{Sz_C}, \qquad (2\text{-}92)$$

причем здесь I_C есть момент инерции рассматриваемой плоской фигуры относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести фигуры. Как видно, центр давления силы P лежит ниже центра тяжести фигуры на величину, равную e.

Выше мы ограничились отысканием только одной координаты точки D (координаты z_D). Однако в общем случае приходится еще определять и вторую координату (x_D). Ее можно найти, исходя из уравнения моментов соответствующих сил [уравнения, аналогичного (2-86)] относительно оси Oz.

3°. **Случай горизонтальной плоской фигуры.** В заключение рассмотрим частный случай – случай плоской фигуры, расположенной горизонтально (см. AB на рис. 2-17). Как видно, в этом частном случае избыточное гидростатическое давление p, выражаемое заглублением точек плоского дна AB под уровнем жидкости $3-4$, будет распределяться равномерно по всей плоскости AB. Поэтому в данном случае $e = 0$ и центры давления D_A и D должны совпадать с центром тяжести C. Величина силы избыточного давления P, действующего на горизонтальное дно сосуда, показанного на рис. 2-17, будет выражаться эпюрой $ANMB$ (весом жидкости в объеме $ANMB$).

Представим себе, что рассматриваемый сосуд поставлен на весы. Ясно, что на весы будет передаваться вес G жидкости, находящейся в сосуде, выражаемый площадью эпюры $A - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - B$ (весом стенок сосуда пренебрегаем). Вместе с тем, как это было указано выше, на дно сосуда AB действует сила P давления жидкости, выражаемая площадью $ANMB$, причем эта площадь может значительно отличаться по величине от площади $A - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - B$.

Как видно, надо различать две разные силы: а) силу P давления жидкости на дно; б) силу G давления дна на весы, причем в общем случае

$$P \neq G.$$

Такое положение объясняется следующим.

Силы P_{1-2} и P_{5-6} (рис. 2-17) вертикального давления жидкости на стенки $1 - 2$ и $5 - 6$ выражаются эпюрами $1 - 2 - 3 - N$ и $4 - 5 - 6 - M$. Эти силы передаются через стенки сосуда на дно AB сосуда:

$$F_A = P_{1-2}; \; F_B = P_{5-6};$$

следовательно,

$$G = P - F_A - F_B.$$

§ 2-11. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ

Возьмем плоскую вертикальную фигуру OA (рис. 2-18, a), имеющую горизонтальное основание; ширину этого прямоугольника обозначим через b (рис. 2-18, $б$). Будем рассматривать только избыточное давление на эту фигуру; поверхностное давление, которое часто равно атмосферному, учитывать не будем. Заметим, что при статическом расчете стенки OA нам приходится учитывать только избыточное давление, так как атмосферное давление, которое передается через жидкость и действует на стенку слева, полностью уравновешивается атмосферным давлением, действующим непосредственно на стенку справа.

Наметим на поверхности фигуры OA точку m. Давление в этой точке будет

$$p = \gamma h. \tag{2-93}$$

Представим себе, что точка m перемещается от O до A по прямой линии; при этом, как видно из (2-93), гидростатическое давление будет изменяться по линейному закону. Для точки O при $h = 0$

$$p = 0; \tag{2-94}$$

для точки A

$$p = \gamma h_1, \tag{2-95}$$

где h_1 – «глубина воды» (или любой жидкости) перед плоской фигурой (заглубление точки A под свободной поверхностью жидкости).

Учитывая приведенные соотношения, отложим на рис. 2-18, a перпендикулярно поверхности OA отрезок γh_1, причем получим точку B. Соединим теперь точку O и точку B прямой линией. В результате получим треугольник OAB. Этот треугольник называется эпюрой гидростатического давления.

Площадь треугольника OAB, умноженная на ширину b, дает нам силу P гидростатического давления, действующего на прямоугольную фигуру:

$$P = \Omega b = \frac{1}{2} h_1^2 \gamma b. \tag{2-96}$$

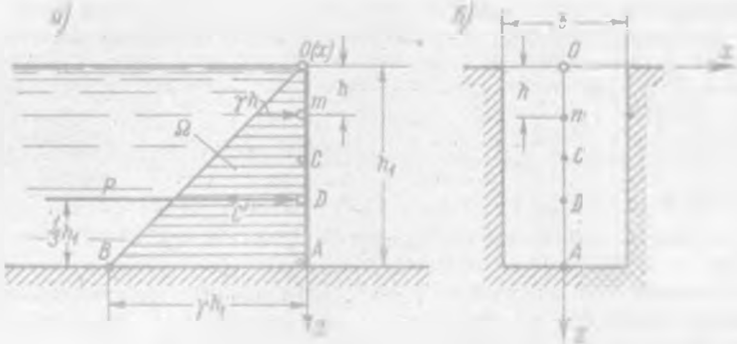


Рис. 2-18. Одностороннее гидростатическое давление на вертикальную плоскую фигуру прямоугольной формы

D — центр давления; C — центр тяжести плоской фигуры; C' — центр тяжести эпюры давления

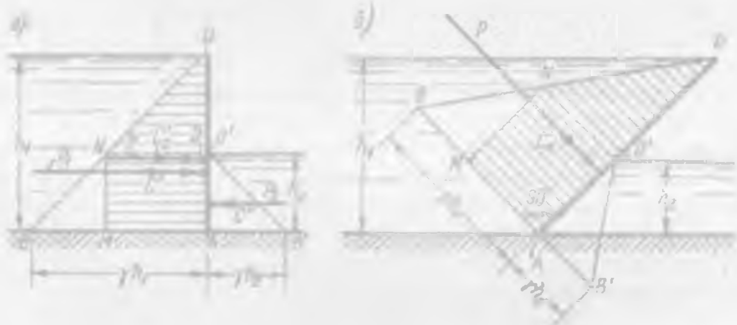


Рис. 2-19. Эпюры давления на плоские прямоугольные фигуры: *а* — вертикальная фигура; *б* — наклонная фигура

Сила P должна быть перпендикулярна к линии OA и проходить через центр тяжести C' эпюры давления. Отсюда заключаем, что центр давления силы P (точка D) должен располагаться на расстоянии $\frac{1}{3} h_1$ от дна прямоугольного лотка, в котором установлен рассматриваемый вертикальный прямоугольный щит.

Иногда при построении эпюры давления по перпендикуляру от точки A откладывают не γh_1, как это мы делали выше, а h_1. При таком построении эпюры давления вместо формулы (2-96) будем иметь:

$$P = \Omega b \gamma = \frac{1}{2} h_1^2 \gamma b. \tag{2-97}$$

Надо помнить, что эпюра гидростатического давления характеризуется следующими двумя свойствами:

1) каждая ордината эпюры давления, измеренная перпендикулярно к щиту OA, выражает заглубление соответствующей точки щита, а следовательно, и гидростатическое давление в этой точке;

2) площадь эпюры давления выражает силу P гидростатического давления (суммарное гидростатическое давление).

При наличии воды с двух сторон рассматриваемого щита OA (рис. 2-19,*а*) приходится строить отдельно две эпюры давления (два треугольника гидростатического давления): для жидкости, находящейся слева от щита (см. треугольник OAB), и для жидкости, находящейся справа от щита (см. треугольник $O'AB'$). После этого два полученных треугольника складываем, как показано на чертеже; в результате получаем эпюру давления в виде трапеции $OAMN$. Очевидно, площадь этой трапеции будет выражать искомую силу P; линия действия силы P должна проходить через центр тяжести C_0 трапеции перпендикулярно к щиту OA.

В случае наклонного прямоугольного щита окончательная эпюра давления, учитывающая давление воды слева и справа на щит, будет иметь вид трапеции $OAMN$, показанной на рис. 2-19,*б*.

§ 2-12. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В практике приходится определять силу гидростатического давления не только на п л о с к и е поверхности, но и на поверхности к р и в о л и н е й н ы е л ю б о г о в и д а. Ниже рассмотрим только простейший частный случай криволинейной поверхности – цилиндрическую поверхность, которая встречается наиболее часто.[1]

Будем рассматривать только избыточное давление, вовсе не интересуясь поверхностным давлением.

1-й случай цилиндрической поверхности. Представим на рис. 2-20 цилиндрическую поверхность ABC. Эта поверхность расположена перпендикулярно к плоскости чертежа, и потому она проектируется в одну линию ABC (кривая ABC есть направляющая рассматриваемой цилиндрической поверхности). Обозначим длину образующей цилиндрической поверхности, перпендикулярной к плоскости чертежа, через b ($b = \text{const}$). Наметим вертикальную плоскость CC' и оси координат x и z. Обозначим через P_x и P_z горизонтальную и вертикальную составляющие силы P гидростатического давления, действующего со стороны жидкости на цилиндрическую поверхность.

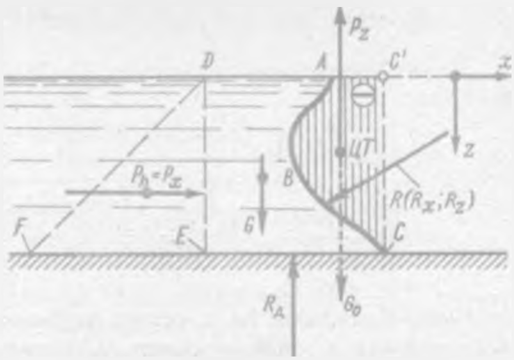


Рис. 2-20. Давление на цилиндрическую поверхность ABC (вертикаль $C - C'$ лежит вне жидкости)

Обратимся вначале к отысканию составляющих P_x и P_z искомой силы P. С этой целью проведем вертикальную плоскость DE. Плоскость DE выделит

[1] Существующие методы расчета, относящиеся к общему случаю криволинейной поверхности, излагаются в специальной литературе [2-2, с. 56 – 64].

объем покоящейся жидкости $ABCED$, равновесие которого далее рассматриваем. На этот объем действуют следующие силы:

1) сила P_h, действующая на вертикальную грань DE со стороны жидкости, расположенной слева от этой грани;

2) сила $R_д$ – со стороны дна EC (реакция дна; см. конец § 2-10):

$$R_д = [\text{площадь } (C'CED)]\ b\gamma; \tag{2-98}$$

3) реакция R – со стороны цилиндрической поверхности; горизонтальную и вертикальную составляющие этой реакции обозначим соответственно R_x и R_z; значения и направления этих сил (в отличие от других) нам неизвестны;

4) собственный вес G рассматриваемого объема жидкости:

$$G = [\text{площадь } (ABCED)]\, b\gamma. \tag{2-99}$$

Проектируя все силы, действующие на покоящийся объем $ABCED$, соответственно на оси x и z, получаем следующие уравнения равновесия [не зная направления R_x и R_z, вводим их в уравнения (2-100) со знаком плюс]:

$$P_h + R_x = 0;\ G + R_z - R_д = 0, \tag{2-100}$$

откуда

$$R_x = -P_h;\ R_z = R_д - G. \tag{2-101}$$

Так как силы P_x и P_z направлены противоположно силам R_x и R_z, то можем написать:

$$P_x = -R_x \text{ и } P_z = -R_z, \tag{2-102}$$

при этом вместо (2-101) имеем:

$$\boxed{P_x = P_h;} \tag{2-103}$$

$$P_z = -(R_д - G). \tag{2-104}$$

Далее преобразуем уравнение (2-104); подставляя в него (2-98) и (2-99), получаем:

$$P_z = -[\text{площадь } (C'CED) - \text{площадь } (ABCED)]\, b\gamma \tag{2-105}$$

или

$$\boxed{P_z = -[\text{площадь}(ABCC')]\, b\gamma.} \tag{2-106}$$

Рассмотрев (2-103) и (2-106), можно заключить следующее.

1. Горизонтальная составляющая P_x искомой силы *равна силе давления жидкости на плоскую вертикальную прямоугольную фигуру DE, представляющую собой проекцию рассматриваемой цилиндрической поверхности на вертикальную плоскость.* В связи с этим сила $P_x = P_h$ может быть выражена, как и в случае плоских фигур, треугольником гидростатического давления DEF.

2. Вертикальная составляющая P_z искомой силы *равна взятому со знаком минус весу воображаемого жидкого тела площадью сечения ABCC'*. Это воображаемое жидкое тело называется телом давления (см. площадь, покрытую на чертеже штриховкой).

Обозначим вес тела давления через G_0. Тогда вместо (2-106) можно написать

$$\boxed{P_z = -G_0.} \tag{2-107}$$

Заключительное замечание. При построении поперечного сечения тела давления, т. е. эпюры, выражающей вертикальную составляющую P_z, в общем случае можно поступать следующим образом.

Имеем цилиндрическую поверхность ABC, для которой следует построить тело давления (рис. 2-24); при этом прежде всего фиксируем к р а й н и е точки A и C этой поверхности; далее от этих точек проводим вверх вертикали до горизонта жидкости или его продолжения; наконец, намечаем контур тела давления, причем руководствуемся правилом:

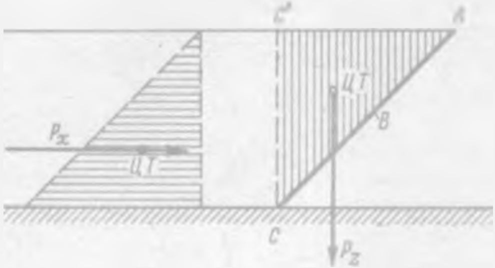


Рис. 2-23. Эпюры составляющих сил давления на плоскую прямоугольную фигуру

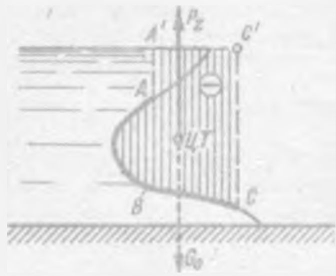


Рис. 2-24. Построение поперечного сечения тела давления для цилиндрической поверхности ABC

поперечное сечение тела давления (отрицательного или положительного) представляет собой фигуру, заключенную между указанными вертикалями, самой цилиндрической поверхностью ABC и горизонтом жидкости (или его продолжением). Если рассматриваемая цилиндрическая поверхность со стороны тела давления не смачивается жидкостью, то имеем отрицательное тело давления (рис. 2-24); *в противном случае – положительное тело давления.*

Обратим еще внимание на то, что сила гидростатического давления P для криволинейной (цилиндрической) поверхности, в отличие от силы P, действующей на плоскую поверхность, н е м о ж е т б ы т ь п р е д с т а в л е н а п л о щ а д ь ю т о л ь к о о д н о й э п ю р ы д а в л е н и я; выше мы представляли эту силу (в общем случае цилиндрической поверхности) двумя эпюрами – для P_x и P_z.

§ 2-11. КРУГЛАЯ ТРУБА, ПОДВЕРЖЕННАЯ ВНУТРЕННЕМУ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМУ ДАВЛЕНИЮ

Будем рассматривать давление на стенки трубы со стороны жидкости, находящейся внутри трубы (внутреннее гидростатическое давление).

1°. **Сила гидростатического давления на стенки прямолинейной трубы.** Представим на рис. 2-25 поперечное сечение горизонтальной трубы, заполненной покоящейся жидкостью. Обозначим через p гидростатическое давление в центре трубы O. Ясно, что давление в самой верхней точке трубы будет $p - \frac{D}{2}\gamma$, где D – диаметр трубы; давление же в самой нижней точке трубы будет равно $p + \frac{D}{2}\gamma$. Часто величиной $\frac{D}{2}\gamma$ сравнительно с величиной p можно пренебречь и считать, что давление жидкости, находящейся в трубе, одинаково по всему ее поперечному сечению ($p = \text{const}$). Этот случай и будем рассматривать

Под действием внутреннего давления p труба может разорваться, например, по плоскости AB. С тем чтобы рассчитать толщину e стенок трубы, обеспечивающую достаточную прочность трубы, нам необходимо знать силу P_x гидростатического давления, действующего на цилиндрическую поверхность abc или на цилиндрическую поверхность adc. Можно показать, что искомая сила P_x равна давлению на плоскую прямоугольную фигуру ac, являющуюся вертикальной проекцией цилиндрической поверхности abc (или adc).

Рис. 2-25. Внутреннее гидростатическое давление P_x, разрывающее трубу по плоскости AB

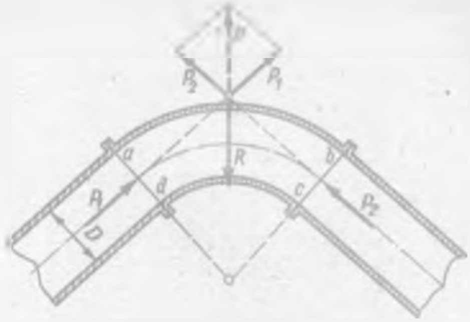


Рис. 2-26. Сила гидростатического давления P, действующего на колено трубы

Поскольку указанная прямоугольная фигура ac представляет собой диаметральное сечение трубы, то искомая сила

$$\boxed{P_x = Dlp,} \tag{2-109}$$

где l – длина трубы. Пользуясь этой формулой, в практике рассчитывают толщину стенок круглоцилиндрических сосудов и труб, находящихся под внутренним гидростатическим давлением. Поскольку сила P_x стремится разорвать рассматриваемую трубу в двух местах (у точки a и у точки c), то толщину e стенки трубы следует рассчитывать на разрыв ее силой, равной $P_x/2$.

2°. Сила гидростатического давления на стенки изогнутой трубы. Рассмотрим трубу, имеющую поворот (рис. 2-26). Колено трубы $abcd$ под действием внутреннего гидростатического давления будет стремиться сдвинуться в направлении силы P. Эта сила представляет собой разность давлений: а) на относительно большую внутреннюю поверхность трубы, лежащую в районе линии ab, и б) на относительно малую внутреннюю поверхность трубы, лежащую в районе линии cd.

Силу P находим следующим образом.

Выделяем отсек жидкости $abcd$, находящейся в трубе. Если пренебречь собственным весом этого отсека, то можно сказать, что данный отсек находится в покое под действием сил, показанных на рис. 2-26:

$$P_1 = \frac{\pi D^2}{4} p \text{ и } P_2 = \frac{\pi D^2}{4} p, \tag{2-110}$$

а также под действием реакции R стенок трубы в пределах колена $abcd$ ($|R| = |P|$). Имея это в виду, складываем геометрически P_1 и P_2 и получаем силу P (рис. 2-26). На величину силы P обычно рассчитывают так называемые анкерные опоры трубопроводов, устраиваемые в местах поворота труб.

Передача давления и энергии при помощи жидкости часто на: применение в практике машиностроения. Встречаются следующие так называ простейшие гидравлические машины: гидравлические прессы, мультиплика (повысители давления), домкраты, подъемники и др. Во всех этих маш имеющих разное назначение и различную конструкцию, используется один і же гидравлический принцип, вытекающий из зависимостей, найденных в и 2-10.

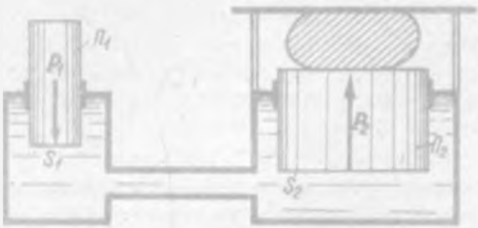


Рис. 2-27. Гидравлический пресс

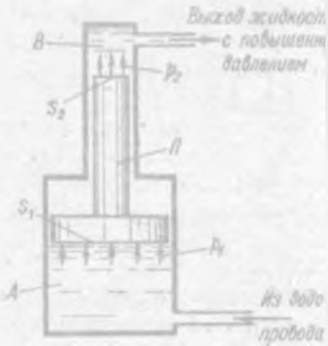


Рис. 2-28. Мультипликатор

На рис. 2-27 показана схема гидравлического пресса. Если к поршню имеющему площадь S_1, приложим силу P_1, то эта сила будет передават на жидкость; жидкость же будет давить на поршень $П_2$, имеющий площ: S_2, с силой

$$P_2 = P_1 \frac{S_2}{S_1}, \qquad (2\text{-}1$$

поскольку гидростатические давления в точках площади S_1 и площади практически равны между собой:

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2} = p. \qquad (2\text{-}1$$

Как видно, при помощи пресса сила P_1 увеличивается в $(S_2:S_1)$ раз.[1]

На рис. 2-28 показана схема мультипликатора. Если в камере A создает гидростатическое давление p_1, то гидростатическое давление p_2 в камере должно удовлетворять условиям:

$$p_2 S_2 = p_1 S_1, \qquad (2\text{-}11$$

откуда

$$p_2 = p_1 \frac{S_1}{S_2}, \qquad (2\text{-}11$$

где S_1 и S_2 – нижняя и верхняя площади поршня $П$.

Как видно, при помощи мультипликатора гидростатическое давлени повышается в $(S_1:S_2)$ раз. Заметим, что как только поршень $П$ вытесни всю жидкость из камеры B, данный мультипликатор выключают из работы

[1] Как здесь, так и ниже (рис. 2-28) при выполнении практических расчето учитывают еще и силу трения в подвижных частях механизма.

поршень $П$ опускают и камеру $В$ заполняют жидкостью (со стороны). После этого мультипликатор снова вступает в работу.

§ 2-15. РАВНОВЕСИЕ ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛ

Возьмем твердое тело AB, погруженное в жидкость (рис. 2-29). Разобьем его на ряд вертикальных цилиндров с площадью поперечного сечения dS. Рассматривая один такой цилиндр, видим, что сверху на него давит вес столба жидкости, равный $\gamma h_1 dS$; снизу — вес столба жидкости, равный $\gamma h_2 dS$. Ясно, что рассматриваемый цилиндр твердого тела будет испытывать подъемное усилие (направленное вверх), равное:

$$dP_v = (h_2 - h_1)\gamma dS. \quad (2\text{-}115)$$

Сумма элементарных подъемных сил dP_v, действующих на все цилиндры, составляющие данное твердое тело, даст нам полную подъемную силу P_v, стремящуюся поднять тело вверх.

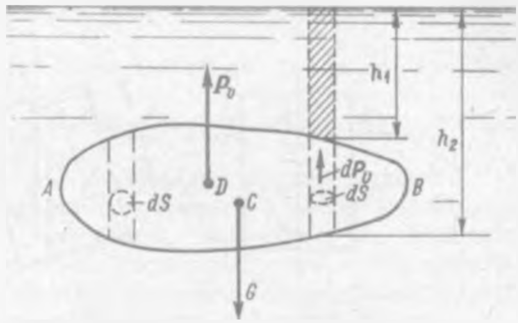


Рис. 2-29. Вертикальная подъемная сила P_v (архимедова сила), G — вес твердого тела, C — центр тяжести его, D — центр водоизмещения

Как видно, вертикальная подъемная сила P_v (архимедова сила) равна весу жидкости в объеме рассматриваемого тела; точкой приложения силы P_v является центр тяжести D объема жидкости AB. Точка D называется **центром водоизмещения**. В общем случае точка D не совпадает с центром тяжести C твердого тела, где приложен его собственный вес G.

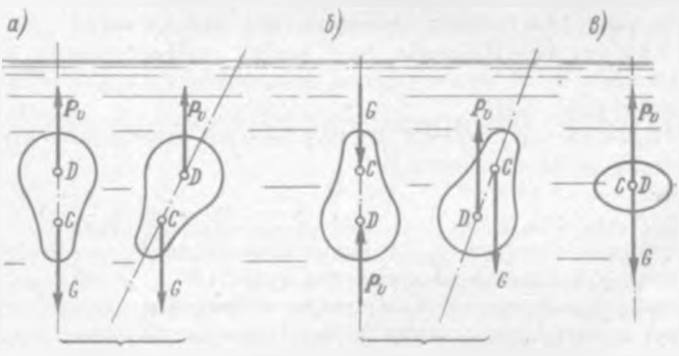


Рис. 2-30. Плавание тела в полностью погруженном состоянии

Можно различать следующие три случая:

$P_v < G$ — тело тонет;

$P_v > G$ — тело всплывает на поверхность жидкости;

$P_v = G$ — тело плавает в погруженном состоянии.

1°. Случай $P_v = G$. Здесь, в свою очередь, можем различать (рис. 2-30):

а) устойчивое равновесие тела (схема *а*);

б) неустойчивое равновесие тела (схема *б*);

в) безразличное равновесие (схема *в*).

2°. Случай $P_v > G$. В этом случае тело будет всплывать до тех пор, пока часть его не выйдет из жидкости (рис. 2-31, *а*), причем будет соблюдено условие

$$G = P'_v, \tag{2-116}$$

где P'_v — вес жидкости, вытесненной плавающим телом.

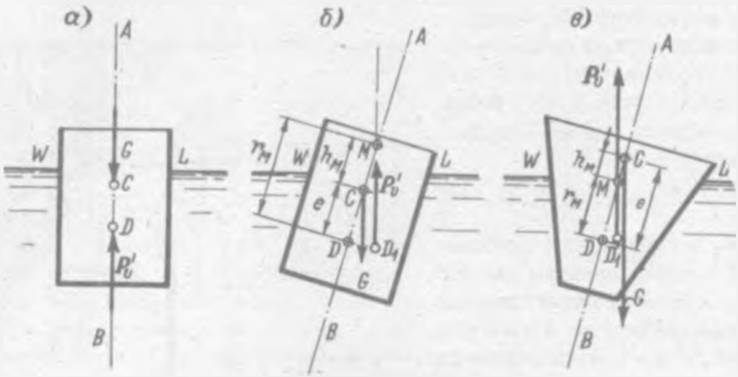


Рис. 2-31. Плавание судна в частично погруженном состоянии: *а* — состояние равновесия; *б* — остойчивое; *в* — неостойчивое

C — центр тяжести судна, *D* — центр водоизмещения при отсутствии крена, D_1 — то же при наличии крена, *M* — метацентр, $r_м$ — метацентрический радиус, $h_м$ — метацентрическая высота, *e* — эксцентриситет

Рассмотрим схему, когда точка *C* (центр тяжести плавающего тела) выше точки *D* (центра водоизмещения). В этом случае, в отличие от схемы *б* на рис. 2-30, можем получить как неустойчивое, так и устойчивое равновесие. Поясним этот вопрос применительно к плаванию судна (в покоящейся воде), причем будем пользоваться следующими терминами и обозначениями (рис. 2-31):

WL — площадь грузовой ватерлинии (площадь горизонтального сечения судна по линии *WL*);

AB - ось плавания;

C — центр тяжести судна;

D – центр водоизмещения при равновесии судна;[1]

D_1 – центр водоизмещения при крене судна;

M – точка пересечения оси плавания *AB* с вертикалью, проведенной через центр водоизмещения D_1; эта точка называется метацентром.

Сопоставляя два разных судна, представленных на рис. 2-31,*б*, *в*, видим следующее:

а) на схеме *б* центр водоизмещения D_1 при крене оказался правее точки *C*, причем возник момент, возвращающий судно в положение покоя. Данный случай характеризуется тем, что метацентр *M* лежит выше точки *C*;

б) на схеме *в* центр водоизмещения D_1 при крене оказался левее точки *C*, причем возник момент, опрокидывающий судно. Данный случай характеризуется тем, что метацентр *M* лежит ниже точки *C*.

[1] Центр водоизмещения иногда именуют «центром величины».

Обозначим длины отрезков DC, CM и DM соответственно через e, h_M и r_M;

$$\overline{DC} = e; \quad \overline{CM} = h_M; \quad \overline{DM} = r_M = e + h_M. \tag{2-117}$$

Эти отрезки называются: e – **эксцентриситетом**; h_M – **метацентрической высотой**; r_M – **метацентрическим радиусом**. Величина h_M считается положительной, если точка M располагается выше точки C (рис. 2-31, *б*), и отрицательной, если точка M располагается ниже точки C (рис. 2-31, *в*).

Остойчивостью судна называется способность его возвращаться в состояние равновесия после получения крена. Имея в виду сказанное, можем утверждать следующее:

1) если для данного судна $h_M > 0$, или, что то же, $r_M > e$, то это судно является остойчивым (2-31, *б*);

2) если для данного судна $h_M < 0$, или, что то же, $r_M < e$, то такое судно является неостойчивым (рис. 2-31, *в*).

Для данного судна эксцентриситет e является постоянной величиной.

При небольшом угле крена (меньше, например, 15°) можно считать, что точка D_1 перемещается по дуге окружности, описанной из метацентра радиусом r_M, причем сама точка M не меняет своего положения на оси плавания.

Как видно, для данного судна метацентрический радиус r_M и метацентрическая высота h_M считаются постоянными (в случае небольших кренов).

Можно показать, что метацентрический радиус

$$r_M = \frac{I}{V}, \tag{2-118}$$

где V – объем воды, вытесненной судном (объемное водоизмещение судна); I – момент инерции площади грузовой ватерлинии (рис. 2-31, *а*) относительно горизонтальной продольной оси, проходящей через центр тяжести этой площади.

Ясно, что чем больше для данного судна величина r_M (сравнительно с величиной e), тем больше остойчивость судна.[1]

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ГИДРОСТАТИКЕ

Задачи

№ 1. Определить заглубление h точки под уровнем воды в водоеме, если избыточное гидростатическое давление в этой точке равно 100 кПа ≈ 1 кгс/см².

Ответ: $h = 1000$ см.

№ 2. Определить абсолютное $p_А$ и избыточное p гидростатические давления в точке дна открытого сосуда, наполненного водой; глубина воды в сосуде 200 см.

Ответ: $p_A = 120$ кПа ≈ 1,2 кгс/см²; $p = 20$ кПа ≈ 0,2 кгс/см².

№ 3. Найти силу $P_А$ абсолютного гидростатического давления, действующего на дно сосуда, указанного в предыдущей задаче, если площадь дна сосуда 1000 см².

Ответ: $P_А = 12$ кН ≈ 1200 кгс.

№ 4. Найти силу $P_А$ абсолютного гидростатического давления, действующего на дно сосуда, указанного в задаче № 3, если этот сосуд закрыт, причем внешнее поверхностное давление равно 250 кПа ≈ 2,5 кгс/см².

Ответ: $P_А = 27$ кН ≈ 2700 кгс.

---

[1] В § 2-15 мы коснулись только некоторых основных понятий из области теории плавания тел (сама эта теория является весьма обширной и здесь не излагается); более подробно см. [2-3].

Обозначим длины отрезков DC, CM и DM соответственно через e, h_M и r_M:

$$\overline{DC} = e; \quad \overline{CM} = h_M; \quad \overline{DM} = r_M = e + h_M. \qquad (2\text{-}117)$$

Эти отрезки называются: e – **эксцентриситетом**; h_M – **метацентрической высотой**; r_M – **метацентрическим радиусом**. Величина h_M считается положительной, если точка M располагается выше точки C (рис. 2-31, *б*), и отрицательной, если точка M располагается ниже точки C (рис. 2-31, *в*).

Остойчивостью судна называется способность его возвращаться в состояние равновесия после получения крена. Имея в виду сказанное, можем утверждать следующее:

1) если для данного судна $h_M > 0$, или, что то же, $r_M > e$, то это судно является остойчивым (2-31, *б*);

2) если для данного судна $h_M < 0$, или, что то же, $r_M < e$, то такое судно является неостойчивым (рис. 2-31, *в*).

Для данного судна эксцентриситет e является постоянной величиной.

При небольшом угле крена (меньше, например, 15°) можно считать, что точка D_1 перемещается по дуге окружности, описанной из метацентра радиусом r_M, причем сама точка M не меняет своего положения на оси плавания.

Как видно, для данного судна метацентрический радиус r_M и метацентрическая высота h_M считаются постоянными (в случае небольших кренов).

Можно показать, что метацентрический радиус

$$r_M = \frac{I}{V}, \qquad (2\text{-}118)$$

где V – объем воды, вытесненной судном (объемное водоизмещение судна); I – момент инерции площади грузовой ватерлинии (рис. 2-31, *а*) относительно горизонтальной продольной оси, проходящей через центр тяжести этой площади.

Ясно, что чем больше для данного судна величина r_M (сравнительно с величиной e), тем больше остойчивость судна.[1]

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ГИДРОСТАТИКЕ

Задачи

№ 1. Определить заглубление h точки под уровнем воды в водоеме, если избыточное гидростатическое давление в этой точке равно 100 кПа ≈ 1 кгс/см².

Ответ: h = 1000 см.

№ 2. Определить абсолютное p_A и избыточное p гидростатические давления в точке дна открытого сосуда, наполненного водой; глубина воды в сосуде 200 см.

Ответ: p_A = 120 кПа ≈ 1,2 кгс/см²; p = 20 кПа ≈ 0,2 кгс/см².

№ 3. Найти силу P_A абсолютного гидростатического давления, действующего на дно сосуда, указанного в предыдущей задаче, если площадь дна сосуда 1000 см².

Ответ: P_A = 12 кН ≈ 1200 кгс.

№ 4. Найти силу P_A абсолютного гидростатического давления, действующего на дно сосуда, указанного в задаче № 3, если этот сосуд закрыт, причем внешнее поверхностное давление равно 250 кПа ≈ 2,5 кгс/см².

Ответ: P_A = 27 кН ≈ 2700 кгс.

---

[1] В § 2-15 мы коснулись только некоторых основных понятий из области теории плавания тел (сама эта теория является весьма обширной и здесь не излагается); более подробно см. [2-3].

№ 5. Определить значение внешнего поверхностного давления в закры сосуде, если горизонт воды в открытом пьезометре, приключенном к сосуду, вышается над горизонтом воды в сосуде на 300 см.

Ответ: $p_0 = 130$ кПа $= 1{,}3$ кгс/см^2.

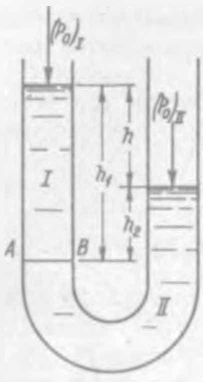


Рис. 2-32. К задаче № 7

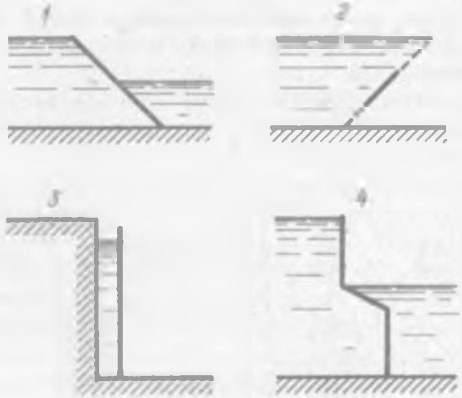


Рис. 2-33. К задаче № 8

№ 6. Определить высоту вакуума $h_{вак}$ (см. рис. 2-10), если абсолютн гидростатическое давление в точке m, к которой присоединен вакуумметр, равн 30 кПа $\approx 0{,}3$ кгс/см^2.

Ответ: $h_{вак} = 700$ см.

№ 7. В сосуд, имеющий форму, указанную на рис. 2-32, налиты две разны жидкости. Линия AB является линией раздела этих жидкостей.

Дано: вес единицы объема жидкости равен $\gamma_I = 100$ кН/м$^3 \approx 0{,}01$ кгс/см^3; вес единицы объема жидкости II равен $\gamma_{II} = 10$ кН/м$^3 \approx 0{,}001$ кгс/см^3; внешнее поверхностное давление $(p_0)_I = 100$ кПа $\approx 1{,}0$ кгс/см^2 внешнее поверхностное давление $(p_0)_{II} = 150$ кПа $\approx 1{,}5$ кгс/см^2; $h_1 = 100$ см.

Требуется найти величину $h = h_1 - h_2$.

Ответ: $h = -400$ см.

№ 8. Для приведенных на рис. 2-33 плоских прямоугольных фигур построить эпюру избыточного гидростатического давления.

№ 9. Для приведенных на рис. 2-34 схем построить тела давления (эпюры, выражающие вертикальную составляющую силы избыточного давления).

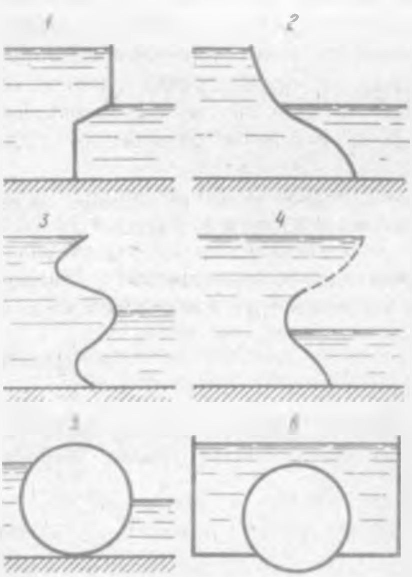


Рис. 2-34. К задаче № 9

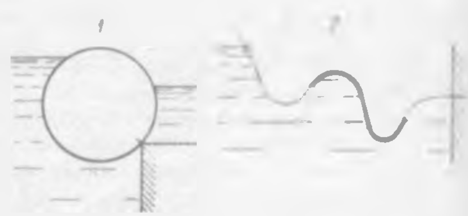


Рис. 2-35. К задаче № 10

№ 5. Определить значение внешнего поверхностного давления в закрь сосуде, если горизонт воды в открытом пьезометре, приключенном к сосуду, вышается над горизонтом воды в сосуде на 300 см.

Ответ: $p_0 = 130$ кПа $= 1,3$ кгс/см^2.

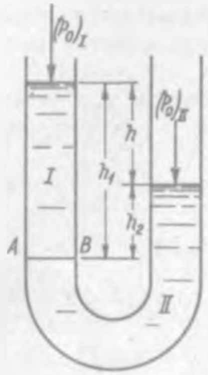


Рис. 2-32. К задаче № 7

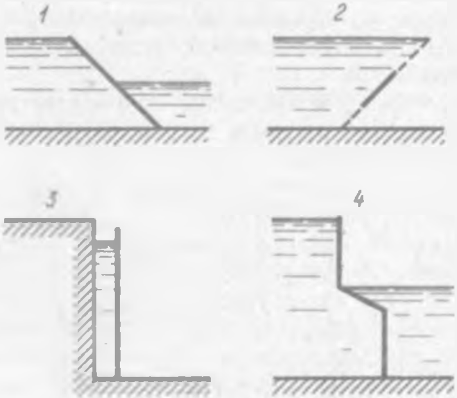


Рис. 2-33. К задаче № 8

№ 6. Определить высоту вакуума $h_{вак}$ (см. рис. 2-10), если абсолютн гидростатическое давление в точке m, к которой присоединен вакуумметр, рав 30 кПа $\approx 0,3$ кгс/см^2.

Ответ: $h_{вак} = 700$ см.

№ 7. В сосуд, имеющий форму, указанную на рис. 2-32, налиты две разн жидкости. Линия AB является линией раздела этих жидкостей.

Дано: вес единицы объема жидкости равен $\gamma_I = 100$ кН/м$^3 \approx 0,01$ кгс/см^3; вес еди ницы объема жидкости II равен γ_{II} $= 10$ кН/м$^3 \approx 0,001$ кгс/см^3; внешнее повер ностное давление $(p_0)_I = 100$ кПа $\approx 1,0$ кгс/см^2 внешнее поверхностное давление $(p_0)_{II}$ $= 150$ кПа $\approx 1,5$ кгс/см^2; $h_1 = 100$ см.

Требуется найти величину $h = h_1 - h_2$.

Ответ: $h = -400$ см.

№ 8. Для приведенных на рис. 2-3 плоских прямоугольных фигур построит эпюру избыточного гидростатического дав ления.

№ 9. Для приведенных на рис. 2-34 схем построить тела давления (эпюры, выража ющие вертикальную составляющую силы избыточного давления).

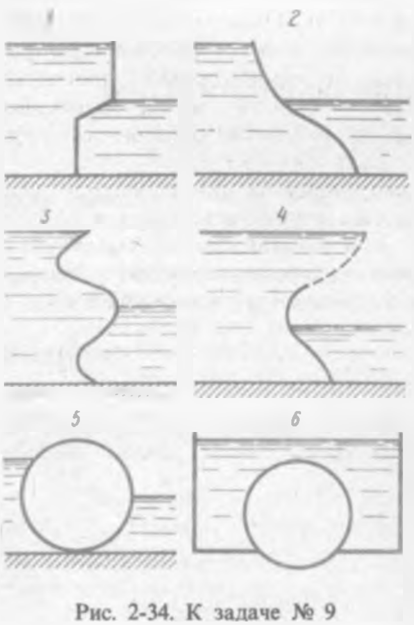


Рис. 2-34. К задаче № 9

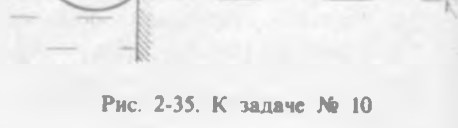


Рис. 2-35. К задаче № 10

№ 5. Определить значение внешнего поверхностного давления в закрытом сосуде, если горизонт воды в открытом пьезометре, приключенном к сосуду, возвышается над горизонтом воды в сосуде на 300 см.

Ответ: $p_0 = 130$ кПа $= 1,3$ кгс/см^2.

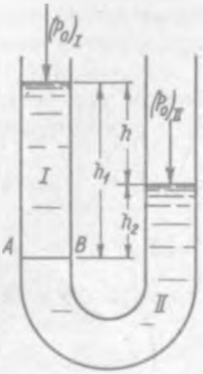


Рис. 2-32. К задаче № 7

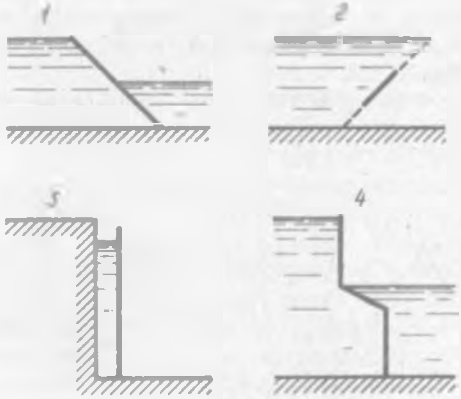


Рис. 2-33. К задаче № 8

№ 6. Определить высоту вакуума $h_{вак}$ (см. рис. 2-10), если абсолютное гидростатическое давление в точке m, к которой присоединен вакуумметр, равно 30 кПа $\approx 0,3$ кгс/см^2.

Ответ: $h_{вак} = 700$ см.

№ 7. В сосуд, имеющий форму, указанную на рис. 2-32, налиты две разные жидкости. Линия AB является линией раздела этих жидкостей.

Дано: вес единицы объема жидкости I равен $\gamma_I = 100$ кН/м^3 $\approx 0,01$ кгс/см^3; вес единицы объема жидкости II равен $\gamma_{II} = 10$ кН/м^3 $\approx 0,001$ кгс/см^3; внешнее поверхностное давление $(p_0)_I = 100$ кПа $\approx 1,0$ кгс/см^2; внешнее поверхностное давление $(p_0)_{II} = 150$ кПа $\approx 1,5$ кгс/см^2; $h_1 = 100$ см.

Требуется найти величину $h = h_1 - h_2$.

Ответ: $h = -400$ см.

№ 8. Для приведенных на рис. 2-33 плоских прямоугольных фигур построить эпюру избыточного гидростатического давления.

№ 9. Для приведенных на рис. 2-34 схем построить тела давления (эпюры, выражающие вертикальную составляющую силы избыточного давления).

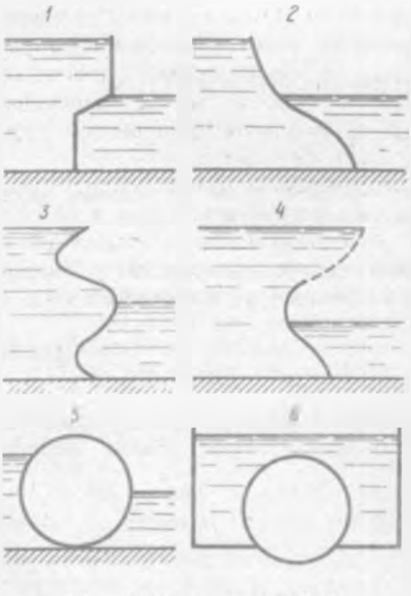


Рис. 2-34. К задаче № 9

Рис. 2-35. К задаче № 10

№ 10. Для приведенных на рис. 2-35 схем построить тела давления и эпюры, выражающие горизонтальную составляющую силы избыточного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

2-1. **Гидравлика**, гидромашины, гидроприводы./Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение, 1970.

2-2. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений, т. I. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1955.

2-3. **Семенов-Тян-Шанский В. В.** Статика и динамика корабля. – Л.: Судостроение, 1973.

2-4. **Угинчус А. А., Чугаева Е. А.** Гидравлика. – Л.: Стройиздат, 1971.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 3-1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ И ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЯ. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Одним из основных понятий гидродинамики является понятие о «гидродинамическом давлении (в точке пространства)», т. е. понятие об «интенсивности силы давления в точке».

1°. **Гидродинамическое давление.** При движении реальной жидкости в ней, как правило, возникают силы трения, обусловливающие появление касательных напряжений τ, которые отсутствуют в покоящейся жидкости (см. § 1-4, п. 4). В связи с наличием τ напряженное состояние в данной точке M движущейся жидкости должно быть представлено уже не «шаром напряжений» (рис. 1-10, *б*), что мы имели в гидростатике, а – в общем случае – трехосным эллипсоидом напряжений или – для плоской задачи – эллипсом напряжений (рис. 1-10, *а*). Отсюда ясно, что при движении реальной жидкости в рассматриваемой ее точке нормальное напряжение σ_n будет зависеть (в общем случае) от ориентировки площадки действия: *в гидродинамике для намеченных в данной точке площадок действия, имеющих разный наклон, значение* σ_n *будет* (в отличие от гидростатики) *разное.*

Вместе с тем, чтобы упростить решение задач гидродинамики, здесь вводят особое понятие – понятие «гидродинамического давления в точке» p, и условно считают, что p в данной точке движущейся реальной жидкости, являясь также скалярной величиной (как и в гидростатике), не зависит от ориентировки площадки действия и равняется:

а) для пространственной задачи:

$$p = \frac{1}{3}(|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|); \tag{3-1'}$$

б) для плоской задачи

$$p = \frac{1}{2}(|\sigma_1| + |\sigma_2|), \tag{3-1''}$$

где $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$, $|\sigma_3|$ – значения (модули) соответствующих, например, главных напряжений.

Как видно, в отличие от гидростатического давления p, гидродинамическое давление p выражает только некоторое среднее значение напряжений в данной точке. Гидростатическое и гидродинамическое давления принято обозначать одной и той же буквой p; вместе с тем эти две величины существенно отличаются друг от друга: для покоящейся жидкости p является значением (модулем) реально существующего напряжения; для движущейся же реальной жидкости p представляет собой некоторую среднюю (а следовательно, фиктивную) величину, определяемую по формулам (3-1).

Разумеется, при движении идеальной жидкости силы трения в ней отсутствуют ($\tau = 0$); поэтому для такой жидкости мы получаем «шаровой тензор» напряжений (см. рис. 1-10, *б*), причем здесь, как и в гидростатике, гидродинамическое давление оказывается не зависящим от ориентировки площадки действия.

В случае, когда под p приходится понимать как гидростатическое, так и гидродинамическое давление, эту величину p следует называть *гидромеханическим давлением.*

Естественно возникает вопрос о нагрузке, необходимой для статического расчета, например металлической стенки трубопровода, вдоль которой движется реальная жидкость. Эта нагрузка, приложенная со стороны жидкости к стенке, должна реально существовать, а не быть некоторой фиктивной, средней величиной. Отвечая на этот вопрос, необходимо подчеркнуть, что в математической гидромеханике доказывается, что величина p, определенная по формулам (3-1) для направления, ортогонального к упомянутой выше стенке, приобретает реальное значение: давление p, действующее на такую стенку, теоретически в точности равно вычисленному по формулам (3-1). Заметим также, что величину p, определенную по указанным формулам, нам будет давать также пьезометр, подключенный к рассматриваемой точке.

Как будет показано ниже, в частном случае движения реальной жидкости, когда мы имеем равномерное распределение скоростей движения жидкости (см. ниже), касательные напряжения в реальной жидкости должны отсутствовать, причем мы получим вместо «эллипсоида напряжений» «шар напряжений» (как и в гидростатике).

2°. Общая постановка задачи технической гидродинамики. К числу основных гидродинамических характеристик потока жидкости относятся: а) поясненная выше скалярная величина p и б) векторная величина скорости u движения частиц жидкости. Для разных точек неподвижного пространства, занятого движущейся жидкостью, величины p и u в общем случае должны быть различны (в данный момент времени); кроме того, в любой данной неподвижной точке пространства эти величины могут изменяться во времени.

Имея в виду сказанное, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} p &= f_1(x, y, z, t); \\ u_x &= f_2(x, y, z, t); \\ u_y &= f_3(x, y, z, t); \\ u_z &= f_4(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

где u_x, u_y, u_z — проекции скорости u на оси декартовой (прямоугольной) системы координат.

Найдя функции f_1, f_2, f_3, f_4, мы могли бы представить (например, для данного момента времени t_1) наш поток в виде скалярного поля давлений p и векторного поля скоростей u.

Именно так ставится вопрос в так называемой *математической гидродинамике. Как видно, здесь мы интересуемся величинами p и u,* относящимися к отдельным точкам пространства.

Однако задача об отыскании функций f_1, f_2, f_3, f_4 является столь сложной, что даже, заменяя реальную жидкость «воображаемой моделью» в виде идеальной жидкости, мы такую задачу часто решить не в состоянии. Кроме того, во многих случаях практики приходится сталкиваться с вопросами, когда нам нет необходимости стремиться к такой точности и подробности расчета, на которую «претендует» математическая механика (такое положение создается, например, когда точность исходной информации, полагаемой в основу расчета, невысока, что достаточно часто может иметь место в практике[1]).

В силу всего сказанного, в *технической гидродинамике* отказываются от использования зависимостей (3-2) и идут по иному пути — «*гидравлическому*».

Гидравлический метод, т. е. метод *технической гидродинамики*, согласно которому мы, как правило, не интересуемся давлениями p и скоростями u в отдельных точках пространства, основан на использовании некоторых осредненных и суммарных (интегральных) характеристик потока. Следуя этому методу, в основу технической гидродинамики полагают уравнения, существенно отличающиеся от уравнений (3-2). К числу таких основных уравнений гидравлики (технической гидромеханики) относятся следующие:

1) гидравлическое уравнение несжимаемости и неразрывности жидкости;

2) гидравлическое уравнение кинетической энергии (уравнение Бернулли) для «целого потока» реальной жидкости;

3) гидравлическое уравнение количества движения для «целого потока» реальной жидкости;[2]

4) эмпирические и полуэмпирические зависимости (Дарси и Вейсбаха), служащие для оценки работы сил трения, возникающих в реальной жидкости.

Все эти уравнения имеют достаточно общий характер. Сочетая данные уравнения с рядом особых весьма существенных приемов рассмотрения гидравлических явлений (эти приемы подробно поясняются далее),[3] получаем обширную законченную техническую теорию, позволяющую решать (с приемлемой точностью) большой круг достаточно сложных (линейных, плоских и пространственных) практических задач, относящихся к механике реальной жидкости.

Следует, однако, учитывать, что при решении отдельных задач практики нам все же иногда (см., например, гл. 18) приходится сочетать приемы технической механики жидкости с приемами математической механики жидкости. Кроме того, надо иметь в виду, что раскрывая сущность интегральных зависимостей, относящихся к технической гидродинамике, нам, естественно, приходится в ряде случаев (см. ниже, хотя бы § 3-2 – 3-7) интересоваться в некоторой мере и «точечными характеристиками» потока, подробно изучаемыми в «математической гидродинамике».

3. Две разных задачи гидродинамики. Рассматривая движущуюся жидкость, различают:

1) так называемую внешнюю задачу; здесь задан поток жидкости,

---

[1] Надо всегда учитывать, что точность расчета должна соответствовать: а) точности исходной информации и б) потребности практики.

[2] Это уравнение, как 3-е основное уравнение гидравлики в форме (3-124), удобной для гидравлических расчетов, было введено нами в учебный курс гидравлики в 1960 г. [3-12].

[3] К ним относятся, в частности, приемы, основанные на использовании понятий: об «осредненной» и «средней» скорости движения жидкости, о «плоском живом сечении» (в котором давление распространяется по гидростатическому закону) и т. п.

требуется же найти силы, приложенные к тому или другому твердому телу, обтекаемому жидкостью;

2) так называемую **внутреннюю задачу**; здесь, наоборот, заданы силы, действующие на жидкость (в частности, объемные силы, например, силы тяжести); требуется же найти гидродинамические характеристики потока (скорости, давления и т. п.).

Внешняя задача возникает, например, при проектировании турбинных лопастей (в области гидромашиностроения), в судостроительной гидравлике и т. п. Мы ниже, имея в виду проблемы гидротехнические (инженерно-строительные) главным образом (почти исключительно) будем заниматься рассмотрением внутренних задач (зная силы, действующие на поток, отыскивать величины скоростей и давлений в жидкости).

§ 3-2. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Различают два принципиально разных аналитических метода исследования движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

1°. Метод Лагранжа. Выделим контуром K некоторую область, занятую движущейся жидкостью (рис. 3-1). Наметим **неподвижные** оси координат Ox и Oz. Будем рассматривать ряд движущихся частиц жидкости: M_1, M_2, M_3, ..., находящихся в начальный момент времени на границе изучаемой области. Обозначим через x_0 и z_0 начальные координаты этих жидких частиц.

Будем считать, что для каждой частицы M нам известны зависимости

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(x_0,\ z_0,\ t); \\ z &= f_2(x_0,\ z_0,\ t). \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

Тогда, пользуясь этими зависимостями, легко можно построить траектории намеченных частиц жидкости. Далее можем в любом месте этих траекторий найти длину пути ds, проходимого частицей за время dt. Деля же ds на dt, можем найти скорость в данной точке; **можно также найти** и ускорение любой частицы M в любой точке пространства в тот или другой момент времени. Как видно, в данном случае **мы следим за отдельными частицами жидкости в течение времени t, за которое эти частицы, двигаясь по своим траекториям, проходят всю рассматриваемую область.**

Согласно Лагранжу, *о потоке жидкости в целом мы судим по совокупному рассмотрению траекторий, описываемых частицами жидкости.*

Существенно подчеркнуть, что здесь (в отличие от метода Эйлера, см. ниже) x и z представляют собой **текущие координаты** частиц жидкости. Поэтому величины dx и dz должны в данном случае рассматриваться как проекции пути ds на соответствующие координаты. В силу этого, согласно Лагранжу, можем написать:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \tag{3-4}$$

2°. Метод Эйлера. Представим себе снова некоторую область, занятую движущейся жидкостью (рис. 3-2). Согласно Эйлеру, мы не следим за движением отдельных частиц жидкости M и не интересуемся их траекториями.

В соответствии с предложением Эйлера мы намечаем точки *1*, *2*, *3*, ..., которые считаем скрепленными с рассматриваемым неподвижным пространством. Эти точки неподвижны при протекании через них жидкости. Здесь величины x и z не есть текущие координаты частиц жидкости, а просто координаты неподвижных точек пространства.

Рассмотрим момент времени t_1. В этот момент времени в точке *1* (рис. 3-2) будет находиться некоторая частица жидкости, имеющая скорость u_1 (t_1); в этот же момент времени в точке *2* будем иметь скорость u_2 (t_1); в точке *3* – скорость u_3 (t_1) и т. д.

Как видно, для момента времени t_1 поток оказывается представленным векторным полем скоростей, причем каждый вектор скорости относится к определенной неподвижной точке пространства (и к данному моменту времени t).

В следующий момент времени в точках *1, 2, 3, ...* получаем соответственно скорости u_1 (t_2), u_2 (t_2), u_3 (t_2) и т. д., причем в общем случае получаем другое поле скоростей.

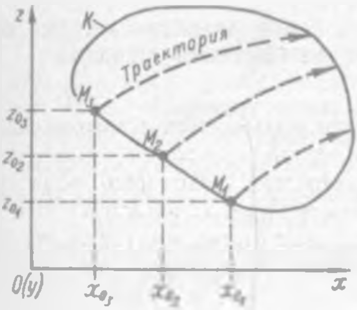


Рис. 3-1. К методу Лагранжа: M_1, M_2, M_3, ... – частицы жидкости

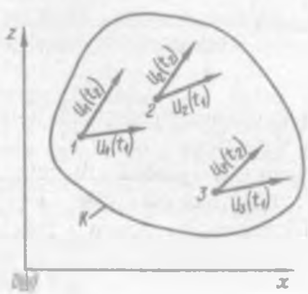


Рис. 3-2. К методу Эйлера: *1, 2, 3, ...* – неподвижные точки пространства

Как видно, согласно Эйлеру, *поток в целом в данный момент времени оказывается представленным векторным полем скоростей, относящихся к неподвижным точкам пространства.*

Сопоставляя векторное поле скоростей, отвечающее моменту времени t_1, с векторным полем скоростей, отвечающим моменту времени t_2, легко можно себе представить, как рассматриваемый поток изменяется с течением времени.

Выше было отмечено, что координаты x и z, согласно Эйлеру, являются координатами неподвижных произвольных точек пространства. Поэтому в данном случае величины dx и dz нельзя рассматривать как проекции элементарного пути ds, проходимого частицами жидкости за время dt. Величины dx и dz здесь являются просто произвольными приращениями координат x и z. В связи с этим зависимости (3-4) в случае метода Эйлера – неприемлемы.

3°. Метод исследования движения жидкости, применяемый в гидравлике. Метод Лагранжа ввиду его сложности не нашел широкого применения в технической механике жидкости. Далее в основном будем пользоваться методом Эйлера. Однако, применяя его, все же не будем совершенно отрекаться от рассмотрения движения частиц жидкости M. Мы будем следить за их движением, но не в продолжение времени t (как это следует по Лагранжу), а в продолжение только элементарного отрезка времени dt, в течение которого данная частица жидкости проходит через рассматриваемую точку пространства.

Принимая такую постановку вопроса, можем считать, что в каждой точке пространства за время dt соответствующая частица жидкости проходит путь ds, проекции которого равны dx и dz. При этом, очевидно, для определения проекций скорости u_x и u_z можно будет пользоваться соотношениями (3-4).

Сказанное дополнительно поясним следующим образом. Представим себе по воды (например, на лабораторной площадке), который мы наблюдаем в плане (свер Предположим, что над таким потоком установлен фотографический аппарат, котор через определенные п о с т о я н н ы е промежутки времени dt фотографирует изменяющ ся во времени векторное поле скоростей движения частиц жидкости (считаем, что вып нение такой фотографии возможно). Очевидно, что, используя при рассмотрении данн примера метод Эйлера, мы сможем пользоваться зависимостью Лагранжа (3-4) тол при соблюдении следующего условия: упомянутые выше фотографии векторных по должны осуществляться не через произвольные промежутки времени, а через отре времени, равные

$$dt = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{ds}{u}$$

(во всех точках любого векторного поля скоростей эта величина постоянна).

§ 3-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ (НЕВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА)

Ранее были получены дифференциальные уравнения покоя жидкости (с § 2-3), которые были отнесены к единице массы жидкости. Дифференциальн уравнения движения идеальной жидкости можно получить из указанных уравн ний покоя, если согласно началу Даламбера ввести в эти уравнения си инерции, отнесенную к единице массы движущейся жидкости.

Обозначим силу инерции, действующую на единицу массы, через I; проекц этой силы на оси координат – через I_x, I_y, I_z. При этом можем написать

$$I_x = -1\,\frac{du_x}{dt};\quad I_y = -1\,\frac{du_y}{dt};\quad I_z = -1\,\frac{du_z}{dt}, \qquad (3\text{-}$$

где $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$, $\frac{du_z}{dt}$ – проекции ускорений на соответствующие оси координ (исчисляемые по Лагранжу – представляя себе единицу массы жидкости, дв жущуюся в соответствующем векторном поле).

Сила инерции направлена в сторону, противоположную ускорению; поэтом в соотношения (3-5) входит знак минус. Вводя в уравнение (2-13) третье сл гаемое в виде $(\rho dxdydz)\ I_x$, представляющее собой проекцию на ось Ox си инерции жидкого параллелепипеда (см. рис. 2-5), получаем 1-е уравнени остальные пишем по аналогии. В результате вместо (2-14) имеем следующ дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (отнесенные к ед нице массы):

$$\left.\begin{aligned} \phi_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt};\\ \phi_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt};\\ \phi_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}$$

Эти уравнения называются у р а в н е н и я м и Э й л е р а, или уравнениям движения, или уравнениями динамического равновесия.

Надо заметить, что, переходя от идеальной жидкости к реальной (вязкой) жидкост в уравнение (3-6) приходится вводить дополнительное слагаемое, учитывающее сил трения, отнесенные к единице массы жидкости. Такая операция приводит нас к систем трех уравнений, называемых у р а в н е н и я м и Н а в ь е – С т о к с а. Эти уравнения пр направлении оси z вверх и при рассмотрении случая, когда массовыми (объемным силами, действующими на жидкость, являются только силы тяжести, т. е. случая, когд

$$\phi_x = \phi_y = 0 \text{ и } \phi_z = -g,$$

приобретают вид (будучи по-прежнему отнесенными к единице массы жидкости):

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right);\\ \frac{du_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right);\\ \frac{du_z}{dt} &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}6')$$

где последнее дополнительное слагаемое (учитывающее силы трения) содержит коэффициент ν, называемый кинематическим коэффициентом вязкости жидкости [см. далее формулу (3-128)]. Выражения в скобках представляют собой соответствующие суммы вторых частных производных от u_x, u_y и u_z по координатам x, y, z. Уравнения (3-6') редко могут быть использованы в практике, в частности, потому, что распределение сил трения в реальных потоках (особенно при так называемом «резкоизменяющемся движении» жидкости) учесть весьма трудно.

В соответствии с методом Эйлера (см. § 3-2) и, учитывая зависимости (3-2), можем написать:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial t}; \qquad (3\text{-}7)$$

имея же в виду зависимость Лагранжа (3-4), получаем следующие выражения для проекций ускорения, входящих в правые части (3-6) [первое выражение вытекает из (3-7); остальные пишем по аналогии]:[1]

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t};\\ \frac{du_y}{dt} &= u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial t};\\ \frac{du_z}{dt} &= u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}8)$$

В правые части уравнений (3-8) входит девять частных производных проекций скорости (u_x, u_y, u_z) по координатам (x, y, z).

Три из этих девяти производных

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

называются прямыми или продольными; каждая из них взята по координате, отмеряемой вдоль той оси, на которую проектируется скорость. Остальные шесть частных производных называются косыми или поперечными; каждая из них берется по координате, отмеряемой поперек оси, на которую проектируется скорость.

С прямыми (продольными) производными нам придется столкнуться при выводе уравнения несжимаемости жидкости (см. § 3-10). Здесь остановимся на пояснении физического смысла шести косых (поперечных) производных.

---

[1] Как видно, зависимость (3-8) сочетает в себе два разных подхода: а) подход Эйлера, когда $u = f(x, y, z, t)$; б) подход Лагранжа, когда $u = f(t)$.

В математической механике жидкости такое сочетание обосновывается путем использования так называемой «субстанциональной» («индивидуальной») частной производной.

Физический смысл косых (поперечных) частных производных от проекций скорости (u_x, u_y, u_z) по координатам (x, y, z). Рассмотрим для примера одну из шести производных, именно $\frac{\partial u_z}{\partial x}$.

Возьмем на оси x (рис. 3-3) отрезок ab, соединяющий две частицы жидкости (a и b) и имеющий бесконечно малую длину dx. Этот отрезок при движении вдоль оси z переместится за время dt в положение $a'b'$, причем отрезок aa' будет представлять собой путь, пройденный в направлении оси z частицей a:

$$\overline{aa'} = u_z dt, \tag{3-9}$$

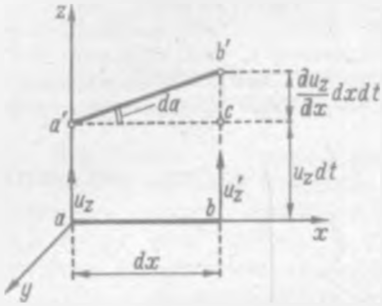


Рис. 3-3. Вращение отрезка ab

отрезок же bb' – путь, пройденный в направлении оси z частицей b:

$$\overline{bb'} = u_z' dt = \left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx\right) dt; \tag{3-10}$$

здесь u_z – скорость движения частицы a вдоль оси z; u_z' – скорость движения частицы b вдоль той же оси z:

$$u_z' = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx. \tag{3-11}$$

Так как в общем случае $\overline{aa'} \neq \overline{bb'}$, то, как видно из рис. 3-3, отрезок ab за время dt совершает не только поступательное движение вдоль оси z, но еще и **п о в о р а ч и в а е т с я** относительно оси y на некоторый угол $d\alpha$.

Найдем угловую скорость вращения отрезка ab относительно оси y. Очевидно,

$$\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{\overline{cb'}}{\overline{a'c}} = \frac{u_z' dt - u_z dt}{dx} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x} dx\, dt}{dx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt. \tag{3-12}$$

Так как угол $d\alpha$ мал, то тангенс этого угла можно заменить самим углом; при этом вместо (3-12) получаем:

$$d\alpha = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt \tag{3-13}$$

или

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{3-14}$$

Из этого соотношения видно, что рассматриваемая частная производная дает нам **у г л о в у ю с к о р о с т ь** вращения бесконечно малого отрезка ab относительно оси y.

Исследуя точно так же остальные пять производных, легко убедиться, что все они представляют собой соответствующие угловые скорости вращения бесконечно малого отрезка ab (относительно осей x, y и z). Таков физический смысл рассматриваемых шести частных производных:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z}. \tag{3-15}$$

Ясно, что первые две производные дают угловые скорости вращения в плоскости yx (относительно оси z); вторые две производные – угловые скорости в плоскости yz (относительно оси x); третьи две производные – угловые скорости в плоскости xz (относительно оси y).

§ 3-4. ТРИ ОСНОВНЫХ ВИДА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ПОНЯТИЕ ВИХРЕВОГО И БЕЗВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЙ

Возьмем некоторое твердое тело A (рис. 3-4, *а*). Наметим две какие-либо частицы этого тела (частицу a и частицу b), причем мысленно соединим эти две частицы прямой ab. При движении данного твердого тела прямая ab будет

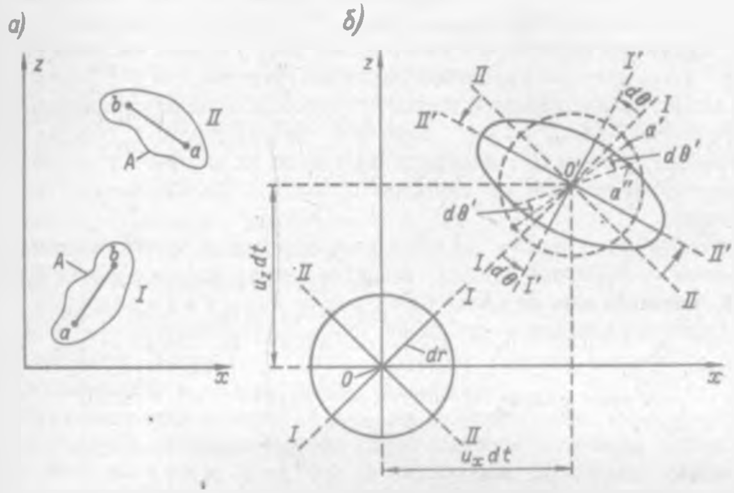


Рис. 3-4. Виды движения: *а* – два вида движения твердого тела; *б* – три вида движения элементарного объема жидкости

всегда сохранять свою длину. Поэтому, как известно, любое движение твердого тела может быть представлено как сумма только д в у х движений:

1) п о с т у п а т е л ь н о г о, при котором упомянутая прямая ab, соединяющая л ю б ы е две частицы a и b, всегда сохраняет одно и то же направление (остается при перемещении тела параллельной своему начальному направлению);

2) в р а щ а т е л ь н о г о, при котором прямая ab поворачивается относительно, например, точки a.

При движении жидкости вопрос осложняется тем, что отрезок ab, соединяющий две определенные частицы жидкости (частицу a и частицу b), при течении жидкости почти всегда изменяет свою длину. Изменение при движении жидкости длин произвольно намеченных отрезков ab обусловливает и з м е н е н и е ф о р м ы д в и ж у щ и х с я о б ъ е м о в ж и д к о с т и. Такое положение отсутствует в случае твердого тела. Это тело при движении все время сохраняет свою форму.

Можно показать (после соответствующего строгого обоснования), что в общем случае движение элементарного объема жидкости оказывается возможным представить как сумму не двух, а трех различных движений: 1) п о с т у п а т е л ь н о г о; 2) в р а щ а т е л ь н о г о (как в случае твердого тела); 3) о с о б о г о *движения*, обусловливающего изменение формы движущихся объем жидкости; этот последний вид движения называется *деформационным*.

Рассмотрим данный вопрос подробнее. Представим на рис. 3-4, *б* пуч бесконечно малых лучей одинаковой длины, равной dr, исходящих из центра Концы радиусов dr расположатся по окружности.

Рассмотрим элементарный объем жидкости, ограниченный этой окру ностью. Предположим, что за время dt данный элементарный объем перем стится в новое положение (центр его O переместится в точку O').

Рассматривая такое элементарное (бесконечно малое) перемещение выд ленного жидкого объема, можем движение его разложить, как только чт было отмечено, на три разных вида:

а) *поступательное движение*; благодаря этому движению центр пучка радиусов перемещается в точку O'; выделяя это движение, над в точке O' представить себе *начальную окружность*, радиусы которо *параллельны* соответствующим радиусам окружности с ценром в точке (

б) *вращательное движение*; благодаря этому движению главны оси деформации $I-I$ и $II-II$ круглого элементарного объема жидкост представленного в точке O', поворачиваются на некоторый угол $d\theta$; при это поясненные выше отрезки ab должны сохранять свою длину (как в случа твердого тела);

в) *деформационное движение*; благодаря этому движению кажды из намеченных радиусов поворачивается еще на *дополнительны* угол $d\theta'$ и, кроме того, *удлиняется или укорачивается*;[1] углы d поворота (дополнительные к среднему углу $d\theta$, упомянутому в п. б) и укор чения или удлинения разных радиусов будут различны; поэтому начальна окружность с центром O' претерпевает деформацию и обращается в фигур изображенную сплошной линией на рис. 3.4, *б*. Высказанное положение о *тре* видах движения жидкости впервые было сформулировано Гельмгольцем.

Как видно, движение жидкости *в общем случае* можно условн представить себе как движение бесконечного множества бесконечно малы волчков (частиц жидкости), которые перемещаются поступательно и дополни тельно (*при бесконечно малом перемещении*) вращаются отно сительно своих *мгновенных осей*, а также еще деформируются (изменяю свою форму).

1) *Остановимся на дополнительном пояснении второг вида движения – вращательного*. Угловую скорость вращения эле ментарных объемов жидкости относительно своих мгновенных осей обозначим через Ω, а компоненты ее – через Ω_x, Ω_y, Ω_z. Найдем соответствующи выражения для величин Ω_x, Ω_y и Ω_z. С этой целью выделим элементарный объем жидкости в виде прямой треугольной призмы abc (рис. 3-5). Через aA обозначим биссектрису угла cab, являющуюся главной осью деформации объема abc.

Предположим, что поступательного движения нет; имеются только враще ние и деформация. Тогда при движении объема abc начальная точка a будет оставаться на месте. За время dt рассматриваемый объем abc:

а) в результате вращения примет положение $ab'c'$, причем биссектриса aA повернется на угол $d\theta$ и получит направление aA';

б) в результате деформации примет окончательную форму $ab''c''$.

Надо считать, что в процессе деформации (п. «б») биссектриса aA' должна сохранять свое направление – не поворачиваться (биссектрисы углов $c'ab'$ и $c''ab''$ должны совпадать).

[1] Например, точка a' перемещается в точку a''.

Имея в виду это положение, можем написать, что

$$d\theta_1' = d\theta_2';$$
$$d\alpha_1 - d\theta = d\alpha_2 + d\theta; \qquad (3\text{-}16)$$
$$d\theta = \frac{1}{2}(d\alpha_1 - d\alpha_2),$$

где $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ представляют собой углы поворота отрезков ab и ac (рис. 3-5).

Разделив третье уравнение (3-16) на время dt, получаем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{d\alpha_2}{dt}\right). \qquad (3\text{-}17)$$

В этом уравнении величина $\frac{d\theta}{dt}$ представляет собой среднюю угловую скорость вращения Ω_y главной оси деформации aA элементарного жидкого объема abc относительно оси y:

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_y. \qquad (3\text{-}18)$$

Что касается величин, входящих в правую часть уравнения (3-17), то они равны [см. уравнение (3-14) и пояснение к (3-15)]:

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \text{ и } \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial z}. \qquad (3\text{-}19)$$

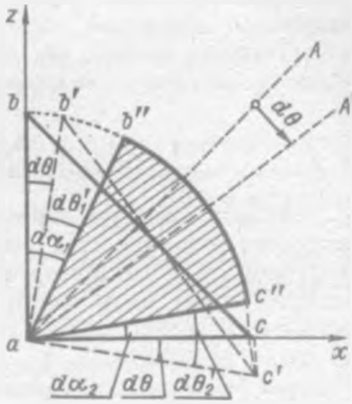


Рис. 3-5. Вращение и деформация элементарного объема жидкости

Подставляя (3-19) и (3-18) в (3-17), получаем окончательное выражение для Ω_y; выражения для Ω_x и Ω_z пишем по аналогии:[1]

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right);\\
\Omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);\\
\Omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}20)$$

где индексы x, y, z у величины Ω указывают на то, что вращение происходит соответственно относительно осей x, y и z или вокруг осей, параллельных названным.

Геометрически складывая векторы Ω_x, Ω_y и Ω_z, можем получить вектор угловой скорости Ω, который и характеризует вращательное движение рассматриваемого элементарного объема жидкости относительно его мгновенной оси.

2) О безвихревом и вихревом движениях. В частном случае, вычислив соответствующие частные производные от компонентов скорости по

---

[1] В соответствующих местах уравнений (3-20) порядок расстановки букв x, y, z выдержан согласно так называемой круговой последовательности (x, y, z, x, y, z, ...): 1) x, y, z; 2) y, z, x; 3) z, x, y. В скобках уравнения (3-20) заключены, как иногда говорят, «накрест взятые производные»:

$$1)\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \diagdown\!\!\diagup \frac{\partial u_y}{\partial z};\quad 2)\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \diagdown\!\!\diagup \frac{\partial u_z}{\partial x};\quad 3)\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \diagdown\!\!\diagup \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

координатам и подставив их в (3-20), можно получить значения Ω_x, Ω_y, Ω_z равным нулю. При этом обратится в нуль также и угловая скорость Ω. Такой частны случай будет характеризоваться наличием только двух видов движения: поступа тельного и деформационного (или наличием одного из этих видов движения При этом элементарные объемы жидкости при бесконечно малом (но не пр конечном) перемещении не вращаются вокруг своих мгновенных осей; верне сказать, здесь отсутствует вращение так называемых главных осей деформации любого элементарного объема жидкости. Этот частный *случа движения, когда главные оси деформаций элементарных объемов перемещаютс на бесконечно малой длине только поступательно, называется безвихревым движением. Движение же, когда $\Omega \neq 0$, т. е. когда главные оси деформаци элементарных частиц при бесконечно малом перемещении этих частиц вра щаются, называется вихревым.*[1]

§ 3-5. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Область, занятую движущейся жидкостью, можно себе представить ка векторное поле скоростей (см. рис. 2-7, *а*). Рассмотрим частный случай движения жидкости, когда это векторное поле является потенциальным, т. е. таким, которое может быть описано некоторой функцией φ (x, y, z), обладающей следующим свойством (см. конец § 2-4):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_x; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u_y; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = u_z. \qquad (3\text{-}21)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по y и второе по x, получаем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad (3\text{-}22)$$

вычитая теперь из второго равенства (3-22) первое равенство (3-22), имеем:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \qquad (3\text{-}23)$$

Рассуждая аналогично, можем показать, что имеют место также равенства:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \qquad (3\text{-}24)$$

Подставляя выражения (3-23) и (3-24) в уравнения (3-20), получаем

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0. \qquad (3\text{-}25)$$

Отсюда можно сделать следующий вывод:

если рассматриваемое поле скоростей имеет потенциальную функцию (потенциа скорости φ), т. е. является потенциальным, то угловые скорости Ω вращения главных осей деформации частиц жидкости должны равняться нулю, и мы будем иметь безвихревое движение.[2]

---

[1] О главных осях деформации см. стр. 24. Различают еще так называемые главные оси скоростей деформации, которые для однородной изотропной среды совпадают с главными осями деформации.

[2] Говоря так, надо иметь в виду, что в случае потенциального (безвихревого) движения, элементарные объемы жидкости на конечном (а не на бесконечно малом) перемещении могут получать некоторый поворот (т. е. иметь «вращение»).

Следует запомнить, что потенциальное движение всегда является безвихревым.

Можно показать, что и наоборот: безвихревое движение жидкости (в случае так называемой односвязной области) всегда является потенциальным.

Все существующие формы движения жидкости можно разбить на два вида:

а) *движения безвихревые (потенциальные), обладающие потенциалом скорости* φ;

б) *движения вихревые, для которых функция* φ, *поясненная выше, не существует.*

В случае потенциального (безвихревого) потока жидкости приходится отыскивать одну функцию φ, удовлетворяющую соответствующим граничным и начальным условиям и выражающую согласно (3-21) компоненты скорости u_x, u_y, u_z.

В случае же вихревого движения задача должна состоять, вообще говоря, в отыскании трех функций, которые должны зависеть от координат и времени, удовлетворять соответствующим граничным и начальным условиям и выражать соответственно компоненты скорости u_x, u_y, u_z.

Отсюда видно, что исследование безвихревого (потенциального) потока является задачей значительно более простой, чем исследование вихревого потока.

Для простейших потенциальных потоков функция φ отыскивается иногда достаточно просто. Например, предположим, что нам задано движение, характеризуемое условием:

$$u_x = u_0 = \text{const}; \; u_y = 0; \; u_z = 0.$$

При таком движении траектории частиц жидкости представляют собой прямые линии, параллельные оси x, а поверхности равного потенциала ($\varphi = \text{const}$) – плоскости, параллельные координатной плоскости yOz. В данном случае величина

$$\varphi = u_0 x.$$

Действительно, дифференцируя это соотношение по координатам, получаем приведенные выше величины u_x, u_y, u_z.

В более сложных случаях потенциального движения для отыскания φ приходится пользоваться особыми методами (изучаемыми в курсах математики). Иногда может быть использован так называемый метод сложения («наложения» – суперпозиции) потенциальных потоков. Он заключается в следующем.

Положим, что нам известно несколько потенциальных функций: φ_1, φ_2, φ_3, ..., φ_n, каждая из которых дает вполне определенный потенциальный поток.

Возьмем алгебраическую сумму указанных функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n. \qquad (3\text{-}25')$$

Можно доказать, что функция φ будет давать новый потенциальный поток (доказательства здесь не приводим). Такой поток будет более сложным. Например, составляющая u_x скорости этого потока будет

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x} = (u_x)_1 + (u_x)_2 + \ldots + (u_x)_n,$$

где $(u_x)_1$, $(u_x)_2$, $(u_x)_3$, ..., $(u_x)_n$ – составляющие u_x скорости для указанных простейших потоков, найденные в соответствующей точке.

Из сказанного заключаем, что новый поток, описываемый функцией φ, характеризуется следующим: скорость в любой точке такого потока равна геометрической сумме соответствующих скоростей простейших потоков:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \ldots,$$

где $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, ... – векторы скорости простейших потоков, найденные для рассматриваемой точки заданной области.

Если мы имеем сложный поток, то, как ясно из сказанного, для отыскания φ можно иногда поступить следующим образом. Разложить скорости u сложного потока на составляющие их (u_1, u_2, u_3, ...). Рассматривая затем отдельно поле скоростей u_1, u_2, u_3, ..., можем найти для каждого простейшего поля свою потенциальную функцию (φ_1, φ_2, φ_3, ...). Наконец, по формуле (3-25) вычислить искомую функцию φ.

§ 3-6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Представим поток жидкости, ограниченный на рис. 3-6 линиями a_1b_1 и a_2b_2. Возьмем точку *1* пространства, причем будем считать, что эта точка является неподвижной при протекании через нее жидкости. Далее наметим ряд жидких частиц M, которые, двигаясь в общем случае по разным траекториям, попадают в точку *1* в различные моменты времени t: частица M' – в момент t'; частица M'' – в момент t'' и т. д.

При неустановившемся движении скорость (u) *в каждой данной точке пространства*, например в точке *1*, *изменяется с течением времени*, т. е. в общем случае получаем следующее:

частица M', придя в точку *1* пространства, имеет в этой точке в момент времени t' скорость u';

частица M'', придя в ту же точку *1* пространства, в другой момент времени t'' имеет в этой точке другую скорость u'' и т. д.

В точке *2* пространства получается аналогичная картина. Следовательно, при неустановившемся движении

$$u = f_1(x,\ y,\ z,\ t). \tag{3-26}$$

При установившемся (*или иначе, стационарном*) *движении каждая точка пространства характеризуется определенной, не изменяющейся во времени скоростью* (u); частицы M', M'', M''', ..., придя в точку *1* в различные моменты времени, будут иметь в этой точке одну и ту же скорость u (постоянную по величине и направлению).

При установившемся движении

$$u = f_1(x,\ y,\ z), \tag{3-27}$$

т. е. здесь u не зависит от времени, а потому в случае установившегося движения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0. \tag{3-28}$$

Если бы мы учитывали сжимаемость жидкости, то к соотношениям (3-28) нам следовало бы добавить еще условие $\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0$, так как с изменением давления (во времени) плотность сжимаемой жидкости должна изменяться. Для абсолютно же несжимаемой жидкости указанное дополнительное условие является излишним.

В общем случае для установившегося движения величина $\dfrac{du}{dt} \neq 0$.

Разумеется, вместо условия (3-28) писать условие $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ нельзя, так как равенство нулю этой производной указывает лишь на то, что значение скорости не изменяется во времени; направление же скорости при этом во времени может изменяться.

При установившемся движении траектории частиц M, проходящие через одну и ту же точку 1 пространства (см. линии $M' - 1$, $M'' - 1$, $M''' - 1$ на рис. 3-6), характеризуются следующим:

1) эти траектории совпадают друг с другом (сливаются в одну линию);

2) они являются неизменными во времени.

Рисунок 3-6 относится к общему случаю неустановившегося движения. При установившемся движении получаем картину, представленную на рис. 3-7.

Справедливость сказанного можно доказать следующими рассуждениями. При установившемся движении (рис. 3-7) частица M', придя в точку простран-

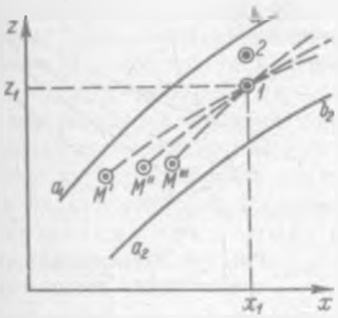


Рис. 3-6. Схема траекторий частиц жидкости при неустановившемся движении

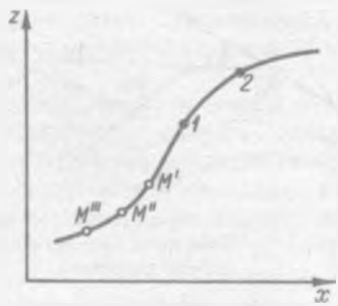


Рис. 3-7. Схема траекторий частиц жидкости M', M'', M''' при установившемся движении

ства 1, получает в этой точке определенную скорость u_1 и уходит из этой точки в определенном направлении (в направлении скорости u_1), причем по истечении времени dt попадает в точку пространства 2, где получает скорость u_2. Следующая частица M'', придя в точку 1, получит здесь ту же самую скорость u_1 и уйдет из этой точки в том же самом направлении, причем по истечении времени dt окажется в точке 2, и т. д.

Рассматривая неустановившееся движение, можем различать случаи:

а) когда скорость в отдельных точках пространства изменяется относительно медленно, в связи с чем величинами $\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ можно пренебрегать;

б) когда скорость в отдельных точках пространства изменяется относительно быстро.

Первый из указанных случаев неустановившегося движения (п. «а») условимся называть медленно изменяющимся движением,[1] а второй (п. «б») – быстро изменяющимся движением.

§ 3-7. ЛИНИЯ ТОКА И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СТРУЙКА

1°. Линия тока. Рассмотрим установившееся и неустановившееся движения.

1. Установившееся движение. Линия тока при установившемся движении представляет собой неизменную во времени траекторию, вдоль которой *одна за другой движутся частицы жидкости* (см. линию $M''' - M'' - M' - 1 - 2$; рис. 3-7).

---

[1] Термин «медленно изменяющееся» движение ранее применялся в ином смысле: так называли движение, именуемое нами «плавно изменяющимся» (стр. 85).

2. Н е у с т а н о в и в ш е е с я д в и ж е н и е. Рассмотрим некоторый мо
времени t_1. Представим себе точку *1*, скрепленную с пространством (рис.
Отложив по длине вектора u_1, относящегося к этой точке, небольшой отр
δs_1, получим точку *2*; далее по длине вектора скорости u_2, относяще
к точке *2*, отложим небольшой отрезок δs_2; при этом получим точку *3*, и
В результате такого построения имеем в общем случае ломаную ли
1—2—3.... Подчеркнем, что скорости u_1, u_2, u_3, ... относятся к рассматр
емому моменту времени t_1.

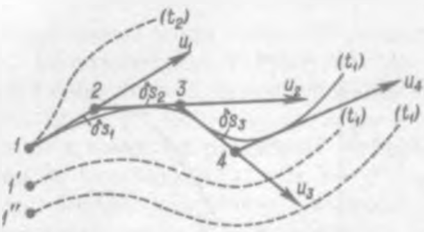


Рис. 3-8. Линии тока при неустановившемся движении

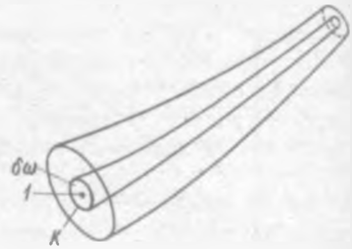


Рис. 3-9. Элементарная струйка, выделенная внутри потока

Если теперь длина отрезков δs будет стремиться к нулю, то в пред
вместо ломаной линии *1—2—3...* получим к р и в у ю л и н и ю, проходящ
через точку *1*, причем эта кривая будет характеризоваться тем, что в да
н ы й м о м е н т в р е м е н и t_1 во всех ее точках векторы скорости будут к н
касательны. Полученная кривая и называется л и н и е й т о к а.

Как видно, *линия тока в случае неустановившегося движения есть крив
проведенная внутри потока так, что в данный момент времени векторы ск
рости во всех точках этой кривой являются касательными к ней.*

В следующий момент времени t_2 скорость в точке *1* может изменить св
направление. Поэтому в общем случае неустановившегося движения линия то
отвечающая моменту t_2, будет представлять собой уже совсем другую кривую

Надо помнить, что в общем случае неустановившегося движения систем
линий тока, проведенных через начальные точки *1*, *1'*, *1''*,..., выражает толь
м г н о в е н н у ю картину движения жидкости (отвечающую определенному м
менту времени).

Только в том частном случае, когда с течением времени скорости *u* изм
няют лишь свою величину (направление остается постоянным), система лини
тока при неустановившемся движении оказывается неизменной во времени; пр
этом линии тока и в случае неустановившегося движения являются траекто
риями частиц жидкости. Разумеется, в общем случае неустановившегося движе
ния линии тока не будут представлять собой траекторий жидких частиц.

2. Элементарная струйка. Представим на рис. 3-9 поток жидкости, намети
внутри потока точку *1* и у этой точки, как показано на рисунке, выдели
элементарную площадку $\delta\omega$, ограниченную контуром *K*. Далее через все точки
площадки $\delta\omega$ проведем линии тока, отвечающие определенному момент
времени.

*Совокупность линий тока, проведенных через все точки элементарной пло-
щадки* $\delta\omega$,[1] *называется элементарной струйкой.*[2] Элементарная струйка представ-

[1] Об элементарной площадке см. стр. 23.

[2] В математической гидромеханике термину «струйка» приписывают иногда не-
сколько иной смысл.

ляет собой как бы пучок линий тока. Можно сказать также, что *элементарная струйка представляет собой часть движущейся жидкости, ограниченную системой линий тока, проведенных через все точки бесконечно малого простого замкнутого контура K, находящегося в области, занятой жидкостью.*

В случае установившегося движения элементарная струйка обладает следующими тремя свойствами.

1. Так как линии тока ~~(рис. 3-7)~~ при установившемся движении жидкости с течением времени не меняют своей формы (являются «застывшими» во времени), то и струйка тока является неизменной во времени.

2. Так как боковая поверхность струйки образована линиями тока, вдоль которых одна за другой скользят жидкие частицы, то, следовательно, проникновение жидкости через боковую поверхность невозможно. Элементарная струйка как бы заключена в жесткие, не изменяющиеся во времени, водонепроницаемые стенки, не имеющие толщины.

3. Так как площадка $\delta\omega$ является элементарной, то величины u и p для всех точек данного поперечного сечения струйки следует считать одинаковыми. Однако вдоль струйки величины u и p в общем случае могут изменяться.

Далее в настоящей главе условимся рассматривать в основном только установившееся движение. Вопросам неустановившегося движения посвящена глава 9.

§ 3-8. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТРУЙНОЕ, ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ И РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЖИВОЕ СЕЧЕНИЕ, РАСХОД И СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ. ЭПЮРА СКОРОСТЕЙ

1°. Параллельноструйное, плавно изменяющееся и резко изменяющееся движения. Можно различать частный случай потока, когда линии тока его являются строго параллельными прямыми. Такое движение жидкости назовем

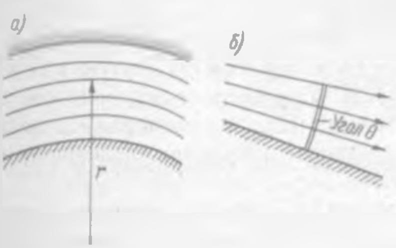


Рис. 3-10. К пояснению плавно и резко изменяющегося движения

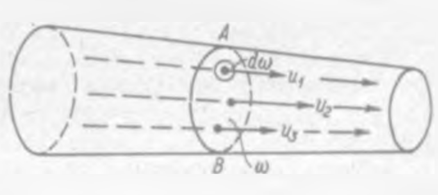


Рис. 3-11. Живое сечение $A - B$

параллельноструйным. Часто, однако, приходится сталкиваться с потоками, отличными от параллельноструйных. Рассматривая такого рода потоки, различаем так называемые плавно изменяющееся движение и резко изменяющееся движение.

Плавно изменяющимся движением называется движение, близкое к параллельноструйному[1]. При плавно изменяющемся движении поток должен удовлетворять следующим двум условиям:

а) радиус r кривизны линий тока должен быть весьма велик (рис. 3-10, *а*);

---

[1] В устаревшей литературе плавно изменяющееся движение иногда называют медленно изменяющимся (см. сноску на стр. 83).

б) угол θ, образованный крайними линиями тока, рассматриваемого потока (или элементарной струйки), должен быть близок к нулю (рис. 3-10, *б*).

При несоблюдении этих двух условий или одного из них получаем движение, называемое резко изменяющимся.

2°. Живое сечение. Изобразим на рис. 3-11 поток жидкости и покажем внутри этого потока целый ряд линий тока. Проведем нормально к этим линиям тока [1] поверхность *AB*.

Поверхность AB, нормальная к линиям тока и лежащая внутри потока, называется живым сечением.

Площадь *AB* принято обозначать через ω (ω – площадь живого сечения).

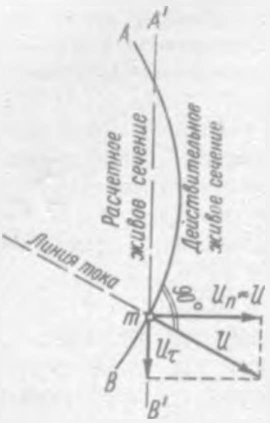


Рис. 3-12. Замена живого сечения $A-B$ плоским расчетным живым сечением $A'-B'$

При параллельноструйном движении живые сечения являются плоскими.

При плавно изменяющемся движении живые сечения должны быть близкими к плоским. [2]

Покажем на рис. 3-12 живое сечение *AB*; в случае плавно изменяющегося движения это живое сечение должно иметь небольшую кривизну.

При расчетах плавно изменяющихся потоков всегда действительные несколько искривленные живые сечения заменяют плоскими расчетными живыми сечениями (см. на рис. 3-12 плоское расчетное живое сечение *A'B'*).

Действительная линия тока, проходящая через точку *m* живого сечения, будет ортогональна к действительному живому сечению *AB*. Разложим действительную скорость *u*, имеющуюся в точке *m*, на две составляющих: u_n, нормальную к сечению *A'B'*, и u_τ, лежащую в плоскости сечения *A'B'*. Можно сказать, что *плавно изменяющееся движение есть такое движение, при котором величиной составляющей скорости u_τ и величиной составляющей ускорения w_τ, направленными вдоль плоского расчетного сечения, можно пренебречь* и считать, что

$$u_n \approx u; \quad w_n \approx w,$$

где *w* – ускорение в точке *m*; w_n – составляющая его, нормальная к сечению *A'B'*.

3°. Расход жидкости. *Расходом жидкости называется объем ее, проходящий в единицу времени через живое сечение. Расход* принято обозначать буквой *Q*. Размерность *Q*:

$$[Q] = \frac{L^3}{t},$$

например, м³/с, дм³/с (т. е. л/с) и т. п.

Если через *d*ω обозначить элементарную часть площади живого сечения, которое в общем случае представляет собой криволинейную поверхность, то

---

[1] Существуют системы кривых, к которым нельзя провести ортогональную поверхность. Такого рода системы линий тока рассматривать здесь не будем.

[2] Можно, однако, представить себе частный случай плавно и резко изменяющихся движений, когда и в этом случае живые сечения будут строго плоскими (случай движения в трубе, изогнутой по окружности при условии, если пренебрегаем «вторичными течениями», см. § 4-19).

элементарный расход, проходящий через площадку $d\omega$, выразится так:

$$dQ = u\,d\omega. \tag{3-29}$$

Поскольку скорости u в разных точках живого сечения в общем случае различны, то величину Q, исходя из выражения (3-29), можно представить в виде:

$$Q = \int_{\omega} u\,d\omega, \tag{3-30}$$

где интеграл берется по всей площади живого сечения ω (в общем случае криволинейного).

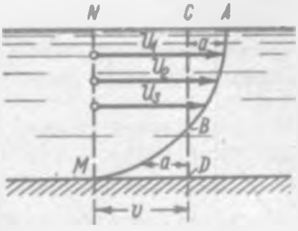


Рис. 3-13. Эпюра скоростей u (см. $ABMN$)
v – средняя скорость

4°. Средняя скорость. Было отмечено, что скорости течения u в разных точках живого сечения, как правило, различны (рис. 3-11):

$$u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq \ldots$$

Имея это в виду, для упрощения расчетов *в случаях параллельноструйного и плавно изменяющегося движений вводят понятия средней для данного живого сечения скорости течения*. Эту скорость (фиктивную, в действительности не существующую) принято обозначать через v. Скорость v определяется соотношением

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad \text{или} \quad v = \frac{\int_{\omega} u\,d\omega}{\omega}, \tag{3-31}$$

откуда и ясен ее смысл. Как видно, v есть гидравлическая характеристика данного живого сечения потока.

Расход Q для данного живого сечения выражается согласно (3-31) формулой

$$\boxed{Q = \omega v.} \tag{3-32}$$

Подчеркнем, что понятием средней скорости v пользуются только при параллельноструйном и плавно изменяющемся движении, когда оперируют плоскими живыми сечениями (иногда, впрочем, понятием v пользуются также при решении так называемых осесимметричных задач; см., например, § 3-32, п. 4°).

5°. Эпюра скоростей. Будем рассматривать поток, имеющий плоские живые сечения: наметим на рис. 3-13 вертикаль $M-N$, принадлежащую одному из живых сечений потока. Покажем векторами u_1, u_2, u_3, ... скорости течения в различных точках этой вертикали. Соединив концы этих векторов линией ABM, получим фигуру $ABMN$, которая представляет характер распределения скоростей u по вертикали. Эта фигура называется эпюрой скоростей (построенной в данном случае для вертикали $M-N$).

Обозначим ее площадь через Ω и представим себе далее, что канал на рис. 3-13 имеет прямоугольное поперечное сечение шириной b, причем эпюры скоростей для любых вертикалей, взятых в плоскости рассматриваемого живого сечения, одинаковы. В этом случае величина Ωb дает расход:

$$Q = \Omega b; \tag{3-33}$$

величина же Ω, т. е. площадь эпюры скоростей, численно равна расходу, приходящемуся на единицу ширины канала:

$$\Omega = \frac{Q}{b}. \tag{3-34}$$

Проведем на рис. 3-13 линию $C-D$ с таким расчетом, чтобы площадь пол ченного прямоугольника $CDMN$ равнялась Ω. Ясно, что ширина этого прям угольника даст величину средней скорости v.

В действительности эпюры скоростей для различных вертикалей $M-N$ везде будут одинаковы (с приближением к берегам скорости уменьшаютс Поэтому в действительности «эпюра» скоростей, построенная для всего живо сечения канала, будет представлять собой некоторое пространственное те (объем которого дает величину Q).

§ 3-9. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ (ИЛИ СПЛОШНОСТИ) ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ[1]

1°. Случай резко изменяющегося движения жидкости. Представим н рис. 3-14 поток (струю) жидкости и наметим два его живых сечения $1-1$ $2-2$. Рассмотрим отсек $abcd$, заключенный между этими сечениями и ограни ченный с боков поверхностью AB, обра зованной линиями тока. Будем считат что этот отсек принадлежит простран ству и является неподвижным, жидкос *же протекает через него.*

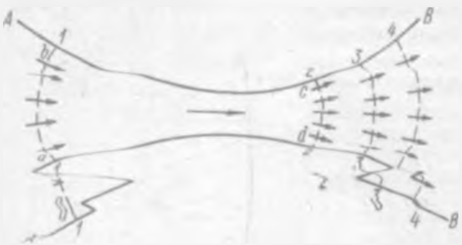


Рис. 3-14. К выводу уравнения (3-38)

Обозначим через Q_1 и Q_2 расход соответственно для сечений $1-1$ и $2-2$.

За время dt в отсек $abcd$ через жи сечение $1-1$ поступит объем жидкос равный $Q_1 dt$; за это же время через вое сечение $2-2$ из отсека $abcd$ вы объем жидкости, равный $Q_2 dt$.

Учтем следующие три обстоятельства:

1) проникновение жидкости через боковую поверхность AB отсека $abcd$ возможно, так как эта поверхность образована линиями тока (траектория вдоль которых одна за другой движутся частицы жидкости:

2) жидкость является несжимаемой;

3) жидкость движется сплошным потоком, без образования в нем разры (ограничимся рассмотрением только такого случая; вопросов кавитации, ... не будем).

Имея в виду эти три обстоятельства, можем утверждать, что объем жи кости Q_1dt должен быть равен объему жидкости Q_2dt:

$$Q_1dt = Q_2dt \qquad (3\text{-}35)$$

или

$$Q_1 = Q_2. \qquad (3\text{-}36)$$

Помимо сечений $1-1$ и $2-2$, можно наметить целый ряд других живы сечений: $3-3$, $4-4$ и т. д. Рассматривая все эти сечения так же точно, как и сечения $1-1$ и $2-2$, можно прийти к выводу, что

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q = \text{const}, \qquad (3\text{-}37)$$

т. е.

$$\boxed{Q = \text{const (вдоль потока).}} \qquad (3\text{-}38)$$

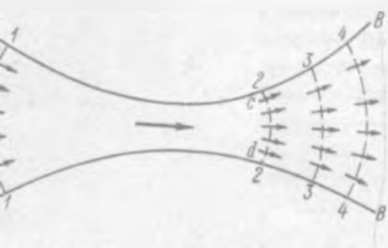
Как видно, *если жидкость движется без образования разрывов, то при установившемся движении расход Q для всех живых сечений потока (ограничен-*

[1] О случае неустановившегося движения см. гл. 9.

Проведем на рис. 3-13 линию $C-D$ с
ного прямоугольника $CDMN$ равнял
льника даст величину средней скоро
В действительности эпюры скорост
де будут одинаковы (с приближени
этому в действительности «эпюра» ск
ения канала, будет представлять со
ьем которого дает величину Q).

§ 3-9. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВ
ВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В СЛУЧА

1°. Случай резко изменяющегося
3-14 поток (струю) жидкости и на
?. Рассмотрим отсек $abcd$, заключенн



ис. 3-14. К выводу уравнения (3-38)

Учтем следующие три обстоятельст
1) проникновение жидкости через бо
ожно, так как эта поверхность обра
ь которых одна за другой движутся
2) жидкость является несжимаемой;
3) жидкость движется сплошным пото
ничимся рассмотрением только такого
ка и т. п. [см. § 1-5] здесь касаться
Имея в виду эти три обстоятельства,
$Q_1 dt$ должен быть равен объему ж

$$Q_1 dt = Q$$

$$Q_1 = Q$$

Помимо сечений $1-1$ и $2-2$, можно
ий: $3-3$, $4-4$ и т. д. Рассматривая
ения $1-1$ и $2-2$, можно прийти к

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots$$

$\boxed{Q = \text{const}}$ (вдол

ак видно, *если жидкость движетс*
овившемся движении расход Q для вс

О случае неустановившегося движения с

ловии отсутствия бокового притока или
ым уравнением. Оно отражает свойства
н е р а з р ы в н о с т и, другими словами,
щейся жидкости. Поэтому данное урав-
нием несжимаемости и неразрывности
Мы, однако, будем далее именовать его
о с т и.

спространить и на любые поперечные сечения
е сечения); важно только, чтобы при пояснен-
ваемые сечения полностью пересекали данный
можно переписать в виде: Q = const (для всех
м жидкости, проходящей в единицу времени

параллельноструйного движений жидкости.
живыми сечениями, причем величину Q
это в виду, для плавно изменяющегося
уравнение неразрывности (3-38) можно

вдоль потока), (3-39)

$$\boxed{= \frac{\omega_2}{\omega_1}} \qquad (3\text{-}40)$$

атно пропорциональны площадям живых

жидкости мы рассматривали только эле-
3-39) и (3-40) для такой струйки следовало

st (вдоль струйки); (3-41)

$$= \frac{\delta\omega_2}{\delta\omega_1} \qquad (3\text{-}42)$$

МОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ
ИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

ординат x и z; ось y наметим перпенди-
некоторую неподвижную точку простран-
x, y, z.
A для определенного момента времени t
й параллелепипед[1] $1-2-3-4$; бесконечно
через dx, dy, dz (размер dy перпендику-
параллелепипед считаем как бы скреплен-
Определим объем жидкости, поступившей
сти, вышедшей из него (через его грани)

раллелепипеда) определяется аналогично поня-
на стр. 23).
пипеда каких-либо так называемых «источников»

б) угол θ, образованный крайними линиями тока, рассматриваемого поток (или элементарной струйки), должен быть близок к нулю (рис. 3-10, *б*).

При несоблюдении этих двух условий или одного из них получаем дви жение, называемое резко изменяющимся.

2°. Живое сечение. Изобразим на рис. 3-11 поток жидкости и покажем внутр этого потока целый ряд линий тока. Проведем нормально к этим линия тока[1] поверхность AB.

Поверхность AB, нормальная к линиям тока и лежащая внутри поток называется живым сечением.

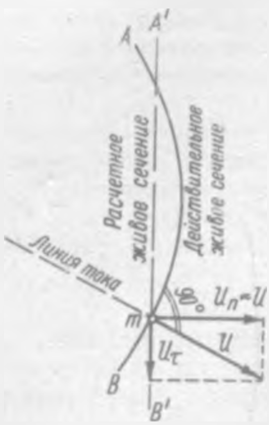


Рис. 3-12. Замена живого сечения $A - B$ плоским расчетным живым сечением $A' - B'$

Площадь AB принято обозначать через ω (ω - площадь живого сечения).

При параллельноструйном движении живые сече ния являются плоскими.

При плавно изменяющемся движении живые се чения должны быть близкими к плоским.[2]

Покажем на рис. 3-12 живое сечение AB; в случа плавно изменяющегося движения это живое сечени должно иметь небольшую кривизну.

При расчетах плавно изменяющихся потоко всегда действительные несколько искривленные живы сечения заменяют плоскими расчетными живыми сечениями (см. на рис. 3-12 плоское расчетно живое сечение $A'B'$).

Действительная линия тока, проходящая чере: точку m живого сечения, будет ортогональна к дей ствительному живому сечению AB. Разложим дей ствительную скорость u, имеющуюся в точке m, на две составляющих: u_n, нормальную к сечению $A'B'$ и u_τ, лежащую в плоскости сечения $A'B'$. Можно ска зать, что *плавно изменяющееся движение есть такое движение, при котором величиной составляющей скорости u_τ и величиной составляющей ускорения w_τ, направленными вдоль плоского расчетного сечения, можно пренебречь* и считать, что

$$u_n \approx u; \quad w_n \approx w,$$

где w – ускорение в точке m; w_n – составляющая его, нормальная к сечению $A'B'$.

3°. Расход жидкости. *Расходом жидкости называется объем ее, проходящий в единицу времени через живое сечение. Расход* принято обозначать буквой Q. Размерность Q:

$$[Q] = \frac{L^3}{t},$$

например, м^3/с, дм^3/с (т. е. л/с) и т. п.

Если через $d\omega$ обозначить элементарную часть площади живого сечения, которое в общем случае представляет собой криволинейную поверхность, то

[1] Существуют системы кривых, к которым нельзя провести ортогональную поверхность. Такого рода системы линий тока рассматривать здесь не будем.

[2] Можно, однако, представить себе частный случай плавно и резко изменяющихся движений, когда и в этом случае живые сечения будут строго плоскими (случай движения в трубе, изогнутой по окружности при условии, если пренебрегаем «вторичными течениями», см. § 4-19).

лементарный расход, проходящий через площадку $d\omega$, выразится так:

$$dQ = u\, d\omega. \tag{3-29}$$

Поскольку скорости u в разных точках живого сечения в общем случае различны, то величину Q, исходя из выражения (3-29), можно представить виде:

$$Q = \int_{\omega} u\, d\omega, \tag{3-30}$$

де интеграл берется по всей площади живого сечения ω (в общем случае криволинейного).

4°. Средняя скорость. Было отмечено, что скорости течения u в разных точках живого сечения, как правило, различны (рис. 3-11):

$$u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq \ldots$$

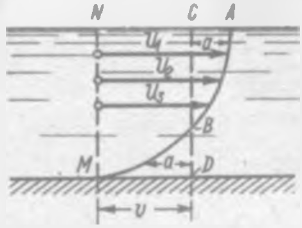


Рис. 3-13. Эпюра скоростей u (см. $ABMN$)
v – средняя скорость

Имея это в виду, для упрощения расчетов *в случаях параллельноструйного и плавно изменяющегося движений вводят понятия средней для данного живого сечения скорости течения.* Эту скорость (фиктивную, в действительности не существующую) принято обозначать через v. Скорость v определяется соотношением

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad \text{или} \quad v = \frac{\int_{\omega} u\, d\omega}{\omega}, \tag{3-31}$$

откуда и ясен ее смысл. Как видно, v есть гидравлическая характеристика данного живого сечения потока.

Расход Q для данного живого сечения выражается согласно (3-31) формулой

$$\boxed{Q = \omega v.} \tag{3-32}$$

Подчеркнем, что понятием средней скорости v пользуются только при параллельноструйном и плавно изменяющемся движении, когда оперируют плоскими живыми сечениями (иногда, впрочем, понятием v пользуются также при решении так называемых осесимметричных задач; см., например, § 3-32, п. 4°).

5°. Эпюра скоростей. Будем рассматривать поток, имеющий плоские живые сечения: наметим на рис. 3-13 вертикаль $M-N$, принадлежащую одному из живых сечений потока. Покажем векторами u_1, u_2, u_3, ... скорости течения в различных точках этой вертикали. Соединив концы этих векторов линией ABM, получим фигуру $ABMN$, которая представляет характер распределения скоростей u по вертикали. Эта фигура называется эпюрой скоростей (построенной в данном случае для вертикали $M-N$).

Обозначим ее площадь через Ω и представим себе далее, что канал на рис. 3-13 имеет прямоугольное поперечное сечение шириной b, причем эпюры скоростей для любых вертикалей, взятых в плоскости рассматриваемого живого сечения, одинаковы. В этом случае величина Ωb дает расход:

$$Q = \Omega b; \tag{3-33}$$

величина же Ω, т. е. площадь эпюры скоростей, численно равна расходу, приходящемуся на единицу ширины канала:

$$\Omega = \frac{Q}{b}. \tag{3-34}$$

Проведем на рис. 3-13 линию $C-D$ с таким расчетом, чтобы площадь полу ченного прямоугольника $CDMN$ равнялась Ω. Ясно, что ширина этого прямоугольника даст величину средней скорости v.

В действительности эпюры скоростей для различных вертикалей $M-N$ не везде будут одинаковы (с приближением к берегам скорости уменьшаются). Поэтому в действительности «эпюра» скоростей, построенная для **в с е г о** живого сечения канала, будет представлять собой некоторое пространственное тело (объем которого дает величину Q).

§ 3-9. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ (ИЛИ СПЛОШНОСТИ) ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ[1]

1°. Случай резко изменяющегося движения жидкости. Представим на рис. 3-14 поток (струю) жидкости и наметим два его живых сечения $1-1$ и $2-2$. Рассмотрим отсек $abcd$, заключенный между этими сечениями и ограниченный с боков поверхностью AB, образованной линиями тока. Будем считать, что этот отсек принадлежит пространству и является неподвижным, жидкость же протекает через него.

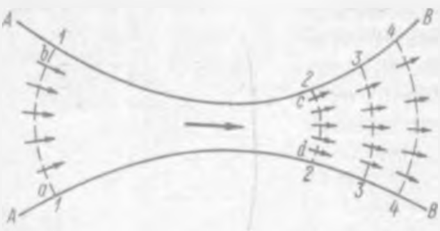


Рис. 3-14. К выводу уравнения (3-38)

Обозначим через Q_1 и Q_2 расходы соответственно для сечений $1-1$ и $2-2$. За время dt в отсек $abcd$ через живое сечение $1-1$ поступит объем жидкости, равный $Q_1\,dt$; за это же время через живое сечение $2-2$ из отсека $abcd$ выйдет объем жидкости, равный $Q_2\,dt$.

Учтем следующие три обстоятельства:

1) проникновение жидкости через боковую поверхность AB отсека $abcd$ невозможно, так как эта поверхность образована линиями тока (траекториями), вдоль которых одна за другой движутся частицы жидкости;

2) жидкость является несжимаемой;

3) жидкость движется сплошным потоком, без образования в нем разрывов (ограничимся рассмотрением только такого случая; вопросов кавитации, аэрации потока и т. п. [см. § 1-5] здесь касаться не будем).

Имея в виду эти три обстоятельства, можем утверждать, что объем жидкости Q_1dt должен быть равен объему жидкости Q_2dt:

$$Q_1dt = Q_2dt \tag{3-35}$$

или

$$Q_1 = Q_2. \tag{3-36}$$

Помимо сечений $1-1$ и $2-2$, можно наметить целый ряд других живых сечений: $3-3$, $4-4$ и т. д. Рассматривая все эти сечения так же точно, как и сечения $1-1$ и $2-2$, можно прийти к выводу, что

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q = \text{const}, \tag{3-37}$$

т. е.

$$\boxed{Q = \text{const (вдоль потока)}.} \tag{3-38}$$

Как видно, *если жидкость движется без образования разрывов, то при установившемся движении расход Q для всех живых сечений потока (ограничен-*

[1] О случае неустановившегося движения см. гл. 9.

ного с боков линиями тока, т. е. при условии отсутствия бокового притока или оттока жидкости) одинаков.

Уравнение (3-38) и является искомым уравнением. Оно отражает свойства **несжимаемости** (см. выше п. 2) и **неразрывности**, другими словами, **сплошности** (см. выше п. 3) движущейся жидкости. Поэтому данное уравнение следовало бы называть уравнением несжимаемости и неразрывности (сплошности) движущейся жидкости. Мы, однако, будем далее именовать его просто **уравнением неразрывности**.

Заметим, что уравнение (3-38) можно распространить и на любые поперечные сечения потока (не обязательно только на его живые сечения); важно только, чтобы при поясненных выше условиях (см. пп. 1 – 3) рассматриваемые сечения полностью пересекали данный поток жидкости. При этом уравнение (3-38) можно переписать в виде: Q = const (для всех *поперечных сечений потока), где Q — объем жидкости, проходящей в единицу времени* через любое поперечное сечение потока.

2°. Случай плавно изменяющегося и параллельноструйного движений жидкости. В этом случае оперируют плоскими живыми сечениями, причем величину Q выражают зависимостью (3-32). Имея это в виду, для плавно изменяющегося и параллельноструйного движений уравнение неразрывности (3-38) можно представить еще в виде

$$\omega v = \text{const (вдоль потока)}, \tag{3-39}$$

откуда получаем: $\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$ или

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}}. \tag{3-40}$$

Как видно, *средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений потока.*

Если бы вместо целого потока жидкости мы рассматривали только элементарную струйку его, то уравнения (3-39) и (3-40) для такой струйки следовало бы переписать в виде

$$\delta Q = u\,\delta\omega = \text{const (вдоль струйки)}; \tag{3-41}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\delta\omega_2}{\delta\omega_1}. \tag{3-42}$$

§ 3-10. УРАВНЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Представим на рис. 3-15 оси координат x и z; ось y наметим перпендикулярно к плоскости чертежа. Возьмем некоторую неподвижную точку пространства A, определяемую координатами x, y, z.

Составляющие скорости u в точке A для определенного момента времени t обозначим через u_x, u_y, u_z.

Выделим у точки A элементарный параллелепипед[1] *1 – 2 – 3 – 4*; бесконечно малые длины его сторон обозначим через dx, dy, dz (размер dy перпендикулярен к плоскости чертежа). Данный параллелепипед считаем как бы скрепленным с неподвижным пространством. Определим объем жидкости, поступившей в него за время dt, и объем жидкости, вышедшей из него (через его грани) за то же время dt.[2]

[1] Понятие элементарного объема (параллелепипеда) определяется аналогично понятию элементарной площадки (см. сноску на стр. 23).

[2] Предполагая, что внутри параллелепипеда каких-либо так называемых «источников» и «стоков» нет.

Если в точке A горизонтальная составляющая скорости равна u_x, то в точке M_1, удаленной от точки A на расстояние $\frac{1}{2}dx$, горизонтальная составляющая скорости (с точностью до величин высшего порядка малости)

$$(u_x)_{M_1} = u_x + \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{3-43}$$

в точке же M_2 горизонтальная составляющая скорости

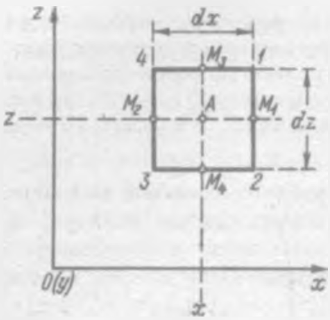


Рис. 3-15. К выводу уравнения (3-51)

$$(u_x)_{M_2} = u_x - \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{3-44}$$

где $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ представляет собой изменение величины u_x, приходящееся на единицу длины, измеренную вдоль линии M_1M_2, параллельной оси Ox.

Объем жидкости, в ы ш е д ш е й из параллелепипеда за время dt через грань $1-2$,

$$\delta W_1 = (u_x)_{M_1}dt\,dy\,dz = \left(u_x + \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)dy\,dz\,dt, \tag{3-45}$$

где $dy\,dz$ — площадь грани $1-2$.

Объем жидкости, в о ш е д ш е й в параллелепипед за время dt через противоположную грань $3-4$,

$$\delta W_2 = (u_x)_{M_2}dt\,dy\,dz = \left(u_x - \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)dy\,dz\,dt. \tag{3-46}$$

Изменение объема жидкости в параллелепипеде за время dt за счет движения жидкости через две противоположные его грани $1-2$ и $3-4$ будет

$$\delta W_1 - \delta W_2 = \left(u_x + \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)dy\,dz\,dt - \left(u_x - \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)dy\,dz\,dt = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx\,dy\,dz\,dt. \tag{3-47}$$

Аналогичные выражения можно написать для остальных двух пар противоположных граней параллелепипеда:

$$\delta W_3 - \delta W_4 = \frac{\partial u_y}{\partial y}dx\,dy\,dz\,dt; \tag{3-48}$$

$$\delta W_5 - \delta W_6 = \frac{\partial u_z}{\partial z}dx\,dy\,dz\,dt, \tag{3-49}$$

где индексами 3, 4, 5, 6 указаны объемы жидкости, протекающей за время dt через соответствующие грани параллелепипеда (третья и четвертая грани параллелепипеда параллельны плоскости чертежа; расход жидкости через эти грани определяется проекцией скорости u на ось y).

Считая жидкость несжимаемой (и полагая температуру ее неизменяющейся), можем написать:

$$(\delta W_1 - \delta W_2) + (\delta W_3 - \delta W_4) + (\delta W_5 - \delta W_6) = 0. \tag{3-50}$$

Подставим в эту зависимость выражения (3-47), (3-48) и (3-49); сокращая результаты на $dx\,dy\,dz\,dt$, окончательно получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{3-51}$$

зонтальная составляющая ско

на расстояние $\frac{1}{2}dx$, горизонта

высшего порядка малости)

$$(u_x)_{M_1} = u_x + \frac{1}{2}\,dx\,\frac{\partial u_x}{\partial x};$$

льная составляющая скорости

$$(u_x)_{M_2} = u_x$$

где $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ представляет

приходящееся на едини

линии M_1M_2, параллел

Объем жидкости,

педа за время dt через

$$\delta W_1 = (u_x)_{M_1}\,dt\,dy\,dz =$$

где $dy\,dz$ – площадь гра

Объем жидкости,

пед за время dt через

ния

$$(u_x)_{M_2}\,dt\,dy\,dz = \left(u_x - \frac{1}{2}\,dx\,\frac{\partial u_x}{\partial x}\right.$$

ости в параллелепипеде за

оложные его грани $1-2$ и $3-$

$$dy\,dz\,dt - \left(u_x - \frac{1}{2}\,dx\,\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)dy$$

ожно написать для остальны

$$- \delta W_4 = \frac{\partial u_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt;$$

$$- \delta W_6 = \frac{\partial u_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

ы объемы жидкости, прот

елепипеда (третья и четвер

расход жидкости через эт

емой (и полагая темпера

$$+ (\delta W_3 - \delta W_4) + (\delta W_5 - \delta W$$

сть выражения (3-47), (3-4

ьно получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

быть названо у р а в н е н и е м н е с ж и м а е м о с т и
е й с я ж и д к о с т и (записанным в д и ф ф е р е н ц и-

но было бы вывести, подсчитывая не объемы
лементарный параллелепипед и вышедшей из него,
и этом уравнение (3-51) оказалось бы «отнесенным
как и уравнение Эйлера; см. § 3-3).

входящие в (3-51), являются п р о д о л ь н ы м и
ми (см. § 3-3). Из (3-51) ясно, что с у м м а
с т н ы х п р о и з в о д н ы х, в ы ч и с л е н н ы х д л я
р а н с т в а, з а н я т о г о д в и ж у щ е й с я н е с ж и-
е, н е м о ж е т я в л я т ь с я п р о и з в о л ь н о й
м м а (д л я д а н н о г о м о м е н т а в р е м е н и)
я т ь с я н у л ю

тел (являющихся сжимаемыми) сумма продольных
водных может быть не равна нулю. Однако
скоростью объемного расширения газа) и здесь
деленному закону.

ия неразрывности (см. § 3-9), уравнение несжимаемости
только к т о ч к е пространства, занятого движу-
ому уравнение (3-51), строго говоря, не отражает
зрывности) движущейся жидкости: при соблюдении
ывы жидкости к о н е ч н ы х размеров (например,
вблизи рассматриваемой точки могут появляться.
обстоятельство, уравнение (3-51) часто в литературе
и уравнение (3-38), уравнением сплошности (или
жидкости.

ОМЕРНОЕ И РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЯ. НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЯ, СВОБОДНЫЕ СТРУИ. ЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЖИВОГО СЕЧЕНИЯ. АССИФИКАЦИЙ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ

равномерное движения жидкости. Рассмотрим отдельно
новившееся движения.

е с я д в и ж е н и е.
с. 3-16 продольный разрез ц и л и н д р и ч е с к о г о
const вдоль течения). Наметим несколько расчетных
этого потока и несколько прямых линий, парал-
ачивающим поток
ут линиями тока;
адлежащие одной
ямой линии и ле-
ечениях (см. точки
", 3", ... и т. д.),
с о о т в е т с т в е н-

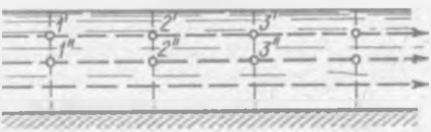


Рис. 3-16. Соответственные точки (1', 2', 3', ...; 1", 2", 3", ...)

м д в и ж е н и е м
ние, при котором:
ия вдоль потока изменяют свою величину: $\omega \neq \mathrm{const}$

ия вдоль потока сохраняют свою величину ($\omega = \mathrm{const}$),
твенных точках (u_1, u_2, u_3, ...) оказываются неравными

друг другу: $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq \ldots$. На рис. 3-18 представлен такой случай неравномерного движения. Для плоской задачи площадь Ω эпюр скоростей, показанных на рис. 3-18, разумеется, должна быть всюду одинаковой ($\Omega_1 = \Omega_2$), поскольку площадь Ω выражает величину расхода. Однако *форма* эпюр скоростей *по длине потока изменяется*, причем мы и получаем так называемое неравномерное движение жидкости.

Равномерным движением называется прямолинейное движение, при котором $\omega = \text{const}$ (поток имеет цилиндрическую форму), причем скорости u в соответственных точках одинаковы (по своему значению и по направлению). При равномерном движении эпюры скоростей для всех сечений имеют не только одинаковую площадь, *но и совершенно одинаковую форму*.

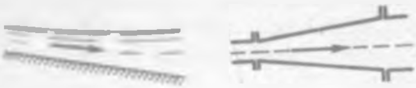


Рис. 3-17. Неравномерное движение

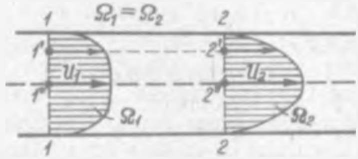


Рис. 3-18. Неравномерное движение в цилиндрическом трубопроводе

Равномерное движение является *параллельноструйным* движением (эти два термина, по существу, представляют собой как бы синонимы). Живые сечения при равномерном движении – плоские, причем средняя скорость v при таком движении всегда

$$v = \text{const (вдоль потока).} \tag{3-52}$$

Однако это условие является еще недостаточным для определения равномерного движения [в случае неравномерного движения, представленного на рис. 3-18, также удовлетворяется условие (3-52)].

Что касается неравномерного движения, то именно внутри этого вида движения следует различать:

а) движение, *плавно изменяющееся* (когда расчетные живые сечения принимаются плоскими);

б) движение, *резко изменяющееся* (когда живые сечения нельзя считать плоскими).

2) *Неустановившееся движение.*

Не следует смешивать понятие равномерного (или неравномерного) движения данной (одной) частицы жидкости с понятием одновременного равномерного (или неравномерного) движения *множества «жидких частиц»*. Кроме того, необходимо учитывать, что при определении рассматриваемых понятий применительно к случаю неустановившегося движения исходят из представлений Эйлера (а не Лагранжа; см. § 3-2). В связи с этим, рассматривая векторное поле скоростей, отвечающее *данному моменту времени*, считают, что если это поле является так сказать однородным в отношении скоростей (т. е. в пределах данного поля векторы скоростей всюду одинаковы и по их значению и по их направлению), то такое движение может быть названо *равномерным в данный момент времени*; если же это поле скоростей является неоднородным, то отвечающее ему движение, естественно, должно быть названо *неравномерным в данный момент времени*.

Из сказанного ясно, что при неустановившемся «*равномерном* (в данный момент времени) движении жидкости» отдельные жидкие частицы движутся неравномерно во времени (согласно Лагранжу).

2°. Напорное и безнапорное движения жидкости, свободные струи. Представим на рис. 3-19, *а* и *б* две схемы поперечного сечения потока.

Напорным движением называется такое движение, при котором поток со всех боковых сторон ограничен твердыми стенками (рис. 3-19, *а*).

Безнапорным движением называется движение, характеризуемое наличием свободной поверхности (рис. 3-19, *б*).

Свободной струей жидкости называется поток (струя), вовсе не ограниченный твердыми стенками. Примером свободной струи может являться так называемая пожарная струя, выходящая из брандспойта.

3°. Гидравлические элементы живого сечения потока. Различают три основных гидравлических элемента живого сечения:

1) площадь живого сечения ω;

2) смоченный периметр χ, представляющий собой периметр той части поперечного сечения русла, которая смочена движущейся жидкостью (см. линию $1-2-3$ на рис. 3-19, *б*; для круглого сечения на рис. 3-19, *а* величина $\chi = 2\pi r$, где r — радиус сечения);

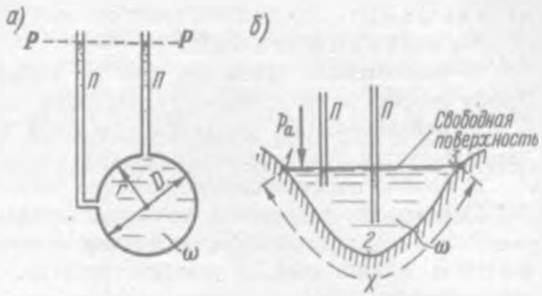


Рис. 3-19. Напорное (*а*) и безнапорное (*б*) движение

χ — смоченный периметр

3) гидравлический радиус:

$$\boxed{R = \frac{\omega}{\chi}.} \tag{3-53}$$

Величина R не имеет особого физического смысла; при помощи этой величины пытаются приближенно учесть влияние формы (а также размеров) живого сечения потока на движение жидкости.

Для схемы на рис. 3-19, *а*

$$R = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2}, \tag{3-54}$$

где D — диаметр круглой напорной трубы.

Для круглого живого сечения гидравлический радиус равен половине геометрического радиуса.

При помощи гидравлического радиуса R в гидравлических расчетах удается учесть с некоторым приближением форму поперечного сечения русел сравнительно «правильного» очертания (круглого, трапецеидальнього, приближающегося к круглому и трапецеидальному и т. п.), когда касательные напряжения τ_0 (см. далее § 4-2) распределяются достаточно равномерно вдоль смоченного периметра. В сечениях «неправильного» очертания (например, встречающегося в практике машиностроения — звездообразного сечения, характеризуемого наличием острых углов) гидравлический радиус непригоден для учета формы поперечного сечения русла.

4°. Сводка классификаций видов движения жидкости. На протяжении предшествующего изложения был введен ряд классификаций видов движения жидкости (по различным признакам). Все эти классификации можно представить в следующем виде:

1-я **классификация**; здесь все возможные виды движения разбива на две категории:

1) безвихревое (оно же потенциальное) движение, когда вращение эле тарных частиц жидкости на бесконечно малом перемещении их отсутству

2) вихревое движение.

2-я **классификация**:

1) установившееся (стационарное) движение;

2) неустановившееся (нестационарное) движение: а) медленно изменяющ и б) быстро изменяющееся.

Эту классификацию проводили по признаку зависимости движения жидкс от **времени**.

3-я **классификация**:[1]

1) равномерное движение, оно же параллельноструйное ($v = \mathrm{const}$, при эпюра скоростей не деформируется вдоль потока);

2) неравномерное движение ($v \neq \mathrm{const}$ или $v = \mathrm{const}$, но эпюра скорос деформируется вдоль потока); внутри этого вида движения различаем:

а) плавно изменяющееся движение (живые сечения принимаются плоским

б) резко изменяющееся движение (живые сечения криволинейны).

Здесь потоки классифицировались в зависимости от **геометрическ формы** линий тока (с учетом вопроса о деформации эпюры скорост вдоль потока).

Впрочем, вопрос о деформации эпюры скоростей вдоль потока сводится так к вопросу о геометрической форме линий тока: если учесть, что расход меж двумя заданными линиями тока постоянен по длине, то легко понять, что линии то для потока на рис. 3-18 не являются параллельными прямыми (участки эпк скоростей в сечениях *1 — 1* и *2 — 2*, лежащие между двумя рассматриваемым линиями тока, должны иметь одинаковые площади, поскольку эти площади выражаю расход).

4-я **классификация**:

1) напорное движение (рис. 3-19, *а*);

2) безнапорное движение (рис. 3-19, *б*);

3) свободные струи.

В дальнейшем нам придется столкнуться еще со следующими двумя классификациями.

5-я **классификация** (см. § 3-23).

1) ламинарный режим движения жидкости;

2) турбулентный режим движения жидкости;

6-я **классификация** (см. § 7-6), относящаяся только к безнапорному движению;

1) спокойное движение жидкости;

2) бурное движение жидкости.

Пользуясь приведенными шестью классификациями, можно достаточно точно определять тот или другой изучаемый вид движения жидкости.

Заметим, что следует различать еще 7-ю **классификацию** движений (в зависимости от характера, например, векторных полей скорости и ускорения):

Все виды движения жидкости, рассматриваемой как сплошная среда (континиум), являются **пространственными** (происходят в **пространстве**). Вместе с тем внутри пространственного движения можно различать, например, следующие **частные** случаи его (которые и составляют упомянутую седьмую классификацию):

---

[1] Здесь ограничиваемся кратким пояснением этой классификации только для случая установившегося движения.

сечение $2-2$ струйки – на расстояние δs_2. Заметим, что

$$\delta s_1 = u_1 \delta t, \quad \delta s_2 = u_2 \delta t,$$

где u_1 и u_2 – скорости в сечениях $1-1$ и $2-2$.

Рассуждая, как и в § 3-9, можем показать, что объемы элемента отсеков струйки AA' и BB' равны, т. е.

$$\text{объем } (AA') = \text{объему } (BB') = \delta V \text{ (обозначение)},$$

причем

$$\delta V = \delta\omega_1 \delta s_1 = \delta\omega_2 \delta s_2 = \delta Q\, \delta t,$$

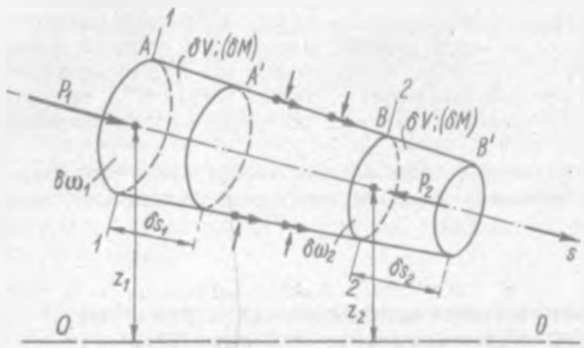


Рис. 3-20. К выводу уравнения (3-60)

где δQ – расход жидк для струйки.

Обозначим массу ментарного объема δV ч δM:

$$\delta M = \rho \delta V = \frac{\gamma}{g}\delta V, (3$$

где ρ – плотность жидкос

Найдем теперь изме ние кинетической энергии сека AB при перемещен его в положение $A'B'$ и р боту сил, приложенных этому отсеку, на указанн перемещении.

1°. Изменение кинетической энергии отсека AB при перемещении его в пол жение $A'B'$. Обозначим упомянутое изменение кинетической энергии ($КЭ$) чер $\delta(КЭ)$. Тогда можно написать (см. рис. 3-20):

$$\delta(КЭ) = КЭ(A'B') - КЭ(AB) = КЭ(A'B + BB') -$$
$$- КЭ(AA' + A'B) = КЭ(BB') - КЭ(AA'),$$

т. е.

$$\delta(КЭ) = \frac{u_2^2 \delta M}{2} - \frac{u_1^2 \delta M}{2},$$

или, учитывая (3-55),

$$\delta(КЭ) = \frac{\gamma}{g}\delta V \frac{u_2^2}{2} - \frac{\gamma}{g}\delta V \frac{u_1^2}{2} = \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}\right)\gamma\delta V. \tag{3-56}$$

2°. Работа сил при перемещении отсека AB в положение $A'B'$. При указанном перемещении получаем работу следующих сил.

1. Работа силы тяжести. Как видно, эффект действия силы тяжести проявился как бы в том, что отсек AA' переместился в положение BB' (а отсек $A'B$ остался на месте). Пользуясь такой условной схемой, работу силы тяжести ($РСТ$) получаем в виде

$$РСТ = (z_1 - z_2)\gamma\delta V. \tag{3-57}$$

Справедливость (3-57) может быть обоснована и более строго.

Разбиваем отсек $A'B$ на элементарные отсеки объемом δV. Тогда искомая работа силы тяжести может быть представлена в виде:

$$РСТ = \gamma\delta V(z_1 - z') + \gamma\delta V(z' - z'') + \gamma\delta V(z'' - z''') + \ldots +$$
$$+ \gamma\delta V(z^{(n)} - z_2) = \gamma\delta V(z_1 - z_2),$$

– на расстояние δs_2. Заметим, что

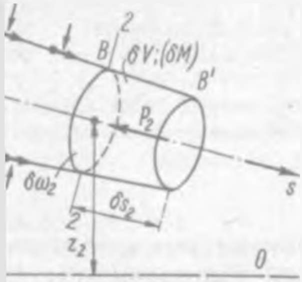
$$\delta s_1 = u_1\delta t,\ \ \delta s_2 = u_2\delta t,$$

в сечениях $1-1$ и $2-2$.

і в § 3-9, можем показать, что объемы элементарных BB' равны, т. е.

(AA') = объему $(BB') = \delta V$ (обозначение),

$$\delta V = \delta\omega_1\delta s_1 = \delta\omega_2\delta s_2 = \delta Q\,\delta t,$$



оду уравнения (3-60)

где δQ – расход жидкости для струйки.

Обозначим массу элементарного объема δV через δM:

$$\delta M = \rho\delta V = \frac{\gamma}{g}\delta V, \quad (3\text{-}55)$$

где ρ — плотность жидкости.

Найдем теперь изменение кинетической энергии отсека AB при перемещении его в положение $A'B'$ и работу сил, приложенных к этому отсеку, на указанном перемещении.

ической энергии отсека AB при перемещении его в поло- упомянутое изменение кинетической энергии ($КЭ$) через писать (см. рис. 3-20):

$$КЭ(A'B') - КЭ(AB) = КЭ(A'B + BB') -$$
$$З(AA' + A'B) = КЭ(BB') - КЭ(AA'),$$

$$\delta(КЭ) = \frac{u_2^2\delta M}{2} - \frac{u_1^2\delta M}{2},$$

$$\frac{\gamma}{g}\delta V\frac{u_2^2}{2} - \frac{\gamma}{g}\delta V\frac{u_1^2}{2} = \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}\right)\gamma\delta V. \quad (3\text{-}56)$$

и перемещении отсека AB в положение $A'B'$. При получаем работу следующих сил.

і тяжести. Как видно, эффект действия силы ы в том, что отсек AA' переместился в положение BB' месте). Пользуясь такой условной схемой, работу силы в виде

$$РСТ = (z_1 - z_2)\gamma\delta V. \quad (3\text{-}57)$$

7) может быть обоснована и более строго.

3 на элементарные отсеки объемом δV. Тогда иско-и может быть представлена в виде:

$$z_1 - z') + \gamma\delta V(z' - z'') + \gamma\delta V(z'' - z''') + \ldots +$$
$$+ \gamma\delta V(z^{(n)} - z_2) = \gamma\delta V(z_1 - z_2),$$

где z', z'', z''', ..., $z^{(n)}$ выделяющих элемент

2. Работа сил щего на торцов окружающей его жид

$РС$

где p_1 и p_2 – гидроді $2-2$.

3. Работа вне на боковую по так как силы направ движущихся вдоль бо

4. Работа вну модействия отдельны являются парными (п щениями. Сумма рабо

5. Работа вне (силы трения в рассм

3°. Окончательн энергии, можем напис

Разделим это вы веса того объема сечение струйки. При

Так как сечения 1 переписать также в ві

Уравнение (3-59) идеальной жидк нулли, который в 17 в данное уравнение в

Обратим вниман

1) уравнение Берн

2) как видно из (3

z, $\frac{p}{\gamma}$, $\frac{u^2}{2g}$ является струйки;

3) если указанна то для соседней струйі чем в общем случае

4) зная для данн данного сечения стру мы можем, пользуясь для рассматриваемого

сечение $2-2$ струйки – на расстояние δs_2. Заметим, что

$$\delta s_1 = u_1 \delta t, \quad \delta s_2 = u_2 \delta t,$$

где u_1 и u_2 – скорости в сечениях $1-1$ и $2-2$.

Рассуждая, как и в § 3-9, можем показать, что объемы элементарных отсеков струйки AA' и BB' равны, т. е.

$$\text{объем } (AA') = \text{объему } (BB') = \delta V \text{ (обозначение)},$$

причем

$$\delta V = \delta\omega_1 \delta s_1 = \delta\omega_2 \delta s_2 = \delta Q\, \delta t,$$

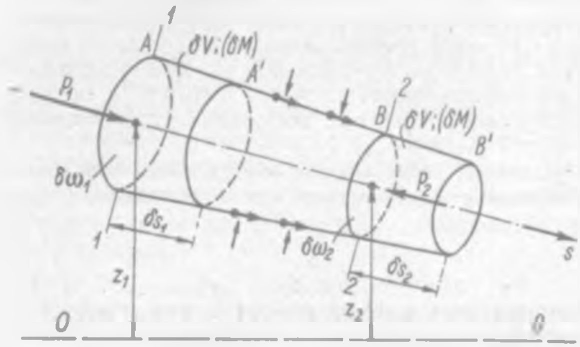


Рис. 3-20. К выводу уравнения (3-60)

где δQ – расход жидкости для струйки.

Обозначим массу элементарного объема δV через δM:

$$\delta M = \rho \delta V = \frac{\gamma}{g}\delta V, \quad (3\text{-}55)$$

где ρ – плотность жидкости.

Найдем теперь изменение кинетической энергии отсека AB при перемещении его в положение $A'B'$ и работу сил, приложенных к этому отсеку, на указанном перемещении.

1°. Изменение кинетической энергии отсека AB при перемещении его в положение $A'B'$. Обозначим упомянутое изменение кинетической энергии ($КЭ$) через $\delta(КЭ)$. Тогда можно написать (см. рис. 3-20):

$$\delta(КЭ) = КЭ(A'B') - КЭ(AB) = КЭ(A'B + BB') -$$
$$- КЭ(AA' + A'B) = КЭ(BB') - КЭ(AA'),$$

т. е.

$$\delta(КЭ) = \frac{u_2^2 \delta M}{2} - \frac{u_1^2 \delta M}{2},$$

или, учитывая (3-55),

$$\delta(КЭ) = \frac{\gamma}{g}\delta V \frac{u_2^2}{2} - \frac{\gamma}{g}\delta V \frac{u_1^2}{2} = \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}\right)\gamma \delta V. \quad (3\text{-}56)$$

2°. Работа сил при перемещении отсека AB в положение $A'B'$. При указанном перемещении получаем работу следующих сил.

1. Работа силы тяжести. Как видно, эффект действия силы тяжести проявился как бы в том, что отсек AA' переместился в положение BB' (а отсек $A'B$ остался на месте). Пользуясь такой условной схемой, работу силы тяжести ($РСТ$) получаем в виде

$$РСТ = (z_1 - z_2)\gamma \delta V. \quad (3\text{-}57)$$

Справедливость (3-57) может быть обоснована и более строго.

Разбиваем отсек $A'B$ на элементарные отсеки объемом δV. Тогда искомая работа силы тяжести может быть представлена в виде:

$$РСТ = \gamma\delta V(z_1 - z') + \gamma\delta V(z' - z'') + \gamma\delta V(z'' - z''') + \ldots +$$
$$+ \gamma\delta V(z^{(n)} - z_2) = \gamma\delta V(z_1 - z_2),$$

е $z', z'', z''', \ldots, z^{(n)}$ – возвышения над плоскостью OO граничных сечений,
ыделяющих элементарные объемы δV.

2. Работа сил гидродинамического давления, действую-
его на торцовые сечения $1-1$ и $2-2$ отсека AB (со стороны
ружающей его жидкости). Эта работа

$$РСД = (p_1 \delta\omega_1)\delta s_1 - (p_2 \delta\omega_2)\delta s_2 = (p_1 - p_2)\delta V, \tag{3-58}$$

е p_1 и p_2 – гидродинамические давления соответственно в сечениях $1-1$ и
-2.

3. Работа внешних сил давления окружающей жидкости
а боковую поверхность отсека AB. Эта работа равна нулю,
к как силы направлены перпендикулярно к перемещениям жидких частиц,
ижущихся вдоль боковой поверхности отсека AB.

4. Работа внутренних сил давления (нормальных сил взаи-
одействия отдельных частиц жидкости, составляющих объем AB). Эти силы
ляются парными (противоположно направленными) с одинаковыми переме-
ениями. Сумма работ их равна нулю.

5. Работа внешних и внутренних сил трения равна нулю
илы трения в рассматриваемой нами идеальной жидкости отсутствуют).

3°. **Окончательный вывод.** Используя теорему изменения кинетической
ергии, можем написать:

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}\gamma\delta V = (z_1 - z_2)\gamma\delta V + (p_1 - p_2)\delta V.$$

Разделим это выражение на $\gamma\delta V = \gamma\delta Q\delta t$, т. е. отнесем его к единице
еса того объема жидкости, который проходит за время δt через живое
чение струйки. При этом полученное уравнение представим в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}. \tag{3-59}$$

Так как сечения $1-1$ и $2-2$ были намечены произвольно, то (3-59) можно
реписать также в виде:

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const (вдоль струйки).}} \tag{3-60}$$

Уравнение (3-59) или (3-60), относящееся к элементарной струйке
деальной жидкости, называется уравнением Даниила Бер-
улли, который в 1738 г. описал (словесно) соотношение величин, входящих
данное уравнение в случае установившегося движения.

Обратим внимание еще на следующее:

1) уравнение Бернулли связывает величины z, p, u;

2) как видно из (3-60), в случае идеальной жидкости сумма трех слагаемых
$\frac{p}{\gamma}$, $\frac{u^2}{2g}$ является постоянной величиной вдоль рассматриваемой
руйки;

3) если указанная постоянная величина для данной струйки равна A_1,
для соседней струйки сумма приведенных трех слагаемых равняется A_2, при-
м в общем случае $A_1 \neq A_2$;

4) зная для данной струйки постоянную величину A, а также зная для
нного сечения струйки из трех величин (z, u, p) какие-либо две величины,
ы можем, пользуясь уравнением Бернулли, найти третью неизвестную величину
я рассматриваемого сечения струйки.

где z', z'', z''', ..., $z^{(n)}$ — возвышения над плоскостью OO граничных сечений, выделяющих элементарные объемы δV.

2. Работа сил гидродинамического давления, действующего на торцовые сечения $1-1$ и $2-2$ отсека AB (со стороны окружающей его жидкости). Эта работа

$$РСД = (p_1\delta\omega_1)\delta s_1 - (p_2\delta\omega_2)\delta s_2 = (p_1 - p_2)\delta V, \tag{3-58}$$

где p_1 и p_2 — гидродинамические давления соответственно в сечениях $1-1$ и $2-2$.

3. Работа внешних сил давления окружающей жидкости на боковую поверхность отсека AB. Эта работа равна нулю, так как силы направлены перпендикулярно к перемещениям жидких частиц, движущихся вдоль боковой поверхности отсека AB.

4. Работа внутренних сил давления (нормальных сил взаимодействия отдельных частиц жидкости, составляющих объем AB). Эти силы являются парными (противоположно направленными) с одинаковыми перемещениями. Сумма работ их равна нулю.

5. Работа внешних и внутренних сил трения равна нулю (силы трения в рассматриваемой нами идеальной жидкости отсутствуют).

3°. **Окончательный вывод.** Используя теорему изменения кинетической энергии, можем написать:

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}\gamma\delta V = (z_1 - z_2)\gamma\delta V + (p_1 - p_2)\delta V.$$

Разделим это выражение на $\gamma\delta V = \gamma\delta Q\delta t$, т. е. отнесем его к единице веса того объема жидкости, который проходит за время δt через живое сечение струйки. При этом полученное уравнение представим в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}. \tag{3-59}$$

Так как сечения $1-1$ и $2-2$ были намечены произвольно, то (3-59) можно переписать также в виде:

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const (вдоль струйки).}} \tag{3-60}$$

Уравнение (3-59) или (3-60), относящееся к элементарной струйке идеальной жидкости, называется уравнением Даниила Бернулли, который в 1738 г. описал (словесно) соотношение величин, входящих в данное уравнение в случае установившегося движения.

Обратим внимание еще на следующее:

1) уравнение Бернулли связывает величины z, p, u;

2) как видно из (3-60), в случае идеальной жидкости сумма трех слагаемых z, $\frac{p}{\gamma}$, $\frac{u^2}{2g}$ является постоянной величиной вдоль рассматриваемой струйки;

3) если указанная постоянная величина для данной струйки равна A_1, то для соседней струйки сумма приведенных трех слагаемых равняется A_2, причем в общем случае $A_1 \neq A_2$;

4) зная для данной струйки постоянную величину A, а также зная для данного сечения струйки из трех величин (z, u, p) какие-либо две величины, мы можем, пользуясь уравнением Бернулли, найти третью неизвестную величину для рассматриваемого сечения струйки.

Выше мы рассматривали частный случай движения жидкости, когда на нее объемных сил действуют только силы тяжести. Однако уравнение (3-60) м получено и для **любой системы объемных сил**, но только такой, **имеет потенциальную функцию** (см. далее § 9-2, где дополн силам тяжести при выводе уравнения Бернулли учитываются еще и объе инерции, действующие на жидкость и имеющие потенциал).

Отмеченный **более общий вывод** уравнения (3-60) выполняе интегрирования дифференциальных уравнений Эйлера, приведенных в § 3-3. В э мы рассматриваем не элементарную струйку жидкости, что мы делали **определенную ее линию тока**, вдоль которой осуществляется инте (в связи с этим уравнение Бернулли (3-60) называют иногда «*интегралом Бе*

Более подробное рассмотрение данного вопроса показывает, что Бернулли (интеграл Бернулли) в виде (3-60) оказывается справедливым (при с отмеченных выше условий):

а) как для **безвихревого (потенциального)** установившегося идеальной жидкости;

б) так и для **вихревого** установившегося движения идеальной жидкос

Дополнительно можно доказать, что для упомянутого **безвихревого** жидкости величина A, о которой мы говорили выше, является **одинак** всех линий тока, образующих поток жидкости: $A_1 = A_2 = A_3 = \dots$. В этом случае (3-60) оказывается справедливым для всей области, занятой жидкостью, а для определенной линии тока.

Необходимо еще подчеркнуть, что при рассмотрении **вихревого** жидкости под скоростью u, входящей в уравнение Бернулли, следует понима как и в случае безвихревого движения) скорость, относящуюся к действи векторному полю скоростей, отражающему рассматриваемое движение жидкос ложению движения на три его вида, поясненные в § 3-4, здесь обращаться н

§ 3-13. ЗНАЧЕНИЯ ТРЕХ СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. **Координата** z называется **отметкой**: z представляет собо шение рассматриваемого живого сечения струйки над горизонтальн скостью OO, которая называется **плоскостью сравнения**.

2. Член p/γ представляет собой метрическую высоту, отвечающую намическому давлению p в точке. сказать, что p/γ является высотой жидкости в пьезометре, приключенно сматриваемому живому сечению стру

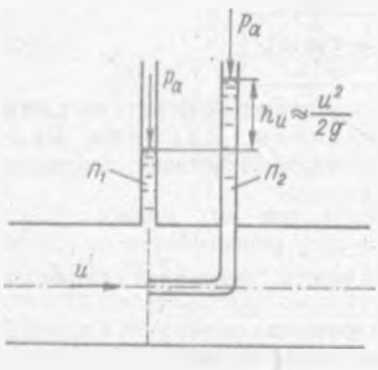


Рис. 3-21. Трубка Пито ($П_2$) и пьезометр ($П_1$)

3. Член $u^2/(2g)$ называется **ск ным напором**. Размерность это гаемого, так же как и размерность д гих слагаемых, линейная. Действитель

$$\left[\frac{u^2}{2g}\right] = \frac{[L^2]}{[t^2]} : \frac{[L]}{[t^2]} = [L],$$

где L – символ длины; t – символ вр

Известно, что величина $u^2/(2g)$ пр ляет собой высоту, с которой в должно свободно (без начальной ск упасть тело, чтобы приобрести скорость u. Величина $u^2/(2g)$ может быт рена при помощи так называемой **трубки Пито** (рис. 3-21)[1], у к

[1] Иногда «трубкой Пито» называют измерительное устройство (прибор), со из двух трубок $П_2$ и $П_1$.

Выше мы рассматривали частный случай движения жидкости, когда на нее в качестве объемных сил действуют только силы тяжести. Однако уравнение (3-60) может быть получено и для любой системы объемных сил, но только такой, которая имеет потенциальную функцию (см. далее § 9-2, где дополнительно к силам тяжести при выводе уравнения Бернулли учитываются еще и объемные силы инерции, действующие на жидкость и имеющие потенциал).

Отмеченный более общий вывод уравнения (3-60) выполняется путем интегрирования дифференциальных уравнений Эйлера, приведенных в § 3-3. В этом случае мы рассматриваем не элементарную струйку жидкости, что мы делали выше, а определенную ее линию тока, вдоль которой осуществляется интегрирование (в связи с этим уравнение Бернулли (3-60) называют иногда «*интегралом Бернулли*»).

Более подробное рассмотрение данного вопроса показывает, что уравнение Бернулли (интеграл Бернулли) в виде (3-60) оказывается справедливым (при соблюдении отмеченных выше условий):

а) как для безвихревого (потенциального) установившегося движения идеальной жидкости;

б) так и для вихревого установившегося движения идеальной жидкости.

Дополнительно можно доказать, что для упомянутого безвихревого движения жидкости величина A, о которой мы говорили выше, является одинаковой для всех линий тока, образующих поток жидкости: $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots$. В этом случае уравнение (3-60) оказывается справедливым для всей области, занятой жидкостью, а не только для определенной линии тока.

Необходимо еще подчеркнуть, что при рассмотрении вихревого движения жидкости под скоростью u, входящей в уравнение Бернулли, следует понимать (также как и в случае безвихревого движения) скорость, относящуюся к действительному векторному полю скоростей, отражающему рассматриваемое движение жидкости: к разложению движения на три его вида, поясненные в § 3-4, здесь обращаться не следует.

§ 3-13. ЗНАЧЕНИЯ ТРЕХ СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. Координата z называется отметкой: z представляет собой возвышение рассматриваемого живого сечения струйки над горизонтальной плоскостью OO, которая называется плоскостью сравнения.

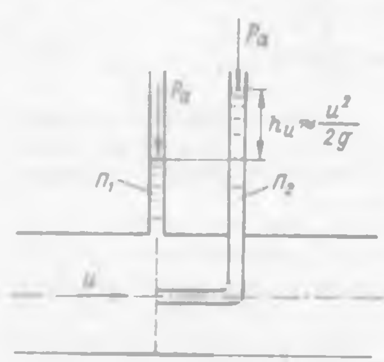


Рис. 3-21. Трубка Пито ($П_2$) и пьезометр ($П_1$)

2. Член p/γ представляет собой пьезометрическую высоту, отвечающую гидродинамическому давлению p в точке. Можно сказать, что p/γ является высотой столба жидкости в пьезометре, приключенном к рассматриваемому живому сечению струйки.

3. Член $u^2/(2g)$ называется скоростным напором. Размерность этого слагаемого, так же как и размерность двух других слагаемых, линейная. Действительно,

$$\left[\frac{u^2}{2g}\right] = \frac{[L^2]}{[t^2]} : \frac{[L]}{[t^2]} = [L],$$

где L — символ длины; t — символ времени.

Известно, что величина $u^2/(2g)$ представляет собой высоту, с которой в пустоте должно свободно (без начальной скорости) упасть тело, чтобы приобрести скорость u. Величина $u^2/(2g)$ может быть измерена при помощи так называемой трубки Пито (рис. 3-21)[1], у которой

[1] Иногда «трубкой Пито» называют измерительное устройство (прибор), состоящее из двух трубок $П_2$ и $П_1$.

нижний конец загнут так, чтобы скорость u была направлена во входное отверстие трубки. Оказывается, что горизонт воды в трубке $П_2$ устанавливается выше горизонта воды в трубке $П_1$ на величину

$$h_u = \frac{u^2}{2g}. \tag{3-61}$$

Измерив величину h_u, находим скорость u в рассматриваемой точке:

$$u = \sqrt{2gh_u}; \tag{3-62}$$

надо, однако, заметить, что полученная формула дает обычно некоторую погрешность. Практически данную формулу переписывают в виде

$$u = \varphi\sqrt{2gh_u}, \tag{3-63}$$

где φ – поправочный коэффициент, который находится для данной трубки Пито путем ее тарирования.

§ 3-14. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. ПОЛНЫЙ НАПОР ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ

Представим на рис. 3-22 элементарную струйку идеальной жидкости; наметим два живых сечения ее ($1-1$ и $2-2$), возвышающиеся над плоскостью сравнения OO на z_1 и z_2; через точки a_1 и a_2, принадлежащие этим

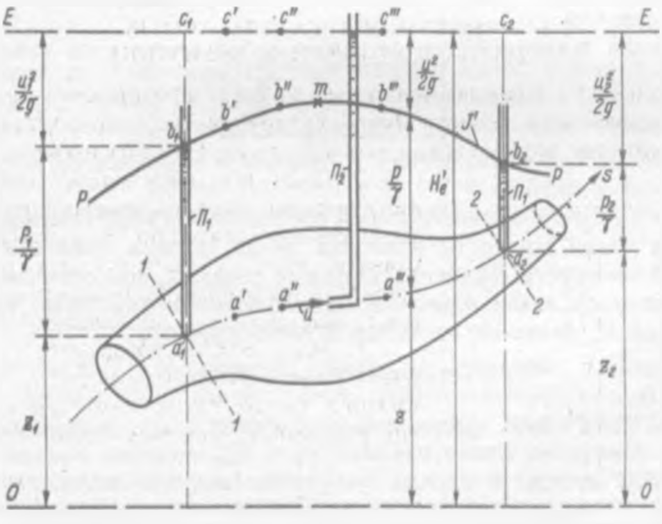


Рис. 3-22. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

$O-O$ – плоскость сравнения; $P-P$ – пьезометрическая линия, $E-E$ – напорная линия, H'_e – полный напор, J' – пьезометрический уклон

сечениям, проведем вспомогательные вертикали. К этим точкам a приключим пьезометры $П_1$; через b_1 и b_2 обозначим точки пересечения горизонтов жидкости в этих пьезометрах и вспомогательных вертикалей; от этих точек b отложим вверх соответствующие величины скоростных напоров $u^2/(2g)$, причем получим точки c_1 и c_2. На оси струйки s наметим целый ряд точек a (a', a'', ...), после чего отметим на чертеже соответствующие точки b и c (b', b'', ...; c', c'', ...), имеющие тот же смысл, что и точки b_1, b_2, c_1, c_2.

Дадим следующие четыре определения:

1. Линия $P-P$, проходящая по точкам b и, следовательно, возвышающаяся на величину p/γ над осью струйки, называется пьезометрической линией. Можно сказать, что пьезометрическая линия проходит по горизонтам жидкости в пьезометрах Π_1, установленных вдоль оси струйки.

2. Линия $E-E$, проходящая по точкам c и, следовательно, возвышающаяся над линией $P-P$ на величину скоростного напора, называется напорной линией. Можно сказать, что напорная линия проходит по горизонтам жидкости в трубках Пито Π_2, установленных вдоль оси струйки.

3. Пьезометрическим уклоном J' струйки в данном ее сечении называется элементарное падение $\left[d\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)\right]$ пьезометрической линии $P-P$, отнесенное к соответствующей элементарной длине (ds) струйки (отмеренной по ее оси):

$$J' = -\frac{d(z+p/\gamma)}{ds}. \tag{3-64}$$

Минус в данном соотношении поставлен с той целью, чтобы величины J' для участка линии $P-P$, поднимающейся кверху, получить отрицательными, а для участка линии $P-P$, опускающейся книзу (см. участок этой линии правее точки m), получить положительными. Следует запомнить, что *пьезометрический уклон положителен, если линия $P-P$ понижается по течению струйки.*

4. Полный напор H'_e представляет собой сумму трех членов: [1]

$$\boxed{H'_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}.} \tag{3-65}$$

С геометрической точки зрения H'_e является возвышением напорной линии над плоскостью сравнения.

Для идеальной жидкости имеем соотношение (3-60). Отсюда заключаем, что в случае такой жидкости напорная линия должна лежать в плоскости, параллельной плоскости сравнения. Другими словами, при *движении идеальной жидкости напорная линия лежит в горизонтальной плоскости; величина же полного напора H'_e является постоянной вдоль струйки*:

$$H'_e = \text{const (вдоль струйки)}. \tag{3-66}$$

К правой и левой частям уравнения Бернулли (3-59) можно прибавить одну и ту же величину p_a/γ. При этом вместо давлений p_1 и p_2, входящих в данное уравнение, получим давления (p_1+p_a) и (p_2+p_a). Как видно, под величинами p/γ в уравнении Бернулли можно понимать не только пьезометрическую высоту, отвечающую избыточному давлению p, но также и пьезометрическую высоту, отвечающую абсолютному давлению p_A. Поэтому, выполняя чертеж на рис. 3-22, мы могли бы пользоваться не открытыми, а закрытыми трубками Π_1 и Π_2; при этом линии $P-P$ и $E-E$ расположились бы на чертеже выше (на величину p_a/γ) соответствующих линий $P-P$ и $E-E$, найденных при помощи открытых трубок Π_1 и Π_2. Надо отметить, однако, что в практике обычно оперируют величинами p/γ, а не величинами p_A/γ (что мы выше и имели в виду).

---

[1] Значком «прим» (′) обозначаются (как здесь, так и ниже) величины, относящиеся к элементарной струйке.

§ 3-15. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим три слагаемых, составляющих полный напор [см. (3-65)], с энергетической точки зрения. Как известно из гидростатики, первые два слагаемых представляют собой потенциальный напор:

$$H = z + \frac{p}{\gamma}, \tag{3-67}$$

т. е. удельную энергию потенциальную, являющуюся мерой потенциальной энергии, принадлежащей единице веса жидкости (в данном случае единице веса жидкости, проходящей через данное живое сечение элементарной струйки).

Третье, новое слагаемое $u^2/(2g)$ – скоростной (кинетический) напор – представляет собой удельную энергию кинетическую, т. е. меру кинетической энергии, принадлежащей единице веса жидкости (также проходящей через данное живое сечение струйки) [1]. Чтобы убедиться в этом, возьмем массу жидкости M, движущуюся со скоростью u. Вес этой массы равен Mg, где g – ускорение силы тяжести. Энергия кинетическая (ЭК) массы M

$$(ЭК) = \frac{Mu^2}{2};$$

энергия кинетическая, отнесенная к единице веса массы M, т. е. удельная энергия кинетическая

$$(УЭК) = \frac{(ЭК)}{\text{вес}} = \frac{(ЭК)}{Mg} = \frac{Mu^2}{2Mg} = \frac{u^2}{2g}.$$

Как видно, полный напор H'_e представляет собой сумму двух напоров: потенциального напора и скоростного (кинетического) напора $h_u = u^2/(2g)$. Можно сказать также, что полный напор представляет собой сумму трех напоров: геометрического z, напора давления p/γ и скоростного напора $u^2/(2g)$, причем сумма первых двух напоров равна удельной энергии потенциальной (УЭП). Энергетическое выражение полного напора можно представить следующей записью:

$$H'_e = \underbrace{\overbrace{\text{УЭ положения}}^{z} + \overbrace{\text{УЭ давления}}^{p/\gamma}}_{\text{УЭП}} + \overbrace{(\text{УЭК})}^{u^2/(2g)} = \text{УЭ полная.}$$

Отсюда видно, что полный напор H'_e (полную удельную энергию) для элементарной струйки следует рассматривать *как меру полной механической энергии, принадлежащей единице веса жидкости, проходящей через данное поперечное сечение струйки*. Достаточно H'_e умножить на вес жидкости, равный $\gamma\delta Q dt$, и мы получим *полную величину механической энергии, проносимой жидкостью через рассматриваемое поперечное сечение струйки за время dt*; как видно, здесь жидкость рассматривается как носитель энергии: она переносит энергию от сечения к сечению.

Согласно Бернулли, для идеальной жидкости имеем соотношение (3-66); следовательно, можно утверждать, что удельная полная механическая энергия, несомая жидкостью, является постоянной вдоль элементарной струйки, если жидкость идеальная. Отдельные удельные энергии вдоль струйки могут изменять свою величину, но сумма их вдоль струйки идеальной жидкости

[1] Можно показать, что $u^2/(2g)$ является потенциальной функцией векторного поля конвективных ускорений частиц жидкости.

§ 3-15. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим три слагаемых, составляющих полный напор [см. (3-65)], с энергетической точки зрения. Как известно из гидростатики, первые два слагаемых представляют собой потенциальный напор:

$$H = z + \frac{p}{\gamma}, \tag{3-67}$$

т. е. удельную энергию потенциальную, являющуюся мерой потенциальной энергии, принадлежащей единице веса жидкости (в данном случае единице веса жидкости, проходящей через данное живое сечение элементарной струйки).

Третье, новое слагаемое $u^2/(2g)$ – скоростной (кинетический) напор – представляет собой удельную энергию кинетическую, т. е. меру кинетической энергии, принадлежащей единице веса жидкости (также проходящей через данное живое сечение струйки)[1]. Чтобы убедиться в этом, возьмем массу жидкости M, движущуюся со скоростью u. Вес этой массы равен Mg, где g – ускорение силы тяжести. Энергия кинетическая ($ЭК$) массы M

$$(ЭК) = \frac{Mu^2}{2};$$

энергия кинетическая, отнесенная к единице веса массы M, т. е. удельная энергия кинетическая

$$(УЭК) = \frac{(ЭК)}{\text{вес}} = \frac{(ЭК)}{Mg} = \frac{Mu^2}{2Mg} = \frac{u^2}{2g}.$$

Как видно, полный напор H'_e представляет собой сумму двух напоров: потенциального напора и скоростного (кинетического) напора $h_u = u^2/(2g)$. Можно сказать также, что полный напор представляет собой сумму трех напоров: геометрического z, напора давления p/γ и скоростного напора $u^2/(2g)$, причем сумма первых двух напоров равна удельной энергии потенциальной ($УЭП$). Энергетическое выражение полного напора можно представить следующей записью:

$$H'_e = \underbrace{\overbrace{\text{УЭ положения}}^{z} + \overbrace{\text{УЭ давления}}^{p/\gamma}}_{УЭП} + \overbrace{(УЭК)}^{u^2/(2g)} = \text{УЭ полная.}$$

Отсюда видно, что полный напор H'_e (полную удельную энергию) для элементарной струйки следует рассматривать *как меру полной механической энергии, принадлежащей единице веса жидкости, проходящей через данное поперечное сечение струйки*. Достаточно H'_e умножить на вес жидкости, равный $\gamma\delta Q dt$, и мы получим *полную величину механической энергии, проносимой жидкостью через рассматриваемое поперечное сечение струйки за время* dt; как видно, здесь жидкость рассматривается как носитель энергии: она переносит энергию от сечения к сечению.

Согласно Бернулли, для идеальной жидкости имеем соотношение (3-66); следовательно, можно утверждать, что удельная полная механическая энергия, несомая жидкостью, является постоянной вдоль элементарной струйки, если жидкость идеальная. Отдельные удельные энергии вдоль струйки могут изменять свою величину, но сумма их вдоль струйки идеальной жидкости

---

[1] Можно показать, что $u^2/(2g)$ является потенциальной функцией векторного поля конвективных ускорений частиц жидкости.

должна быть неизменной. Как видно, рассмотренное уравнение Бернулли выражает известный закон сохранения энергии, примененный к случаю движения жидкости (когда жидкость идеальная, движение установившееся, расход жидкости постоянен по течению).

§ 3-16. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. «ДИФФУЗИЯ» МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ БОКОВУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ [1]

Реальная вязкая жидкость характеризуется наличием сил трения, которые возникают при ее движении. Силы трения в потоке жидкости, состоящем из множества элементарных струек, играют *двоякую* роль:

во-первых, благодаря работе сил трения часть механической энергии жидкости переходит в тепло, которое рассеивается; это обстоятельство должно способствовать уменьшению вдоль струйки (по течению) механической энергии, проносимой жидкостью через поперечные сечения струйки.

во-вторых, в связи с наличием сил трения между отдельными элементарными струйками создаются такие условия, при которых (в общем случае) механическая энергия одной струйки передается другой (соседней) струйке; получается *«диффузия» механической энергии через боковые поверхности струек*; в результате возникает поток энергии, движущейся поперек потока жидкости. Существенно подчеркнуть, что такая *передача энергии* может осуществляться *без передачи вещества* (материи), т.е. жидкости, от одной струйки к другой (соседней струйке).

Вопрос о передаче механической энергии через боковую поверхность движущегося тела (без передачи вещества) легко пояснить на следующем примере. Представим себе, что на поверхности стола лежит небольшая тонкая доска, на которую человек положил руку (ладонь) и передвигает рукой эту доску равномерно по поверхности стола. За счет сил трения между доской и столом кинетическая энергия доски должна уменьшиться, причем движение доски должно замедляться. Однако это движение не замедляется, так как через поверхность соприкасания руки и доски *благодаря силам трения* передается энергия от руки к доске (без передачи «вещества»).

Как показывает подробное рассмотрение этого вопроса, движение (поперечная «диффузия») энергии, например, в горизонтальной напорной трубе происходит от центральной части потока к стенкам русла. За счет этого обстоятельства (см. далее § 4-13) удельная энергия центральных струек соответственно уменьшается по их длине (на некоторую величину $h'_{\Delta E}$); удельная же энергия периферийных (пристенных) струек соответственно возрастает (на величину $h'_{\Delta E}$).

---

[1] Д. Бернулли не рассматривал реальную жидкость; величина h'_f, о которой говорится ниже, была введена в рассматриваемое уравнение другими авторами. Насколько нам известно, вопрос о поперечной (по отношению к потоку жидкости) «диффузии» энергии впервые в достаточно ясной форме осветили в печати Б. А. Бахметев и В. Алэн (см. Bakhmeteff B. A. and Allan W. The Mechanism of Energy Loss in Fluid Friction. Transactions ASCE, vol. 11, 1946, p. 1043 – 1102).

Правильный вид «уравнения Бернулли» для элементарной струйки реальной жидкости [с дополнительным членом ($h'_{\Delta E}$)] впервые был опубликован в нашем учебнике «Гидравлика», издания 1970 г.

Учитывая сказанное, видим, что механическая энергия рассматриваемой элементарной струйки реальной жидкости должна вдоль течения изменяться (в общем случае) за счет двух различных обстоятельств:

а) за счет работы внутри данной струйки сил трения;

б) за счет «диффузии» механической энергии через боковую поверхность струйки, что учитывается поясненной выше величиной $\pm h'_{\Delta E}$.

Имея это в виду, а также учитывая пояснения, приведенные в § 3-15, уравнение баланса энергии для элементарной струйки реальной жидкости следует записать в виде

$$H'_{e_1} = H'_{e_2} \pm h'_{\Delta E} + h'_f, \tag{3-68}$$

или в виде см. (3-65)

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \pm h'_{\Delta E} + h'_f,} \tag{3-69}$$

где H'_{e_1} и H'_{e_2} – соответственно удельные энергии (полные) для живых сечений струйки $1-1$ и $2-2$ (живое сечение $1-1$ расположено выше по течению сечения $2-2$); h'_f – мера полной механической энергии, теряемой (переходящей в тепло в связи с работой сил трения) единицей веса жидкости при перемещении ее вдоль данной элементарной струйки от живого сечения $1-1$ до живого сечения $2-2$. Можно сказать, что h'_f есть потеря удельной энергии, обусловленная трением.

Величину h'_f назовем «потерей напора *на трение*»; величину же $h'_{\Delta E}$ – «диффузионным изменением напора». Сумму величин

$$h'_f \pm h'_{\Delta E} = H'_{e_1} - H'_{e_2} = \delta H'_e,$$

по-видимому, рационально именовать *«полным изменением напора»* (*для данной элементарной струйки реальной жидкости*). Легко видеть, что величина $\delta H'_e$ для всех элементарных струек, составляющих поток жидкости в достаточно длинной напорной трубе (при истечении под уровень) является одинаковой (равной разности уровней жидкости в двух рассматриваемых сосудах, соединяемых данной трубой). Следует еще отметить, что величина суммы положительных и отрицательных значений $h'_{\Delta E}$, подсчитанных для всех струек, составляющих данный поток жидкости, всегда, разумеется, должна равняться нулю

$$\sum h'_{\Delta E} = 0.$$

Только для некоторых струек можем получить $h'_{\Delta E} = 0$, причем уравнение (3-69) для этих струек запишется в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_f, \tag{3-70}$$

где h'_f в данном частном случае оказывается равным

$$h'_f = H'_{e_1} - H'_{e_2}. \tag{3-71}$$

Пояснив таким образом уравнение Бернулли (3-69), относящееся к одной элементарной струйке реальной жидкости, далее распространим это уравнение на целый поток реальной жидкости, состоящий из множества струек. Однако прежде чем обратиться к этой задаче, остановимся вначале (в § 3-17 и 3-18) на рассмотрении двух вспомогательных положений, используемых при переходе от элементарной струйки к целому

Учитывая сказанное, видим, что механическая энергия рассматриваемой элементарной струйки реальной жидкости должна вдоль течения изменяться (в общем случае) з а с ч е т д в у х р а з л и ч н ы х о б с т о я т е л ь с т в:

а) за счет работы внутри данной струйки сил трения;

б) за счет «диффузии» механической энергии через боковую поверхность струйки, что учитывается поясненной выше величиной $\pm h'_{\Delta E}$.

Имея это в виду, а также учитывая пояснения, приведенные в § 3-15, уравнение баланса энергии для элементарной струйки р е а л ь н о й жидкости следует записать в виде

$$H'_{e_1} = H'_{e_2} \pm h'_{\Delta E} + h'_f, \tag{3-68}$$

или в виде см. (3-65)

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \pm h'_{\Delta E} + h'_f,} \tag{3-69}$$

где H'_{e_1} и H'_{e_2} – соответственно удельные энергии (полные) для живых сечений струйки *1 – 1* и *2 – 2* (живое сечение *1 – 1* расположено выше по течению сечения *2 – 2*); h'_f – мера полной механической энергии, теряемой (переходящей в тепло в связи с работой сил трения) единицей веса жидкости при перемещении ее вдоль данной элементарной струйки от живого сечения *1 – 1* до живого сечения *2 – 2*. Можно сказать, что h'_f есть потеря удельной энергии, о б у с л о в л е н н а я т р е н и е м.

Величину h'_f назовем «потерей напора *на трение*»; величину же $h'_{\Delta E}$ – «диффузионным изменением напора». Сумму величин

$$h'_f \pm h'_{\Delta E} = H'_{e_1} - H'_{e_2} = \delta H'_e,$$

по-видимому, рационально именовать *«полным изменением напора»* (*для данной элементарной струйки реальной жидкости*). Легко видеть, что величина $\delta H'_e$ для всех элементарных струек, составляющих поток жидкости в достаточно длинной напорной трубе (при истечении под уровень) является о д и н а к о в о й (равной разности уровней жидкости в двух рассматриваемых сосудах, соединяемых данной трубой). Следует еще отметить, что величина суммы положительных и отрицательных значений $h'_{\Delta E}$, подсчитанных для всех струек, составляющих данный поток жидкости, всегда, разумеется, должна равняться нулю

$$\sum h'_{\Delta E} = 0.$$

Только для некоторых струек можем получить $h'_{\Delta E} = 0$, причем уравнение (3-69) для этих струек запишется в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_f, \tag{3-70}$$

где h'_f в данном частном случае оказывается равным

$$h'_f = H'_{e_1} - H'_{e_2}. \tag{3-71}$$

Пояснив таким образом уравнение Бернулли (3-69), относящееся к одной элементарной струйке р е а л ь н о й жидкости, далее распространим это уравнение н а ц е л ы й п о т о к р е а л ь н о й ж и д к о с т и, состоящий из множества струек. Однако прежде чем обратиться к этой задаче, остановимся вначале (в § 3-17 и 3-18) на рассмотрении двух в с п о м о г а т е л ь н ы х п о л о ж е н и й, используемых при переходе от элементарной струйки к целому потоку. Дополнительно в § 3-19 рассмотрим еще понятие о полном напоре, относящемся к целому потоку.[1]

§ 3-17. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ЖИВЫХ СЕЧЕНИЯХ ПОТОКА ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТРУЙНОМ И ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ (ПЕРВОЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим случай установившегося движения, причем будем считать, что объемными силами, действующими на жидкость, являются только силы тяжести. Напомним, что при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях расчетные живые сечения являются плоскими (§ 3-8, п. 2°).

Представим на рис. 3-23 плавно изменяющийся поток, причем наметим два плоских живых сечения $1-1$ и $2-2$; к различным точкам этих сечений присоединим пьезометры $П$. Как показывает опыт, в случае указанного движения горизонт воды во всех пьезометрах $П$, присоединенных к разным точкам одного и того же сечения (например, сечения $1-1$), устанавливается на одном и том же уровне. Для различных точек данного живого сечения величины z и p/γ имеют разное значение, однако сумма их постоянна:

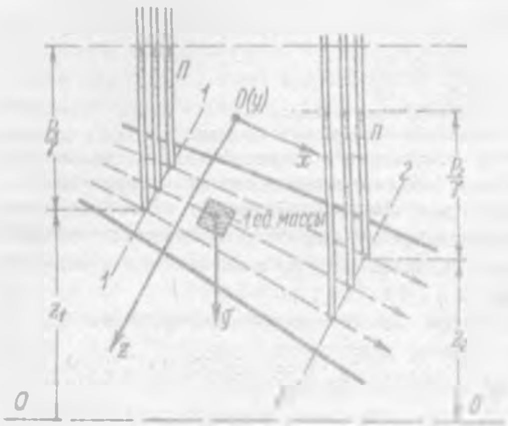


Рис. 3-23. Распределение давления в плоских живых сечениях

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{const (для данного живого сечения),}} \qquad (3\text{-}72)$$

если движение жидкости плавно изменяющееся или параллельноструйное.

В другом живом сечении (например, в сечении $2-2$) сумма $z + \dfrac{p}{\gamma}$ будет иная, но постоянная для всех точек этого сечения. Выражение (3-72) можно прочесть так: *при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях сумма отметки z и пьезометрической высоты $\dfrac{p}{\gamma}$ для всех точек данного плоского живого сечения постоянна.*

Вспомним понятие потенциального напора:

$$H = z + \frac{p}{\gamma}. \qquad (3\text{-}73)$$

---

[1] Отметим, что «интеграл Бернулли» (см. конец § 3-12) относится только к линии тока, которая не имеет тела. Поэтому геометрическая интерпретация «Интеграла Бернулли» должна осуществляться для реальной жидкости без учета энергетических соображений, поясненных выше. Именно в связи с этим «Интегралом Бернулли», как правило, нерационально пользоваться в технической механике жидкости.

Ранее было доказано (§ 2-8), что в случае **покоящейся** жидкости

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const (по всему объему).} \tag{3-74}$$

Таков закон гидростатики. Как видно, этот закон в случае гидродинамики относится только к живым сечениям; в связи с этим часто говорят так: *при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях жидкости распределение давления в данном плоском живом сечении потока следует гидростатическому закону.* В этом и заключается **первое вспомогательное положение**, которое понадобится нам при переходе от элементарной струйки к целому потоку.

Данное положение можно обосновать и теоретически, пользуясь дифференциальными уравнениями движения (3-6). Располагая оси координат так, чтобы оси Oy и Oz лежали в плоскости, параллельной живым сечениям (а ось Ox была направлена вдоль течения), можем написать

$$\frac{du_y}{dt} = \frac{du_z}{dt} = 0, \tag{3-75}$$

поскольку эти выражения представляют собой составляющие ускорений, лежащих в плоскости живых сечений; величиной же таких составляющих в случае плавно изменяющегося движения мы должны пренебрегать (см. § 3-8, п. 2°).

При наличии соотношений (3-75) два последних дифференциальных уравнения Эйлера (3-6) перепишутся в виде

$$\phi_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \qquad \phi_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{3-76}$$

Эти два уравнения движения ничем не отличаются от соответствующих двух дифференциальных уравнений равновесия жидкости (см. § 2-3). Так как именно уравнениям (3-76) подчиняется распределение давления в плоскости живых сечений, то заключаем, что в этих сечениях при плавно изменяющемся, а также при параллельноструйном движении, давление будет распределяться так же, как и в покоящейся жидкости.

Здесь необходимо сделать следующую оговорку. Уравнения движения (3-6) были получены для идеальной жидкости. Поток же, представленный на рис. 3-23, образован реальной жидкостью, отличающейся от идеальной наличием сил трения. Однако влиянием сил трения в данном случае можно пренебречь. Поэтому уравнения (3-76) здесь оказываются справедливыми и для реальной (вязкой) жидкости.

§ 3-18. ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПО ПЛОСКОМУ ЖИВОМУ СЕЧЕНИЮ НА ВЕЛИЧИНУ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И ВЕЛИЧИНУ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НЕКОТОРОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ, ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННОЕ ЖИВОЕ СЕЧЕНИЕ (ВТОРОЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим две разные схемы потока, имеющего плоские живые сечения; **схему** *а* (рис. 3-24), на которой изображен продольный разрез **действительного потока**, характеризуемого неравномерным распределением скоростей по живому сечению AB, и **схему** *б* (рис. 3-24), на которой изображен продольный разрез соответствующего **расчетного (условного) потока**, характеризуемого тем обстоятельством, что все частицы жидкости проходят через соответствующее живое сечение $A'B'$ с одинаковой скоростью, равной средней скорости v (размеры живых сечений AB и $A'B'$ и расходы Q данных потоков считаются одинаковыми).

Обозначим через $КД\,(M)$ и $КЭ\,(M)$ соответственно количество движения и кинетическую энергию некоторой массы M жидкости, проходящей через живое сечение AB за время dt (рис. 3-24, *а*). Через $[КД(M)]_{ср}$ и

$[КЭ(M)]_{ср}$ обозначим соответственно количество движения и кинетическую энергию той же массы M жидкости, проходящей через живое сечение $A'B'$ за то же время dt (рис. 3-24, *б*).

Как видно, величины $КД(M)$ и $КЭ(M)$ должны подсчитываться в предположении, что скорости u в разных точках рассматриваемого живого сечения различны (см. схему *а*); величины $КД(M)$ и $КЭ(M)$ будем называть действительными. Величины же $[КД(M)]_{ср}$ и $[КЭ(M)]_{ср}$ должны подсчитываться в предположении, что скорости u во всех точках рассматриваемого живого сечения одинаковы и равны средней скорости v (см. схему *б*); величины $[КД(M)]_{ср}$ и $[КЭ(M)]_{ср}$ условно будем называть «средними» (вычисленными по средней скорости v).

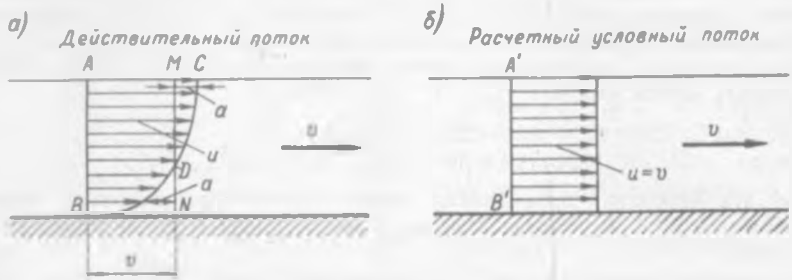


Рис. 3-24. К вопросу о коэффициентах α_0 и α

Наша задача должна заключаться в количественном сопоставлении величин $КД$ или $КЭ$, найденных для схемы *а* и схемы *б*. Другими словами, мы должны выяснить вопрос о том, как влияет неравномерность распределения скоростей по живому сечению (см. схему *а*) на величины $КД$ и $КЭ$ массы M, найденные исходя из рассмотрения схемы *б*. Данный вопрос будет решен, если мы найдем величины отношений:

$$КД(M):[КД(M)]_{ср} \text{ и } КЭ(M):[КЭ(M)]_{ср}.$$

Обращаясь к рассмотрению этого вопроса, выпишем предварительно следующие соотношения, справедливость которых должна быть ясна из предыдущего изложения [см. формулы (3-29), (3-30), (3-31)]:

$$dQ = u\,d\omega;\ Q = \int_\omega u\,d\omega = v\omega; \tag{3-77}$$

$$dV = dt\,dQ;\ V = dt\int_\omega u\,d\omega = v\omega\,dt; \tag{3-78}$$

$$dM = \rho dV = \rho u d\omega\,dt; \tag{3-79}$$

$$M = \rho\,dt\int_\omega u\,d\omega = \rho v\omega\,dt. \tag{3-80}$$

Здесь: $d\omega$ – площадь элементарной площадки живого сечения; v – средняя скорость; V – объем жидкости, проходящей за время dt через живое сечение; M – масса этого объема.

…ияние неравномерности распределения скоростей u по плоскому …ению на количество движения (КД) массы M. Действительное … движения массы dM:

$$КД(dM) = u\,dM = \rho u^2\, d\omega\, dt. \tag{3-81}$$

…ьное количество движения массы M:

$$КД(M) = \int_\omega КД(dM) = \rho\, dt \int_\omega u^2\, d\omega. \tag{3-82}$$

…количество движения массы M:

$$[КД(M)]_{ср} = vM = v(\rho v\omega\, dt) = \rho v^2 \omega\, dt. \tag{3-83}$$

…о подчеркнуть, что[1]

$$КД(M) > [КД(M)]_{ср}. \tag{3-84}$$

…тельно,

$$КД(M) = \rho dt \int_\omega u^2 d\omega = \rho dt \int_\omega (v + a)^2 d\omega, \tag{A}$$

…оложительная или отрицательная величина, переменная по живому сечению, …. рис. 3-24, *а*).

…мотрения этого чертежа видно, что

$$\int_\omega a\, d\omega = 0, \tag{Б}$$

…площадь MCD должна равняться площади BDN. Имея это в виду, выра…ожно представить так:

$$= \rho\, dt \left[\int_\omega v^2\, d\omega + 2\int_\omega v\, a\, d\omega + \int_\omega a^2\, d\omega\right] = \rho\, dt \left[v^2 \int_\omega d\omega + 2v \int_\omega a\, d\omega + \int_\omega a^2\, d\omega\right] =$$

$$\rho\, dt \left[v^2 \omega + \int_\omega a^2\, d\omega\right] = \rho v^2 \omega\, dt + \rho\, dt \int_\omega a^2\, d\omega = [КД(M)]_{ср} + \rho\, dt \int_\omega a^2\, d\omega,$$

…нее слагаемое всегда является положительным и обращается в нуль, только …0, т. е. когда $u = v$ (имеем равномерное распределение действительных ско…живому сечению); это положение и подтверждает справедливость (3-84).

…лим (3-82) на (3-83):

$$\frac{КД(M)}{[КД(M)]_{ср}} = \frac{\int_\omega u^2\, d\omega}{v^2 \omega} = \alpha_0 \text{ (обозначение).} \tag{3-85}$$

…зуясь введенным обозначением α_0, можем написать:

$$\int_\omega u^2\, d\omega = \alpha_0 v^2 \omega; \tag{3-86}$$

$$КД(M) = \alpha_0 [КД(M)]_{ср} = \alpha_0 \rho v^2 \omega\, dt = \alpha_0 \rho v Q\, dt. \tag{3-87}$$

…-87) ясно, что *действительная величина количества движения массы … M, проходящей за время dt через рассматриваемое живое сечение, …овной («средней») величине количества движения* (подсчитанной в пред…ии, что все частицы жидкости проходят данное живое сечение с оди…

[1] …, например, всегда имеем: $(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant d^2 + d^2 + d^2$, где $d = \dfrac{a + b + c}{3}$

наковой скоростью v), *умноженной на некоторый безразмерный поправочный коэффициент* α_0. Следует запомнить, что поправочный коэффициент α_0 равен отношению действительного количества движения к «среднему» количеству движения массы M.

2°. Влияние неравномерности распределения скоростей u по плоскому живому сечению на кинетическую энергию ($КЭ$) массы M. Действительная кинетическая энергия массы dM [см. (3-79)]:

$$КЭ(dM) = \frac{u^2\, dM}{2} = \frac{1}{2}\rho u^3\, d\omega\, dt. \tag{3-88}$$

Действительная кинетическая энергия всей массы M:

$$КЭ(M) = \frac{1}{2}\rho\, dt \int_\omega u^3\, d\omega. \tag{3-89}$$

«Средняя» (условная) кинетическая энергия массы M:

$$[КЭ(M)]_{ср} = \frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2}\rho v^3 \omega\, dt. \tag{3-90}$$

Подчеркнем, что [1]

$$КЭ(M) > [КЭ(M)]_{ср}. \tag{3-91}$$

Разделим (3-89) на (3-90):

$$\frac{КЭ(M)}{[КЭ(M)]_{ср}} = \frac{\int_\omega u^3\, d\omega}{v^3\omega} = \alpha \text{ (обозначение)}. \tag{3-92}$$

Пользуясь введенным обозначением α, можем написать:

$$\int_\omega u^3\, d\omega = \alpha v^3 \omega; \tag{3-93}$$

$$КЭ(M) = \alpha [КЭ(M)]_{ср} = \alpha \frac{1}{2}\rho v^3 \omega\, dt. \tag{3-94}$$

Из (3-94) ясно, что *действительная кинетическая энергия массы жидкости M, проходящей за время dt через рассматриваемое живое сечение, равна условной («средней») кинетической энергии* (подсчитанной исходя из средней скорости v), *умноженной на некоторый безразмерный поправочный коэффициент* α. Следует запомнить, что поправочный коэффициент α равен отношению действительной кинетической энергии к «средней» кинетической энергии массы M.

3°. Численные значения коэффициентов α_0 и α. Можно показать [см., например, пояснения, относящиеся к формуле (3-84)], что α_0 и α всегда больше единицы; только при равномерном распределении скорости u по живому сечению, что в практике встречается очень редко, α_0 и α оказываются равными единице. Чем больше неравномерность распределения скоростей по живому сечению, тем больше значения α_0 и α.

При равномерном движении жидкости (см. § 3-11, п. 1°) α_0 и α, установленные на основании опытов, часто оказываются равными: [2]

$$\alpha_0 \approx 1{,}03 \div 1{,}05; \quad \alpha \approx 1{,}10 \div 1{,}15.$$

---

[1] Доказательство этого положения аналогично доказательству положения (3-84).

[2] Эти численные значения α и α_0 имеют место в случае так называемого турбулентного режима движения жидкости (см. § 3-23).

При неравномерном движении значения α_0 и α могут иногда значи-
но отличаться от единицы. Вместе с тем очень часто в практике мы встре-
такие случаи движения жидкости, когда α_0 и α все же достаточно близки
единице. Поэтому при выполнении гидравлических расчетов коэффициенты
и α часто принимаются равными единице, т. е. при расчетах их вовсе
учитывают.

Коэффициенты α_0 и α удобно именовать: α_0 — *коррективом количества* *жения потока и* α — *коррективом кинетической энергии потока.* Иногда их ывают: α_0 — коэффициентом Буссинеска и α — коэффициентом Кориолиса.

§ 3-19. ПОЛНЫЙ НАПОР ДЛЯ ЦЕЛОГО ПОТОКА

Под «целым» потоком понимаем поток, имеющий поперечные сечения ко-ных размеров.

По-прежнему рассматриваем только параллельноструйное и плавно изме-ющееся движения, т. е. случай, когда расчетные живые сечения плоские, причем ем пользоваться понятием средней скорости v.

Каждая элементарная струйка в данном живом сечении потока имеет общем случае) свой полный напор H'_e, выражаемый зависимостью (3-65). обы получить полный напор H_e, являющийся гидродинамиче-ой характеристикой всего живого сечения, осредняем по оскости живого сечения значения H'_e, принадлежащие отдельным струйкам. и этом рассуждаем следующим образом:

1) умножаем выражение (3-65) на вес жидкости, протекающей за время dt рез живое сечение элементарной струйки $d\omega$, т. е. на $\gamma\, dQ\, dt$; при этом лучаем полную механическую энергию, проносимую жидкостью через данное перечное сечение струйки за время dt;

2) интегрируем полученное выражение по всей плоскости живого сечения ω; и этом получаем полную механическую энергию, проносимую жидкостью за емя dt через все живое сечение потока;

3) делим полученную энергию на $\gamma Q\, dt$, причем получаем *меру механиче-ой энергии, проносимой в среднем одной единицей веса жидкости через данное живое сечение потока; эту меру мы и принимаем за полный напор* H_e, *относя-щийся ко всему рассматриваемому живому сечению;*

4) можно видеть (см. ниже), что такая величина H_e является некоторой редней среди величин H'_e.

Следуя по такому пути и учитывая, что $dQ = u\,d\omega$, а $Q = v\omega$, можем аписать:

$$H_e = \frac{\int_\omega H'_e(\gamma\, dQ\, dt)}{\gamma Q\, dt} = \frac{\int_\omega \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) dQ}{Q} = \frac{\int_\omega \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) dQ}{Q} + \frac{\int_\omega \frac{u^2}{2g}\, u\, d\omega}{v\omega} \qquad (3\text{-}95)$$

ли, сообразуясь с (3-72),

$$H_e = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \frac{\int_\omega dQ}{Q} + \frac{\frac{1}{2g}\int_\omega u^3\, d\omega}{v\omega}; \qquad (3\text{-}96)$$

учтя, наконец, (3-93), имеем:

$$H_e = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{2g}\frac{(\alpha v^3 \omega)}{v\omega}, \tag{3-97}$$

что и приводит нас к окончательному выражению для H_e:

$$\boxed{H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}} \tag{3-98}$$

Как видно, в случае целого потока скоростной напор, т. е. удельная кинетическая энергия (являющаяся мерой кинетической энергии, проносимой в среднем единицей веса жидкости, проходящей данное живое сечение) выражается через среднюю скорость v в виде:

$$\boxed{h_v = \frac{\alpha v^2}{2g},} \tag{3-99}$$

где α — корректив кинетической энергии.

Что касается величины $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$, то она, как известно, представляет собой потенциальный напор, являющийся одинаковым (в данном плоском живом сечении) для всех элементарных струек, пересекающих это сечение (см. § 3-17).

Дополнительно необходимо отметить следующее. Если бы мы разбили поток на отдельные струйки так, чтобы все они имели одинаковые элементарные расходы (равные δQ), то при этом для H_e можно было бы написать выражение:

$$H_e = \frac{\int\limits_{\omega} H'_e (\gamma \delta Q\, dt)}{\gamma Q\, dt} = \frac{\sum\limits_1^n H'_e}{(\gamma Q\, dt):(\gamma\, dQ\, dt)} = \frac{\sum\limits_1^n H'_e}{n}, \tag{3-100}$$

где n — число выделенных струек.

Как видно из зависимости (3-100), величину полного напора H_e можно трактовать как *среднеарифметическую величину среди напоров H'_e, относящихся к отдельным элементарным струйкам, слагающим поток* (и имеющим *одинаковые* расходы).

§ 3-20. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ («УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ») ДЛЯ ЦЕЛОГО ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ (ВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ[1]

Будем рассматривать целый поток жидкости, ограниченный с боков водонепроницаемыми стенками русла, а также при безнапорном движении еще и свободной поверхностью. Ставя такое условие, мы остановимся только на случае, когда через боковую поверхность потока отсутствует приток (или отток) жидкости, а также диффузия энергии (см. § 3-16).

[1] Данное уравнение принято называть уравнением Бернулли. Однако Д. Бернулли рассматривал только соотношение (3-60), приведенное в § 3-12 (для случая установившегося движения идеальной жидкости, подверженной действию только сил тяжести). Уравнения, описываемые в настоящем параграфе и в § 3-16 (а также приводимые далее в гл. 9 для неустановившегося движения), были составлены в дальнейшем на основании как работ Д. Бернулли, так и работ других авторов (Эйлера, Кориолиса, Буссинеска, Вейсбаха и др.).

даря работе сил трения полная удельная энергия жидкости вдоль низ по течению) должна уменьшаться. Поэтому для реальной (вязкой) должны написать:

$$H_{e_1} > H_{e_2},$$

H_{e_2} – полные напоры (полные удельные энергии) в живых сечениях: том выше по течению, и $2-2$, взятом ниже по течению (рис. 3-25).
в виду это соотношение и зависимость (3-98), гидравлическое уравнетической энергии («уравнение Бернулли») для целого потока можем ить в виде[1] (предполагая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$):

$$\boxed{+\frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_f,} \qquad (3\text{-}101)$$

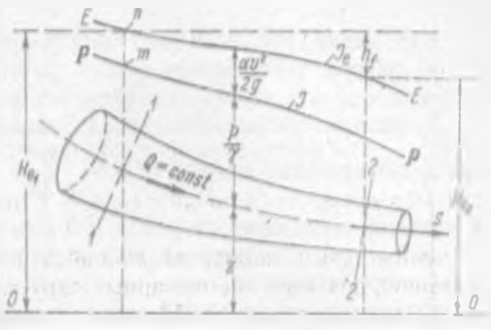


Рис. 3-25. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для целого потока реальной жидкости при установившемся движении

$O-O$ – плоскость сравнения, $P-P$ – пьезометрическая линия, $E-E$ – напорная линия, H_{e_1} и H_{e_2} – полные напоры, h_f – потеря напора, J – пьезометрический уклон, J_e – гидравлический уклон

е наглядно (с энергетических) в виде:

$$\gamma Qt) - H_{e_2}(\gamma Qt) = h_f(\gamma Qt), \qquad (3\text{-}101')$$

$$h_f = H_{e_1} - H_{e_2} \qquad (3\text{-}102)$$

тся потерей напора; h_f олная энергия, теряемая в ем единицей веса жидкости от первого до второго сечесчет внешних сил трения, е внутренних сил трения, конеравномерно распределяются ивым сечениям (см. § 3-16, ке § 4-14). В левой части ния (3-101'), как видно, представлена разность механических энергий, имых жидкостью, через сечения потока $(1-1)$ и $(2-2)$.

рис. 3-25, аналогичном рис. 3-22, показаны пьезометрическая линия $P-P$ орная линия $E-E$ для целого потока. Но в отличие от рис. 3-22 . 3-25 напорная линия $E-E$ оказывается негоризонтальной. Эта понижается по течению, поскольку H_e по течению убывает, причем ние линии $E-E$ на протяжении от живого сечения $1-1$ до живого сече--2 представляет собой потерю напора h_f.

лементарное снижение $\left[-d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)\right]$ напорной линии, отнесенное

тветствующей элементарной длине ds, отмеренной по оси потока, зается гидравлическим уклоном и обозначается через J_e, при-J_e может быть выражено одной из следующих трех зависимостей:

$$J_e = -\frac{dH_e}{ds}; \qquad (3\text{-}103)$$

$$J_e = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{ds}; \qquad (3\text{-}104)$$

[1] Для изотермического течения несжимаемой жидкости.

$$J_e = + \frac{dh_f}{ds}. \tag{3-105}$$

Величина J_e, в общем случае переменная по длине потока, всегда положительна (при установившемся движении): $J_e > 0$; только для случая идеальной жидкости $J_e = 0$. Понятие пьезометрического уклона в данном случае сохраняется полностью (см. § 3-14). Этот уклон в случае целого потока обозначается через J и выражается зависимостью:

$$J = - \frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right). \tag{3-106}$$

Как видно, рис. 3-25 дает нам полную гидродинамическую картину:

а) фигура, заключенная между линией $P-P$ и осью s потока, представляет собой эпюру изменения величины p/γ вдоль потока;

б) фигура, заключенная между линиями $P-P$ и $E-E$, дает эпюру изменения величины скоростного напора $\frac{\alpha v^2}{2g}$; следовательно, эта фигура выражает и характер изменения скорости v вдоль потока;

в) фигура, заключенная между линией $P-P$ и плоскостью сравнения OO, дает эпюру изменения потенциального напора вдоль потока;

г) фигура, заключенная между линией $E-E$ и плоскостью сравнения OO, представляет собой эпюру изменения полного напора вдоль потока.

Уравнение Бернулли (3-101) выражает связь между гидродинамическими элементами двух живых сечений; оно как бы «связывает», соединяет два живых сечения $1-1$ и $2-2$ (из которых сечение $1-1$ всегда расположено выше по течению, чем сечение $2-2$).

Величины z_1 и z_2, входящие в (3-101) представляют собой превышения над плоскостью сравнения OO точек соответствующих живых сечений; величины p_1/γ и p_2/γ – пьезометрические высоты для этих точек. Естественно, может возникнуть вопрос о том, какие именно точки живых сечений $1-1$ и $2-2$ следует рассматривать, когда мы соединяем эти сечения уравнением Бернулли. При построении пьезометрической линии $P-P$ для целого потока, представляющей собой линию, проведенную по горизонтам жидкости в воображаемых пьезометрах, приключенных к разным живым сечениям, также может возникнуть вопрос о том, к каким именно точкам живых сечений следует мысленно присоединить упомянутые пьезометры.

Ответ на этот вопрос вытекает из сказанного в § 3-17: так как для данного живого сечения при плавно изменяющемся и параллельноструйном движениях $z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$, то безразлично, какие точки живых сечений будем рассматривать и к каким точкам этих сечений будем присоединять пьезометры; высотное положение точки линии $P-P$, отвечающей данному живому сечению, будет всегда одинаковым, какую бы точку этого сечения мы ни рассматривали. На рис. 3-26 показан поток; для построения линии $P-P$ мы приключили пьезометры $П$ в сечении $1-1$ к самой верхней точке, в сечении $2-2$ – к средней точке, в сечении $3-3$ – к самой нижней точке живого сечения и т. д.

Следует помнить, что любая пара точек, лежащих на одной вертикали и принадлежащих линиям $P-P$ и $E-E$ (см., например, точки m и n на рис. 3-25), относится к определенному живому сечению потока (например, к сечению $1-1$ на рис. 3-25), а не к точкам живого сечения.

Из всего сказанного выше вытекают **три основных условия применимости** уравнения Бернулли (3-101) к потоку жидкости (эти три условия должны соблюдаться одновременно).

1-е условие. *Расход Q между сечениями 1—1 и 2—2 должен быть постоянен* (Q = const).

2-е условие. *Движение жидкости должно быть установившимся*, поскольку при выводе уравнения (3-60), положенного в основу уравнения (3-101), считали, что кинетическая энергия жидкости, заключенной в объеме между сечениями *1—1* и *2—2* (в пределах отсека *A'B*, показанного на рис. 3-20) не изменяется во времени.[1]

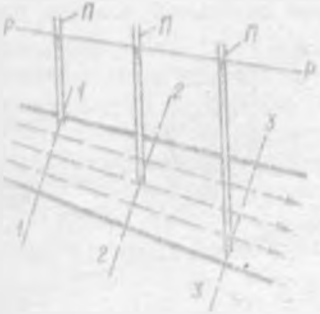


Рис. 3-26. К построению линии $P-P$

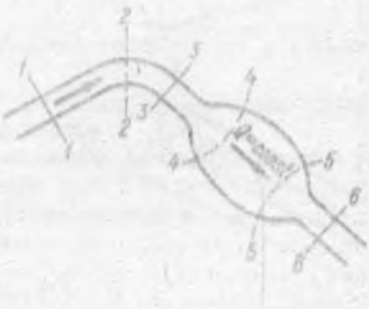


Рис. 3-27. Условия применения уравнения Бернулли

3-е условие. *Движение жидкости в сечениях 1—1 и 2—2, соединяемых уравнением Бернулли, должно быть параллельноструйным или плавно изменяющимся; в промежутке же между сечениями 1—1 и 2—2 движение жидкости может быть и резко изменяющимся.* Это условие вытекает из следующих соображений. Если бы в сечениях *1—1* и *2—2* движение было резко изменяющимся (расчетные живые сечения *1—1* и *2—2* были бы криволинейными), то для этих сечений не имело бы место условие $z + \frac{p}{\gamma}$ = const. Такое положение не позволило бы нам получить выражение (3-98) для полного напора H_e и, следовательно, писать неравенство $H_{e_1} > H_{e_2}$.

Что касается промежутка между сечениями *1—1* и *2—2*, то обстоятельства движения на длине этого промежутка непосредственно учитываются в уравнении Бернулли (3-101) только членом h_f. Если мы имеем возможность определить h_f для участка резко изменяющегося движения (см. гл. 4),[2] то наличие такого участка не может препятствовать применению уравнения Бернулли.

На рис. 3-27 представлен поток, имеющий участки плавно изменяющегося движения (на этих участках живые сечения показаны сплошными линиями) и участки резко изменяющегося движения (где живые сечения показаны штриховыми линиями). Очевидно, уравнением Бернулли можно соединять между собой сечения *1* и *3*, *3* и *6* и т. д.; соединять же, например, сечения *1* и *2* или *2* и *4* и т. д. уравнением Бернулли нельзя.

---

[1] В гл. 9 будет получено уравнение Бернулли, относящееся к неустановившемуся движению (§ 9-2; 9-3; 9-4).

[2] В этой главе рассматриваются способы определения потерь напора h_f.

§ 3-21. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ФОРМЕ НАПОРНОЙ И ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛИНИЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ О СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1°. **Случай равномерного движения жидкости.** Рассмотрим напорное и безнапорное движения.

Напорное движение. Представим на рис. 3-28 напорный круглоцилиндрический грубопровод диаметром D и длиной l. Условия протекания жидкости на каждой отдельной единице длины этого

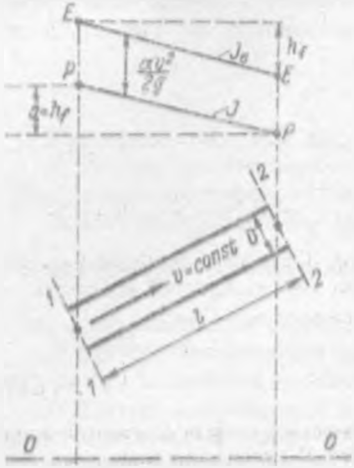


Рис. 3-28. Линии $P-P$ и $E-E$ для равномерного напорного движения

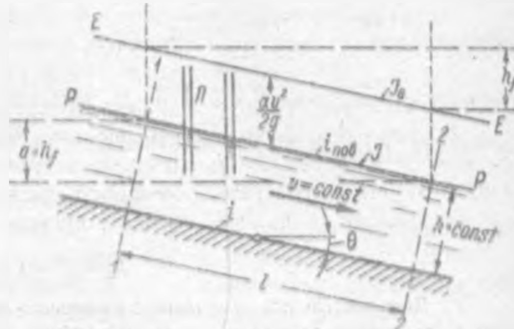


Рис. 3-29. Линии $P-P$ и $E-E$ для равномерного безнапорного движения

трубопровода будут одинаковы. Следовательно, потеря напора на каждой единице длины трубы также будет одинакова; падение напорной линии $E-E$ на каждой единице длины трубы также будет одинаково; уклон напорной линии $E-E$ будет постоянен вдоль потока $J_e = \text{const}$ (вдоль потока).

Отсюда заключаем, что *в случае равномерного движения напорная линия $E-E$ представляет собой наклонную прямую.*

Так как для равномерного движения

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = \text{const (вдоль потока)}, \tag{3-107}$$

то, следовательно, *пьезометрическая линия $P-P$ в случае равномерного движения должна представлять собой прямую, параллельную напорной линии:*

$$PP \parallel EE.$$

Рис. 3-30. Линии $P-P$ и $E-E$ для неравномерного безнапорного движения

Падение линии $E-E$ на длине l выражает потерю напора. В данном частном случае (*равномерное движение*) *падение пьезометрической линии $P-P$, равное a, также выражает собой потерю напора:*

$$a = h_f. \tag{3-108}$$

§ 3-21. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ФОРМЕ НАПОРНОЙ И ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛИНИЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ О СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1°. Случай равномерного движения жидкости. Рассмотрим напорное и безнапорное движения.

Напорное движение. Представим на рис. 3-28 напорный круглоцилиндрический трубопровод диаметром D и длиной l. Условия протекания жидкости на каждой отдельной единице длины этого

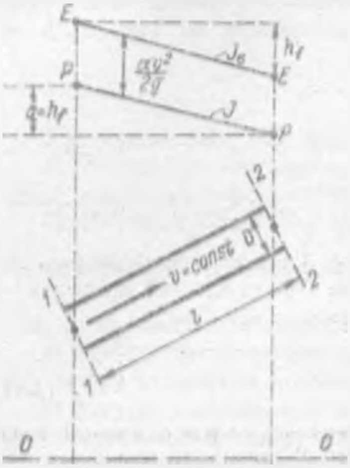


Рис. 3-28. Линии $P-P$ и $E-E$ для равномерного напорного движения

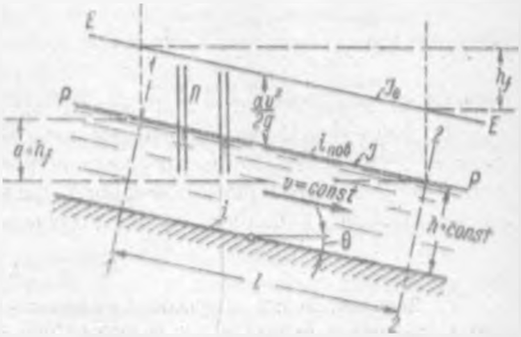


Рис. 3-29. Линии $P-P$ и $E-E$ для равномерного безнапорного движения

трубопровода будут одинаковы. Следовательно, потеря напора на каждой единице длины трубы также будет одинакова; падение напорной линии $E-E$ на каждой единице длины трубы также будет одинаково; уклон напорной линии $E-E$ будет постоянен вдоль потока $J_e = \text{const}$ (вдоль потока).

Отсюда заключаем, что *в случае равномерного движения напорная линия $E-E$ представляет собой наклонную прямую.*

Так как для равномерного движения

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = \text{const (вдоль потока)}, \tag{3-107}$$

то, следовательно, *пьезометрическая линия $P-P$ в случае равномерного движения должна представлять собой прямую, параллельную напорной линии:*

$$PP \parallel EE.$$

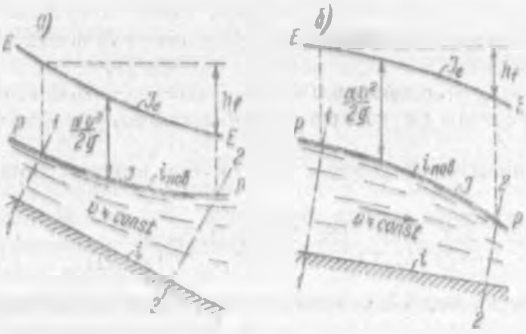


Рис. 3-30. Линии $P-P$ и $E-E$ для неравномерного безнапорного движения

Падение линии $E-E$ на длине l выражает потерю напора. В данном частном случае (*равномерное движение*) *падение пьезометрической линии $P-P$, равное a, также выражает собой потерю напора:*

$$a = h_f. \tag{3-108}$$

В случае равномерного напорного движения можно написать:

$$J_e = J = \frac{h_f}{l} = \frac{a}{l}. \tag{3-109}$$

Безнапорное движение. В этом случае (рис. 3-29) пьезометрическая линия $P-P$, если строить ее для самой верхней линии тока, будет совпадать со свободной поверхностью. Так как здесь имеет место соотношение (3-107), то напорная линия $E-E$ оказывается на рис. 3-29 параллельной свободной поверхности потока, причем получаем равенство четырех уклонов:

$$J_e = J = i_{пов} = i = \frac{h_f}{l} = \frac{a}{l}, \tag{3-110}$$

где i – уклон дна русла; $i_{пов}$ – уклон свободной поверхности; a – падение свободной поверхности на длине l потока.

Как видно, в данном частном случае (*равномерное движение*) падение свободной поверхности потока равно потере напора.

2°. Случай неравномерного движения жидкости. Здесь ограничимся рассмотрением только безнапорного движения, при этом без пояснений приведем на рис. 3-30 две схемы неравномерного движения жидкости.[1]

Как видно, в данном случае получаем:

$$J_e \neq J = i_{пов} \neq i. \tag{3-111}$$

3°. Дополнительные замечания в отношении энергетического смысла слагаемых, входящих в «уравнение Бернулли для целого потока жидкости». В отношении слагаемых этого уравнения (которое, вообще говоря, имеет только некоторое чисто внешнее сходство с «интегралом Бернулли», полученным Эйлером) отметим дополнительно следующее:

1) Три основных слагаемых уравнения Бернулли $\left(z, \frac{p}{\gamma}, \frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ являются приведенными (к единице веса жидкости) потенциальными функциями, описывающими силовые потенциальные поля: z – поле сил тяжести, $\frac{p}{\gamma}$ – поле градиентов давления J_p (см. зависимость на стр. 50); $\frac{\alpha v^2}{2g}$ – осредненное поле конвективных сил инерции;

2) $H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ является суммарной приведенной потенциальной функцией, описывающей силовое потенциальное поле, под действием которого движется рассматриваемая жидкость, образуя векторное поле скоростей (потенциальное или не потенциальное – вихревое);

3) h_f – снижение суммарной потенциальной функции H_e, обусловленное работой сил трения.

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ВОПРОСАМ, СВЯЗАННЫМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

1°. Общая схема применения уравнения Бернулли. Уравнение Бернулли удобно применять, следуя такой схеме:

1) устанавливаем два сечения, которые будем соединять уравнением Бернулли. Здесь надо намечать такие сечения, для которых известно возможно большее число гидродинамических элементов. Если потребуется найти тот или другой гидродинамический элемент для какого-либо живого сечения, то это живое сечение должно быть включено в число двух сечений, соединяемых уравнением Бернулли;

---

[1] На основании данных, приводимых ниже, читателю следует рассмотреть вопрос о том, почему на рис. 3-30, *а* выпуклость линии $E-E$ направлена вниз, а на рис. 3-30, *б* – вверх.

2) намечаем горизонтальную плоскость сравнения. Часто эту плоскость удобно назначать так, чтобы z_1 или z_2, входящее в уравнение Бернулли, обратилось в нуль;

3) пишем уравнение Бернулли в полном виде, как оно было нами получено, см. (3-101);

4) устанавливаем значения отдельных слагаемых, входящих в это уравнение;

5) подставляем найденные выражения для отдельных слагаемых в уравнение Бернулли и производим необходимые преобразования.

2°. Задачи. № 1. На рис. 3-31 представлен сосуд, от которого отходит труба. Истечение жидкости из трубы происходит в атмосферу. Предполагаем, что движение жидкости в трубе – установившееся, потерями напора можно пренебречь.

Дано: $z_1 = 4$ м; $z_2 = 2$ м; $z_3 = 0{,}5$ м; $z_4 = 0$; $\omega_1 = \infty$; $\omega_2 = 0{,}015$ м^2; $\omega_3 = 0{,}04$ м^2; $\omega_4 = 0{,}02$ м^2, где z и ω (площади живых сечений) показаны на чертеже.

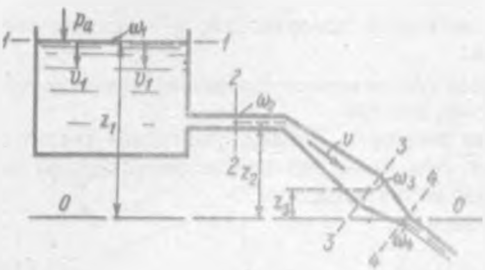


Рис. 3-31. К задаче № 1, п. 2°

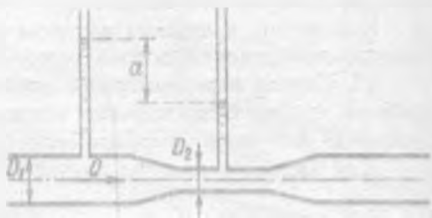


Рис. 3-32. К задаче № 2, п. 2°

Требуется найти: а) расход Q жидкости, вытекающей из трубы; б) давления и скорости в сечениях, указанных на чертеже.

Примечания. 1. Скоростью v_1 движения жидкости в сосуде (в сечении $1'-1$) обычно пренебрегают ввиду ее малости. 2. При решении этой задачи, помимо уравнения Бернулли, следует пользоваться уравнением неразрывности.

Ответ: $Q = 177{,}2$ л/с; $v_1 = 0$; $v_2 = 11{,}80$ м/с; $v_3 = 4{,}43$ м/с; $v_4 = 8{,}86$ м/с; $\frac{p_1}{\gamma} = 0$; $\frac{p_2}{\gamma} = -5{,}1$ м; $\frac{p_3}{\gamma} = 2{,}5$ м; $\frac{p_4}{\gamma} = 0$.

№ 2. На рис. 3-32 показан водомер Вентури, представляющий собой местное сужение, созданное на круглом трубопроводе.

Дано (обозначения см. на чертеже): $a = 1{,}0$ м; $D_1 = 0{,}1$ м; $D_2 = 0{,}05$ м.

Требуется найти расход Q в трубе, пренебрегая потерями напора ($h_f \approx 0$) и считая движение жидкости установившимся.

Ответ: $Q = 9{,}0$ л/с.

3°. Построение напорной и пьезометрической линий. Рассмотрим трубопровод, соединяющий два сосуда A и B (рис. 3-33), наполненные жидкостью. Будем считать, что в трубопроводе имеет место установившееся движение, а, следовательно, расход Q в трубопроводе во времени не изменяется. Ставя так вопрос, надо при этом предполагать, что расходы жидкости, подаваемой в сосуд A и удаляемой из сосуда B, одинаковы. При этом уровни жидкости в сосудах A и B все время будут поддерживаться на одной и той же высоте.

Поскольку поперечное (горизонтальное) сечение сосудов A и B велико сравнительно с поперечным сечением трубопровода, считаем:

$$v_A \approx v_B \approx 0.$$

Так как сосуды A и B открыты, то на поверхность жидкости в них действует атмосферное давление p_a. Однако мы не будем учитывать это давление, понимая в уравнении Бернулли под величиной p/γ пьезометрическую высоту, отвечающую избыточному давлению (см. конец § 3-14).

Наметим плоскость сравнения OO, а также несколько точек (*1*, *2*, *3*, ...) в сосуде *A*. Для этих точек величины z и величины p/γ будут различны. Однако сумма величин $z + \frac{p}{\gamma}$ будет постоянна. Скоростной напор в этих точках пренебрежимо мал. Ясно, что полный напор H_e для всех точек жидкости в сосуде равен потенциальному напору H:

$$H_e = H = z + \frac{p}{\gamma} = \text{const (по всему объему сосуда)}.$$

Отсюда получаем следующий общий вывод: *для жидкости в сосуде напорная и пьезометрическая линии совпадают и располагаются на уровне горизонта жидкости в сосуде.*

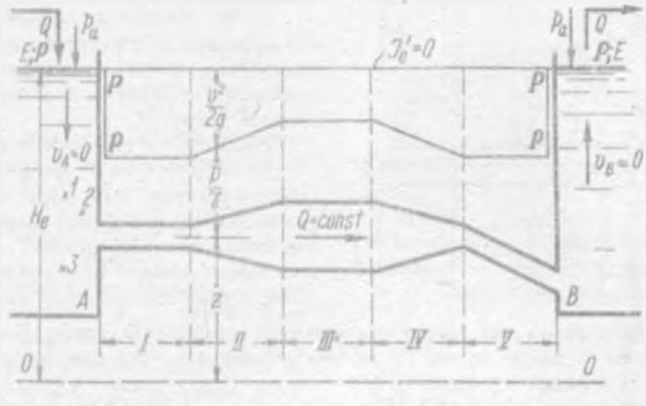


Рис. 3-33. Пьезометрическая линия $P-P$ для участков трубопровода разного вида (случай идеальной жидкости)

Переходя к построению линий $E-E$ и $P-P$ для трубопровода, ограничимся рассмотрением только идеальной жидкости.[1] Так как потеря напора при такой жидкости отсутствует, то можем утверждать, что напоры в сосудах *A* и *B* будут одинаковы, а, следовательно, горизонты жидкости в сосудах *A* и *B* будут находиться на одном уровне (несмотря на наличие движения жидкости в трубопроводе).[2]

Как известно, напорная линия $E-E$ для идеальной жидкости представляет собой горизонтальную прямую. Эту прямую, прежде чем обратиться к построению линии $P-P$, мы и проводим на чертеже (на уровне горизонтов воды в сосудах). Далее вниз от прямой $E-E$ откладываем соответствующие скоростные напоры $v^2/(2g)$ (коэффициент α считаем $\approx 1{,}0$) и получаем линию $P-P-P-P$.

Анализируя характер изменения скорости, а следовательно, и скоростного напора вдоль трубопровода, можно сделать следующие замечания в отношении линии $P-P$:

[1] Точнее говоря, будем рассматривать жидкость весьма близкую к идеальной (когда можно пренебрегать потерями напора). При этом, например, сжатием струи, поступающей из сосуда *A* в трубопровод, отрывом транзитной струи от стенок и др. подобного рода обстоятельствами движения (см. далее гл. 4) будем пренебрегать.

[2] В случае движения в трубе реальной жидкости, характеризуемой ощутимыми потерями напора, уровень жидкости в сосуде *B* должен располагаться ниже уровня жидкости в сосуде *A*; при этом линия $E-E$ получает некоторый наклон в сторону сосуда *B*. Если бы мы не пренебрегали скоростями v_A и v_B и считали $v_A \neq v_B$, то и в случае «идеальной» жидкости имели бы разность уровней в сосудах *A* и *B*, равную $\left(\frac{v_A^2}{2g} - \frac{v_B^2}{2g}\right)$, причем величина Q определялась бы однозначно по этой разности уровней (и площади горизонтальных сечений сосудов *A* и *B*).

а) если поток расширяется (см. участок *II* трубопровода), то скорость и скоростной напор вдоль трубопровода уменьшаются. Поэтому для расширяющегося трубопровода линия $P-P$ вдоль потока должна подниматься. При этом на длине рассматриваемого участка кинетическая энергия потока частично переходит в потенциальную;

б) если поток сужается (см. участок *IV* трубопровода), получаем обратную картину;

в) если поток цилиндрический ($v = \text{const}$; см. участки *I*, *III* и *V* трубопровода), то линия $P-P$ оказывается прямой, параллельной $E-E$, т. е. в случае идеальной жидкости для цилиндрических трубопроводов линия $P-P$ получается всегда в виде горизонтальной прямой (или линии, лежащей в горизонтальной плоскости);

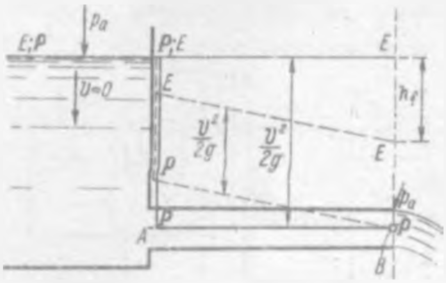


Рис. 3-34. Истечение в атмосферу из цилиндрической трубы (случаи идеальной и реальной жидкостей)

г) при изменении высотного положения рассматриваемого трубопровода высотное положение линий $E-E$ и $P-P$ не должно изменяться (см. участок *V*);

д) от положения плоскости сравнения *OO* высотное положение линий $E-E$ и $P-P$, разумеется, вовсе не зависит. Однако от высотного положения плоскости *OO* зависит полный напор H_e.

Рассмотрим теперь два особых случая.

1. Истечение жидкости в атмосферу (рис. 3-34). При истечении в атмосферу в точке *B* будем иметь атмосферное давление, которое обычно не учитывают (см. выше). Избыточное давление в точке *B* равно нулю. Превышение пьезометрической линии над осью трубы, как известно, выражает давление в трубе. Если избыточное давление в точке *B* равно нулю, то можем утверждать, что пьезометрическая линия должна проходить через эту точку.

Следует запомнить правило: *при истечении в атмосферу пьезометрическая линия проходит через центр выходного сечения* (если при построении линии $P-P$ мы оперируем избыточным давлением).

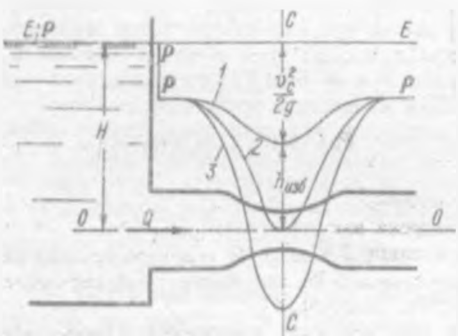


Рис. 3-35. Возникновение вакуума при сужении трубы

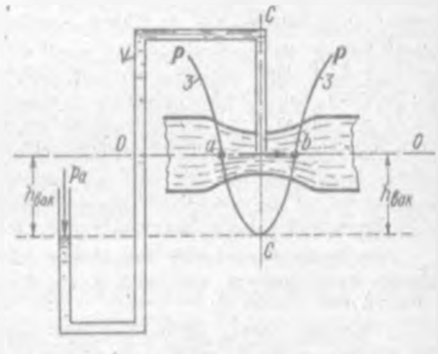


Рис. 3-36. Измерение вакуума в месте сужения трубы

На рис. 3-34 сплошными линиями показаны линии $E-E$ и $P-P$, относящиеся к идеальной жидкости, и штриховыми линиями – те же линии, относящиеся к реальной жидкости. Как видно, скоростной напор, а следовательно, и скорость в случае реальной жидкости получаются меньшими, чем в случае идеальной жидкости.

2. Местное сужение трубы; вакуум. Представим на рис. 3-35 горизонтальную трубу, имеющую местное сужение. Ограничимся рассмотрением только идеальной жидкости, причем будем считать, что течение в трубе направлено слева направо и расход воды в трубе равен Q.

Обозначим через H полный напор $H_в$ в сосуде, относительно плоскости сравнения OO (рис. 3-35).

Пьезометрическая высота $h_{изб}$ (отвечающая избыточному давлению) в сечении CC, где имеется местное сужение (см. пьезометрическую линию 1),

$$h_{изб} = H - \frac{v_C^2}{2g} = H - \frac{Q^2}{\omega_C^2 2g},$$

где ω_C — площадь живого сечения по линии CC; v_C — скорость в этом сечении.

Будем считать, что величины H и Q нам заданы: $H = \text{const}$ и $Q = \text{const}$ (во времени и по длине).

При этом условии представим себе, что ω_C постепенно уменьшается. Очевидно, когда окажется, что

$$\frac{Q^2}{\omega_C^2 2g} = H, \text{ т. е. } \omega_C = \sqrt{\frac{Q^2}{2gH}} = \frac{Q}{\sqrt{2gH}},$$

величина $h_{изб}$ обратится в нуль, и пьезометрическая линия примет положение 2.

В случае же

$$\omega_C < \frac{Q}{\sqrt{2gH}}$$

получим отрицательное значение пьезометрической высоты $h_{изб}$, отвечающей избыточному давлению, причем пьезометрическая линия займет положение 3: на некоторой длине трубы линия $P-P$ будет располагаться ниже оси трубы. Легко видеть, что на этой длине в трубе будет иметь место вакуум.

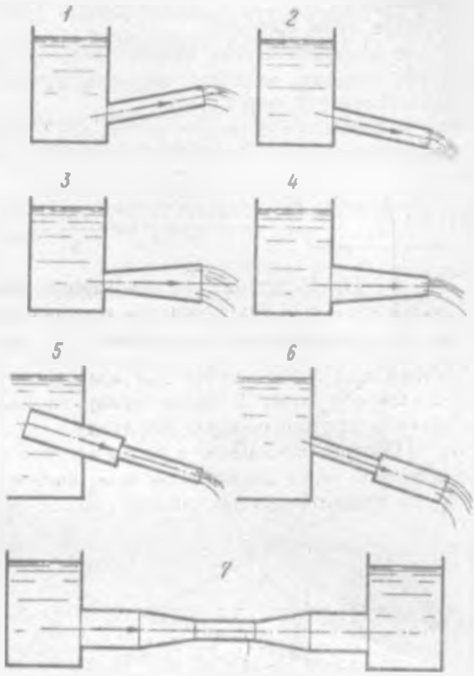


Рис. 3-37. К задачам п. 4°

Необходимо запомнить следующее правило: *если линия $P-P$ располагается выше оси трубы, то в трубе имеется давление больше атмосферного, причем превышение этой линии над осью трубы выражает избыточное давление в трубе; если же линия $P-P$ располагается ниже оси трубы, то в трубе имеет место вакуум, причем превышение оси трубы над линией $P-P$ выражает величину этого вакуума.*[1]

Величина такого вакуума может быть измерена вакуумметром (рис. 3-36).

Разумеется, при наличии пьезометрической линии 2 (рис. 3-35) в центре сечения CC будет атмосферное давление; в точках a и b на рис. 3-36, где линия $P-P$ пересекает ось трубы, также будет иметь место атмосферное давление.

Известно (см. § 1-5), что при снижении давления (при постоянной температуре) из жидкости выделяется растворенный в ней воздух (газ); кроме того, при достаточно большом снижении давления (при большом вакууме) возникает явление кавитации.

Эти явления, подобные представленным на рис. 3-35 и 3-36, обусловливают следующее (см. § 1-5):

а) Давление в жидкости на участке трубы ab (рис. 3-36) не может снизиться ниже давления $p_{н.п}$ насыщенных паров жидкости (при данной температуре): с уменьшением ω_C объем паровоздушной области (области разрывов) будет расти; давление же в жидкости практически будет оставаться равным $p_{н.п}$. Это абсолютное давление будет отвечать предельному вакууму $(h_{вак})_{пред}$, т. е. такому вакууму, больше которого невозможно получить для данной жидкости при данной ее температуре.

[1] Имеется в виду линия $P-P$, построенная для избыточного давления.

б) При некотором вакууме, несколько меньшем $(h_{вак})_{пред}$, развивающаяся кавитация может вызывать, например, опасную эрозию стенок трубопровода. В этом случае вакуум в трубе недопустимо увеличивать выше некоторой величины $(h_{вак})_{доп}$, называемой допустимым вакуумом (по условиям кавитации).

в) При наличии разрывов в жидкости, нарушающих сплошность ее движения, особенно в случаях, когда объем этих разрывов изменяется во времени, уравнение Бернулли и уравнение баланса расхода, полученные для сплошной среды, могут оказаться неприемлемыми для анализа движения жидкости в суженном месте трубопровода.

4°. Задачи. Построить линии $E-E$ и $P-P$ для схем, представленных на рис. 3-37 в предположении, что жидкость близка к идеальной (потерями напора можно пренебрегать).

При этом следует:

а) отметить случаи наличия вакуума (и его наибольшую величину);

б) показать величины напоров H_e для нескольких сечений при различных положениях плоскости сравнения;

в) рассмотреть вопрос о том, как должны изменяться линии $E-E$ и $P-P$ при переходе от жидкости, близкой к идеальной, к жидкости реальной.

§ 3-22. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА

Возьмем поток произвольной формы (рис. 3-38, *а*), наметим два живых сечения $1-1$ и $2-2$, покажем произвольную ось x. Поставим себе цель привести известную из теоретической механики теорему о количестве движения материальных точек к виду, удобному для расчета установившегося движения жидкости, когда в районе живых сечений $1-1$ и $2-2$ (рис. 3-38, *а*) имеет место параллельноструйное или плавно изменяющееся движение (в промежутке же между этими живыми сечениями может быть и резко изменяющееся движение). Дополнительно будем считать, что распределения скоростей u в сечениях $1-1$ и $2-2$ примерно одинаковы, а поэтому можно считать, что

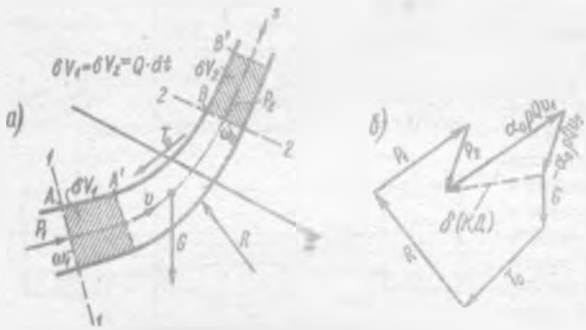


Рис. 3-38. К обоснованию гидравлического уравнения количества движения. В промежутке между сечениями $(1-1)$ и $(2-2)$ может иметь место любое резко изменяющееся движение.

$$\alpha_{0_1} = \alpha_{0_2} = \alpha_0. \tag{3-112}$$

Напомним, что упомянутая теорема читается так: проекция на произвольно намеченную ось x приращения количества движения δ $(КД)$ движущегося тела равна сумме проекций на ось x импульсов *внешних* сил $(ИС)$, действующих на тело, за соответствующий промежуток времени. Данную теорему условно можно написать в виде:

$$\delta(КД)_x = \sum (ИС)_x. \tag{3-113}$$

Применим эту теорему к отсеку жидкости AB, заключенному в начальный момент времени между сечениями $1-1$ и $2-2$ и перемещающемуся за время dt в положение $A'B'$.

1°. Приращение количества движения $[\delta(КД)]$ **тела** AB. Обозначим элементарные объемы, заштрихованные на чертеже, соответственно через δV_1 и δV_2.

Очевидно,

$$\delta(КД) = КД(A'B') - КД(AB) = КД(A'B + BB') - КД(AA' + A'B) =$$
$$= КД(\delta V_2) - КД(\delta V_1). \qquad (3\text{-}114)$$

Известно, что количество движения ($КД$) тела равно

$$КД = \text{массе тела} \times \text{скорость тела}.$$

Имея это в виду, найдем количества движения объемов жидкости δV_1 и δV_2, т. е. величины $КД(\delta V_1)$ и $КД(\delta V_2)$. Масса жидкости в объеме δV_1 есть та масса жидкости, которая за время dt проходит через сечение $1-1$:

$$\text{масса } (\delta V_1) = \rho Q\, dt. \qquad (3\text{-}115)$$

Если бы все жидкие частицы этой массы проходили через живое сечение $1-1$ с одинаковой скоростью v_1, то количество движения $КД(\delta V_1)$ выразилось бы в виде:

$$[КД(\delta V_1)]_{ср} = (\rho Q\, dt)\, v_1. \qquad (3\text{-}116)$$

Так как в различных точках сечения $1-1$ в действительности имеем разные скорости u, то согласно (3-87) искомое количество движения должно записаться в виде:

$$КД(\delta V_1) = \alpha_0 [КД(\delta V_1)]_{ср} = \alpha_0 \rho Q v_1\, dt, \qquad (3\text{-}117)$$

где v_1 – средняя скорость в живом сечении $1-1$.

Для величины $КД(\delta V_2)$ аналогично (3-117) можем написать:

$$КД(\delta V_2) = \alpha_0 \rho Q v_2\, dt, \qquad (3\text{-}118)$$

где v_2 – средняя скорость в живом сечении $2-2$.

Подставив (3-117) и (3-118) в (3-114) и заменив v_1 и v_2 проекциями этих векторов на ось x, т. е. величинами v_{1_x} и v_{2_x}, получаем:

$$\delta(КД)_x = \alpha_0 \rho Q (v_{2_x} - v_{1_x})\, dt. \qquad (3\text{-}119)$$

2°. Импульсы внешних сил ($ИС$), приложенных к телу AB. Известно, что импульс силы

$$ИС = \text{силе} \times \text{время}.$$

Рассмотрим все *внешние* силы, действующие на жидкое тело AB при перемещении его в положение $A'B'$.

Сила собственного веса тела AB. Обозначим эту силу через G и ее проекцию на ось x через G_x. Проекция импульса этой силы равна

$$G_x\, dt. \qquad (3\text{-}120)$$

Сила внешнего трения T_0, приложенного к боковой поверхности жидкого тела AB со стороны боковых стенок, ограничивающих это тело. Проекция импульса этой силы равна

$$(T_0)_x\, dt, \qquad (3\text{-}121)$$

где $(T_0)_x$ – проекция данной силы на ось x.

Сила реакции боковых стенок, ограничивающих жидкое тело AB (без учета сил трения, рассмотренных выше). Проекция импульса этой силы равна

$$R_x\, dt, \qquad (3\text{-}122)$$

где R_x – проекция данной силы на ось x.

С и л а г и д р о д и н а м и ч е с к о г о д а в л е н и я, д е й с т в у ю щ е г о н а т о р ц о в ы е с е ч е н и я ж и д к о г о т е л а AB (на сечения $1-1$ и $2-2$) с о с т о р о н ы о с т а л ь н о й ж и д к о с т и (см. на чертеже силы P_1 и P_2). Проекция импульса этих двух сил

$$(P_{1_x} + P_{2_x})\,dt = P_x\,dt, \tag{3-123}$$

где P_x – сумма проекций на ось x указанных двух сил.

3°. **Гидравлическое уравнение количества движения.** Подставляя в (3-113) выражения (3-119)–(3-123) и деля полученный результат на dt, искомое уравнение получаем в виде

$$\boxed{\alpha_0\,\rho Q\,(v_{2_x} - v_{1_x}) = G_x + (T_0)_x + R_x + P_x,} \tag{3-124}$$

где ρQ – масса жидкости, проходящая в единицу времени (в секунду) через любое живое сечение потока, $\rho Q = \text{const}$ (вдоль потока); $\alpha_0\,\rho Q v$ – количество движения указанной массы в данном плоском живом сечении, к которому относится скорость v; величина $\alpha_0\,\rho Q v$ может быть названа *секундным количеством движения потока* (эта величина представляет собой как бы расход количества движения). Размерность секундного количества движения потока – размерность силы.

Проекции сил и скоростей, направленных против оси x, должны иметь в уравнении (3-124) отрицательную величину.

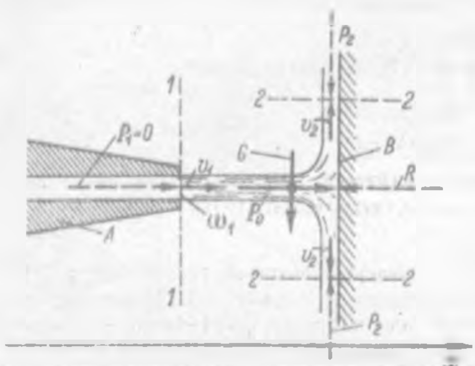


Рис. 3-39. Давление P_0 горизонтальной струи на вертикальную плоскую стенку

Гидравлическое уравнение количества движения (3-124) – уравнение баланса секундного количества движения – можно прочесть так: *при переходе от плоского живого сечения $1-1$ к плоскому живому сечению $2-2$ проекция (на какую-либо ось) секундного количества движения потока изменяется на величину, равную сумме проекций на ту же ось всех четырех внешних сил (G, T_0, R, P), действующих на отсек потока, заключенный между сечениями $1-1$ и $2-2$.*

Из сказанного ясно, что векторы всех внешних сил, действующих на рассматриваемый отсек жидкости (см. силы G, R, T_0, P_1 и P_2 на рис. 3-38, *а*), вместе с векторами секундного количества движения $(\alpha_0\rho Q v_1)$ и $(\alpha_0\rho Q v_2)$ должны давать замкнутый многоугольник сил при условии, если вектор секундного количества движения $(\alpha_0\rho Q v_2)$ мы повернем на 180° и направим его внутрь данного отсека жидкости. Такой замкнутый многоугольник сил и секундных количеств движения показан на рис. 3-38, *б*. Разумеется, сумма моментов указанных векторов относительно любой точки должна равняться нулю.

4°. **Пример использования уравнения количества движения.** Уравнением (3-124) удобно пользоваться при решении различных практических задач.

Для примера рассмотрим случай, когда струя, выходящая из круглоцилиндрического сопла A, ударяется о плоскую стенку B, расположенную нормально к ней (рис. 3-39).

Как видно, здесь (при достаточно больших скоростях истечения жидкости) получаем так называемую осесимметричную задачу растекания потока по стенке B. Живое сечение $2-2$, показанное на чертеже, имеет круглоцилиндрическую форму: на вертикальную плоскость, нормальную к чертежу, контур этого сечения проектируется в окружность, причем линии тока пересекают такую окружность в радиальном направлении.

Данный случай может рассматриваться как исключение: несмотря на наличие криволинейного живого сечения $2-2$ и резко изменяющегося движения жидкости в нем, мы все же, рассматривая такое сечение, можем пользоваться понятием средней скорости, а следовательно, и уравнением (3-124).

Чтобы найти давление P_0 струи на стенку B, намечаем ось x, как показано на чертеже, и затем выделяем сечениями $1-1$ и $2-2$ отсек жидкости, к которому и прилагаем уравнение (3-124).

1. Изменение проекции секундного количества движения при переходе от сечения $1-1$ к сечению $2-2$

$$\alpha_0 \rho Q (v_{2_x} - v_{1_x}) = \alpha_0 \rho Q (0 - v_{1_x}) \approx - \rho Q v_1,$$

где

$$v_{2_x} = 0; \quad v_{1_x} = v_1; \quad \alpha_0 \approx 1.$$

Обычно насадок A делают несколько сходящимся по течению. При этом распределение скоростей u в сечении $1-1$ оказывается весьма близким к равномерному (когда $\alpha_0 = 1{,}0$).

2. Проекции на ось x сил, действующих на рассматриваемый отсек: $G_x = 0$; $P_{1_x} = P_1 = 0$ (так как в сечении $1-1$ давление атмосферное); $P_{2_x} = 0$; $P_x = P_{1_x} + P_{2_x} = 0$; $(T_0)_x \approx 0$; $R_x = R = - P_0$.

3. Как видно, согласно уравнению (3-124), получаем:

$$- \rho Q v_1 = - P_0,$$

откуда искомая сила давления струи на преграду

$$P_0 = \rho Q v_1 = \frac{\gamma}{g} (\omega_1 v_1) v_1$$

или

$$P_0 = 2\omega_1 \frac{v_1^2}{2g} \gamma,$$

где ω_1 – площадь живого сечения струи (в сечении $1-1$).

§ 3-23. СИЛА «ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ» ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЧАСТИЧНО ИЛИ ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННОГО В ДВИЖУЩУЮСЯ ЖИДКОСТЬ

В п. 4°, § 3-22 был освещен пример так называемой внешней задачи (см. § 3-1). Ниже рассмотрим еще один такой пример.

Предположим, что твердое тело (полностью или частично погруженное в установившийся поток жидкости) совершает равномерное прямолинейное движение в направлении приложенной к нему внешней силы P_x.

Будем считать, что направление силы P_x, а следовательно, и направление движения тела нам заданы. Вдоль этого заданного направления наметим ось x.

При подходе к телу (в достаточном удалении от него) наметим также живое сечение потока, причем через u_0 обозначим скорости, отвечающие этому «подходному сечению»; дополнительно будем считать, что скорости u_0 распределяются примерно равномерно по подходному живому сечению ($u_0 \approx \text{const}$). Направления и значения скоростей u_0 следует считать заданными.

В общем случае направление скоростей u_0 и направление сил не совпадают. На рассматриваемое твердое тело, помимо собственного веса и механического воздействия жидкости, могут действовать и другие внешние силы.

Рассмотрим поверхность твердого тела, омываемую жидкостью. К элементарным площадкам, составляющим эту поверхность, со стороны жидкости приложены: а) элементарные нормальные силы гидродинамического давления и б) элементарные касательные силы трения.

Представим себе главный вектор упомянутых элементарных сил (давления и трения); причем разложим этот вектор на два направления: а) на известное нам направление оси x; полученную при этом составляющую обозначим через R_x и б) на направление, нормальное к оси x; эту вторую составляющую обозначим через R_z.

Силу R_z, если она оказывается направленной вертикально вверх, именуют п о д ъ е м н о й с и л о й.

Сила R_x направлена в сторону, противоположную движению тела.[1] Именно эту силу и называют *лобовым сопротивлением*. Как видно, *сила лобового сопротивления твердого тела (движущегося равномерно и прямолинейно в установившемся потоке) представляет собой проекцию упомянутого главного вектора на направление движения тела.*

Силу R_x для твердого тела произвольной формы приходится определять по эмпирической формуле:

$$R_x = c_x S \frac{(v_т \pm u_{0_x})^2}{2g} \gamma, \tag{3-125}$$

где γ – вес единицы объема жидкости («удельный вес жидкости»); $(v_т \pm u_{0_x})$ – скорость движения жидкости относительно тела, причем здесь $v_т$ – абсолютная скорость движения тела и u_{0_x} – проекция скорости u_0 на ось x; S – площадь проекции тела (или его части, погруженной в жидкость) на плоскость, нормальную к оси x, т. е. к направлению движения тела; c_x – эмпирический безразмерный коэффициент, который может быть назван коэффициентом лобового сопротивления.

Для так называемой квадратичной области сопротивления (см. далее § 4-10) величина c_x зависит только от формы тела и шероховатости его поверхности, а также от положения (от ориентировки) этого тела в потоке. В справочной литературе приводятся соответствующие численные значения коэффициента c_x.

По формуле (3-125), разумеется, можно определить силу R_x и для покоящегося тела (тела неподвижно закрепленного), обтекаемого жидкостью.

Необходимо отметить, что для тел простейшей геометрической формы (шара, цилиндра и т. п.) формула (3-125) может быть обоснована теоретически, причем для величины c_x могут быть получены (для некоторых случаев движения жидкости) соответствующие приближенные теоретические зависимости.

§ 3-24. ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В 1839 и 1854 гг. немецким инженером-гидротехником Г. Хагеном было открыто существование двух принципиально разных режимов движения жидкости. В 1880 г. этот вопрос рассматривал Д. И. Менделеев. Дополнительно данный вопрос в 1883 г. исследовал английский физик и инженер О. Рейнольдс.

Рис. 3-40. Схема прибора Рейнольдса

Представим на рис. 3-40 сосуд A, наполненный какой-либо жидкостью; от этого сосуда отходит труба T с прозрачными стенками, имеющая на конце кран K. Над сосудом A располагается бачок с краской, от которого краска при помощи тонкой трубки подводится к входному сечению трубы T. Открывая или закрывая кран K, изменяем расход Q жидкости в трубе, а следовательно, и среднюю скорость $v = Q/\omega$.

В результате таких опытов было установлено следующее.

1. При скоростях v в трубе, меньших некоторой скорости $v_к$:

$$v < v_к, \tag{3-126'}$$

краска, попадающая в трубу T (рис. 3-40), окрашивает только одну струйку потока. Если к входному сечению трубы T приключить вторую трубку, подво-

[1] Имеется в виду только случай движения тела в направлении силы P_x.

дящую краску (см. рис. 3-41 *а*, на котором изображена деталь *B*, указанная на рис. 3-40), то при этом окрасится вторая струйка потока и т. д.

2. При скоростях v в трубе, больших $v_к$:

$$v > v_к, \tag{3-126''}$$

вся жидкость, находящаяся в трубе, окрашивается по всему своему объему (рис. 3-41,*б*). Здесь жидкость в целом имеет поступательное движение слева направо, вместе с тем все составляющие ее частицы перемещаются по случайным неопределенно искривленным траекториям, имеющим пространственную форму; при этом движении траектории частиц, проходящие в разные моменты времени через неподвижную точку пространства, имеют различный вид (занимают разное положение в пространстве и имеют различную форму); данное движение носит беспорядочный хаотический характер и сопровождается постоянным как бы **поперечным перемешиванием** жидкости.

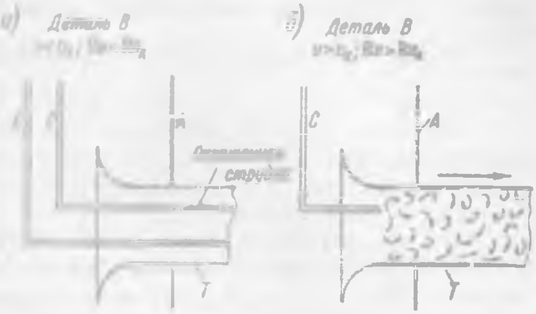


Рис. 3-41. Режимы движения: *а* — ламинарный; *б* — турбулентный

Движение жидкости, показанное на рис. 3-41, *а*, получающееся при условии (3-126'), называется **ламинарным движением**. Здесь частицы жидкости движутся по траекториям, параллельным стенкам трубы, без перемешивания.

Движение жидкости, показанное на рис. 3-41, *б*, получающееся при условии (3-126''), называется **турбулентным движением**. Здесь имеет место перемешивание жидкости.[1]

Скорость $v_к$, входящая в соотношения (3-126') и (3-126''), при которой турбулентный режим (при уменьшении скоростей в трубе [2]) переходит в ламинарный режим движения жидкости, называется **критической скоростью**.

О. Рейнольдс на основании приближенных теоретических рассуждений, проверенных в дальнейшем опытами, получил следующую формулу [3] для $v_к$:

$$v_к = \frac{\nu \, Re_к}{R}, \tag{3-127}$$

где R — гидравлический радиус; ν — так называемый **кинематический коэффициент вязкости** жидкости:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}; \tag{3-128}$$

здесь η — так называемый **динамический коэффициент вязкости** жидкости, учитывающий степень вязкости жидкости (см. ниже § 4-3); $Re_к$ — **безразмерный** эмпирический коэффициент, называемый **критическим числом Рейнольдса**.

---

[1] Слово «ламинарный» происходит от латинского слова, означающего «слоистый». Слово «турбулентный» происходит также от латинского слова, означающего «беспорядочный».

[2] При увеличении скоростей v в трубе T (когда ламинарный режим переходит в турбулентный) значение $v_к$ получается иное (см. конец настоящего параграфа).

[3] О. Рейнольдс, собственно, рассматривал только круглые трубы и вместо гидравлического радиуса, входящего в (3-127), использовал диаметр трубы $D = 4R$.

О. Рейнольдс дал приближенный вывод зависимости (3-127), основанный на использовании особого метода, называемого **методом размерностей**.

Предположив, что $v_к$ зависит только от трех величин: ρ, η и D, можно написать зависимость для $v_к$ в следующем виде:

$$v_к = a\rho^x\eta^y D^z, \tag{А}$$

где a — неизвестный постоянный безразмерный коэффициент; x, y, z — неизвестные показатели степени.

Размерность величин, входящая в (А), следующая:

$$[v_к] = \frac{L}{t}; \quad [\eta] = \frac{M}{Lt}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [D] = L, \tag{Б}$$

где L, t, M — символы соответственно длины, времени и массы (в отношении η см. § 4-3).

Учитывая (Б), зависимость (А) можно представить в форме:

$$\frac{L}{t} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^x \left(\frac{M}{Lt}\right)^y (L)^z, \tag{В}$$

что и приводится к виду

$$Lt^{-1} = M^{x+y}L^{-3x-y+z}t^{-y}. \tag{Г}$$

Чтобы эта зависимость имела смысл, показатели степени при M, L, t в правой и левой частях ее должны быть одинаковыми:

$$x + y = 0; \quad -3x - y + z = 1; \quad -y = -1, \tag{Д}$$

откуда

$$x = -1; \quad y = +1; \quad z = -1.$$

Подставляя эти значения x, y, z в зависимость (А) и заменяя обозначение a безразмерной величиной $4Re_к$, а диаметр трубы D гидравлическим радиусом $R = D/4$, мы и получаем формулу для $v_к$.

Безразмерный эмпирический коэффициент $Re_к$ (критическое число Рейнольдса), входящий в формулу (3-127), как показывают опыты, равен:

а) для **круглоцилиндрических напорных труб**, согласно экспериментам Рейнольдса:

$$Re_к \approx 500; \tag{3-129}$$

согласно же данным некоторых других авторов число $Re_к$ для круглоцилиндрических труб имеет значительно меньшее значение:

б) для **безнапорных цилиндрических каналов широкого прямоугольного сечения**, по данным Хопфа,[1]

$$Re_к \approx 300. \tag{3-130}$$

При обычно встречающейся шероховатости стенок труб принято считать величину $Re_к$ от нее не зависящей. В случае цилиндрических достаточно длинных потоков величина $Re_к$ оказывается зависящей только от формы поперечного сечения потока.[2]

Формулу (3-127) можно представить в виде:

$$Re_к = \frac{v_к R}{\nu}. \tag{3-131}$$

---

[1] В литературе приводятся и другие значения для этого числа (по данным А. П. Зегжда, $Re_к = 900 - 1000$).

[2] На величину $Re_к$ в значительной мере влияет степень отклонения формы потока от цилиндрической. При сужающихся по длине потоках ламинарное движение с увеличением скоростей переходит в турбулентное позже, чем при расширяющихся по длине потоках (при одинаковых прочих условиях).

О. Рейнольдс дал приближенный вывод зависимости (3-127), основанный на использовании особого метода, называемого **методом размерностей**.

Предположив, что $v_к$ зависит только от трех величин: ρ, η и D, можно написать зависимость для $v_к$ в следующем виде:

$$v_к = a\rho^x \eta^y D^z, \tag{А}$$

где a — неизвестный постоянный безразмерный коэффициент; x, y, z — неизвестные показатели степени.

Размерность величин, входящая в (А), следующая:

$$[v_к] = \frac{L}{t}; \quad [\eta] = \frac{M}{Lt}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [D] = L, \tag{Б}$$

где L, t, M — символы соответственно длины, времени и массы (в отношении η см. § 4-3).

Учитывая (Б), зависимость (А) можно представить в форме:

$$\frac{L}{t} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^x \left(\frac{M}{Lt}\right)^y (L)^z, \tag{В}$$

что и приводится к виду

$$Lt^{-1} = M^{x+y} L^{-3x-y+z} t^{-y}. \tag{Г}$$

Чтобы эта зависимость имела смысл, показатели степени при M, L, t в правой и левой частях ее должны быть одинаковыми:

$$x + y = 0; \quad -3x - y + z = 1; \quad -y = -1, \tag{Д}$$

откуда

$$x = -1; \quad y = +1; \quad z = -1.$$

Подставляя эти значения x, y, z в зависимость (А) и заменяя обозначение a безразмерной величиной $4\mathrm{Re}_к$, а диаметр трубы D гидравлическим радиусом $R = D/4$, мы и получаем формулу для $v_к$.

Безразмерный эмпирический коэффициент $\mathrm{Re}_к$ (критическое число Рейнольдса), входящий в формулу (3-127), как показывают опыты, равен:

а) для **круглоцилиндрических напорных труб**, согласно экспериментам Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_к \approx 500; \tag{3-129}$$

согласно же данным некоторых других авторов число $\mathrm{Re}_к$ для круглоцилиндрических труб имеет значительно меньшее значение:

б) для **безнапорных цилиндрических каналов широкого прямоугольного сечения**, по данным Хопфа,[1]

$$\mathrm{Re}_к \approx 300. \tag{3-130}$$

При обычно встречающейся шероховатости стенок труб принято считать величину $\mathrm{Re}_к$ от нее не зависящей. В случае цилиндрических достаточно длинных потоков величина $\mathrm{Re}_к$ оказывается зависящей только от формы поперечного сечения потока.[2]

Формулу (3-127) можно представить в виде:

$$\mathrm{Re}_к = \frac{v_к R}{\nu}. \tag{3-131}$$

---

[1] В литературе приводятся и другие значения для этого числа (по данным А. П. Зегжда, $\mathrm{Re}_к = 900 - 1000$).

[2] На величину $\mathrm{Re}_к$ в значительной мере влияет степень отклонения формы потока от цилиндрической. При сужающихся по длине потоках ламинарное движение с увеличением скоростей переходит в турбулентное позже, чем при расширяющихся по длине потоках (при одинаковых прочих условиях).

Введем новое обозначение:

$$\boxed{\frac{vR}{\nu} = \mathrm{Re},} \qquad (3\text{-}132)$$

где v – действительная (а не критическая) средняя скорость.

Умножим затем неравенства (3-126′) и (3-126″) на постоянное для данного потока число (R/ν). Тогда, учтя выражения (3-131) и (3-132), условия существования того или другого режима движения жидкости можем переписать в виде:

1) если $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_к$, *то должен иметь место ламинарный режим*; (3-133)

2) если $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_к$, *то должен иметь место турбулентный режим.* (3-134)

Безразмерная величина Re, выражаемая, согласно (3-132), через среднюю скорость v (вычисленную для действительного потока), называется числом Рейнольдса. Не следует смешивать понятий: числа Рейнольдса Re и критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_к$. Соотношениями (3-133) и (3-134) пользоваться удобнее, чем соотношениями (3-126′) и (3-126″), поскольку безразмерная величина $\mathrm{Re}_к$ является постоянной для потока заданной геометрической формы; величина же $v_к$ зависит еще от свойств жидкости (что учитывается коэффициентом ν), а также от размеров потока.

В заключение приведем следующие отдельные замечания.

1. При изучении напорного движения жидкости в круглых трубах число Рейнольдса обычно выражают не через гидравлический радиус, что мы имели выше, а через диаметр трубы D. Такое число Рейнольдса, учтя (3-54), можно представить в виде:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{vD}{\nu} = \frac{v(4R)}{\nu} = 4\,\mathrm{Re}. \qquad (3\text{-}135)$$

Пользуясь вместо Re величиной Re_D, получаем [см. формулу (3-129)], что $(\mathrm{Re}_D)_к = 4\,\mathrm{Re}_к = 4 \cdot 500 = 2000.$

Некоторые другие авторы полагают, что $(\mathrm{Re}_D)_к$ приближается или к 1000, или к 2300. Имея в виду такое положение, далее будем считать, что критическое число Рейнольдса $(\mathrm{Re}_D)_к$ лежит в пределах от 1000 до 2300:

$$(\mathrm{Re}_D)_к = 1000 \div 2300. \qquad (3\text{-}136)$$

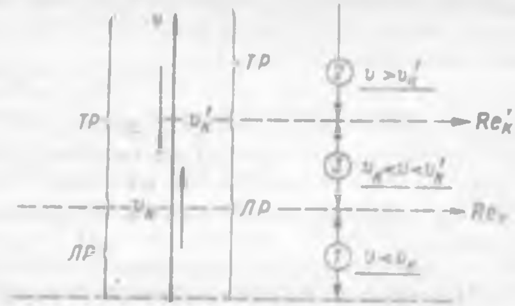


Рис. 3-42. Переход ламинарного режима (*ЛР*) в турбулентный (*ТР*) и переход турбулентного режима в ламинарный

1 – зона ламинарного режима; *2* – зона турбулентного режима; *3* – неустойчивая или переходная зона

2. В гидротехнической практике обычно сталкиваемся с турбулентным движением. Движение воды в трубах, каналах, реках, как правило, является турбулентным. Имеется только один часто встречающийся в гидротехнике случай ламинарного движения – это движение грунтовой воды (воды, просачивающейся через поры грунта). В области же других специальностей, где имеют дело с движением особенно вязких жидкостей (масел и т. п.), ламинарный режим может встречаться достаточно часто.

3. Необходимо особенно подчеркнуть, что приведенные ранее основные уравнения гидродинамики (уравнение неразрывности, уравнение Бернулли и гидравлическое уравнение количества движения) применимы как к ламинарному, так и к турбулентному движению. При этом, однако,

в частности величина потерь напора h_f, входящая в уравнение Бернулли, в случае турбулентного и в случае ламинарного потока выражается различными зависимостями. Далее (в гл. 4) будут приведены эти зависимости, а также пояснен вопрос о том, каким образом «беспорядочное», турбулентное движение жидкости (рис. 3-41, *б*) для расчета заменяется той «струйчатой моделью», которую рассматривали ранее (в предшествующих параграфах).

4. При выполнении соответствующих опытов (рис. 3-40), оградив опытную установку от возможных сотрясений, обеспечив плавный вход жидкости в трубу и т. п., мы можем, постепенно увеличивая скорости v в трубе T, «затянуть» существование ламинарного режима до некоторой скорости $v'_к$, где $v'_к > v_к$. Однако ламинарный режим при соотношениях $v_к < v < v'_к$ является неустойчивым: в этом случае при малейшем возмущении потока (например, при сотрясении трубы T) ламинарный режим может «разрушиться» и перейти в турбулентный. Скорость $v'_к$ иногда называют верхней критической скоростью. Величина ее неопределенна (зависит от условий проведения опытов).

Если при $v > v_к$ мы можем хотя бы в искусственной обстановке опыта получить ламинарный режим, то при $v > v_к$ турбулентный режим ни при каких условиях получен быть не может.

Поясним сказанное выше при помощи рис. 3-42. На этом рисунке показана ось скоростей v. Если мы движемся по этой оси вверх (увеличивая скорость v), то ламинарный режим (*ЛР*) переходит в турбулентный режим (*ТР*) при скорости $v'_к$; если же спускаемся по этой оси вниз, то турбулентный режим переходит в ламинарный при скорости $v_к$, причем скорость $v_к$ можно здесь назвать нижней критической скоростью.

Область скоростей $v_к < v < v'_к$ называют неустойчивой или переходной зоной.

В соответствии со сказанным о скоростях $v_к$ и $v'_к$ следует различать нижнее число Рейнольдса $Re_к$ в частности $(Re_D)_к$; [см. (3-136)] и верхнее число Рейнольдса $Re'_к$, выражаемое через скорость $v'_к$. При практических расчетах всегда полагают, что в переходной зоне имеет место турбулентный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

3-1. **Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И.** Гидравлика. – М.-Л.: Энергия, 1964.

3-2. **Альтшуль А. Д., Киселев П. Г.** Гидравлика и аэродинамика. – Л.: Стройиздат, 1975.

3-3. **Бернар Ле Меоте.** Введение в гидравлику и теорию волн на воде. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

3-4. **Богомолов А. И., Михайлов К. А.** Гидравлика. – М.: Стройиздат, 1973.

3-5. **Емцев Б. Т.** Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1978.

3-6. **Избаш С. В.** Основы гидравлики. – М.: Госстройиздат, 1952.

3-7. **Киселев П. Г.** Гидравлика. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.

3-8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1972.

3-9. **Оглоблин А. П.** Основы гидромеханики. – М.: Оборонгиз, 1945.

3-10. **Патрашев А. Н.** Гидромеханика. – М.: Военно-морское изд-во, 1953.

3-11. **Повх И. Л.** Аэродинамический эксперимент в машиностроении. – Л.: Машиностроение, 1974.

3-12. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика, ч. I. – Л.: Изд. ЛПИ, 1960.

3-13. **Лабораторный курс** гидравлики, насосов и гидропередач./Под ред. С. С. Руднева и Л. Г. Подвидза. – М.: Машиностроение, 1974.

3-14. **Примеры** гидравлических расчетов./Под ред. А. И. Богомолова. – М.: Транспорт, 1977.

3-15. **Справочник** по гидравлике/Под ред. В. А. Большакова. – Киев: Высшая школа, 1977.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

§ 4-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ПОТЕРЯХ НАПОРА. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

К потоку могут быть приложены различные внешние силы, имеющие некоторые перемещения; такие силы будут совершать работу и изменять величину механической энергии, несомой жидкостью. Например, поток воды может приводить в действие гидравлическую турбину, причем полная механическая энергия потока за счет работы лопастей турбины будет уменьшаться; стенки металлического напорного трубопровода могут вибрировать, причем эта вибрация будет «поглощать» энергию, несомую жидкостью, и т. п. Мы далее не будем касаться таких случаев. Далее будем иметь в виду потерю механической энергии потоком, находящимся в неподвижном русле, обусловленную работой только сил трения, возникающих в реальной жидкости при ее движении (см. § 4-2; конец п. 1°). Именно эту потерю энергии («потерю напора») мы учитывали выше при рассмотрении уравнения Бернулли. Различают два вида такого рода потерь напора:

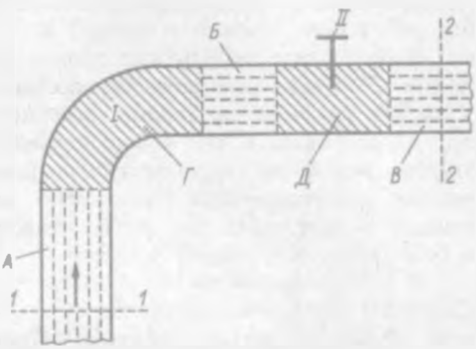


Рис. 4-1. Области, внутри которых напряжения трения τ распределяются: *а* — равномерно — см. области *А*, *Б*, *В* — здесь получаются «потери напора по длине»; *б* — неравномерно (беспорядочно) — см. области *Г* и *Д* — здесь получаются «местные потери напора»

1) так называемую потерю напора по длине. Она распределяется по длине потока равномерно (при равномерном движении) или несколько неравномерно (при плавно изменяющемся неравномерном движении). Такую потерю напора, получающуюся на длине l потока, будем обозначать через h_l;

2) так называемые местные потери напора, получающиеся только в отдельных местах потока, где поток претерпевает ту или другую резкую местную деформацию. Каждую отдельную местную потерю напора будем обозначать через h_j.

На рис. 4-1 представлен трубопровод, имеющий особые узлы: поворот *I*, задвижку *II* (частично открытую). Помимо потери напора по длине между сечениями *1—1* и *2—2* (на участках *А*, *Б*, *В*), в данном случае будут еще две местные потери напора: на участках *Г* и *Д*, где происходит местная деформация потока, причем, как это будет пояснено ниже, в них получается резко изменяющееся неравномерное движение жидкости.

На участке потока, где имеют место «потери по длине», касательные напряжения трения τ распределяются вдоль потока равномерно или примерно равномерно; на участках же потока, где имеют место «местные потери», напряжения τ распределяются резко неравномерно.

Часто длина потока в пределах участков *Г* и *Д* (рис. 4-1) является пренебрежимо малой по сравнению с длиной остальной части потока. Поэтому при выполнении практических расчетов обычно считают, что суммарная длина участков, в пределах которых имеются «местные потери напора», равна нулю; «потери же напора по длине» имеют место на длине всего потока. При такой постановке вопроса (которой мы далее и будем придерживаться) любую местную потерю следует относить, выполняя практические расчеты, к соответствующему поперечному сечению потока (а не к участку его некоторой протяженности).

В общем случае для участка трубопровода, заключенного между двумя сечениями (рис. 4-1), пишут:

$$\boxed{h_f = h_l + \sum h_j} \tag{4-1}$$

где величина h_f может быть названа полной потерей напора для рассматриваемого участка трубы.

Заметим, что в гл. 3 на рис. 3-28, 3-29, 3-30 под величиной h_f следовало бы, собственно, понимать потерю h_l.

В результате работы сил трения, представленных касательными напряжениями τ, механическая энергия, несомая жидкостью, переходит в тепло, причем жидкость нагревается; тепло с течением времени рассеивается.

Можно сказать, *что величина потери напора h_f есть мера той механической энергии жидкости, несомой единицей ее веса, которая благодаря работе сил трения*, распределенных равномерно по длине потока, а также сосредоточенных в отдельных его узлах («местных сил трения»), *переходит в тепло и безвозвратно теряется потоком.*

В гидравлике часто пользуются термином *«гидравлические сопротивления»*. Под этим термином следует понимать силы трения, возникающие в реальной жидкости при ее движении. При движении идеальной жидкости силы трения, а следовательно, и касательные напряжения трения равны нулю; поэтому мы можем сказать, что в случае идеальной жидкости силы гидравлического сопротивления отсутствуют.

Чем больше силы трения в реальной жидкости, тем больше, при равных прочих условиях, потери напора h_f. Между силами трения и потерями напора h_f (т. е. работой сил трения) существует, естественно, определенная зависимость. Зная распределение в потоке напряжений τ, а также скоростей u (дающих нам величину перемещений частиц жидкости), мы могли бы подсчитать работу сил трения и тем самым определить потери напора. Однако такая задача является весьма трудной, в частности, в связи с тем, что поле скоростей u нам часто бывает неизвестным. Здесь приходится идти особыми приближенными путями, освещаемыми ниже. При этом, рассматривая вначале простейший случай движения жидкости – установившееся равномерное движение (местные потери отсутствуют) – мы пользуемся особым уравнением, которое дает связь только между силами трения и потерями напора. Это достаточно точное уравнение принято называть основным уравнением установившегося равномерного движения жидкости (см. § 4-2). На основании этого уравнения, а также на основании законов Ньютона о силах внутреннего трения (см. § 4-3), мы далее и устанавливаем необходимую нам зависимость, связывающую потери напора и скорости движения жидкости. Этот вопрос достаточно хорошо решается теоретически для простейших случаев ламинарного движения (см. § 4-4 и 4-5). В случае турбулентного режима приходится прибегать к использованию некоторых экспериментальных коэффициентов, вводимых в теоретический анализ.

Что касается потерь напора при неустановившемся движении (см. гл. 9), а также при установившемся **неравномерном** движении жидкости, то отыскание зависимости, связывающей потери напора и скорости движения жидкости, является особенно трудной задачей. Поэтому часто потери напора здесь приходится определять, пользуясь формулами, относящимися к установившемуся равномерному движению. При таком **условном** использовании этих формул в них иногда вводят некоторые коррективы.

§ 4-2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ДЛЯ «ПРАВИЛЬНЫХ РУСЕЛ». РАБОТА СИЛ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Обозначим через τ_0 продольное касательное напряжение трения, приложенное со стороны потока жидкости к стенкам русла. «Правильными руслами» принято называть такие русла, для которых или $\tau_0 = \mathrm{const}$ или $\tau_0 \approx \mathrm{const}$ вдоль всего смоченного периметра русла (для данного поперечного сечения русла).[1]

Поставим цель найти зависимость потерь напора по длине от величины сил трения в жидкости. Представим на рис. 4-2 часть напорной круглоцилиндрической трубы длиной, равной l, ограниченную сечениями $1-1$ и $2-2$. Ось s направим **по течению** жидкости в трубе. В случае равномерного движения жидкости пьезометрическая линия PP является наклонной прямой (см. § 3-21), причем ее падение на длине l трубы выражает потерю напора h_l.

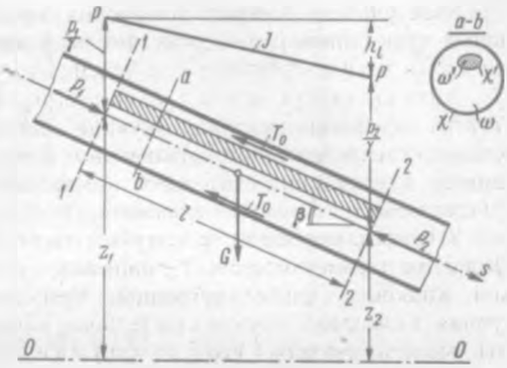


Рис. 4-2. К выводу основного уравнения равномерного движения

Выясним все внешние силы, действующие на рассматриваемую часть потока (расположенную между сечениями $1-1$ и $2-2$). После этого, учитывая, что движение жидкости равномерное и установившееся, сумму проекций найденных сил на ось s приравняем нулю. В результате и получим искомое уравнение.

1°. Силы, действующие на выделенную часть потока. Рассмотрим силы, действующие на эту часть потока.

1. Собственный вес этой части

$$G = \omega l \gamma, \tag{4-2}$$

где ω – площадь живого сечения потока.

Проекция собственного веса на ось s:

$$G_s = \omega l \gamma \sin\beta, \tag{4-3}$$

где β – угол наклона оси трубы к горизонту.

Из чертежа видно, что

$$l \sin\beta = z_1 - z_2; \tag{4-4}$$

поэтому

$$G_s = \gamma\omega (z_1 - z_2). \tag{4-5}$$

[1] При турбулентном движении отмеченное условие обычно может быть удовлетворено, когда мы имеем однородную (одинаковую) шероховатость по всей длине смоченного периметра русла.

Что касается потерь напора при неустановившемся движении (см. гл. 9), а также при установившемся **неравномерном** движении жидкости, то отыскание зависимости, связывающей потери напора и скорости движения жидкости, является особенно трудной задачей. Поэтому часто потери напора здесь приходится определять, пользуясь формулами, относящимися к установившемуся равномерному движению. При таком **условном** использовании этих формул в них иногда вводят некоторые коррективы.

§ 4-2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ДЛЯ «ПРАВИЛЬНЫХ РУСЕЛ». РАБОТА СИЛ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Обозначим через τ_0 продольное касательное напряжение трения, приложенное со стороны потока жидкости к стенкам русла. «Правильными руслами» принято называть такие русла, для которых или $\tau_0 = \text{const}$ или $\tau_0 \approx \text{const}$ вдоль всего смоченного периметра русла (для данного поперечного сечения русла).[1]

Поставим цель найти зависимость потерь напора по длине от величины сил трения в жидкости. Представим на рис. 4-2 часть напорной круглоцилиндрической трубы длиной, равной l, ограниченную сечениями $1-1$ и $2-2$. Ось s направим **по течению** жидкости в трубе. В случае равномерного движения жидкости пьезометрическая линия PP является наклонной прямой (см. § 3-21), причем ее падение на длине l трубы выражает потерю напора h_l.

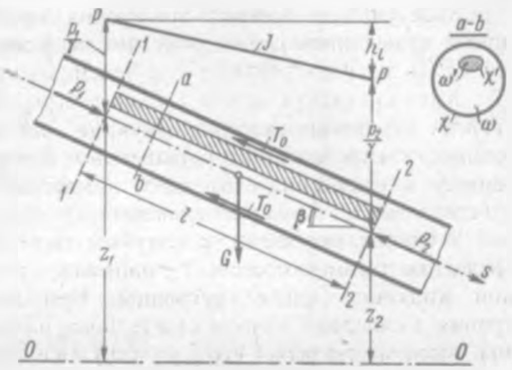


Рис. 4-2. К выводу основного уравнения равномерного движения

Выясним все внешние силы, действующие на рассматриваемую часть потока (расположенную между сечениями $1-1$ и $2-2$). После этого, учитывая, что движение жидкости равномерное и установившееся, сумму проекций найденных сил на ось s приравняем нулю. В результате и получим искомое уравнение.

1°. Силы, действующие на выделенную часть потока. Рассмотрим силы, действующие на эту часть потока.

1. Собственный вес этой части

$$G = \omega l \gamma, \tag{4-2}$$

где ω – площадь живого сечения потока.

Проекция собственного веса на ось s:

$$G_s = \omega l \gamma \sin \beta, \tag{4-3}$$

где β – угол наклона оси трубы к горизонту.

Из чертежа видно, что

$$l \sin \beta = z_1 - z_2; \tag{4-4}$$

поэтому

$$G_s = \gamma \omega (z_1 - z_2). \tag{4-5}$$

---

[1] При турбулентном движении отмеченное условие обычно может быть удовлетворено, когда мы имеем однородную (одинаковую) шероховатость по всей длине смоченного периметра русла.

2. Силы P_1 и P_2 давления на торцовые сечения рассматриваемого жидкого отсека со стороны соседних отброшенных объемов жидкости:

$$P_1 = p_1\omega; \quad P_2 = p_2\omega, \tag{4-6}$$

где p_1 и p_2 — гидродинамические давления в центрах тяжести живых сечений $1-1$ и $2-2$. Силы P_1 и P_2 проектируются на ось s без искажения.

3. Проекция на ось s сил нормального давления на боковую поверхность потока со стороны стенок трубы равняется нулю.

4. Сила «трения на стенке» T_0, приложенная со стороны стенок трубы к боковой поверхности потока, направлена против течения и проектируется на ось s без искажения. Помимо силы трения на стенке T_0, являющейся силой внешнего трения, можно различать еще силы внутреннего трения T. С тем, чтобы пояснить их, представим на рис. 4-3 поперечное сечение рассматриваемой трубы. Изобразим внутри потока две соприкасающиеся струйки a и b; покажем эти струйки в продольном разрезе на

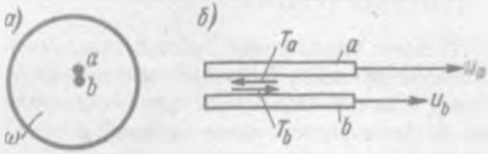


Рис. 4-3. Силы внутреннего трения (их сумма равна нулю; сумма работ этих сил не равна нулю)

рис. 4-3, б (несколько раздвинув их для удобства черчения). В общем случае скорости, отвечающие струйкам a и b, не равны: $u_a \neq u_b$. Поэтому струйка a, двигаясь, например, с большей скоростью, стремится увлечь за собой струйку b; при этом к струйке b оказывается приложенной сила трения T_b, направленная по течению; наоборот, к струйке a со стороны струйки b будет приложена сила внутреннего трения T_a, направленная против течения.

Как видно, силы внутреннего трения являются парными, причем

$$|T_a| = |T_b| \text{ и } \sum T = 0,$$

где T — внутренние силы трения. Попутно подчеркнем здесь, что *сумма работ, описанных выше, равных и противоположно направленных парных сил внутреннего трения T не равна нулю, поскольку перемещения струек a и b, вызванные этими силами* (см. силы T_a и T_b на рис. 4-3) *различны* (за время dt струйка a вместе с силой T_a переместится на расстояние $u_a dt$, струйка же b вместе с силой T_b — на расстояние $u_b dt$). *Именно эта работа сил внутреннего трения* (совместно с работой силы внешнего трения T_0) *и обусловливает потери напора.*

2°. Сумма проекций всех сил на ось s. Учитывая сказанное в п. 1°, можем написать:

$$G_s + P_1 - P_2 - T_0 = 0; \tag{4-7}$$

подставляя в это уравнение соотношения (4-5) и (4-6), имеем:

$$\gamma\omega(z_1 - z_2) + p_1\omega - p_2\omega - T_0 = 0. \tag{4-8}$$

Деля выражение (4-8) на $\gamma\omega$, получаем:

$$(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - \frac{T_0}{\gamma\omega} = 0,$$

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{T_0}{\gamma\omega}. \tag{4-9}$$

Из рис. 4-2 видно, что левая часть (4-9) равна h_l:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = h_l; \tag{4-10}$$

поэтому (4-9) переписываем в виде

$$h_l = \frac{T_0}{\gamma\omega}, \tag{4-11}$$

где силу T_0 можно представить (только для «правильных русел» в указанном выше смысле) следующей зависимостью:

$$T_0 = \chi l \tau_0, \tag{4-12}$$

причем здесь τ_0 – отмеченное выше напряжение трения на стенке (обусловленное трением между жидкостью и стенками трубы) для данного поперечного сечения трубы.

Подставляя (4-12) в (4-11), получаем:

$$h_l = \frac{\chi l}{\gamma\omega}\tau_0; \tag{4-13}$$

$$\frac{h_l}{l} R = \frac{\tau_0}{\gamma}; \tag{4-14}$$

$$\boxed{\frac{\tau_0}{\gamma} = RJ,} \tag{4-15}$$

где

$$J = \frac{h_l}{l}; \quad R = \frac{\omega}{\chi}. \tag{4-16}$$

Уравнение (4-15) и называется основным уравнением установившегося равномерного движения для «правильных русел».

Из (4-15) или (4-13), учитывая (4-16), получаем для «правильных русел»

$$h_l = \frac{\tau_0}{\gamma} \frac{l}{R}; \tag{4-17}$$

именно таким образом для «правильных русел» выражается величина потерь напора h_l (в случае равномерного движения), *обусловленная работой сил внутреннего и внешнего трения.*

Как видно, h_l для заданной жидкости и заданных размеров потока *зависит только от среднего касательного напряжения трения на стенке* τ_0.

3°. Дополнительные замечания. Рассуждая, как и выше, можно показать, что уравнения (4-15) и (4-17) являются справедливыми не только для напорного движения жидкости в круглоцилиндрической трубе, но и для любого другого случая равномерного установившегося движения; в частности, для случая безнапорного установившегося движения жидкости в цилиндрическом русле любой формы (см. рис. 3-19,*б* и 3-29).

Можно показать также, что уравнения (4-15) и (4-17) являются справедливыми и для любого «продольного жидкого столба», выделенного внутри потока (см. например, «жидкий столб», изображенный на рис. 4-2 *штриховкой*). Для такого «жидкого столба» уравнения (4-15) и (4-17) следует переписать в виде

$$\frac{\tau}{\gamma} = R'J; \tag{4-18}$$

$$h_l = \frac{\tau}{\gamma}\frac{l}{R'} = \frac{\tau}{\gamma}\frac{\chi'}{\omega'}l, \tag{4-19}$$

где $R' = \omega'/\chi'$; ω' и χ' – площадь и смоченный периметр живого сечения этого жидкого столба; τ – среднее касательное напряжение трения для боковой его поверхности, площадь которой равна $\chi' l$; h_l – потеря напора для целого потока, выражаемая формулой (4-10).

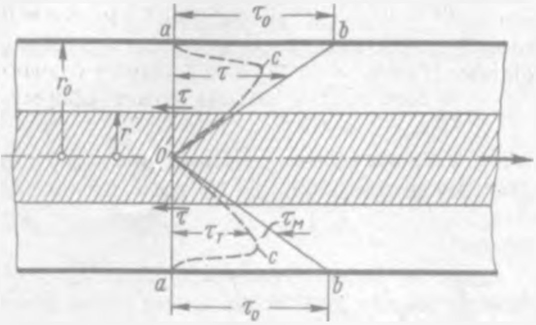


Рис. 4-4. Распределение касательных напряжений продольного трения τ по живому сечению потока в круглой напорной трубе (о величинах $\tau_т$ и $\tau_м$ – см. конец 4-7)

Представим на рис. 4-4 круглоцилиндрическую напорную трубу радиусом r_0 и выделим внутри нее ц е н т р а л ь н ы й продольный жидкий столб радиусом r (см. чертеж, где этот «столб» заштрихован). Прилагая к нему уравнение (4-18) и учитывая, что в данном случае $R' = r/2$, можно написать:

$$\tau = \frac{1}{2}\gamma J r; \tag{4-20}$$

отсюда заключаем, что при заданной величине J касательные напряжения τ продольного в н у т р е н н е г о трения для данного живого сечения *аа* распределяются в круглоцилиндрической трубе вдоль ее радиуса по л и н е й н о м у з а к о н у (см. эпюры *Oab*).

А. ПОТЕРЯ НАПОРА ПО ДЛИНЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ПОТОКЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

§ 4-3. ЗАКОНЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В ЖИДКОСТИ. ВЕЛИЧИНА КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ТРЕНИЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Представим на продольном разрезе потока (рис. 4-5) некоторое живое сечение AB и соответствующую ему эпюру скоростей ABC. Покажем далее два слоя жидкости (заштрихованы на чертеже), из которых первый слой движется со скоростью u_1, а второй – со скоростью u_2. Поверхность соприкосновения $1-1$ этих жидких слоев имеет площадь S. По этой поверхности (вдоль нее) в реальной (вязкой) жидкости развиваются парные силы внутреннего трения: T_1, приложенная к первому слою со стороны второго, и T_2, приложенная ко второму слою со стороны первого. Очевидно,

$$|T_1| = |T_2|, \tag{4-21}$$

причем первый слой жидкости, движущийся с большей скоростью, за счет трения по поверхности $1-1$ способствует ускорению движения второго слоя; второй же слой, наоборот, благодаря трению тормозит первый слой.

Рассматривая реальную жидкость, как сплошную среду (в данном случае движущуюся), имеющую касательные напряжения τ, обусловленные существованием сил T_1 и T_2 (см. рис. 1-10, *а*, на котором изображен эллипсоид напряжений, относящийся к общему случаю движения реальной жидкости), мы, естественно, должны иметь в виду, что силы трения будут возникать не только вдоль поверхности $1-1$, но и вдоль других направлений, намеченных в точке m (исключения здесь будут составлять только направления главных осей деформаций). В частности, силы трения будут иметь место и в плоскости живого сечения AB.

Мы однако, ограничимся рассмотрением только продольных касательных сил трения, действующих вдоль линий тока, причем будем иметь в виду исключительно прямолинейный параллельноструйный поток жидкости.

Законы продольного внутреннего трения, относящиеся к такому случаю движения, были установлены Ньютоном в 1686 г. Эти законы можно сформулировать так:

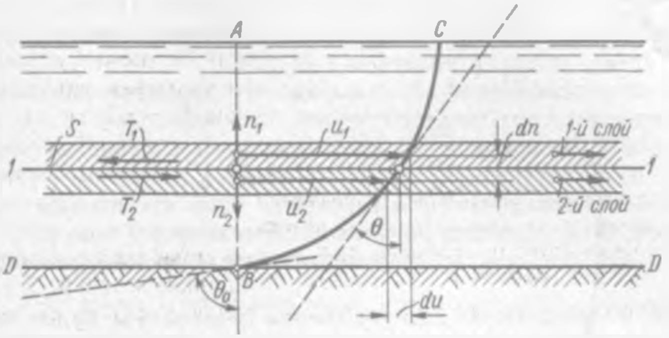


Рис. 4-5. К пояснению законов продольного внутреннего трения в жидкости (для прямолинейного движения)

Сила T продольного внутреннего трения в параллельноструйном потоке жидкости, т. е. сила трения, возникающая при скольжении отдельных прямолинейных слоев жидкости друг по другу[1] *(рис. 4-5)*:

1) *прямо пропорциональна так называемому градиенту скорости*;

2) *прямо пропорциональна площади S поверхности соприкасания данных слоев жидкости*;

3) *не зависит от давления*;

4) *зависит от физических свойств жидкости (от рода жидкости), а следовательно, и от ее температуры.*

Положения 1, 2 и 3 отличаются от соответствующих законов, относящихся к твердым телам: в случае твердых тел сила трения, как известно, зависит от нормального давления и практически не зависит от скорости движения тела, а также от площади S.

Законы Ньютона можно представить в аналитической форме:

$$\boxed{T = \eta S \left| \frac{du}{dn} \right|,} \qquad (1) \qquad (4\text{-}22)$$

где η – некоторый коэффициент пропорциональности, называемый, как отмечалось выше, динамическим коэффициентом вязкости или просто коэффициентом вязкости[2]. Величина η зависит от рода жидкости, а

[1] Точнее говоря, возникающая на поверхностях соприкасания жидких слоев друг с другом.

[2] Коэффициент вязкости обозначают иногда не буквой η, а буквой μ,

естественно, должны иметь в виду, что силы трения будут возникать не только вдоль поверхности $1-1$, но и вдоль других направлений, намеченных в точке m (исключения здесь будут составлять только направления главных осей деформаций). В частности, силы трения будут иметь место и в плоскости живого сечения AB.

Мы однако, ограничимся рассмотрением только продольных касательных сил трения, действующих вдоль линий тока, причем будем иметь в виду исключительно прямолинейный параллельноструйный поток жидкости.

Законы продольного внутреннего трения, относящиеся к такому случаю движения, были установлены Ньютоном в 1686 г. Эти законы можно сформулировать так:

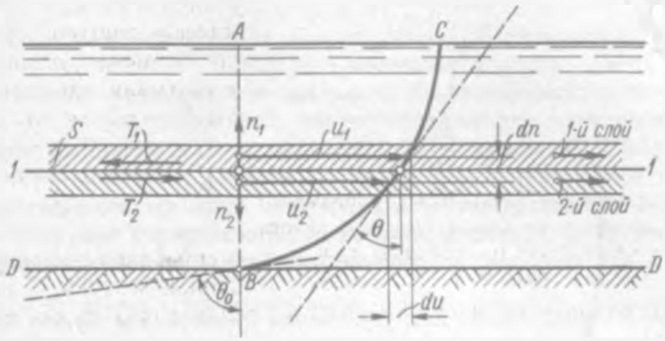


Рис. 4-5. К пояснению законов продольного внутреннего трения в жидкости (для прямолинейного движения)

Сила T продольного внутреннего трения в параллельноструйном потоке жидкости, т. е. сила трения, возникающая при скольжении отдельных прямолинейных слоев жидкости друг по другу[1] (рис. 4-5):

1) *прямо пропорциональна так называемому градиенту скорости*;

2) *прямо пропорциональна площади S поверхности соприкасания данных слоев жидкости*;

3) *не зависит от давления*;

4) *зависит от физических свойств жидкости (от рода жидкости), а следовательно, и от ее температуры.*

Положения 1, 2 и 3 отличаются от соответствующих законов, относящихся к твердым телам: в случае твердых тел сила трения, как известно, зависит от нормального давления и практически не зависит от скорости движения тела, а также от площади S.

Законы Ньютона можно представить в аналитической форме:

$$\boxed{T = \eta S \left| \frac{du}{dn} \right|}, \quad (1) \qquad (4\text{-}22)$$

где η – некоторый коэффициент пропорциональности, называемый, как отмечалось выше, динамическим коэффициентом вязкости или просто коэффициентом вязкости[2]. Величина η зависит от рода жидкости, а

[1] Точнее говоря, возникающая на поверхностях соприкасания жидких слоев друг с другом.

[2] Коэффициент вязкости обозначают иногда не буквой η, а буквой μ,

Рассмотрим теперь поверхность дна $D-D$ потока. *У самой стенки русла (непосредственно на стенке)*, как это считает большинство исследователей, *имеет место* (как для «смачиваемого» материала стенки, так и для «несмачиваемого») *скорость* $u = 0$ (для реальной жидкости).[1]

Градиент скорости у стенки равен:

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_0 = \operatorname{tg}\theta_0, \tag{4-25}$$

где угол θ_0 показан на чертеже.

Имея это в виду, силу T_0 и напряжение τ_0 трения на стенке в случае ламинарного режима можно представить зависимостями:

$$T_0 = \eta S_0 \left(\frac{du}{dn}\right)_0; \quad \tau_0 = \eta\left(\frac{du}{dn}\right)_0 = \eta \operatorname{tg}\theta_0, \tag{4-26}$$

где S_0 – площадь смоченной поверхности стенки.[2]

Если в предыдущем параграфе была установлена зависимость τ (или τ_0) от величины h_l, то в этом параграфе мы установили для ламинарного режима зависимость τ (или τ_0) от вязкости жидкости и интенсивности изменения скорости u по живому сечению. Как видно, используя две указанные зависимости, можно через величину τ (или τ_0) установить аналитическую связь между потерями напора h_l и физическими свойствами жидкости, а также характером распределения скоростей u по живым сечениям потока.

Величины, с которыми сталкивались выше, имеют следующую размерность:

$$\left[\frac{du}{dn}\right] = \frac{L}{t} : L = \frac{1}{t}; \tag{А}$$

$$[\eta] = \frac{[T]}{[S]\left[\frac{du}{dn}\right]} = \left(M\frac{L}{t^2}\right) : \left(L^2\frac{1}{t}\right) = \frac{M}{Lt}; \tag{Б}$$

$$[\nu] = \frac{[\eta]}{[\rho]} = \frac{M}{Lt} : \frac{M}{L^3} = \frac{L^2}{t}, \tag{В}$$

где M, L, t – по-прежнему символы массы, длины и времени.

Из (Б) и (В) видно, что ν в отличие от η выражается величинами, не связанными с массой жидкости; в зависимость (В) входят величины, носящие только, так сказать, кинематический характер, в то время как зависимость (Б) носит динамический характер. Именно поэтому η называют д и н а м и ч е с к и м, а ν – к и н е м а т и ч е с к и м к о э ф ф и ц и е н т о м в я з к о с т и.

В качестве единицы измерения величины η принимают:

$$1\ \text{Па}\cdot\text{с}\left(\text{или}\ 1\ \text{П} = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{с}} = 1\ \frac{\text{дин}\cdot\text{с}}{\text{см}^2} = 0{,}1\ \text{Па}\cdot\text{с}\right),$$

где Па – паскаль, П – так называемый «пуаз», г – грамм массы; в качестве же единицы измерения величины ν принимают:

[1] Наличие такой (нулевой) скорости на стенке (даже а б с о л ю т н о г л а д к о й) можно, по-видимому, в какой-то мере объяснить, используя модель «твердой воды» (см. конец § 1-4).

[2] Зависимость (4-26) написана в предположении, что величина $\left(\frac{du}{dn}\right)$ во всех точках поверхности S_0 одинакова. В противном случае имеем: $T_0 = \eta \int\limits_{S_0} \left(\frac{du}{dn}\right)_0 dS_0$.

$$1\ м^2/с \left(или\ 1\ Ст = 1\frac{см^2}{с} = 1\ \frac{П}{г/см^3} \right),$$

где Ст – так называемый «стокс», г – грамм массы.

Величины η и ν для данной жидкости существенно зависят от температуры. Численные значения этих коэффициентов, найденные опытным путем (при помощи вискозиметров) для некоторых жидкостей, имеющих различную температуру, приводятся в табл. 4-1. Как видно, из этой таблицы, имеем следующие примерные значения η и ν для воды:

а) при температуре ее равной 20 °С $\eta \approx 0{,}001$ Па · с = 0,01 П;

$$\nu \approx 10^{-6}\ м^2/с = 10^{-2}\ Ст;$$

б) при температуре ее равной 10 °С $\eta = 0{,}00131$ Па · с = 0,0131 П;

$$\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}\ м^3/с = 1{,}31 \cdot 10^{-2}\ Ст.$$

Таблица 4-1

Коэффициенты вязкости η (в пуазах) и ν (в стоксах) для некоторых жидкостей

Наименование жидкости	t, °С	η		ν	
		Па · с	П	м²/с	Ст
Вода	0	0,001792	0,01792	$1{,}792 \cdot 10^{-6}$	0,01792
	10	0,001306	0,01306	$1{,}306 \cdot 10^{-6}$	0,01306
	20	0,001004	0,01004	$1{,}006 \cdot 10^{-6}$	0,01006
	30	0,000802	0,00802	$0{,}805 \cdot 10^{-6}$	0,00805
	40	0,000654	0,00654	$0{,}659 \cdot 10^{-6}$	0,00659
	50	0,000549	0,00549	$0{,}556 \cdot 10^{-6}$	0,00556
Бензин	15	0,000650	0,00650	$0{,}930 \cdot 10^{-6}$	0,00930
Спирт этиловый	20	0,001190	0,01190	$1{,}540 \cdot 10^{-6}$	0,01540
Ртуть	15	0,001540	0,01540	$0{,}110 \cdot 10^{-6}$	0,00110
Скипидар	16	0,001600	0,01600	$1{,}830 \cdot 10^{-6}$	0,01830
Керосин	15	0,002170	0,02170	$2{,}700 \cdot 10^{-6}$	0,02700
Глицерин (50 %-ный)	20	0,006030	0,06030	$5{,}980 \cdot 10^{-6}$	0,05980
Масло:					
трансформаторное	20	0,027500	0,27500	$31{,}000 \cdot 10^{-6}$	0,31000
веретенное «АУ»	20	0,042700	0,42700	$48{,}000 \cdot 10^{-6}$	0,48000
турбинное	20	0,086000	0,86000	$96{,}000 \cdot 10^{-6}$	0,96000

§ 4-4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ u ПО ЖИВОМУ СЕЧЕНИЮ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РАВНОМЕРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим напорную круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-6), имеющую радиус r_0. Покажем кривой ACB эпюру скоростей для живого сечения AB. Поставим себе цель найти уравнение кривой ACB.

Для этого внутри данной трубы выделим центральный круглоцилиндрический столб движущейся жидкости (заштрихован) радиусом r. Для продольного касательного напряжения трения τ по боковой поверхности этого столба можно написать два разных выражения:

1) согласно уравнению равномерного движения (4-18) имеем:

$$\tau = \gamma R' J = \gamma \frac{r}{2} J, \tag{4-27}$$

где гидравлический радиус рассматриваемого столба

$$R' = \frac{\omega'}{\chi'} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}; \tag{4-28}$$

2) согласно законам Ньютона [см. формулу (4-24)] получаем

$$\tau = \eta\left|\frac{du}{dn}\right| = -\eta\frac{du}{dr}; \tag{4-29}$$

здесь при выбранном направлении r (см. рис. 4-6) величина $\frac{du}{dn}$ отрицательна.

Решая совместно уравнения (4-27) и (4-29), получаем

$$\gamma\frac{r}{2}J = -\eta\frac{du}{dr}, \tag{4-30}$$

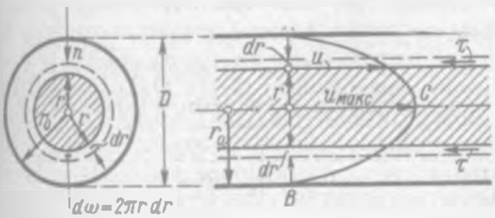


Рис. 4-6. Ламинарное равномерное движение в круглой трубе

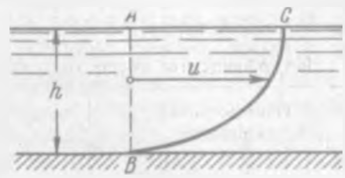


Рис. 4-7. Ламинарное равномерное безнапорное движение

или

$$du = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\eta}Jr\,dr. \tag{4-31}$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$u = -\frac{\gamma}{4\eta}Jr^2 + C. \tag{4-32}$$

Постоянную интегрирования C находим из условия, что при $r = r_0$ величина $u = 0$ (как было отмечено в § 4-3, непосредственно на стенке русла скорость u должна равняться нулю):

$$0 = -\frac{\gamma}{4\eta}Jr_0^2 + C, \tag{4-33}$$

откуда

$$C = \frac{\gamma}{4\eta}Jr_0^2. \tag{4-34}$$

Подставляя (4-34) в (4-32), окончательно получаем следующее уравнение, по которому можно построить кривую ACB (рис. 4-6), ограничивающую эпюру скоростей для живого сечения AB:

$$u = \frac{\gamma}{4\eta}J(r_0^2 - r^2), \tag{4-35}$$

где J – пьезометрический уклон.

Как видно из (4-35), кривая ACB является параболой. Подставляя в (4-35) $r = 0$, получаем максимальную величину скорости $u_{макс}$ (в центре трубы):

$$u_{макс} = \frac{1}{4}\frac{\gamma}{\eta}Jr_0^2. \tag{4-36}$$

При найденной эпюре распределения скоростей u по живому сечению потока величины коррективов α_0 и α в случае ламинарного движения жидкости в круглой трубе оказываются равными: $\alpha_0 = 1{,}33$; $\alpha = 2{,}0$. (Эти численные значения α и α_0 были установлены в результате анализа полученных выше зависимостей.)

Заметим, что построенная по уравнению (4-35) эпюра скоростей (в виде параболы) характеризуется такими градиентами скоростей в различных местах, при которых напряжения τ, вычисленные по зависимости (4-24), распределяются вдоль радиуса живого сечения по линейному закону (см. на рис. 4-4 эпюры $O\,ba$).

Следует еще иметь в виду, что, рассматривая эпюру скоростей для всей площади живого сечения данного потока, мы получим эту эпюру в виде параболоида вращения, объем которого должен равняться расходу Q.

В случае широкого прямоугольного канала, рассуждая так же, как и выше, можно получить уравнение, аналогичное (4-35). Оказывается, что в этом случае эпюра скоростей также ограничена параболой, причем максимальная скорость $u_{макс}$ получается на свободной поверхности (рис. 4-7).

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае ламинарное движение является вихревым (см. § 3-5), не имеющим потенциала скорости. В связи с тем, что $u \neq \text{const}$ (по живому сечению), отдельные частицы жидкости, благодаря наличию сил трения при своем перемещении вдоль трубы должны вращаться (даже на бесконечно малом перемещении их).

§ 4-5. ФОРМУЛА ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ РАСХОДА Q В КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ. ПОТЕРЯ НАПОРА ПО ДЛИНЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РАВНОМЕРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим напорное движение в круглоцилиндрической трубе (рис. 4-6). Найдем сперва величину расхода Q для этой трубы. Напишем выражение для элементарного расхода dQ, проходящего через элементарную часть площади живого сечения $d\omega$ в виде «кольца» радиусом r (см. чертеж):

$$dQ = u\,d\omega = u 2\pi r\,dr, \tag{4-37}$$

где

$$d\omega = 2\pi r\,dr.$$

Подставляя в (4-37) выражение (4-35), имеем

$$dQ = \frac{\gamma}{4\eta} J\,(r_0^2 - r^2)\,2\pi r\,dr. \tag{4-38}$$

Интегрируя это выражение по всей площади живого сечения, получаем объем отмеченного в § 4-4 параболоида вращения, равный

$$Q = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{\eta} J \int\limits_{r=0}^{r=r_0} (r_0^2 - r^2)\,r\,dr = \frac{\pi}{8}\frac{\gamma}{\eta} J r_0^4 = \frac{\pi}{128}\frac{\gamma}{\eta} J D^4$$

или

$$\boxed{Q = MJD^4,} \tag{4-39}$$

где коэффициент M зависит только от рода жидкости:

$$M = \frac{\pi}{128}\frac{\gamma}{\eta}. \tag{4-40}$$

Средняя скорость

$$v=\frac{Q}{\omega}=\left(\frac{\pi}{128}\frac{\gamma}{\eta}JD^4\right):\frac{\pi D^2}{4}=\frac{1}{32}\frac{\gamma}{\eta}JD^2 \tag{4-41}$$

или

$$v=\frac{1}{32}\frac{\gamma}{\eta}\frac{h_l}{l}D^2=\frac{1}{8}\frac{\gamma}{\eta}Jr_0^2=\frac{1}{2}u_{\text{макс}}; \tag{4-42}$$

как видно

$$h_l=32\frac{\eta}{\gamma}\frac{l}{D^2}v. \tag{4-43}$$

Формула (4-39) была впервые получена доктором медицины Пуазейлем в 1840 г., причем он пришел к этой зависимости чисто эмпирическим путем, исследуя движение жидкости в тонких капиллярных трубках. Из рассмотрения зависимости (4-43) можно сделать следующие существенные выводы.

В случае ламинарного движения потеря напора h_l:

1) зависит от свойств жидкости, что учитывается коэффициентом вязкости η, а также величиной γ;

2) прямо пропорциональна средней скорости v в первой степени;

3) не зависит от шероховатости стенок русла – в формулу (4-43) не входят какие-либо характеристики шероховатости стенок русла.

Потерю напора h_l для круглоцилиндрической трубы в случае ламинарного режима иногда представляют в виде

$$h_l=32\frac{\eta}{\gamma}\frac{v}{D^2}l=32\frac{\nu}{D}\frac{l}{D}\frac{v}{g}\frac{2}{2}\frac{v}{v}=64\frac{\nu}{Dv}\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}, \tag{4-44}$$

откуда

$$\boxed{h_l=\lambda\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g},} \tag{4-45}$$

где (при ламинарном режиме):

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}_D} \tag{4-46}$$

причем, как видно, коэффициент λ, называемый «коэффициентом гидравлического трения», зависит здесь от скорости v (входящей в выражение для Re_D).

Можно показать, что в данном случае (ламинарного равномерного движения) при найденной выше параболической форме эпюры скоростей потери напора получаются минимально возможные.

Б. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ СКОРОСТЕЙ В ПОТОКЕ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

§ 4-6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗУЧЕНИЕМ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

1°. **Мгновенная местная скорость (актуальная скорость).** Структуру турбулентного потока можно себе представить, например, в следующем виде.

При больших скоростях некоторые объемы жидкости (a, b, c; рис. 4-8) разной величины и формы приходят внутри жидкости в беспорядочное неустановившееся вращение (получаются водовороты). Множество этих водоворотов, возникающих внутри жидкости и распадающихся на более мелкие, изменяется по течению. Имея поступательное движение, они проносятся через данное поперечное сечение потока $I-I$. Если на этом сечении потока зафикси-

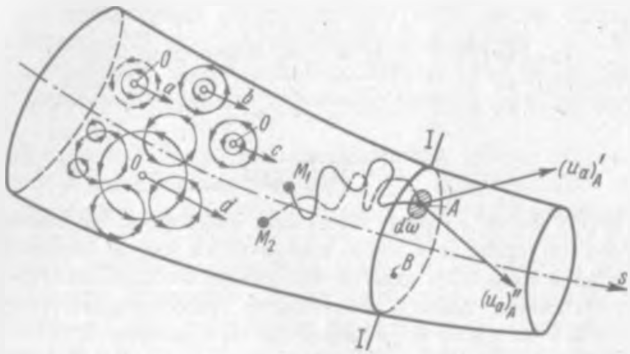


Рис. 4-8. Схема турбулентного движения

ровать неподвижную точку A, принадлежащую пространству, то через эту точку будут проходить частицы жидкости, имеющие поступательное и вращательное движения (относительно перемещающихся центров O); скорость в точке A поэтому все время должна изменяться (и по величине и по направлению).[1]

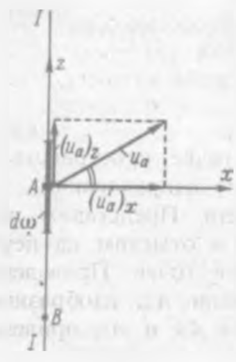


Рис. 4-9. Продольная актуальная скорость $[(u_a)_x]$ и поперечная актуальная скорость $[(u_a)_z]$

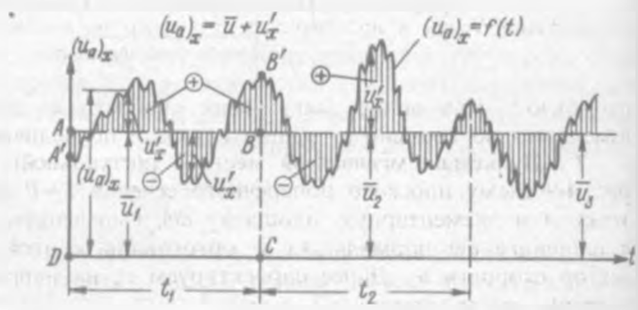


Рис. 4-10. Схема графика пульсаций продольной актуальной скорости для неподвижной точки пространства A (рис. 4-8)

$\bar{u}$ – осредненная продольная скорость

В результате, если в толще потока наметить несколько частиц жидкости (M_1, M_2, ...), попадающих в точку A в разные моменты времени t, то получим следующую картину:

а) частица M_1, двигаясь по некоторой причудливой траектории, попадает в точку A в момент времени t_1 и приобретает в этой точке скорость, которую обозначим через $(u_a)'_A$;

---

[1] Схема водоворотов a, b, c на чертеже показана упрощенной. Можно представить себе вращение жидкости и по схеме более сложной (см., например, водоворот d).

б) частица M_2, двигаясь по другой траектории, попадает в точку A в момент времени t_2 и приобретает в этой точке скорость $(u_a)''_A$, отличную от скорости $(u_a)'_A$, и т. д.

В другой точке поперечного сечения $I-I$, например, в точке B, будем иметь аналогичную картину; для различных моментов времени (t_1, t_2, ...) будем получать в этой точке различные скорости: $(u_a)'_B$; $(u_a)''_B$; $(u_a)'''_B$ и т. д.

Действительную скорость u_a движения жидкой частицы в данный момент времени в данной точке пространства (например, в точке A или B) называют мгновенной местной скоростью или актуальной скоростью[1]. Как видно, актуальная скорость в данной точке пространства изменяется во времени (в общем случае и по величине и по направлению).

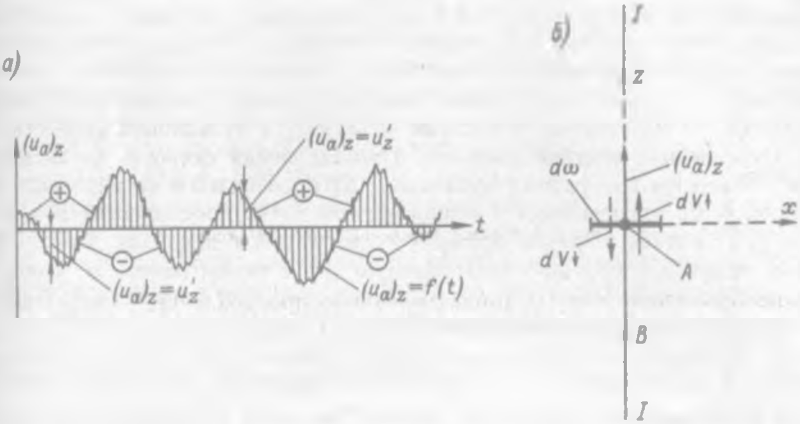


Рис. 4-11. Продольное и поперечное направления турбулентного потока: *а* – схема графика пульсаций поперечной актуальной скорости для неподвижной точки A пространства; *б* – поперечный обмен объемами жидкости dV (через площадку $d\omega$)

2°. Пульсация мгновенной местной (актуальной) скорости. Представим на рис. 4-9 схему плоского поперечного сечения $I-I$ потока и отметим на нем точку A и элементарную площадку $d\omega$, выделенную у этой точки. Проведем к площадке $d\omega$ нормаль Ax и ортогональ к этой нормали Az; изобразим вектор скорости u_a. Далее спроектируем u_a на направления Ax и Az, причем получим составляющие $(u_a)_x$ и $(u_a)_z$.[2]

Продольная составляющая актуальной скорости $(u_a)_x$ будет характеризоваться следующим:

а) она всегда будет иметь постоянное направление (в отличие от скорости u_a);

б) величина ее будет изменяться во времени (соответственно тому, как изменяется во времени величина скорости u_a).

Составляющие $(u_a)_x$ и $(u_a)_z$ будем именовать соответственно: мгновенной продольной составляющей скорости (или просто продольной скоростью) и мгновенной поперечной составляющей скорости (или просто поперечной скоростью).

---

[1] Индекс «*a*» у скорости u_a – первая буква слова «актуальная».

[2] Принятые направления Ax и Az не обязательно горизонтальны или вертикальны. Строго говоря, скорость u_a следовало бы разлагать не на два, а на три направления и оперировать тремя проекциями: $(u_a)_x$, $(u_a)_z$ и $(u_a)_y$. Мы же для простоты пояснения рассматриваем как бы плоскую задачу (что в действительности не имеет места).

Изменение $(u_a)_x$ во времени в данной точке пространства может быть представлено графиком на рис. 4-10. Этот график, относящийся к определенной точке пространства (например, к точке A), называется графиком пульсации продольной скорости.

Аналогично можно построить график пульсации поперечной скорости $(u_a)_z$ (рис. 4-11, *а*).

Пульсацией скорости называется явление изменения (увеличение и уменьшение) во времени (т. е. явление флюктуации) величины проекции местной мгновенной (актуальной) скорости на какое-либо направление (например, на линию Ax или на линию Az). С явлением пульсации скоростей иногда сталкиваемся в обыденной жизни; например, наблюдая водоросли, растущие в текущей воде реки, можно заметить, что эти водоросли совершают сложные колебательные движения, которые являются результатом пульсации скоростей; наблюдая уровень воды в трубке Пито, можно видеть, что этот уровень колеблется: то поднимается, то опускается, что также объясняется пульсацией скорости.

3°. Осредненная местная скорость. Пульсационная скорость (пульсационная добавка). Выделим на графике пульсации продольной составляющей скорости (рис. 4-10), относящемся к определенной точке пространства A, достаточно большой отрезок времени t_1 и затем в пределах этого отрезка осредним величины $(u_a)_x$: проведем прямую AB с таким расчетом, чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ (Ω_{ABCD}) равнялась площади фигуры $A'B'CD$ ($\Omega_{A'B'CD}$), ограниченной кривой графика пульсации:

$$\Omega_{ABCD} = \Omega_{A'B'CD}.$$

При этом получим некоторое среднее значение $\bar{u}_1$ продольной скорости в данной точке A (как здесь, так и ниже, индексы x у осредненных продольных составляющих опускаем).

Выделим далее второй достаточно большой отрезок времени t_2; проведя осреднения продольных мгновенных скоростей в пределах этого отрезка времени, получим некоторое среднее значение $\bar{u}_2$ продольной скорости в той же точке A и т. д.

Турбулентное движение жидкости является движением неустановившимся, так как здесь в данной точке пространства актуальные скорости u_a все время изменяются. Вместе с тем, если для данной точки A живого сечения (а также и для других точек этого живого сечения) величины $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, ..., найденные, как это описано выше, удовлетворяют условияю (рис. 4-10)

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = \ldots = \bar{u} = \text{const (во времени)}, \tag{4-47}$$

то такое турбулентное движение может быть названо в среднем установившимся движением; такого рода движение часто называют просто установившимся, опуская слово «в среднем» (но подразумевая его). Как ясно из сказанного, на рис. 4-10 представлен случай установившегося турбулентного движения. Для неустановившегося турбулентного движения будем иметь $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \neq \bar{u}_3 \neq \ldots$ Условная (фиктивная) скорость $\bar{u}$ называется осредненной местной скоростью; эта скорость является, разумеется, продольной.

Если через dV обозначить объем жидкости, проходящей через элементарную площадку $d\omega$ (рис. 4-9) за достаточно большой отрезок времени t, то величину осредненной местной скорости при установившемся (в среднем) движении можно представить соотношением

$$\bar{u} = \frac{dV}{t\,d\omega} = \text{const (по времени)}. \tag{4-48}$$

Рассматривая рис. 4-10, видим, что продольная актуальная скорость $(u_a)_x$ может быть представлена в виде:

$$(u_a)_x = \bar{u} + u'_x, \tag{4-49}$$

где величина u'_x (положительная или отрицательная) может быть названа продольной пульсационной скоростью или пульсационной добавкой.

Легко видеть, что для достаточно большого промежутка времени t

$$\sum u'_x dt = 0, \tag{4-50}$$

поскольку левая часть этого равенства выражается суммой площадей (положительных и отрицательных), показанных на рис. 4-10 штриховкой.

Рассматривая пульсацию поперечных (по отношению к общему направлению течения) составляющих актуальной скорости, т. е. пульсацию величин $(u_a)_z$ (рис. 4-11), должны иметь в виду элементарную площадку $d\omega$, ортогональную оси Oz (рис. 4-11, *б*). Через эту площадку в связи с наличием скоростей $(u_a)_z$ (изменяющихся во времени как по величине, так и по направлению) будет двигаться жидкость. Обозначим: через $dV\uparrow$ – объем этой жидкости, прошедшей через площадку $d\omega$ вверх в продолжении длительного промежутка времени t; через $dV\downarrow$ – объем жидкости, прошедшей через площадку $d\omega$ вниз в течение того же отрезка времени t.

Для установившегося (в среднем) турбулентного движения (при достаточно большом t) будем иметь равенство (см. конец настоящего пункта):

$$dV\uparrow = dV\downarrow, \tag{4-51'}$$

отсюда можем заключить, что объем жидкости dV, прошедший через площадку $d\omega$ за время t, должен быть равен нулю:

$$dV = dV\uparrow - dV\downarrow = 0, \tag{4-51''}$$

а следовательно, осредненная поперечная местная скорость

$$\bar{u}_z = 0. \tag{4-52'}$$

Имея это в виду, можем написать [сообразуясь с аналогичной зависимостью (4-49), в которой мы понимаем под $\bar{u}$ величину $\bar{u}_x$], что

$$(u_a)_z = 0 + u'_z = u'_z, \tag{4-52''}$$

где u'_z можно назвать поперечной пульсационной скоростью. Как видно, *поперечная составляющая актуальной скорости является поперечной пульсационной скоростью.* Ясно, что для достаточно большого отрезка времени

$$\sum (u_a)_z \, dt = \sum u'_z \, dt = 0,$$

и следовательно, сумма положительных площадей графика пульсации (рис. 4-11, *а*) равна сумме отрицательных площадей данного графика.

Необходимо в заключение подчеркнуть, что все сказанное выше основано на том предположении, что продольное («главное») и поперечное направления движения жидкости (т. е. направления осей Ax и Az; см. рис. 4-9) были выбраны в начале наших рассуждений с таким расчетом, чтобы соотношение (4-51″) было удовлетворено.

4. Пульсация давлений. Осредненный поток (модель Рейнольдса – Буссинеска). Как показывает опыт, пульсация скоростей сопровождается пульсацией давлений p, т. е. изменением во времени величин p в точках пространства. Рассматривая в среднем установившееся турбулентное движени можем считать, что для заданной точки пространства (например, точки на рис. 4-8)

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = \ldots = \bar{p}, \qquad (4\text{-}5$$

где $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$, ... – гидродинамические давления, осредненные в точке A з достаточно большие отрезки времени (следующие один за другим) t_1, t_2, t_3, ... величина $\bar{p}$ может быть названа осредненным местным гидроди намическим давлением.

Для расчета турбулентного потока О. Рейнольдс (в 1895 г.) и Ж. Буссинес (1897 г.) предложили заменять этот поток некоторой воображаемой моделью представляющей собой *условный* (*фиктивный*) *поток жидкости, частицы которо движутся со скоростями, равными осредненным местным* (*продольным*) *ско ростям* ($\bar{u}$), *гидродинамические же давления в различных точках пространства занятого этим потоком, равны осредненным местным давлениям* $\bar{p}$. Такой воображаемый поток будем называть осредненным потоком или моделью Рейнольдса – Буссинеска. Как видно, поперечные актуальные скорости $(u_a)_z$ при переходе к такой модели исключаются из рассмотрения, т.е. исключается из рассмотрения так называемое «турбулентное перемешивание» (поперечный обмен частицами жидкости между отдельными продольными ее слоями).

Если при движении, называемом нами установившимся, величины $\bar{u}$ в отдельных точках пространства не изменяются во времени, то при движении, которое мы будем именовать неустановившимся, величины $\bar{u}$ должны при рассмотрении модели Рейнольдса – Буссинеска изменяться во времени.

Как видно, рассчитывая турбулентный поток согласно Рейнольдсу – Буссинеску, мы должны оперировать величинами $\bar{u}$ и $\bar{p}$. Поэтому, прилагая, например, уравнение Бернулли к определенному турбулентному потоку, в этом уравнении под величинами u и p всегда следует подразумевать величины $\bar{u}$ и $\bar{p}$; только для упрощения записи в этом случае над буквами u и p не ставят горизонтальных черточек, указывающих на осреднение величин u и p во времени, однако эти черточки всегда подразумевают. Что касается интенсивности пульсации скоростей $(u_a)_x$, то при указанном подходе к вопросу это обстоятельство может быть учтено в уравнении Бернулли величиной корректива α_c (см. ниже п. 6°).

Действительные линии тока в случае турбулентного потока должны представлять собой весьма неопределенные кривые, всегда меняющиеся во времени. При рассмотрении же осредненного потока (модели Рейнольдса – Буссинеска) получаем среднестатистические линии (или поверхности) тока (построенные на основе скоростей $\bar{u}$) и среднестатистические элементарные струйки, которые не изменяются во времени, если мы имеем установившееся движение (в среднем). Для такого движения указанные среднестатистические поверхности тока должны быть образованы площадками, характеризующимися условием (4-51').

Надо отметить, что живые сечения осредненного потока, также как и живые сечения действительного ламинарного потока, не являются поверхностями равного напора H_e. Осредненный поток дает нам вихревое (не потенциальное) движение.

Следует подчеркнуть, что исключаемое из рассмотрения турбулентное перемешивание (при переходе к осредненному потоку) существенно влияет на величину потерь напора; это обстоятельство приходится дополнительно учитывать так, как то поясняется в § 4-7.

В некоторых случаях практики при турбулентном движении жидкости в нее можно ввести (в весьма малом количестве) особые полимерные добавки, которые, двигаясь вместе с жидкостью, приглушают турбулентное перемешивание, причем, как показывает опыт, потери напора резко снижаются. Подчеркнем, что, как видно из всего сказанного выше, модель Рейнольдса – Буссинеска (модель осредненного потока), которой для расчета мы заменяем действительный турбулентный поток, представляет собой некоторый особый воображаемый ламинарный поток.

5°. Средняя скорость при турбулентном движении жидкости. Не следует смешивать термины «средняя скорость» v и «осредненная скорость» $\bar{u}$.[1] В первом случае мы проводили осреднение по живому сечению (для данного момента времени), во втором случае – по времени (в данной точке пространства).

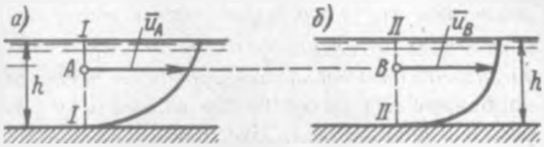


Рис. 4-12. Сопоставление потоков, характеризуемых различной интенсивностью пульсации скоростей

В случае ламинарного движения скорость v есть средняя из действительных скоростей u. В случае же турбулентного движения скорость v есть средняя не из действительных скоростей, а уже из осредненных скоростей; чтобы получить скорость v, в этом случае следует дважды прибегать к осреднению; сперва осредняем продольные скорости по времени в отдельных точках поперечного сечения, а затем полученные $\bar{u}$ осредняем по поперечному сечению потока.

6°. Кинетическая энергия турбулентного потока. Изобразим на рис. 4-12 два одинаковых призматических русла; будем считать, что потоки на рис. 4-12 характеризуются одинаковыми расходами Q и одинаковыми глубинами h, а следовательно, одинаковыми средними скоростями v.

Рассмотрим два живых сечения: $I-I$ (рис. 4-12, *а*) и $II-II$ (рис. 4-12, *б*). Предположим, что в некоторых двух сходственных точках A и B указанных живых сечений осредненные продольные скорости $\bar{u}_A$ и $\bar{u}_B$ оказались равными: $\bar{u}_A = \bar{u}_B$. При таком положении в намеченных сходственных точках (A и B) пульсация скоростей $(u_a)_x$ может быть, вообще говоря, различной; например, в точке A размах пульсации может быть большим (рис. 4-13, *а*),[2] а в точке B – малым (рис. 4-13, *б*).

Сопоставляя между собой потоки на рис. 4-12, *а* и *б*, легко видеть, что оба эти потока, имея одинаковую среднюю скорость v, в общем случае могут характеризоваться различной структурой. При этом поток с повышенной турбулентностью (рис. 4-13, *а*) всегда будет обладать большей кинетической энергией.

Можно считать, что кинетическая энергия турбулентного потока слагается из двух величин:

а) кинетической энергии, подсчитанной исходя из осредненных скоростей $\bar{u}$;

б) кинетической энергии, подсчитанной исходя из пульсационных скоростей u'.

Если в случае ламинарного режима удельная кинетическая энергия выражается величиной $\frac{\alpha v^2}{2g}$, где α – корректив, учитывающий только неравномерность

---

[1] Далее, как правило, горизонтальных черточек над буквой u, а также p, ставить не будем.

[2] На рис. 4-13, *а* для примера показан случай интенсивной турбулентности, когда в некоторые моменты времени актуальные скорости оказываются направленными даже в сторону, противоположную общему движению.

распределения скоростей по живому сечению (корректив кинетической энергии), то в случае турбулентного режима удельная кинетическая энергия выражается величиной $\frac{\alpha_c v^2}{2g}$, где

$$\alpha_c = \alpha + \alpha_п, \tag{4-54}$$

причем здесь $\alpha_п$ – дополнительный корректив, учитывающий пульсацию продольных скоростей $(u_a)_x$ в отдельных точках поперечного сечения потока.

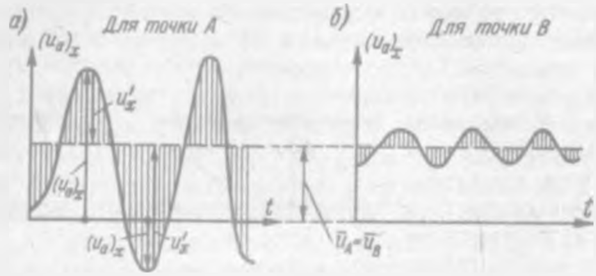


Рис. 4-13. Графики пульсации продольной актуальной скорости для потоков на рис. 4-12

Величину $\alpha_п$ приходится, однако, учитывать только при наличии интенсивной турбулентности, которая может иметь место при неравномерном движении; для турбулентного равномерного движения величиной $\alpha_п$ можно пренебрегать.

Заметим в заключение, что в связи с различной степенью пульсации скоростей для потоков на рис. 4-12, *а* и *б*, распределение осредненных скоростей *u* по живым сечениям для этих потоков должно получиться разным (формы эпюры скоростей на рис. 4-12, *а* и *б* должны быть различными; см. § 4-7 и 4-8).

§ 4-7. ТУРБУЛЕНТНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОСРЕДНЕННОМ ПОТОКЕ

В действительном турбулентном потоке имеются обычные касательные напряжения τ, называемые актуальными. Поле таких напряжений, в связи с турбулентностью, должно изменяться во времени. Если бы для данного момента времени нам было известно такое поле, то мы могли бы для этого момента времени, используя обобщенный закон Ньютона (см. сноску на с. 136), вычислить с некоторым приближением и поле актуальных касательных напряжений.

«Турбулентные касательные напряжения» $\tau_т$ не следует смешивать с актуальными напряжениями τ действительного турбулентного потока. Напряжения $\tau_т$ не существуют в действительном потоке; они являются воображаемыми; их мысленно вводят в осредненный поток (в модель Рейнольдса – Буссинеска), чтобы в определенном отношении (см. ниже) приблизить модель осредненного потока к действительности.

Поясним этот вопрос подробнее.

Переходя от действительного турбулентного потока к осредненному потоку (к модели), мы отбрасываем поперечные пульсационные скорости $u'_z = u_z$. В модели осредненного потока остаются только продольные составляющие скоростей, т. е. величины $\bar{u}_x$ (которые условно обозначают буквой *u*).

Вместе с тем, отброшенные скорости u_z влияют на формирование эпюры продольных скоростей u, а следовательно, влияют и на величину потерь напора.

Имея это в виду, чтобы компенсировать влияние (на эпюру продольных скоростей) отбрасываемых скоростей u_z, и было предложено ввести в модель осредненного потока воображаемые (несуществующие) продольные касательные напряжения $\tau_т$. При этом величину $\tau_т$ стремятся подобрать так, чтобы количественное влияние $\tau_т$ на эпюру скоростей u соответствовало количественному влиянию на эту же эпюру отброшенных поперечных скоростей u_z.

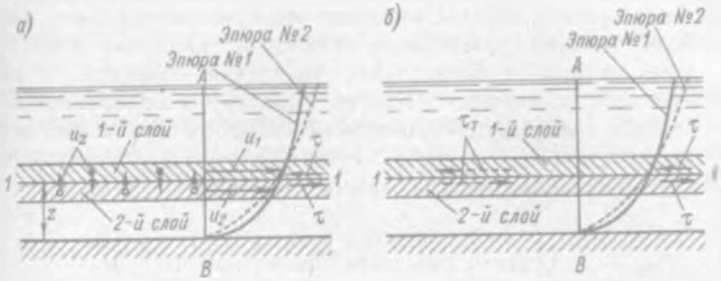


Рис. 4-14. К вопросу о турбулентных касательных напряжениях: *а* – «действительный» поток; имеет место поперечный обмен частицами жидкости (исключенный при переходе к осредненному потоку); *б* – модель осредненного потока; введены воображаемые касательные напряжения $\tau_т$ (компенсирующие исключенные скорости u_z)

На рис. 4-14, *а* представлена *схема действительного потока*, который характеризуется наличием поперечного обмена частицами жидкости: см. на рисунке «черные» частицы, которые имеют относительно большие продольные скорости u_1, причем эти частицы со скоростью $u_z\downarrow$ переходят в нижний (2-й) слой жидкости и ускоряют его движение; см. также на этом рисунке «белые» частицы, которые имеют относительно малые продольные скорости u_2, причем они со скоростью $u_z\uparrow$ переходят из 2-го слоя в 1-й слой жидкости и замедляют движение этого слоя. На схеме *а* показано две эпюры скоростей: эпюра *№ 1* – действительная эпюра продольных скоростей u и эпюра *№ 2* – искаженная эпюра, получающаяся в том случае, если исключим из рассмотрения скорости u_z[1].

На рис. 4-14, *б* показана *схема модели Рейнольдса – Буссинеска*, которая характеризуется отсутствием турбулентного обмена ($u_z = 0$); для такой схемы мы должны получить упомянутую выше искаженную эпюру скоростей *№ 2*; однако, вводя в эту схему вместо скоростей u_z воображаемые касательные напряжения $\tau_т$ (соответствующей величины), мы можем исправить искаженную эпюру № 2 и получить вместо нее «истинную» эпюру *№ 1*.[2] Как видно, в действительном потоке (схема *а*) действуют только «ньютоновские касательные напряжения» τ (§ 4-3); в модели Рейнольдса – Буссинеска (схема *б*) вдоль поверхности *1 – 1* действуют касательные напряжения равные $(\tau + \tau_т)$.

---

[1] Предполагается, что площади эпюр *№ 1* и *№ 2* должны быть равны.

[2] Замену поперечных скоростей u_z касательными напряжениями иногда поясняют на следующем примере. Представим себе, что по реке движутся рядом (в данный момент времени), но с разными скоростями два судна, нагруженные камнями. Положим, что камни с судна, идущего с меньшей скоростью, перебрасываются

Чтобы определить необходимую величину $\tau_т$, используют как бы постулат, который условно можно представить такой записью:[1]

$$\delta[КД(М)\uparrow\downarrow]_д = ИС(\tau_т)_в,$$

где в левой части уравнения приводится приращение количества движения (*КД*) некоторого элементарного объема жидкости на соответствующем его перемещении, обусловленное турбулентным обменом; как видно, эта часть уравнения относится к действительному потоку (рис. 4-14, *а*); в правой части уравнения приводится импульс воображаемых сил трения (на соответствующем перемещении); эта часть уравнения относится к воображаемому потоку (рис. 4-14, *б*).

Из сказанного, между прочим, вытекает, что приведенная выше зависимость не может быть названа уравнением количества движения (импульса сил), поскольку левая и правая части этого уравнения относятся к различным объектам: левая к действительному потоку, а правая – к воображаемому потоку.

Решая особым (весьма приближенным) способом уравнение, отражаемое приведенной выше условной записью, Буссинеск получил формулу для $\tau_т$, по своей структуре совпадающую с зависимостью (4-24):[2]

$$\tau_т = \eta_т \left|\frac{du}{dn}\right|, \tag{4-55}$$

где $\frac{du}{dn}$ – градиент скорости; он имеет тот же смысл, что и в зависимости (4-24); здесь только под u надо понимать осредненную продольную скорость;[3] $\eta_т$ – коэффициент пропорциональности, называемый динамическим коэффициентом турбулентной вязкости или турбулентного обмена.[4]

Согласно Л. Прандтлю коэффициент $\eta_т$ выражается зависимостью (полученной в предположении отсутствия молекулярной вязкости):

$$\eta_т = \rho l^2 \frac{du}{dn}, \tag{4-56}$$

где величину l принято называть длиной пути смешения или перемешивания; разные авторы приписывают величине l различный физический смысл; данную величину выражают в виде

$$l = \varkappa z, \tag{4-57}$$

на судно, идущее с большой скоростью, и наоборот: камни с судна, движущегося с большей скоростью, перебрасываются на судно, идущее с меньшей скоростью. Ясно, что в результате такой переброски камней судно, идущее с большей скоростью (получив некоторое количество камней, обладающих небольшими поступательными скоростями, равными скорости судна, идущего с малой скоростью) будет, в связи с инерцией переброшенных камней, замедлять свой ход; судно же, идущее с меньшей скоростью – ускорять свой ход.

Ясно также, что тот же самый эффект мы можем получить не перебрасывая камни с одного судна на другое, а введя между бортами двух рассмотренных судов силу трения (являющуюся парной) определенной величины; такое воображаемое трение будет способствовать замедлению быстро идущего судна и ускорению медленно идущего судна (см. стр. 149).

[1] Эта запись может быть подтверждена на основе анализа так называемых уравнений Рейнольдса (см. ниже).

[2] Вывод этой формулы приведен петитом [4-11, с. 123–126].

[3] Далее вертикальные черточки у $\frac{du}{dn}$ опускаем, считая, что ось n всегда направлена в сторону увеличивающихся скоростей u.

[4] Иногда динамический коэффициент турбулентной вязкости обозначается буквой A.

где z – расстояние от стенки русла до точки, в которой определяется турбулентное касательное напряжение; $\varkappa$ – «универсальная постоянная Прандтля»; согласно опытам Никурадзе для круглой трубы $\varkappa \approx 0,4$.

Как видно из (4-56), величина динамического коэффициента $\eta_т$ пропорциональна градиенту скорости, причем коэффициент $\eta_т$ в отличие от коэффициента η (коэффициента молекулярной вязкости) зависит от характера движения жидкости.

Аналогично (3-128) можем написать [учитывая также зависимость (4-56)]:

$$\nu_т = \frac{\eta_т}{\rho} = l^2 \frac{du}{dn}, \tag{4-58}$$

где $\nu_т$ называется кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости или турбулентного обмена.

В общем случае осредненный поток должен одновременно обладать и молекулярной и турбулентной вязкостями. Поэтому полное суммарное касательное напряжение τ записывают иногда (с некоторым приближением) в виде

$$\tau = \eta \frac{du}{dn} + \eta_т \frac{du}{dn}. \tag{4-59}$$

В случае ламинарного движения второй член правой части (4-59) отпадает; при этом напряжение трения на стенке τ_0 получается пропорциональным первой степени средней скорости. В случае турбулентного движения при достаточно больших числах Рейнольдса второй член правой части (4-59) значительно превышает первый; при этом с молекулярной вязкостью можно вовсе не считаться; в результате τ оказывается прямо пропорциональным второй степени средней скорости (см. ниже § 4-9).

В случае турбулентного движения в условиях не слишком больших чисел Рейнольдса оба слагаемых правой части (4-59) могут получиться соизмеримыми, причем τ_0 оказывается пропорциональным средней скорости в степени, не равной двум.

Для осредненного турбулентного потока, когда действует зависимость (4-59), эпюра турбулентных касательных напряжений $\tau_т$ для круглой трубы может быть схематично представлена площадью *Oca* (см. рис. 4-4); на этом рисунке через $\tau_м$ обозначены касательные напряжения, обусловленные молекулярной вязкостью.

Необходимо учитывать, что при желании описать то или другое достаточно сложное физическое явление (например, явление турбулентного движения жидкости) приближенной математической зависимостью, устанавливающей связь между различными характеристиками (параметрами) данного явления, часто поступают следующим образом. Сперва создают в своем воображении так называемую неполную модель данного явления (неполную в том смысле, что эта модель не полностью отражает рассматриваемое явление, несколько схематизируя, упрощая его). После этого подвергают анализу с использованием аппарата механики и математики не действительность (которая сложна и поэтому недоступна указанному анализу), а принятую неполную воображаемую модель. Именно, исходя из такой модели, и получают соответствующие расчетные зависимости и формулы. Само собой разумеется, что эти зависимости могут считаться приемлемыми только после экспериментальной их проверки (и часто после введения в них соответствующих поправочных коэффициентов, учитывающих отличие принятой модели от действительности). Различные авторы при исследовании определенного явления могут принимать различные модели и получать при этом разные результаты. Само собой разумеется, что удачной моделью будет та, которая приведет нас к результатам, достаточно хорошо согласующимся с опытными данными. Иногда мы можем столкнуться с таким случаем, когда модель, по своему виду больше отличающаяся от действительности, дает лучшие **количественные** результаты, чем модель, отличающаяся от действительности в меньшей мере и т. п.

Именно с учетом высказанных соображений и следует рассматривать решения, упоминавшиеся выше, а также решения, о которых мы будем говорить в последующем изложении.

Из вывода, приведенного в § 2-2, можно видеть, что, прилагая к граням рассматриваемой в этом параграфе призмы касательные напряжения, мы при этом должны изменить величину нормальных напряжений с тем, чтобы элементарная призма осталась в равновесии (в данном случае в «динамическом равновесии»). Поэтому можно утверждать, что осредненный поток (модель Рейнольдса – Буссинеска) должен характеризоваться наличием не только дополнительных турбулентных **касательных напряжений**, но и наличием еще дополнительных **турбулентных нормальных напряжений**.

В заключение отметим, что рассматривая осредненный поток вязкой (реальной) жидкости и прилагая к нему уравнение Навье – Стокса (см. § 3-3), Рейнольдс получил три особых уравнения равновесия жидкости, учитывающих осреднение потока во времени. Эти уравнения, содержащие некоторые дополнительные члены, называются уравнениями Рейнольдса (их мы не приводим).

§ 4-8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ СКОРОСТЕЙ ПО ЖИВОМУ СЕЧЕНИЮ ПОТОКА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РАВНОМЕРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. ВЯЗКИЙ ПОДСЛОЙ. ГЛАДКИЕ И ШЕРОХОВАТЫЕ ТРУБЫ. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

1°. Общий характер распределения осредненных скоростей по живому сечению потока при турбулентном движении. Вязкий подслой. Представим на рис. 4-15 эпюру осредненных скоростей для живого сечения AB. Как показывает опыт, эта эпюра характеризуется следующим:

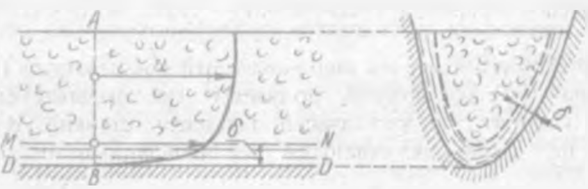


Рис. 4-15. Эпюра скоростей (осредненных) при турбулентном движении; δ – толщина вязкого подслоя

1) вблизи стенок скорость u вдоль линии BA резко увеличивается, т. е. в этом месте $\frac{du}{dn}$ имеет большую величину;

2) на некотором удалении от стенки u изменяется относительно мало; $\frac{du}{dn}$ в этом месте имеет относительно малую величину.

При помощи подкрашивания движущейся жидкости можно убедиться в том, что жидкость из центральной части потока переносится к боковым границам потока; наоборот, жидкость от границ потока (с низшим содержанием кинетической энергии) переносится к центру потока. Именно в результате такого турбулентного перемешивания распределение скоростей по живому сечению в средней части потока оказывается при турбулентном движении значительно более равномерным, чем при ламинарном.

Если в случае ламинарного напорного движения в круглой трубе $v/u_{макс} = 0{,}5$ (где $u_{макс}$ – скорость по оси трубы), то в случае турбулентного движения в такой трубе обычно, как показывает опыт, $v/u_{макс} = 0{,}70 \div \div 0{,}90$ (с увеличением числа Рейнольдса Re это отношение увеличивается; оно зависит также от шероховатости стенок русла).

Согласно исследованиям Л. Прандтля в турбулентном потоке скорость движения жидких частиц непосредственно у стенки равна нулю. В соответствии с этим принято считать, что вблизи стенок русла имеется тонкий слой жидкости толщиной δ, где скорости столь малы, что в пределах этого слоя получается движение жидкости, близкое к ламинарному. Этот слой называется вязким (иногда «ламинарным») подслоем. Толщина его мала

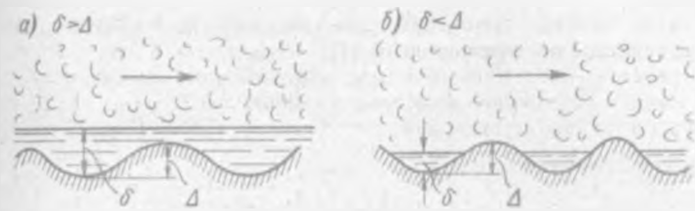


Рис. 4-16. Гладкие (*а*) и шероховатые (*б*) русла

составляет, например, сотые или тысячные доли глубины потока или диаметра трубопровода; на рис. 4-15 толщина ламинарного подслоя преувеличена – показана не в масштабе). Между так называемым турбулентным ядром потока и вязким подслоем имеется тонкий переходной участок, в пределах которого пульсации скоростей резко снижаются.

2°. **Гидравлически гладкие и шероховатые трубы.** На рис. 4-16 обозначены: Δ – высота выступов шероховатости стенки русла и δ – толщина вязкого подслоя.

При наличии схемы *а* выступы шероховатости покрываются (сглаживаются) вязким подслоем (δ > Δ), причем получаем так называемые гладкие стенки (иногда говорят «гидравлически гладкие» стенки). В этом случае потери напора по длине оказываются не зависящими от шероховатости стенок русла.

При наличии схемы *б* выступы шероховатости не покрываются полностью вязким подслоем (δ < Δ); эти выступы «вклиниваются» (как отдельные «бугорки») в турбулентную зону, и о них могут «ударяться» жидкие частицы турбулентного ядра потока [1]. В этом случае потери напора по длине h_l зависят от шероховатости стенок русла.

Особыми исследованиями было установлено, что толщина вязкого подслоя δ уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Отсюда ясно, что понятия гладкой и шероховатой стенок являются понятиями относительными: одна и та же стенка в одних условиях (при малых Re) может быть «гладкой», в других же условиях (при больших Re) может быть «шероховатой».

3°. **Зависимости для построения эпюры осредненных скоростей в случае напорных круглых труб при турбулентном движении.** Вопросу о распределении осредненных скоростей по живому сечению турбулентного потока посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ.

---

[1] При этом обтекание выступов шероховатости происходит с отрывом струи от них (см. далее § 4-14).

Рассмотрим для примера круглоцилиндрическую трубу (см. рис. 4-6).

Для того чтобы получить уравнение кривой ACB, ограничивающей эпюру осредненных продольных скоростей, выписываем, как и в случае ламинарного движения (см. § 4-4), два разных выражения для касательного напряжения (см. продольный центральный «жидкий столб» на рис. 4-6):

1) уравнение равномерного движения (4-18) в виде

$$\tau_т = \gamma R'J;$$

2) уравнение для турбулентного касательного напряжения (4-55)

$$\tau_т = -\eta_т \frac{du}{dn}.$$

Решая эту систему уравнений, так же как и в случае ламинарного движения, получаем [см. уравнение (4-31)]

$$du = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\eta_т} Jr\,dr. \tag{4-60}$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$u = -\frac{1}{2}\gamma J \int_0^r \frac{1}{\eta_т} r\,dr, \tag{4-61}$$

где $\eta_т$ определяется соотношением (4-56).

В случае ламинарного движения, получив выражение, аналогичное (4-61), имели возможность вынести за интеграл величину η (как величину постоянную для данной жидкости). При этом уравнение (4-61) легко решалось. В случае турбулентного движения величина $\eta_т$ зависит от обстоятельств движения, которые различны для разных величин r. Поэтому для турбулентного движения уравнение (4-61) может быть решено только приближенно в результате использования дополнительных допущений и гипотез. Такая задача была решена Л. Прандтлем, причем им был получен логарифмический закон распределения скоростей по живому сечению круглоцилиндрической напорной трубы. Эту же задачу решали и другие исследователи (Карман, Тейлор, А. Н. Патрашев и др.).

Зависимость Прандтля для гладких труб после введения в нее некоторых эмпирических коэффициентов, найденных И. Никурадзе, имеет вид:

$$\frac{u}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{(r_0 - r)v_*}{\nu} + 5{,}50, \tag{4-62}$$

где r_0 – радиус трубы; r – расстояние от центра живого сечения до точки, где определяется скорость u; $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ – особое обозначение. Зависимость, аналогичная (4-62), была предложена Л. Прандтлем и для шероховатых труб.

Величину v_*, имеющую размерность скорости, называют скоростью трения или «динамической скоростью»; величину v_* можно найти, исходя из основного уравнения равномерного движения (4-15):

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = \frac{\tau_0}{\rho g} = RJ,$$

откуда

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{RJ}\sqrt{g}, \tag{4-63}$$

где гидравлический радиус $R = D/4$.

Полученные для круглоцилиндрических напорных труб полуэмпирические уравнения кривой ABC (рис. 4-17) не лишены некоторых недостатков; они не всегда удовлетворяют пограничным условиям: при $r = r_0$ иногда дают скорость (непосредственно на стенке – в самой близи стенки, где имеется ламинарный подслой) $u = -\infty$; по зависимости Прандтля величина градиента скорости $\frac{du}{dr}$ на оси трубы оказывается не равной нулю, что не соответствует действительности. Вместе с тем эти формулы дают достаточно хорошее совпадение с опытами для основной части ядра потока.

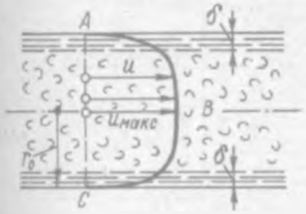


Рис. 4-17. Распределение осредненных скоростей в круглой трубе при турбулентном движении

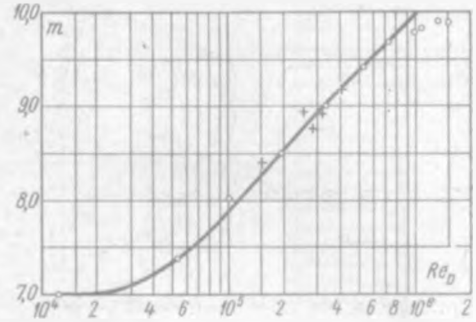


Рис. 4-18. Экспериментальный график для величины m в формуле (4-64)

Практически более удобными являются приближенные формулы, выражающие закон распределения скоростей в виде степенных функций.

Ка́рман (в 1921 г.) на основании теоретических исследований предложил записывать этот закон для гладких труб в виде:[1]

$$u = u_{\text{макс}}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{4-64}$$

где r_0 – радиус трубы; r – расстояние от центра живого сечения до точки, где измеряется скорость u; m – знаменатель показателя степени, зависящий от числа Рейнольдса Re_D (рис. 4-18); $u_{\text{макс}}$ – максимальная скорость (на оси трубы); об $u_{\text{макс}}$ см. § 4-8, 1°.

А. Д. Альтшуль в 1956 г. показал, что зависимость (4-64) действительна не только для гладких, но и для шероховатых труб (т. е. для всей области турбулентного движения), если величину показателя $1/m$ будем находить по формуле (о коэффициенте λ см. ниже § 4-9):[2]

$$\frac{1}{m} = 0{,}9\sqrt{\lambda}. \tag{4-65}$$

---

[1] Эта степенная формула является несколько менее точной, чем формулы, дающие логарифмический закон распределения скоростей. Зависимость типа (4-64) применялась и ранее, как чисто эмпирическая (с постоянным коэффициентом m) для расчета скоростей в реках.

[2] В другой форме подобная зависимость еще ранее предлагалась Г. В. Железняковым для квадратичной области сопротивления – для течения воды в реках (без использования коэффициента λ).

4°. **Пристенный пограничный слой.** Покажем на рис. 4-19 неподвижную горизонтальную пластинку AB достаточной длины. Далее, рассматривая плоскую задачу, будем считать, что на эту пластинку слева «набегает» горизонтальный поток реальной жидкости, причем эпюра скоростей, построенная для этого потока в вертикальном его сечении $O-O$ (см. рисунок) характеризуется величинами $u = \text{const}$ по всей высоте сечения $O-O$.

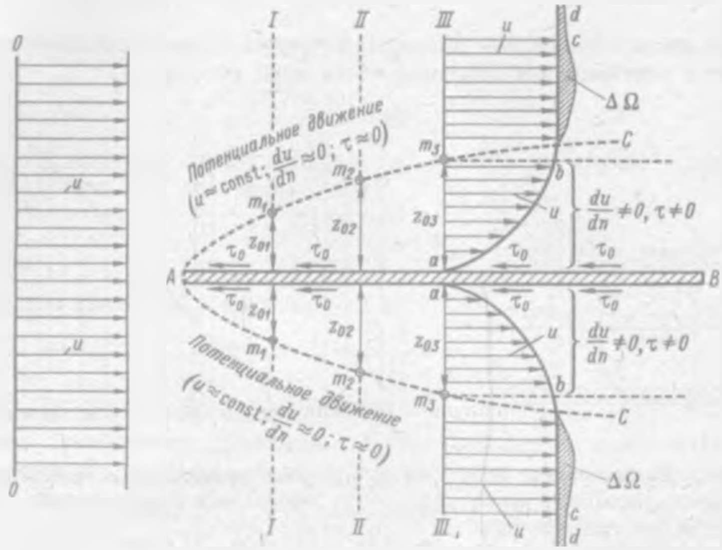


Рис. 4-19. Пристенные пограничные слои толщиной z_0 (возникающие у неподвижной пластинки AB; см. верхнюю и нижнюю области CAB)

Очевидно, реальная жидкость, набегая на пластинку AB, получает, например, на верхней поверхности этой пластинки [1] касательные напряжения трения τ_0 (подтормаживающее движение жидкости), причем непосредственно на данной поверхности пластинки скорость u оказывается равной нулю.

Рассматривая некоторое вертикальное сечение, например, сечение $III-III$, видим, что в связи с упомянутым подтормаживающим действием пластинки AB, эпюра скоростей u в данном сечении будет ограничена кривой $abcd$.[2] При этом в пределах участка высотой z_{03} (см. рисунок, участок живого сечения am_3) скорость u для сечения $III-III$ будет изменяться существенно; за пределами же этого участка скорость u будет изменяться пренебрежимо мало, а следовательно, в этой области мы будем иметь (для сечения $III-III$)

$$\frac{du}{dn} \approx 0 \text{ и } \tau \approx 0.$$

Аналогичная картина будет и в других вертикальных сечениях, например, в сечениях $I-I$ и $II-II$ (см. рисунок). Однако величины z_0 для всех этих сечений будут различны:

$$z_{0_1} < z_{0_2} < z_{0_3} \dots .$$

---

[1] Ниже будем рассматривать только верхнюю поверхность пластинки.

[2] Небольшой площадью $\Delta\Omega$ этой эпюры, обусловленной некоторой перестройкой набегающего потока (диктуемой уравнением неразрывности), пренебрегаем.

В связи со сказанным, можно наметить некоторую линию AC, выделяющую у стенки слой жидкости, характеризуемый следующим:

1) *высота (толщина) этого слоя z_0 по течению увеличивается;*

2) *в пределах его величины du/dn и τ существенно отличаются от нуля;*

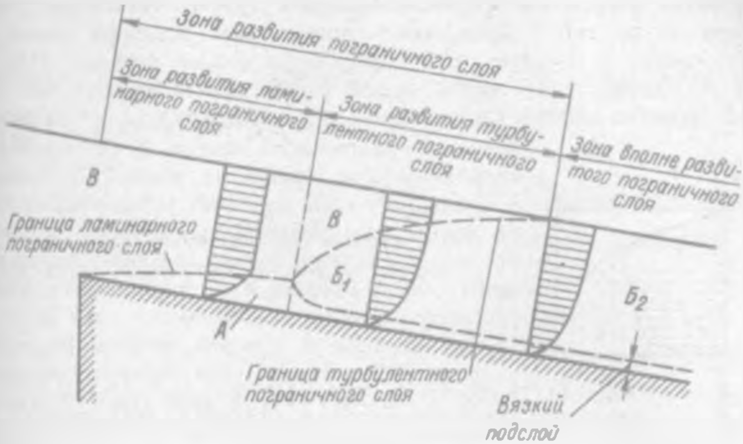


Рис. 4-20. Развитие пристенного пограничного слоя в начале канала

3) *за пределами его величины du/dn и τ изменяются (в соответствующих вертикальных сечениях) пренебрежимо мало, и следовательно, за указанными пределами вязкость жидкости можно не учитывать и считать жидкость как бы идеальной,*[1] *а движение жидкости потенциальным.*

Условимся пристенный слой, характеризуемый тремя отмеченными обстоятельствами, называть «*пристенным пограничным слоем*».

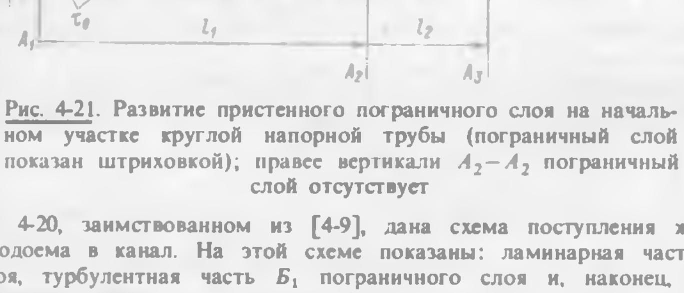


Рис. 4-21. Развитие пристенного пограничного слоя на начальном участке круглой напорной трубы (пограничный слой показан штриховкой); правее вертикали A_2-A_2 пограничный слой отсутствует

На рис. 4-20, заимствованном из [4-9], дана схема поступления жидкости из большого водоема в канал. На этой схеме показаны: ламинарная часть A пограничного слоя, турбулентная часть $Б_1$ пограничного слоя и, наконец, область B, характеризуемая столь малыми значениями du/dn, что величиной трения в этой области можно пренебречь. Зону B можем рассматривать как область идеальной жидкости и считать, что в ней имеется потенциальное безвихревое движение (см. § 3-4 и 3-5).

[1] В этой области реальная жидкость движется как твердое тело (см. рис. 3-4, *а*).

Трактуя понятие пристенного пограничного слоя несколько иначе, чем то было пояснено нами выше, автор данной схемы область $Б_2$ называет «вполне развитым пограничным слоем»» (хотя эта область не удовлетворяет 1-му и 3-му условиям, отмеченным выше).

5°. Развитие пограничного слоя в напорной трубе. «Начальный участок» потока. Если на рис. 4-21 представить поступление реальной жидкости из какого-либо сосуда в круглую трубу, имеющую весьма плавный вход, то в начальном состоянии A_1A_1 трубы будем иметь почти равномерную эпюру скоростей u. Далее на длине l_1 (до сечения A_2A_2) благодаря подтормаживающему действию напряжений трения τ_0 (действующих со стороны стенок трубы на жидкость) толщина z_0 пограничного слоя начинает увеличиваться по длине трубы (см. рисунок, на котором штриховкой показан пограничный слой, развивающийся в круглой трубе). В сечении A_2A_2 происходит «смыкание» рассматриваемого пограничного слоя (в точке b). Между верхней и нижней частями пограничного слоя на длине l_1 показана незаштрихованная область $a_1 - b - a_2$; внутри этой области имеем потенциальное движение жидкости: в любом вертикальном сечении этой области скорости $u = \text{const}$ (однако, по течению эти скорости увеличиваются).

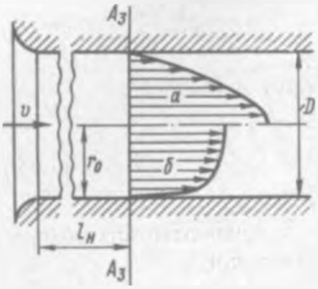


Рис. 4-22. Эпюры скоростей в конце начального участка: *а* – ламинарный режим, *б* – турбулентный режим

Рассматривая рис. 4-21, следует различать помимо участка, где располагается пограничный слой, еще участок потока длиной l_2 (между сечениями A_2A_2 и A_3A_3). В пределах этого участка происходит:

а) переформирование эпюры скоростей u, получившейся в сечении A_2A_2, в эпюру скоростей (показанную в сечении A_3A_3), свойственную равномерному движению;

б) изменение уровня пульсации скоростей до уровня, свойственного равномерному движению.

«*Начальным участком*» трубопровода следует называть участок длиной $l_н = l_1 + l_2$; на длине этого участка мы имеем неравномерное движение. Важно подчеркнуть, что приводимые ниже расчетные зависимости, служащие для определения потерь напора h_l, не могут быть, строго говоря, приемлемы для начального участка, где мы не имеем равномерного движения.

Выше мы говорили о турбулентном движении; надо учитывать, что аналогичный участок («начальный участок») должен иметь место и при ламинарном режиме.

Длина начального участка $l_н$ для круглых труб (согласно экспериментальным данным) может быть принята (для турбулентного движения)

$$l_н = (25 \div 50)\,D. \tag{4-66}$$

На рис. 4-22 представлены эпюры, сформировавшиеся в конце начального участка (в сечении A_3A_3) при ламинарном и при турбулентном движении. Как видно, максимальная толщина пограничного пристенного слоя в напорной круглой трубе (имеющая место в сечении A_3A_3) равна половине диаметра трубы.

В. ПОТЕРЯ НАПОРА ПО ДЛИНЕ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

§ 4-9. ФОРМУЛА ВЕЙСБАХА – ДАРСИ. КОЭФФИЦИЕНТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРЕНИЯ λ

Как показывают опыты, величина $\frac{\tau_0}{\gamma}$ (см. § 4-2) может быть выражена через скоростной напор следующим образом: [1]

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = \frac{\lambda}{4}\frac{v^2}{2g}, \tag{4-67}$$

где $\lambda/4$ – некоторый эмпирический коэффициент пропорциональности.

Сопоставляя (4-67) с (4-15), можем написать:

$$RJ = \frac{\lambda}{4}\frac{v^2}{2g}, \tag{4-68}$$

откуда, учтя, что $J = h_l : l$, получаем следующую общую зависимость для потерь напора по длине при равномерном установившемся движении:

$$\boxed{h_l = \lambda \frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g},} \tag{4-69}$$

где l – длина потока; R – гидравлический радиус.

Для круглых напорных труб $D = 4R$, и потому для этих труб общая зависимость (4-69) переписывается в виде:

$$\boxed{h_l = \lambda \frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}.} \tag{4-70}$$

Формула (4-70) называется формулой Вейсбаха – Дарси. Безразмерный коэффициент λ, входящий в нее, будем именовать коэффициентом гидравлического трения.

В случае ламинарного напорного движения жидкости в круглой трубе мы уже получили выше теоретическую формулу (4-46) для λ. При турбулентном течении λ находится по эмпирическим формулам.

Ранее считали, что коэффициент λ, входящий в выражение (4-70), является постоянной величиной; несколько позже его ставили в зависимость от средней скорости v или диаметра D. Некоторые авторы связывали величину λ только с шероховатостью стенок труб. Такого рода зависимости в настоящее время считаются устаревшими и неприемлемыми в практике.

Современные расчетные формулы для λ предусматривают зависимость этого коэффициента в общем случае только от шероховатости стенок русла и от числа Рейнольдса. Величину λ в случае круглых труб можно найти для турбулентного движения (так же как и для ламинарного движения; см. выше), зная закон распределения скоростей по живому сечению.

Действительно, формулу (4-70) можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{h_l}{l} D \frac{2g}{v^2} = J \frac{D}{4} g \frac{8}{v^2} \tag{4-71}$$

---

[1] При достаточно равномерном распределении τ_0 по смоченному периметру.

и затем, учтя (4-63), в виде

$$\lambda = RJg \frac{8}{v^2} = 8 \frac{v_*^2}{v^2}, \tag{4-72}$$

откуда

$$\frac{v}{v_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \tag{4-73}$$

Выражение для v/v_* можно найти из (4-62). Подставляя такое выражение в (4-73), нетрудно найти зависимость для величины λ.

Л. Прандтль в 1932 г. для гладких труб получил следующую формулу (исходя из некоторой неполной воображаемой модели; см. стр. 151 – 152):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg(\mathrm{Re}_D \sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \tag{4-74}$$

Блазиус в 1913 г. на основании обработки многочисленных опытов по исследованию движения жидкости в круглых гладких (латунных) трубах при числах Рейнольдса Re_D от 4000 до 100 000 установил эмпирическую зависимость

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}_D^{0,25}}. \tag{4-75}$$

Формулы для λ в случае шероховатых труб были предложены многими авторами. Прежде чем остановиться на пояснении тех из них, которые в настоящее время главным образом должны рекомендоваться для практического применения, осветим (в следующем параграфе) работу И. Никурадзе, обобщившего при помощи особого графика результаты всех исследований в области вопроса о потерях напора в круглых трубах.

§ 4-10. ИССЛЕДОВАНИЯ И. НИКУРАДЗЕ. ОБОБЩЕНИЕ ВОПРОСА О ПОТЕРЯХ НАПОРА

Представим на рис. 4-23 трубу диаметром D с задвижкой K и двумя пьезометрами $П$. При помощи задвижки K можно изменять скорость v в трубе, причем для каждой такой скорости, установившейся в трубе, можно по пьезометрам определять (в случае установившегося движения) потерю напора h_l на участке трубы длиной l.

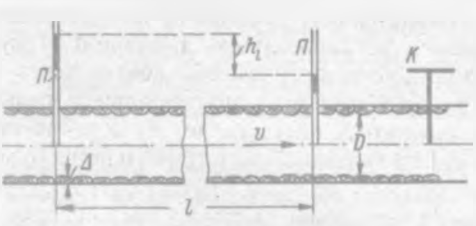


Рис. 4-23. Схема опытов Никурадзе

Коэффициент гидравлического трения λ, согласно формулам (4-70) и (3-135), можно выразить через Re_D:

$$\lambda = \frac{h_l}{l} 2g \frac{D^3}{\nu^2} \frac{1}{\mathrm{Re}_D^2},$$

причем по этой формуле, определив из опытов величины h_l, v и ν, можно вычислять значения $\lambda = f(\mathrm{Re}_D)$.

Проводя подобные опыты, И. Никурадзе исследовал (в 1933 г.) напорные круглоцилиндрические трубы, имеющие однозернистую равномерно распределенную искусственную шероховатость, которую он создавал, наклеивая на стенки трубы песчинки одинаковой высоты Δ на одинаковом расстоянии друг от друга. Результаты своих опытов

Никурадзе представил в виде особого графика, по осям которого он отложил безразмерные величины λ и Re_D, причем на таком графике был нанесен ряд кривых, вычисленных в соответствии с приведенной выше зависимостью; каждая кривая отвечала определенной так называемой **относительной шероховатости**:

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{D}, \tag{4-76}$$

где Δ можно назвать «высотой выступов шероховатости» (будем считать, что размер Δ весьма **мал сравнительно с диаметром** D).

Этот график (см. далее рис. 4-24) позволил в удобной форме обобщить вопрос о потерях напора (в случае равномерного установившегося движения несжимаемой жидкости в круглой трубе) и наглядно показать следующее:

1) коэффициент λ, входящий в формулы (4-69) и (4-70), в самом общем случае зависит *только* от Δ_r и Re_D;

2) имеются частные случаи движения жидкости, когда λ зависит или только от Δ_r, или только от Re_D;

3) имеются вполне определенные зоны сочетания λ и Re_D, для которых в формулах, выражающих пропорциональность (::) v^m величине h_l,

$$h_l :: v^m \tag{4-77}$$

показатель степени m приобретает вполне определенное значение (равное единице, двум и т. п.).

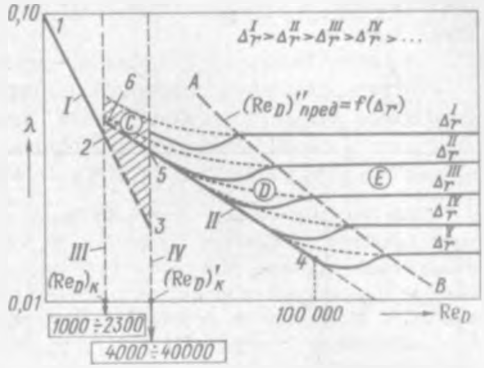


Рис. 4-24. Схема графика Никурадзе (кривые $\lambda = f(\mathrm{Re}_D)$ для различных Δ_r)

I – зона ламинарного режима, *C* – зона неустойчивого (переходного) режима, *II* – область гладких русел турбулентной зоны, *D* – область доквадратичного сопротивления шероховатых русел турбулентной зоны, *E* – область квадратичного сопротивления шероховатых русел турбулентной зоны

На рис. 4-24 показана схема графика Никурадзе. Пользуясь ею, поясним основные положения, вытекающие из рассмотрения данного графика, на котором показаны две «опорные» прямые: прямая *I*, построенная по уравнению (4-46) (см. линию *1 – 2 – 3*); эта прямая называется **прямой ламинарного режима**; прямая *II*, построенная исходя из уравнения Блазиуса (4-75); назовем ее **прямой Блазиуса**.

Откладывая в соответствующем масштабе по осям графика величины $\lg \mathrm{Re}_D$ (по горизонтальной) и $\lg \lambda$ (по вертикальной), мы на шкалах осей выписываем сами числа Re_D и λ (а не величины их логарифмов). Построение графика в таких логарифмических координатах позволяет «опорные» линии *I* и *II*, выражаемые степенными функциями, представить в виде прямых.

Все поле графика можно разбить на три зоны:

Первая зона – зона ламинарного режима; она представлена отрезком прямой *1–2*, построенной по уравнению (4-46). Здесь экспериментальные кривые $\lambda = f(\mathrm{Re}_D)$, найденные для разных Δ_r, сливаются в одну прямую линию, совпадающую с линией *1 – 2*.

Для этой зоны имеем следующее:

а) величины Re_D относительно малы, менее $(\mathrm{Re}_D)_к = 1000 \div 2300$ [см. формулу (3-136)];

б) потеря напора h_l не зависит от шероховатости, так как все кривые $\lambda = f(\mathrm{Re}_D)$, построенные для разных Δ_r, как то было отмечено, сливаются в одну прямую $1-2$;

в) потери напора прямо пропорциональны первой степени скорости v [как то следует из формул (4-45) и (4-46); в данном случае показатель степени $m = 1$];

г) величина λ определяется формулой (4-46).

Вторая зона — зона, расположенная между вертикалями *III* и *IV* (заштрихована), является зоной неустойчивого режима (см. § 3-24; зону (3) на рис. 3-42). Ее называют, как было отмечено выше, неустойчивой или переходной зоной (зоной, внутри которой происходит переход ламинарного режима в турбулентный и наоборот — турбулентного режима в ламинарный). Здесь:

а) числа Рейнольдса лежат в пределах от $1000 \div 2300$ до $4000 \div 40\,000$;

б) при движении жидкости по трубе на отдельных участках возникают отдельные области турбулентного режима, которые разрастаются, а затем исчезают и снова появляются. В связи с этим данная зона иногда называется зоной перемежающейся турбулентности.

Заметим, что когда турбулентные области в трубе разрастаются, растет и сопротивление движению жидкости (в связи с ростом турбулентных касательных напряжений трения), при этом скорость v уменьшается. Как только она делается меньше критической скорости, разросшиеся турбулентные области обращаются в ламинарные (или выносятся за пределы рассматриваемой части потока); после этого в связи с уменьшением потерь напора (обусловленным переходом турбулентного режима в ламинарный на отдельных участках трубы) скорость v увеличивается, причем турбулентные области снова появляются и т. д. В связи с таким характером движения в переходной зоне, представить это движение на графике какими-либо определенными кривыми нет возможности. Исключение здесь могут составить только случаи, когда ламинарный режим «затягивается» и имеет место по длине всего трубопровода (см. прямую $2-3$) или, когда в связи с особыми условиями движения турбулентный режим имеет место по длине всего трубопровода (см. линию $5-6$).

Дополнительно надо иметь в виду еще следующее обстоятельство, которое может затруднять определение потерь напора (и, следовательно, величин λ) для области неустойчивого режима.

Можно допустить, что при $Q = \mathrm{const}$ (а следовательно, и при $v = \mathrm{const}$) кинетическая энергия жидкости, находящейся в трубе (между рассматриваемыми пьезометрами; рис. 4-23) при турбулентном и ламинарном режимах является различной по величине. Такое положение обусловливается тем, что коэффициент α при ламинарном и турбулентном режимах имеет различное значение, кроме того, при турбулентном режиме происходит пульсация скоростей. В указанном случае при смене режимов разность показаний пьезометров не будет равна искомой потере напора h_l; она будет равна величине h_l плюс соответствующий так называемый инерционный напор (поясняемый далее в гл. 9), который определить в данном случае нет возможности.

Третья зона — зона турбулентного режима; эта зона располагается правее вертикали *IV*, отвечающей $\mathrm{Re}_D \approx 4000 \div 40\,000$. Данная зона в свою очередь разбивается на три области.

Первая область — «область гладких русел»; она представлена: а) при числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_D < 100\,000$ — прямой линией *II* и б) при числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_D > 100\,000$ — кривой линией, являющейся продолжением прямой *II*; данная кривая, начинающаяся от точки 4, на рис. 4-24 не показана (она будет представлена далее на рис. 4-25 в виде самой нижней кривой линии). Для первой области имеем:

а) h_l в пределах до чисел $\mathrm{Re}_D = 100\,000$ прямо пропорционально скорости v в степени $1{,}75$ $(m = 1{,}75)$, как то следует из формул (4-70) и (4-75);

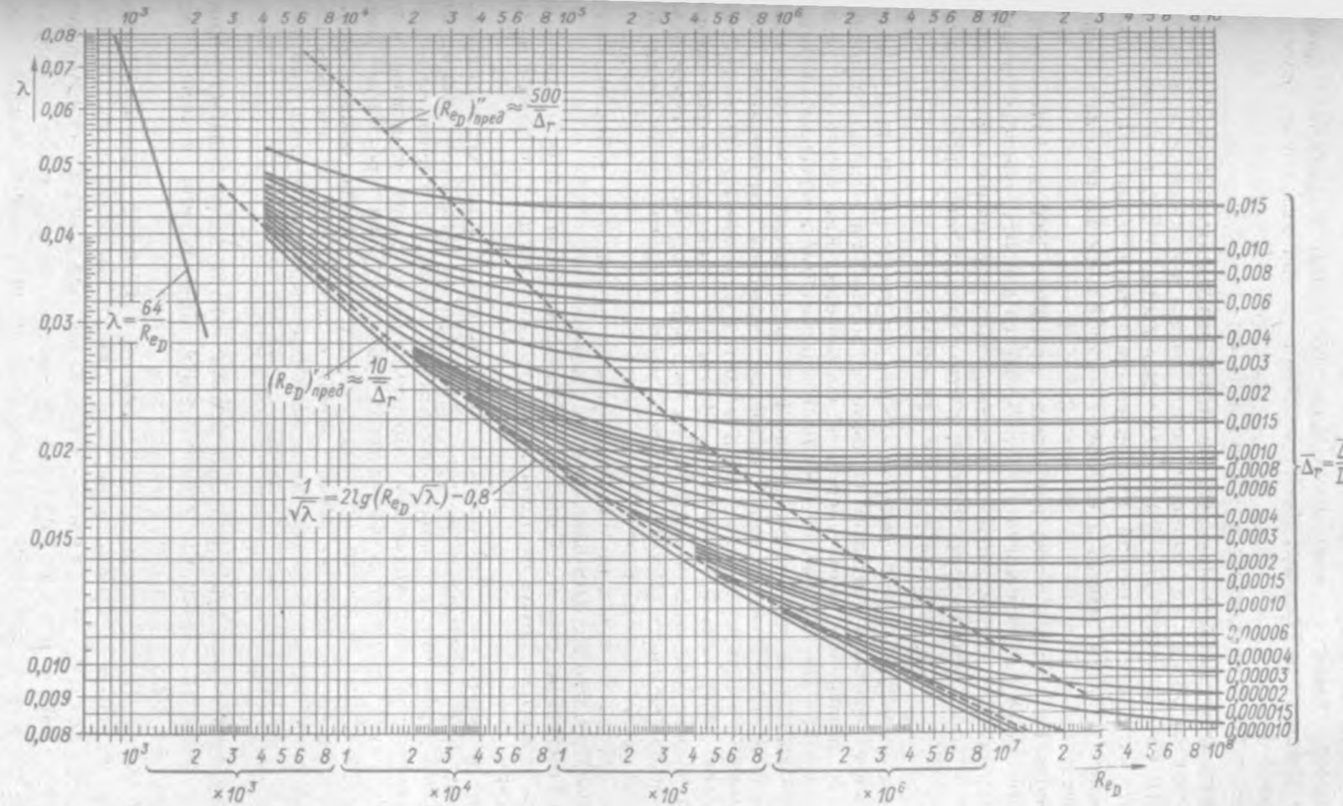


Рис. 4-25. **График Кольбрука для определения коэффициента λ гидравлического трения (для круглых и некоторых прямоугольных напорных труб)**

б) h_l не зависит от шероховатости, поскольку все кривые $\Delta_r = \text{const}$ сливаются в одну линию (здесь мы получаем гладкие трубы; выступы шероховатости покрыты ламинарным подслоем);

в) h_l, а также λ, зависит только от числа Рейнольдса, согласно формуле Блазиуса (4-75) или Прандтля (4-74),

$$\lambda = f(\text{Re}_D). \tag{4-78}$$

В т о р а я о б л а с т ь – «о б л а с т ь д о к в а д р а т и ч н о г о с о п р о т и в л е н и я ш е р о х о в а т ы х р у с е л», эта область лежит между прямой *II* и линией *AB*.

Согласно Никурадзе, кривые $\Delta_r = \text{const}$ в этой области имеют вид, показанный сплошными линиями; согласно опытам ряда других авторов, эти кривые имеют другой вид (см. штриховые линии). Такое расхождение объясняют различием геометрических форм шероховатости, имевшей место при проведении опытов. Считают, что кривые Никурадзе относятся к однозернистой равномерно распределенной шероховатости; штриховые же кривые – к шероховатости разнозернистой, свойственной, например, стальным и чугунным трубам.

Из сказанного выше ясно, что на левой границе рассматриваемой области кривые графика, опускаясь вниз, характеризуются в месте отрыва их от опорной прямой *II* показателем степени m, входящим в формулу (4-77), равным 1,75. На правой границе *AB* области, где кривые графика переходят в горизонтальные прямые, $m = 2{,}0$ (см. ниже). Можно показать, что поднимающиеся кверху сплошные линии Никурадзе (расположенные внутри рассматриваемой области), характеризуются показателем степени $m > 2{,}0$. Отсюда заключаем, что m в пределах данной области изменяется от 1,75 до 2,0, причем для однозернистой равномерно распределенной шероховатости этот показатель, согласно Никурадзе, в промежутке между $m = 1{,}75$ и $m = 2{,}0$ должен иметь максимум ($m_{\text{макс}} > 2{,}0$); для разнозернистой же шероховатости, по данным других авторов, показатель m в пределах данной области монотонно возрастает от 1,75 до 2,0.

Из графика видно, что для данной области λ, а также h_l зависят как от числа Рейнольдса, так и от относительной шероховатости

$$\lambda = f(\text{Re}_D,\ \Delta_r). \tag{4-79}$$

Т р е т ь я о б л а с т ь – «о б л а с т ь к в а д р а т и ч н о г о с о п р о т и в л е н и я ш е р о х о в а т ы х р у с е л»; эта область располагается правее линии *AB*. Здесь:

а) потеря напора прямо пропорциональна квадрату скорости v ($m = 2{,}0$);

б) коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса Re_D (все линии графика – прямые, параллельные горизонтальной оси);

в) h_l и λ зависят от относительной шероховатости:

$$\lambda = f(\Delta_r). \tag{4-80}$$

В заключение необходимо отметить, что общий качественный характер связей, полученный Никурадзе для круглоцилиндрических напорных труб, разумеется, м о ж н о р а с п р о с т р а н и т ь и н а п о т о к и д р у г о г о в и д а (н а п о р н ы е и б е з н а п о р н ы е). Важно подчеркнуть, что после работы Никурадзе стало совершенно ясно, что п р и в ы п о л н е н и и л ю б ы х г и д р а в л и ч е с к и х р а с ч е т о в н е т н а д о б н о с т и р а з л и ч а т ь ж и д к о с т и р а з н о г о в и д а (как то делали ранее, когда предлагали отдельные расчетные формулы для вычисления потерь напора в случае воды, нефти, разных масел и т. п.). Именно из рассмотрения графика Никурадзе делается очевидным, что *в гидравлике при определении потерь напора следует иметь в виду жидкость вообще, движение которой характеризуется безразмер-*

[ти]м числом Рейнольдса определенной величины (зависящим, в частности, от [та]ких физических характеристик рассматриваемой жидкости, как ее коэффициент [в]язкости и ее плотность).

§ 4-11. ПРАКТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРЕНИЯ λ ДЛЯ НАПОРНЫХ ТРУБ (КРУГЛЫХ И НЕКОТОРЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ). ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Как было отмечено выше, различают шероховатые трубы, имеющие однозернистую шероховатость (с которыми работал Никурадзе) и трубы, имеющие разнозернистую шероховатость (когда выступы шероховатости имеют неодинаковую форму и размеры, расстояние между ними также различно). Трубы, обычно встречающиеся в практике, так называемые технические, имеют разнозернистую шероховатость или являются гладкими. Ниже поясним расчет технических труб.

1°. Напорные шероховатые технические трубы (трубы с разнозернистой шероховатостью). Для этих труб в 1938 г. Кольбрук на основании своих опытов, а также с учетом исследований других авторов, предложил формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{2{,}5}{\mathrm{Re}_D}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\bar{\Delta}_r}{3{,}7}\right), \qquad (4\text{-}81')$$

где $\bar{\Delta}_r$ – осредненная относительная шероховатость [см. формулу (4-76)].

По этой формуле был построен график[1] (рис. 4-25). Пользуясь этим графиком, можно определить коэффициент λ в случае технических труб для всех трех областей турбулентной зоны.

Для квадратичной области сопротивления шероховатых труб формула (4-81') упрощается и приобретает вид формулы Прандтля (предложенной им для шероховатых труб):

$$\lambda = \frac{0{,}25}{\left(\lg\frac{\bar{\Delta}_r}{3{,}7}\right)^2}. \qquad (4\text{-}81'')$$

Для технических труб под величиной $\bar{\Delta}$ понимают некоторую среднюю высоту выступов шероховатости. Такую осредненную геометрическую характеристику $\bar{\Delta}$ установить для рассматриваемой трубы путем непосредственного измерения выступов шероховатости нельзя. Поэтому при определении среднего значения $\bar{\Delta}$ для данной трубы поступают следующим образом.

Рассматривают квадратичную область сопротивления и для этой области опытным путем, пользуясь формулой (4-70), находят для данной трубы величину λ. Затем по формуле (4-81″) вычисляют искомое значение $\bar{\Delta}$. Найденное таким образом среднее значение $\bar{\Delta}$ называют эквивалентной шероховатостью.

Эквивалентная шероховатость зависит: а) от материала и способа изготовления и соединения труб, б) от продолжительности эксплуатации труб, в процессе которой могут возникнуть коррозия стенок или инкрустации (образование наростов на стенках). Численные значения эквивалентной шероховатости $\bar{\Delta}$, найденные указанным путем для разных труб, приводятся в табл. 4-2. По этой таблице и определяют $\bar{\Delta}$ при выполнении практических расчетов.

[1] График, показанный на рис. 4-25, опытным путем был получен также рядом других авторов: Муди (в 1944 г.), Г. А. Муриным (в 1948 г.) и др.

Таблица 4-2

Шероховатость $\bar{\Delta}$ труб и каналов[1]

Характеристика поверхности труб и каналов	$\bar{\Delta}$, мм
I. Цельнотянутые трубы	
Из латуни	0,0015 – 0,0100
Новые стальные	0,020 – 0,100
Стальные водопроводные, находящиеся в эксплуатации	1,20 – 1,50
II. Цельносварные стальные трубы	
Новые или старые в хорошем состоянии	0,04 – 0,10
Бывшие в эксплуатации	≈ 0,10 – 0,15
С двойной поперечной клепкой, сильно корродированные	2,0
III. Чугунные трубы	
Новые	0,25 – 1,00
Новые битумизированные	0,10 – 0,15
Асфальтированные	0,12 – 0,30
Бывшие в эксплуатации, корродированные	1,0 – 1,5
IV. Бетонные и асбестоцементные трубы	
Бетонные трубы при хорошей поверхности с затиркой	0,3 – 0,8
Бетонные трубы при среднем качестве работ	2,5
Бетонные трубы с грубой (шероховатой) поверхностью	3,0 – 9,0
Асбестоцементные трубы новые	0,05 – 0,10
Асбестоцементные трубы, бывшие в эксплуатации	≈ 0,60
V. Деревянные и стеклянные трубы	
Деревянные трубы из тщательно оструганных досок	0,15 ориентировочно
Деревянные трубы из хорошо оструганных досок	0,30 ориентировочно
Деревянные трубы из нестроганных хорошо пригнанных досок	0,70 ориентировочно
Трубы из чистого стекла	0,0015 – 0,0100
VI. Облицовка каналов	
Хорошая штукатурка из чистого цемента	0,05 – 0,22
Штукатурка цементным раствором с ожелезнением	0,5
Штукатурка по металлической сетке	10 – 15
Шлакобетонные плиты	1,5

[1] Эти данные в сокращенном виде заимствованы из книги [4-4].

Зная для данной трубы $\bar{\Delta}$, находим по (4-76) значение $\bar{\Delta}_r$; затем по формуле (3-135) определяем Re_D. Имея для рассматриваемой трубы $\bar{\Delta}_r$ и Re_D, можем найти λ по графику на рис. 4-25 или по формулам (4-81).

Формула (4-81′) неудобна для вычисления (величину λ по этой формуле приходится находить подбором). А. Д. Альтшуль предложил вместо зависимости (4-81′) более простую формулу:

$$\lambda \approx 0{,}1\left(1{,}46\bar{\Delta}_r + \frac{100}{\mathrm{Re}_D}\right)^{0{,}25} \approx 0{,}11\left(\bar{\Delta}_r + \frac{68}{\mathrm{Re}_D}\right)^{0{,}25}. \qquad (4\text{-}82')$$

которая для квадратичной области сопротивления приводится к формуле Шифринсона:

$$\lambda \approx 0{,}11\sqrt[4]{\overline{\Delta}_r}, \tag{4-82''}$$

этой последней формулой можно пользоваться вместо формулы (4-81′) только при $\overline{\Delta}_r < 0{,}007$.

В случае прямоугольных труб с соотношением сторон поперечного сечения, лежащем в пределах от 0,5 до 2,0, величина λ может определяться также по приведенному графику или по формулам (4-81) и (4-82); здесь только под D надо понимать так называемый гидравлический диаметр

$$D_r = 4R, \tag{4-83}$$

где R – гидравлический радиус рассматриваемой прямоугольной трубы (заметим, что для круглой трубы гидравлический диаметр оказывается равным геометрическому диаметру: $D_r = D$).

Обратим внимание, что на рис. 4-25 нанесены две пунктирные кривые, выделяющие область доквадратичного сопротивления, характеризующуюся зависимостью (4-79). Числа Рейнольдса, отвечающие этой области, лежат в пределах

$$(\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}} < \mathrm{Re}_D < (\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}}. \tag{4-84}$$

В случае

$$4000 \leqslant \mathrm{Re}_D \leqslant (\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}} \tag{4-85}$$

получаем область, которую практически следует рассматривать как область гладких труб (см. ниже п. 2°), для которых практически действует зависимость (4-78). В случае же

$$\mathrm{Re}_D \geqslant (\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}} \tag{4-86}$$

имеем квадратичную область сопротивления, для которой справедлива зависимость (4-80).

Согласно А. Д. Альтшулю, предельные числа Рейнольдса $(\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}}$ и $(\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}}$ с некоторым приближением могут быть найдены по формулам:

$$(\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}} \approx \frac{10}{\overline{\Delta}_r}; \tag{4-87}$$

$$(\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}} \approx \frac{500}{\overline{\Delta}_r}. \tag{4-88}$$

Пользуясь приведенными зависимостями, можно решить вопрос о том:

а) когда данная труба должна рассматриваться как практически гладкая и ее можно рассчитывать, не считаясь с выступами шероховатости;

б) когда данную трубу следует рассчитывать по зависимостям, относящимся к области квадратичного сопротивления, не считаясь с величиной чисел Рейнольдса.

Не следует смешивать критические числа Рейнольдса (нижнее и верхнее) с предельными числами Рейнольдса, выделяющими область доквадратичного сопротивления.

2°. Напорные гладкие технические трубы. В этом случае формулы (4-81′) и (4-82″) упрощаются и приобретают вид уже известных нам формул Прандтля (4-74) и Блазиуса (4-75). Как уже отмечалось, формула (4-75) дает достаточно точные результаты в случае

$$4000 < \mathrm{Re}_D < 100\,000. \tag{4-89}$$

При любых $\mathrm{Re}_D > 4000$ можно пользоваться формулой (4-74) или более простой зависимостью, предлагаемой рядом авторов:

$$\lambda = \frac{1}{(1{,}82 \lg \mathrm{Re}_D - 1{,}64)^2}. \tag{4-90}$$

Расчет прямоугольных гладких труб выполняется так, как указано в п. 1°.

3°. Дополнительные замечания. В случае стальных и чугунных водопроводных труб, уже находившихся в эксплуатации, величину λ в последнее время рекомендуют иногда определять по эмпирическим формулам Ф. А. Шевелева:

а) при $\mathrm{Re}_D \geqslant 9{,}2 \cdot 10^5$ (квадратичная область сопротивления)

$$\lambda = \frac{0{,}021}{D^{0,3}} \approx \frac{0{,}021}{\sqrt[3]{D}}; \tag{4-91}$$

б) при $\mathrm{Re}_D \leqslant 9{,}2 \cdot 10^5$ (доквадратичная область сопротивления)

$$\lambda = \left(\frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{D} + \frac{1}{\mathrm{Re}_D} \right)^{0,3}, \tag{4-92}$$

где D всюду выражается в метрах.

В случае расчета стальных труб со сварными стыками, при которых образуются наплывы металла, иногда дополнительно учитывают по различным эмпирическим формулам (здесь не приводим) влияние этих стыков на величину λ.

В заключение обратим внимание на следующее.

Как видно из графиков рис. 4-24 и 4-25, для квадратичной области сопротивления величина λ не зависит от Re_D. Имея это в виду и рассматривая напорное движение в некоторой трубе, длиной $l_0 = \mathrm{const}$ и диаметром $D = \mathrm{const}$ при расходе $Q = \mathrm{const}$, а следовательно, и при скорости $v = \mathrm{const}$, можем заключить, что для этой трубы, согласно упомянутым графикам, с уменьшением вязкости (т. е. с уменьшением ν) число Рейнольдса Re_D будет расти; вместе с тем потери напора (несмотря на уменьшение вязкости) будут оставаться, согласно формуле (4-70), постоянными.

Такой парадокс, по-видимому, можно объяснить следующим образом. С уменьшением ν характер турбулентности будет изменяться: она, надо полагать, будет развиваться все более и более; при этом длины путей пробега l отдельными частицами жидкости (от начального сечения $1-1$ до конечного сечения потока $2-2$, т. е. от начала трубы до ее конца) должны увеличиваться: длина пробега (длины траекторий) l будет все больше и больше отличаться от длины трубы l_0 ($l > l_0$); равным образом должны как-то изменяться и величины относительных перемещений (Δl) отдельных струек по отношению друг к другу. По-видимому, следует считать, что для квадратичной области сопротивления мы должны получать как бы такое равенство ($\tau_{ак} l_{ср} \approx \mathrm{const}$, где $l_{ср}$ – средняя длина пробега частицами жидкости от начала трубы до ее конца; $\tau_{ак}$ – среднее актуальное касательное напряжение вдоль $l_{ср}$ (зависящее, разумеется, от величин Δl).

Как видно, получается следующая картина: с уменьшением ν уменьшается $\tau_{ак}$; но зато, в связи с изменением характера турбулентности увеличивается ($l_{ср}$), причем отмеченное выше произведение ($\tau_{ак} l_{ср}$), от которого должны зависеть потери напора, сохраняет свою величину.

Дополнительно надо иметь в виду, что в момент, когда ν обращается в нуль, мы получаем идеальную (а следовательно, воображаемую) жидкость, при возникновении которой скорость на стенке русла «скачком» должна измениться от нуля (в случае реальной жидкости) до соответствующей конечной величины ($u = \mathrm{const}$ по живому сечению) – в случае идеальной жидкости. При этом здесь получится (при $\lambda = 0$) или воображаемый турбулентный поток идеальной жидкости, или воображаемый ламинарный поток идеальной жидкости.

Разумеется, описанный «парадокс» может быть также осознан, исходя из рассмотрения не действительной картины движения жидкости (которую мы имели в виду выше), а из рассмотрения «модели осредненного потока».[1]

Примеры расчета.[2]

№ 1. Дана цельносварная цилиндрическая стальная труба круглого поперечного сечения, бывшая в употреблении, но в хорошем состоянии. Диаметр трубы $D = 120$ мм; длина ее $l = 500$ м. По трубе движется керосин, имеющий температуру $t = 15$ °C; расход керосина $Q = 6$ л/с $= 0{,}006$ м^3/с.

Требуется:

а) установить режим движения керосина в трубе;

б) если режим движения керосина турбулентный, то определить область сопротивления, отвечающую заданным условиям движения;

в) найти величину потерь напора h_l по длине для заданного трубопровода.

Решение. Шероховатость стенок трубы, согласно табл. 4-2, $\Delta = 0{,}04$ мм. Относительная шероховатость трубы

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{D} = \frac{0{,}04}{120} = 0{,}00033.$$

Кинематический коэффициент вязкости для керосина при температуре 15 °C, согласно табл. 4-1, $\nu = 0{,}027$ см^2/с.

Средняя скорость движения керосина в трубе

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{0{,}006 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 0{,}12^2} = 0{,}53 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_D = \frac{vD}{\nu} = \frac{53 \cdot 12}{0{,}027} = 23\,600 = 2{,}36 \cdot 10^4.$$

Предельные числа Рейнольдса, согласно формулам (4-87) и (4-88),

$$(\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}} = \frac{10}{\Delta_r} = 3{,}0 \cdot 10^4; \quad (\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}} = \frac{500}{\Delta_r} = 1{,}51 \cdot 10^6.$$

Сопоставляя величину Re_D с предельными числами Рейнольдса, видим, что $4000 < \mathrm{Re}_D < (\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}}$, где 4000 – число Рейнольдса, отвечающее началу турбулентной зоны.

Таким образом, в нашем случае должен иметь место турбулентный режим, относящийся к области гладких русел.

Согласно графику на рис. 4-25, для найденных Δ_r и Re_D величина $\lambda = 0{,}025$.

По формуле Блазиуса (4-75):

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}_D^{0{,}25}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{2{,}36 \cdot 10^4}} = 0{,}025.$$

Потеря напора

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = 0{,}025 \frac{500}{0{,}12} \cdot \frac{0{,}53^2}{2 \cdot 9{,}80} = 1{,}50 \text{ м столба керосина.}$$

№ 2. Для тех же условий, что и в предыдущем примере (для движения в трубе керосина), определить коэффициент λ и потерю напора на заданном участке трубопровода, если $Q = 40$ л/с.

Решение. Средняя скорость

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{0{,}04 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 0{,}12^2} = 3{,}54 \text{ м/с}.$$

[1] По этому вопросу см. дополнительно статью Н. А. Картвелишвили, Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 3. – М.: Высшая школа, 1979.

[2] Ниже «черту осреднения» над величинами Δ и Δ_r не ставим.

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_D = \frac{vD}{\nu} = \frac{354 \cdot 12}{0{,}027} = 1{,}57 \cdot 10^5.$$

Сопоставляя это число с предельными числами Рейнольдса, найденными в преды щем примере, видим, что

$$(\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}} < \mathrm{Re}_D < (\mathrm{Re})''_{\text{пред}};$$

отсюда заключаем, что в данном случае будем иметь область доквадратичн сопротивления турбулентной зоны.

Для найденного Re_D и установленной в предыдущем примере Δ_r, соглас графику рис. 4-25,

$$\lambda = 0{,}0186.$$

Значение λ по формуле (4-81') получается

$$\lambda = 0{,}1\left(1{,}46\,\Delta_r + \frac{100}{\mathrm{Re}_D}\right)^{0{,}25} = 0{,}1\left(1{,}46 \cdot 0{,}00033 + \frac{10^2}{1{,}57 \cdot 10^5}\right)^{0{,}25} = 0{,}0183.$$

Потеря напора h_l по длине заданного трубопровода

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = 0{,}0186 \frac{500}{0{,}12} \cdot \frac{3{,}54^2}{2 \cdot 9{,}80} = 49{,}5 \text{ м столба керосина.}$$

№ 3. Дана круглая цельносварная стальная труба, бывшая в эксплуатац характеризуемая величиной $\Delta = 0{,}15$ мм. Диаметр трубы $D = 0{,}5$ м; длина ее $l = 500$ По трубе движется вода, имеющая температуру 50 °С. Расход воды $Q = 0{,}60$ м³/с.

Требуется найти потерю напора по длине трубы.

Решение. Относительная шероховатость трубы

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{D} = \frac{0{,}15}{500} = 0{,}0003.$$

Кинематический коэффициент вязкости для воды заданной температуры, соглас табл. 4-1, $\nu = 0{,}00556$ см²/с.

Средняя скорость движения воды в трубе

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{3{,}14 \cdot 0{,}5^2} = 3{,}06 \text{ м/с.}$$

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_D = \frac{vD}{\nu} = \frac{306 \cdot 50}{0{,}00556} = 2{,}75 \cdot 10^6.$$

Предельные числа Рейнольдса, согласно формулам (4-87) и (4-88),

$$(\mathrm{Re}_D)'_{\text{пред}} = \frac{10}{\Delta_r} = \frac{10}{0{,}0003} = 3{,}33 \cdot 10^4;$$

$$(\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}} = \frac{500}{\Delta_r} = \frac{500}{0{,}0003} = 1{,}67 \cdot 10^6.$$

Сопоставляя величину Re_D с предельными значениями чисел Рейнольдса, видим, ч

$$\mathrm{Re}_D > (\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}},$$

т. е. в данном случае имеет место область квадратичного сопротивления турбулентн зоны. Для найденных Δ_r и Re_D, согласно графику рис. 4-25, $\lambda = 0{,}015$.

Значение λ по формуле (4-82') оказывается

$$\lambda = 0{,}1\left(1{,}46 \cdot 0{,}0003 + \frac{1000}{2\,750\,000}\right)^{0{,}25} \approx 0{,}015.$$

Искомая потеря напора

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = 0{,}015 \cdot \frac{500}{0{,}5} \cdot \frac{3{,}06^2}{2 \cdot 9{,}80} = 7{,}15 \text{ м столба воды, имеющей температуру 50 С}$$

§ 4-12. ПОТЕРЯ НАПОРА ПО ДЛИНЕ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЙ ОБЛАСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ФОРМУЛА ШЕЗИ. МОДУЛЬ РАСХОДА И МОДУЛЬ СКОРОСТИ

При проектировании гидротехнических сооружений обычно сталкиваются с квадратичной областью сопротивления, когда вода имеет достаточно большие скорости, при которых числа Рейнольдса получаются также достаточно большими

$$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}''_{\text{пред}}, \qquad (4\text{-}93)$$

где $\mathrm{Re}''_{\text{пред}}$ имеет тот же смысл, что и $(\mathrm{Re}_D)''_{\text{пред}}$ в предыдущем параграфе.

Очень часто при условии, когда неравенство (4-93) несколько нарушается, т. е. когда мы, строго говоря, получаем доквадратичную область сопротивления, практические расчеты все же ведут по зависимостям, относящимся к квадратичной области. Это объясняется тем, что расчет для области квадратичного сопротивления является з н а ч и т е л ь н о б о л е е п р о с т ы м, чем для области доквадратичного сопротивления. Действительно, для доквадратичной области коэффициент λ, входящий в формулу (4-69), зависит от Re, а следовательно, и от скорости v, которая часто заранее неизвестна. В связи с этим задачи для доквадратичной области обычно приходится решать путем подбора или методом последовательного приближения. В случае же области квадратичного сопротивления λ не зависит от Re, а следовательно, λ мы можем найти, не зная величины v, что обычно позволяет решать задачи непосредственно, без подбора. Вместе с тем погрешность в определении величины λ, обусловленная пренебрежением влияния на нее числа Re (когда мы находимся в доквадратичной области), часто может быть значительно меньше той погрешности, которая получается за счет неточности установления величины Δ: как мы видели, шероховатость Δ приходится устанавливать по таблице, где этот параметр определяется на основании чисто описательных, качественных (а не количественных) характеристик русла.

Перечисленные обстоятельства заставляют в гидротехнической практике интересоваться главным образом областью квадратичного сопротивления; исключение здесь составляют только следующие случаи:

а) движение грунтовой воды, когда мы получаем ламинарный режим (см. гл. 17 и 18);

б) движение воды через модели сооружений (см. гл. 16);

в) редкие случаи русел большого поперечного сечения с весьма гладкими (например, стальными) стенками.

Учитывая сказанное, далее, как правило, будем иметь в виду только квадратичную область сопротивления. В настоящем параграфе применительно к этой области сопротивления рассмотрим напорное и безнапорное равномерные движения воды в цилиндрических руслах так называемого *«правильного поперечного сечения»* (см. начало § 4-2).

Отметим, что к «правильным руслам» относятся русла, имеющие поперечные сечения круглые, квадратные, прямоугольные, трапецеидальные, параболические и т. п. (при условии, что смоченная поверхность этих русел имеет однородную – одинаковую шероховатость). Такие сечения, как, например, звездообразные (встречающиеся в практике машиностроения), характеризующиеся наличием острых углов, мы здесь не будем рассматривать.

Имея в виду только равномерное движение (см. § 3-11), также исключим из рассмотрения *движение воды на начальных участках цилиндрических русел (рис. 4-21), поскольку для этих участков эпюры скоростей в живых сечениях* *имеют особый вид, отличный от вида, свойственного равномерному потоку (следовательно, для этих участков и закон сопротивления движению воды будет иной).*

1°. Формула Шези. Перепишем зависимость (4-69) в виде

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\sqrt{R\frac{h_l}{l}} \tag{4-94}$$

или в виде

$$\boxed{v = C\sqrt{RJ},} \tag{4-95}$$

где v – средняя скорость в данном живом сечении; R – гидравлический радиус; J – пьезометрический уклон, равный в рассматриваемом случае равномерного движения гидравлическому уклону [см. (3-109) и (3-110)].

Формула (4-95) называется формулой Шези. Она имеет очень большое значение в практике. Коэффициент C (общепринятое обозначение), входящий в (4-95), называется коэффициентом Шези.

Сопоставляя (4-94) и (4-95), видим, что

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}, \tag{4-96}$$

а следовательно,

$$\boxed{\lambda = \frac{8g}{C^2}.} \tag{4-97}$$

Формулы (4-96) и (4-97) связывают коэффициент гидравлического трения λ и коэффициент Шези C. Как видно, зная λ, легко найти C. Поскольку λ является безразмерным коэффициентом, то коэффициент Шези, как видно из (4-96), имеет размерность. Размерность C равна корню квадратному из размерности ускорения.

Так как λ для квадратичной области сопротивлений зависит только от относительной шероховатости стенок русла и не зависит от числа Рейнольдса, а следовательно, и от рода жидкости, движущейся в русле, то в отношении C мы можем сказать то же самое: C зависит от относительной шероховатости стенок русла и не зависит от скорости движения v и вязкости жидкости, т. е. от коэффициента ν (разумеется, если формулу Шези мы будем распространять и на область доквадратичного сопротивления, то в пределах этой области величина C окажется зависящей от Re).

В практике обычно величину C принято определять по специальным формулам (см. ниже § 4-13); вообще же говоря, значение C для случая круглых и прямоугольных труб можно находить и по формуле (4-96).

Надо учитывать, что формула Шези (4-95), строго говоря, может использоваться только для квадратичной области сопротивления в случае установившегося равномерного движения жидкости в руслах так называемого «правильного» поперечного сечения (см. выше).

2°. Зависимости, вытекающие из формулы Шези. Исходя из формулы (4-95), можно получить следующие практически важные расчетные зависимости:

$$\boxed{J = \frac{v^2}{C^2R};} \tag{4-98}$$

$$\boxed{h_l = Jl = \frac{v^2}{C^2R}l;} \tag{4-99}$$

$$\boxed{Q = \omega v = \omega C\sqrt{RJ}}, \tag{4-100}$$

где l – длина потока.

3°. **Модуль расхода K.** Введем обозначение

(I) $$\boxed{K = \omega C\sqrt{R};} \tag{4-101}$$

при этом формула (4-100) перепишется в виде

$$Q = K\sqrt{J} \tag{4-102}$$

и, следовательно, для равномерного движения

(II) $$\boxed{K = \frac{Q}{\sqrt{J}}}. \tag{4-103}$$

Как видно, модуль расхода K имеет два выражения: (I) и (II). Из (4-102) следует, что K представляет собой расход Q при $J = 1{,}0$. Из этой же формулы видно, что размерность величины K та же, что и расхода Q (поскольку $J = h_l : l$ – величина безразмерная).

Из формулы (4-103) получаем:

$$\boxed{J = \frac{Q^2}{K^2}}, \tag{4-104}$$

а следовательно,

$$h_l = Jl = \frac{Q^2}{K^2}l. \tag{4-105}$$

4°. **Модуль скорости W.** Введем обозначение

(I) $$W = C\sqrt{R}; \tag{4-106}$$

при этом формула (4-95) перепишется в виде

$$v = W\sqrt{J} \tag{4-107}$$

и, следовательно, для равномерного движения

(II) $$W = \frac{v}{\sqrt{J}}. \tag{4-108}$$

Как видно, модуль скорости W имеет два выражения: (I) и (II). Из (4-107) следует, что W представляет собой скорость v при $J = 1{,}0$. Размерность W та же, что и v.

Из (4-108) получаем:

$$J = \frac{v^2}{W^2}, \tag{4-109}$$

а следовательно,

$$h_l = \frac{v^2}{W^2}l. \tag{4-110}$$

Понятиями модуля расхода K и модуля скорости W широко пользуются при практических расчетах труб и каналов.

5°. Эмпирические формулы для определения коэффициента Шези C. Решим уравнение Шези (4-95) в отношении C:

$$C = \frac{v}{\sqrt{RJ}}. \tag{4-111}$$

Наблюдая какой-либо водоток и замеряя в натуре величины v, R и J, можем по формуле (4-111) вычислить C для рассматриваемого водотока.

Многие исследователи проводили подобного рода измерения, и в результате было предложено много различных эмпирических формул для C. Эти формулы дают, конечно, разную величину C для данного конкретного случая. Такое положение объясняется приближенностью упомянутых эмпирических формул.

Таблица 4-3

Коэффициент шероховатости n для различных водотоков[1]

(для размеров в метрах и секундах)

Материал стенок русла или описание водотока	Минимальный $n_{мин}$	Нормальный n	Максимальный $n_{макс}$
А. Трубы и туннели			
Стекло	0,009	**0,010**	0,013
Латунь	0,009	**0,010**	0,013
Сталь:			
а) фланцевые и сварные соединения	0,010	0,012	0,014
б) клепаные и резьбовые соединения	0,013	0,016	0,017
Чугун:			
а) с покрытием битумом	0,010	0,013	0,014
б) без покрытия битумом	0,011	0,015	0,016
Деревянная клепка	0,010	0,012	0,014
Деревянная обработанная обшивка	0,015	0,017	0,020
Цементный раствор	0,010	**0,013**	0,015
Бетонная труба без засорения	0,010	0,011	0,013
Бетонная труба с некоторым засорением	0,011	0,013	0,014
Бетонная труба с необработанной поверхностью, выполняемая в гладкой деревянной опалубке	0,012	**0,014**	0,016
То же в негладкой опалубке	0,015	0,017	0,020
Дренажная труба (из обожженной глины)	0,011	**0,013**	0,017
Канализационная труба, покрытая осадками сточных вод	0,012	**0,013**	0,016
Б. Облицовки безнапорных каналов			
Асфальт	0,013	–	0,016
Сталь неокрашенная	0,011	**0,012**	0,014
Сталь окрашенная	0,012	0,013	0,017
Дерево строганое	0,010	**0,012**	0,014
Дерево нестроганое	0,011	0,013	0,015
Цементный раствор	0,011	0,013	0,015
Бетон затертый	0,011	**0,013**	0,015
Торкрет	0,016	0,020	0,025
Бетон по ровной скальной поверхности	0,017	0,020	–
Бетон по неровной скальной поверхности	0,022	0,027	–

[1] Таблица 4-3 приводится по данным Chow V. T. [4-9].

Продолжение табл. 4-3

Материал стенок русла или описание водотока	Минимальный $n_{мин}$	Нормальный n	Максимальный $n_{макс}$
В. Безнапорные каналы без облицовки			
В-1. Нескальный грунт			
Чистый, только что выполненный	0,016	0,018	0,020
Чистый, после выветривания	0,018	0,022	0,025
Чистый; ложе канала гравелистое	0,022	**0,025**	0,030
В канале небольшая растительность	0,022	0,027	0,033
Заросший травой	0,025	0,030	0,033
С густой травой и водорослями	0,030	0,035	0,040
Откопанный драглайном или землечерпалкой (без растительности)	0,025	0,028	0,033
То же с растительностью	0,035	0,050	0,060
Не поддерживаемый в исправности (трава и кусты не расчищаются)	0,050	0,100	0,140
В-2. Скальный грунт			
С гладкими стенками	0,025	0,035	0,040
С неровными стенками	0,035	0,040	0,050
Г. Естественные водотоки			
Г-1. Малые потоки (шириной менее 30 м)			
Равнинные	0,025	0,070	0,150
Горные	0,030	0,045	0,070
Г-2. Русла с поймой			
Пойма без кустарников и деревьев	0,025	—	0,050
Пойма, покрытая кустарником	0,035	—	0,160
Пойма, покрытая деревьями	0,110	—	0,200
Г-3. Большие потоки			
Правильные поперечные сечения русла; кустарников и валунов нет	0,025	—	0,060

Примечание. Значения n, обычно рекомендуемые для проектирования, набраны в таблице жирным шрифтом. Эмпирические формулы для C, в которые входит n, были приведены в тексте книги для размеров в метрах и секундах.

Если, однако, отбросить устаревшие формулы для C и пользоваться более совершенными, то оказывается, что расхождение между величинами C, найденными по этим формулам для данного конкретного случая, не столь велико.

Приведем здесь только следующие формулы для C (размеры в метрах и секундах).

1. Так называемая сокращенная формула Гангилье — Куттера:

$$C = \frac{23 + 1/n}{1 + 23\dfrac{n}{\sqrt{R}}}, \tag{4-112}$$

где n — коэффициент шероховатости стенок русла (имеющий размерность).

Гангилье и Куттер составили краткую таблицу численных значений n для стенок русла разной шероховатости. В табл. 4-3 приводим уточненные значения n, заимствованные из [4-9].

Значения коэффициента C по формуле Маннинга $C = \frac{1}{n} R^{1/6}$ (метры и секунды)

R, м	n										
	0,011	0,013	0,014	0,017	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
0,30	74,4	63,0	58,4	48,1	40,9	32,7	27,3	23,4	20,4	18,2	16,4
0,32	75,2	63,6	59,1	48,6	41,4	33,1	27,5	23,6	20,7	18,4	16,5
0,34	76,0	64,3	59,7	49,1	41,8	33,4	27,8	23,9	20,9	18,6	16,7
0,36	76,7	64,9	60,3	49,6	42,2	33,7	28,1	24,1	21,1	18,7	16,9
0,38	77,4	65,5	60,8	50,1	42,6	34,0	28,4	24,3	21,3	18,9	17,0
0,40	78,1	66,0	61,3	50,5	42,9	34,3	28,6	24,5	21,4	19,1	17,2
0,42	78,7	66,6	61,8	50,9	43,3	34,6	28,9	24,7	21,6	19,2	17,3
0,44	79,3	67,1	62,3	51,3	43,6	34,9	29,1	24,9	21,8	19,4	17,4
0,46	79,9	67,6	62,8	51,7	43,9	35,2	29,3	25,1	22,0	19,5	17,6
0,48	80,4	68,1	63,2	52,0	44,2	35,4	29,5	25,3	22,1	19,7	17,7
0,50	81,0	68,5	63,6	52,4	44,5	35,6	29,7	25,5	22,3	19,8	17,8
0,55	82,3	69,6	64,6	53,3	45,3	36,2	30,2	25,9	22,6	20,1	18,1
0,60	83,5	70,6	65,6	54,0	45,9	36,7	30,6	26,2	23,0	20,4	18,4
0,65	84,6	71,6	66,5	54,7	46,5	37,2	31,0	26,6	23,3	20,7	18,6
0,70	85,7	72,5	67,3	55,4	47,1	37,7	31,4	26,9	23,6	20,9	18,8
0,75	86,7	73,3	68,1	56,1	47,7	38,1	31,8	27,2	23,8	21,2	19,1
0,80	87,6	74,1	68,8	56,8	48,2	38,5	32,1	27,5	24,1	21,4	19,3
0,85	88,5	74,9	69,5	57,2	48,7	38,9	32,4	27,8	24,3	21,6	19,5
0,90	89,3	75,6	70,2	57,8	49,1	39,3	32,8	28,1	24,6	21,8	19,7
0,95	90,1	76,3	70,8	58,3	49,6	39,7	33,0	28,3	24,8	22,0	19,8
1,00	90,9	77,0	71,4	58,8	50,0	40,0	33,3	28,6	25,0	22,2	19,9
1,10	92,4	78,2	72,6	59,8	50,8	40,6	33,9	29,0	25,4	22,6	20,3
1,20	93,7	79,3	73,6	60,6	51,5	41,2	34,4	29,5	25,8	22,9	20,6
1,30	95,0	80,4	74,6	61,5	52,2	41,8	34,8	29,8	26,1	23,2	20,9
1,40	96,2	81,4	75,6	62,2	52,9	42,3	35,3	30,2	26,4	23,5	21,2
1,50	97,3	82,3	76,4	62,9	53,5	42,8	35,7	30,6	26,8	23,8	21,4
1,60	98,3	83,2	77,2	63,6	54,1	43,3	36,1	30,9	27,0	24,0	21,6
1,70	99,3	84,1	78,0	64,3	54,6	43,7	36,4	31,2	27,3	24,3	21,9
1,80	100,3	84,8	78,8	64,9	55,1	44,1	36,8	31,5	27,6	24,5	22,1
1,90	101,2	85,6	79,5	65,5	55,6	44,5	37,1	31,8	27,8	24,7	22,3
2,00	102,0	86,3	80,2	66,0	56,1	44,9	37,4	32,1	28,1	24,9	22,5
2,20	103,7	87,7	81,5	67,1	57,0	45,6	38,0	32,6	28,5	25,3	22,8
2,40	105,2	89,0	82,7	68,1	57,8	46,3	38,6	33,1	28,9	25,7	23,2
2,60	106,6	90,2	83,8	69,0	58,6	46,9	39,1	33,5	29,3	26,1	23,5
2,80	108,0	91,3	84,8	69,8	59,4	47,5	39,6	33,9	29,7	26,4	23,7
3,00	109,2	92,4	85,8	70,6	60,0	48,0	40,0	34,3	30,0	26,7	24,0
3,50	112,0	94,8	88,0	72,5	61,6	49,3	41,1	35,2	30,8	27,4	24,6
4,00	114,5	97,0	90,0	74,1	63,0	50,4	42,0	36,0	31,5	28,0	25,2
4,50	116,8	98,8	91,8	75,6	64,2	51,4	42,8	36,7	32,1	28,6	25,7
5,00	118,9	100,6	93,4	76,9	65,4	52,3	43,6	37,4	32,7	29,1	26,1

2. Формула Маннинга:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}. \tag{4-113}$$

3. Формула Павловского, полученная для случая, когда $R < (3{,}0 \div 5{,}0)$:

$$C = \frac{1}{n} R^{y}, \tag{4-114}$$

где

$$y = f(R,\ n), \tag{4-115}$$

причем для y дается относительно сложная эмпирическая формула (здесь не приводимая).

4. Формула[1] Бахметева и Федорова:

$$C = \frac{1}{n} + 17{,}72 \lg R. \tag{4-116}$$

В формулы (4-113) – (4-116) входит коэффициент шероховатости, который назначается по шкале Гангилье и Куттера (табл. 4-3).

Практически вычислять C по этим формулам почти никогда не приходится, так как применительно к ним составлены соответствующие расчетные таблицы и графики. Например, применительно к формуле Павловского составлен график на рис. 4-26. Применительно к наиболее удобной формуле Маннинга – табл. 4-4. Установив по табл. 4-3 значение n, относящееся к данному конкретному случаю, и определив гидравлический радиус, мы по упомянутому графику или табл. 4-4 легко можем найти C. Надо подчеркнуть, что все приведенные эмпирические и полуэмпирические формулы для C (относящиеся к равномерному установившемуся движению жидкости) являются приближенными, причем значения n, входящие в них, приходится устанавливать по табл. 4-3 на основании чисто описательных (а не количественных) характеристик русла (так же как и значения Δ; см. выше). Поэтому при выборе для расчета той или другой из приведенных формул главным образом обращают внимание на простоту определения C по принятой формуле.[2] С этой точки зрения непосредственное применение в расчете формулы Павловского не может быть оправдано: эта формула, являясь весьма сложной, включает в себя, вместе с тем, весьма приближенный параметр n.

Как видно, в рассматриваемой области существует два разного вида оформления расчета: а) расчет с использованием величин Δ и λ и б) расчет с использованием коэффициента n. Заметим, что во всяком случае при расчете земляных каналов и естественных русел, должен использоваться второй вид расчета (с применением коэффициента n, в отношении которого мы имеем значительно более обширные экспериментальные данные, чем в отношении величины Δ).[3]

В литературе встречаются также формулы для C, относящиеся к области доквадратичного сопротивления. К числу таких формул принадлежит, например, так называемая полная формула Гангилье – Куттера; согласно этой формуле, которая имеет относительно сложный вид и рекомендуется ее авторами для применения в случае $J < 0{,}005$, величина C оказывается зависящей не только от R и n, но и от J.

А. Д. Альтшуль, используя некоторые полуэмпирические зависимости, предложил для открытых русел так называемую обобщенную формулу, действительную для квадратичной и для доквадратичной областей сопротивления, а также для области гладких русел:

$$C = 25\left[\frac{R}{(80n)^6 + \dfrac{0{,}025}{\sqrt{RJ}}}\right]^{1/6}, \tag{4-117}$$

где R – в м; C – в м$^{1/2}$/с.

Эта зависимость при больших RJ (квадратичная область) оказывается аналогичной формуле Маннинга; при малых же RJ и малых значениях коэффициента n (гладкие русла) она дает результаты, близкие к тем, которые получаются по так называемой формуле Блазиуса. Значения коэффициента n, входящего в (4-117), можно брать из табл. 4-3.

---

[1] Экспериментальную проверку этой формулы выполнил И. И. Агроскин [4-11, с. 145].

[2] Для различных теоретических исследований наиболее удобной является формула Маннинга степенного типа.

[3] В [4-9 и 4-10] приводятся фотографии различных русел с указанием рекомендуемых для них численных значений n. Эти фотографии в некоторой мере могут облегчить выбор величины n для данного конкретного случая.

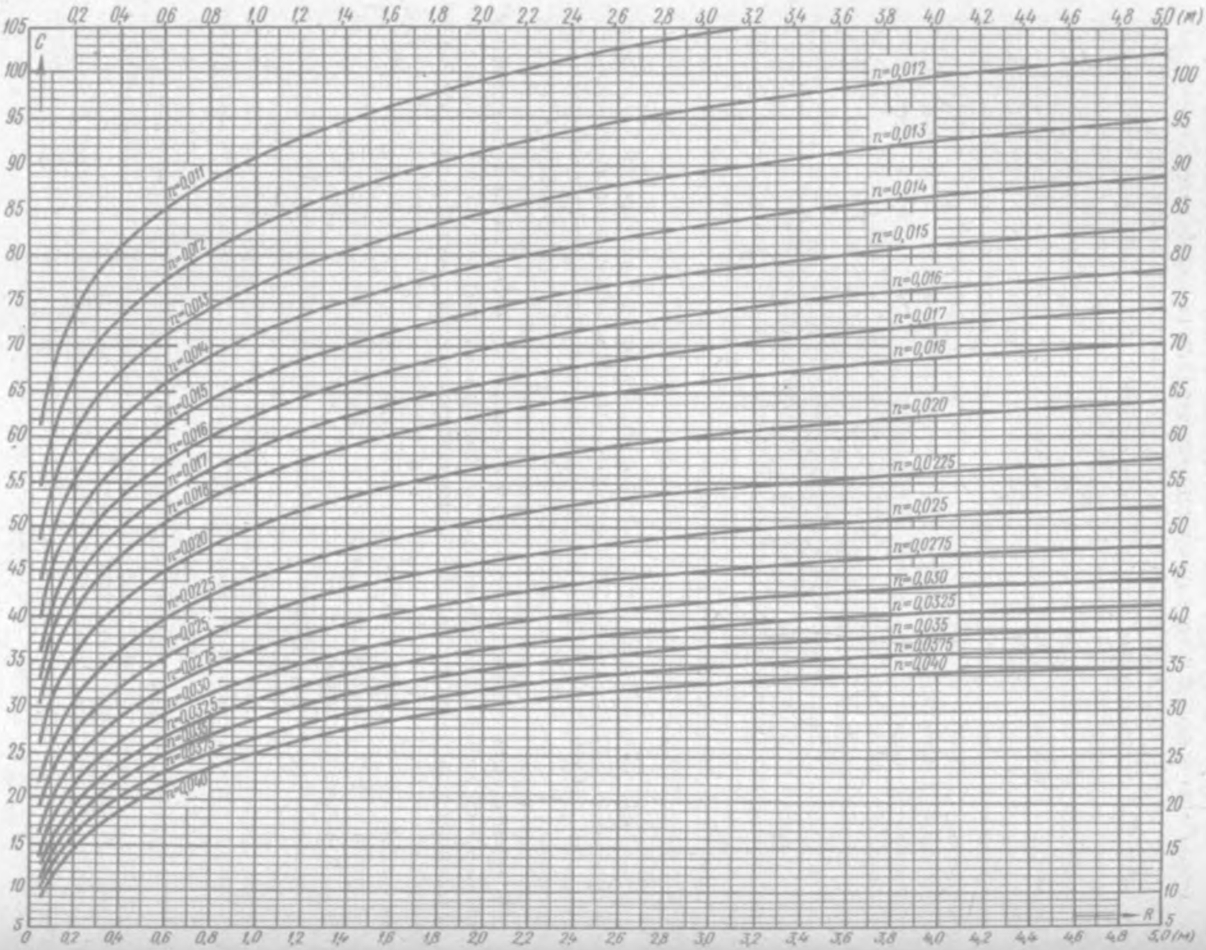


Рис. 4-26. График для определения коэффициента Шези C по формуле Павловского (для данных в метрах и секундах)

§ 4-13. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О «ДИФФУЗИИ» МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ БОКОВУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СТРУЕК, СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОТОК РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ФУНКЦИЯ ДИССИПАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В § 3-16 нами было пояснено особое очень существенное физическое явление – явление передачи механической энергии от одной элементарной струйки к другой через боковую разграничивающую их поверхность. При этом было обращено внимание на то, что такая передача энергии может осуществляться, например, при ламинарном движении жидкости, когда турбулентный обмен жидкости между соседними струйками отсутствует.

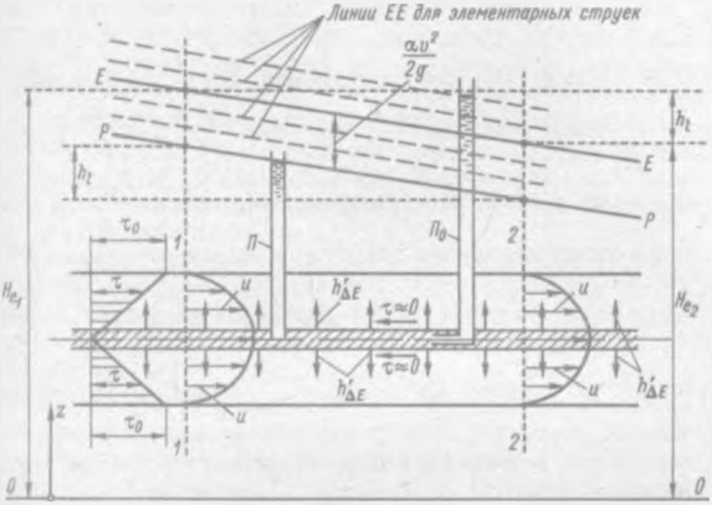


Рис. 4-27. «Диффузия» механической энергии (в размере $h'_{\Delta E}$) через боковую поверхность элементарных струек (плоская задача)
П – пьезометр; $П_0$ – трубка Пито; — — — – линии *EE* для элементарных струек

Величина «диффузионного изменения напора» («диффузионного изменения удельной энергии» вдоль струйки) была обозначена нами через $h'_{\Delta E}$.

Наличие описанного в § 3-16 «поперечного потока механической энергии» может быть строго обосновано для ламинарного движения при помощи так называемой «*функции диссипации механической энергии*» Φ (хорошо известной из математической механики жидкости). Для простейшего случая (плоская задача, равномерное ламинарное движение; рис. 4-27) эта функция имеет вид[1]

$$\Phi = \eta\left(\frac{du}{dn}\right)^2 = \eta\left(\frac{du}{dz}\right)^2,$$

где Φ – работа (в единицу времени – в секунду), выполненная продольными силами трения T (см. рис. 4-5) внутри одной кубической единицы неподвиж-

[1] Вывод этого выражения для Φ, исходя из обычных «гидравлических представлений», приводится в статье В. Н. Цепилова «Функция диссипации механической энергии для решения обычных задач гидравлики (о работе сил внутреннего трения в жидкости)». Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. № 5. – М.: Высшая школа, 1982.

ного пространства, имеющей небольшую высоту $dz = dn$, при которой величина $du/dn = du/dz$ может считаться постоянной:

$$\frac{du}{dn} = \frac{du}{dz} = \text{const}.$$

Очевидно, разбивая весь отсек жидкости (рис. 4-27), заключенный между расчетными сечениями $1 - 1$ и $2 - 2$ на соответствующие кубические единицы и затем подсчитывая для всех этих кубических единиц значения Φ, мы можем найти и работу сил трения (в секунду), т. е. $\Sigma\Phi$ в пределах потока, ограниченного сечениями $1 - 1$ и $2 - 2$. Легко видеть, что потеря напора от сечения $1 - 1$ до сечения $2 - 2$ может быть представлена формулой:

$$h_l = \frac{\Sigma\Phi}{\gamma Q},$$

которая вполне согласуется с соответствующей формулой Пуазейля.

Из рис. 4-27 видно распределение величины $\frac{du}{dn}$ $\left(\text{или } \frac{du}{dz}\right)$ по живому сечению потока. Имея в виду такое распределение величин $\frac{du}{dn}$, а также учитывая приведенное выше выражение для Φ, можно утверждать следующее:

а) внутри центральной струйки, для которой $du/dn \approx 0$ работа сил трения будет близка к нулю; поэтому данная центральная струйка почти не будет нагреваться;

б) пристенная же струйка, для которой $\frac{du}{dn}$ велико, будет нагреваться значительно.

Выше мы имели в виду ламинарный режим. В случае турбулентного режима при вычислении Φ в формулу подставляют обычно вместо η величину $\eta_т$ (см. § 4-7).

В заключение отметим следующее. Данный вопрос (о передаче механической энергии через боковую поверхность струек) может приобретать существенное практическое значение в том случае, когда при выполнении гидравлических расчетов приходится расчленять «целый поток» на отдельные фрагменты теми или другими продольными (по отношению к потоку) поверхностями; здесь, естественно, может возникнуть потребность количественно учесть соответствующую величину $h'_{\Delta E}$. Кроме того, данный вопрос представляет еще интерес в том отношении, что, рассматривая его, можно дополнительно объяснять с физической (энергетической) точки зрения возникновение и существование в потоке водоворотных областей (характеризуемых «возвратным течением»; см. § 4-14).

Г. МЕСТНЫЕ ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ НАПОРНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ. СОЕДИНЕНИЕ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ «ЛЕГКОЙ» И НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 4-14. ЯВЛЕНИЕ ОТРЫВА ТРАНЗИТНОЙ СТРУИ (ИЛИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ) ОТ СТЕНОК РУСЛА. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИЕ ТАКОГО РОДА ОТРЫВ. ОБЩИЙ ХАРАКТЕР МЕСТНЫХ ПОТЕРЬ НАПОРА

1°. Два вида явления отрыва транзитной струи от стенок русла. При обтекании турбулентным потоком какой-либо преграды (рис. 4-28, *а*) происходит отрыв транзитной струи от стенки русла. При этом получаем области *А*, заполненные множеством водоворотов; такое водоворотное движение в этих областях носит резко выраженный неустановившийся характер. Будем именовать: области *А* водоворотными (или, иначе, вальцовыми или циркуляционными) областями;[1] остальную часть потока — транзитной струей; поверхность *abcd*, отделяющую транзитную струю от водоворотных зон, — поверхностью раздела.

Поверхность раздела бывает выражена нерезко; она носит неустановившийся и неустойчивый характер: периодически эта поверхность получает местные искривления, которые прогрессируют и переходят в отдельные водовороты (вальцы); эти водовороты попадают затем в транзитную струю и уносятся ею; поверхность же раздела снова восстанавливается с тем, чтобы в последующие моменты времени опять распасться и свернуться в водовороты, и т. д. Постоянное возникновение в районе поверхности раздела водоворотов, попадающих в транзитную струю, способствует повышению пульсации скоростей и давлений в ней.

Переходя от рис. 4-28, *а* к осредненному потоку, водоворотные области показывают несколько условно — в виде, изображенном на рис. 4-28, *б*; штриховыми линиями здесь представлены линии тока осредненного потока, а не траектории частиц жидкости.

Именно в таком виде и будем изображать водоворотные области. Предполагается, что линия тока *abcd* на рис. 4-28, *б* намечена так, что: а) в любой ее точке осредненная (во времени) величина проекции актуальной скорости на нормаль к линии *abcd* равна нулю; б) величина расхода вдоль транзитной струи, выражаемая площадью соответствующей части эпюры скоростей, является постоянной. Строго говоря, такие условия могут быть удовлетворены только приближенно (если живые сечения считать плоскими).

Водоворотные области характеризуются возвратным течением. Эпюры осредненных скоростей дают нулевые значения продольных скоростей и не только на стенках русла, но и на «средней» линии водоворотной области (см. чертеж).

Сечение 2 — 2, где заканчивается вторая водоворотная зона, характеризуется как повышенной пульсацией скоростей и давлений, так и наличием сильно деформированной эпюры осредненных скоростей. На протяжении некоторого участка потока между сечениями 2—2 и 3—3 происходит: а) затухание пуль-

---

[1] Часто эти области называют «вихревыми». Такое название неудачно, так как в пределах транзитной струи движение жидкости является также вихревым (см. § 3-4). Иногда области *А* называют «мертвыми зонами», что также нельзя признать удачным.

саций до величин, свойственных равномерному движению, и б) выравнивание эпюры скоростей, причем в сечении $3-3$ эта эпюра принимает «нормальную» форму, свойственную равномерному течению.

Как видно, водоворотные области, расположенные между сечениями $1-1$ и $2-2$ (рис. 4-28, *б*), нарушают «нормальный» характер движения жидкости на некоторой длине $l_{перех}$ от сечения $2-2$ до сечения $3-3$; этот участок назовем п е р е х о д н ы м   и л и   п о с л е в о д о в о р о т н ы м.[1]

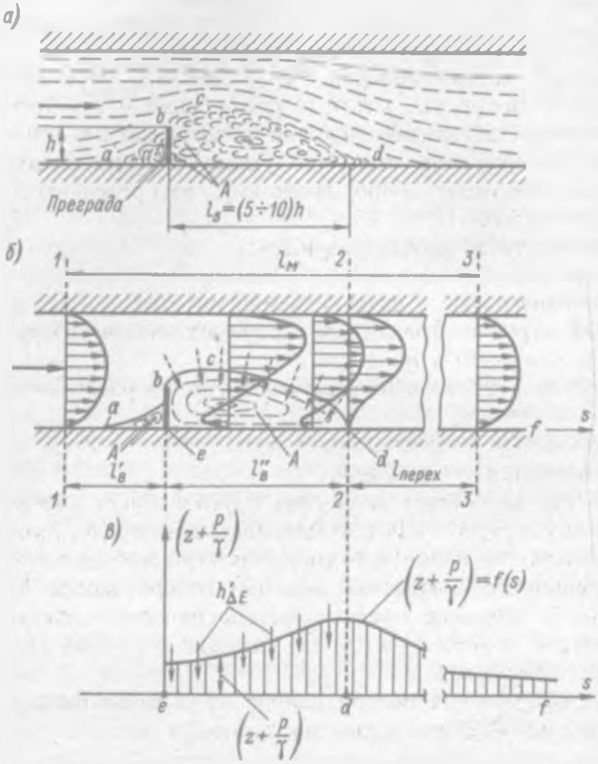


Рис. 4-28. Обтекание преграды турбулентным потоком: *а* – действительный поток, *б* – осредненный поток (неполная воображаемая модель Рейнольдса – Буссинеска); поперечными стрелками показан поток энергии, поступающий в водоворотную зону со стороны транзитной струи; *в* – схема изменения величины $(z + p/\gamma)$ вдоль стенки *ef* (у которой всюду $u = 0$)

Через поверхность раздела благодаря пульсационным поперечным скоростям происходит некоторый обмен жидкости между водоворотной областью и транзитной струей. Турбулентные касательные напряжения (см. § 4-7), действующие вдоль поверхности раздела, относительно велики. Поэтому потеря напора в пределах водоворотной зоны получается большая. На длине переходного (послеводоворотного) участка имеем также повышенные потери напора сравнительно с дальнейшими участками равномерного движения.

Если по поверхности раздела *bcd* установить криволинейную твердую стенку русла, то получим безотрывную транзитную струю; потеря напора при этом з н а ч и т е л ь н о   у м е н ь ш и т с я. Такое снижение потерь напора объясняется тем, что касательные напряжения, возникающие вдоль установленной стенки, з н а ч и т е л ь н о   м е н ь ш е   т у р б у л е н т н ы х   к а с а т е л ь н ы х   напряжений, действующих вдоль поверхности раздела.

Поясненный выше отрыв транзитной струи может быть назван (несколько условно) «и н е р ц и о н н ы м   о т р ы в о м транзитной струи от стенки русла». Помимо такого отрыва струи, можно различать еще «о т р ы в   т р а н з и т н о й   с т р у и (а в соответствующих случаях и отрыв пограничного слоя), о б у с л о в л е н н ы й   д и ф ф у з и е й   м е х а н и ч е с к о й   э н е р г и и   п о п е р е к   п о т о к а». Примером отрыва струи, вызванного поперечной диффузией механической энергии, может являться поток в сильно расширяющемся насадке (см. рис. 4-30), а также случай так называемого гидравлического

[1] Иногда участок длиной $(l'_в + l''_в)$ называют участком дестабилизации потока, а участок длиной $l_{перех}$ – участком стабилизации потока.

прыжка.[1] Такого рода отрывы, по нашему мнению, обусловливаются тем, что хотя полная удельная механическая энергия жидкости «целого потока» снижается по течению (за счет потерь напора), вместе с тем за счет поперечной диффузии энергии (направленной в сторону стенки русла; см. § 3-16) энергия, принадлежащая пристенной (придонной) элементарной струйке, начинает при определенных условиях *увеличиваться по направлению общего (главного) течения жидкости* (см. рис. 4-30, *г*).[2]

Такое положение, очевидно, позволяет объяснять более полно возможность возвратного течения тяжелой реальной жидкости в районе водоворотных областей, *вызванных и «инерционным отрывом»*.

2°. Общий характер местных потерь напора. На отдельных участках русла (трубопровода), где имеются повороты, местные расширения и сужения русла и т. п., возникают местные потери напора, обусловленные, так же как и потери по длине, работой сил трения. Но эти силы трения в узлах резко изменяющегося движения, свойственных «местным сопротивлениям», распределяются в потоке *весьма неравномерно*.

Такие места потока в общем случае характеризуются:

а) местными искривлениями линий тока и живых сечений;

б) уменьшением или увеличением живых сечений вдоль потока;

в) возникновением местных отрывов транзитной струи от стенок русла, а следовательно, появлением водоворотных областей.

В пределах такого рода узлов, а также в пределах некоторого расстояния за ними наблюдаем:

1) деформацию эпюр осредненных скоростей вдоль потока;

2) повышение пульсации скоростей и давлений.

Как было указано, повышение пульсации скоростей обусловливает увеличение касательных турбулентных напряжений (в рассматриваемом осредненном потоке), что, в свою очередь, влечет за собой повышение потерь напора.

Таковы условия возникновения так называемых местных потерь напора h_j.

Рассматривая далее вопрос о величине местных потерь напора в случае турбулентного движения, *будем иметь в виду только область квадратичного сопротивления*.

В заключение подчеркнем, что местная потеря напора h_j в рассматриваемом выше частном случае (см. рис. 4-28) возникает на длине

$$l_м = l'_в + l''_в + l_{перех}.$$

Напомним, (см. § 4-1), что длина $l_м$ в практике часто бывает пренебрежимо малой сравнительно с общей длиной потока (трубопровода). Именно поэтому, как было выше отмечено, считают при выполнении обычных расчетов, что $l_м = 0$, причем найденное значение местной потери напора h_j относят к одному поперечному сечению потока; потерю же по длине h_l условно считают распределенной по всей длине рассчитываемого потока равномерно.

§ 4-15. ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ РЕЗКОМ РАСШИРЕНИИ НАПОРНОГО ТРУБОПРОВОДА (ФОРМУЛА БОРДА). ВЫХОД ИЗ ТРУБОПРОВОДА В БАССЕЙН

На рис. 4-29, *а* показан случай, когда труба, имеющая диаметр D_1, переходит в трубу, имеющую больший диаметр D_2 ($D_2 > D_1$). Струя, выходящая из первой трубы, на некоторой длине $l_в$ (в связи с наличием продольных

---

[1] См. рис. 8-1. При определенных условиях в районе сечения *2–2* у дна русла, как показывают опыты, возникает водоворотная зона (не представленная на рис. 8-1).

[2] Этого объяснения отрыва транзитной струи, даваемого нами, в литературе мы не находим.

сил трения, действующих на боковой ее поверхности) расширяется и в сечении $2'-2'$ заполняет все сечение второй трубы. На длине $l_в$ струи имеет место отрыв ее от стенок трубы и образование описанной выше водоворотной зоны A, имеющей в данном случае кольцевую форму. Струя в пределах между сечениями $1-1$ и $2'-2'$ может иметь несимметричный вид (получается искривление оси потока).[1]

На протяжении расширяющейся струи (между сечениями $1-1$ и $2'-2'$) и переходного участка (между сечениями $2'-2'$ и $2-2$) получаем неравномерное движение, местами резко изменяющееся.

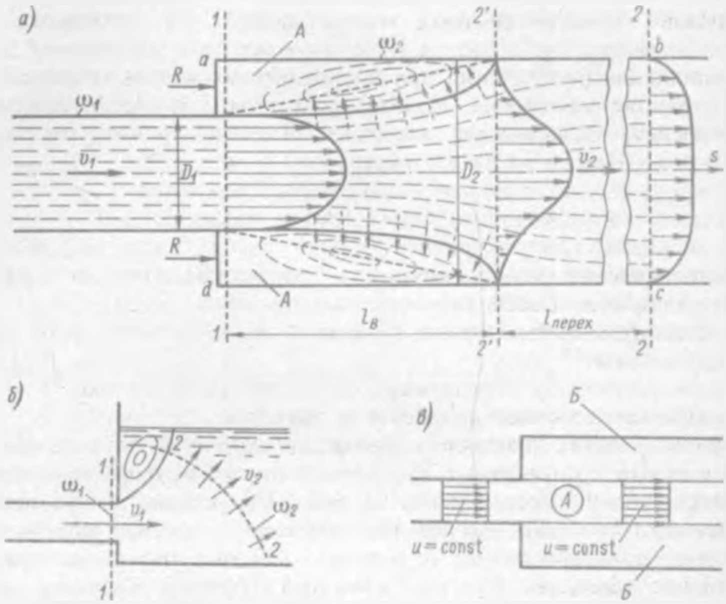


Рис. 4-29. Резкое расширение потока: *а* – к выводу формулы Борда; модель Рейнольдса – Буссинеска (поперечными стрелками показан поток энергии, передающийся от транзитной струи в водоворотную область); *б* – потери напора «на выход»; *в* – случай идеальной жидкости (*А* – цилиндрическая струя; *Б* – область покоящейся жидкости)

Между сечениями $1-1$ и $2-2$ возникает местная потеря напора h_j. Эту потерю назовем потерей напора на резкое расширение (р. р.) потока и далее будем обозначать ее через $(h_j)_{р.р}$ или просто через $h_{р.р}$. Впервые расчетную зависимость для $h_{р.р}$ получил французский инженер Борда, который уподобил резкое расширение струи явлению удара неупругих твердых тел. Заметим, что в связи с этим потерю $h_{р.р}$ иногда называют потерей на удар (что в настоящее время не следует делать).

Выведем формулу Борда, пользуясь гидравлическим уравнением кинетической энергии (уравнением Бернулли) и гидравлическим уравнением количества движения (рассматривая эти два уравнения как систему уравнений). Напомним, что уравнение Бернулли (полученное нами, исходя из теоремы, касающейся изменения кинетической энергии; см. начало § 3-12) учитывает как

[1] На рис. 4-29, *а* показан частный случай – симметричное растекание потока.

внешние, так и внутренние силы; гидравлическое же уравнение количества движения (см. § 3-22) учитывает только внешние силы. Решая совместно два эти уравнения, получаем возможность выделить работу внутренних сил трения, обусловливающих искомую потерю напора.

Имея в виду сказанное, соединяем сечения $1-1$ и $2-2$ уравнением Бернулли. В результате получаем

$$h_{\text{р. р}} = H_{e_1} - H_{e_2} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g}\right). \qquad (4\text{-}118)$$

Индексы 1 и 2 указывают, что соответствующие величины относятся или к сечению $1-1$, или $2-2$, где сечение $1-1$ совпадает с линией $1-1$.

Для упрощения рассуждений будем рассматривать только горизонтальную трубу.[1] В районе сечений $1-1$ и $2-2$ имеем равномерное движение и потому корректив кинетической энергии α для этих сечений будем считать равным единице. При этом (4-118) перепишем в виде

$$h_{\text{р. р}} = \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}\right) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right). \qquad (4\text{-}119)$$

Разность давлений $(p_1 - p_2)$ найдем, пользуясь гидравлическим уравнением количества движения (3-124), которое приложим к отсеку жидкости $abcd$, соединив этим уравнением сечения $1-1$ и $2-2$:

$$\alpha_0 \rho Q (v_2 - v_1) = (T_0)_s + G_s + P_s + R_s, \qquad (4\text{-}120)$$

где α_0 – корректив количества движения, который для сечений $1-1$ и $2-2$ можно принять также равным единице; $(T_0)_s$ – проекция на направление движения внешней силы трения T_0, действующей со стороны стенок трубы на рассматриваемый отсек жидкости $abcd$. Так как длина участка потока между сечениями $1-1$ и $2-2$ невелика, то силой T_0 пренебрегаем и считаем $(T_0)_s = 0$ (1-е допущение); G_s – проекция собственного веса отсека $abcd$ на направление движения, $G_s = 0$; P_s – сумма проекций на ось s сил гидродинамического давления P_1 и P_2, действующих соответственно на торцовые сечения $1-1$ и $2-2$ выделенного отсека транзитной струи (со стороны жидкости, находящейся слева и справа от этого отсека); R_s – проекция (на направление движения) реакции стенок (без учета сил трения); величина $R_s = R$, где сила R – давление вертикальной стенки ad, имеющей кольцевую форму, на жидкость (см. чертеж).

Величину $(P_s + R_s)$ можно представить в виде

$$P_s + R_s = (P_1 - P_2) + R = (P_1 + R) - P_2. \qquad (4\text{-}121)$$

Давление в сечении $2-2$ распределяется по гидростатическому закону, поскольку здесь имеем равномерное движение. Примем, что давление по всему сечению $1-1$ (по площади ad, охватывающей транзитную струю и водоворотную область) распределяется также по гидростатическому закону (2-е допущение). При этом можем написать:

$$P_1 + R = p_1 \omega_2; \qquad (4\text{-}122)$$

$$P_2 = p_2 \omega_2, \qquad (4\text{-}123)$$

где p_1 и p_2 – гидродинамические давления в центрах тяжести сечений $1-1$

[1] При рассмотрении наклонной трубы окончательные результаты получаются те же, что и для горизонтальной трубы.

(круга ad) и $2-2$ (круга bc); ω_2 – площадь сечения второй трубы (т. е. площадь круга ad или bc). Подставляя (4-122) и (4-123) в (4-121), находим:

$$P_s + R_s = p_1\omega_2 - p_2\omega_2. \qquad (4\text{-}124)$$

Учитывая (4-124), уравнение (4-120) переписываем в виде

$$\rho Q(v_2 - v_1) = p_1\omega_2 - p_2\omega_2, \qquad (4\text{-}125)$$

откуда, имея в виду, что

$$\rho = \gamma : g \text{ и } v_2 = Q : \omega_2, \qquad (4\text{-}126)$$

получаем

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{Q(v_2 - v_1)}{\omega_2 g} = \frac{(v_2 - v_1)}{g} v_2. \qquad (4\text{-}127)$$

Подставляя (4-127) в (4-119), имеем

$$h_{\text{р. р}} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{2(v_2 - v_1)v_2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_2^2 + 2v_2^2 - 2v_1v_2}{2g}, \qquad (4\text{-}128)$$

или окончательно

$$\boxed{h_{\text{р. р}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g},} \qquad (4\text{-}129)$$

где разность $(v_1 - v_2)$ называют потерянной скоростью.

Формула (4-129) называется формулой Борда. Согласно этой формуле *потеря напора при резком расширении равняется скоростному напору, отвечающему потерянной скорости.*[1]

1) Преобразование формулы Борда:

а) Приведем выражение (4-129) к другому виду. Вынесем за скобки v_1, тогда получим:

$$h_{\text{р. р}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \qquad (4\text{-}130)$$

Обозначая

$$\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \zeta_{\text{р. р}}, \qquad (4\text{-}131)$$

имеем

$$h_{\text{р. р}} = \zeta_{\text{р. р}} \frac{v_1^2}{2g}. \qquad (4\text{-}132)$$

б) Вынося за скобки v_2, получаем аналогично

$$h_{\text{р. р}} = \zeta'_{\text{р. р}} \frac{v_2^2}{2g}, \qquad (4\text{-}133)$$

[1] Надо помнить, что в основу этой формулы положены два существенных допущения: 1) пренебрежение силами внешнего трения на участке между сечениями $1-1$ и $2-2$; 2) принятие распределения давления в сечении $1-1$ по гидростатическому закону. Учитывая это обстоятельство, некоторые авторы в формулу Борда (4-129) вводят поправочный коэффициент, численное значение которого можно установить только опытным путем.

(круга ad) и $2-2$ (круга bc); ω_2 – площадь сечения второй трубы (т. е. площадь круга ad или bc). Подставляя (4-122) и (4-123) в (4-121), находим:

$$P_s + R_s = p_1\omega_2 - p_2\omega_2. \tag{4-124}$$

Учитывая (4-124), уравнение (4-120) переписываем в виде

$$\rho Q(v_2 - v_1) = p_1\omega_2 - p_2\omega_2, \tag{4-125}$$

откуда, имея в виду, что

$$\rho = \gamma : g \text{ и } v_2 = Q : \omega_2, \tag{4-126}$$

получаем

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{Q(v_2 - v_1)}{\omega_2 g} = \frac{(v_2 - v_1)}{g} v_2. \tag{4-127}$$

Подставляя (4-127) в (4-119), имеем

$$h_{р.\,р} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{2(v_2 - v_1)v_2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_2^2 + 2v_2^2 - 2v_1v_2}{2g}, \tag{4-128}$$

или окончательно

$$\boxed{h_{р.\,р} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g},} \tag{4-129}$$

где разность $(v_1 - v_2)$ называют **потерянной скоростью**.

Формула (4-129) называется **формулой Борда**. Согласно этой формуле *потеря напора при резком расширении равняется скоростному напору, отвечающему потерянной скорости.*[1]

1) **Преобразование формулы Борда:**

а) Приведем выражение (4-129) к другому виду. Вынесем за скобки v_1, тогда получим:

$$h_{р.\,р} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \tag{4-130}$$

Обозначая

$$\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \zeta_{р.\,р}, \tag{4-131}$$

имеем

$$h_{р.\,р} = \zeta_{р.\,р} \frac{v_1^2}{2g}. \tag{4-132}$$

б) Вынося за скобки v_2, получаем аналогично

$$h_{р.\,р} = \zeta'_{р.\,р} \frac{v_2^2}{2g}, \tag{4-133}$$

[1] Надо помнить, что в основу этой формулы положены два существенных допущения: 1) пренебрежение силами внешнего трения на участке между сечениями $1-1$ и $2-2$; 2) принятие распределения давления в сечении $1-1$ по гидростатическому закону. Учитывая это обстоятельство, некоторые авторы в формулу Борда (4-129) вводят поправочный коэффициент, численное значение которого можно установить только опытным путем.

где

$$\zeta'_{р.р} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2. \qquad (4\text{-}134)$$

Коэффициенты $\zeta_{р.р}$ и $\zeta'_{р.р}$ называются коэффициентами сопротивления при резком расширении потока.

2) Местная потеря напора, получающаяся при выходе потока из трубы в бассейн больших размеров. Эту потерю называют потерей «на выход» (рис. 4-29, *б*), ее обозначают через $h_{вых}$.

Данный случай является частным случаем предыдущего, когда ω_2 значительно больше ω_1, ($\omega_2 \gg \omega_1$). Имея это в виду, можем написать в соответствии с формулой (4-131), что

$$\boxed{\zeta_{вых} = 1,\ 0,} \qquad (4\text{-}135)$$

а следовательно, потеря на выход будет

$$\boxed{h_{вых} = \frac{v_1^2}{2g},} \qquad (4\text{-}136)$$

или, несколько точнее

$$h_{вых} = \frac{\alpha v_1^2}{2g}. \qquad (4\text{-}137)$$

Если ω_2 нельзя считать достаточно большой величиной, то $h_{вых}$ можно представить зависимостью:

$$h_{вых} = \zeta_{вых}\frac{v_1^2}{2g}, \qquad (4\text{-}138)$$

где

$$\zeta_{вых} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2. \qquad (4\text{-}139)$$

В заключение отметим следующее.

1) Соединяя уравнением Бернулли и уравнением количества движения сечения $2'-2'$ и $2-2$, мы можем получить приближенную формулу для потерь напора на длине переходного участка, а затем и на длине «водоворотного участка» [4-11, с. 153].

2) Возникает вопрос о возможности распространения формулы Борда на случай ламинарного движения жидкости. Здесь надо сказать следующее. Если 2-е допущение (о гидростатическом распределении давления по сечению $1-1$; см. рис. 4-29, *а*) приемлемо для турбулентного движения, то для ламинарного движения, когда водоворотная зона *А* может отсутствовать, указанное допущение без соответствующих коррективов является, как правило, неприемлемым.

3) Надо учитывать, что в случае идеальной (невязкой) жидкости, когда касательные напряжения τ вовсе отсутствуют, мы, естественно, не можем представить себе поток, показанный на рис. 4-29, *а*. При отсутствии τ продольные скорости u должны распределяться равномерно по живым сечениям (рис. 4-29, *в*). При этом жидкость во второй трубе (см. область *Б*), окружающая цилиндрическую струю *А*, должна находиться в покое.

Струю идеальной жидкости можно представить себе расширяющейся только при особых условиях (начальных и граничных).

§ 4-16. ПОСТЕПЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ТРУБОПРОВОДА (ДИФФУЗОР)

Диффузор (рис. 4-30) устраивают для уменьшения потери напора $h_{р.р}$, возникающей при переходе трубы меньшего диаметра в трубу большего диаметра. Как показывает опыт, картина протекания жидкости в диффузоре имеет вид:

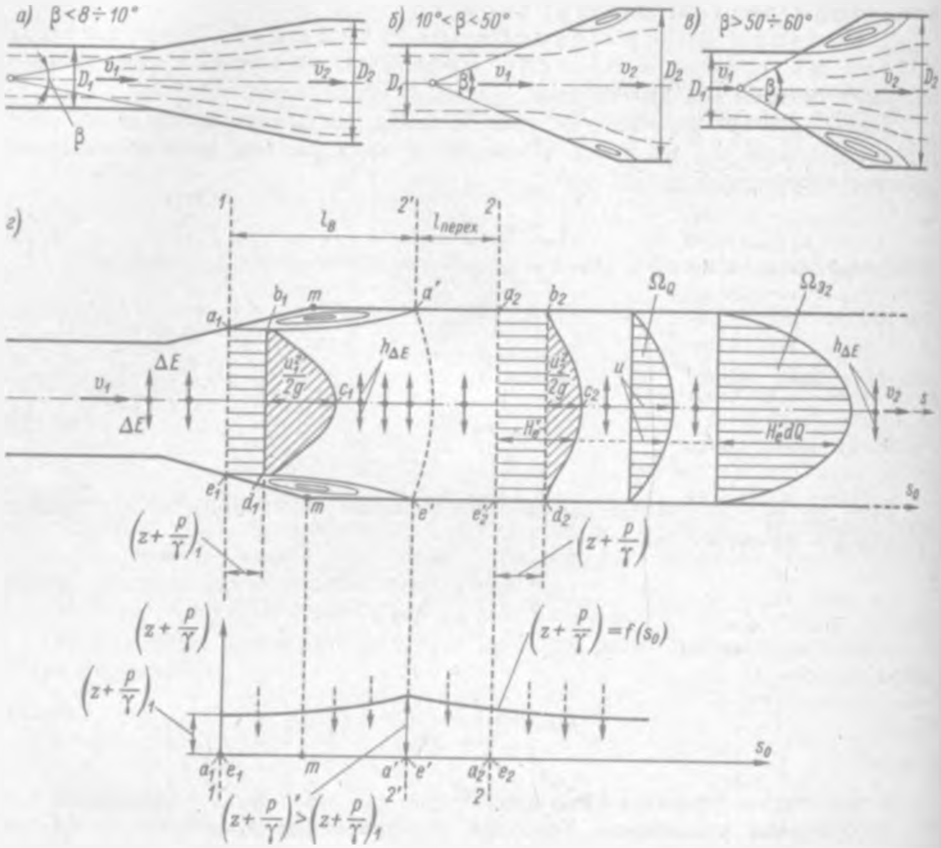


Рис. 4-30. Диффузоры (потоки представлены моделью Рейнольдса-Буссинеска); *а)* безотрывное движение; *б)* небольшой водоворот; *в)* сильно развитый водоворот; *г)* случай плоской задачи:

s_0 — координата, направленная по стенке трубы; *abcdea* — эпюры напора H'_e; напор $H_e = (\Omega_э) : (\Omega_Q)$, где Ω_Q — площадь эпюры скоростей (выражающая расход Q); $\Omega_э$ — площадь эпюры величины $(H'_e dQ)$ [согласно формуле 3-95)]: *a* — *e'* — неплоское живое сечение; $l_{перех}$ — длина переходного участка

а) при угле β в пределах

$$0 < \beta < 8 \div 10^\circ$$

на всем протяжении диффузора наблюдается безотрывное протекание жидкости (рис. 4-30, *а*);

б) при

$$8 \div 10^\circ < \beta < 50 \div 60^\circ$$

получается отрыв струи от стенок (рис. 4-30, *б*), причем с увеличением угла β точка начала отрыва перемещается вверх по течению;

в) при

$$\beta > 50 \div 60^{\circ}$$

на всем протяжении диффузора имеем отрыв транзитной струи от стенок (рис. 4-30, *в*).[1]

Потерю напора в диффузоре $h_{\text{диф}}$ выражают в долях потери напора $h_{\text{р. р}}$, вычисленной по формуле (4-129):

$$h_{\text{диф}} = \varphi_y h_{\text{р. р}}, \qquad (4\text{-}140)$$

где φ_y – эмпирический коэффициент.

Величина φ_y в основном зависит от угла β. Как видно из графика (рис. 4-31), построенного на основании опытных данных, наивыгоднейший угол β, при котором получаются наименьшие потери напора, будет $\beta \approx 6^{\circ}$.

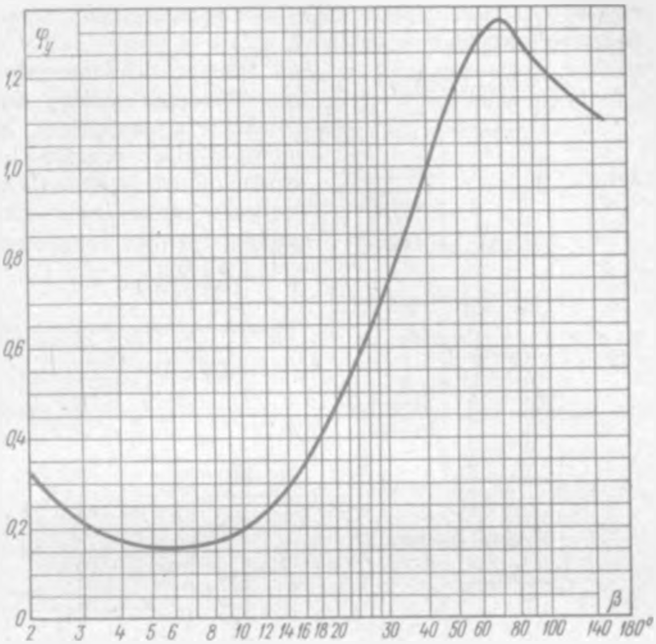


Рис. 4-31. График для определения коэффициента φ_y, входящего в формулу (4-140)

В заключение отметим, что на рис. 4-30, *г* представлена схема (в виде модели Рейнольдса – Буссинеска), объясняющая (более подробно, чем то было сказано ранее) физические причины отрыва транзитной струи от стенки русла.

На этой схеме для плоских живых сечений *1–1* и *2–2* изображены эпюры напоров H'_e (для элементарных струек):

$$H'_e = \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{u^2}{2g};$$

см. площади $Q_{a_1b_1c_1d_1e_1a_1}$ и $Q_{a_2b_2c_2d_2e_2a_2}$.

Площадь таких эпюр не выражает механическую энергию, проносимую жидкостью через живые сечения *1 – 1* и *2 – 2*. Рассматривая для примера сечение *2 – 2*, можем сказать, в соответствии с формулой (3-95), что энергию, проносимую через это сечение, выражает (для плоской задачи) площадь эпюры $(\Omega_э)_2$, каждая горизонтальная ордината которой равна $H'_e dQ$. Легко видеть, что полный напор в сечении *2 – 2* равен:

$$H_{e_2} = (\Omega_э)_2 : (\Omega_Q),$$

где Ω_Q – площадь эпюры скоростей, дающая нам (для плоской задачи) величину расхода Q (который вдоль потока постоянен: $Q = \text{const}$).

Площадь эпюры $(\Omega_э)$, в связи с потерями напора, должна уменьшаться по течению (также как и величина H_e). Вместе с тем, в связи с поперечной диффузией энергии полный напор у стенки трубы (где $u \approx 0$) $H'_e \approx z + p/\gamma$ [см. на рис. 4-30, *г*

---

[1] На рис. 4-30, *б* и *в* представлена картина осредненного потока, симметричная относительно продольной оси трубопровода. В действительности, однако, в подобных случаях почти всегда получается искривление оси транзитной струи, причем водоворотные области оказываются несимметричными; часто может получиться отрыв струи только от одной стенки.

схему графика $(z + p/\gamma) = f(s_0)]$ может увеличиваться вдоль общего направле течения; такое положение, как мы отмечали ранее, и может обусловливать «во ратное» течение жидкости, а следовательно, и отрыв транзитной струи от сте В связи с отрывом струи возникает водоворотная зона, существование котор обеспечивается поперечной (по отношению к потоку жидкости) диффузией механичес энергии.[1]

§ 4-17. СУЖЕНИЕ ТРУБОПРОВОДА. ВХОД В ТРУБОПРОВОД

На рис. 4-32 показаны различные случаи сужения трубопровода. Ес предположить, что сечение «первой» трубы весьма велико, то вместо сужен трубопровода на рис. 4-32 получаем схемы входа потока из бассей больших размеров в трубу.

На рис. 4-33 представлен особый случай су ния, который может быть назван наибол резким сужением. Если размер a (см. черте удовлетворяет условию $a > 0{,}5D_2$, то этот случ в отличие от остальных может быть решен (с н которым все же приближением) теоретически пр мерно так же, как резкое расширение тру (см. § 4-15).

Рис. 4-32. Сужение трубопровода

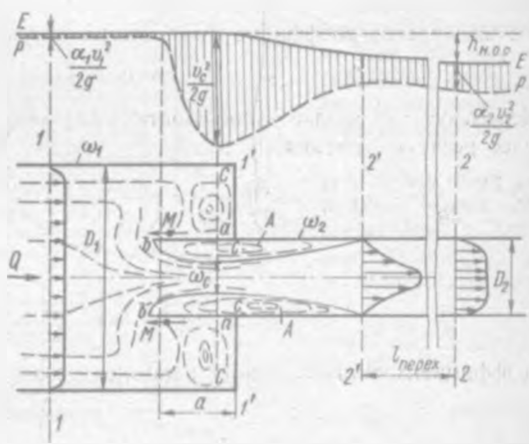


Рис. 4-33. Наиболее резкое сужение трубопровода

Рассмотрим случай наиболее резкого сужения. Условия протекан жидкости здесь характеризуются следующим (рис. 4-33):

1) частицы жидкости M, движущиеся вдоль стенки ab, должны в точках резко изменить направление своего движения на противоположное. При это

---

[1] Как нам представляется, достаточно надежно количественно решить вопрос о отрыве транзитной струи тяжелой реальной жидкости от стенки русла едва ли мож (в общем случае) без учета отмеченного нами «энергетического принципа». Дополн тельно обратим внимание на то, что на рис. 4-30, *г* (и на рис. 4-29, *а*) имеется в ви случай, когда боковой приток энергии $h_{\Delta E}$ к пристенной струйке, принадлежащ водоворотной области, меньше потерь энергии в этой струйке. Следует учитыват что при отсутствии $h_{\Delta E}$ водоворотные области (см., например, рис. 4-29, *а*) сущес вовать не могут. Только наличие $h_{\Delta E}$ обусловливает возможность возникновен и существования этих областей.

благодаря силам инерции частиц струя оторвется от стенки bc и мы получим кольцевую водоворотную область A.

2) в пределах водоворотной области A можно различать два участка транзитной струи: с у ж а ю щ и й с я, расположенный перед «сжатым сечением» $C-C$, и р а с ш и р я ю щ и й с я, расположенный за сжатым сечением $C-C$.

Как показывают опыты, *потеря напора на сужающейся части струи (до сечения $C-C$) для турбулентного потока относительно мала* в связи с тем, что пульсация скоростей на протяжении сужающихся потоков всегда снижается; кроме того, и длина сужающейся части струи невелика – равна примерно $0{,}5D_2$.

В основном местная потеря напора сосредоточивается в пределах расширяющейся части струи (между сечениями $C-C$ и $2'-2'$).

Имея в виду такое положение, потерю напора для наиболее резкого сужения трубопровода (рис. 4-33) можем найти по формуле Борда, подставив в (4-129) вместо скорости v_1 скорость v_c в сжатом сечении $C-C$:

$$v_C = \frac{Q}{\omega_C}, \tag{4-141}$$

где ω_C – площадь живого сечения транзитной струи в сжатом сечении $C-C$:

$$\omega_C = \varepsilon\omega_2; \tag{4-142}$$

здесь ε называется коэффициентом сжатия струи:

$$\varepsilon = \omega_C/\omega_2. \tag{4-143}$$

Используя указанные зависимости, получаем величину потерь напора для наиболее резкого сужения (н. р. с.)

$$h_{\text{н.р.с}} = \frac{(v_C - v_2)^2}{2g} = \left(\frac{v_C}{v_2} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_C} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}, \tag{4-144}$$

или

$$h_{\text{н.р.с}} = \zeta_{\text{н.р.с}} \frac{v_2^2}{2g}, \tag{4-145}$$

где коэффициент сопротивления наиболее резкого сужения потока

$$\zeta_{\text{н.р.с}} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2. \tag{4-146}$$

Как видно, с уменьшением ε, т. е. с увеличением сжатия струи в сечении $C-C$, коэффициент сопротивления должен увеличиваться и, следовательно, должны увеличиваться потери напора. Если пренебречь потерями напора до сжатого сечения $C-C$, как мы делали выше, то следует считать, что полученные формулы (4-145) и (4-146) относятся, собственно, к любой схеме, изображенной на рис. 4-32. Различие между этими схемами будет заключаться только в разных численных значениях коэффициента ε, входящего в формулу (4-146).

Условимся обозначать далее коэффициент сжатия для «наиболее резкого сжатия» (рис. 4-33) через $\varepsilon_{\text{н.р.с}}$. Величина этого коэффициента, согласно И. Е. Идельчику, оказывается[1]

$$\varepsilon_{\text{н.р.с}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \omega_2/\omega_1}}. \tag{4-147}$$

---

[1] Вывод формулы (4-147) см., например, [11, с. 157].

Рассмотрим в заключение случай **в х о д а   в   т р у б о п р о в о д   и з   в е с ь м а   б о л ь ш о г о   б а с с е й н а**. Для этого случая, полагая в формуле (4-150) площадь $\omega_1 = \infty$, получаем

$$\zeta_{вх} = \xi, \tag{4-152}$$

где ξ – можем найти, как указано выше.

Зная $\zeta_{вх}$, потерю напора на вход $h_{вх}$ определяем по формуле (4-149), заменив в ней обозначения h_c и ζ_c обозначениями $h_{вх}$ и $\zeta_{вх}$. Подчеркнем, что величина $\zeta_{вх}$ для случая входа в трубопровод, конструктивно оформленного в соответствии с рис. 4-32, *а* (т. е. для случая «резкое сужение») получается равной [при $\omega_1 = \infty$; см. формулу (4-151)]

$$\boxed{\zeta_{вх} = 0{,}5.} \tag{4-153}$$

§ 4-18. ОСТАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ МЕСТНЫХ ПОТЕРЬ НАПОРА. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ВЕЙСБАХА

На рис. 4-36 для примера показаны два случая местных потерь напора (местных сопротивлений): задвижка и поворот трубы. Эти случаи и им подобные, так же как и сужения трубы ~~(см. § 4-17)~~, характеризуются наличием сжатого сечения $C-C$ транзитной струи и водоворотных областей A. Как было указано выше, потеря напора h_j главным образом сосредоточивается только на участке струи за сжатым сечением, где имеется **р а с ш и р е н и е** струи. Поэтому h_j в любом **с л у ч а е** можно было бы определить в соответствии с формулой Борда, переписав ее так:

$$\boxed{h_j = \zeta_j \frac{v^2}{2g},} \quad (1) \quad \cancel{(4\text{-}154)}$$

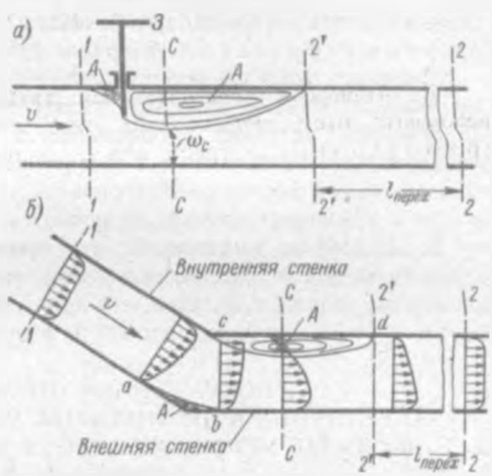


Рис. 4-36. Протекание жидкости при наличии задвижки 3 (*а*) и при наличии поворота трубы (*б*)

где ζ_j можно назвать **к о э ф ф и ц и е н т о м   м е с т н о г о   с о п р о т и в л е н и я**.

Согласно (4-134),

$$\zeta_j = \left(\frac{\omega}{\omega_C} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2, \quad (2)$$

причем здесь ω – живое сечение транзитной струи, заполняющей всю трубу; ω_C – живое сечение транзитной струи по линии сжатого сечения $C-C$.

Однако практически ζ_j по (4-155) в общем случае найти затруднительно, так как нам неизвестна площадь ω_C.

Учитывая вместе с тем приведенные соображения, Вейсбах предложил вычислять **л ю б у ю** местную потерю напора по формуле (4-154), считая, что **к о э ф ф и ц и е н т   м е с т н о г о   с о п р о т и в л е н и я** ζ_j, входящий в эту формулу, в общем случае должен определяться **э к с п е р и м е н т а л ь н ы м   п у т е м** для различных встречающихся в практике местных сопротивлений.

Экспериментальные значения ζ_j приводятся в справочной литературе. Некоторые сокращенные данные по этому вопросу даются ниже ~~(стр. 194—203)~~.

Величина ζ_j зависит от того, какую скорость будем подс формулу Вейсбаха (4-154): относящуюся к сечению, взятому д сопротивления, или за ним. Из формулы (4-154) ясно, что величин *пропорциональна скоростному напору.*

Практически во всех случаях h_j определяется по формуле (4-154), ζ_j — эмпирический коэффициент пропорциональности; только в дв (при резком расширении и наиболее резком сужении) этот ко устанавливается теоретическим путем — путем совместного решения Бернулли и количества движения.

Надо, впрочем, отметить следующее. Кирхгоф, Н. Е. Жуковский и др особые методы для определения размера «сжатого» сечения при истечении ж различных отверстий. Эти методы основаны на теории функций комплексной п и относятся к плоскому безвихревому установившемуся движению идеальной жидкости. Приближенное (а в некоторых случаях и точное) использование методов для определения площади ω_C сжатого сечения несколько расширяет к для которых ζ_j может быть найдено теоретически.

В случае квадратичной области сопротивления, мы имели в виду выше, величина ζ_j не должна зависеть о Рейнольдса, а следовательно, не должна зависеть: от скорости v, жидкости (т. е. от величины ν), а также от размеров узла, где в данная местная потеря напора. Величина ζ_j должна зависеть практически т от геометрической формы упомянутого узла.

Заметим, что в случае доквадратичной области сопротивления или в ламинарного режима движения жидкости в трубах (этих случаев мы вы не касались) величина ζ_j оказывается зависящей от числа Рейно следовательно, от величин v и ν и размеров потока (а также, разумеет геометрической формы рассматриваемого узла). В связи с этим расчеты потерь в указанных случаях получаются более сложными.

В заключение подчеркнем, что приведенные выше значения ζ_j о к условиям, когда расстояния между узлами, для которых определя достаточно велики, т. е. такие, что один узел практически не влияет на к ческую картину движения жидкости в пределах другого узла.

СОКРАЩЕННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ О ВЕЛИЧИНЕ КОЭФФИЦИЕНТА МЕСТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ (В СЛУЧАЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НАПОРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ)

Выше были рассмотрены следующие случаи местных потерь напора h_j: 1) расширение трубы (см. стр. 183); 2) выход из трубы (см. стр. 187); 3) пост расширение трубы (см. стр. 188); 4) сужение трубопровода и вход в труб (см. стр. 190).

Далее приводятся эмпирические данные,[1] служащие для определения коэфф местного сопротивления ζ_j, входящего в формулу Вейсбаха (4-154) и относящ другим местным потерям. Общее обозначение коэффициента ζ_j далее заменяетс ными его обозначениями: $\zeta_д$ (коэффициент, относящийся к диафрагме), (коэффициент, относящийся к резкому повороту трубы) и т. д.

1°. Диафрагма с острыми краями в трубе круглого поперечного сечен

$Re_D = \frac{v_2 D_2}{\nu} \geqslant 10^5$ и при $\frac{l}{D_2} = 0 \div 0{,}015$ (рис. 4-37):

$$\zeta_д = \frac{h_j}{v_2^2/(2g)},$$

[1] Большинство этих данных взяты по книге [4-5].

где v_2 – средняя скорость в круглом отверстии диафрагмы площадью ω_2. Величина $\zeta_д$ берется из табл. 4-5 в зависимости от отношений ω_2/ω_1 и ω_2/ω_3 (обозначения ω_1 и ω_3 см. на чертеже).

2°. Резкий поворот трубы на угол θ; рис. 4-38, *а*:

$$\zeta_{р.\,пов} = \frac{h_{р.\,пов}}{v^2/(2g)},$$

где величина коэффициента сопротивления резкого поворота $\zeta_{р.\,пов}$ для гладких труб круглого и квадратного поперечного сечения вычисляется по формуле

$$\zeta_{р.\,пов} = AB, \tag{4-156}$$

причем здесь эмпирические коэффициенты A и B берутся (согласно И. Е. Идельчику) из табл. 4-6 и 4-7.

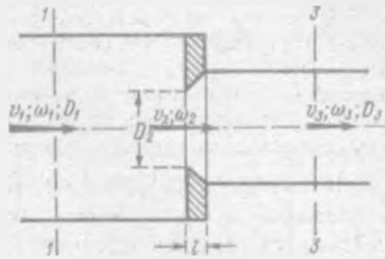


Рис. 4-37. Диафрагма

3°. Плавный поворот трубы на угол θ (при $Re_D \geqslant 2 \cdot 10^5$); рис. 4-38, *б*:

$$\zeta_{п.\,пов} = \frac{h_{п.\,пов}}{v^2/(2g)},$$

где величина коэффициента сопротивления плавного поворота $\zeta_{п.\,пов}$ для гладкой цилиндрической трубы вычисляется по формуле

$$\zeta_{п.\,пов} = \zeta' \frac{\theta^\circ}{90^\circ}, \tag{4-157}$$

причем здесь ζ' берется из табл. 4-8, составленной по данным Вейсбаха.

4°. Тройник вытяжной (рис. 4-39); $\omega_1 = \omega_2$. Коэффициенты сопротивления $\zeta_{2\text{-}3}$ и $\zeta'_{2\text{-}3}$, учитывающие снижение[1] (изменение) напора $(h_j)_{2\text{-}3}$ от сечения *2 – 2* до сечения *3 – 3*:

$$\zeta_{2\text{-}3} = \frac{(h_j)_{2\text{-}3}}{v_3^2/2g}; \quad \zeta'_{2\text{-}3} = \frac{(h_j)_{2\text{-}3}}{v_2^2/2g} = \frac{\zeta_{2\text{-}3}}{\left(\dfrac{Q_2}{Q_3}\,\dfrac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2},$$

где $\zeta_{2\text{-}3}$ находится по табл. 4-9 в зависимости от отношений ω_2/ω_3 и Q_2/Q_3 (обозначения указаны на чертеже).

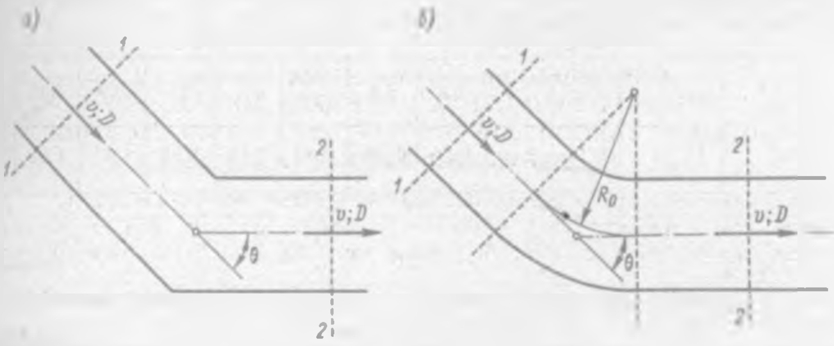


Рис. 4-38. Поворот трубы

Коэффициенты сопротивления $\zeta_{1\text{-}3}$ и $\zeta'_{1\text{-}3}$, учитывающие снижение напора $(h_j)_{1\text{-}3}$ от сечения *1 – 1* до сечения *3 – 3* (рис. 4-39)

$$\zeta_{1\text{-}3} = \frac{(h_j)_{1\text{-}3}}{v_3^2/(2g)}; \quad \zeta'_{1\text{-}3} = \frac{(h_j)_{1\text{-}3}}{v_1^2/(2g)} = \frac{\zeta_{1\text{-}3}}{(1 - Q_2/Q_3)^2},$$

где $\zeta_{1\text{-}3}$ находится по табл. 4-10 в зависимости от отношения Q_2/Q_3.

[1] При рассмотрении тройников мы пользуемся термином «снижение напора» вместо термина «потеря напора» (см. § 4-19).

Табл

Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{д}$ диафрагмы с острыми краями

ω_2/ω_3	ω_2/ω_1									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	2,90	2,80	2,67	2,53	2,40	2,25	2,09	1,98	1,75	1,50
0,2	2,27	2,17	2,05	1,94	1,82	1,69	1,55	1,40	1,26	1,05
0,4	1,70	1,62	1,52	1,42	1,32	1,20	1,10	0,98	0,85	0,68
0,6	1,23	1,15	1,07	0,98	0,90	0,80	0,72	0,62	0,52	0,39
0,8	0,82	0,76	0,69	0,63	0,56	0,49	0,42	0,35	0,28	0,18
1,0	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05

Таблица 4

Значения коэффициента A к формуле (4-156)

θ°	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
A	–	2,50	2,22	1,87	1,50	1,28	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20

Таблица 4-

Значения коэффициента B к формуле (4-156)

θ°	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
B	0	0,05	0,07	0,17	0,37	0,63	0,99	1,56	2,16	2,67	3,00

Таблица 4-8

Значения коэффициента ζ' к формуле (4-157)

$\frac{D}{2R_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ'	0,13	0,14	0,16	0,21	0,29	0,44	0,66	0,98	1,41	1,98

Таблица 4

Значения коэффициента сопротивления ζ_{2-3} для вытяжного тройника (рис. 4-39)

ω_2/ω_3	Q_2/Q_3									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,09	−0,50	+2,97	9,90	19,70	32,40	48,80	66,50	86,90	110,00	136,0
0,19	−0,53	+0,53	2,14	4,23	7,30	11,40	15,60	20,30	25,80	31,8
0,27	−0,59	0,00	1,11	2,18	3,76	5,90	8,38	11,30	14,60	18,4
0,35	−0,65	−0,09	+0,59	1,31	2,24	3,52	5,20	7,28	9,23	12,2
0,44	−0,80	−0,27	+0,26	0,84	1,59	2,66	4,00	5,73	7,40	9,12
0,55	−0,88	−0,48	0,00	0,53	1,15	1,89	2,92	4,00	5,36	6,60
1,00	−0,65	−0,40	−0,24	+0,10	0,50	0,83	1,13	1,47	1,86	2,30

Таблица 4-10

Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{1\text{-}3}$ для вытяжного тройника (рис. 4-39)

Q_2/Q_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ_{1-3}	0,70	0,64	0,60	0,65	0,75	0,85	0,92	0,96	0,99	1,00

Таблица 4-11

Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{1\text{-}2}$ для приточного тройника (рис. 4-40)

ω_2/ω_1	Q_2/Q_1									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,09	2,80	4,50	6,00	7,88	9,40	11,10	13,00	15,80	20,00	24,70
0,19	1,41	2,00	2,50	3,20	3,97	4,95	6,50	8,45	10,80	13,30
0,27	1,37	1,81	2,30	2,83	3,40	4,07	4,80	6,00	7,18	8,90
0,35	1,10	1,54	1,90	2,35	2,73	3,22	3,80	4,32	5,28	6,53
0,44	1,22	1,45	1,67	1,89	2,11	2,38	2,58	3,04	3,84	4,75
0,55	1,09	1,20	1,40	1,59	1,65	1,77	1,94	2,20	2,68	3,30
1,00	0,90	1,00	1,13	1,20	1,40	1,50	1,60	1,80	2,06	2,30

Таблица 4-12

Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{1\text{-}3}$ для приточного тройника (рис. 4-40)

Q_2/Q_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_{1\text{-}3}$	0,70	0,64	0,60	0,57	0,55	0,51	0,49	0,55	0,62	0,70

[1] Как видно, величина $\zeta_{1\text{-}3}$ (при $Q_1 = Q_3$), не совпадает с соответствующей величиной $\zeta_{1\text{-}3}$ в табл. 4-10. Это обстоятельство объясняется неточностью опытов.

Таблица 4-13

Значения ζ_3 для простой задвижки, перекрывающей круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-41)

a/D	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ζ_3	–	35,0	10,0	4,60	2,06	0,98	0,44	0,17	0,06

Таблица 4-14

Значения ζ_3 для простой задвижки, перекрывающей трубу прямоугольного сечения (рис. 4-42)

a/c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ζ_3	–	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,08	0,95	0,39	0,09

5°. Тройник приточный (рис. 4-40); $\omega_1 = \omega_2$. Коэффициенты сопротивления $\zeta_{1\text{-}2}$ и $\zeta'_{1\text{-}2}$, учитывающие снижение напора $(h_j)_{1\text{-}2}$ от сечения $1-1$ до сечения $2-2$

$$\zeta_{1\text{-}2} = \frac{(h_j)_{1\text{-}2}}{v_1^2/(2g)}; \quad \zeta'_{1\text{-}2} = \frac{(h_j)_{1\text{-}2}}{v_2^2/(2g)} = \frac{\zeta_{1\text{-}2}}{\left(\dfrac{Q_2}{Q_1}\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2},$$

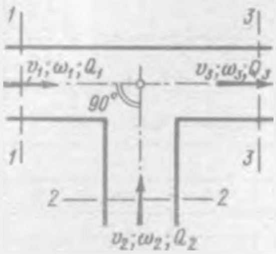


Рис. 4-39. Тройник вытяжной

где $\zeta_{1\text{-}2}$ находится по табл. 4-11 в зависимости от отношений ω_2/ω_1 и Q_2/Q_1 (обозначения указаны на чертеже).

Коэффициенты сопротивления $\zeta_{1\text{-}3}$ и $\zeta'_{1\text{-}3}$, учитывающие снижение напора $(h_j)_{1\text{-}3}$ от сечения $1-1$ до сечения $3-3$ (рис. 4-40):

$$\zeta_{1\text{-}3} = \frac{(h_j)_{1\text{-}3}}{v_1^2/(2g)}; \qquad \zeta'_{1\text{-}3} = \frac{(h_j)_{1\text{-}3}}{v_3^2/(2g)} = \frac{\zeta_{1\text{-}3}}{(1 - Q_2/Q_1)^2},$$

где $\zeta_{1\text{-}3}$ находится по табл. 4-12 в зависимости от отношения Q_2/Q_1.

6°. Задвижки:

$$\zeta_з = \frac{h_з}{v^2/(2g)},$$

где v – скорость в трубе и $h_з$ – потеря напора от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ (см., например, рис. 4-41).

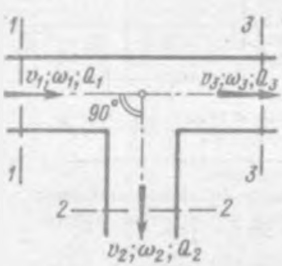


Рис. 4-40. Тройник приточный

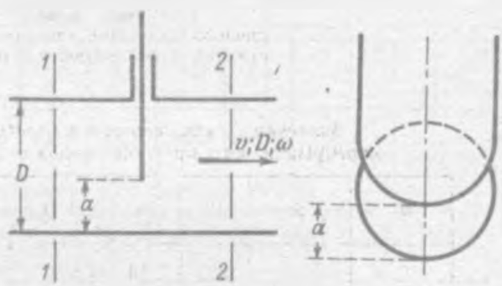


Рис. 4-41. Задвижка простая на круглой трубе

Величины $\zeta_з$ берутся:

а) для простой задвижки, перекрывающей трубу круглого поперечного сечения (рис. 4-41), из табл. 4-13 в зависимости от отношения a/D, где a – открытие задвижки;

б) для простой задвижки, перекрывающей трубу прямоугольного поперечного сечения (рис. 4-42), – из табл. 4-14 в зависимости от отношения a/c, где c – высота трубы;

в) для задвижки Лудло (рис. 4-43) на круглой трубе – из табл. 4-15 в зависимости от степени открытия a/D задвижки;

г) для задвижки с симметричным сужением при полном ее открытии (рис. 4-44) – из табл. 4-16 в зависимости от диаметра трубы и других размеров задвижки, указанных на чертеже;

д) для дискового (дроссельного) затвора (рис. 4-45), перекрывающего круглоцилиндрическую трубу, – из табл. 4-17 в зависимости от угла θ, показанного на чертеже;

Таблица 4-15

Значения $\zeta_з$ для задвижки Лудло, перекрывающей круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-43)

a/D	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_з$	30,0	22,0	12,0	5,3	2,8	1,5	0,8	0,3	0,15

Таблица 4-16

Значения $\zeta_з$ для задвижки (при полном открытии) с симметричным сужением на круглоцилиндрической трубе (рис. 4-44)[1]

D, мм	300	300	250	200
D_c/D	0,67	0,67	0,80	0,75
l/D	2,50	1,68	1,50	1,33
$\zeta_з$	0,30	0,36	0,16	0,19

[1] Значения ζ задвижки с симметричным сужением учитывают потери сужения и последующего расширения.

Таблица 4-17

Значения $\zeta_з$ для дискового (дроссельного) затвора, перекрывающего круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-45)

$\theta°$	5	10	20	30	40	50	60	70	75
$\zeta_з$	—	0,52	1,54	4,50	11,0	29,0	108	625	—

Таблица 4-18

Значения $\zeta_з$ для дискового (дроссельного) затвора, перекрывающего трубу прямоугольного поперечного сечения (рис. 4-45)

$\theta°$	0	10	20	30	40	50	60	65	70
$\zeta_з$	—	0,45	1,34	3,54	9,30	25,0	77,0	158	368

Таблица 4-19

Значения $\zeta_{кл}$ для захлопки клапана (рис. 4-46)

θ	20	30	40	50	60	70	75
$\zeta_{кл}$	1,7	3,2	6,6	14	30	62	90

е) для дискового (дроссельного) затвора (рис. 4-45), перекрывающ трубу прямоугольного поперечного сечения, – из табл. 4-18 в зависимости угла θ, показанного на чертеже.

7°. Клапаны:

$$\zeta_{кл} = \frac{h_{кл}}{v^2/(2g)},$$

где v – скорость в трубе и $h_{кл}$ – потери напора в клапане.

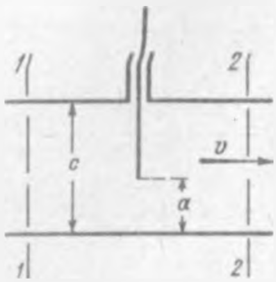


Рис. 4-42. Задвижка простая на прямоугольной трубе

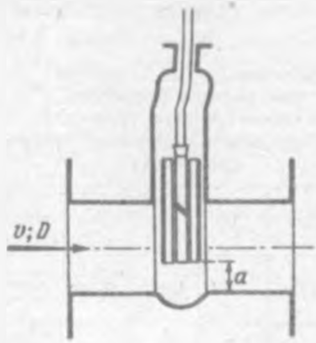


Рис. 4-43. Задвижка Лудло

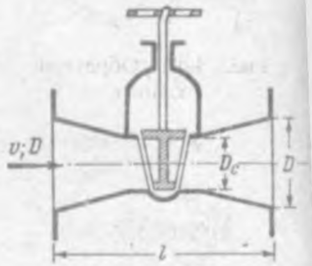


Рис. 4-44. Задвижка с сужением

Величины $\zeta_{кл}$ берутся:

а) для захлопки (рис. 4-46) – из табл. 4-19 в зависимости от угла θ, показанного на чертеже;

б) для обратного клапана (рис. 4-47) – по табл. 4-20 в зависимости от диаметра трубы D;

в) для всасывающего клапана с сеткой (рис. 4-48) – по табл. 4-21 в зависимости от диаметра трубы.

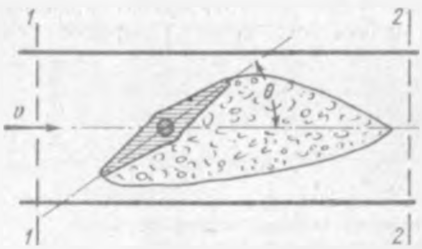


Рис. 4-45. Дисковый затвор

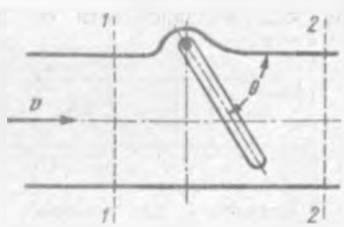


Рис. 4-46. Захлопка

8°. Решетки стержневые в трубе прямоугольного поперечного сечения (рис. 4-49) при

$$Re = \frac{v_2 a}{\nu} > 10^4. \qquad (4\text{-}158)$$

Предполагается, что стержни решетки располагаются в продольных (по отношению к потоку) вертикальных плоскостях. Следует подчеркнуть, что приводимые в этом пункте данные широко используются и для подсчета потерь напора в случае безнапорного движения воды через решетку.

Приводимые ниже данные заимствованы из [4-5].

1. Чистая (незагрязненная) решетка.

а) В случае $\frac{l}{c} = 5$; $\frac{a}{c} > 1,0$; величина $\zeta_{реш}$ определяется по формуле

Киршмера:[1]

$$\zeta_{реш} = \frac{h_{реш}}{v_1^2/(2g)} = \beta_1 \left(\frac{c}{a}\right)^{4/3} \sin\theta, \qquad (4\text{-}159')$$

где v_1 – средняя скорость перед решеткой; θ – угол наклона стержней решетки к горизонту;

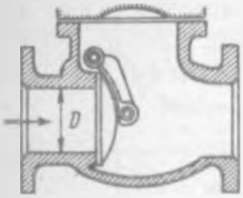


Рис. 4-47. Обратный клапан

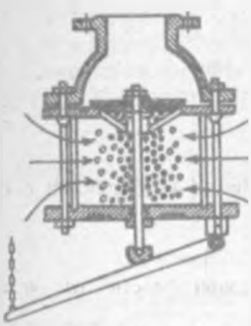


Рис. 4-48. Всасывающий клапан с сеткой

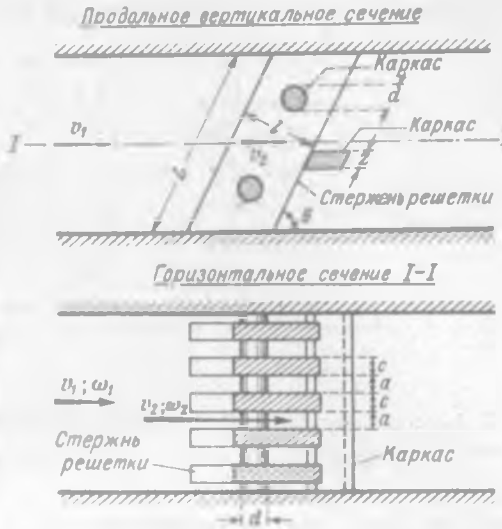


Рис. 4-49. Решетка стержневая

a – ширина просвета между стержнями; c – толщина стержня; l – больший размер поперечного сечения стержня решетки (см. рис. 4-50); β_1 – коэффициент, принимаемый по табл. 4-22 в зависимости от формы поперечного сечения стержней решетки

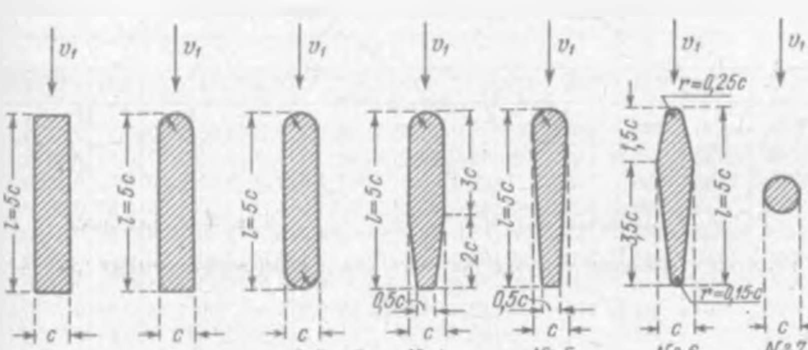


Рис. 4-50. Типы стержней (к рис. 4-49)

[1] В литературе приводится ряд предложений, уточняющих формулу (4-159′). При этом большинство авторов отмечает, что формула Киршмера дает заниженную величину потерь напора. Иногда считают, что в правую часть этой формулы надо вводить поправочный множитель, равный 1,75 ÷ 2,00.

Таблица 4-20

Значения $\zeta_{кл}$ для обратного клапана (рис. 4-47)

D, мм	40	70	100	200	300	500	750
$\zeta_{кл}$	1,3	1,4	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9

Таблица 4-21

Значения $\zeta_{кл}$ для всасывающего клапана с сеткой (рис. 4-48)

D, мм	40	70	100	200	300	500	750
$\zeta_{кл}$	12	8,5	7,0	4,7	3,7	2,5	1,6

Таблица 4-22

Значения коэффициента β_1 к формуле (4-159)

Номера стержней	1	2	3	4	5	6	7
β_1	2,34	1,77	1,77	1,00	0,87	0,71	1,73

Таблица 4-23

Значения коэффициента β_2 к формуле (4-160)

Номера стержней	1	2	3	4	5	6	7
β_2	1,0	0,76	0,76	0,43	0,37	0,30	0,74

Таблица 4-24

Значения коэффициента ζ к формуле (4-160)

$\frac{l}{d}$	ω_2/ω_1															
	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0
0	7000	1670	730	400	245	96,0	51,5	30,0	18,2	8,25	4,00	2,00	0,97	0,42	0,13	0
0,2	6600	1600	687	374	230	94,0	48,0	28,0	17,4	7,70	3,75	1,87	0,91	0,40	0,13	0,01
0,4	6310	1530	660	356	221	89,0	46,0	26,5	16,6	7,40	3,60	1,80	0,88	0,39	0,13	0,01
0,6	5700	1380	590	322	199	81,0	42,0	24,0	15,0	6,60	3,20	1,60	0,80	0,36	0,13	0,01
0,8	4680	1130	486	264	164	66,0	34,0	19,6	12,2	5,50	2,70	1,34	0,66	0,31	0,12	0,02
1,0	4260	1030	443	240	149	60,0	31,0	17,8	11,1	5,00	2,40	1,20	0,61	0,29	0,11	0,02
1,4	3930	950	408	221	137	55,6	28,4	16,4	10,3	4,60	2,25	1,15	0,58	0,28	0,11	0,03
2,0	3770	910	391	212	134	53,0	27,4	15,8	9,9	4,40	2,20	1,13	0,58	0,28	0,12	0,04
3,0	3765	913	392	214	132	53,5	27,5	15,9	10,0	4,50	2,24	1,17	0,61	0,31	0,15	0,06
4,0	3775	930	400	215	132	53,8	27,7	16,2	10,0	4,60	2,25	1,20	0,64	0,35	0,16	0,08
5,0	3850	936	400	220	133	55,5	28,5	16,5	10,5	4,75	2,40	1,28	0,69	0,37	0,19	0,10
6,0	3870	940	400	222	133	55,8	28,5	16,6	10,5	4,80	2,42	1,32	0,70	0,40	0,21	0,12
7,0	4000	950	405	230	135	55,9	29,0	17,0	10,9	5,00	2,50	1,38	0,74	0,43	0,23	0,14
8,0	4000	965	410	236	137	56,0	30,0	17,2	11,1	5,10	2,58	1,45	0,80	0,45	0,25	0,16
9,0	4080	985	420	240	140	57,0	30,0	17,4	11,4	5,30	2,62	1,50	0,82	0,50	0,28	0,18
10,0	4110	1000	430	245	146	59,7	31,0	18,2	11,5	5,40	2,80	1,57	0,89	0,53	0,32	0,20

(различные формы этих сечений за соответствующими номерами показаны на рис. 4-50).

б) В случае отношений l/c и a/c любой величины

$$\zeta_{реш} = \beta_2 \zeta' \sin\theta, \tag{4-159''}$$

где θ – угол наклона стержней к горизонту; коэффициент β_2 берется из табл. 4-23 в зависимости от формы поперечного сечения стержней; коэффициент ζ' – из табл. 4-24 в зависимости от отношения ω_2/ω_1 и отношения l/d'; здесь ω_1 – площадь живого сечения перед решеткой; ω_2 – полная площадь решетки в свету; d' – величина, равная:

$$d' = \frac{4\omega'}{\chi'},$$

где ω' – площадь одного отверстия решетки; χ' – смоченный периметр этого отверстия.

2. Загрязненная решетка (в случае гидротехнического сооружения):

$$(\zeta_{реш})_{тр} = \varkappa' \zeta_{реш},$$

где $\zeta_{реш}$ определяется, как указано выше (в п. 1); численное значение коэффициента $\varkappa'$ принимается равным:

а) при машинной очистке решетки $\varkappa' = 1,1 \div 1,3$;

б) при ручной очистке решетки $\varkappa' = 1,5 \div 2,0$.

3. Решетка (гидротехнического сооружения) с дополнительным каркасом, состоящим из добавочных горизонтальных стержней:

$$(\zeta_{реш})_{кар} = \varkappa'' (\zeta_{реш})_{тр},$$

где коэффициент $\varkappa''$ определяется по формуле

$$\varkappa'' = \frac{1}{\left(1 + \frac{A}{L}\right)^2},$$

где L – высота решетки в свету (рис. 4-49); A – суммарная высота поперечных элементов:

$$A = n_1 d + n_2 z,$$

где n_1 – количество распорно-связных горизонтальных элементов (высотой d); n_2 – количество промежуточных опорных балок (высотой z).

9°. Часто встречающиеся значения коэффициентов местного сопротивления ζ_f

Таблица 4-25

Наименование местного сопротивления	ζ_f
Вход в трубу при нескругленных кромках (рис. 4-32, *а*)	0,50
Вход в трубу со скругленными кромками (рис. 4-32, *в*)	~0,20
Резкое расширение трубы ($D_2 > D_1$; рис. 4-28)	$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2$
Резкое сужение трубы ($D_2 < D_1$; рис. 4-32, *а*)	$0,5\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$
Переходный расширяющийся конус (при $D_2 \approx 2D_1$; рис. 4-30)	~5,0
Переходный сужающийся конус (при $D_2 \approx 0,5D_1$)	~0,20
Резкий поворот трубы на 90°	~1,20
Плавный поворот трубы на 90° при $(D : 2R_0) = 0,2 - 0,6$	~0,15
Задвижка при полном открытии (рис. 4-43)	0,15

Примечания к таблице. 1. О выходе трубы см. формулы (4-135)–(4-136). 2. Коэффициенты местного сопротивления, рекомендуемые в табл. 4-25, относятся к формуле

$$h_f = \zeta_f \frac{v_2^2}{2g}, \tag{4-160}$$

где v_2 – средняя скорость за местным сопротивлением.

1°. Условия протекания жидкости в пределах поворота трубы. На повороте получаем искривление линий тока (рис. 4-36, *б*). На частицы жидкости, движущи искривленным линиям тока, действует центробежная сила инерции. За счет это гидродинамическое давление (а следовательно, и потенциальная энергия) в месте по у внешней стенки трубы повышается, а у внутренней – понижается же обстоятельство обусловливает уменьшение скоростного напора (удельной кинети энергии) у внешней стенки и увеличивает его у внутренней стенки. Таким образом, вороте происходит перераспределение скоростей по живым сечениям и деформация скоростей вдоль потока (как показано на рис. 4-36, *б*).

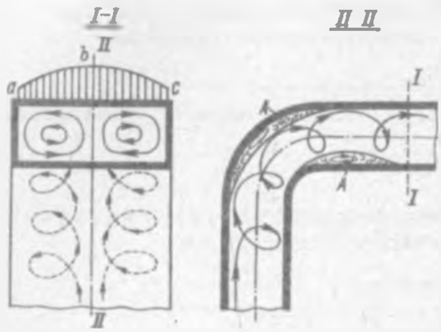


Рис. 4-51. Течение на повороте трубы

На рис. 4-36, *б* показан отрыв транз струи в двух местах. Надо заметить отрыв струи от внутренней стенки уве вается за счет инерции частиц жидк движущихся вдоль этой стенки (в присте слое по пути от сечения *1 – 1* до точк

При плавном повороте трубы указа отрывы струи могут отсутствовать. В случае местные потери напора в значит ной мере обусловливаются имеющимс повороте «парным вихрем» (винтовым жением, вызванным действием сил инер Такое винтовое движение, характеризуе наличием так называемой поперечн циркуляции (иначе «вторичны течениями»), показано на рис. 4-51, для примера изображена прямоугольная т ба. На этом чертеже показана эпюра давления на стенку трубы, ограниченная кривой *a* Как видно, в центральной части внешней стенки трубы давление оказывается наибольш (в связи с большими скоростями *u* в этой части трубы). Такое положение и обуслов вает движение жидких частиц влево и вправо (вдоль внешней стенки) от центральн части к периферии.

2°. Соединение потоков (рис. 4-52).[1] В этом случае получаем «поверхность раздел *a – b*. Благодаря турбулентному перемешиванию «ступенчатая» эпюра скоростей, получа щаяся в сечении *AB* (эта эпюра на рисунке не показана), выравнивается на длине *l* и пр обретает в сечении *2 – 2* «нормальный» вид. Через поверхность раздела *a – b* (в свя со сказанным в § 3-16) должна передаваться удельная энергия ΔE. Между сечениями *1* – и *2 – 2* могут возникать отрывы струи от стенки русла, в связи с чем будут появлятьс водоворотные области.

Наличие сил трения в жидкости обусловливает: а) неравномерное распределени скоростей в сечениях *1*, *2* и *3*; б) передачу энергии жидкости через поверхность раздел *a – b* (от 1-го потока к 3-му или наоборот от 3-го потока к 1-му потоку); в) диссипаци энергии, а следовательно, уменьшение энергии по течению. Для простоты пояснени пренебрежем этими обстоятельствами (обстоятельствами а, б, в), причем условно буде считать, что в пределах рассматриваемого небольшого участка потока (между сечения *1 – 1*, *2 – 2*, *3 – 3*) жидкость является идеальной.

Принимая такое допущение, можем в соответствии с законом сохранения энергии написать следующее энергетическое уравнение

$$\gamma Q_1 H_{e_1} + \gamma Q_3 H_{e_3} = \gamma Q_2 H_{e_2} \text{ или } Q_1 H_{e_1} + Q_3 H_{e_3} = Q_2 H_{e_2}, \tag{4-161}$$

где Q_1, Q_2 и Q_3 – расходы жидкости для отдельных труб (см. рисунок); H_{e_1}, H_{e_2} и H_{e_3} – напоры (полные удельные энергии) соответственно в сечениях *1*, *2* и *3*.

---

[1] См. Б. А. Дергачев. Случаи увеличения полного напора по течению реальной жидкости (для «целого потока» при установившемся движении). Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 3. – М.: Высшая школа, 1980.

Из уравнения (4-161), учитывая, что

$$Q_1 + Q_3 = Q_2, \tag{4-162}$$

легко получить зависимость (для идеальной жидкости на пути от сечения $1-1$ до сечения $2-2$):

$$H_{e_1} = H_{e_2} + \frac{Q_3}{Q_1}(H_{e_2} - H_{e_3}). \tag{4-163}$$

Из рассмотрения этой зависимости видно следующее:

1) При $Q_3 = 0$, т. е. при отсутствии присоединения расхода, в случае идеальной жидкости $H_{e_2} = H_{e_1}$, что и должно быть согласно уравнению Бернулли.

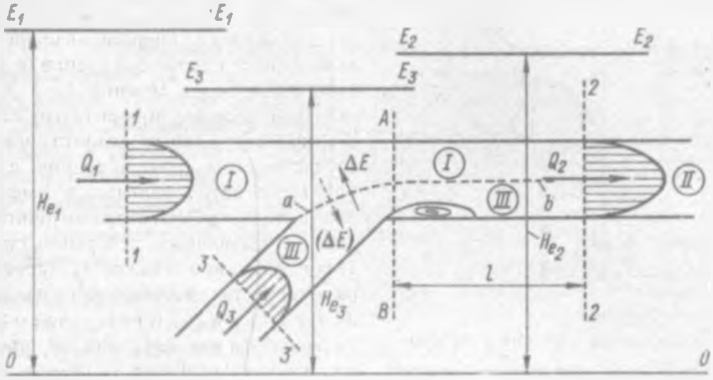


Рис. 4-52. Схема соединения двух потоков

2) Если $Q_3 \neq 0$, т. е. если мы имеем по длине потока переменный расход ($Q \neq \text{const}$), то для идеальной жидкости получим $H_{e_1} \neq H_{e_2}$, причем могут иметь место случаи, когда оказывается, что $H_{e_2} > H_{e_1}$, т. е. напор (полная удельная энергия) по течению идеальной жидкости увеличивается.

Отмеченные положения (см. пп. 1 и 2) вытекают из рассмотрения закона сохранения энергии. Здесь необходимо помнить, что уравнение Бернулли (3-101) справедливо только для частного случая, когда по длине потока расход Q является постоянным ($Q = \text{const}$).

Если бы мы рассматривали в данном узле не идеальную жидкость, а реальную, то в принципиальном отношении у нас ничего бы не изменилось (имели бы место только количественные, но не качественные изменения).

В случае идеальной, а также реальной жидкости, напорные линии $E-E$ в рассматриваемом узле потока могут располагаться, как показано на рис. 4-52; как видно, переходя от потока III к потоку II, мы можем получить для реальной жидкости увеличение полного напора по течению ($H_{e_2} > H_{e_3}$).

3°. **Разделение потоков.**[1] Чтобы разъяснить отмеченный выше «парадокс», рассмотрим разделение потока (рис. 4-53).

Построим для сечения $1-1$ (см. на рисунке живое сечение *abcde*) эпюру напоров H'_e (относящихся к элементарным струйкам, составляющим рассматриваемый поток):

$$H'_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}, \tag{4-164}$$

где $(z + \frac{p}{\gamma}) = \text{const}$ для данного живого сечения $a-e$.

---

[1] См. предыдущую сноску.

Такая эпюра выражается на рисунке площадью a-b-c-d-e-a.[1] Осредняя орд[...] этой эпюры в пределах всего живого сечения $1-1$ потока, получаем напор H_{e_1} [...] зависимость (3-100)]:

$$H_{e_1} = \frac{\sum H'_e}{n}, \qquad (\text{[...]}$$

где n – число всех элементарных струек (имеющих одинаковый расход δQ), составля[...] рассматриваемый поток.

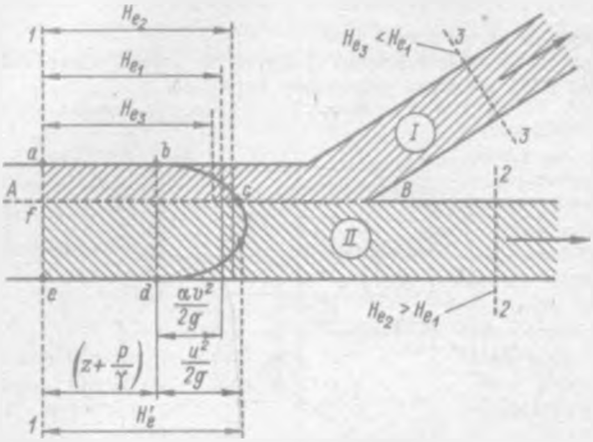


Рис. 4-53. Схема разделения потока на две (I и II части)

Эпюры напоров H_e: 1 – ($abcfa$) – для сечения af; 2 – ($fcdef$) – для сечения ef; 3 – ($abcdea$) – для всего живого сечения ae

Выделим теперь на рис. линией AB две части расс[...]риваемого потока I и II [...] части на рисунке покр[...] штриховкой разного накл[...] При этом можем отметить [...]дующее:

а) эпюра напоров H'_e [...] части I потока выража[...] площадью $abcfa$; осред[...] напоры H'_e в пределах част[...] живого сечения, получаем на[...] H_{e_3} (см. рисунок), меньший [...] H_{e_1}:

$$H_{e_3} < H_{e_1}; \qquad (4\text{-[...]})$$

б) эпюра напоров H'_e [...] части II потока выражае[...] площадью $fcdef$; осредняя [...]поры H'_e в пределах части [...] живого сечения, получаем на[...] H_{e_2}, больший чем напор H_{e_1}

$$H_{e_2} > H_{e_1}. \qquad (4\text{-[...]})$$

Таким образом полный напор **для целого потока** реальной жидко[...] может изменяться по течению **не только в связи с «потерей напор[...]** (**обусловленной работой сил трения**), **но также еще и в свя[...] с отделением (или присоединением) на пути от сечения $1-1$ и** [...] **сечения $2-2$ соответствующих масс жидкости.**

В связи со сказанным, рассматривая выше местные потери напора в тройни[...] (стр. 195), мы различаем «коэффициент потерь напора» («коэффициент сопротивлени[...] и «коэффициент изменения напора».

§ 4-20. ТРИ ВИДА УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Представим на рис. 4-54 элементарную струйку и ее поперечное сечение $1-$[...] Обозначим через V объем жидкости, проходящий за некоторое время t_0 через сечен[...] струйки $1-1$. При этом вес этого объема $G = \gamma V$, а масса $M = \rho V = \frac{\gamma}{g} V$; механическу[...] энергию жидкости, принадлежащую объему V, обозначим через E_V.

Выше величину E_V мы относили к единице веса жидкости. Однако, вообще говор[...] величину E_V можно относить также **и к единице объема, и к единице масс[...]** движущейся жидкости. Слова «**удельная величина**» следует понимать здесь, [...] «**относительная величина**», т. е. величина, отнесенная к чему-либо (наприме[...] к объему жидкости или к весу этого объема или к массе этого объема).

В связи со сказанным, можно написать три разных выражения для **удельно[...]** энергии движущейся жидкости (энергии, отнесенной к единице веса, к единице объем[...]

---

[1] Как видно, величины напоров для разных точек вертикального живого сечен[...] откладываются от линии ae по горизонтали.

и к единице массы); эти выражения получают следующий вид (где L, t, P — символы соответственно длины, времени и силы):

1) мера энергии, принадлежащей единице веса движущейся жидкости

$$H'_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \ [L]; \tag{4-168}$$

достаточно H'_e умножить на вес объема V и мы получим механическую энергию этого объема;

2) мера энергии единицы объема жидкости:

$$(H'_e)_V = \frac{H'_e \gamma V}{V} = H'_e \gamma = z\gamma + p + \frac{u^2}{2}\rho \left[\frac{P^2}{L^2}\right]; \tag{4-169}$$

достаточно $(H'_e)_V$ умножить на объем V и мы получим механическую энергию этого объема жидкости;

3) мера энергии единицы массы жидкости:

$$(H'_e)_m = \frac{H'_e \gamma V}{V\rho} = H'_e \frac{\gamma}{\rho} = H'_e g = zg + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\left[\frac{L^2}{t^2}\right]; \tag{4-170}$$

достаточно $(H'_e)_m$ умножить на массу объема V и мы получим механическую энергию этого объема.

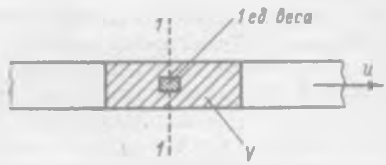


Рис 4-54. Рассматриваемый объем жидкости V, проходящий через сечение $1-1$ в течение промежутка времени t_0

Можно написать:

$$E_V = H'_e (V\gamma) = (H'_e)_V V = (H'_e)_m (V\rho), \tag{4-171}$$

где величины H'_e, $(H'_e)_V$ и $(H'_e)_m$ являются соответствующими напорами. В связи с наличием сил трения в реальной жидкости величина E_V по течению должна уменьшаться.

Перейдем к рассмотрению целого потока реальной жидкости, причем величину Q будем считать постоянной вдоль течения: $Q = \text{const}$.

Будем пользоваться понятием только двух напоров H'_e и $(H'_e)_m$ [напора $(H'_e)_V$ касаться не будем]. При этом можем написать следующие три вида уравнения Бернулли, из которых каждый вид этого уравнения будет относиться к определенному случаю движения жидкости:

1-й вид: общий случай установившегося движения жидкости, когда жидкость является относительно тяжелой, т. е. [см. уравнение (4-170)] величиной (zg) нельзя пренебрегать сравнительно с величиной $\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)$.[1] В этом случае получаем обычное уравнение Бернулли:

$$\text{(I)} \quad \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g}\right) = \zeta' \frac{v_1^2}{2g}\left(= \zeta'' \frac{v_2^2}{2g}\right) \ [L], \tag{4-172}$$

где ζ — безразмерные «коэффициенты сопротивления»;

2-й вид: частный случай установившегося движения жидкости, когда жидкость является относительно легкой, т. е. когда величиной (zg) следует пренебречь сравнительно с величиной $\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)$. В этом случае, исходя из уравнения (4-170), получаем:

$$\text{(II)} \quad \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha v_1^2}{2}\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha v_2^2}{2}\right) = \zeta' \frac{v_1^2}{2}\left(= \zeta'' \frac{v_2^2}{2}\right) \left[\frac{L^2}{t^2}\right]; \tag{4-173}$$

можно сказать, что здесь мы пренебрегаем работой силы тяжести по сравнению с работой сил трения;

3-й вид: частный случай предыдущего вида движения, когда мы имеем **равномерное движение**, т. е. $v_1 = v_2$ (жидкость легкая, причем $v = \text{const}$ вдоль течения):

---

[1] Или приращением (zg) нельзя пренебречь сравнительно с приращением $\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)$

(III) $$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \zeta\frac{v^2}{2}\left[\frac{L^2}{t^2}\right]. \qquad (4\text{-}174)$$

Рассматривая полученные выше три вида уравнения Бернулли, подчеркнем следующие два важных обстоятельства:

1-е обстоятельство: легко показать, что при идентичных условиях безразмерные коэффициенты сопротивления ζ, входящие в уравнения (4-173) и (4-174), численно равны соответствующим коэффициентам, входящим в уравнение (4-172).[1]

2-е обстоятельство: напор H_e в отличие от напоров $(H_e)_V$ и $(H_e)_m$, имеет размерность длины. Поэтому очень важную геометрическую интерпретацию уравнения Бернулли удобно (физически доходчиво) проводить, пользуясь именно величиной напора H'_e, а не $(H'_e)_V$ или $(H'_e)_m$; кроме того, пользуясь величиной H'_e, мы можем удобно использовать пьезометрические трубки и трубки Пито для выполнения соответствующих замеров.

Дополнительно из рассмотрения уравнений (4-172), (4-173) и (4-174) можно сделать следующие существенные выводы:

1) в случае «реальной» жидкости, обладающей достаточно большой величиной γ (например, в случае воды) напор H_e в нижерасположенном (по течению) живом сечении (сечении $2-2$) всегда должен быть меньше, чем напор H_e в вышерасположенном живом сечении (в сечении $1-1$); при этом, как видно, движение «тяжелой» жидкости оказывается направленным в сторону меньшей величины H_e, но не в сторону области, характеризуемой меньшим давлением p; в данном случае давление p во «втором сечении» может быть и меньшим и большим, чем в «первом сечении»;

2) в случае реальной жидкости, обладающей малым удельным весом (например, в случае движения воздуха), соответствующий напор в нижерасположенном (по течению) живом сечении (сечении $2-2$) также должен быть меньшим, чем напор в вышерасположенном живом сечении ($1-1$), но давление p в сечении $2-2$ может быть большим. Можно утверждать, что движение «легкой» жидкости оказывается направленным в сторону области с меньшей величиной напора:

$$(H_e)_m = \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2}, \qquad (4\text{-}175)$$

а не в сторону области меньшего давления p;

3) только в случае равномерного движения «легкой» жидкости (например, равномерного движения воздуха) движение жидкости [см. зависимость (4-174)], оказывается направленным в сторону меньшего давления p.

Дополнительное замечание:

1) Рассмотрим невесомую жидкость. В этом случае в уравнении Бернулли следует полагать $g = 0$, а следовательно, и $gz = 0$. При этом приходится пользоваться понятием напора $(H_e)_m$, как энергии, отнесенной к единице массы. Как видно, мы получаем следующие выражения для такого напора (пренебрегая коэффициентом α):

а) в случае гидродинамики

$$(H_e)_m = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad [L^2/t^2]; \qquad (4\text{-}176)$$

б) в случае гидростатики:

$$(H_e)_m = H_m = \frac{p}{\rho} \quad [L^2/t^2]. \qquad (4\text{-}177)$$

Эти формулы выражают меру энергии, принадлежащей единице массы рассматриваемого объема невесомой жидкости.

2) Известно, что в случае конической расходящейся короткой трубы при истечении из нее «тяжелой жидкости» в атмосферу мы получаем напорную и пьезометрическую линии (линии EE и PP) в виде, изображенном на рис. 4-55, *а* (на этом рисунке изображены линии EE и PP для случая идеальной и для случая реальной тяжелой жидкости).

---

[1] Для доказательства справедливости этого положения достаточно: а) умножить на величину g обе части уравнения (4-172) и б) затем положить $(z_1 g - z_2 g) = 0$.

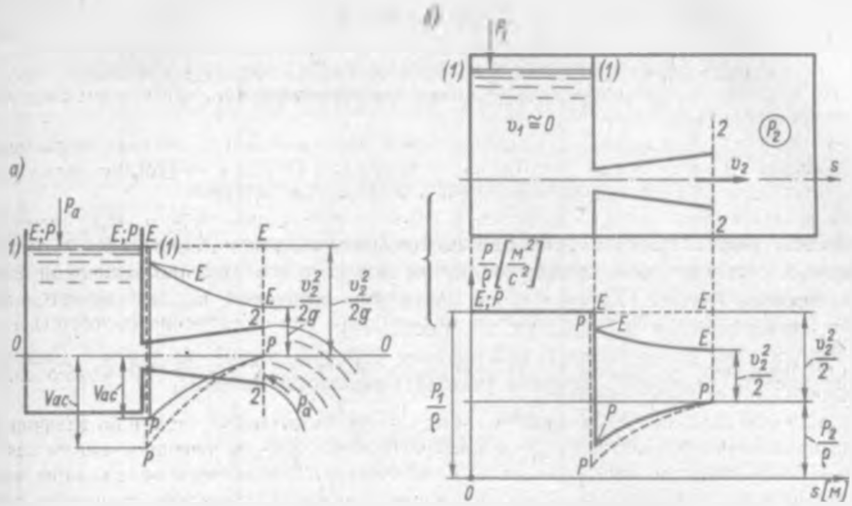


Рис. 4-55. Истечение из расширяющейся конической трубы: *а* – «тяжелой» жидкости $\left(H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\,[\text{м}]\right)$; *б* – «легкой» (или невесомой) жидкости $\left((H_e)_m = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\,[\text{м}^2/\text{с}^2]\right)$

E – E – напорная линия; *P – P* – пьезометрическая линия; – – – – для идеальной жидкости; ——— – для реальной жидкости

В случае легкой (или невесомой) жидкости изображать соответствующие линии *EE* и *PP* приходится уже не на той схеме, где изображена сама короткая труба, а на другом чертеже: на графике, где по вертикали откладываются величины, имеющие размерность не длины, а размерность $\left[\frac{L^2}{t^2}\right]$; см. рис. 4-55, *б*. Этот чертеж (для идеальной и для реальной жидкости) строится в соответствии с уравнением (4-173).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

4-1. **Альтшуль А. Д.** Гидравлические сопротивления. – М.: Недра, 1970.
4-2. **Бахметев Б. А.** Механика турбулентного потока. – М.-Л.: Стройиздат, 1939.
4-3. **Зегжда А. П.** Гидравлические потери на трение в каналах и трубопроводах. – М.-Л.: Стройиздат, 1957.
4-4. **Идельчик И. Е.** Гидравлические сопротивления. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1954.
4-5. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1975.
4-6. **Избаш С. В.** Основы гидравлики. – М.: Госстройиздат, 1952.
4-7. **Некрасов Б. Б.** Гидравлика и ее применение в летательных аппаратах. – М.: Машиностроение, 1967.
4-8. **Рауз Х.** Механика жидкости для инженеров-гидротехников. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1958.
4-9. **Чоу В. Т.** Гидравлика открытых каналов. – М.: Стройиздат, 1969.
4-10. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика. – Л.: Госэнергоиздат, 1963.
4-11. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика. – Л.: Энергия, 1975.
4-12. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
4-13. **Шлихтинг Г.** Возникновение турбулентности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

ГЛАВА ПЯТАЯ

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

§ 5-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать установившееся, равномерное (параллельноструйное) напорное, турбулентное движение любой жидкости в круглых цилиндрических неподвижных трубах. Такой случай движения жидкости характеризуется условиями, поясненными в § 3-21 (п. 1°; рис. 3-28).

Внутренний диаметр труб обозначаем через D, длину их через l. Гидравлические элементы живого сечения рассматриваемого потока:

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4}; \quad \chi = \pi D; \quad R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{D}{4}. \tag{5-1}$$

Главнейшие уравнения, которыми ниже будем пользоваться:

1) уравнение неразрывности – уравнение баланса расхода (3-38)–(3-40);
2) уравнение Бернулли – уравнение баланса удельной энергии (3-101);
3) уравнения для определения потерь напора (см. следующий параграф).

Подчеркнем, что ниже будем иметь в виду исключительно случаи, отвечающие *квадратичной области сопротивления*.

Что касается трубопроводов, относящихся к *доквадратичной* области сопротивления и области гладких русел (труб), то расчет их отличается от расчетов, приводимых ниже, только тем, что при определении потерь напора вместо формулы Шези здесь приходится пользоваться исключительно формулой Вейсбаха–Дарси (4-70) и находить коэффициент трения λ, как указано в § 4-11.

§ 5-2. РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ НАПОРА

При расчете трубопроводов следует различать два случая.

1-й случай, когда местные потери напора отсутствуют или когда этими потерями можно пренебречь ввиду их малости сравнительно с потерями по длине (например, $\sum h_j$ составляет величину, меньшую 5% от потерь напора h_l).

В этом случае практически имеем только потери напора h_l, причем *выражаем их через модуль расхода K* согласно зависимости (4-105):

$$\boxed{h_l = \frac{Q^2}{K^2} l,} \tag{5-2}$$

где

$$\frac{Q^2}{K^2} = J. \tag{5-3}$$

Что касается величины K^2, то для круглой трубы

$$K^2 = \omega^2 C^2 R = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 C^2 \frac{D}{4} = \frac{\pi^2 C^2}{64} D^5, \tag{5-4}$$

где, согласно данным § 4-12, 5°,

$$C = f(n;\ R) = f\left(n;\ \frac{D}{4}\right). \tag{5-5}$$

Таблица 5-1

Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для новых битумизированных чугунных труб при $\Delta = (0{,}10 \div 0{,}15)$ мм (квадратичная область сопротивления)

D, мм	$K_{мин}$, л/с	$K^2_{мин}$, (л/с)^2	$K_{ср}$, л/с	$K^2_{ср}$, (л/с)^2	$K_{макс}$, л/с	$K^2_{макс}$, (л/с)^2	$\lambda_{мин}$	$\lambda_{ср}$	$\lambda_{макс}$
50	12,16	147,9	12,47	156,5	12,80	163,8	0,0230	0,0242	0,0255
75	35,41	$1{,}254 \cdot 10^3$	36,07	$1{,}301 \cdot 10^3$	37,03	$1{,}371 \cdot 10^3$	0,0209	0,0220	0,0230
100	74,96	$5{,}619 \cdot 10^3$	76,16	$5{,}800 \cdot 10^3$	77,70	$6{,}037 \cdot 10^3$	0,0200	0,0208	0,0215
125	133,3	$17{,}769 \cdot 10^3$	135,2	$18{,}279 \cdot 10^3$	138,9	$19{,}253 \cdot 10^3$	0,0190	0,0200	0,0206
150	214,2	$45{,}882 \cdot 10^3$	219,3	$48{,}092 \cdot 10^3$	227,8	$51{,}893 \cdot 10^3$	0,0177	0,0191	0,0200
200	457,4	$20{,}921 \cdot 10^4$	474,9	$22{,}553 \cdot 10^4$	484,3	$23{,}455 \cdot 10^4$	0,0165	0,0172	0,0185
250	833,3	$69{,}439 \cdot 10^4$	845,7	$71{,}521 \cdot 10^4$	859,3	$73{,}840 \cdot 10^4$	0,0160	0,0165	0,0170
300	1 334	$17{,}796 \cdot 10^5$	1 352	$18{,}279 \cdot 10^5$	1 387	$19{,}238 \cdot 10^5$	0,0153	0,0161	0,0165
350	1 986	$39{,}442 \cdot 10^5$	2 019	$40{,}764 \cdot 10^5$	2 065	$42{,}642 \cdot 10^5$	0,0149	0,0156	0,0161
400	2 801	$78{,}456 \cdot 10^5$	2 863	$81{,}968 \cdot 10^5$	2 924	$85{,}498 \cdot 10^5$	0,0145	0,0151	0,0158
450	3 817	$14{,}569 \cdot 10^6$	3 878	$15{,}039 \cdot 10^6$	3 924	$15{,}398 \cdot 10^6$	0,0142	0,0148	0,0153
500	5 020	$25{,}200 \cdot 10^6$	5 096	$25{,}969 \cdot 10^6$	5 193	$26{,}967 \cdot 10^6$	0,0140	0,0145	0,0150
600	8 079	$65{,}270 \cdot 10^6$	8 169	$66{,}733 \cdot 10^6$	8 377	$70{,}174 \cdot 10^6$	0,0134	0,0141	0,0145
700	12 008	$14{,}419 \cdot 10^7$	12 251	$15{,}009 \cdot 10^7$	12 596	$15{,}866 \cdot 10^7$	0,0128	0,0136	0,0141
800	16 949	$28{,}727 \cdot 10^7$	17 324	$30{,}012 \cdot 10^7$	18 897	$35{,}710 \cdot 10^7$	0,0125	0,0132	0,0138
900	23 069	$53{,}218 \cdot 10^7$	23 627	$55{,}804 \cdot 10^7$	24 177	$58{,}453 \cdot 10^7$	0,0122	0,0128	0,0134
1000	30 513	$93{,}104 \cdot 10^7$	31 102	$96{,}733 \cdot 10^7$	31 730	$100{,}68 \cdot 10^7$	0,0120	0,0125	0,0130

Таблица 5-2

Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для новых небитумизированных чугунных труб при $\Delta = (0{,}25 \div 1{,}00)$ мм (квадратичная область сопротивления)

D, мм	$K_{мин}$, л/с	$K^2_{мин}$, (л/с)^2	$K_{ср}$, л/с	$K^2_{ср}$, (л/с)^2	$K_{макс}$, л/с	$K^2_{макс}$, (л/с)^2	$\lambda_{мин}$	$\lambda_{ср}$	$\lambda_{макс}$
50	8,77	76,91	9,64	92,93	11,22	125,89	0,0300	0,0410	0,0490
75	26,24	688,54	28,42	807,70	33,23	1104,2	0,0260	0,0350	0,0416
100	56,40	$3{,}1810 \cdot 10^3$	61,37	$3{,}7663 \cdot 10^3$	70,94	$5{,}0325 \cdot 10^3$	0,0240	0,0320	0,0380
125	102,32	$10{,}469 \cdot 10^3$	110,59	$12{,}230 \cdot 10^3$	125,93	$15{,}858 \cdot 10^3$	0,0230	0,0300	0,0350
150	166,53	$27{,}732 \cdot 10^3$	181,42	$32{,}906 \cdot 10^3$	204,78	$41{,}943 \cdot 10^3$	0,0220	0,0280	0,0330
200	359,35	$1{,}2913 \cdot 10^5$	391,36	$1{,}5288 \cdot 10^5$	429,20	$1{,}8421 \cdot 10^5$	0,0210	0,0255	0,0300
250	649,83	$4{,}2228 \cdot 10^5$	701,99	$4{,}9280 \cdot 10^5$	770,71	$5{,}9398 \cdot 10^5$	0,0200	0,0240	0,0280
300	1 059,4	$11{,}223 \cdot 10^5$	1 128,3	$12{,}724 \cdot 10^5$	1 242,7	$15{,}443 \cdot 10^5$	0,0190	0,0230	0,0262
350	1 588,6	$25{,}237 \cdot 10^5$	1 684,8	$28{,}383 \cdot 10^5$	1 878,4	$35{,}285 \cdot 10^5$	0,0180	0,0224	0,0252
400	2 262,6	$51{,}194 \cdot 10^5$	2 394,4	$57{,}312 \cdot 10^5$	2 669,3	$71{,}252 \cdot 10^5$	0,0170	0,0215	0,0242
450	3 076,7	$94{,}661 \cdot 10^5$	3 260,9	$106{,}34 \cdot 10^5$	3 626,7	$131{,}48 \cdot 10^5$	0,0168	0,0209	0,0235
500	4 054,7	$16{,}439 \cdot 10^6$	4 283,3	$18{,}347 \cdot 10^6$	4 776,7	$22{,}810 \cdot 10^6$	0,0165	0,0206	0,0230
600	6 570,5	$43{,}171 \cdot 10^6$	6 860,5	$47{,}066 \cdot 10^6$	7 662,4	$58{,}706 \cdot 10^6$	0,0160	0,0200	0,0221
700	9 788,8	$95{,}824 \cdot 10^6$	10 259	$105{,}25 \cdot 10^6$	11 446	$130{,}99 \cdot 10^6$	0,0155	0,0192	0,0212
800	13 838	$191{,}49 \cdot 10^6$	14 543	$211{,}47 \cdot 10^6$	16 257	$264{,}29 \cdot 10^6$	0,0150	0,0185	0,0207
900	18 759	$351{,}91 \cdot 10^6$	20 035	$401{,}36 \cdot 10^6$	22 053	$445{,}59 \cdot 10^6$	0,0147	0,0178	0,0203
1000	24 603	$605{,}31 \cdot 10^6$	26 704	$713{,}10 \cdot 10^6$	28 895	$834{,}92 \cdot 10^6$	0,0145	0,0170	0,0200

Согласно же данным § 4-12 и 4-10 для квадратичной области сопротивления

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = f(\Delta_r) = f\left(\frac{\Delta}{D}\right). \tag{5-6}$$

Таблица 5-3

Значение модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для бывших в эксплуатации чугунных труб при $\Delta = (1{,}0 \div 1{,}5)$ мм (квадратичная область сопротивления)

D, мм	$K_{мин}$, л/с	$K^2_{мин}$, (л/с)²	$K_{ср}$, л/с	$K^2_{ср}$, (л/с)²	$K_{макс}$, л/с	$K^2_{макс}$, (л/с)²	$\lambda_{мин}$	$\lambda_{ср}$	$\lambda_{макс}$
50	8,13	66,10	8,43	71,07	8,77	76,91	0,0490	0,0530	0,0570
75	24,18	584,67	24,69	609,60	26,24	688,54	0,0416	0,0470	0,0490
100	52,41	$2{,}7468 \cdot 10^3$	53,90	$2{,}9052 \cdot 10^3$	56,40	$3{,}1810 \cdot 10^3$	0,0380	0,0416	0,0440
125	95,23	$9{,}0687 \cdot 10^3$	98,22	$9{,}6472 \cdot 10^3$	102,32	$10{,}469 \cdot 10^3$	0,0350	0,0380	0,0404
150	155,48	$24{,}162 \cdot 10^3$	160,62	$25{,}799 \cdot 10^3$	166,53	$27{,}732 \cdot 10^3$	0,0330	0,0356	0,0380
200	336,59	$1{,}1329 \cdot 10^5$	346,36	$1{,}1997 \cdot 10^5$	359,35	$1{,}2913 \cdot 10^5$	0,0300	0,0323	0,0342
250	607,73	$3{,}6934 \cdot 10^5$	627,74	$3{,}9406 \cdot 10^5$	649,83	$4{,}2228 \cdot 10^5$	0,0280	0,0300	0,0320
300	990,26	$9{,}8062 \cdot 10^5$	1 017,8	$10{,}359 \cdot 10^5$	1 059,4	$11{,}223 \cdot 10^5$	0,0262	0,0284	0,0300
350	1 491,0	$22{,}231 \cdot 10^5$	1 534,6	$23{,}550 \cdot 10^5$	1 588,6	$25{,}237 \cdot 10^5$	0,0252	0,0270	0,0286
400	2 124,8	$45{,}148 \cdot 10^5$	2 195,5	$48{,}202 \cdot 10^5$	2 262,6	$51{,}194 \cdot 10^5$	0,0242	0,0257	0,0275
450	2 911,7	$84{,}780 \cdot 10^5$	2 980,9	$88{,}858 \cdot 10^5$	3 076,7	$94{,}661 \cdot 10^5$	0,0235	0,0250	0,0262
500	3 851,3	$14{,}833 \cdot 10^6$	3 954,0	$15{,}634 \cdot 10^6$	4 054,7	$16{,}439 \cdot 10^6$	0,0230	0,0242	0,0255
600	6 278,2	$39{,}415 \cdot 10^6$	6 415,0	$41{,}152 \cdot 10^6$	6 570,5	$43{,}171 \cdot 10^6$	0,0221	0,0232	0,0242
700	9 370,0	$87{,}797 \cdot 10^6$	9 531,2	$90{,}840 \cdot 10^6$	9 788,8	$95{,}824 \cdot 10^6$	0,0212	0,0224	0,0232
800	13 213	$174{,}59 \cdot 10^6$	13 487	$181{,}910 \cdot 10^6$	13 838	$191{,}49 \cdot 10^6$	0,0207	0,0218	0,0227
900	17 971	$322{,}96 \cdot 10^6$	18 297	$334{,}78 \cdot 10^6$	18 759	$351{,}91 \cdot 10^6$	0,0203	0,0212	0,0221
1000	23 731	$563{,}16 \cdot 10^6$	24 175	$584{,}43 \cdot 10^6$	24 603	$605{,}31 \cdot 10^6$	0,0200	0,0207	0,0215

Отсюда видно, что модуль расхода является функцией шероховатости и диаметра трубы. Если рассматривать, например, чугунные трубы, имеющие определенную шероховатость, то можно сказать, что для них модуль расхода является функцией только диаметра трубы. Имея это в виду, для чугунных труб приводятся таблицы (см. табл. 5-1, 5-2, 5-3), в которых величины K (и K^2) даются в зависимости от D. По этим таблицам, зная D, можно определить K (или K^2); и, наоборот, зная K (или K^2), найти D.[1]

Необходимо запомнить, что каждая чугунная труба характеризуется определенным численным значением K: если задан диаметр D, то, следовательно, задана и величина K (ее берут из упомянутых таблиц). Зная K^2, по формуле (5-2) легко находим h_l. По формуле (5-2) можно решать и другие задачи; например, зная h_l, K и l, можем найти расход Q и т. п.

2-й случай, когда имеются местные потери напора $\sum h_j$, причем ими нельзя пренебрегать сравнительно с величиной h_l. Здесь величину h_l удобнее выражать через скоростной напор согласно зависимости Вейсбаха–Дарси (4-70):

$$\boxed{h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}.} \tag{5-7}$$

[1] Приводимые таблицы (табл. 5-1, 5-2, 5-3) составлены нами для диаметров труб D, предусмотренных сортаментом водопроводных чугунных труб. Высота выступов шероховатости Δ стенок труб определялась при составлении таблиц по табл. 4-2, при этом коэффициент гидравлического трения λ устанавливался по графику на рис. 4-25. Модуль расхода вычислялся по формуле $K = \omega C \sqrt{R}$, где $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$. В данных таблицах помимо средних (наиболее вероятных) значений $K_{ср}$ и $\lambda_{ср}$, приводятся еще крайние возможные («лимитные») значения: $K_{мин}$, $K_{макс}$, $\lambda_{мин}$, $\lambda_{макс}$. Средние значения определялись по среднеарифметической величине Δ.

Величину λ следует определять, как указано в § 4-11. Для случая чугунных водопроводных труб разного диаметра величины λ (относящиеся к квадратичной области сопротивления) приводятся в табл. 5-1, 5-2, 5-3.

Заметим, что под длиной l в формуле (5-7) обычно понимают длину всей трубы, предполагая здесь, что длины участков, на протяжении которых возникают местные потери напора, пренебрежимо малы (равны практически нулю).

Что касается местных потерь h_j, то каждая такая потеря определяется по зависимости Вейсбаха (4-164):

$$h_j = \zeta_j \frac{v^2}{2g}. \tag{5-8}$$

§ 5-3. СЛОЖЕНИЕ ПОТЕРЬ НАПОРА. ПОЛНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ПОНЯТИЯ ДЛИННЫХ И КОРОТКИХ ТРУБОПРОВОДОВ

Представим на рис. 5-1 для примера некоторый трубопровод, имеющий по своей длине различные «местные препятствия» (в виде колена, задвижки, резкого расширения). Считаем, что расстояние между этими «препятствиями» достаточно велико: более $(20 \div 30)\,D$ (при этом взаимное влияние имеющихся «препятствий» практически отсутствует; в противном случае оба «препятствия» следует рассматривать в совокупности – как одно).

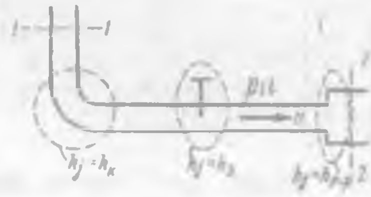


Рис. 5-1. Сложение потерь напора (при $D = \mathrm{const}$)

Полная потеря напора h_f на пути от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ выразится в виде

$$h_f = h_l + \sum h_j.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое этого выражения.

1. Сумма местных потерь напора $\sum h_j$. Из рис. 5-1 видно, что

$$\sum h_j = h_к + h_з + h_{р.р}, \tag{5-10}$$

где $h_к$ – местная потеря в колене; $h_з$ – местная потеря в задвижке; $h_{р.р}$ – местная потеря при резком расширении.

Согласно Вейсбаху,

$$h_к = \zeta_к \frac{v^2}{2g}; \quad h_з = \zeta_з \frac{v^2}{2g}; \quad h_{р.р} = \zeta_{р.р} \frac{v^2}{2g}. \tag{5-11}$$

Следовательно,

$$\sum h_j = (\zeta_к + \zeta_з + \zeta_{р.р}) \frac{v^2}{2g}, \tag{5-12}$$

или в общем случае

$$\sum h_j = \frac{v^2}{2g} \sum \zeta_j. \tag{5-13}$$

2. Потери напора по длине h_l. Эти потери выражаются формулой (5-7). Введем обозначение:

$$\frac{\lambda l}{D} = \zeta_l. \tag{5-14}$$

При этом h_l представится в виде

$$h_l = \zeta_l \frac{v^2}{2g}, \tag{5-15}$$

где ζ_l можно назвать **коэффициентом сопротивления по длине**.

Как видно из (5-15), h_l может быть выражена **через скоростной напор**.

3. **Полная потеря напора** h_f. Подставляя в формулу (5-9) зависимости (5-13) и (5-15), получаем:

$$h_f = \zeta_l \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \sum \zeta_j \tag{5-16}$$

или

$$h_f = (\zeta_l + \sum \zeta_j) \frac{v^2}{2g}. \tag{5-17}$$

Вводя обозначение

$$\boxed{\zeta_f = \zeta_l + \sum \zeta_j,} \tag{5-18}$$

получаем, что

$$\boxed{h_f = \zeta_f \frac{v^2}{2g}.} \tag{5-19}$$

Это и есть окончательная формула для расчета **полных** потерь напора (когда учитывают величину h_l и величину $\sum h_j$).

Как видно, h_f также выражается через скоростной напор.

Новый коэффициент ζ_f, учитывающий все потери напора на данной длине потока, назовем **полным коэффициентом сопротивления**.

Таким образом, на протяжении всего изложения, касающегося определения потерь напора в трубах, было введено **три разных коэффициента сопротивления**:

а) коэффициент местного сопротивления ζ_j для учета h_j;

б) коэффициент сопротивления по длине ζ_l для учета h_l;

в) полный коэффициент сопротивления ζ_f для учета h_f.

При помощи этих коэффициентов соответствующие потери напора **выражаются через скоростной напор**.

Случай трубопровода переменного диаметра. Выше величину h_f мы выражали через среднюю скорость v, имея трубу **постоянного диаметра**, что позволило величину скоростного напора в зависимостях (5-12) и (5-17) выносить за скобки.

Положим, что нам задан трубопровод **переменного** диаметра (рис. 5-2). Возникает вопрос, как в этом случае будут преобразовываться формулы (5-12) и (5-17).

Рассмотрим для примера сумму двух местных потерь, из которых первая (на резкое расширение) выражается через v_1 и вторая (на задвижку) – через v_2:

$$\sum h_j = (\zeta_{р.р})_1 \frac{v_1^2}{2g} + (\zeta_з)_2 \frac{v_2^2}{2g}. \tag{5-20}$$

Первую местную потерю легко можно выразить также и через v_2. Действительно,

$$v_1 = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}; \tag{5-21}$$

следовательно,

$$(\zeta_{р.р})_1 \frac{v_1^2}{2g} = (\zeta_{р.р})_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = (\zeta_{р.р})_2 \frac{v_2^2}{2g}, \tag{5-22}$$

где

$$(\zeta_{р.р})_2 = (\zeta_{р.р})_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2. \tag{5-23}$$

Таким образом, видно, что все слагаемые, входящие в выражение $\sum h_j$, могут быть всегда выражены через одну и ту же скорость, даже если труба будет переменного диаметра. При этом придется изменять только величины ζ: умножить их на квадрат отношения соответствующих площадей ω.

Рис. 5-2. Сложение потерь напора (при $D \neq \text{const}$)

Выразив все слагаемые в формуле (5-12) или (5-17) через одну и ту же скорость v, можем выносить в этих формулах скоростной напор за скобки так же, как и в случае трубопровода постоянного диаметра.

Понятия «длинного» и «короткого» трубопроводов. В случае достаточно длинных водопроводных труб величина $\sum h_j$ по сравнению с величиной h_l оказывается пренебрежимо малой, причем получается, что

$$h_f \approx h_l.$$

Такие трубы принято называть «длинными» в отличие от так называемых «коротких» труб, когда при расчете, помимо потерь напора по длине h_l, приходится учитывать еще местные потери напора $\sum h_j$.

В случае «длинных» трубопроводов при построении линий $E-E$ и $P-P$ обычно пренебрегают также и скоростным напором (ввиду его малости), считая, что напорная и пьезометрическая линии совпадают. Линия, в которую сливаются линии $E-E$ и $P-P$, в этом случае обычно называется пьезометрической линией.

Принято считать, что в случае городских водопроводных труб (диаметром до 200–500 мм) длинный трубопровод получается, когда его длина более 200–1000 *м*. При меньшей длине местные потери напора часто могут составлять уже величину более 3–5% от потерь h_l, причем их приходится учитывать.

А. КОРОТКИЕ ТРУБОПРОВОДЫ

§ 5-4. ПРОСТОЙ ТРУБОПРОВОД ПОСТОЯННОГО ДИАМЕТРА

Простым трубопроводом называется трубопровод, не имеющий боковых ответвлений.

1°. Случай истечения жидкости под уровень (рис. 5-3, *а*). Рассматриваем установившееся движение: скорость v в трубопроводе не изменяется во времени; разность Z уровней в сосудах A и B, соединяемых трубопроводом, постоянна (считаем, что в сосуд A жидкость все время каким-либо образом доливается, а из сосуда B – удаляется).

Найдем величину расхода Q для трубопровода. С этой целью используем уравнение Бернулли, следуя той схеме, которая пояснялась ранее (см. стр. 115):

1) намечаем живые сечения $1-1$ и $2-2$ (рис. 5-3, a): для этих сечений известно давление ($p = p_a$) и, кроме того, известны скорости ($v_A \approx v_B \approx 0$);

2) намечаем плоскость сравнения OO; эту плоскость удобно провести по сечению $2-2$; при этом z_2 обратится в нуль;

3) пишем уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_f; \tag{5-24}$$

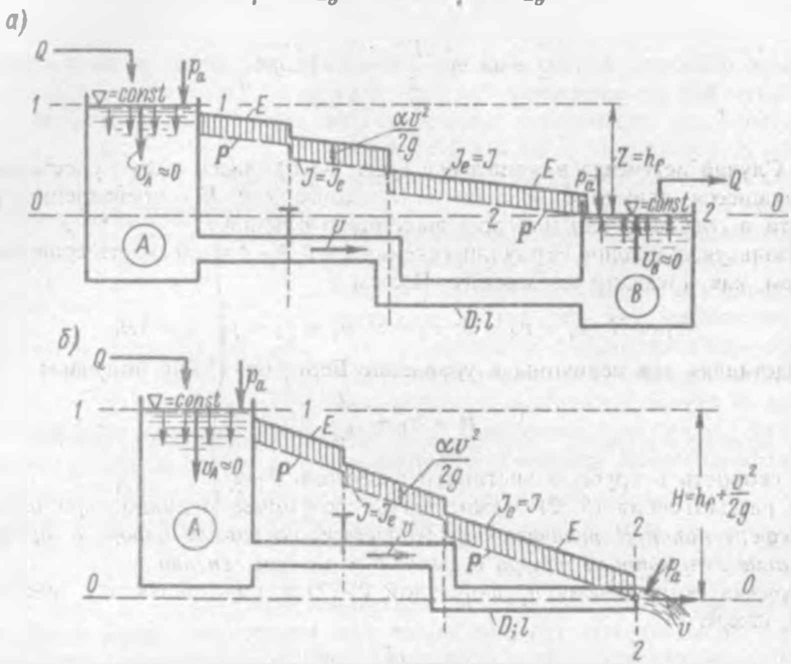


Рис. 5-3. Короткий трубопровод: a – истечение под уровень; $б$ – истечение в атмосферу

4) выясняем значения отдельных членов, входящих в это уравнение:

$$z_1 = Z; \quad v_1 = v_A = 0; \quad v_2 = v_B = 0; \quad p_1 = p_2 = p_a; \quad z_2 = 0; \quad \alpha \approx 1{,}0, \tag{5-25}$$

где Z – разность уровней жидкости в сосудах A и B;

5) подставляем (5-25) в (5-24); при этом получаем

$$Z = h_f. \tag{5-26}$$

Как видно, *при истечении под уровень разность уровней Z целиком расходуется (тратится) на потери напора в трубе.*[1]

Выразим теперь потерю напора h_f через скорость v в трубе, используя формулу (5-19):

$$h_f = \zeta_f \frac{v^2}{2g}, \tag{5-27}$$

где ζ_f – полный коэффициент сопротивления для трубы.

---

[1] Это положение справедливо при условии, если будем пренебрегать скоростями v_A и v_B (или считать их равными), что выше мы и делали.

Подставляя (5-27) в (5-26), имеем

$$Z = \zeta_f \frac{v^2}{2g} \tag{5-28}$$

и. следовательно,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} \sqrt{2gZ}, \tag{5-29}$$

откуда

$$Q = \omega v = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} \sqrt{2gZ}. \tag{5-30}$$

2°. Случай истечения в атмосферу (рис. 5-3, *б*). Здесь также рассматриваем установившееся движение: $v = \text{const}$; $H = \text{const}$, где H – превышение уровня жидкости в сосуде A над центром выходного сечения.

Используя уравнение Бернулли, сечения *1 – 1*, *2 – 2* и плоскость сравнения *OO* намечаем, как показано на чертеже. Имеем

$$z_1 = H;\ v_1 = v_A = 0;\ v_2 = v;\ p_1 = p_2 = p_a;\ \alpha = 1{,}0. \tag{5-31}$$

Подставляя эти величины в уравнение Бернулли (5-24), получаем

$$H = h_f + \frac{v^2}{2g}, \tag{5-32}$$

где v – скорость в трубе, в частности в сечении *2 – 2*.

Из рассмотрения (5-32) можно дать следующее правило: *при истечении в атмосферу напор H тратится (расходуется) на потери напора в трубе и на образование скоростного напора в выходном живом сечении.*

Выражая по-прежнему h_f формулой (5-27) и подставляя эту зависимость в (5-32), имеем

$$H = \zeta_f \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}, \tag{5-33}$$

откуда

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_f}} \sqrt{2gH} \tag{5-34}$$

и, следовательно,

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_f}} \sqrt{2gH}. \tag{5-35}$$

3°. Окончательные расчетные зависимости. Формулы (5-30) и (5-35) можно соответственно представить в виде следующих расчетных зависимостей:

$$\boxed{Q = \mu_т \omega \sqrt{2gZ};} \tag{5-36'}$$

$$\boxed{Q = \mu_т \omega \sqrt{2gH},} \tag{5-36''}$$

где $\mu_т$ равно:

а) при истечении под уровень [см. формулу (5-36′)]

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_l + \sum \zeta_j}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda l}{D} + \sum \zeta_j}}; \tag{5-37}$$

б) при истечении в атмосферу [см. формулу (5-36″)]

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_f}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda l}{D} + \sum \zeta_j}}. \tag{5-38}$$

Коэффициент $\mu_т$ называется коэффициентом расхода трубопровода.

Формулами (5-36′) и (5-36″) и следует всегда пользоваться при расчете коротких простых трубопроводов постоянного диаметра. По этим формулам можно решать следующие практические задачи: 1) даны D и Z (или H), требуется найти Q; 2) даны D и Q, требуется найти Z (или H); 3) даны Q и Z (или H), требуется найти D. Последнюю задачу приходится решать подбором.

В отношении формулы (5-37) надо сделать следующее замечание.

При выводе ее мы располагали сечение $2-2$ по уровню воды в сосуде B. При этом, составляя уравнение Бернулли (5-24), считали, что в полную потерю напора h_f входят не только потери напора в самой трубе, но потеря напора на выход из трубы, т. е. та потеря, которая имеет место за трубой — в пределах сосуда B. Поэтому перепад Z при истечении под уровень, строго говоря, равен не потерям напора в трубе, как условно отмечалось нами выше, а сумме потерь напора в трубе и в сосуде B.

Если бы при выводе формулы (5-37) сечение $2-2$ намечалось не по уровню воды в сосуде B, а в конце самой трубы (так, как показано на рис. 5-3,*б*), то при этом для коэффициента расхода $\mu_т$ при истечении под уровень мы получили бы формулу того же вида, что и при истечении в атмосферу [см. формулу (5-38)]. Только в этой формуле под величиной ζ_f следовало бы понимать полный коэффициент сопротивления, подсчитанный без учета потерь напора на выход (т. е. без учета величины $\zeta_{вых}$).

Таким образом, при расчете истечения под уровень можно пользоваться двумя разными способами, дающими, однако, один и тот же конечный результат.

1-й способ: коэффициент $\mu_т$ определяется по формуле (5-37); при этом под ζ_f понимаем полный коэффициент сопротивления, включающий коэффициент $\zeta_{вых} = 1{,}0$.

2-й способ: коэффициент $\mu_т$ определяется, как и в случае истечения в атмосферу, по формуле (5-38); при этом под ζ_f понимаем полный коэффициент сопротивления, подсчитанный без учета величины $\zeta_{вых} = 1{,}0$.

Дополнительно надо обратить внимание еще на следующие два обстоятельства.

1) При рассмотрении коротких трубопроводов длина начального участка трубы (см. рис. 4-21) может быть соизмерима с длиной всей трубы. При таком положении поясненный выше расчет короткого трубопровода оказывается несколько условным, поскольку формулы равномерного движения, которыми мы пользовались выше, строго говоря, не являются справедливыми для начального участка, где имеет место особый закон распределения скоростей по живым сечениям (впрочем в некоторых случаях превышение потерь напора в пределах начального участка над потерями напора, возникающими при равномерном движении, может быть учтено коэффициентом сопротивления $\zeta_{вх}$).

2) В § 3-17 было показано, что уравнение Бернулли применимо только к тем сечениям трубопровода, для которых $z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$, т. е. к сечениям, в пределах которых имеет место плавно изменяющееся движение.

Рассматривая сечение $2-2$ на рис. 5-3,*б*, видим, что для этого сечения $z+\frac{p}{\gamma}\neq$ $\neq$ const, поскольку как в верхней точке этого сечения, так и в нижней его точке давление равно p_a. Отсюда заключаем, что в данном сечении мы имеем резко изменяющееся движение, к которому уравнение Бернулли, строго говоря, неприменимо.

Более подробное рассмотрение вопроса об истечении жидкости из трубопровода в атмосферу приводит к следующим выводам (согласно А. И. Шварцу):

а) Эпюра скоростей *u* в пределах концевого участка трубы (длиной $l_к$; см. рис. 5-4) деформируется (по течению) и приобретает в сечении $2-2$ несимметричный вид *2*, как то показано на рисунке.

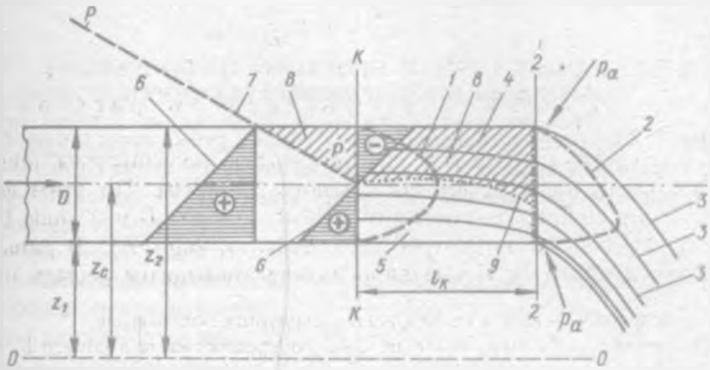


Рис. 5-4. Концевой участок трубы (при истечении в атмосферу)

1 – эпюра скоростей симметричная; *2* – то же, асимметричная; *3* – линия тока; *4* – элементарная струйка, верхняя расширяющаяся; *5* – то же, нижняя сужающаяся; *6* – эпюра давлений; *7* – пьезометрическая линия; *8* – область вакуума (покрыта наклонной штриховкой); *9* – приближенное положение линии атмосферного давления

б) В связи с этим линии тока *3* в пределах концевого участка должны искривляться, причем верхняя элементарная струйка *4* должна расширяться, а нижняя элементарная струйка *5* – сужаться. Напомним, что вдоль элементарной струйки расход $\delta Q=$ const; поэтому при изменении скорости вдоль струйки площадь ее живого сечения также должна изменяться.

в) Рассматривая самую верхнюю расширяющуюся струйку *4*, в конце которой давление атмосферное, видим, что в некотором сечении $K-K$ этой струйки мы должны получить вакуум; для нижней же сужающейся струйки *5* будем иметь обратную картину (см. стр. 116 – 120).

г) В некотором предконцевом сечении $K-K$, удаленном от сечения $2-2$ на расстояние $l_к$ (где эпюра скоростей *1* имеет уже симметричный вид) давление распределяется по гидростатическому закону (см. эпюру давления *6* в этом сечении). Как видно, для сечения $K-K$ имеем

$$z+\frac{p}{\gamma}=z_c=\text{const},$$

где z_c – возвышение оси трубы над плоскостью сравнения *OO*.

д) Вопрос о длине $l_к$ концевого участка недостаточно исследован. Иногда длину $l_к$ считают равной, например, 1,5 *D*; однако такая рекомендация недостаточно проверена опытом. Вместе с тем ясно, что при относительно малом диаметре трубы длиной концевого участка (сравнительно с длиной всей трубы) можно пренебречь и условно считать, что предконцевое сечение $K-K$ совпадает с выходным сечением $2-2$. Именно этим допущением мы и пользовались при выводе уравнения (5-32).

Разумеется, в случае коротких труб большого диаметра вопрос о длине концевого участка, так же как и о длине начального участка (см. выше п. 1), может быть достаточно точно решен только на основании опытов.

4°. Замечания о напорной и пьезометрической линиях. На рис. 5-3,*а* и *б* в соответствии с указаниями, приведенными на стр. 116–120, построены линии $E-E$ и $P-P$.

Подчеркнем, что строго говоря, эти линии в пределах участков, где возникают местные потери напора, являются кривыми. Однако в практике такого рода действительные кривые линии $E-E$ и $P-P$ аппроксимируют прямолинейными ломаными линиями, образованными отрезками: а) прямыми наклонными и б) прямыми вертикальными (в виде «ступеней»), расположенными в тех местах, где возникают местные потери (и, разумеется, в местах расположения вертикальных участков трубопровода). При указанной аппроксимации, например, линии $E-E$, вертикальные ступени этой линии (для не вертикальных участков трубопровода) выражают величину местных потерь напора (точнее говоря, превышение местных потерь напора над потерей напора по длине соответствующего участка трубы).

§ 5-5. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА: СИФОН И ВСАСЫВАЮЩАЯ ТРУБА НАСОСА

1°. Сифон[1]. Сифоном называется самотечная труба, часть которой расположена выше горизонта жидкости в сосуде, который ее питает (рис. 5-5).

Ограничимся рассмотрением истечения жидкости из сифона под уровень.

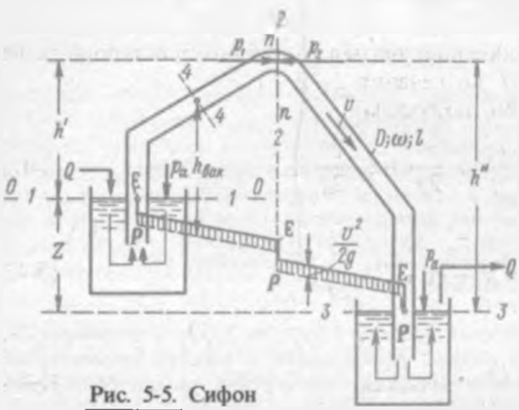


Рис. 5-5. Сифон

Если трубу, представленную на чертеже, каким-либо образом заполнить жидкостью, то после этого начнется движение жидкости из верхнего сосуда в нижний. В том, что жидкость в такой трубе будет двигаться, можно убедиться из следующего.

Наметим сечение трубы $n-n$ и обозначим превышение его над горизонтом жидкости: в левом сосуде – через h' и в правом сосуде – через h''. Если предположить, что жидкость, заполняющая сифон, находится в покое, то можем написать:

а) давление в сечении $n-n$ с левой стороны

$$p_1 = p_a + (-h'\gamma);$$

б) давление в сечении $n-n$ с правой стороны

$$p_2 = p_a + (-h''\gamma),$$

где $(-h')$ и $(-h'')$ – соответствующие заглубления сечения $n-n$ под горизонтом жидкости в сосудах (эти заглубления отрицательны).

Как видно, $p_1 > p_2$; отсюда понятно, что жидкость в трубе не может находиться в покое: она будет двигаться слева направо, т. е. в сторону меньшего давления.

Рассмотрим установившееся движение жидкости в сифоне (Z = const). Наметим два сечения: $1-1$ и $3-3$. Соединяя эти сечения уравнением Бернулли и рассуждая так же, как и в § 5-4, получим формулу для расхода Q в трубе в виде зависимости (5-36′) и (5-37).

Характерным для сифона является то, что в нем имеет место вакуум. Наибольшая величина вакуума будет в сечении, наиболее высоко расположенном, т. е. в сечении $n-n$.

[1] От греческого слова «трубка».

Найдем максимальную величину вакуума $(h_{вак})_{макс}$ в сифоне. С этой целью наметим по линии $n-n$, где ищем вакуум, сечение $2-2$ и затем соединим сечения $1-1$ и $2-2$ уравнением Бернулли (плоскость сравнения проведем на уровне горизонта жидкости в левом сосуде):[1]

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h'_f, \tag{5-39}$$

где

$$z_1 = 0; \quad z_2 = h'; \quad \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}; \quad \frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_n}{\gamma};$$

$$\frac{\alpha v_1^2}{2g} \approx 0; \quad \frac{\alpha v_2^2}{2g} \approx \frac{v^2}{2g}; \tag{5-40}$$

здесь v – скорость в трубе; p_n – давление в сечении $n-n$.

Потери напора h'_f на пути от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ выражаем обычной зависимостью:

$$h'_f = \zeta'_f \frac{v^2}{2g}, \tag{5-41}$$

где ζ'_f – полный коэффициент сопротивления, учитывающий потерю напора не во всей трубе, а только от сечения $1-1$ до сечения $2-2$.

Подставляя (5-40) и (5-41) в (5-39), получаем:

$$\frac{p_a}{\gamma} = h' + \frac{p_n}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \zeta'_f \frac{v^2}{2g} \tag{5-42}$$

или

$$\frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_n}{\gamma} = h' + (1 + \zeta'_f)\frac{v^2}{2g}; \tag{5-43}$$

так как

$$\frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_n}{\gamma} = (h_{вак})_{макс}, \tag{5-44}$$

то

$$(h_{вак})_{макс} = h' + (1 + \zeta'_f)\frac{v^2}{2g}. \tag{5-45}$$

Пользуясь формулой (5-45), можно определить вакуум в любом сечении трубы, например в сечении $4-4$. При этом в формуле (5-45) под величиной h' следует понимать только превышение сечения $4-4$ над горизонтом жидкости в левом сосуде, а под величиной ζ'_f – полный коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора от сечения $1-1$ до сечения $4-4$.

Из формулы (5-45) видно, что $(h_{вак})_{макс}$ зависит от h'; если h' будет велико, то и $(h_{вак})_{макс}$ будет велико. При больших $(h_{вак})_{макс}$ струя в сифоне может разорваться, и сифон перестанет работать. Считают, что для нормальной работы сифона величина $(h_{вак})_{макс}$, вычисленная по формуле (5-45), должна быть такой, при которой удовлетворяется условие

$$(h_{вак})_{макс} \leqslant (h_{вак})_{доп},$$

[1] Предполагаем, что радиус поворота трубы в сечении $n-n$ достаточно велик, в связи с чем в этом сечении имеем плавноизменяющееся движение (схема на рис. 5-5 в этом месте выполнена с искажением).

где $(h_{вак})_{доп}$ – вакуум, допустимый по условиям невозможности образования разрыва турбулентной струи (характеризуемой пульсацией давления).

Величину $(h_{вак})_{доп}$ для воды (при нормальном атмосферном давлении) можно принять равной, например,

$$(h_{вак})_{доп} = 6 \div 7 \ м \ \text{вод. ст.}$$

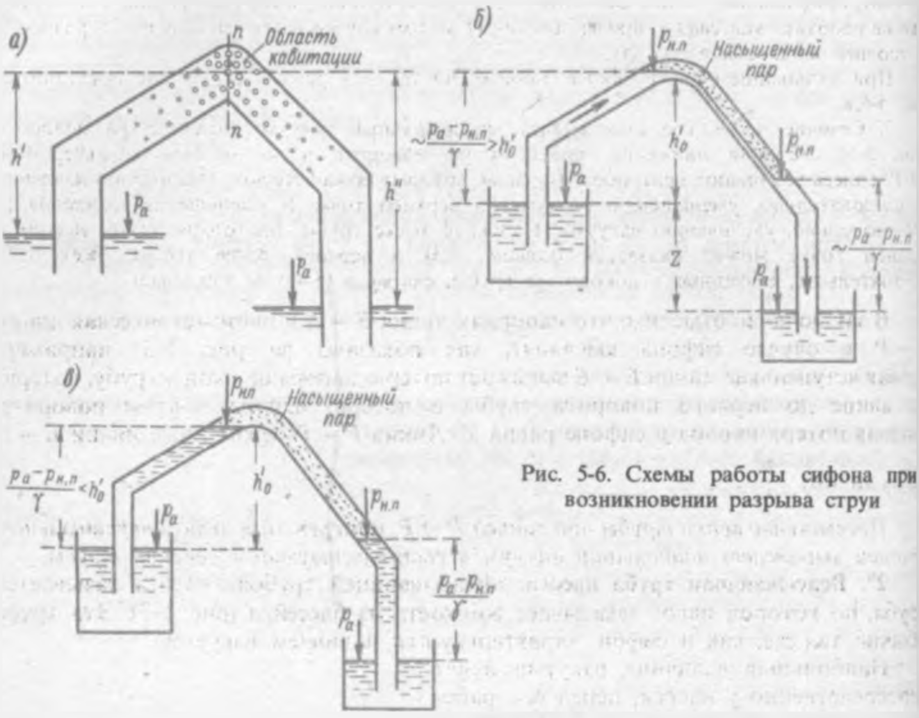


Рис. 5-6. Схемы работы сифона при возникновении разрыва струи

Анализируя вопрос о разрыве струи в сифоне, надо учитывать следующие обстоятельства.

1. В сифоне из жидкости должен выделяться растворенный воздух (в связи с уменьшением давления в районе сечения $n-n$; см. § 1-5). Этот воздух должен скопляться в виде воздушного «мешка» в верхней точке сечения $n-n$. Выпуск его через какой-либо клапан невозможен: при открытии отверстия (клапана) в районе сечения $n-n$ атмосферный воздух будет поступать в трубу, увеличивая воздушный «мешок». Этот «мешок» может быть удален из сифона только при помощи особого насоса.

2. В формулу (5-45) входит средняя скорость v, найденная исходя из осредненных во времени скоростей u. Поэтому $(h_{вак})_{макс}$, установленный по указанной формуле, является о с р е д н е н н ы м вакуумом. М г н о в е н н ы й (актуальный) вакуум в какой-либо точке потока равен осредненному вакууму, увеличенному на так называемый п у л ь с а ц и о н н ы й в а к у у м (являющийся или положительным, или отрицательным). Из сказанного ясно, что мгновенные вакуумы в отдельных точках потока могут значительно превосходить величину $(h_{вак})_{макс}$, вычисленную по формуле (5-45). Таким образом, можно утверждать, что кавитация потока (см. § 1-5) должна начаться ранее, чем осредненное давление p_n, вычисленное по формуле (5-43), достигнет величины $p_{н.п}$ (давления насыщенных паров).

3. При достаточно большом h' движение жидкости в сифоне следует представлять себе по схеме на рис. 5-6, *а*: наибольший объем кавитационных паровоздушных областей (с давлением паров $p_{н\ п}$) имеет место в сечении $n-n$. По мере движения жидкости от сечения $n-n$ к выходу эти кавитационные области, увлекаемые потоком, закрываются и постепенно исчезают.

4. Увеличивая размер h' (поднимая трубу сифона над сосудами), можно получить условия, когда объем паровоздушной области увеличится настолько, что мы получим картину, приближающуюся к схеме на рис. 5-6, *б*. Очевидно, здесь рассматриваемая труба уже не работает как сифон, причем расход Q в этом случае вовсе не зависит от разности Z уровней жидкости в сосудах.

При дальнейшем увеличении h' произойдет полный разрыв струи, как показано на рис. 5-6, *в*.

5. Сечение $n-n$, где определялся максимальный вакуум, намечено на повороте (рис. 5-5). Условия движения жидкости на повороте носят особый характер (см. § 4-19); здесь возникают центробежные силы, которые способствуют: увеличению давления (а следовательно, уменьшению вакуума) в верхней точке и уменьшению давления (а следовательно, увеличению вакуума) в нижней точке трубы. Благодаря этому вакуум в нижней точке может оказаться больше, чем в верхней точке трубы. Всех этих обстоятельств, связанных с поворотом трубы, формула (5-45) не учитывает.

В заключение отметим, что напорная линия $E-E$ и пьезометрическая линия $P-P$ в случае сифона выглядят, как показано на рис. 5-5: например, первая «ступенька» линии $E-E$ выражает потерю напора на вход в трубу, потерю по длине до первого поворота трубы и потерю напора в этом повороте. Полная потеря напора в сифоне равна Z. Линия $P-P$ лежит ниже линии $E-E$ на величину $\frac{v^2}{2g}$.

Превышение верха трубы над линией $P-P$, измеренное в любом вертикальном сечении выражает наибольший вакуум в соответствующем сечении трубы.

2°. Всасывающая труба насоса. «Всасывающей трубой» насоса называется труба, по которой насос засасывает жидкость из бассейна (рис. 5-7). Эта труба обычно так же, как и сифон, характеризуется наличием вакуума.

Наибольшая величина вакуума будет непосредственно у насоса, перед его рабочим колесом[1] (в сечении $2-2$). Такой вакуум можно найти, соединяя уравнением Бернулли сечение $1-1$, намеченное по поверхности жидкости в бассейне, и сечение $2-2$. Его можно также определить по формуле (5-45), подставив в эту формулу вместо h' величину a, означающую превышение оси насоса над горизонтом жидкости в бассейне, и вместо ζ'_f величину ζ_f, т. е. полный коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора во всей трубе. При этом получаем:

$$(h_{вак})_{нас} = a + (1 + \zeta_f)\frac{v^2}{2g}, \qquad (5\text{-}46)$$

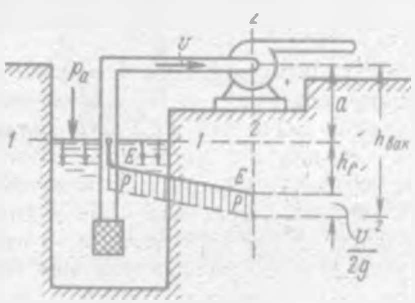


Рис. 5-7. Всасывающая труба насоса (потери напора во всасывающем клапане занижены – показаны не в масштабе)

где $(h_{вак})_{нас}$ – вакуум перед рабочим колесом насоса.

Если $(h_{вак})_{нас}$ оказывается большим, то при этом возникает кавитация (см. § 1-5), которая обусловливает снижение коэффициента полезного действия насоса, а также эрозию лопастей насоса.

---

[1] Имеется в виду центробежный насос.

Различные типы насосов допус...
вакуум перед рабочим колесом насоса должен удовлетворять ...

$$(h_{вак})_{нас} \leqslant 4{,}0 \div 6{,}5 \text{ м вод. ст.}$$

Величина д о п у с т и м о г о вакуума зависит не только от типа насоса, но и от температуры и рода жидкости. С увеличением температуры жидкости величина допустимого вакуума снижается. (Поскольку с повышением температуры кавитация усиливается; см. § 1-5.) Например, при температуре воды, равной 60 °C, допустимый вакуум приобретает уже отрицательное значение (т. е. насос должен работать при давлении в воде, большем атмосферного).

Зная допустимый вакуум для данного насоса и данной жидкости $(h_{вак})_{доп}$, можно по формуле (5-46) найти предельное максимальное возвышение насоса над горизонтом жидкости в бассейне:

$$a_{доп} = (h_{вак})_{доп} - (1 + \zeta_f)\frac{v^2}{2g}. \tag{5-47}$$

Для горячей воды $a_{доп}$ может быть отрицательным; в этом случае насос приходится располагать ниже горизонта воды в колодце.

§ 5-6. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ И ВЕРТИКАЛЬНАЯ ВОДОСПУСКНЫЕ ТРУБЫ. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ВАКУУМА

1°. Напорная горизонтальная труба. Перепад восстановления. Аэрация напорного потока. Рассмотрим здесь, в порядке исключения, не круглую, а п р я м о у г о л ь н у ю трубу весьма большой ширины. Будем считать, что с

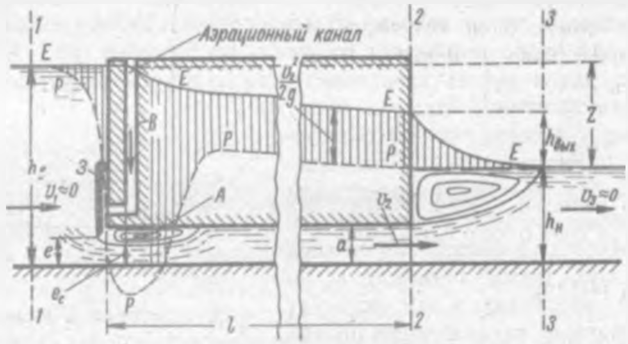


Рис. 5-8. Напорная труба

верховой стороны трубы установлен плоский затвор 3 (рис. 5-8), с низовой стороны устроен прямоугольный отводящий канал шириной, равной ширине трубы b, в связи с чем получаем так называемое п л о с к о е движение жидкости («п л о с к у ю з а д а ч у»; см. стр. 95).

Предположим, что нам заданы: глубины воды с верховой и низовой сторон трубы: $h_в$ и $h_н$, а следовательно, и разность уровней $Z = h_в - h_н$; высота трубы a; ее длина l; открытие затвора e. Требуется определить расход Q.

Поскольку в данном случае имеем простой трубопровод постоянного сечения, причем истечение происходит под уровень, то для расчета пользуемся формулами (5-36') и (5-37). Коэффициент расхода трубопровода $\mu_т$ согласно (5-37) переписываем в виде

Различные типы насосов допускают различную величину вакуума. Обычно вакуум перед рабочим колесом насоса должен удовлетворять условию:

$$(h_{вак})_{нас} \leqslant 4{,}0 \div 6{,}5 \text{ м вод. ст.}$$

Величина допустимого вакуума зависит не только от типа насоса, но и от температуры и рода жидкости. С увеличением температуры жидкости величина допустимого вакуума снижается. (Поскольку с повышением температуры кавитация усиливается; см. § 1-5.) Например, при температуре воды, равной 60 °С, допустимый вакуум приобретает уже отрицательное значение (т. е. насос должен работать при давлении в воде, большем атмосферного).

Зная допустимый вакуум для данного насоса и данной жидкости $(h_{вак})_{доп}$, можно по формуле (5-46) найти предельное максимальное возвышение насоса над горизонтом жидкости в бассейне:

$$a_{доп} = (h_{вак})_{доп} - (1 + \zeta_f)\frac{v^2}{2g}. \qquad (5\text{-}47)$$

Для горячей воды $a_{доп}$ может быть отрицательным; в этом случае насос приходится располагать ниже горизонта воды в колодце.

§ 5-6. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА (ПРОДОЛЖЕНИЕ): ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ И ВЕРТИКАЛЬНАЯ ВОДОСПУСКНЫЕ ТРУБЫ. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ВАКУУМА

1°. Напорная горизонтальная труба. Перепад восстановления. Аэрация напорного потока. Рассмотрим здесь, в порядке исключения, не круглую, а прямоугольную трубу весьма большой ширины. Будем считать, что с

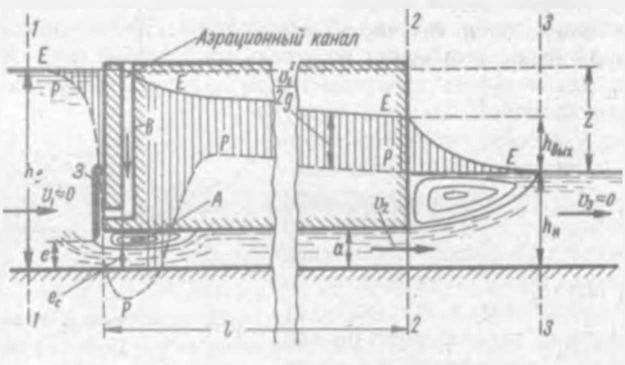


Рис. 5-8. Напорная труба

верховой стороны трубы установлен плоский затвор 3 (рис. 5-8), с низовой стороны устроен прямоугольный отводящий канал шириной, равной ширине трубы b, в связи с чем получаем так называемое плоское движение жидкости («плоскую задачу»; см. стр. 95).

Предположим, что нам заданы: глубины воды с верховой и низовой сторон трубы: $h_в$ и $h_н$, а следовательно, и разность уровней $Z = h_в - h_н$; высота трубы a; ее длина l; открытие затвора e. Требуется определить расход Q.

Поскольку в данном случае имеем простой трубопровод постоянного сечения, причем истечение происходит под уровень, то для расчета пользуемся формулами (5-36′) и (5-37). Коэффициент расхода трубопровода $\mu_т$ согласно (5-37) переписываем в виде

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_l + \Sigma\zeta_j}},$$

где для **прямоугольной трубы** [см. формулу (4-69)]

$$\zeta_l = \frac{\lambda l}{4R}, \tag{5-48}$$

причем здесь (см. § 4-12, п. 1°)

$$\lambda = \frac{8g}{C^2};\ R = \frac{ab}{2(a+b)} \approx \frac{ab}{2b} = \frac{1}{2}a; \tag{5-49}$$

что касается $\sum\zeta_j$, то

$$\sum\zeta_j = \zeta_{вх} + \zeta_{вых},$$

где при достаточно большой глубине $h_н$ (сравнительно с a) величину $\zeta_{вых}$ можно принять равной 1,0; коэффициент сопротивления $\zeta_{вх}$ согласно формуле (4-134) равен:

$$\zeta_{вх} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_c} - 1\right)^2 = \left(\frac{a}{e_c} - 1\right)^2 = \left(\frac{a}{\varepsilon_0 e} - 1\right)^2, \tag{5-50}$$

где ε_0 – коэффициент вертикального сжатия струи, равный $\varepsilon_0 \approx 0{,}6$ (см. далее § 12-13);

$$\omega_c = be_c = b\varepsilon_0 e.$$

Приведенные формулы позволяют вычислить $\mu_т$, а затем и Q по зависимости (5-36′).

Так же просто, без подбора решается и задача по определению Z при заданных Q и a. Величину же a при заданных Q и Z приходится находить подбором или методом последовательного приближения.[1]

Перепад восстановления[2] $Z_{вс}$. Согласно формуле (4-136) *при выходе в бассейн больших размеров* (рис. 5-8),[3] когда $v_3 \approx 0$, весь скоростной напор потока в трубе теряется (переходит в потерю напора на выход):

$$\frac{v_2^2}{2g} = h_{вых}. \tag{5-51}$$

Такое положение мы выше и имели, когда считали $\zeta_{вых} = 1{,}0$ и $h_н$ весьма большим сравнительно с высотой a трубы.

В случае, когда $h_н$ не столь велико ($v_3 \neq 0$), величина $\zeta_{вых}$ получается меньше единицы [см. (4-139)][4], причем не весь скоростной напор потока в трубе теряется (затрачивается на потерю напора $h_{вых}$). На рис. 5-9 представлена картина истечения, отвечающая этому случаю. Как видно из чертежа, здесь вместо формулы (5-51) получаем:

$$\frac{v_2^2}{2g} = h_{вых} + \frac{v_3^2}{2g} + Z_{вс}, \tag{5-52}$$

---

[1] При расчете подобных труб надо иметь в виду замечание, касающееся начального участка, приведенное в п. 3° § 5-4.

[2] Решение задачи о перепаде восстановления $Z_{вс}$ в общей форме было дано Е. А. Чугаевой [«Затопленное истечение воды через напорную трубу, уложенную под земляной насыпью». – Тр. ЛИИЖТ, вып. 165, 1959, с. 82 – 90].

[3] На рис. 5-8 показаны три сечения: *1*, *2*, *3*. Далее индексами 1, 2, 3 будут обозначаться величины, относящиеся соответственно к указанным сечениям.

[4] В формуле (4-139) в данном случае следует понимать: под v_1 – скорость v_2 и под v_2 – скорость v_3.

где $Z_{вс}$ – **отрицательный** («обратный») перепад свободной поверхности, т. е. высота поднятия этой поверхности на длине между сечениями $2-2$ и $3-3$. Величина $Z_{вс}$ характеризует также увеличение удельной потенциальной энергии при переходе от сечения $2-2$ к сечению $3-3$. Поэтому можно сказать, что в случае, *когда скорость в отводящем русле достаточно велика, скоростной напор в трубе при выходе в нижний бьеф частично переходит в удельную потенциальную энергию или, как говорят, восстанавливается (в потенциальной форме).*

Отрицательный перепад $Z_{вс}$ называется **перепадом восстановления**. Из зависимости (5-52) с учетом формулы Борда (4-138) и (4-139) получаем:

$$Z_{вс} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_3^2}{2g} - h_{вых} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_3^2}{2g} - \left(1 - \frac{v_3}{v_2}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2 v_3 - v_3^2}{g}. \qquad (5\text{-}53)$$

Как видно, при расчете $h_{вых}$ по формуле Борда перепад $Z_{вс}$ равен нулю только тогда, когда $v_3 = 0$; [1] в остальных случаях, когда $v_3 > 0$,

$$Z_{вс} > 0.$$

Ведя в данном случае расчет расхода Q по формулам (5-36′) и (5-37), приходится величиной ζ_f, входящей в (5-37), учитывать потери напора только до сечения $2-2$; под величиной же Z, входящей в (5-36′), следует в этом случае понимать перепад Z' (рис. 5-9):

$$Z' = Z + Z_{вс}, \qquad (5\text{-}54)$$

поскольку именно Z' представляет собой разность уровней воды в сечениях $1-1$ и $2-2$. Отсюда вытекает необходимость знать величину $Z_{вс}$.

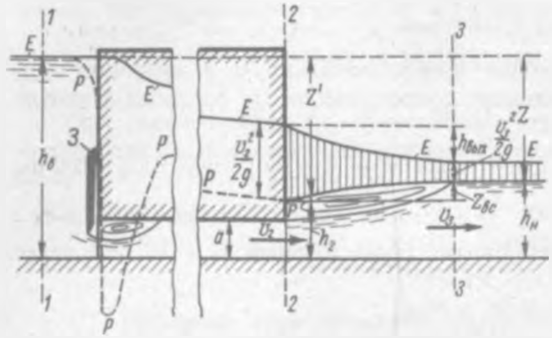


Рис. 5-9. Напорная труба

$Z_{вс}$ – перепад восстановления

Предполагаем, что величины $h_в$, $h_н$, a, l нам заданы.

Общий метод отыскания перепада восстановления [2] $Z_{вс}$ заключается в совместном решении двух уравнений (рис. 5-9): [3]

1) уравнения Бернулли, которым соединяем сечения $1-1$ и $2-2$, причем получаем

$$\frac{Q}{b} = \varphi a \sqrt{2g(h_в - h_2)}, \qquad (5\text{-}55)$$

где φ – обозначение:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{вых} + \zeta_l + 1}}; \qquad (5\text{-}56)$$

2) гидравлического уравнения количества движения, которым соединяем сечения $2-2$ и $3-3$, причем получаем (считая, что в сечениях $2-2$ и $3-3$ давление распределяется по гидростатическому закону, и пренебрегая силами внешнего трения на длине потока между сечениями $2-2$ и $3-3$): [4]

$$\frac{2}{g}\left(\frac{Q}{b}\right)^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{h_н}\right) = h_н^2 - h_2^2, \qquad (5\text{-}57)$$

что дает

$$\frac{Q}{b} = \sigma a \sqrt{\frac{h_н - h_2}{2} g \left(1 + \frac{h_2}{h_н}\right) \frac{1}{\sigma - 1}}, \qquad (5\text{-}58)$$

---

[1] Случай $v_2 \leqslant v_3$ исключаем из рассмотрения.

[2] С перепадом восстановления приходится сталкиваться и при расчете других сооружений.

[3] По уравнению (5-53), не зная Q, отыскать величину $Z_{вс}$, разумеется, невозможно.

[4] Здесь также принимаем, что $\alpha_{0_1} = \alpha_{0_2} = \alpha = 1$.

где

$$\sigma = h_н/a. \tag{5-59}$$

Решая систему двух уравнений (5-55) и (5-58), получаем:

$$h_2 = \left[\frac{1}{2}N + \sqrt{\frac{1}{4}N^2 - N\frac{h_в}{h_н} + 1}\right]h_н, \tag{5-60}$$

где

$$N = 4\varphi^2\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2}\right). \tag{5-61}$$

Вычислив по формуле (5-60) величину h_2 (см. рис. 5-9), находим $Z_{вс}$:

$$Z_{вс} = h_н - h_2. \tag{5-62}$$

В случае круглой трубы диаметром D решение по определению $Z_{вс}$ аналогично. Под величиной σ при этом решении следует понимать отношение

$$\sigma = \frac{b_0 h_н}{\omega},$$

где ω – площадь сечения трубы; b_0 – ширина транзитной струи в сечении $3-3$ (значение b_0 должно быть задано).

Как показывает анализ величины $Z_{вс}$, учет ее при расчете напорных труб имеет смысл, когда

$$\frac{h_н}{a} < \sim 2{,}5 \div 3{,}0;$$

в противном случае величиной $Z_{вс}$ следует пренебрегать, считая $Z' = Z$.

Аэрация напорного потока. При входе в трубу (рис. 5-8) получаем водоворотную область A, характеризуемую, как отмечалось ранее, интенсивной турбулентностью, а следовательно, и интенсивной пульсацией давления. Кроме того, в области A обычно получается большой вакуум, который обусловливает опасную кавитацию (могущую вызвать кавитационную эрозию затвора и стенок трубопровода).

Повышенная пульсация давления в области A в некоторых случаях может вызвать опасную вибрацию затвора. С тем чтобы снизить вакуум, а также вибрацию затвора, в область A по особому аэрационному каналу B подводят воздух, который, смешиваясь с водой (в виде отдельных «пузырьков»), создает непосредственно за затвором воздушно-водяную смесь; эта смесь, являясь сжимаемой, обусловливает снижение вибрации затвора (пузырьки воздуха являются как бы компенсаторами, демпферами).

При проектировании аэрационного канала B приходится определять размеры его поперечного сечения. При скоростях движения воздуха $v < 70$ м/с *можно пренебрегать сжимаемостью воздуха и рассчитывать его движение по зависимостям, относящимся к жидкости.* Здесь только при определении λ (см. § 4-11) следует применять соответствующее значение ν (относящееся к рассматриваемому газу).

Разность давлений, под действием которой воздух по каналу должен поступать[1] в зону A, может быть найдена с помощью построенной пьезометрической линии $P-P$.

При решении данного вопроса приходится устанавливать величину расхода воздуха, обеспечивающую достаточную аэрацию потока. Этот вопрос, как и некоторые другие, связанные с проектированием входа потока в трубу, рассматривается в курсе гидротехнических сооружений.

2°. Напорная вертикальная труба. Будем рассматривать истечение в атмосферу (см. рис. 5-10, *а*, относящийся к идеальной жидкости,[2] и рис. 5-10, *б*, относящийся к

---

[1] При расчете движения газов величины z в уравнении Бернулли не учитывают и считают, что при $v = \text{const}$ движение газа происходит за счет разности давлений, а не за счет разности напоров (см. § 4-20).

[2] С тем, чтобы не усложнять схему, на рис. 5-10, *а* сжатие струи, получающееся при поступлении идеальной жидкости из сосуда в трубу (в сечении $2-2$), не показываем.

вязкой, реальной жидкости).[1]

Плоскость сравнения OO намечаем на уровне выходного сечения трубы $3-3$. Напорную линию $E-E$ и пьезометрическую линию $P-P$ $\left(\text{отстоящую от напорной линии на расстоянии } \frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ в случае вертикальной трубы приходится строить, откладывая напоры и другие величины в горизонтальном направлении от некоторой вертикальной «плоскости отсчета» $O'O'$, как показано на чертеже.

Для реальной жидкости (рис. 5-10, *б*) скоростной напор

$$\frac{v_3^2}{2g} = H_{e_1} - h_f = H - h_f, \tag{5-63}$$

где все обозначения указаны на чертеже.

Из формулы (5-63) получаем обычную зависимость для скорости истечения v_3 (5-34), причем расход можем найти по формуле (5-35).

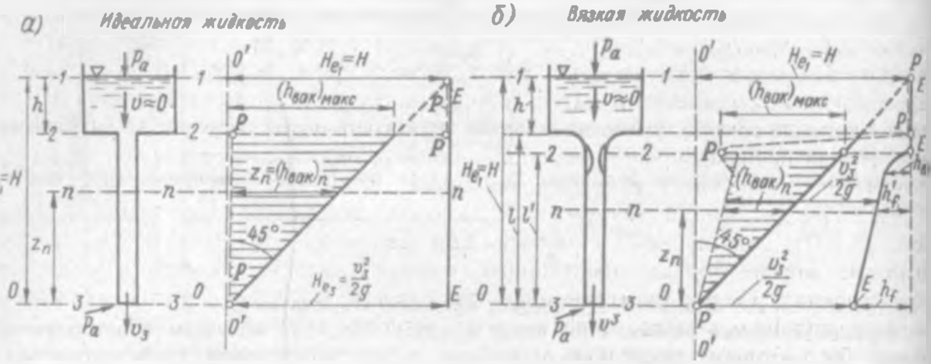


Рис. 5-10. Напорная вертикальная труба

Данный трубопровод, так же как и сифон, характеризуется наличием вакуума. Вакуум в некотором сечении $n-n$ (рис. 5-10, *б*)

$$(h_{\text{вак}})_n = z_n - \left(H - h_f' - \frac{v_3^2}{2g}\right), \tag{5-64}$$

где h_f' — полная потеря напора от сечения $1-1$ до сечения $n-n$; z_n — показано на чертеже.

Максимальное значение вакуума $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ получим в сечении $2-2$; принимая $l \approx l'$ и пренебрегая сжатием струи в сечении $2-2$, имеем

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = l + \frac{v_3^2}{2g} - H = l - h_f. \tag{5-65}$$

Как видно, с увеличением длины трубы l максимальный вакуум растет.

При больших величинах $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ в районе сечения $2-2$ получаем относительно большой объем кавитационных областей (заполненных парами воды с давлением $p_{\text{н п}}$),[2] причем струя воды в сечении $2-2$ разрывается, и получившийся разрыв заполняется насыщенными парами воды.

П р е д е л ь н а я м а к с и м а л ь н а я д л и н а т р у б ы, характеризуемая отсутствием упомянутого разрыва, будет

$$l_{\text{пр}} = H + (h_{\text{вак}})_{\text{доп}} - \frac{v_3^2}{2g}, \tag{5-66}$$

---

[1] Минимальная длина l вертикальной трубы, а также начальные и граничные условия, обеспечивают образование потока жидкости (в трубе), представленного на рисунке.

[2] Кавитационные разрывы получаются в тех точках потока, где давление за счет пульсационного вакуума снижается до величины $p_{\text{н п}}$ — давления насыщенных паров.

где $(h_{вак})_{доп}$ – вакуум, допустимый по условиям отсутствия разрыва струи в сечении $2-2$.

Из формулы (5-35) следует, что с увеличением длины трубы (а следовательно, с увеличением H) увеличивается также расход Q. Максимальное значение $Q_{макс}$ получаем при длине l, несколько большей $l_{пр}$, когда в сечении $2-2$ возникает разрыв струи, причем истечение под действием напора h происходит непосредственно из сосуда в пространство, где давление равно $p_{н.п}$ (возникающее в трубе в районе сечения $2-2$).

При дальнейшем увеличении l расход остается постоянным, равным $Q_{макс}$.

Величина допустимого вакуума $(h_{вак})_{доп}$ в формуле (5-66) может приниматься той же, что и для сифонов (см. § 5-5).

3°. Различные виды вакуума. Определение понятия вакуума было дано в § 2-7. Из сказанного о вакууме на стр. 118–120, 220–224 видно, что следует различать:

1) максимальный вакуум, получающийся при заданных условиях в том или другом месте трубы; для данной точки пространства, занятого движущейся жидкостью, можно иметь в виду (при турбулентном режиме): а) осредненный (во времени) максимальный вакуум; б) мгновенный (актуальный) максимальный вакуум; в) максимальный пульсационный вакуум (положительный или отрицательный), представляющий собой разность соответствующих мгновенного и осредненного вакуумов в данной точке;

2) предельный вакуум, т. е. вакуум, отвечающий давлению $p = p_{н.п}$ (см. § 1-5); для данной жидкости при заданной ее температуре нельзя получить вакуум больше предельного (в связи с возникновением в жидкости при давлении $p = p_{н.п}$ кавитационных разрывов); при турбулентном движении, характеризующемся пульсацией вакуума, мгновенный (актуальный) вакуум не может быть больше предельного;

3) допустимый вакуум: а) или по условиям отсутствия опасной кавитационной эрозии стенок труб; б) или по условиям получения достаточного коэффициента полезного действия насоса; в) или по условиям отсутствия разрыва струи в трубопроводе и т. п.

Б. ДЛИННЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

§ 5-7. ПРОСТОЙ ТРУБОПРОВОД

Напомним (см. § 5-3), что в случае «длинных» трубопроводов местными потерями напора пренебрегаем; кроме того, считаем, что линия $E-E$ совпадает с линией $P-P$.

1°. Истечение под уровень (рис. 5-11).[1] Пьезометрическая линия $P-P$ (она же и напорная линия $E-E$) должна иметь вид, показанный на чертеже.

Чем больше скорость в трубе, тем больше потеря напора, а следовательно, и величина J. Поэтому при $D_1 < D_2$ пьезометрический уклон J_1 должен быть больше пьезометрического уклона J_2.

Разность горизонтов жидкости в сосудах Z при истечении под уровень равна потере напора:

$$Z = h_{l_1} + h_{l_2} + h_{l_3}, \tag{5-67}$$

где h_{l_1}, h_{l_2}, h_{l_3} – потери напора по длине соответственно для 1, 2 и 3-й труб, показанных на чертеже.

---

[1] Рисунки 5-11 и 5-12 представлены в искаженном масштабе.

В случае длинных труб h_l определяется по формуле (5-2). Учитывая эту зависимость, (5-67) переписываем в виде

$$Z = \frac{Q^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q^2}{K_2^2} l_2 + \frac{Q^2}{K_3^2} l_3, \tag{5-68}$$

где K_1, K_2, K_3 – модули расходов для 1, 2 и 3-й труб; l_1, l_2, l_3 – длины этих труб; Q – расход, одинаковый для всех трех труб.

Вынося Q^2 за скобки, вместо (5-68) получаем

$$Z = Q^2 \sum \frac{l}{K^2}, \tag{5-69}$$

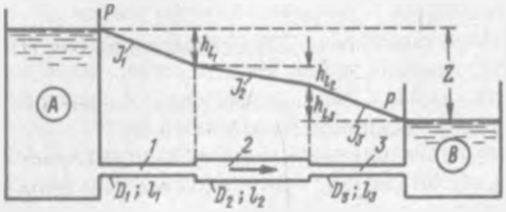


Рис. 5-11. Простой длинный трубопровод переменного диаметра ($J_1 > J_2$)

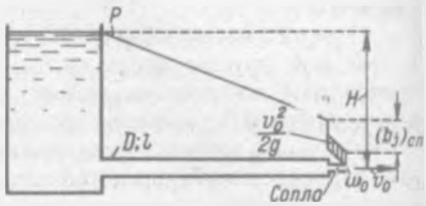


Рис. 5-12. Простой длинный трубопровод с соплом

откуда

$$Q = \sqrt{\frac{Z}{\sum \frac{l}{K^2}}}. \tag{5-70}$$

Пользуясь формулами (5-69) и (5-70), решаем различные задачи. Например, зная Z и имея заданным трубопровод, находим Q, или, имея заданными Q, l, K, находим Z и т. п.

2°. Истечение в атмосферу (рис. 5-12). Превышение горизонта жидкости в сосуде над выходным сечением трубы

$$H = h_l. \tag{5-71}$$

В случае длинных труб, пренебрегая вообще местными потерями напора, приходится иногда все же учитывать одну местную потерю – потерю в выходном сопле $(h_j)_{сп}$, где скорость может быть в е с ь м а велика (благодаря малой площади ω_0 поперечного сечения выходного сопла). В связи с этим зависимость (5-71) для трубопровода, представленного на рис. 5-12, следует переписать в виде

$$H = h_l + (h_j)_{сп} + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{5-72}$$

Выражая потерю напора в сопле $(h_j)_{сп}$ обычной зависимостью

$$(h_j)_{сп} = \zeta_{сп} \frac{v_0^2}{2g}, \tag{5-73}$$

где $\zeta_{сп}$ – соответствующий эмпирический коэффициент сопротивления, формулу (5-72) представляем в виде

$$H = h_l + (1 + \zeta_{сп}) \frac{v_0^2}{2g}, \tag{5-74}$$

или в виде

$$H = h_l + \frac{v_0^2}{2g\mu_{сп}^2}, \tag{5-75}$$

где

$$\mu_{сп} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{сп}}}. \tag{5-76}$$

Вместо зависимости (5-75) можем написать

$$H = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{Q^2}{\omega_0^2 2g\mu_{сп}^2}. \tag{5-77}$$

Если сопло нам задано, то величины ω_0 и $\mu_{сп}$ следует считать известными. Пользуясь формулой (5-77), решаем следующие задачи:

1) задан трубопровод (т. е. даны D и l) и задано Q; требуется найти H;

2) задан трубопровод и задано H; требуется найти Q;

3) заданы Q, H, l; требуется найти D. В этом случае находим сперва модуль расхода K; затем по этому модулю устанавливаем D.

Если сопла в конце трубопровода нет, то в этом случае обычно скоростным напором в выходном сечении можно пренебречь. При этом задачи решаются еще проще.

§ 5-8. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТРУБ

Отдельные трубы могут быть соединены последовательно или параллельно.

1°. Последовательное соединение. В этом случае (рис. 5-13) потеря напора от сечения A до сечения B будет

$$(h_l)_{AB} = h_{l_1} + h_{l_2} + h_{l_3}, \tag{5-78}$$

т. е., как видно, при последовательном соединении труб для нахождения потери напора от сечения A до сечения B потери напора в отдельных трубах надлежит складывать.

Рис. 5-13. Последовательное соединение труб

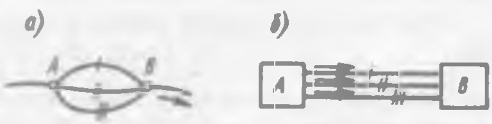


Рис. 5-14. Параллельное соединение труб

2°. Параллельное соединение. На рис. 5-14 показаны два примера параллельной работы труб. В этих случаях формула (5-78) оказывается неприменимой: потери напора в отдельных трубах при параллельном их соединении складывать нельзя.

Представим на рис. 5-15 схему рис. 5-14,*а* в увеличенном масштабе. Здесь мы имеем «сложный трубопровод». К узлам A и B этого трубопровода (где одна подводящая труба переходит в три трубы и где эти три трубы снова переходят в одну трубу) мысленно приключим пьезометры $П_1$ и $П_2$. Потеря напора[1] на пути от узла A до узла B будет

$$(h_l)_{AB} = (H_e)_A - (H_e)_B, \tag{5-79}$$

[1] Скоростным напором здесь пренебрегаем, так как рассматриваем длинные трубы.

где $(H_e)_A$ и $(H_e)_B$ – напоры соответственно в узлах A и B (рис. 5-15).

С другой стороны,

$$\left.\begin{aligned} h_{l_1} &= (H_e)_A - (H_e)_B; \\ h_{l_2} &= (H_e)_A - (H_e)_B; \\ h_{l_3} &= (H_e)_A - (H_e)_B, \end{aligned}\right\} \tag{5-80}$$

где h_{l_1}, h_{l_2}, h_{l_3} – потери напора соответственно на длине 1-й, 2-й и 3-й труб; величины же $(H_e)_A$ и $(H_e)_B$ в зависимости (5-80) можно рассматривать как напоры в начале и в конце каждой трубы (поскольку скоростным напором мы пренебрегаем).

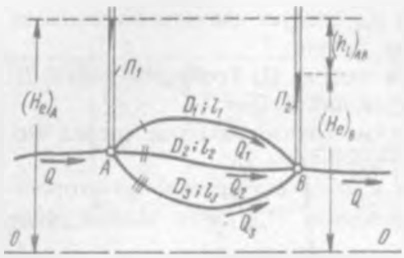


Рис. 5-15. К расчету параллельного соединения длинных труб

Учитывая (5-79) и (5-80), можем записать:

$$(h_l)_{AB} = h_{l_1} = h_{l_2} = h_{l_3} = (H_e)_A - (H_e)_B. \tag{5-81}$$

Как видно, *потери напора во всех трубах, соединенных параллельно, одинаковы.* Формулу (5-81) для расчета можно преобразовать следующим образом. Так как

$$h_l = \frac{Q^2}{K^2} l, \tag{5-82}$$

то вместо (5-81) имеем:

$$(h_l)_{AB} = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3. \tag{5-83}$$

Соотношения (5-83) дают три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} \qquad Q_1 = K_1 \sqrt{\frac{(h_l)_{AB}}{l_1}}; \\ &\text{(II)} \qquad Q_2 = K_2 \sqrt{\frac{(h_l)_{AB}}{l_2}}; \\ &\text{(III)} \qquad Q_3 = K_3 \sqrt{\frac{(h_l)_{AB}}{l_3}}. \end{aligned}\right\} \tag{5-84}$$

Дополнительно можем написать четвертое уравнение:

$$\text{(IV)} \qquad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \tag{5-85}$$

Если дано Q и заданы размеры отдельных трубопроводов (l и D), имеем систему четырех уравнений (I)–(IV) с четырьмя неизвестными: Q_1, Q_2, Q_3, $(h_l)_{AB}$.

Решим приведенную систему уравнений. Подставляя в уравнение (IV) уравнения (I), (II), (III), получаем:

$$Q = K_1 \sqrt{\frac{(h_l)_{AB}}{l_1}} + K_2 \sqrt{\frac{(h_l)_{AB}}{l_2}} + K_3 \sqrt{\frac{(h_l)_{AB}}{l_3}} \tag{5-86}$$

или

$$Q = \sqrt{(h_l)_{AB}} \sum \frac{K}{\sqrt{l}}, \tag{5-87}$$

или

$$(h_l)_{AB} = \frac{Q^2}{\left(\sum \frac{K}{\sqrt{l}}\right)^2}. \tag{5-88}$$

Зная из (5-88) $(h_l)_{AB}$, по (5-84) находим Q_1, Q_2 и Q_3.

§ 5-9. ЗАДАЧА О ТРЕХ РЕЗЕРВУАРАХ

На рис. 5-16 представлены три резервуара (*I*, *II*, *III*), соединенные трубами. Обозначим через ∇_1, ∇_2, ∇_3 отметки горизонтов воды соответственно в *I*, *II* и *III* резервуарах, причем эти отметки будем считать постоянными (неизменными во времени).

Дано: l_1; l_2; l_3; D_1; D_2; D_3 (а следовательно, K_1, K_2, K_3); ∇_1, ∇_2, ∇_3.

Требуется найти: а) направление движения воды в трубе *3* (направления движения воды в трубах *1* и *2* известны заранее); б) расходы Q_1, Q_2, Q_3.

1°. О направлении движения воды в трубе *3*. Покажем на чертеже пьезометрические линии для трех рассматриваемых труб, причем через ∇_0 обозначим отметку пьезометрической линии, отвечающую узловой точке *O*.

а) Если бак *III* питается водой из бака *I*, то вода по трубе *3* движется вверх, причем

$$\nabla_0 > \nabla_3;$$

б) если бак *III* сам питает бак *II*, то вода в трубе *3* движется вниз, причем

$$\nabla_0 < \nabla_3;$$

в) если в трубе *3* течения воды нет (бак *III* нейтрален), то

$$\nabla_0 = \nabla_3.$$

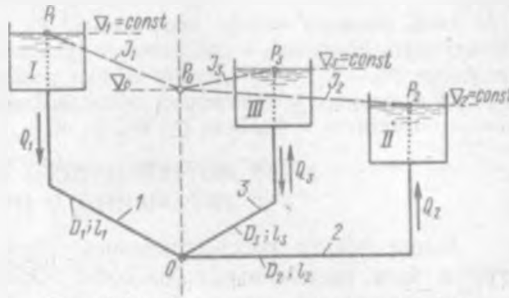


Рис. 5-16. К задаче о трех резервуарах

Чтобы установить, какой из трех перечисленных вариантов имеет место в данном конкретном случае, поступаем следующим образом:

1) задаемся условно величиной ∇_0, равной ∇_3:

$$\nabla_0 = \nabla_3.$$

2) В этом предположении, отвечающем случаю, когда бак *III* нейтрален, находим расходы Q_1 и Q_2:

$$Q_1 = K_1 \sqrt{\frac{h_{l_1}}{l_1}} = K_1 \sqrt{\frac{\nabla_1 - \nabla_0}{l_1}} = K_1 \sqrt{\frac{\nabla_1 - \nabla_3}{l_1}};$$

$$Q_2 = K_2 \sqrt{\frac{h_{l_2}}{l_2}} = K_2 \sqrt{\frac{\nabla_0 - \nabla_2}{l_2}} = K_2 \sqrt{\frac{\nabla_3 - \nabla_2}{l_2}}.$$

3) Сопоставляем между собой найденные Q_1 и Q_2. Если оказывается, что

$$Q_1 = Q_2,$$

то бак *III* в действительности не работает (он нейтрален), и поэтому

$$\nabla_0 = \nabla_3.$$

Если оказывается, что

$$Q_1 > Q_2,$$

то в действительности

$$\nabla_0 > \nabla_3,$$

т. е. бак *III* питается из бака *I* и, следовательно, вода по трубе *3* поднимается вверх.

Если оказывается, что

$$Q_1 < Q_2,$$

§ 5-11. РАСЧЕТ СЛОЖНОГО (РАЗВЕТВЛЕННОГО) НЕЗАМКНУТОГО ТРУБОПРОВОДА (ТРУБОПРОВОДНОЙ СЕТИ)

Различают следующие виды сложного трубопровода:

а) незамкнутый, или, иначе, тупиковый (рис. 5-18);

б) замкнутый, или, иначе, кольцевой (рис. 5-19).

В этом параграфе рассмотрим расчет незамкнутого сложного трубопровода (тупиковой водопроводной сети), питаемого из бака *Б*, установленного на водонапорной башне (рис. 5-18). Такой трубопровод состоит из магистрали (главной линии; см., например, линию *1 – 2 – 3 – 4*) и ответвлений (линий второго порядка; см. линии *2 – 5* и *3 – 6*).

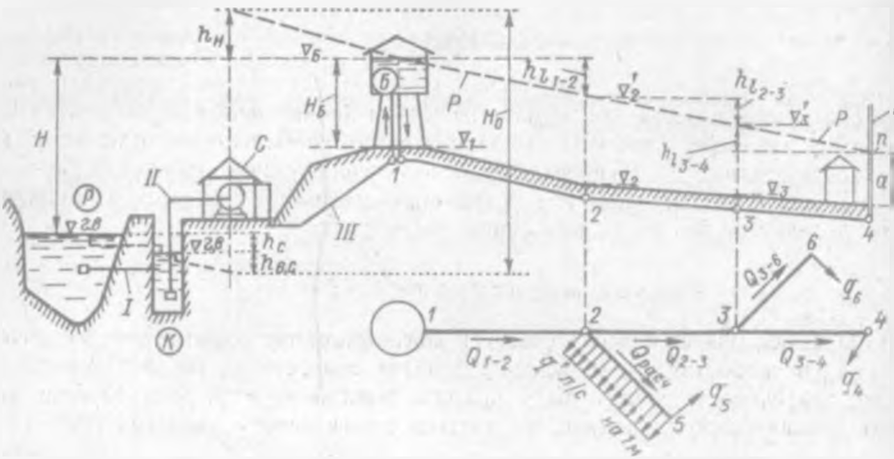


Рис. 5-18. Тупиковая (незамкнутая) водопроводная сеть

Р – река (источник водоснабжения), *К* – береговой колодец, *С* – насосная станция, *Б* – водонапорная башня, *I* – самотечная труба, *II* – всасывающая труба, *III* – напорная труба, *1 – 2 – 3 – 4* – магистраль, *2 – 5* и *3 – 6* – ответвления. Потери напора: h_c – в трубе *I*, $h_{вс}$ – в трубе *II*, $h_н$ – в трубе *III*

1°. Случай, когда высотное положение водонапорного бака не задано. Для гидравлического расчета рассматриваемой сети труб должны быть заданы:

а) длины l отдельных труб и начертание сети их на плане местности в горизонталях;

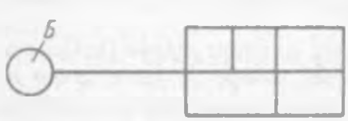


Рис. 5-19. План замкнутой (кольцевой) сети

Б – водонапорная башня

б) расчетные расходы воды, забираемые в отдельных точках сети: q_4, q_5, q_6;

в) расход q', забираемый с 1 м длины того или другого трубопровода (см. трубопровод *2 – 5*);

г) минимально допустимые отметки горизонтов воды в воображаемых пьезометрах, приключенных к концевым точкам сети (точкам *4*, *5*, *6*): ∇'_4, ∇'_5, ∇'_6. Задавая ∇'_4, ∇'_5, ∇'_6, мы тем самым задаем гидродинамические давления в точках *4*, *5* *6*, а также высоты a, на которые вода в этих точках может подняться («самотеком») над поверхностью земли, если трубопровод, как показано на рис. 5-18, проложен в земле (см., например, точку *4*, где отметка поверхности земли обозначена через ∇_4).

В результате гидравлического расчета можем найти: диаметры труб, а также отметку горизонта воды в водонапорном баке, обеспечивающую подачу заданных расходов воды в заданные точки сети.

Общий ход расчета может быть намечен следующий.

1. Устанавливаем расчетные расходы для отдельных участков сети. Расчетный расход какого-либо участка сети должен равняться сумме расходов, забираемых из сети ниже (по течению) этого участка.

Например, расчетный расход для участка *3–4*

$$Q_{3-4} = q_4;$$

расчетный расход для участка *1 – 2*

$$Q_{1-2} = q_4 + q_5 + q_6 + q' l_{2-5};$$

расчетный расход для участка *2 – 5* согласно формуле (5-97) будет

$$Q_{2-5} = q_5 + 0{,}55 q' l_{2-5}.$$

2. Выбираем линию трубопроводов, которую следует рассматривать как магистральную. В качестве магистрали намечаем линию: наиболее нагруженную расходами, наиболее длинную, характеризуемую наибольшими отметками ∇ поверхности земли. Если магистраль будет намечена неудачно, то в конце расчета получим некоторую неувязку (см. ниже), причем расчет придется выполнять заново, задавшись новым направлением магистрали.

Расчет магистрали *1 – 2 – 3 – 4*

1. Задаемся для отдельных участков магистрали так называемой экономической скоростью $v_{эк}$ (пояснение понятия скорости $v_{эк}$ см. в следующем пункте); эта скорость может быть принята равной $v_{эк} \approx 1{,}0$ м/с; вообще же говоря, данная скорость должна изменяться с изменением диаметра труб:

D, м	0,10	0,20	0,25	0,30
$v_{эк}$, м/с	0,75	0,90	1,10	1,25

2. Установив скорости для отдельных участков магистрали, находим диаметры труб магистрали:

$$\omega = \frac{Q}{v_{эк}}; \; D' = \sqrt{\frac{4\omega}{\pi}} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_{эк}}};$$

полученное значение D' округляем до ближайшего (большего или меньшего) сортаментного значения D.

3. Зная для каждой трубы ее диаметр D и расход Q, определяем для всех участков магистрали потери напора по формуле:

$$h_l = \frac{Q^2}{K^2} l.$$

4. Имея величины h_l для отдельных участков магистрали, строим пьезометрическую линию $P - P$ (рис. 5-18). Построение этой линии начинаем с конца магистрали, зная отметку ∇_4. Идя от точки n (см. чертеж) против течения и откладывая по вертикали вверх найденные величины $(h_l)_{3-4}$, $(h_l)_{2-3}$, $(h_l)_{1-2}$, получаем искомую линию $P - P$.

Определение отметки $\nabla_Б$ горизонта воды в водонапорном баке. Пояснение понятия экономической скорости.

Построив пьезометрическую линию, легко можем написать следующую зависимость, по которой и определяем отметку $\Delta_Б$:

$$\nabla_Б = \nabla'_4 + \sum h_l,$$

где $\sum h_l$ – потери напора по длине всей магистрали.

Отметка $\nabla_Б$ определяет высоту водонапорной башни $H_Б$.

Поясним понятие экономической скорости, о которой говорилось выше.

Положим, что мы имеем магистраль, выполненную из труб определенного диаметра. Представим теперь, что этот диаметр постепенно *уменьшается*. При этом получаем следующее: скорости в магистральных трубах возрастают; потери напора в этих трубах растут; высота водонапорной башни $H_Б$ увеличивается; увеличивается также и высота H подъема воды насосами,[1] а следовательно, растет и мощность N насосов, зависящая от QH_0, где $H_0 = H + h_c + h_{вс} + h_н$ (см. рис. 5-18).

Можно утверждать, что с уменьшением диаметра труб магистрали стоимость самой магистрали будет уменьшаться; стоимость же водонапорной башни и насосной станции будет увеличиваться; также будет увеличиваться и ежегодный расход электрической энергии на насосной станции (в связи с работой более мощных насосов).

При увеличении диаметра труб магистрали получаем обратную картину: стоимость самой магистрали растет, а стоимость башни и насосной станции (а также электроэнергии) уменьшается.

На основании сказанного был исследован вопрос о том, при каких именно скоростях в магистрали получается наиболее экономичное сооружение; в результате и были установлены величины приведенных выше так называемых экономических скоростей.

Расчет ответвлений

Построив пьезометрическую линию для магистрали, мы тем самым задали напоры в начале каждого ответвления. Например, напор в начале ответвления $3 - 6$ определяется отметкой ∇'_3; напор в начале ответвления $2 - 5$ определяется отметкой ∇'_2.

В связи с этим обстоятельством расчет ответвлений принципиально отличается от расчета магистрали:

а) в случае магистрали напор в начале ее не был задан (отметка $\nabla_Б$ не была задана); поэтому при расчете магистрали мы исходили из скорости $v_ж$;

б) в случае ответвлений напор в начале их задан; задан также и напор в конце каждого ответвления; поэтому при расчете ответвлений *исходим из заданной потери напора для каждого ответвления* (разности напоров в начале и в конце ответвления).

Имея в виду сказанное, поступаем следующим образом (см. рис. 5-20, на котором для примера представлен продольный профиль по ответвлению $3 - 6$):

а) определяем потерю напора в ответвлении:

$$h'_l = \nabla'_3 - \nabla'_6,$$

где ∇'_3 известна из расчета магистрали;

---

[1] Предполагается, что вода в водонапорный бак подается насосами, как показано на рис. 5-18.

б) переписываем формулу (5-2), служащую для определения потерь напора, в виде:

$$(K')^2 = Q^2 \frac{l}{h'_l};$$

по этой формуле находим K';

в) по соответствующим таблицам, зная K', находим диаметр D'; полученное значение D' округляем до **б л и ж а й ш е г о б о л ь ш е г о** сортаментного значения D;

г) по найденному значению D определяем модуль K и вычисляем действительные потери напора в ответвлении h_l.

Как видно из чертежа, благодаря округлению D' до большего значения D, потеря напора в ответвлении уменьшилась, причем пьезометрическая линия несколько поднялась; при округлении D' до меньшего сортаментного значения отметка ∇'_6 в точке 6 оказалась бы не обеспеченной.

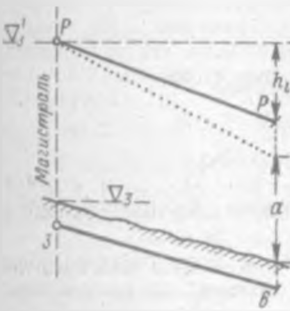


Рис. 5-20. Ответвление незамкнутой сети

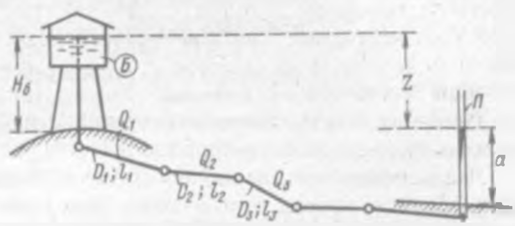


Рис. 5-21. К расчету магистрали при заданной высоте водонапорной башни

В заключение приведем следующее указание.

Если бы в начале расчета мы выбрали магистраль неудачно, то при расчете того или другого ответвления у нас получилось бы соотношение (см. пример ответвления $3-6$ на рис. 5-20): $\nabla'_6 > \nabla'_3$. Такое соотношение показывает, что в конец ответвления $3-6$ подать необходимый расход невозможно (соблюдая требования в отношении отметки ∇'_6). Поэтому при наличии указанного соотношения приходится задаваться новым направлением магистрали, идущим, например, по линии $1-2-3-6$ на рис. 5-18 и снова повторять расчет.

2°. Случай, когда высотное положение водонапорного бака задано. Ограничимся рассмотрением только магистральной линии (рис. 5-21).

Положим, что для расчета имеются следующие исходные данные:

а) длины труб l_1, l_2, ...;

б) расходы воды в отдельных трубах Q_1, Q_2, ...;

в) потеря напора Z в рассматриваемом трубопроводе.

В результате расчета требуется найти диаметры труб: D_1, D_2, D_3, ...

Ход расчета

1. Обозначив через L длину магистрали: $L = l_1 + l_2 + l_3$, ..., вычисляем средний пьезометрический уклон:

$$J_{ср} = Z/L.$$

2. Находим для каждого участка значение K (в первом приближении):

$$K_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{J_{ср}}};\ K_2 = \frac{Q_2}{\sqrt{J_{ср}}} \text{ и т. д.}$$

3. Исходя из найденных K, по таблице, выражающей зависимости $K = f(D)$, определяем:

а) ближайшие меньшие сортаментные значения диаметра труб: D'_1, D'_2, D'_3, ...

б) ближайшие большие сортаментные значения диаметра труб: D''_1, D''_2, D''_3, ...

4. Рассматриваем различные комбинации найденных сортаментных диаметров, например:

1-й вариант: D'_1, D''_2, D'_3, D''_4 и т. д.;

2-й вариант: D''_1, D'_2, D''_3, D'_4 и т. д.

Если число отдельных участков магистрали равно n, то число возможных комбинаций (вариантов) будет 2^n. Из этого числа вариантов по **техническим** соображениям мы должны отобрать только те из них, которые удовлетворяют условию:

$$\sum h_l \le Z,$$

где $\sum h_l$ – сумма потерь напора для всех участков магистрали.

Очевидно, варианты, характеризуемые условием $\Sigma h_l > Z$ неприемлемы, так как в них при заданном Z требуемые расходы Q не будут обеспечиваться.

5. Из числа отобранных вариантов останавливаемся (по **экономическим** соображениям) на том, для которого масса трубопровода (т. е. величина $\Sigma(l\beta)$, где β – масса 1 м трубы данного диаметра) оказывается минимальной. Ясно, что трубопровод, имеющий наименьшую массу, будет иметь также и наименьшую стоимость.

§ 5-12. ЗАМЕЧАНИЯ О РАСЧЕТЕ СЛОЖНОГО ЗАМКНУТОГО ТРУБОПРОВОДА

Поясним только основной принцип расчета сложного замкнутого трубопровода (кольцевой водопроводной сети).

Рассмотрим сеть, имеющую одно кольцо (рис. 5-22, *а*). Если расходы воды забираются в точках *4* и *5* сети, как показано на чертеже, то направление движения воды во всех трубах, кроме трубы *4 – 5*, нам известно заранее.

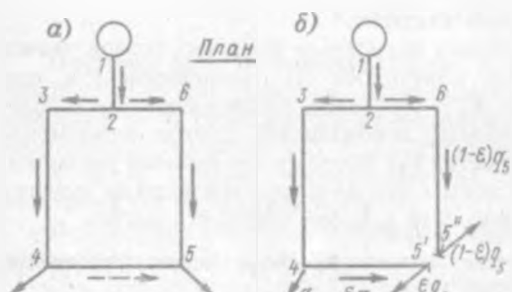


Рис. 5-22. К расчету замкнутого трубопровода

Положим, что для расчета нам заданы:

а) длины всех труб;

б) отметка горизонта воды в водонапорном баке, расположенном в точке 1;

в) минимальные допустимые отметки горизонта воды в воображаемых пьезометрах, присоединенных к узловым точкам сети *3*, *4*, *5*, *6*;

г) расходы q_4 и q_5, забираемые из сети.

Требуется установить диаметры отдельных труб, а также построить пьезометрическую линию для трубопровода.

Первую задачу (определение диаметров труб) решаем путем ряда попыток.

1-я **попытка**. Задаемся: а) диаметрами отдельных труб; б) направлением движения воды в трубе *4 – 5*, например, слева направо; в) распределением расхода q_5 между линиями *4 – 5* и *6 – 5*; здесь считаем, что расход линии *4 – 5* равен εq_5, а расход линии *6 – 5* равен $(1 - \varepsilon)q_5$, причем задаемся величиной ε.

В рассматриваемом кольце труб имеются два разных потока: один против часовой стрелки (*2 – 3 – 4*), другой – по часовой стрелке (*2 – 6 – 5*). Задавшись направлением движения воды по линии *4 – 5* слева направо, мы тем самым назначим встречу двух указанных потоков в точке 5. Точка встречи двух потоков называется точкой **водораздела** или **нулевой** точкой.

Чтобы проверить, правильно ли мы задались диаметрами труб, положением точки водораздела и величиной ε, поступаем следующим образом.

Мысленно разрезаем наше кольцо по намеченной точке водораздела, причем получаем сеть, изображенную на рис. 5-22, *б*. Далее по обычным формулам подсчитываем потерю напора для линии $1-2-3-4-5'$ ($h_{1-2-3-4-5'}$) и для линии $1-2-6-5''$ ($h_{1-2-6-5''}$). После этого сопоставляем между собой две найденные потери напора. Если $(h_l)_{1-2-3-4-5'} = (h_l)_{1-2-6-5''}$, то заключаем, что напоры в точках $5'$ и $5''$ будут **одинаковыми**, что и должно быть, поскольку точки $5'$ и $5''$ представляют собой физически одну точку 5 (рис. 5-22, *а*). Следовательно, получив указанное равенство, можем утверждать, что выше мы задались правильно как диаметрами труб D, так и величиной ε. Если указанное равенство не получается, то приходится изменять величины D и ε, а иногда и переносить точку водораздела в другую точку сети (в точку 4 на чертеже). При этом обращаемся ко 2-й, 3-й и последующим попыткам, добиваясь того, чтобы приведенное выше равенство было выдержано хотя бы приближенно.

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО РАСЧЕТАМ НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ [1]

1°. Задачи на расчет коротких трубопроводов.

№ 1. Имеем простой трубопровод постоянного диаметра (см. рис. 5-3, *б*). Истечение воды из сосуда *А* по этому трубопроводу происходит в атмосферу.

Дано: $Q = 40$ л/с; $l = 25$ м; $D = 150$ мм.

Требуется найти напор H.

Ответ. $H = 3{,}8$ м.

№ 2. Два резервуара *А* и *В*, наполненные водой, соединены трубопроводом постоянного диаметра. На трубопроводе имеется задвижка Лудло *С* с открытием $a/D = 0{,}5$ (рис. 5-23).

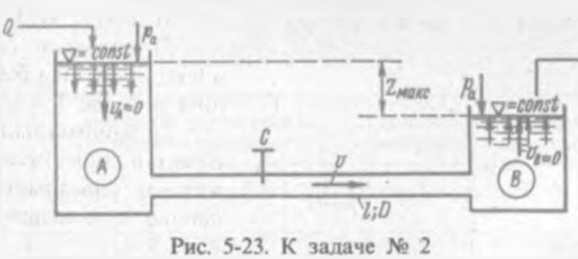


Рис. 5-23. К задаче № 2

Дано: $Q = 30$ л/с; $l = 25$ м; наибольшая допустимая разность горизонтов воды в резервуарах $Z_{макс} = 2{,}0$ м.

Требуется определить диаметр трубопровода D.

Решение. Для расчета пользуемся основной зависимостью (5-36'):

$$Q = \mu_т \omega \sqrt{2gZ} \tag{A}$$

В этой формуле $\omega = f_1(D)$ и $\mu_т = f_2(D)$, в связи с чем найти непосредственно диаметр D из уравнения (A) нельзя. Это уравнение приходится решать в отношении D подбором. [2]

[1] Предполагается, что рассматриваемые трубопроводы выполняются из чугунных труб, бывших в эксплуатации. При расчете (см. ниже) из табл. 5-3 берутся средние значения λ и K.

[2] Данное уравнение решается без подбора в отношении Q и в отношении Z, т. е. в случаях, когда D задано.

С этой целью переписываем (А) в виде:

$$\mu_т\omega = \frac{Q}{\sqrt{2gZ}}; \quad (Б)$$

величина

$$\frac{Q}{\sqrt{2gZ_{макс}}} = \frac{0{,}030}{\sqrt{2\cdot 9{,}80\cdot 2{,}0}} = 0{,}0048 \text{ м}^2; \quad (В)$$

следовательно, искомая величина D должна удовлетворять условию

$$\mu_т\omega \geqslant 0{,}0048 \text{ м}^2. \quad (Г)$$

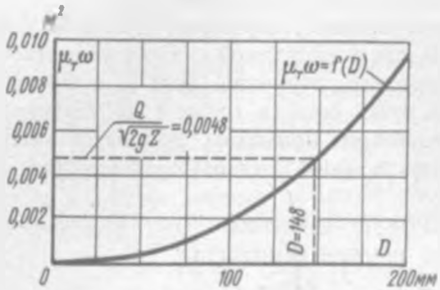


Рис. 5-24. К задаче № 2

Так как при истечении под уровень [см. формулу 5-37)]

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\frac{l}{D} + \zeta_{вх} + \zeta_з + \zeta_{вых}}},$$

причем $\zeta_{вх} = 0{,}5$ [см. формулу (4-163)], $\zeta_{вых} = 1{,}0$ [см. формулу (4-135)] и $\zeta_з = 5{,}3$ (см. табл. 4-15, стр. 199, то

$$\mu_т\omega = \frac{\omega}{\sqrt{25\frac{\lambda}{D} + 6{,}8}}. \quad (Д)$$

По полученной зависимости (Д) вычисляем величины $\mu_т\omega$, задаваясь различными сортаментными диаметрами трубы. Все вычисления сводим в таблицу *(форма 1)*.

По данным 1-й и 7-й строк таблицы *(форма 1)* строим на рис. 5-24 график

$$\mu_т\omega = f(D).$$

Откладываем по вертикальной оси этого графика величину (В), определяем диаметр D, отвечающий $Z_{макс}$. Полученное таким образом D округляем до ближайшего большего сортаментного значения, т. е. до $D = 150$ мм.

Форма 1

№ строки	Величина или расчетная формула	Единица измерения	Задаваемые и найденные численные значения				Примечания
1	D	м	0,200	0,150	0,125	0,100	—
2	$\omega = \frac{\pi D^2}{4}$	м²	0,0314	0,0177	0,0123	0,0078	—
3	λ	—	0,0323	0,0356	0,0380	0,0416	По табл. 5-3 (стр. 212).
4	$\frac{25\lambda}{D}$	—	4,05	5,94	7,60	10,40	—
5	$\frac{25\lambda}{D} + 6{,}8$	—	10,85	12,74	14,40	17,20	—
6	$\sqrt{\frac{25\lambda}{D} + 6{,}8}$	—	3,30	3,56	3,80	4,15	—
7	$\mu_т\omega$	м²	0,0095	0,0050	0,0032	0,0019	По формуле (Д)

№ 3. Вода из бака A поступает в открытый резервуар B по трубопроводу, состоящему из труб разного диаметра (рис. 5-25).[1]

Дано (см. чертеж): избыточное (сверхатмосферное) поверхностное давление в баке A равно $p_1 = 120$ кПа ($= 1{,}2$ кгс/см^2); $H_A = 1{,}0$ м; $H_B = 5{,}0$ м; $l_1 = 20{,}0$ м; $l_2 = 30{,}0$ м; $D_1 = 150$ мм; $D_2 = 200$ мм.

Требуется найти расход Q и построить напорную и пьезометрическую линии для трубопровода.

Решение. Напор Z, под которым вода движется из резервуара A в резервуар B (см. рис. 5-25),

$$Z = \left(\frac{p_1}{\gamma} + H_A\right) - H_B = (12{,}0 + 1{,}0) - 5{,}0 = 8{,}0 \text{ м}.$$

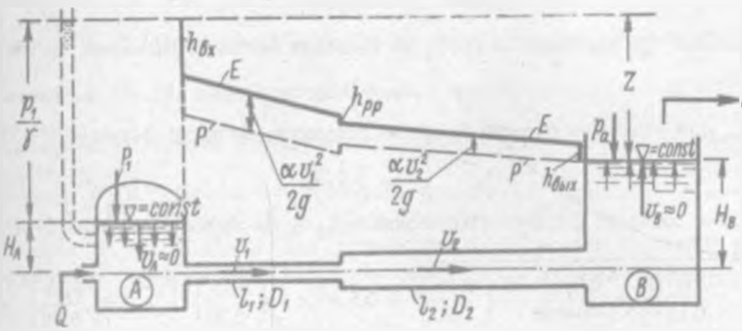


Рис. 5-25. К задаче № 3

Поскольку в нашем случае имеет место истечение под уровень, для расчета пользуемся формулой (5-36'), которую перепишем в виде:

$$Q = \mu_т \omega_1 \sqrt{2gZ}, \tag{Е}$$

где

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}}. \tag{Ж}$$

В нашем случае полный коэффициент сопротивления

$$\zeta_f = \sum \zeta_l + \sum \zeta_j = \zeta_{l_1} + \zeta_{l_2} + \zeta_{вх} + \zeta_{р\,р} + \zeta'_{вых}, \tag{З}$$

причем все коэффициенты должны быть приведены к одной и той же скорости, согласно зависимостям (5-20) – (5-23).

Поскольку в формулу для расхода Q мы ввели вместо ω площадь сечения первой трубы ω_1, то указанные коэффициенты сопротивления ζ_l и ζ_j должны приводиться к скорости v_1.

Имея в виду сказанное, для коэффициентов ζ_{l_1}, ζ_{l_2}, $\zeta_{р\,р}$ и $\zeta'_{вых}$ принимаем следующие зависимости:

$$\zeta_{l_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1};$$

$$\zeta_{l_2} = \lambda_2 \frac{l_2}{D_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \lambda_2 \frac{l_2}{D_2}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4;$$

$$\zeta_{р.\,р} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2;$$

$$\zeta'_{вых} = \zeta_{вых}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \zeta_{вых}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4.$$

---

[1] Рисунок 5-25 выполнен не в масштабе.

Полный коэффициент сопротивления

$$\zeta_f = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 + \zeta_{вх} + \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 + \zeta_{вых}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4. \qquad (И)$$

Найдем величины λ и ζ, входящие в уравнение (И):

а) величина λ_1 для чугунной трубы, бывшей в эксплуатации, диаметром $D = 150$ мм, согласно табл. 5-3 (с. 212),

$$\lambda_1 = 0{,}0356;$$

б) величина λ_2 для такой же трубы, но диаметром $D = 200$ мм,

$$\lambda_2 = 0{,}0323;$$

в) величина $\zeta_{вх}$ для входа в трубу из бассейна больших размеров, согласно (4-163),

$$\zeta_{вх} = 0{,}5;$$

г) $\zeta_{вых}$ для выхода в бассейн больших размеров, согласно формуле (4-135),

$$\zeta_{вых} = 1{,}0.$$

Находим, согласно формуле (И), величину ζ_f и, согласно формулам (Е) и (Ж), величины $\mu_т$ и Q:

$$\zeta_f = \frac{0{,}0356 \cdot 20}{0{,}15} + \frac{0{,}0323 \cdot 30}{0{,}20}\left(\frac{0{,}15}{0{,}20}\right)^4 + 0{,}5 + \left[1 - \left(\frac{0{,}15}{0{,}20}\right)^2\right]^2 + 1{,}0\left(\frac{0{,}15}{0{,}20}\right)^4 = 5{,}91;$$

$$\mu_т = \frac{1}{\sqrt{5{,}91}} = 0{,}41; \quad Q = 0{,}41\,\frac{3{,}14 \cdot (0{,}15)^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}80 \cdot 8} = 0{,}091 \text{ м}^3/\text{с} = 91 \text{ л/с}.$$

Для построения напорной линии $E-E$ вычисляем отдельные потери напора:

$$h_{l_1} = \zeta_{l_1}\frac{v_1^2}{2g} = 4{,}75\,\frac{5{,}15^2}{2 \cdot 9{,}80} = 4{,}75 \cdot 1{,}35 = 6{,}43 \text{ м};$$

$$h_{l_2} = 0{,}153 \cdot 1{,}35 = 0{,}207 \text{ м}; \qquad h_{р.р} = 0{,}194 \cdot 1{,}35 = 0{,}262 \text{ м};$$

$$h_{вх} = 0{,}5 \cdot 1{,}35 = 0{,}675 \text{ м}; \qquad h_{вых} = 0{,}315 \cdot 1{,}35 = 0{,}426 \approx 0{,}43 \text{ м}.$$

По этим данным строим линию $E-E$, показанную на рис. 5-25.

Пьезометрическую линию $P-P$ проводим ниже напорной на величину $\frac{v_1^2}{2g} = 1{,}35$ м для первой трубы и на величину $\frac{v_2^2}{2g} = 0{,}43$ м для второй трубы (считаем $\alpha = 1{,}0$).

2°. Задачи на расчет длинных трубопроводов.

№ 4. На рис. 5-11 представлен длинный трубопровод, состоящий из труб разного диаметра. Трубопровод соединяет два резервуара A и B.

Дано (рис. 5-11): $Z = 9{,}0$ м; $l_1 = 1200$ м; $l_2 = 1500$ м; $l_3 = 1000$ м; $D_1 = 200$ мм; $D_2 = 250$ мм; $D_3 = 200$ мм.

Требуется найти расход воды Q.

Ответ: $Q = 20$ л/с.

№ 5. Вода из бака вытекает через длинную трубу постоянного диаметра в атмосферу. В конце трубы имеется сопло (см. рис. 5-12).

Дано: $Q = 40$ л/с; $l = 900$ м; $H = 22$ м; площадь поперечного сечения сопла $\omega_0 = 0{,}003$ м²; коэффициент расхода сопла $\mu_{сп} = 0{,}92$. Требуется найти диаметр трубы D.

Решение. Для расчета пользуемся зависимостью (5-77):

$$H = \frac{Q^2}{K^2}l + \frac{Q^2}{\omega_0^2 2g\mu_{сп}^2}.$$

Из этой зависимости находим модуль расхода:

$$K = \sqrt{\frac{Q^2 l}{H - \frac{Q^2}{\omega_0^2 2g\mu_{сп}^2}}} = \sqrt{\frac{0{,}04^2 \cdot 900}{22 - \frac{0{,}04^2}{0{,}003^2 \cdot 2 \cdot 9{,}80 \cdot 0{,}92^2}}} = 0{,}357\ м^3/с = 357\ л/с.$$

Зная K, по табл. 5-3 (см. стр. 212) находим диаметр трубопровода $D = 200$ мм. Как видно, в качестве такого диаметра мы приняли сортаментный диаметр, дающий ближайшую к установленной выше величину K.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

5-1. **Абелев А. С.** Сельскохозяйственное водоснабжение и основы гидравлики. – Л.: Сельхозгиз, 1959.

5-2. **Абрамов Н. Н., Поспелова М. М.** Расчет водопроводных сетей. – М.: Госстройиздат, 1962.

5-3. **Андрияшев М. М.** Гидравлический расчет водопроводных сетей. – М.: Стройиздат, 1964.

5-4. **Мошнин Л. Ф.** Методы технико-экономического расчета водопроводных сетей. – М.: Госстройиздат, 1950.

5-5. **Симаков Г. В.** Сифонные водосбросы (пособие к курсовому и дипломному проектированию). – Л.: из-дво ЛПИ им. М. И. Калинина, 1974.

5-6. **Шевелев Ф. А.** Таблицы для гидравлического расчета стальных, чугунных, асбестоцементных и пластмассовых водопроводных труб. – М.: Стройиздат, 1970.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

РАВНОМЕРНОЕ БЕЗНАПОРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В КАНАЛАХ

§ 6-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ограничимся рассмотрением только турбулентного движения воды, относящегося к квадратичной области сопротивления (в доквадратичной области обычные каналы, встречающиеся в гидротехнической практике, могут работать относительно редко).

На рис. 3-29 (см. § 3-21) была представлена схема рассматриваемого движения, из которой видно, что уклон дна канала

$$i = \sin\theta, \tag{6-1'}$$

поскольку величина l измеряется вдоль наклонной линии дна канала (угол θ см. на рисунке). Такое движение воды получается в искусственных цилиндрических каналах.

В том случае, когда канал имеет, в частности, земляное русло (что особенно часто встречается в практике) скорости v в канале назначаются сравнительно малыми (чтобы не получить размыва грунта); при этом и уклоны дна земляных каналов получаются также небольшими. В связи с этим для земляных (и некоторых других) каналов можно считать, что

$$i = \sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta. \tag{6-1''}$$

Как видно, здесь мы можем поступать следующим образом: а) расстояние l – измерять по горизонтали, б) живые же сечения потока считать вертикальными, измеряя глубины h – по вертикали (см. рис. 6-1). Очевидно, в этом случае рис. 6-1 (на котором дно канала показано с большим уклоном) где угол ψ (см. чертеж) задают не по соображениям гидравлического расчета, а учитывая устойчивость грунта откоса (если откосы канала образуются нескальным грунтом). Ширина потока поверху:

$$B = b + 2mh. \qquad (6\text{-}13)$$

Величины живого сечения ω и смоченного периметра χ удобно вычислять по следующим геометрическим зависимостям:

$$\omega = (b + mh)\,h; \qquad (6\text{-}14)$$

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}. \qquad (6\text{-}15)$$

Зная ω и χ, определяем величину R

$$R = \omega/\chi. \qquad (6\text{-}16)$$

Иногда при расчете каналов пользуются понятием относительной ширины канала по дну:

$$\beta = b/h. \qquad (6\text{-}17)$$

Величины ω и χ через β выражаются следующим образом:

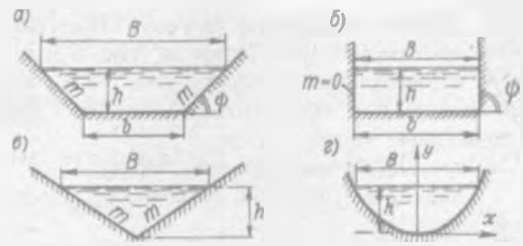


Рис. 6-2. Примеры поперечного сечения каналов

$$\omega = h^2(\beta + m); \qquad (6\text{-}18)$$

$$\chi = h(\beta + 2\sqrt{1 + m^2}). \qquad (6\text{-}19)$$

2°. Прямоугольное поперечное сечение (рис. 6-2, *б*). Здесь

$$\left.\begin{aligned} B = b;\quad m = \operatorname{ctg} 90^\circ = 0;\\ \omega = bh;\quad \chi = b + 2h; \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}20)$$

в случае весьма широкого прямоугольного русла

$$\chi \approx b. \qquad (6\text{-}21)$$

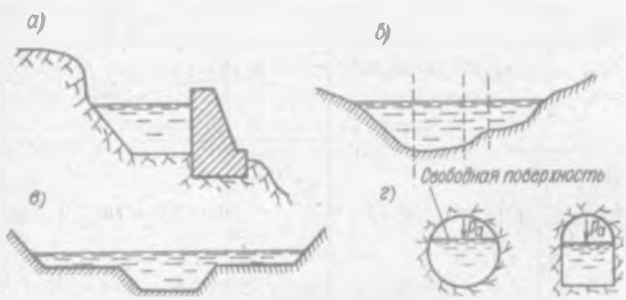


Рис. 6-3. Примеры поперечного сечения каналов

3°. Треугольное поперечное сечение (рис. 6-2, *в*). Здесь

$$\left.\begin{aligned} b = 0;\quad B = 2mh;\\ \omega = mh^2;\quad \chi = 2h\sqrt{1 + m^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}22)$$

4°. Параболическое поперечное сечение (рис. 6-2, *г*). Уравнение параболы, образующей смоченный периметр, имеет вид:

$$x^2 = 2py, \qquad (6\text{-}23)$$

где p – параметр параболы; оси x и y указаны на рис. 6-2, *г*. Для такого русла ширина потока поверху B может быть найдена (для заданной глубины h) из уравнения (6-23);

$$\omega = \frac{2}{3} Bh; \tag{6-24}$$

$$\left.\begin{aligned} &\chi \approx B \ \ldots\ldots\ldots\ldots && \text{при } (h:B) \leqslant 0{,}15; \\ &\chi \approx B\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{B}\right)^2\right] \ldots\ldots && \text{при } (h:B) \leqslant 0{,}33; \\ &\chi \approx 1{,}78h + 0{,}61B \ \ldots\ldots && \text{при } 0{,}33 < (h:B) < 2{,}00; \\ &\chi \approx 2h \ \ldots\ldots\ldots\ldots && \text{при } 2{,}00 \leqslant (h:B). \end{aligned}\right\} \tag{6-25}$$

5°. **Прочие поперечные сечения.** Отметим следующие профили:

а) несимметричный профиль (рис. 6-3, *а*);

б) неправильный профиль (рис. 6-3, *б*); в этом случае, как и в предыдущем, величины ω и χ приходится вычислять, разбивая поперечное сечение канала на отдельные части;

в) составной профиль (рис. 6-3, *в*);

г) замкнутые профили (рис. 6-3, *г*); здесь имеем так называемый з а к р ы т ы й канал.

§ 6-3. ГИДРАВЛИЧЕСКИ НАИВЫГОДНЕЙШИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ПРОФИЛЬ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОГО КАНАЛА

Предположим, что нам заданы: 1) форма поперечного сечения канала – трапецеидальная; 2) коэффициент откоса канала $m = m_0$; 3) уклон дна канала $i = i_0$; 4) коэффициент шероховатости $n = n_0$; 5) расход $Q = Q_0$.

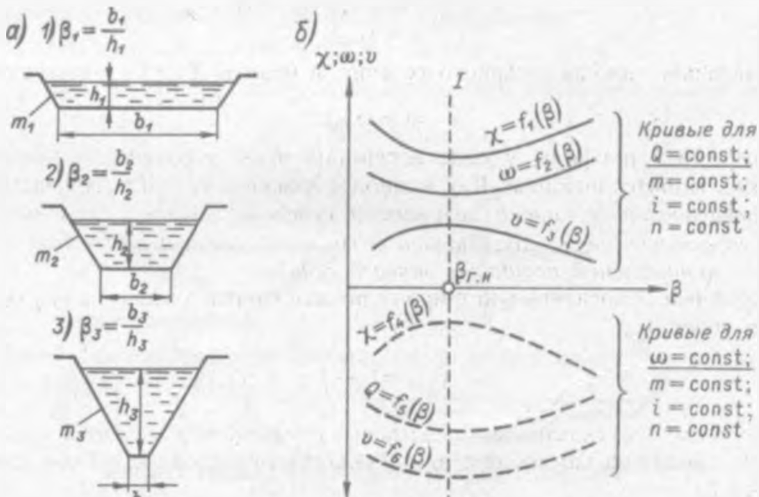


Рис. 6-4. Изменение элементов живого сечения (χ, ω, v; Q) с изменением относительной ширины β трапецеидального канала

Положим, что, исходя из этих данных, требуется запроектировать поперечный профиль канала (т. е. найти его размеры).

Такая задача имеет много решений. Можно наметить целый ряд различных поперечных профилей канала, удовлетворяющих указанным условиям (см.

рис. 6-4, *а*); для этого чертежа имеем

$$\left.\begin{aligned} m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_0 = \text{const};\\ i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_0 = \text{const};\\ n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_0 = \text{const};\\ Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q_0 = \text{const}, \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}26)$$

где индексами 1, 2 ... обозначены величины, относящиеся соответственно к 1, 2, 3-му, ... вариантам канала. На рисунке для примера показаны только три варианта; однако, рассматривая этот чертеж, надо себе представить множество таких вариантов, из которых первый характеризуется весьма малой глубиной, а последний – весьма малой шириной. Необходимая пропускная способность для первого варианта обеспечивается приданием каналу весьма большой ширины, а для последнего варианта – приданием каналу весьма большой глубины.

Для рассматриваемых вариантов будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \ldots;\\ \chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 \neq \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}27)$$

Легко видеть, что первый и последний варианты будут характеризоваться относительно большой поверхностью трения, определяемой размером χ, равным b (для первого варианта) и $2h$ (для последнего варианта); поэтому скорость v для этих крайних вариантов должна быть относительно малой. Из сказанного вытекает, что среди ряда рассматриваемых вариантов имеется такой промежуточный, для которого средняя скорость v оказывается максимальной

$$v = v_{\text{макс}}, \quad (6\text{-}28)$$

а следовательно, площадь живого сечения ω (равная $Q_0 : v$) – минимальной:

$$\omega = \omega_{\text{мин}}. \quad (6\text{-}29)$$

Поперечный профиль, удовлетворяющий этим условиям, и является гидравлически наивыгоднейшим. Как видно, *гидравлически наивыгоднейшим профилем трапецеидального канала называется профиль, который (при заданных m, i, n, Q) характеризуется максимально возможной средней скоростью v, а следовательно, минимальной площадью живого сечения.*

Обозначим относительную ширину по дну гидравлически наивыгоднейшего профиля через $\beta_{\text{г.н}}$:

$$\beta_{\text{г.н}} = \left(\frac{b}{h}\right)_{\text{г.н}}. \quad (6\text{-}30)$$

При этом все сказанное представим кривыми[1] $\chi = f_1$ (β); $\omega = f_2$ (β) и $v = f_3$ (β), показанными на рис. 6-4, *б* сплошными линиями (расположенными выше оси β).

Дополнительно ниже оси β на данном графике изобразим штриховыми линиями кривые $\chi = f_4$ (β); $Q = f_5$ (β) и $v = f_6$ (β), построенные в предположении, что для проектирования вариантов, показанных на рис. 6-4, *а*, нам задано не $Q = \text{const}$, а $\omega = \text{const}$; расход Q с изменением β (при заданных ω, m и i) – меняется. Из рассмотрения штриховых кривых видно, что гидравлически наивыгоднейшим профилем трапеце-

---

[1] Указанные кривые для данного конкретного случая могут быть построены в результате решения задачи № 5 (см. § 6-4).

идального канала может быть назван также профиль, который (при заданных m, i, n, ω) характеризуется максимально возможной пропускной способностью.

Вертикаль $I-II$ на рис. 6-4,*б* отвечает максимумам и минимумам соответствующих функций, а следовательно, и величине $\beta_{г.н}$. Рассматривая сплошные кривые графика, расположенные выше оси β, для определения величины $\beta_{г.н}$ можем написать следующую систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\beta} &= 0; \\ \frac{d\chi}{d\beta} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{6-31}$$

как видно, для отыскания $\beta_{г.н}$ мы здесь приравняли нулю соответствующие производные (поскольку $\beta_{г.н}$ отвечает минимуму функций ω и χ).

Подставляя в (6-31) выражения (6-18) и (6-19) и выполняя дифференцирование, получаем:

$$\frac{d\omega}{d\beta} = 2h\beta_{г.н}\left(\frac{dh}{d\beta}\right)_{г.н} + h^2 + 2mh\left(\frac{dh}{d\beta}\right)_{г.н} = 0; \tag{6-32}$$

$$\frac{d\chi}{d\beta} = \beta_{г.н}\left(\frac{dh}{d\beta}\right)_{г.н} + h + 2\sqrt{1+m^2}\left(\frac{dh}{d\beta}\right)_{г.н} = 0. \tag{6-33}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$\beta_{г.н} = \left(\frac{b}{h}\right)_{г.н} = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right). \tag{6-34}$$

Выражение (6-34) можно было бы найти и из рассмотрения кривой $\chi = f_4(\beta)$, показанной на графике штриховой линией ниже оси β. При этом пришлось бы только решать совместно уравнение (6-33) и уравнение $\omega = h^2(\beta + m) = \text{const}$.

Выше мы искали гидравлически наивыгоднейшие размеры заданной формы (трапецеидальной). Можно, разумеется, поставить здесь и иную задачу: среди всех возможных форм поперечного сечения русла искать г и д р а в л и ч е с к и н а и в ы г о д н е й ш у ю ф о р м у. Легко показать, что гидравлически наивыгоднейшей формой живого сечения является п о л у к р у г (поскольку в этом случае мы имеем минимальную величину χ, а следовательно, минимальную поверхность трения).

Рис. 6-5. Несовпадение минимальной площади живого сечения потока с минимальной площадью поперечного сечения земляной выемки

Стремясь получить минимальную стоимость каналов, откапываемых в грунте, их иногда проектируют, соблюдая условие $\beta = \beta_{г.н}$, так как при этом условии площадь живого сечения оказывается минимальной. Надо, однако, подчеркнуть, что в практике достаточно часто и отступают от указанного условия, причем проектируют каналы, принимая иные значения β ($\beta \neq \beta_{г.н}$). Такое положение объясняется тем, что гидравлически наивыгоднейшие профили далеко не всегда оказываются экономически наивыгоднейшими. Действительно, экономически наивыгоднейший профиль канала должен характеризоваться минимумом объема земляных работ, а следовательно, для канала, выполняемого в выемке, минимальным значением площади выемки $\Omega = \omega + \omega'$, а не площади живого сечения ω (рис. 6-5).

Дополнительно необходимо учитывать следующее важное обстоятельство.

Гидравлически наивыгоднейшие каналы получаются относительно глубокими; величина β для них оказывается сравнительно малой. Такие глубокие каналы часто затруднительно откапывать в грунте и эксплуатировать. Вместе с тем можно показать, что кривая $\omega = f_2(\beta)$, схематично представленная на рис. 6-4,*б*, является весьма пологой (ее минимум выражен весьма слабо); достаточно принять для проектируемого канала площадь живого сечения равной не $\omega_{мин}$, а, например, $1{,}03\omega_{мин}$ (т. е. увеличить $\omega_{мин}$ всего на 3%), и мы при этом величину β получим относительно большой.

В связи со сказанным, можно ввести понятие практически наивыгоднейшей величины $\beta_{г.н}$ (обозначим ее через $\beta^0_{г.н}$), при которой величина ω будет отличаться от $\omega_{мин}$ менее, чем на 3–4%, причем каналы будут получаться сравнительно малой глубины. Величина $\beta^0_{г.н}$ может иметь любое значение, лежащее в пределах:

$$\beta_{г.н} \leqslant \beta^0_{г.н} \leqslant (\beta_{г.н})_{пред},$$

где $\beta^0_{г.н}$ – такая величина β, при которой ω отличается от $\omega_{мин}$ на 3–4%; значение $(\beta_{г.н})_{пред}$ можно найти по формуле (предложенной нами):[1]

$$(\beta_{г.н})_{пред} = 2{,}5 + \frac{m}{2}. \qquad (6\text{-}34')$$

§ 6-4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСЧЕТЕ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ КАНАЛОВ НА РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ

Трапецеидальный канал характеризуется следующими шестью величинами b, h, m (эти три величины целиком определяют размеры живого сечения канала), n, i, Q (или $v = Q/\omega$). Некоторые из приведенных величин бывают заданы теми или другими условиями проектирования. Задача гидравлического расчета обычно состоит в том, чтобы, зная пять из названных величин, найти шестую. Ниже излагаются установившиеся в практике шаблоны решения такого рода вопросов, связанных с расчетом и проектированием каналов (слово «задача» здесь применяется в несколько условном смысле).

1°. Задачи, в которых живое сечение канала задано, т. е. в число заданных величин входят *b*, *h* и *m*. Эти задачи решаются непосредственно, без подбора искомой величины.

Задача 1. Даны все размеры живого сечения (т. е. величины b, h, m), уклон дна i и коэффициент шероховатости n. Требуется найти шестую величину – расход Q воды в канале.

Ход решения задачи:

1) Зная размеры живого сечения, находим ω и χ [по зависимостям (6-14) и (6-15)];

2) находим $R = \omega/\chi$;

3) зная R и n, по данным § 4-13 находим C;

4) зная C и R, определяем v:

$$v = C\sqrt{Ri}\,;$$

5) зная v и ω, находим Q:

$$Q = \omega v.$$

---

[1] Формула (6-34′) дана для условий, когда C вычисляется по Маннингу. При вычислении C по Павловскому формула (6-34′) приводит нас к большим отклонениям ω от $\omega_{мин}$ (например, до 10%).

Задача об установлении области практически наивыгоднейших величин β была решена ранее (в несколько другом виде) А. А. Угинчусом [6-4] и А. М. Латышенковым (см. Тр. ин-та ВОДГЕО, вып. 21, Инженерная гидравлика, 1968).

З а д а ч а 2. Даны все размеры живого сечения (т. е. величины b, h, m), n и Q. Требуется найти шестую величину – неизвестную i, т. е. уклон дна канала, при котором канал заданного поперечного сечения и шероховатости будет пропускать заданный расход Q.

Ход решения задачи:

1) так же, как и выше, находим величины ω, χ, R, C;

2) зная ω, находим v:

$$v = Q/\omega;$$

3) по формуле (6-6)

$$i = \frac{v^2}{C^2R}$$

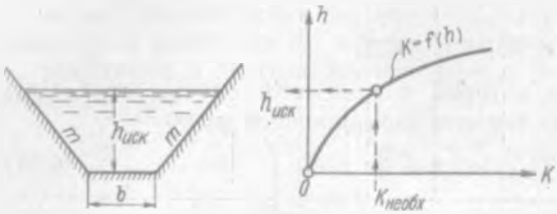


Рис. 6-6. К задаче 3

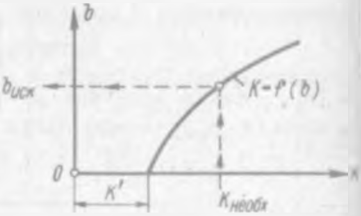


Рис. 6-7. К задаче 4

вычисляем i.

2°. Задачи, в которых живое сечение канала не задано, т. е. в число искомых величин входит b или h.[1] Задачи этой группы всегда решаются путем подбора искомой величины.

З а д а ч а 3. Даны m, b, n, i, Q. Требуется найти глубину наполнения канала h.

Ход решения задачи:

1) находим модуль расхода, которым должен характеризоваться рассчитываемый канал. Этот модуль будем называть н е о б х о д и м ы м и обозначать через $K_{необх}$; очевидно,

$$K_{необх} = \frac{Q}{\sqrt{i}};$$

2) составляем таблицу по форме 1, в которой задаемся рядом значений h, и для каждого h вычисляем соответствующий модуль расхода K;

3) по данным 1-й и 10-й строк таблицы строим на рис. 6-6 график $K = f(h)$;

4) по этому графику, зная $K_{необх}$, находим искомое h, как показано на чертеже (см. $h_{иск}$).

Заметим, что кривая $K = f(h)$ имеет выпуклость, обращенную в сторону оси h, и проходит через начало координат (так как при $h = 0$ значение $K = 0$).

З а д а ч а 4. Даны m, h, n, i, Q. Требуется подобрать необходимую ширину канала по дну b.

Ход решения задачи:

1) находим н е о б х о д и м ы й модуль расхода:

$$K_{необх} = \frac{Q}{\sqrt{i}};$$

[1] Коэффициент откоса m, как правило, бывает задан для гидравлического расчета.

Форма 1

№ строки	Величина или расчетная формула	Единица измерения	Задаваемые и находимые численные значения				Примечания
1	h	м	h_1	h_2	h_3	...	
2	mh	м	...	...	...	...	$m = \dots$
3	$b + mh$	м	...	...	...	...	$b = \dots$
4	$\omega = (b + mh)h$	$м^2$	...	...	...	...	
5	$h(2\sqrt{1 + m^2})$	м	...	...	...	...	$2\sqrt{1 + m^2} = \dots$
6	$\chi = b + h(2\sqrt{1 + m^2})$	м	...	...	...	...	
7	$R = \omega : \chi$	м	...	...	...	...	
8	C	$\sqrt{\frac{м}{с^2}}$	...	...	...	...	по формуле ... при $n = \dots$
9	$\sqrt{R}$	$\sqrt{м}$	...	...	...	...	
10	$K = \omega C\sqrt{R}$	$м^3/с$	...	...	...	...	

П р и м е ч а н и я. 1) При построении такого рода п л а в н ы х кривых желательно (с целью экономии времени) вычислять возможно меньшее число точек; вместе с тем намечать менее четырех точек нельзя (четвертая точка должна рассматриваться как контрольная); в данном частном случае четвертой точкой может являться начало координат. Подчеркнем, что всякого рода вычисления, подобные показанным выше, [illegible]. Форма таких таблиц должна быть предварительно разработана с таким расчетом, чтобы в ней помещались результаты в с е х а р и ф м е т и ч е с к и х в ы ч и с л е н и й.

2) Необходимо иметь в виду, что расчеты, осуществляемые методом подбора и выполняемые, например, в табличной форме, как то показано выше, не включаются в пояснительные записки к проектам сооружений. Такого рода расчеты остаются в черновиках. В пояснительной же записке [illegible] лишь окончательно найденное значение и дается п о в е р о ч н ы й р а с ч е т.

2	$b + mh$	м	...	...	...	...	
3	$\omega = (b + mh)h$	$м^2$	...	...	...	...	$m = \dots$; $mh =$ $b = \dots$
4	$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	м	...	...	...	...	$2h\sqrt{1 + m^2} = .$
5	$R = \dfrac{\omega}{\chi}$	м	...	...	...	...	
6	C	$\sqrt{\frac{м}{с^2}}$	...	...	...	...	По формуле ... при $n = \dots$
7	$\sqrt{R}$	м	...	...	...	...	
8	$K = \omega C\sqrt{R}$	$м^3/с$	...	...	...	...	

2) составляем таблицу по форме 2, в которой задаемся рядом значений b и для каждого b вычисляем соответствующий модуль расхода K;

3) по данным 1-й и 8-й строк таблицы строим график (рис. 6-7) $K = f(b)$;

4) по этому графику, зная $K_{необх}$, находим искомое b.

Заметим, что кривая $K = f(b)$ не проходит через начало координат. Моду... расхода K', указанный на графике, отвечает треугольному руслу (когда $b = 0$...

З а д а ч а 5. Даны m, n, i, Q, β. Требуется найти b и h.

Ход решения задачи:

1) находим н е о б х о д и м ы й модуль расхода:

$$K_{\text{необх}} = \frac{Q}{\sqrt{i}};$$

2) составляем таблицу по форме 1, дополняя ее одной строкой: $b = \beta h$... В этой таблице задаемся рядом значений h (в строке 1) и затем в дополни... тельной строке 2 вычисляем соответствующие значения b; после этого вычисляе... соответствующие значения K;

3) строим график (рис. 6-6)

$$K = f(h);$$

4) по этому графику находим искомую глубину $h_{\text{иск}}$;

5) зная h, определяем b ($b = \beta h$).

3°. Задачи, в которых среди заданных величин – средняя скорость v. Рас... смотрим следующие задачи.

З а д а ч а 6. Даны m, b, h (т. е. задано живое сечение), n, v. Требуется найти Q и i.

Ход решения задачи:

1) вычисляем площадь живого сечения ω:

$$\omega = (b + mh)\,h;$$

2) находим расход Q:

$$Q = \omega v;$$

3) определяем уклон дна i:

$$i = \frac{v^2}{C^2 R},$$

где C и R легко могут быть найдены предварительно (см., например, задачу 1).

З а д а ч а 7. Даны: а) m, n, Q, v; б) одна из величин: h или b. Требуется найти: а) уклон i; б) величину b или h.

Ход решения задачи:

1) вычисляем площадь живого сечения ω:

$$\omega = Q/v;$$

2) имеем известное геометрическое уравнение

$$\omega = (b + mh)\,h;$$

это уравнение содержит одно неизвестное: b или h. Решая данное уравнение, находим недостающий размер живого сечения;

3) уклон i определяем по формуле:

$$i = \frac{v^2}{C^2 R}.$$

З а д а ч а 8. Даны m, n, Q, i, v. Требуется найти b и h.

Ход решения задачи:

1) вычисляем величину ω и модуль скорости W:

$$\omega = \frac{Q}{v} = A \text{ (обозначение)};$$

$$W = \frac{v}{\sqrt{i}} = B \text{ (обозначение);}$$

2) выписываем систему двух уравнений с двумя неизвестными

(I) $$\omega = (b + mh)\, h = f_1(b, h);$$

(II) $$W = C\sqrt{R} = f_2(b, h).$$

Эта система двух уравнений может быть переписана в виде

(I') (II') $$\left.\begin{aligned} (b + mh)\, h &= A, \\ C\sqrt{R} &= B, \end{aligned}\right\}$$

где A и B – известные числа;

3) искомые величины находим, решая указанную систему уравнений с неизвестными b и h (путем подбора или графически).

§ 6-5. ОГРАНИЧЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ ПРИ РАСЧЕТЕ КАНАЛОВ. ПЕРЕПАДЫ

Рассмотрим вначале земляной канал, смоченная поверхность которого не покрыта каким-либо защитным слоем, предохраняющим грунт от размыва его движущейся водой.

В такой канал (или на тот или другой его участок) может поступать (со стороны) вода: а) или «чистая», т. е. практически не содержащая взвешенных частиц грунта, б) или содержащая взвешенные частицы грунта.[1]

Проектируя так называемый «статически устойчивый» земляной канал, т. е. канал, не подвергающийся в процессе его эксплуатации существенным деформациям (вызванными его размывом или заилением), необходимо требовать, чтобы средняя скорость v движения воды в канале удовлетворяла следующим условиям:[2]

1) в случае, когда в канал поступает «чистая» вода, скорость в проектируемом канале должна быть:

$$v \leqslant v_{\text{макс}}, \tag{6-35}$$

где $v_{\text{макс}}$ – так называемая **максимальная допускаемая скорость при равномерном движении** воды; эту скорость называют также **максимальной неразмывающей скоростью**; считают, что при $v > v_{\text{макс}}$ русло канала будет размываться водой;

2) в случае, когда в канал поступает (со стороны) вода со **взвешенными наносами**, скорость v должна удовлетворять соотношению:

$$v_{\text{мин}} < v < v_{\text{макс}}, \tag{6-36}$$

где $v_{\text{мин}}$ – так называемая **минимальная допускаемая скорость при равномерном движении** воды; эту скорость также называют **минимальной незаиляющей скоростью**; считают, что при $v < v_{\text{мин}}$ русло канала будет заиляться отлагающимися в нем наносами, которые несет поток.

Действительная средняя скорость v движения воды в канале зависит, например, от уклона дна канала; что касается $v_{\text{макс}}$, то эта скорость не

---

[1] Вопроса о возможном поступлении в канал так называемых «донных наносов» касаться не будем.

[2] См. **Е. Н. Кожевникова.** О допускаемых скоростях при гидравлическом расчете земляных каналов. Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 2. – М.: Высшая школа, 1978.

зависит от уклона дна канала, она должна зависеть от рода материала, образующего канал (в данном случае от качества грунта); как показывают опыты, эта скорость зависит также от глубины воды в канале.

При скорости $v > v_{макс}$ вертикальные пульсационные скорости u'_z получаются столь большими, что поверхностные частицы грунта (образующего русло канала), оторвавшись от дна, поддерживаются во взвешенном состоянии.

Для примера можно привести в табл. 6-1 приближенные значения $v_{макс}$; эти данные относятся как к грунтам, так и к некоторым защитным покрытиям, используемым для защиты каналов от размыва (подробные сведения о $v_{макс}$ даются в соответствующих нормах; см., например, [6-9]). Данные табл. 6-1 относятся к прямолинейным (в плане) каналам. Для извилистых (в плане) каналов некоторые авторы рекомендуют снижать $v_{макс}$ на $5 \div 20\%$ [6-6].

Таблица 6-1

Максимальные допустимые скорости при равномерном движении воды

Материал смоченной поверхности канала	$v_{макс}$, м/с	Материал смоченной поверхности канала	$v_{макс}$, м/с
Несвязные грунты:		Скальные породы:	
пыль, ил	$0{,}15 \div 0{,}20$	осадочные	$2{,}5 \div 4{,}5$
песок	$0{,}20 \div 0{,}60$	кристаллические	$20 \div 25$
гравий	$0{,}60 \div 1{,}20$	Крепления:	
Связные грунты:		одиночная мостовая	$3{,}0 \div 3{,}5$
супесь и суглинок	$0{,}7 \div 1{,}0$	двойная мостовая	$3{,}5 \div 4{,}5$
глина	$1{,}0 \div 1{,}8$	бетонная облицовка	$5{,}0 \div 10{,}0$

Что касается минимальной допускаемой (минимальной незаиляющей) скорости $v_{мин}$, то численное значение этой скорости может быть установлено для данного конкретного случая по одной из имеющихся эмпирических формул [см., например, формулу (20-12)]; подобные формулы основаны на использовании понятия о так называемой «транспортирующей способности» потока (см. гл. 20).

Необходимо учитывать, что в случае, когда поток воды, поступающий в канал, оказывается сильно насыщенным взвешенными наносами (хотя бы весьма мелкими), скорость $v_{мин}$ может оказаться больше скорости $v_{макс}$, т. е. $v_{мин} > v_{макс}$. При таком соотношении этих скоростей запроектировать статически устойчивый канал не представляется возможным; здесь мы будем получать статически неустойчивое русло (как правило, существенно деформирующееся во времени).[1]

Иногда (при обычно встречающемся условии, когда $v_{мин} < v_{макс}$), проектируя статически устойчивый канал, не удается выдержать соотношение $v > v_{мин}$. В таком случае приходится идти на периодическую очистку канала от отложившихся в нем наносов. Что касается условия $v \leqslant v_{макс}$, то для статически устойчивого канала, т. е. канала, проектируемого как недеформирующегося (во времени), это условие всегда должно быть выдержано.

В том случае, когда на первом этапе расчета получаем неприемлемое соотношение $v > v_{макс}$, приходится предусматривать те или другие мероприятия, позволяющие или увеличить скорость $v_{макс}$, или уменьшить скорость v и в результате добиться соотношения $v \leqslant v_{макс}$.

1°. Мероприятия по увеличению скорости $v_{макс}$. Здесь приходится применять, например, покрытие откосов и дна канала каким-либо креплением в виде

[1] *Проектирование и расчет таких каналов имеют свою теорию, основанную на использовании «транспортирующей способности потока».*

каменной мостовой, бетонной облицовки и т. п. Предусмотрев такое крепление для канала, выполненного в грунте, мы, естественно, увеличим $v_{\text{макс}}$.

2°. Мероприятия по уменьшению скорости *v*. Скорость $v = C\sqrt{Ri}$. Как видно, чтобы уменьшить v, необходимо уменьшить или R, или C, или i. В соответствии с этим здесь приходится различать три разных приема:

1) изменение формы поперечного сечения канала, чтобы несколько уменьшить гидравлический радиус; однако за счет изменения R не удается ощутимо снизить скорость v;

2) создание так называемой искусственной шероховатости, в результате чего повышается численное значение коэффициента шероховатости n и снижается численное значение коэффициента Шези C; этот прием в случае достаточно длинных каналов бывает неприемлем с экономической точки зрения;

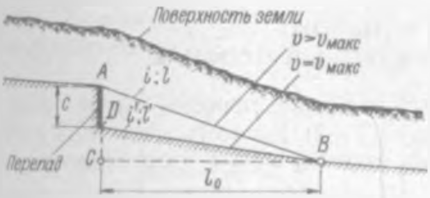


Рис. 6-8. Устройство перепада для снижения скорости v

Рис. 6-9. Схема ирригационного канала с перепадами

3) уменьшение уклона i дна канала; обычно приходится обращаться именно к такому приему; при этом по длине канала устраивают перепады.

Поясним устройство перепадов, руководствуясь рис. 6-8.[1]

Стремясь получить минимальный объем земляных работ, линию дна AB канала назначают примерно параллельной поверхности земли. Таким образом, уклон i дна канала на первом этапе расчета принимается равным уклону поверхности земли.

Если, приняв этот уклон и выполнив гидравлический расчет, получим $v > v_{\text{макс}}$, то в этом случае следует устроить в канале перепад AD и уменьшить уклон i до величины i'; уклон i', как правило, определяют, исходя из условия[2]

$$v = v_{\text{макс}};$$

легко видеть, что такое решение будет, с одной стороны, технически приемлемо, с другой же стороны, экономически наиболее выгодно (при $v < v_{\text{макс}}$ будем получать большую величину ω, меньшую величину i', а следовательно, будем иметь увеличение объема земляных работ).

Из чертежа видно, что высота перепада c будет

$$c = \overline{AC} - \overline{DC} = il - i'l',$$

где l и l' – длины канала.

Так как уклоны i каналов вообще малы, то можно считать, что

$$l \approx l' \approx l_0,$$

где l_0 – длина горизонтальной проекции канала. Учитывая это, можем написать, что

$$c = (i - i')\, l_0.$$

---

[1] Для примера ниже будем иметь в виду каналы, устраиваемые для орошения земель (ирригационные каналы).

[2] При этом приходится решать задачу № 7 (§ 6-4).

Если величина c получается большой (например, более 2 – 3 *м*), то по дл канала устраивают несколько перепадов, разбив общее падение на отдель части (рис. 6-9). Сами перепады устраивают в виде подпорных стен и т. п.

Надо заметить, что в районе перепадов получается неравномерное дви ние воды, которое будет изучаться нами далее.

В заключение приведем следующее замечание: указанные выше числ ные значения $v_{макс}$ относятся только к случаю р а в н о м е р н о г о движе воды, когда во всех живых сечениях имеется «нормальная» эпюра осреднен скоростей, свойственная равномерному движению. При нарушении этой эпю что имеет место, например, в районе упомянутых выше перепадов, численн значения $v_{макс}$ изменяются.

§ 6-6. РАСЧЕТ КАНАЛОВ, ИМЕЮЩИХ СОСТАВНОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ПРОФИЛЬ

Представим на рис. 6-10 так называемый составной профиль канала. Эт профиль является «неправильным» (см. начало § 4-2). Поэтому его нельзя ра считывать, следуя тому методу, который был изложен в § 6-4. Здесь приходит поступать следующим образом.

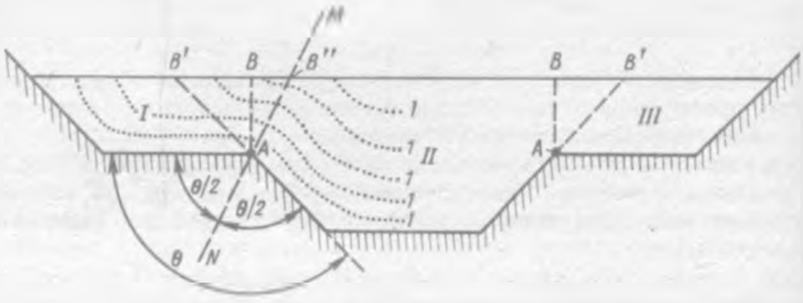


Рис. 6-10. Канал составного поперечного профиля
1 – изотахи

Проводим линии AB или линии AB', причем разбиваем все живое сечение на отдельные части *I*, *II* и *III*.

Далее каждую выделенную часть рассчитываем как самостоятельный канал (см. § 6-4), не включая при этом расчете участки AB (или AB') в длины соответствующих смоченных периметров.

Определив для отдельных частей канала (*I*, *II*, *III*) величины расхода (Q_{I}, Q_{II}, Q_{III}), полный расход воды, движущейся в канале, считаем равным:

$$Q = Q_{I} + Q_{II} + Q_{III}. \tag{6-37}$$

При указанном расчете, например, границу между «пойменным» участком *I* и «коренным» руслом *II* логичнее, вообще говоря, намечать не по линии AB (или AB'), а по линии AB'', назначенной вдоль направления $M - N$, о р т о г о н а л ь н о г о к получающимся здесь изотахам *1* (линиям равных скоростей), показанным на рис. 6-10 пунктиром. Это ясно из того, что для такого сечения AB'' продольные касательные напряжения τ, ортогональные к плоскости чертежа, равны нулю (как и для свободной поверхности потока).

В первом приближении линию $M - N$ можно намечать, например, так, чтобы она делила пополам угол θ (рис. 6-10).

§ 6-7. РАСЧЕТ КАНАЛОВ, ИМЕЮЩИХ ЗАМКНУТЫЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ПРОФИЛЬ

Примерами каналов, имеющих замкнутый профиль, могут являться: а) канализационные трубы, б) дренажные трубы, в) гидротехнические туннели. Эти водотоки работают как безнапорные (см. рис. 6-3, г). Поэтому с гидравлической точки зрения они ничем не отличаются от открытых каналов.

1°. **Канализационные трубы.** Канализационные трубы могут быть различного поперечного сечения. На рис. 6-11 для примера представлены:

круглое поперечное сечение (схема *а*);

овоидальное сечение – «нормальный тип 3/2» (схема *б*); это сечение применяется, когда в процессе эксплуатации имеются значительные колебания расхода Q;

лотковое сечение (схема *в*), применяемое при так называемой ливневой канализации.

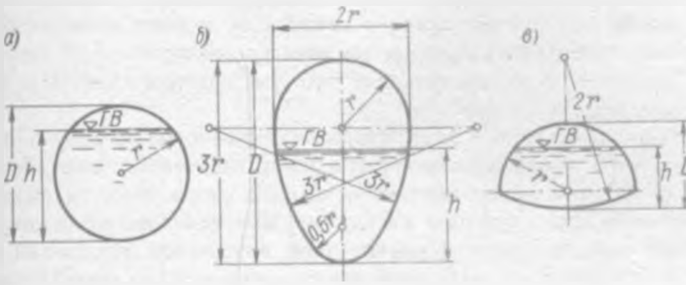


Рис. 6-11. Сечения канализационных труб

Обозначим через h глубину наполнения трубы и через D полную ее высоту. Отношение

$$\frac{h}{D} = a \text{ (обозначение)} \qquad (6\text{-}38)$$

называется степенью наполнения. В практике обычно принимают:

$$a = 0{,}50 \div 0{,}75. \qquad (6\text{-}39)$$

Замкнутые профили характеризуются следующей особенностью.

Представим на рис. 6-12 замкнутый профиль любого очертания. Предположим, что при $i = \text{const}$ глубина наполнения этого профиля изменяется в пределах от $h = 0$ до $h = D$. При этом средняя скорость v и расход Q будут также изменяться от нуля до некоторых значений $v_п$ и $Q_п$, отвечающих полному наполнению рассматриваемого канала.

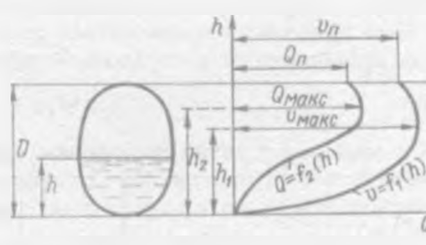


Рис. 6-12. Изменение Q и v с изменением h (при $i = \text{const}$) для замкнутого профиля

Существенным является то обстоятельство, что *функции* $v = f_1(h)$; $Q = f_2(h)$ *в случае замкнутых профилей имеют максимум*, чего не наблюдаем для обычных открытых русел.

Непосредственными подсчетами по формуле Шези было показано, что:

а) глубина h_1, отвечающая $v_{макс}$, лежит обычно в пределах:

$$h_1 \approx (0{,}80 \div 0{,}85)\, D; \qquad (6\text{-}40)$$

б) глубина же h_2, при которой мы получаем $Q_{макс}$, лежит обычно в пределах:

$$h_2 \approx (0{,}93 \div 0{,}95)\, D. \qquad (6\text{-}4$$

Как видно, некоторый расход Q, находящийся в пределах

$$Q_п < Q < Q_{макс},$$

имеет место в случае равномерного движения воды в трубе при двух различных глубинах: $h' < h_2$ и $h'' > h_2$. Таким образом, при расходе, лежащем в указанных пределах, возможно изменение условий протекания воды: глубина h' може «переключаться» в глубину h'' и наоборот.

Наличие максимума расхода $Q = \omega v$ в случае замкнутых профилей с физической точки зрения может быть объяснено следующим образом: представим себе наполнение трубы h только немногим меньше высоты трубы D; дадим далее величине h малое приращение δh; при таком приращении глубины h благодаря тому, что горизонт воды стоит почти у самого замка свода, получим ничтожно малое приращение живого сечения ω, однако смоченный периметр, определяющий поверхность трения, увеличится значительно. В результате увеличения χ скорость v уменьшится, и это уменьшение скорости будет более существенным, чем увеличение ω.

Следует, однако, иметь в виду, что все сказанное выше получается в результате формального анализа зависимости Шези, без учета того обстоятельства, что между свободной поверхностью и замком свода имеется воздушная прослойка (прослойка «газообразной жидкости»), которая тоже приходит в движение при движении воды в трубе. Наличие этой воздушной прослойки, обусловливающей возникновение на свободной поверхности потока соответствующих сил трения, в некоторой мере искажает описанную выше картину движения воды.

Обратимся к расчету канализационных труб.

Коэффициент шероховатости n для канализационных труб принимается равным

$$n = 0{,}012 \div 0{,}014$$

обычно вне зависимости от материала, из которого выполнены стенки труб, так как такие трубы с течением времени покрываются осадками, что в значительной мере сглаживает различие шероховатостей разных материалов.

В связи с тем, что величины ω и χ для канализационных труб определять по тем или иным геометрическим формулам затруднительно (эти формулы в данном случае получают слишком сложный вид), при выполнении практических расчетов приходится пользоваться различными расчетными таблицами и графиками, приводимыми в справочной литературе.

Таблица 6-2

Значения $K_н$ и $W_н$ для круглых труб при $n = 0{,}013$ по Гангилье-Куттеру

D, м	$K_н$, л/с	$W_н$, м/с	D, м	$K_н$, л/с	$W_н$, м/с	D, м	$K_н$, л/с	$W_н$, м/с
0,15	134,3	7,60	0,50	3718	19,09	0,90	18410	28,98
0,20	302,8	9,64	0,55	4838	20,38	1,00	24350	30,99
0,25	551,7	11,26	0,60	6132	21,70	1,10	31480	33,09
0,30	908,2	12,86	0,65	7913	22,97	1,20	39660	35,07
0,35	1393	14,48	0,70	9340	24,27	1,30	49090	37,04
0,40	2028	16,12	0,75	11270	25,52	1,40	60100	39,05
0,45	2825	17,76	0,80	13490	26,61	1,50	72470	41,02

Поясним здесь для примера только расчет кругового профиля.

Задачи, с которыми приходится сталкиваться при расчете канализационных труб, следующие:

1) даны тип поперечного профиля и его размеры, а также величины a и i; требуется найти расход Q;

2) даны тип профиля и его размеры, а также величины a и Q; требуется найти уклон дна i и т. п.

Решение таких задач выполняется следующим образом.

1. Обозначим через $K_п$ и $W_п$ модули расхода и скорости, отвечающие полному заполнению трубы, когда $h = D$ и $a = 1$. В приводимой табл. 6-2 даются величины $K_п$ и $W_п$ в зависимости от D, где D в данном случае является диаметром трубы:

$$K_п = f_1(D); \quad W_п = f_2(D). \tag{6-42}$$

2. Введем обозначения

$$\frac{K}{K_п} = M, \quad \frac{W}{W_п} = N, \tag{6-43}$$

где K и W – модули расхода и скорости, отвечающие действительной глубине h, имеющейся в трубе.

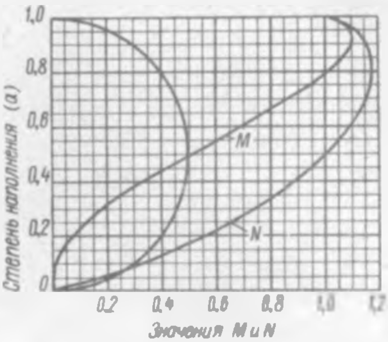


Рис. 6-13. К расчету круглых канализационных труб

Оказывается, что величины M и N практически не зависят от размеров рассматриваемой трубы; как показывают соответствующие подсчеты, величины M и N зависят только от формы поперечного профиля трубы и от степени наполнения трубы a. Имея это в виду, в литературе даются графики для разных форм поперечного профиля труб, в частности, для кругового профиля (рис. 6-13):

$$M = f_1(a); \; N = f_2(a). \tag{6-44}$$

3. Для расчета труб имеем известные формулы:

$$v = W\sqrt{i}; \quad Q = K\sqrt{i}. \tag{6-45}$$

Эти формулы можно представить в виде

$$v = W_п \frac{W}{W_п}\sqrt{i}; \quad Q = K_п \frac{K}{K_п}\sqrt{i} \tag{6-46}$$

или в виде

$$v = NW_п\sqrt{i}; \quad Q = MK_п\sqrt{i}. \tag{6-47}$$

Пользуясь формулами (6-47), а также указанными выше таблицами и графиками, и ведем расчет. Например, требуется найти для трубы кругового профиля расход Q, если известны D, a, i. Для решения этой задачи поступаем следующим образом:

а) для заданного D по приведенной таблице находим $K_п$ и $W_п$;

б) для заданного a по графику на рис. 6-13 находим M и N (более точно величины M и N можно определить по графику на рис. 6-16);

в) наконец, по формулам (6-47) вычисляем v, а также Q.

2°. **Дренажные трубы.** Дренажные трубы применяют, в частности, для осушения земель. На рис. 6-14, *а* представлена сеть дренажных труб в плане; на рис. 6-14, *б* дается разрез по линии AB. Как видно из чертежа на рис. 6-14, *б*, грунтовая вода поступает в дренажные трубы через отверстия, имеющиеся в их стенках, причем горизонт грунтовых вод снижается до положения, п занного пунктиром. В результате получаем осушение грунта на глубину y.

Грунтовая вода, попавшая в трубы, течет по ним и затем сбрасыва в водоприемник. Очевидно, уклон и размеры поперечного сечения труб долж быть достаточными для пропуска расхода воды, поступающей из грунта в тр (для гидравлического расчета труб этот расход следует считать заданны величина этого расхода устанавливается на основании расчета движения грун вых вод (см. гл. 17).

Расчет дренажных труб ведется так же, как и расчет канализационн труб, но при сплошном их заполнении (рис. 6-15), т. е. величина a для д нажных труб принимается

$$a = 1; \qquad (6-$$

однако дренажная труба все же считается безнапорной; давление в точке принимается равным атмосферному.

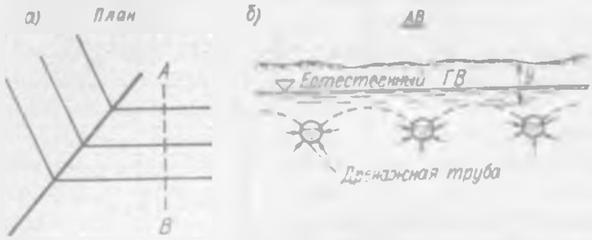


Рис. 6-14. Дренаж для осушения земли

Для случая круглы труб, которые часто прим няются для устройства др нажа, имеем следующие ра четные зависимости, нап санные с учетом (6-48):

$$h = D; \quad \omega = \frac{\pi D^2}{4}; \quad \chi = \pi$$

$$R = \frac{D}{4}; \qquad (6-49$$

$$v = C\sqrt{Ri} = C\sqrt{\frac{D}{4}}\sqrt{i} = 0{,}5C\sqrt{Di}; \qquad (6-50$$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}v = \frac{\pi D^2}{4}0{,}5C\sqrt{Di} = \frac{\pi}{8}CD^{5/2}\sqrt{i}. \qquad (6-51)$$

Коэффициент Шези C иногда определяют здесь по эмпирической формуле Куттера. Эта формула имеет вид:

$$C = \frac{100}{1 + \frac{k}{\sqrt{R}}} = \frac{100}{1 + \frac{2k}{\sqrt{D}}}, \qquad (6-52)$$

где k — особый коэффициент шероховатости, принимаемый для гончарных труб равным 0,27; R и D — в м; v — в м/с.

Допустимые скорости для гончарных труб обычно принимают равными:

а) минимальную скорость $v_{мин} = 0{,}15 \div 0{,}20$ м/с;

б) максимальную скорость $v_{макс} = 1{,}0$ м/с.

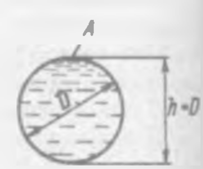


Рис. 6-15. Дренажная труба

3°. Безнапорные туннели. Безнапорные гидротехнические туннели могут иметь самое различное поперечное сечение (см. рис. 6-3, *г*). Расчет таких водотоков производится в соответствии со всем сказанным выше о каналах и безнапорных трубах. Дополнительные указания о гидравлическом расчете гидротехнических туннелей даются в курсах «Гидротехнические сооружения» (см., например [6-7]).

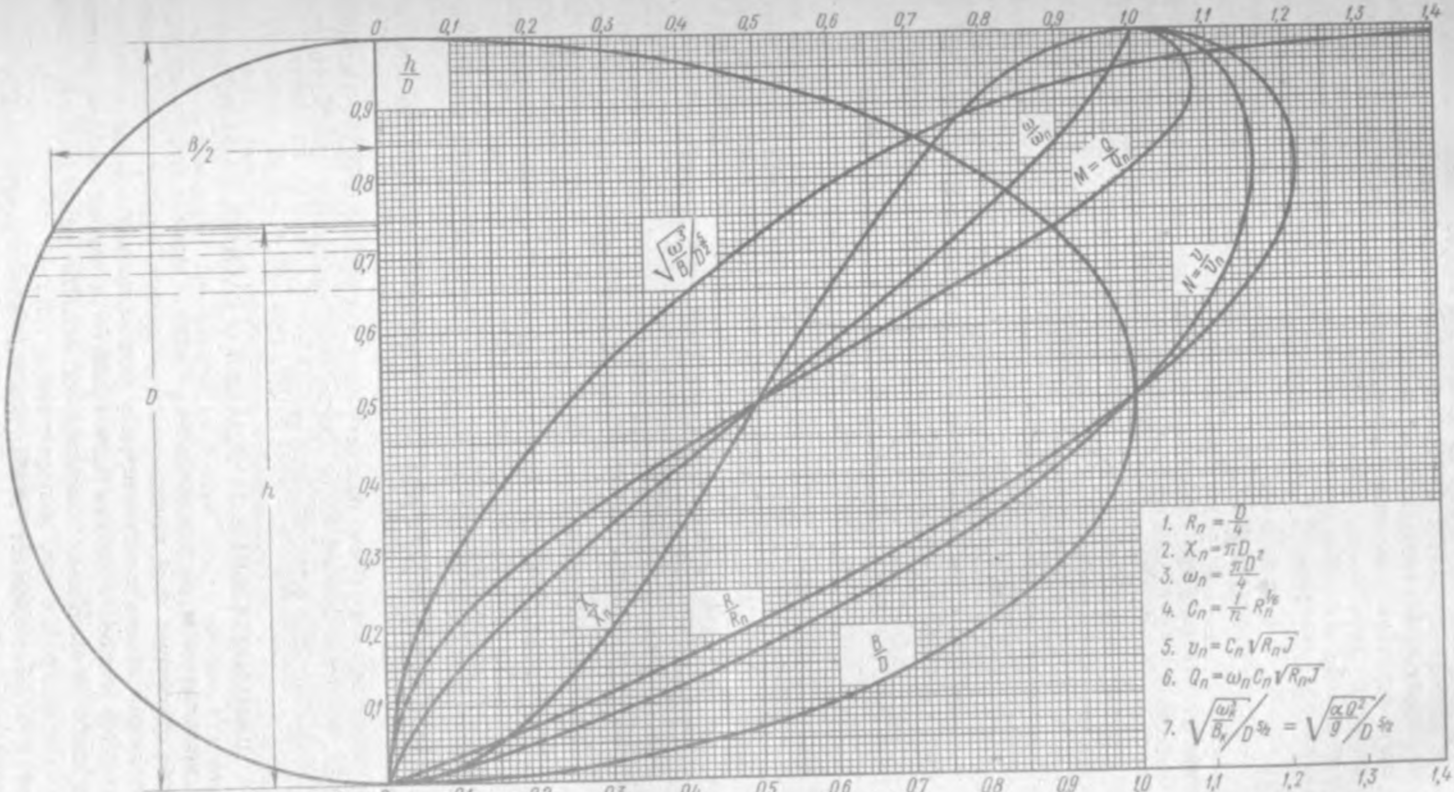


Рис. 6-16. График для определения гидравлических элементов безнапорного потока в цилиндрическом канале круглого поперечного сечения

На рис. 6-16 приводится график, служащий для гидравлического расчета безнапорных гидротехнических туннелей круглого поперечного сечения. На этом графике, построенном в безразмерных координатах, индексом «п» отмечены величины, относящиеся к случаю, когда h (глубина наполнения) равна D (диаметр туннеля), т. е. когда имеем полное наполнение туннеля.

По вертикальной оси графика отложено относительное наполнение туннеля h/D; по горизонтальной оси – величины M и N (см. выше п. 1°), а также величины:

$$\frac{B}{D}; \quad \frac{R}{R_п}; \quad \frac{\chi}{\chi_п}; \quad \frac{\omega}{\omega_п}; \quad \sqrt{\frac{\omega^3}{B}}:D^{5/2}.$$

В экспликации к графику приведены отдельные формулы, служащие для определения $R_п$, $\chi_п$, $\omega_п$, $C_п$, $v_п$, $Q_п$; кроме того, дается формула (см. п. 7 экспликации), исходя из которой можно найти для круглого поперечного сечения канала так называемую критическую глубину (об этом см. далее § 7-5).

Как видно, при помощи данного графика, зная $R_п$, $\chi_п$, $\omega_п$, $v_п$, $Q_п$, легко найти также величины R, χ, ω, B, v, Q, K, W для любого наполнения круглого туннеля.

Необходимо однако отметить, что расчет гидротехнических туннелей на равномерное движение (с использованием формул Шези при коэффициенте шероховатости n = const) является иногда несколько условным. Дело в том, что длина таких туннелей часто бывает соизмерима с длиной так называемого начального участка [см. формулу (4-66)], в пределах которого имеет место неравномерное движение воды.

§ 6-8. РАСЧЕТ ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЕЛ НА РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ

Естественные русла имеют неправильную форму. Поэтому движение воды в них всегда неравномерное. Однако иногда с некоторым приближением можно все же считать, что на том или другом участке естественного русла имеет место равномерное движение. В этих случаях поступают таким образом:

Рис. 6-17. Естественные русла

1) заменяют действительное неправильное русло каким-либо призматическим (цилиндрическим) правильным руслом, например параболическим или прямоугольным (рис. 6-17);

2) уклон дна намеченного условного призматического русла принимают равным:

а) или уклону свободной поверхности воды в действительном естественном русле;

б) или уклону, полученному в результате осреднения уклонов дна естественного русла;

3) полученное условное русло рассчитывают, как призматический (цилиндрический) канал, по приведенным выше формулам; найденные для этого русла величины принимают для естественного русла.

§ 6-9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАСЧЕТЕ КАНАЛОВ

1°. Об экономическом расчете каналов. Рассчитываемый канал можно запроектировать различно: дну канала можно придать разный уклон; можно принять различную относительную ширину канала по дну $\beta = b{:}h$ и т. п.

Окончательно в проекте должен быть принят тот вариант канала, который оказывается наиболее выгодным с экономической точки зрения (а также с точки зрения удобства постройки его, эксплуатации и т. п.).

В связи с этим возникает необходимость сопоставлять между собой различные варианты данного канала, в частности, в экономическом отношении;

при этом приходится дополнительно проводить особые экономические расчеты, тесно связанные с гидравлическими расчетами. Эта сторона вопроса проектирования каналов изучается в специальных курсах: «Использование водной энергии», «Инженерная мелиорация» и т. п.

2°. О лимитных значениях коэффициента шероховатости. Часто при расчете канала трудно заранее предугадать, какое численное значение получит коэффициент шероховатости после устройства канала. В связи с этим расчет проектируемого канала ведут на некоторое наиболее вероятное значение n; дополнительно запроектированный канал проверяют:

а) на заведомо большое значение n ($n = n_{макс}$), в отношении которого можно утверждать, что $n_{макс} \geqslant n_{действ}$, где $n_{действ}$ – действительное значение n;

б) на заведомо малое значение n ($n = n_{мин}$), в отношении которого можно утверждать, что $n_{мин} \leqslant n_{действ}$.

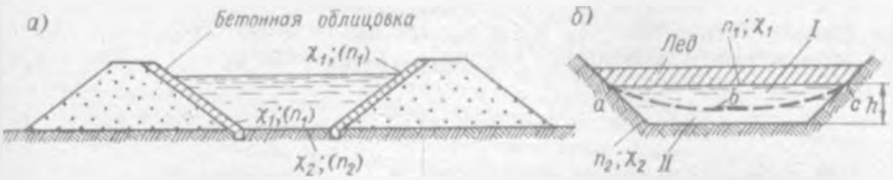


Рис. 6-18. Поперечные сечения русел, неоднородных в отношении коэффициента шероховатости

I – первая часть потока ($n = n_1$); II – вторая часть потока ($n = n_2$)

Выполняя проверку на $n_{макс}$, получаем предельно возможное максимальное наполнение канала; выполняя же проверку канала на $n_{мин}$, получаем предельно возможную максимальную скорость в канале.

Величины $n_{макс}$ и $n_{мин}$ могут быть названы лимитными значениями коэффициента шероховатости. В табл. 4-3 даются численные значения $n_{макс}$ и $n_{мин}$, помимо наиболее вероятного («нормального») значения n.

3°. О каналах, поперечное сечение которых неоднородно в отношении коэффициента шероховатости. В практике встречаются случаи, когда по длине смоченного периметра канала коэффициент шероховатости n различен. Например:

1) откосы дамб, образующих канал, покрыты бетонной облицовкой ($n_1 = 0{,}014$), а дно канала не покрыто такой облицовкой ($n_2 \neq 0{,}014$) – рис. 6-18, *а*;

2) свободная поверхность воды в канале покрыта льдом (расчет канала ведется для условий зимней[1] его работы) – рис. 6-18, *б*. Здесь имеем также два разных коэффициента шероховатости: n_1 – для поверхности льда протяженностью, равной χ_1, и n_2 – для поверхности стенок и дна русла протяженностью, равной χ_2, причем $n_1 \neq n_2$.

В указанных случаях приходится осреднять значение n по длине смоченного периметра канала. Существуют различные способы такого осреднения n.

Для случая на рис. 6-18, *б*, когда поток со всех сторон окружен твердыми стенками, причем имеем только два коэффициента шероховатости (n_1 и n_2) различной величины, наиболее рациональным способом осреднения n является следующий.

Намечаем линию *abc*, проходящую по точкам живого сечения, отвечающим максимальным скоростям u (в разных вертикальных продольных сечениях потока). Эта линия расчленяет живое сечение потока на две части: часть I, внутри которой скорости u в основном зависят от коэффициента шероховатости n_1, и часть II, внутри которой скорости u в основном зависят от коэффициента шероховатости n_2. После этого вводим допущение, согласно которому $v_1 = v_2 = v$, где v_1 и v_2 – средние скорости соответственно

[1] Расчет каналов для условий зимнего режима их работы дает иногда наибольшую глубину наполнения h.

для I и II частей потока; v – средняя скорость для всего живого сечения. Исходя из указанного допущения и учитывая, что $R = (\omega_1 + \omega_2):(\chi_1 + \chi_2)$, можно написать систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1\sqrt{R_1 J} &= C\sqrt{RJ}; \\ C_2\sqrt{R_2 J} &= C\sqrt{RJ}; \\ R &= \frac{\chi_1 R_1 + \chi_2 R_2}{\chi_1 + \chi_2}, \end{aligned}\right\} \tag{А}$$

где индексами «1» и «2» обозначены элементы, относящиеся соответственно к I и II выделенным потокам. Разумеется, уклон J является одинаковым для всех трех рассматриваемых потоков: «первого», «второго» и «суммарного» (т. е. действительного), элементы которого в приведенной зависимости даются без индексов.

А. Л. Можевитинов решил составленную им систему уравнений (А), содержащую три неизвестные величины: R_1, R_2 и $n_{ср}$, где $n_{ср}$ – искомое осредненное значение n (для данного живого сечения); при помощи $n_{ср}$ коэффициент Шези выражается в виде

$$C = \frac{1}{n_{ср}} R^y. \tag{Б}$$

Если положить в поясненном решении А. Л. Можевитинова $y = 1/6$ (согласно Маннингу), то окончательно формулу для осредненного коэффициента шероховатости получаем (для случая на рис. 6-18, *б*) в виде:

$$n_{ср} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{n_1^3} + a\sqrt{n_2^3}}{1 + a}\right)^2}, \tag{6-53}$$

где $a = \chi_2 : \chi_1$, причем χ_1 и χ_2 указаны на рис. 6-18.[1]

Что касается решений, относящихся к случаю на рис. 6-18, а, то их касаться здесь не будем (они часто не удовлетворяют условию $v_1 = v_2 = v$ и носят несколько неопределенный характер).

4°. О графиках для расчета канала. В литературе приводится много различных графиков и таблиц, составленных разными авторами, служащих для облегчения и ускорения расчетов каналов на равномерное движение воды в них.

5°. О начальном участке канала. Необходимо иметь в виду, что приведенные выше расчеты, будучи распространены на начальный участок канала (см. рис. 4-20 и 4-21), имеющий длину, например, $(25 \div 50)\,h$, могут иногда дать ощутимую погрешность.

6°. Замечания о «методе влекущей силы». В § 6-5 был изложен обычный метод, в соответствии с которым площадь живого сечения потока, в частности, в случае земляного канала, определяется путем деления заданного расхода Q на $v_{макс}$. Этот метод может быть назван «методом допускаемой средней скорости»; в соответствии с таким методом форму живого сечения (достаточно правильного очертания) можно назначить произвольной (она расчетом не устанавливается).

Помимо «метода допускаемой скорости» существуют и другие методы расчета каналов, например, «статический[2] метод влекущей силы». Этот метод [6-6] используется для песчаных грунтов (лишенных сил сцепления), причем он позволяет достаточно обоснованно назначать форму живого сечения потока.

Идея этого метода заключается в следующем.

---

[1] Формула (6-53), исходя из соображений, отличных от описанных выше, была получена также П. Н. Белоконем.

[2] «Статический» в том смысле, что в этом способе пульсация касательных напряжений τ_0 (см. ниже) не учитывается.

Рассматривая отдельные точки смоченного периметра χ, устанавливаем для них:

а) продольные (направленные по течению воды в канале) касательные напряжения τ_0, приложенные со стороны потока к грунту;

б) продольные касательные напряжения $\tau_{сопр}$ грунта, сопротивляющиеся сдвигу его песчинок потоком.

Значения τ_0 приходится устанавливать на основании тех или других приближенных гидравлических расчетов. Значения же $\tau_{сопр}$ находят, например, по формуле:

$$\tau_{сопр} = N \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ – угол внутреннего трения грунта и N – сила нормального прижатия некоторой «расчетной песчинки» грунта к ее основанию [для горизонтального в данном поперечном сечении дна канала $N = G$, где G – вес «песчинки»; для откоса канала $N = G \cos \varphi$ (см. рис. 6-2)].

Окончательное поперечное сечение канала устанавливают такой формы, при которой $\tau_0 \approx \tau_{сопр}$ во всех точках смоченного периметра. При этом мы получаем канал, во всех точках смоченного периметра которого грунт будет находиться в равнопрочном и предельно прочном состоянии.

В связи со сказанным, следует подчеркнуть, что метод допускаемой скорости, в отличии от метода влекущей силы, дает нам такие живые сечения потока, у которых предельная допускаемая прочность грунта (на размыв) имеет место в районе только одной точки смоченного периметра; в остальных точках смоченного периметра, согласно этому методу, грунт будет иметь излишний запас прочности.

§ 6-10. ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ЗЕМЛЯНЫХ КАНАЛОВ

1°. О построении продольного профиля канала. При расчете канала, состоящего из нескольких участков, имеющих, например, разные уклоны дна, часто получаем различные глубины h на этих участках (рис. 6-19): $h_{\text{I}} \neq h_{\text{II}} \neq h_{\text{III}}$.

В этом случае продольный профиль канала обычно проектируют так:

1) вначале на чертеже продольного профиля канала намечают линию свободной поверхности потока (с теми уклонами i, которые были приняты при расчете или были получены в результате расчета);

2) затем от построенной линии свободной поверхности откладывают вниз найденные глубины h, причем получают проектную линию дна канала.

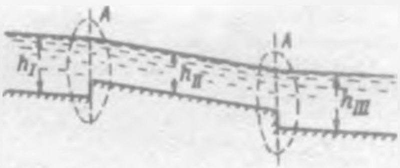


Рис. 6-19. Проектирование продольного профиля канала

В районе узлов A (рис. 6-19), где дно канала получает некоторые «уступы», движение воды будет неравномерным; однако этим обстоятельством обычно пренебрегают.

2°. Дополнительные замечания. При проектировании каналов в виде земляных русел (особенно больших каналов) необходимо иметь в виду, что расчеты, описанные выше, относятся, разумеется, к некоторым идеализированным схемам каналов. Рассматривая работу канала в действительных условиях, мы часто будем сталкиваться с различными, так сказать, «искажающими факторами» – с факторами, искажающими ту идеализированную картину, которая выше полагалась в основу расчета. К числу этих искажающих факторов можно отнести, например, следующие: 1) зимний режим работы каналов, при котором поверхность воды не только покрывается льдом, но, вместе с тем, живые сечения потока (подо льдом) могут забиваться шугой и снегом; 2) покрытие дна канала у берегов растительностью (в большей или меньшей мере); 3) наличие поворотов канала (искривление оси канала в плане), в связи с чем в канале могут возникать «вторичные течения» (см.

стр. 204); 4) возникновение волн на поверхности воды различного происхожд [ветровых, корабельных, если канал судоходен, волн перемещения (см. гл. 5) отклонение (в плане) динамической оси потока (вдоль которой мы и скорости $u_{макс}$) от геометрической оси потока, вызванное случайными чинами; при таком отклонении поток «прижимается» к одному бе и скорости u у этого берега возрастают, что может способствовать разм данного берега; здесь надо иметь в виду, что при больших β (напри при $\beta > 10{,}0$) динамическая ось канала является иногда недостаточно устойчи (в плане); такая неустойчивость объясняется тем, что максимум эпюры ростей (в плане), построенных для различных живых сечений, оказыва (при больших β) выраженным нерезко.

Разумеется, «борьба» с некоторыми перечисленными «искажающими торами» может осуществляться в процессе эксплуатации канала, при пом соответствующих ремонтных работ. Вместе с тем, ряд других «искажаю факторов» приходится учитывать при расчете канала, вводя в расчет соот ствующие коэффициенты запаса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

6-1. **Агроскин И. И.** Гидравлический расчет каналов.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 19

6-2. **Павловский Н. Н.** Гидравлический справочник.– Л.-М.: ОНТИ НКТП, 1937.

6-3. **Угинчус А. А.** Каналы и сооружения на них.– М.: Госстройиздат, 1952.

6-4. **Угинчус А. А.** Гидравлические и технико-экономические расчеты каналов.– Стройиздат, 1965.

6-5. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика. Специальный курс.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 19

6-6. **Чоу В. Т.** Гидравлика открытых каналов.– М.: Стройиздат, 1969.

6-7. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения. Глухие плотины.– М.: Высш школа, 1975.

6-8. **Технические условия** и нормы проектирования гидротехнических сооружен Деривационные каналы гидроэлектростанций.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960.

6-9. СНиП II-52–74. Сооружения мелиоративных систем.– М.: Стройиздат, 1975.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

НЕРАВНОМЕРНОЕ БЕЗНАПОРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В КАНАЛАХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Как и в предыдущей главе, будем рассматривать только турбулентно движение воды, относящееся к квадратичной области сопротивления. При этом будем иметь в виду в основном неравномерное плавно изменяющееся движение. Данный случай движения представлен на рис. 7-1.[1]

Если твердое тело начинает падать в воздушной среде, то вначале движение этого тела является ускоренным; по мере увеличения скорости падения данного тела сопротивление воздуха растет, поэтому ускоренное движение тела постепенно переходит в равномерное; при таком равномерном движении сила

[1] Рисунок 7-1, равно как и многие другие рисунки, приводимые далее (на которых изображается продольный профиль потока), представлен в искаженном масштабе.

тяжести тела уравновешивается силой сопротивления воздуха. Если в цилиндрический канал будем подавать воду, то вначале объемы воды, попавшие в канал, будут двигаться неравномерно; однако по мере изменения их скорости должны изменяться и силы сопротивления (трения), препятствующие указанному движению; в конечном счете, и здесь силы тяжести воды уравновесятся силами трения, и на некотором расстоянии от места поступления воды в канал получим равномерное движение. Всякий поток стремится, в конечном счете, принять равномерное движение, при котором работа сил тяжести равняется работе сил трения. Неравномерное движение воды в канале возникает в случае, когда мы тем или иным путем нарушаем режим равномерного движения.

Приведем примеры, когда в канале возникает безнапорный неравномерный режим движения воды, который, как известно, характеризуется в общем случае условиями:

$h \neq \text{const}$ (*вдоль течения*);

$v \neq \text{const}$ (*вдоль течения*).

Вопроса о деформации эпюры ос-

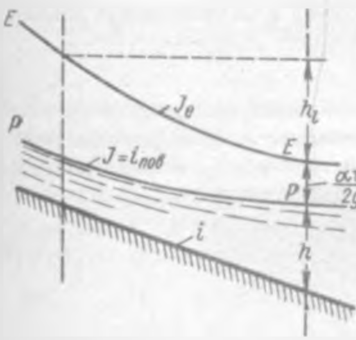


Рис. 7-1. Неравномерное движение воды в канале (рисунок дан в искаженном масштабе)

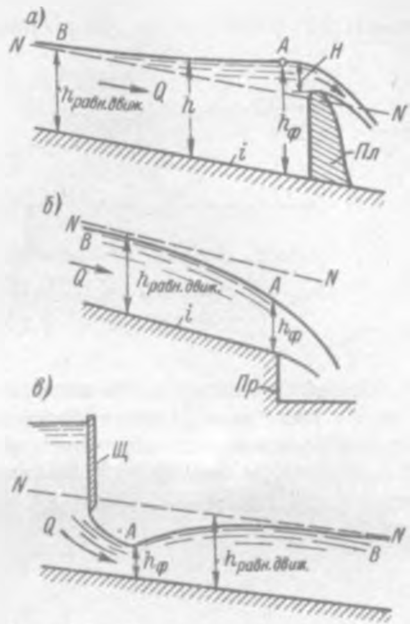


Рис. 7-2. Примеры неравномерного движения в цилиндрическом канале с прямым уклоном ($i > 0$)

редненных скоростей вдоль потока здесь касаться не будем.

1°. **Русло канала цилиндрическое** (т. е. имеющее всюду одинаковое поперечное сечение) **с прямым уклоном дна ($i > 0$).** Здесь равномерный режим нарушается, в частности, в следующих случаях.

а) В канале устраиваем плотину *Пл* (рис. 7-2, *а*); вода начинает переливаться через плотину. Как видно, в результате устройства плотины мы искусственно зафиксировали в русле точку *A* свободной поверхности потока, а также глубину $h_ф$ (см. чертеж), отличную от глубины, свойственной равномерному движению (см. свободную поверхность *NN*, отвечающую этому движению):

$$h_ф \neq h_{равн\ движ}.$$

При таком условии на некоторой ограниченной длине русла *AB* получим неравномерный режим; вдали же от плотины будет равномерное движение.

б) В канале устраивается перепад *Пр* (рис. 7-2, *б*). Как будет показано далее, на гребне этого перепада устанавливается некоторая глубина $h_ф$, в общем случае отличная от глубины равномерного режима (т. е. той глубины, которая определяется для заданного расхода по зависимостям предыдущей главы):

$$h_ф \neq h_{равн. движ}.$$

Поскольку в этом случае мы искусственным путем зафиксировали в канале глубину, отличную от глубины равномерного движения, то на некоторой ограниченной длине канала AB должно возникнуть неравномерное движение.

в) В канале устанавливается щит $Щ$ (рис. 7-2, *в*); при истечении воды из-под щита получаем глубину в канале

$$h_ф \neq h_{равн. движ},$$

причем на длине потока AB возникает неравномерное движение.

Рис. 7-3. Примеры неравномерного движения в цилиндрических каналах горизонтальных ($i = 0$) и с обратным уклоном ($i < 0$)

Следует запомнить, что *неравномерное движение воды в цилиндрическом канале с* п р я м ы м *уклоном дна* ($i > 0$) *возникает в том случае, когда в нем каким-либо искусственным путем фиксируем глубину* $h_ф$, *отличную от глубины равномерного движения* (вычисляемой для заданного расхода по зависимостям предыдущей главы).

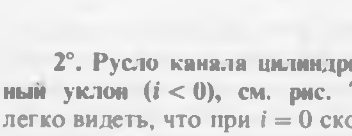


Рис. 7-4. Нецилиндрические (непризматические) русла (план)

Рис. 7-5. Продольный (*а*) и поперечный (*б*) разрез русла

АВ – кривая свободной поверхности потока

2°. Русло канала цилиндрическое: горизонтальное ($i = 0$) или имеющее обратный уклон ($i < 0$), см. рис. 7-3. Анализируя формулу Шези для скорости v, легко видеть, что при $i = 0$ скорость равномерного движения воды $v = 0$. Отсюда заключаем, что при $i = 0$, а тем более при $i < 0$ равномерный режим движения воды физически не может существовать. В этом случае может получиться только неравномерное движение.

3°. Русло нецилиндрическое: расширяющееся или сужающееся (см. на рис. 7-4 планы русла). Здесь может возникнуть только неравномерный режим.

Таким образом, необходимо запомнить следующее. Неравномерное движение воды имеет место:

1) в случае ц и л и н д р и ч е с к о г о русла:

а) когда $i > 0$, причем в русле зафиксирована глубина (рис. 7-2)

$$h_ф \neq h_{равн\ движ};$$

б) когда уклон дна русла $i = 0$ или $i < 0$ (рис. 7-3);

2) в случае нецилиндрического русла (рис. 7-4).

Равномерное движение воды получается только в цилиндрическом русле с прямым уклоном дна ($i > 0$) при условии, что это русло достаточно длинное и не имеет каких-либо устройств, нарушающих равномерный режим (плотины, перепада и т. п.; рис. 7-2).

В практике случаи неравномерного движения воды встречаются значительно чаще, чем случаи равномерного.

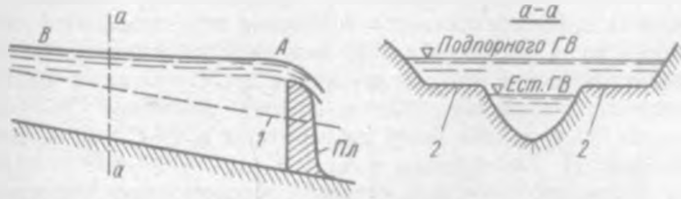


Рис. 7-6. Продольный (слева) и поперечный (справа) вертикальные разрезы реки

Пл – плотина; *AB* – кривая свободной поверхности; *1* – естественная свободная поверхность; *2* – затопление берегов

При рассмотрении неравномерного плавно изменяющегося движения главным образом занимаются вопросом о построении так называемой **кривой свободной поверхности** *AB* потока, т. е. кривой пересечения вертикальной продольной плоскости со свободной поверхностью потока (рис. 7-5). Построение кривой свободной поверхности *AB* представляет большой практический интерес. Например:

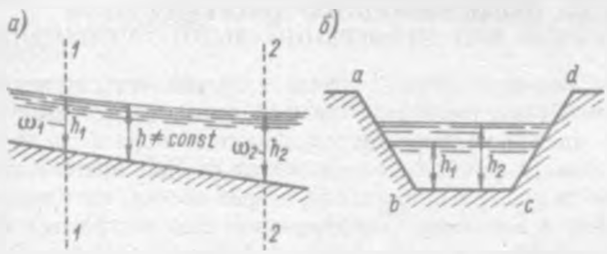


Рис. 7-7. Цилиндрическое (призматическое) русло

а) построив кривую *AB*, найдем глубины h воды в канале в различных его сечениях; зная же глубины воды h, можем решить вопрос о глубине выемок канала в разных его местах; вопросы судоходства требуют знания глубин воды в канале, и т. п.;

б) построив кривую *AB* для реки, на которой сооружается плотина *Пл* (рис. 7-6), найдем размеры затопления берегов, обусловленного подпором, в разных поперечных сечениях реки, и т. д.

Задача построения кривой *AB* в теории неравномерного движения воды ставится и решается согласно следующей схеме:

1) считаем, что нам заданы характеристики русла водотока (его форма, размеры, уклон, шероховатость) и расход Q;

2) рассматривая заданное русло, выделяем элементарный участок потока длиной ds, затем, используя соответствующие гидравлические зависимости, составляем для этого участка дифференциальное уравнение движения воды, это уравнение называется дифференциальным уравнением неравномерного движения;

3) полученное уравнение путем специальных преобразований приводим для цилиндрических русел к виду, удобному для интегрирования;

4) интегрируем это дифференциальное уравнение, в результате чего получаем уравнение кривой AB, которое называется уравнением неравномерного движения (для цилиндрических русел);

5) пользуясь уравнением неравномерного движения, вычисляем координаты точек кривой AB, по которым строим на чертеже данную кривую.

Составлением дифференциального уравнения неравномерного движения занимались Кориолис, который дал приближенное решение задачи, Буссинеск, предложивший современное решение вопроса, и др. Что касается интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения, то современные способы решения этой задачи были разработаны в СССР Б. А. Бахметевым, Р. Р. Чугаевым, А. Н. Рахмановым и др.

Ниже мы будем рассматривать главным образом цилиндрические (призматические) русла. Как отмечалось выше, цилиндрическим (призматическим) руслом называется такое прямолинейное русло, форма и размеры которого по длине потока не изменяются. Нельзя, разумеется, смешивать поперечное сечение русла и поперечное сечение потока (т. е. живое сечение). На рис. 7-7 показано призматическое русло, имеющее всюду одинаковое поперечное сечение $a-b-c-d$ (рис. 7-7,*б*). Вместе с тем глубина наполнения этого русла (рис. 7-7,*а*) при неравномерном движении в разных сечениях различна ($h_1 \neq h_2$); поэтому живые сечения рассматриваемого потока будут различными ($\omega_1 \neq \omega_2$).

§ 7-2. ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ (ПЕРВЫЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ)

Рассмотрим вначале общий случай – случай нецилиндрического русла. При этом будем иметь в виду (как здесь, так и всюду ниже) случай «безотрывного» плавно изменяющегося движения воды в русле (случай, когда водоворотные области не образуются и живые сечения принимаются плоскими).

Представим на рис. 7-8 продольный разрез потока, находящегося в состоянии неравномерного движения. Оси координат для построения кривой свободной поверхности наметим, как показано на чертеже: ось глубин h – вертикально; ось s – по линии дна русла.

Возьмем два плоских вертикальных живых сечения потока: $1-1$, удаленное от начального сечения $W-W$ на конечное расстояние s, и $2-2$, расположенное от $1-1$ на бесконечно малом расстоянии ds.

Обозначим потерю напора на длине ds потока (при неравномерном движении) через dh_l. Очевидно, величину dh_l можно представить в виде

$$dh_l = J_e\, ds, \tag{7-1}$$

где [см. формулы (3-105)] гидравлический уклон

$$J_e = -\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right) \tag{7-2}$$

или

$$J_e = -\frac{dz}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right), \tag{7-3}$$

причем здесь возвышение точки A свободной поверхности над плоскостью сравнения OO; v – средняя скорость в 1-м сечении; α – корректив кинетической энергии, который условно будем принимать равным $\alpha \approx 1{,}0 \div 1{,}1$, т. е. таким же, как и для равномерного движения.

Подставляя (7-3) в (7-1), имеем

$$dh_l = -dz - d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right). \tag{7-4}$$

Вводя теперь обозначение

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = h_v, \tag{7-5}$$

переписываем (7-4) в виде

$$-dz = dh_v + dh_l. \tag{7-6}$$

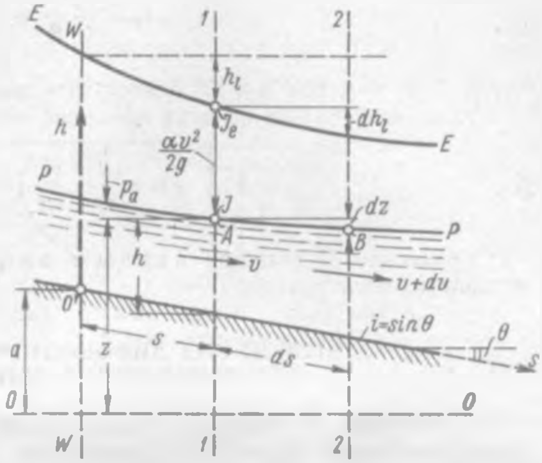


Рис. 7-8. К выводу дифференциального уравнения неравномерного движения

Это и есть основное уравнение неравномерного движения, причем здесь dz представляет собой поднятие свободной поверхности AB на длине ds (dz может быть как положительным, так и отрицательным; на рис. 7-8 dz имеет отрицательное значение, а следовательно, представляет собой падение свободной поверхности).

Из (7-6) видно, что *падение свободной поверхности, т. е. уменьшение удельной потенциальной энергии, равно увеличению удельной кинетической энергии плюс потеря напора.*

Разделим уравнение (7-6) на величину ds:

$$-\frac{dz}{ds} = \frac{dh_v}{ds} + \frac{dh_l}{ds} \tag{7-7}$$

Так как в случае безнапорного движения пьезометрическая линия $P-P$ совпадает со свободной поверхностью, то

$$-\frac{dz}{ds} = J, \tag{7-8}$$

где J – пьезометрический уклон.

Величину (dh_l/ds), входящую в (7-7), т. е. гидравлический уклон J_e часто представляют в виде

$$\frac{dh_l}{ds} = J_e = i_f \text{ (обозначение)}, \tag{7-9}$$

где i_f иногда называют уклоном трения.

Учитывая (7-8) и (7-9), уравнение (7-7) переписываем в виде

$$J = \frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + i_f. \qquad (7\text{-}10)$$

Далее используем следующее допущение:
считаем, что потери напора при плавно изменяющемся и безотрывном движении воды выражаются теми же зависимостями, что и в случае равномерного движения воды[1].

В соответствии с этим допущением величину i_f выражаем, пользуясь формулой Шези (справедливой, строго говоря, только для равномерного движения):

$$i_f = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2}, \qquad (7\text{-}11)$$

где v, C, R и K (см. § 4-12) относятся к рассматриваемому сечению $1-1$.

Учитывая (7-11) и полагая $\alpha = \text{const}$, окончательно получаем

(I) $$\boxed{J = \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2 R}} \qquad (7\text{-}12)$$

Уравнение (I) является первым видом дифференциального уравнения неравномерного движения.

§ 7-3. ВТОРОЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ

Преобразуем уравнение (I), причем введем в это уравнение глубину потока h. Полагая величину Q и русло заданными, рассмотрим отдельно каждый из членов уравнения (I).

1. Член J (пьезометрический уклон). Представим на рис. 7-9 продольный разрез потока. Из чертежа видно, что

$$z = a - is + h, \qquad (7\text{-}13)$$

где постоянная величина a — возвышение начала координат над плоскостью сравнения OO.

Очевидно,

$$dz = dh - i\,ds, \qquad (7\text{-}14)$$

откуда

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dh}{ds} - i. \qquad (7\text{-}15)$$

Пьезометрический уклон

$$J = -\frac{dz}{ds}. \qquad (7\text{-}16)$$

[1] В случае неравномерного движения по длине потока происходит переформирование эпюры осредненных скоростей. Поэтому выражение для потерь напора при неравномерном движении, строго говоря, должно быть иным, чем в случае равномерного движения (когда эпюра осредненных скоростей имеет вполне определенный вид и по длине потока не изменяется).

Подставляя (7-15) в (7-16), окончательно для уклона J получаем зависимость

$$J = i - \frac{dh}{ds}. \qquad (7\text{-}17)$$

2. Член $\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$. Выражая v через расход Q, получаем

$$\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{Q^2}{\omega^2 2g}\right) = \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{ds}. \qquad (7\text{-}18)$$

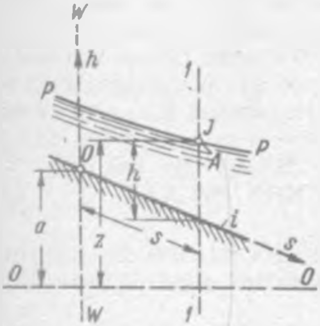


Рис. 7-9. К выводу формулы (7-17)

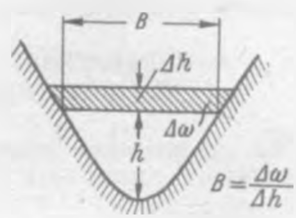


Рис. 7-10. К доказательству соотношения (7-21)

В данном случае мы рассматриваем нецилиндрическое русло. Поэтому площадь живого сечения ω зависит от двух координат: h и s, т. е.

$$\omega = f(h, s). \qquad (7\text{-}19)$$

Имея это в виду, можем написать:

$$\frac{d\omega}{ds} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial s} + \frac{\partial\omega}{\partial h}\frac{dh}{ds}\right) = \left(\frac{\partial\omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right); \qquad (7\text{-}20)$$

$$B = \frac{\partial\omega}{\partial h}, \qquad (7\text{-}21)$$

где B – ширина потока поверху (рис. 7-10).

Подставляя (7-20) в (7-18), получаем окончательно

$$\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right). \qquad (7\text{-}22)$$

3. Член $\frac{v^2}{C^2R}$. Этот член можно представить в виде:

$$\frac{v^2}{C^2R} = \frac{Q^2}{\omega^2C^2R}. \qquad (7\text{-}23)$$

4. Подставляя теперь найденные выражения (7-17), (7-22) и (7-23) в (I) (см. § 7-2), получаем:

$$i - \frac{dh}{ds} = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right) + \frac{Q^2}{\omega^2C^2R};$$

решая это уравнение в отношении $\frac{dh}{ds}$, окончательно имеем:

$$(\mathrm{II})_{\text{нецилиндрич}} \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{i - \dfrac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}\left(1 - \dfrac{\alpha C^2 R}{g\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial s}\right)}{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{g}\dfrac{B}{\omega^3}}. \qquad (7\text{-}24)$$

Уравнение $(\mathrm{II})_{\text{нецилиндрич}}$ является вторым видом дифференциального уравнения неравномерного движения; оно относится к общему случаю нецилиндрического русла. Как видно, при помощи этого уравнения можно выразить приращение глубины потока dh на элементарной длине его ds. Подчеркнем, что уравнение (7-24) относится к случаю $Q = \text{const}$ (вдоль потока).

Далее будем рассматривать отдельно: а) цилиндрические, в частности призматические, б) нецилиндрические искусственные и в) естественные русла.

А. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РУСЛАХ

§ 7-4. ВТОРОЙ ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РУСЕЛ

В случае цилиндрических, в частности призматических, русел величина живого сечения целиком определяется размером h; от величины s живое сечение ω в явном виде здесь не зависит; поэтому вместо (7-19) здесь

$$\omega = f(h). \qquad (7\text{-}25)$$

Следовательно, для этих русел частная производная

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = 0, \qquad (7\text{-}26)$$

т. е. приращение площади живого сечения при изменении s (но при $h = \text{const}$) равно нулю. Вместе с тем для цилиндрических русел

$$\frac{d\omega}{ds} \neq 0, \qquad (7\text{-}27)$$

так как полная производная $\frac{d\omega}{ds}$ выражает действительное изменение ω, получающееся при изменении координаты s (в действительности в случае неравномерного движения с увеличением или уменьшением s изменяется также и h).

Учитывая (7-26), уравнение $(\mathrm{II})_{\text{нецилиндрич}}$ (см. § 7-3) для случая цилиндрических русел следует переписать в виде

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \dfrac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{g}\dfrac{B}{\omega^3}}; \qquad (7\text{-}28)$$

имея же в виду, что

$$\omega^2 C^2 R = K^2, \qquad (7\text{-}29)$$

где K – модуль расхода, отвечающий действительной глубине h, уравнение (7-28) можем представить в виде

$$(\mathrm{II})_{\text{цилиндр}; i>0} \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{i - \dfrac{Q^2}{K^2}}{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{g} \dfrac{B}{\omega^3}}. \qquad (7\text{-}30)$$

Уравнение $(\mathrm{II})_{\text{цилиндр}; i>0}$ является в т о р ы м видом дифференциального уравнения неравномерного движения для случая ц и л и н д р и ч е с к о г о русла с прямым уклоном дна ($i > 0$).

Из уравнения (7-30) можно получить известное нам уравнение равномерного движения. Для этого в (7-30) подставляем

$$\frac{dh}{ds} = 0; \qquad (7\text{-}31)$$

в результате получаем

$$i - \frac{Q^2}{K^2} = 0, \qquad (7\text{-}32)$$

откуда

$$Q = K\sqrt{i}. \qquad (7\text{-}33)$$

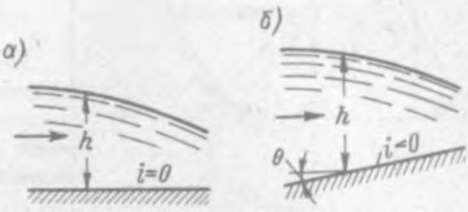


Рис. 7-11. Русла с уклоном $i = 0$ и $i < 0$

Рассмотрим теперь дополнительно случаи $i = 0$ и $i < 0$.

а) С л у ч а й $i = 0$ (горизонтальное русло; рис. 7-11, *а*). Подставляя в (7-30) $i = 0$, имеем:

$$(\mathrm{II})_{\text{цилиндр}; i=0} \qquad \frac{dh}{ds} = -\frac{\dfrac{Q^2}{K^2}}{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{g} \dfrac{B}{\omega^3}}. \qquad (7\text{-}34)$$

б) С л у ч а й $i < 0$ (русло с обратным уклоном; рис. 7-11, *б*). Условимся обозначать через i' абсолютное значение i:

$$i' = \sin\theta = |i|; \qquad (7\text{-}35)$$

при этом вместо уравнения (7-30) получаем:

$$(\mathrm{II})_{\text{цилиндр}; i<0} \qquad \frac{dh}{ds} = -\frac{i' + \dfrac{Q^2}{K^2}}{1 - \dfrac{\alpha Q^2}{g} \dfrac{B}{\omega^3}}. \qquad (7\text{-}36)$$

Подчеркнем, что далее, рассматривая уравнения (7-30), (7-34) и (7-36), будем иметь в виду только такие цилиндрические русла, для которых величины K и ω^3/B н е п р е р ы в н о в о з р а с т а ю т с увеличением глубины h[1].

[1] В случае, например, замкнутых профилей (см. рис. 6-3, *г*) глубина h может рассматриваться, как н е о д н о з н а ч н а я функция от модуля расхода K (см. рис. 6-12). В случае, например, составных профилей (см. рис. 6-3, *в*) глубина h, вообще говоря, может также не являться однозначной функцией от выражения ω^3/B (т. е. для одной и той же величины ω^3/B можем получить две или несколько разных глубин h). Для такого рода русел (далее не рассматриваемых) K и ω^3/B с увеличением h могут уменьшаться.

§ 7-5. ЧЕТЫРЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПОНЯТИЯ: УДЕЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СЕЧЕНИЯ, КРИТИЧЕСКАЯ ГЛУБИНА, НОРМАЛЬНАЯ ГЛУБИНА, КРИТИЧЕСКИЙ УКЛОН

При преобразовании и интегрировании уравнения (II) [см. (7-30), (7-34), (7-36)] будем пользоваться некоторыми новыми понятиями, которые здесь предварительно поясним.

1°. Удельная энергия сечения. Представим на рис. 7-12 поперечное сечение какого-либо русла, причем укажем на чертеже плоскость сравнения OO. Как известно, удельная энергия (полный напор H_e), т. е. полная энергия, отнесенная к единице веса жидкости, для данного живого сечения выражается зависимостью:

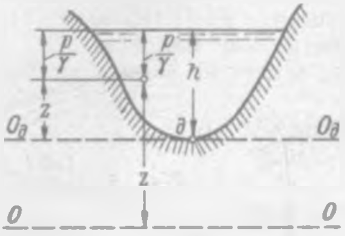


Рис. 7-12. К обоснованию формул (7-39)

$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \tag{7-37}$$

Удельной энергией сечения Э называется частное значение полной удельной энергии, подсчитанное в предположении, что плоскость сравнения проведена через самую нижнюю точку ∂ сечения русла (см. на чертеже линию $O_\partial O_\partial$). Для плоскости сравнения $O_\partial O_\partial$ имеем равенство:[1]

$$z + \frac{p}{\gamma} = h, \tag{7-38}$$

а следовательно, вместо (7-37) получаем

$$\boxed{Э = h + \frac{\alpha v^2}{2g}} \tag{7-39}$$

или

$$Э = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}. \tag{7-40}$$

Для прямоугольного русла

$$v = \frac{Q}{bh} = \frac{q}{h}, \tag{7-41}$$

где

$$\boxed{q = \frac{Q}{b}} \tag{7-42}$$

называется удельным или единичным расходом. Подчеркнем, что q имеет размерность $L^2 : t$ (например, м^2/с).

Подставляя (7-41) в (7-39), выражение Э для прямоугольного русла получаем в виде

$$Э = h + \frac{\alpha q^2}{2gh^2}. \tag{7-43}$$

---

[1] Имеющееся атмосферное давление, действующее на поверхность воды, как здесь, так и ниже не учитываем.

Обратимся к анализу зависимостей (7-39) и (7-40). Рассматривая их, будем считать, что при заданном расходе Q вода через данное сечение русла может протекать с различными глубинами h (в зависимости от уклона русла, от его шероховатости и т. п.). При различных глубинах воды в данном русле (и при $Q = \text{const}$) будем получать разные удельные энергии сечения Э [см. зависимость (7-43)]. Поэтому можем написать, что

$$Э = f(h), \tag{7-44}$$

и считать, что значение Э при указанной постановке вопроса целиком определяется глубиной h.

Из уравнений (7-39) и (7-40) легко видеть, что:

а) при $h \to 0$, получаем $Э \to \infty$ (так как при $h \to 0$ второе слагаемое правой части указанных уравнений стремится к бесконечности);

б) при $h \to \infty$ получаем Э так же стремящееся к бесконечности.

Известно, что если непрерывная функция при граничных значениях независимой переменной оказывается равной плюс бесконечности, то в промежутке данная функция имеет, по крайней мере, один минимум.

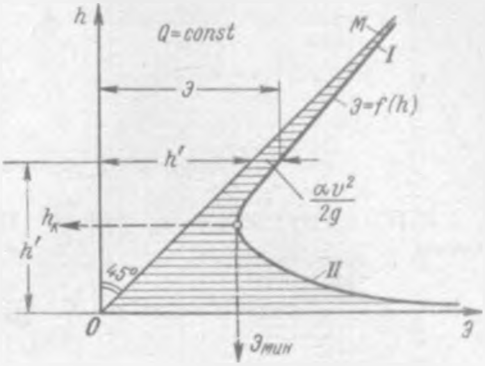


Рис. 7-13. График удельной энергии сечения Э

Действительно, более подробный анализ показывает, что функция (7-44) $Э = f(h)$ может быть представлена кривой (рис. 7-13), имеющей один минимум [1]. Как видно, кривая $Э = f(h)$ имеет две асимптоты: а) OM, направленную под углом 45° к осям координат, и б) $OЭ$, являющуюся горизонтальной осью координат. Площадь, покрытая на чертеже штриховкой, дает эпюру изменения скоростного напора $\frac{\alpha v^2}{2g}$.

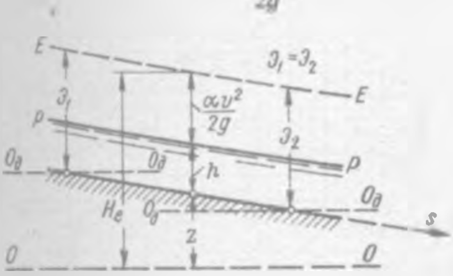


Рис. 7-14. Изменение вдоль потока величины H_e (при $Э = \text{const}$)

В случае равномерного движения (когда $h = \text{const}$ вдоль потока) величина H_e уменьшается вдоль потока (в связи с наличием потерь напора); величина же Э при равномерном движении не изменяется вдоль потока ($Э = \text{const}$ вдоль потока), поскольку линию $O_дO_д$ мы должны представлять проведенной в каждом сечении потока на различной высоте (рис. 7-14).

2°. Критическая глубина. Минимальному значению Э ($Э_{мин}$) отвечает некоторая вполне определенная глубина потока h (рис. 7-13). Эта глубина называется критической и обозначается через $h_к$. Таким образом, *критической глубиной называется глубина, отвечающая минимуму удельной энергии сечения.*

[1] Для русел, указанных в конце § 7-4, которые мы условились рассматривать. Для некоторых поперечных сечений русел, исключаемых нами из рассмотрения, кривая $Э = f(h)$ может иметь два или несколько минимумов. В случае таких поперечных сечений должны получать две или несколько критических глубин разной величины.

Если задано поперечное сечение русла, а также расход Q, то $h_к$ определится из уравнения

$$\frac{\partial Э}{\partial h} = 0. \tag{7-45}$$

Найдем, пользуясь этим уравнением, выражение $h_к$ для прямоугольного русла; затем рассмотрим также и некоторые другие русла.

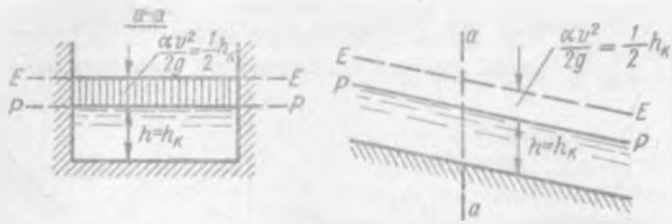


Рис. 7-15. Зависимость глубины $h_к$ от скоростного напора

1. Прямоугольное русло. Подставляя в (7-45) выражение (7-43), имеем

$$\frac{\partial\left(h + \frac{\alpha q^2}{2gh^2}\right)}{\partial h} = 0, \tag{7-46}$$

откуда

$$1 - \frac{\alpha q^2}{h^3 g} = 0, \tag{7-47}$$

где $h = h_к$.

Из соотношения (7-47) получаем

$$\frac{\alpha q^2}{h_к^3 g} = 1; \quad h_к^3 = \frac{\alpha q^2}{g} \tag{7-48}$$

и, следовательно,

$$\boxed{h_к = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{b^2 g}}}. \tag{7-49}$$

Заметим, что (7-48) можно переписать еще в виде

$$h_к = \frac{\alpha q^2}{h_к^2 g} = \frac{\alpha v^2}{g}, \tag{7-50}$$

т. е.

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{1}{2} h_к; \tag{7-51}$$

отсюда заключаем, что для прямоугольного русла, когда $h = h_к$, скоростной напор равен половине глубины в русле, т. е. напорная линия $E-E$ в этом случае возвышается над горизонтом воды в сечении на величину, равную половине глубины наполнения канала (рис. 7-15).

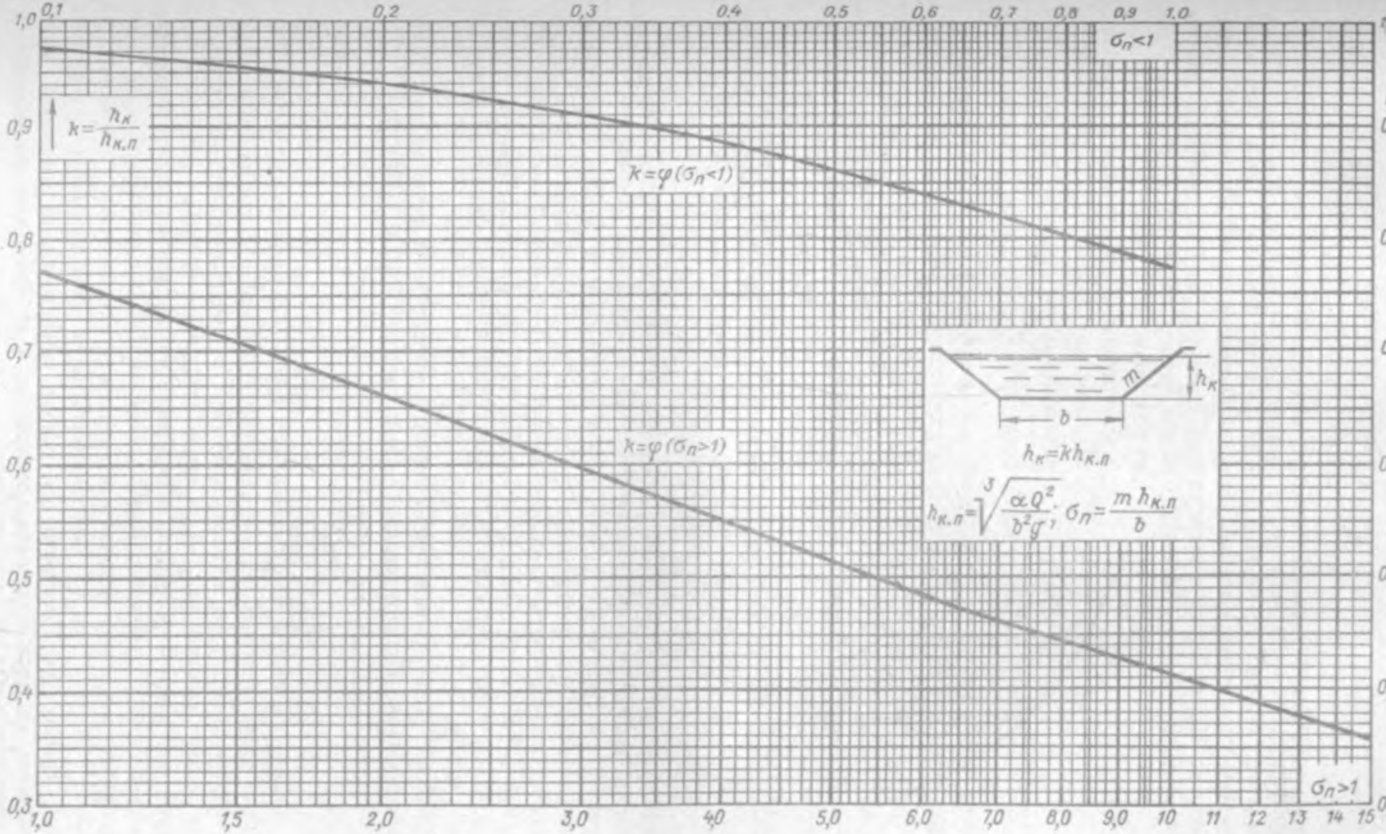


Рис. 7-16. График для определения критической глубины в случае каналов симметричного трапецеидального поперечного сечения

2. Симметричное треугольное русло. Рассуждая как и выше, для треугольного русла можем получить

$$h_к = \sqrt[5]{\frac{2\alpha Q^2}{gm^2}}, \tag{7-52}$$

где m – коэффициент откоса русла.

3. Симметричное трапецеидальное русло. Здесь выражение для $h_к$ в явном виде получить не удается (величину $h_к$ можно найти только путем подбора). Практически в этом случае $h_к$ определяют по особому графику. В литературе опубликовано несколько видов такого расчетного графика. Один из них приведен на рис. 7-16.[1] Пользуясь этим графиком, поступаем следующим образом (см. формулы и обозначения, выписанные на графике): а) вычисляем

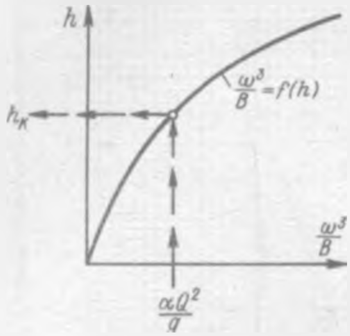


Рис. 7-17. Определение критической глубины

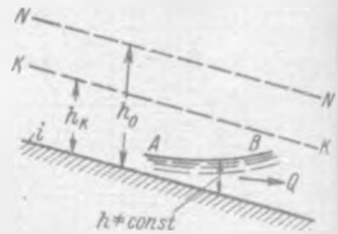


Рис. 7-18. Линия нормальной глубины ($N - N$) и линия критической глубины ($K - K$)

критическую глубину $h_{к\,п}$, б) затем вычисляем величину $\sigma_п$, в) зная величину $\sigma_п$, определяем по графику коэффициент k, г) зная k, находим $h_к = kh_{к\,п}$.

4. Русло любого поперечного сечения. В общем случае величину $h_к$ можно было бы определить, построив предварительно для заданного поперечного сечения русла и заданной величины Q график $Э = f(h)$ (рис. 7-13). Однако такой способ отыскания $h_к$ неудобен, так как минимум кривой $Э = f(h)$ выражен нерезко, и потому найти $h_к$ с достаточной точностью по этой кривой обычно не удается.

Практически, рассчитывая русло любого поперечного сечения, поступаем следующим образом. Переписываем (7-45) с учетом (7-40) и (7-21):

$$\frac{\partial Э}{\partial h} = \frac{\partial\left(h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}\right)}{\partial h} = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) =$$

$$= 1 - 2\frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{1}{\omega^3}\frac{\partial\omega}{\partial h} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3} = 0. \tag{7-53}$$

[1] Данный график был построен на основе вычислений (с помощью ЭВМ) Л. А. Машковичем, который реализовал предложение А. Н. Рахманова, разработавшего (в 1929 г.) принципиальную схему этого графика.

Величины B и ω, входящие в (7-53), должны отвечать критической глубине[1], в связи с чем при буквах B и ω ставим индекс «к» и переписываем (7-53):

$$\frac{\omega_к^3}{B_к} = \frac{\alpha Q^2}{g}. \qquad (7\text{-}54)$$

Из (7-54) видно, что критическая глубина обладает следующим свойством: *величина площади живого сечения (отвечающая $h_к$) в кубе, деленная на ширину потока поверху $B_к$ (отвечающую $h_к$), всегда должна равняться величине* $\frac{\alpha Q^2}{g}$.

Пользуясь этим свойством, находим $h_к$. Для этого, задаваясь рядом значений h, строим кривую (рис. 7-17)

$$\frac{\omega^3}{B} = f(h); \qquad (7\text{-}55)$$

далее, вычислив величину $\frac{\alpha Q^2}{g}$, по указанному графику находим $h_к$.

5. Круглоцилиндрические русла. Для этих русел величину $h_к$ можно найти, пользуясь графиком на рис. 6-16. При этом поступаем следующим образом [см. позицию 7-ю графика, а также формулу (7-54)]: а) вычисляем величину $\sqrt{\frac{\alpha Q^2}{g}} : D^{5/2}$; б) по этой величине (см. конец § 6—7), пользуясь кривой графика $\sqrt{\frac{\omega^3}{B}} : D^{5/2}$, находим отношение h/D; в) зная эту величину, определяем

$$h_к = (h/D) \cdot D.$$

3°. Нормальная глубина. На рис. 7-18 представлен поток, находящийся в состоянии плавно изменяющегося неравномерного движения (AB — свободная поверхность этого потока). Расход Q считается заданным.

Нормальной глубиной называется глубина, которая при заданном расходе установилась бы в русле, если бы в этом русле движение было равномерным.

Нормальная глубина, обозначаемая далее через h_0, определяется по зависимостям гл. 6, где рассматривался случай равномерного движения. Все элементы, соответствующие нормальной глубине, далее обозначаем следующим образом: ω_0, R_0, χ_0 и т. д. При таких обозначениях уравнение равномерного движения запишется в виде

$$Q = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 i}. \qquad (7\text{-}56)$$

Понятиями нормальной глубины h_0 и критической глубины $h_к$ далее будем широко пользоваться. На эти глубины надо смотреть как на некоторые воображаемые, в действительности не существующие (глубины действительные нами обозначаются через h). Можно считать, что h_0 и $h_к$ являются некоторыми удобными обозначениями, которые, будучи искусственно введены в дифференциальное уравнение неравномерного движения, позволят в дальнейшем упростить это уравнение и привести его к безразмерному виду, удобному для исследования и интегрирования.

---

[1] В дальнейшем индексом «к» будем обозначать и другие элементы живого сечения, отвечающие критической глубине ($K_к$, $\chi_к$, и др.).

Линия $K-K$, проведенная параллельно дну на расстоянии $h_к$ от него, называется линией критических глубин; линия $N-N$, проведенная параллельно дну на расстоянии h_0 от него, называется линией нормальных глубин (рис. 7-18).

4°. Критический уклон. Положим, что нам заданы расход Q, форма и размеры русла, а также его коэффициент шероховатости n. Определенному уклону заданного русла будет отвечать вполне определенная глубина h_0. На рис. 7-19 слева представим наше русло, укрепленное как бы на шарнире O; тогда, придавая этому руслу разный уклон i (путем вращения русла относительно шарнира),

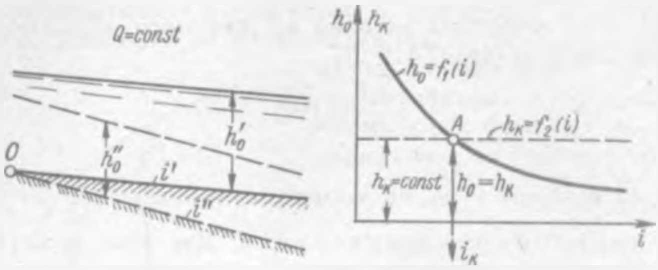


Рис. 7-19. К определению критического уклона

будем получать разные глубины h_0 (h_0', h_0'' и т. д.). Справа на рис. 7-19 изображена кривая $h_0 = f_1(i)$, которую можем построить, пользуясь формулой Шези.

В отличие от нормальной глубины *критическая глубина для заданного поперечного сечения русла зависит только от расхода Q. От уклона дна русла критическая глубина не зависит* (см. п. 2°). Поэтому на графике рис. 7-19 функция $h_к = f_2(i)$ выражается горизонтальной прямой. Как видно из этого графика, существует такой уклон i дна русла, при котором получается равенство

$$h_0 = h_к; \tag{7-57}$$

этот уклон, обозначаемый через $i_к$ и называемый критическим уклоном, отвечает точке A пересечения кривой $h_0 = f_1(i)$ и горизонтальной прямой $h_к = f_2(i)$.

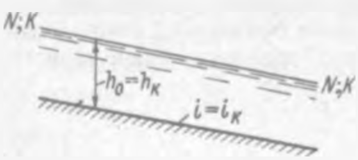


Рис. 7-20. Русло с критическим уклоном

Таким образом, *критический уклон есть такой воображаемый уклон, который надо придать рассматриваемому цилиндрическому призматическому руслу, чтобы при заданном расходе Q и при равномерном движении воды в русле нормальная глубина h_0 оказалась равной критической $h_к$ ($h_0 = h_к$).*

Очевидно,

а) если $i_к > i$, то $h_к < h_0$;

б) если $i_к < i$, то $h_к > h_0$;

в) если $i_к = i$, то $h_к = h_0$.

Найдем выражение для величины $i_к$. С этой целью представим себе, что дно заданного русла (рис. 7-20) имеет критический уклон: $i = i_к$; при этом линии $K-K$ и $N-N$ совпадут и дадут в случае равномерного движения свободную поверхность потока. Рассматривая такой поток, находящийся в состоянии равномерного движения, можно написать:

$$Q = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 i} = \omega_к C_к \sqrt{R_к i_к}. \tag{7-58}$$

Ранее при определении $h_к$ было получено

$$\frac{\omega_к^3}{B_к} = \frac{\alpha Q^2}{g}. \tag{7-59}$$

Подставляя в эту зависимость выражение для Q согласно (7-58), получаем:

$$\frac{\omega_к^3}{B_к} = \frac{\alpha\,(\omega_к C_к \sqrt{R_к i_к})^2}{g} \tag{7-60}$$

или

$$\frac{\omega_к}{B_к} = \frac{\alpha C_к^2 R_к i_к}{g}, \tag{7-61}$$

откуда

$$i_к = \frac{g}{\alpha C_к^2}\,\frac{\omega_к}{B_к R_к}, \tag{7-62}$$

или окончательно

$$\underline{i_к = \frac{g}{\alpha C_к^2}\,\frac{\chi_к}{B_к}}. \tag{7-63}$$

Для весьма широких русел

$$\chi \approx B, \tag{7-64}$$

поэтому в случае таких русел

$$i_к = \frac{g}{\alpha C_к^2}. \tag{7-65}$$

Для заданного русла, имеющего действительный уклон i, всегда можем себе представить еще и критический уклон $i_к$, в общем случае не равный i.

Такой критический уклон (всегда больший нуля) можно себе представить не только при $i > 0$, но и когда $i = 0$ и $i < 0$.

§ 7-6. СПОКОЙНОЕ, БУРНОЕ И КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЯ ПОТОКА

Как было отмечено в конце § 7-4, мы ограничиваемся рассмотрением только таких русел, для которых величины K и ω^3/B непрерывно возрастают с увеличением глубины h.

Для таких русел кривая $K = f_1(h)$ не имеет максимума, а потому каждое из этих русел имеет только одну нормальную глубину. Что касается кривой $Э = f_2(h)$, то, как ясно из § 7-5, для указанных русел эта кривая имеет только один минимум (см. рис. 7-13); поэтому каждое из этих русел имеет также только одну критическую глубину.

Различают три состояния безнапорного потока в указанных руслах:

1) спокойное состояние потока, когда действительные глубины потока (при равномерном или неравномерном движении воды) больше критической глубины: $h > h_к$;

2) бурное состояние потока, когда $h < h_к$;

3) критическое состояние потока, когда $h = h_к$.

В случае критического состояния всегда должно быть равномерное движение, характеризуемое условием $i = i_к$ (рис. 7-20). В одном и том же русле, в зависимости от условий образования потока, можем иметь и спокойное (см. поток A

на рис. 7-21) и бурное движение (см. поток B на рис. 7-21); на рис. 7-21 совмещены два разных потока: A и B.

Спокойному движению отвечает ветвь I (см. рис. 7-13) кривой $Э = f(h)$, откуда видно, что спокойное движение характеризуется условием

$$\frac{\partial Э}{\partial h} > 0, \tag{7-66}$$

т. е. здесь с увеличением глубины h удельная энергия сечения $Э$ возрастает.

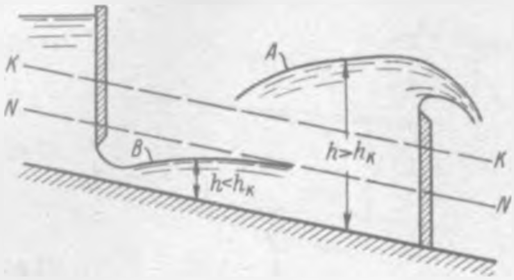


Рис. 7-21. Спокойный (A) и бурный (B) потоки

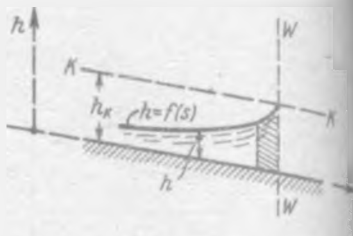


Рис. 7-22. Свободная поверхность в районе $h \approx h_к$

Бурному движению отвечает ветвь II (рис. 7-13) кривой $Э = f(h)$, откуда видно, что бурное движение характеризуется условием

$$\frac{\partial Э}{\partial h} < 0, \tag{7-67}$$

т. е. здесь с возрастанием h величина $Э$ убывает.

Далее в § 9-16 будет показано следующее.

Если в русле имеет место спокойное установившееся движение воды, то характер протекания воды на низовых участках влияет на течение в пределах верховых участков; течение же на верховых участках русла не сказывается на протекании воды в пределах низовых участков. Следовательно, при спокойном установившемся движении глубина воды в данном сечении русла определяется обстоятельствами движения воды в пределах нижележащей части потока и не зависит от обстоятельств движения в пределах верховой части потока.

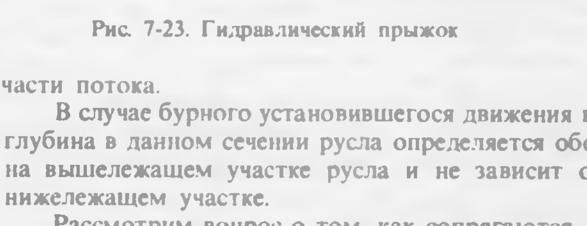


Рис. 7-23. Гидравлический прыжок

В случае бурного установившегося движения воды имеем обратную картину: глубина в данном сечении русла определяется обстоятельствами движения воды на вышележащем участке русла и не зависит от обстоятельств движения на нижележащем участке.

Рассмотрим вопрос о том, как сопрягаются два потока, когда один из них является спокойным, а другой бурным.

Выше было показано, что при

$$h = h_к \tag{7-68}$$

величина

$$\frac{\omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}, \qquad (7\text{-}69)$$

т. е. в случае (7-68) имеем:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = 1{,}0. \qquad (7\text{-}70)$$

Из уравнения (7-30) видим, что в случае (7-68), когда имеет место соотношение (7-70), знаменатель правой части (7-30) обращается в нуль и, следовательно, при $h \to h_к$ величина $\frac{dh}{ds}$ стремится к бесконечности, т. е.

$$\frac{dh}{ds} \to \infty. \qquad (7\text{-}71)$$

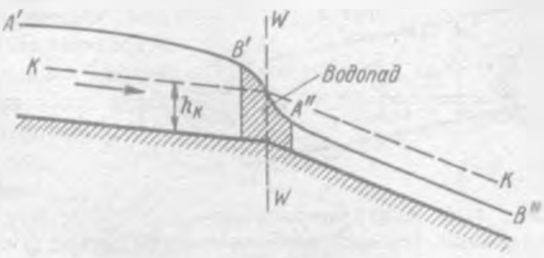


Рис. 7-24. Водопад

Следует запомнить, что *критическая глубина обращает в нуль знаменатель правой части дифференциального уравнения неравномерного движения.*

Из сказанного ясно, что кривая свободной поверхности, т. е. кривая $h = f(s)$, при $h = h_к$, имеет вертикальную касательную $W - W$ (рис. 7-22).

Однако надо учитывать, что указанный вывод получается в результате формального анализа уравнения (7-30). В действительности, в районе вертикали $W - W$ (см. заштрихованную область на рис. 7-22) имеем резко изменяющееся движение, в то время как уравнение (7-30) было выведено для плавно изменяющегося движения. В связи с этим *дифференциальное уравнение* (7-30), *строго говоря, неприложимо к области потока, где глубины его близки к критической*, а следовательно, упомянутый выше вывод носит условный характер.

Опыт показывает следующее (рис. 7-23 и 7-24):

1) переход бурного потока $A'B'$ в спокойный $A''B''$, как правило, осуществляется при помощи так называемого гидравлического прыжка $B'A''$ (рис. 7-23), который характеризуется наличием водоворотной области (вальца жидкости; см. гл. 8);

2) переход спокойного потока $A'B'$ в бурный $A''B''$ (рис. 7-24) осуществляется при помощи водопада $B'A''$ (область резко изменяющегося движения, схематично показанная на чертеже штриховкой, может быть названа водопадом).

§ 7-7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ (ВИДОВ) КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В СЛУЧАЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Прежде чем перейти к интегрированию дифференциального уравнения неравномерного движения, необходимо выяснить, какой вид может иметь искомая свободная поверхность потока. С этой целью обратимся к исследованию полученного ранее уравнения.[1]

Введем обозначение:

$$\Lambda = \frac{\omega^3}{B}. \qquad (7\text{-}72)$$

[1] Это исследование дается ниже в несколько упрощенном, (сокращенном) виде.

Напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением только цилиндрич[...] русел «правильной» формы, для которых Λ и K непрерывно возраст[...] с увеличением глубины наполнения h (русел замкнутого профиля, а также ру[...] имеющих составное поперечное сечение, мы не касаемся).

Далее будем рассматривать продольный профиль заданного русла (рис. 7-[...] причем всю область возможного расположения свободной поверхности буд[...] разбивать на три отдельные зоны (a, b, c) путем проведения линий $N-$[...] и $K-K$. На рис. 7-25 линия $N-N$ лежит выше линии $K-K$; однако мо[...] иметь место случаи, когда линия $K-K$ будет располагаться и выше лин[...] $N-N$ (см. ниже).

Рис. 7-25. Зоны расположения отдельных кривых свободной поверхности потока

1°. Русло с прямым уклоном ($i > 0$). Пр[...] дем уравнение (7-30) к виду, удобному д[...] исследования. С этой целью рассмотрим о[...] дельно числитель (ч) и знаменатель (з) прав[...] части этого уравнения:

1. Числитель правой части уравнения (7-[...]

$$ч = i - \frac{Q^2}{K^2} = i - \frac{K_0^2}{K^2}\,i, \qquad (7\text{-}7[...])$$

где расход Q выражен по формуле равномерн[...] движения, написанной применительно к неко[...] рому фиктивному потоку в заданном рус[...] характеризуемому равномерным движением

$$Q = K_0\sqrt{i}.$$

Из (7-73) окончательно получаем

$$ч = \left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right)i. \qquad (7\text{-}74)$$

2. Знаменатель правой части уравнения (7-30) с учетом (7-54)

$$з = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\,\frac{B}{\omega^3} = 1 - \frac{\omega_к^3}{B_к}\,\frac{B}{\omega^3}. \qquad (7\text{-}75)$$

Вводим обозначение

$$\Lambda_к = \frac{\omega_к^3}{B_к}. \qquad (7\text{-}76)$$

Величина Λ согласно (7-72) зависит только от h; $\Lambda_к$ является частным значением Λ, когда $h = h_к$.

Пользуясь обозначениями Λ и $\Lambda_к$, выражение (7-75) окончательно переписываем в виде:

$$з = 1 - \frac{\Lambda_к}{\Lambda}. \qquad (7\text{-}77)$$

Подставляя теперь найденные выражения для ч и з в уравнение (7-30), получаем:

$$(\mathrm{III})_{цилиндр;\,i>0} \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{\left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right)i}{1 - \frac{\Lambda_к}{\Lambda}} = \frac{ч}{з}. \qquad (7\text{-}78)$$

Зависимость $(\mathrm{III})_{цилиндр;\,i>0}$ является третьим видом дифференциального уравнения, удобным для исследования.

Рассматривая неравномерное движение в русле с прямым уклоном ($i > 0$), различаем т р и случая:

1-й, характеризуемый условиями

$$h_0 > h_к \text{ и } i < i_к; \tag{7-79}$$

здесь получим (см. ниже) т р и возможные формы свободной поверхности;

2-й, характеризуемый условиями

$$h_0 < h_к \text{ и } i > i_к; \tag{7-80}$$

здесь получим также т р и возможные формы свободной поверхности;

3-й, характеризуемый условиями

$$h_0 = h_к \text{ и } i = i_к; \tag{7-81}$$

здесь получим только д в е возможные формы свободной поверхности.

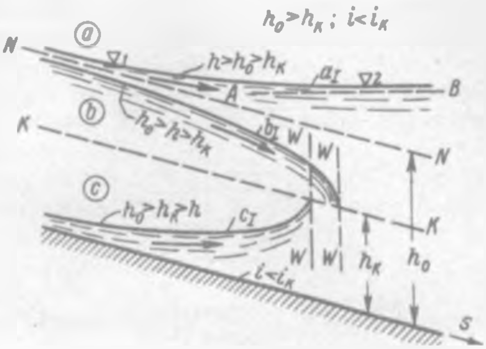


Рис 7-26. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i < i_к$

Как видно, при $i > 0$ всего получаем в о с е м ь различных свободных поверхностей (относящихся к случаю неравномерного движения):

а) шесть из них являются к р и в ы м и п о д п о р а;

б) две – к р и в ы м и с п а д а.

Заметим, что *к р и в о й п о д п о р а называется такая кривая свободной поверхности, вдоль которой (по течению) глубины потока возрастают; к р и в о й с п а д а – кривая свободной поверхности, вдоль которой глубины потока уменьшаются.*

Рассмотрим отдельно каждый из трех намеченных случаев:

1-й с л у ч а й, характеризуемый условиями (7-79). Три кривые свободной поверхности, получающиеся при данных условиях, представлены на рис. 7-26 (на этом чертеже совмещены т р и р а з л и ч н ы х п о т о к а, ограниченных сверху соответственно кривыми свободной поверхности a_1, b_1 и c_1). Как видно, каждой намеченной на рис. 7-25 зоне (a, b, c) отвечает своя кривая свободной поверхности, обозначаемая соответственно a_1, b_1 и c_1. Ни одна из них не пересекает линий $N-N$ и $K-K$. Направление выпуклостей кривых a_1 и b_1 – различно. Кривые a_1 и c_1 являются кривыми подпора; кривая же b_1 – кривой спада.

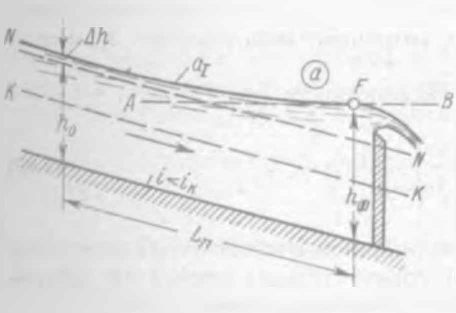


Рис. 7-27. Кривая свободной поверхности типа a_I

Рассмотрим каждую из показанных на рис. 7-26 кривых и докажем, что вид их должен быть таким, какой изображен на чертеже.

Кривая a_1. Эта кривая называется к р и в о й п о д п о р а т и п а a_1. Она появляется в русле, когда искусственно фиксируемая глубина $h_ф$ дает точку F свободной поверхности, лежащую в зоне a, т. е. когда (рис. 7-27)

$$h_ф > h_0 > h_к. \tag{7-82}$$

Как видно, все глубины h потока, ограниченного сверху кривой a удовлетворяют условию

$$h > h_0 > h_к. \tag{7-83}$$

Используя уравнение (III), докажем теперь, что кривая a_I имеет форму показанную на рис. 7-26 и 7-27.

1. Так как для данной кривой имеется условие (7-83), то эта кривая характеризуется неравенствами

$$K^2 > K_0^2; \quad \Lambda > \Lambda_к; \tag{7-84}$$

следовательно, в рассматриваемом случае

$$ч > 0 \text{ и } з > 0, \tag{7-85}$$

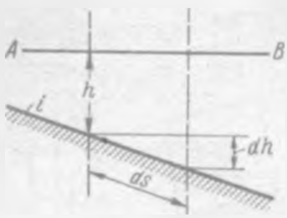


Рис. 7-28. К доказательству соотношения (7-87)

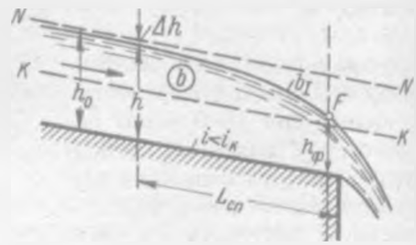


Рис. 7-29. Кривая свободной поверхности типа b_I

а потому [см. (7-78)]

$$\frac{dh}{ds} = \frac{+ч}{+з} > 0; \tag{7-86}$$

отсюда заключаем, что глубины потока h по течению увеличиваются, т. е. здесь действительно получаем кривую подпора. Дополнительно обратим внимание, что у этой кривой подпора отметки свободной поверхности вниз по течению уменьшаются: $\nabla_2 < \nabla_1$.

2. При стремлении h к бесконечности K^2 и Λ также стремятся к бесконечности; в то же время величины K_0^2 и $\Lambda_к$ сохраняют свои значения: $K_0^2 = \text{const}$ и $\Lambda_к = \text{const}$.

Следовательно, при стремлении h к бесконечности [см. (7-78)]

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_{h\to\infty} = \left(\frac{ч}{з}\right)_{h\to\infty} \to i; \tag{7-87}$$

отсюда заключаем, что в низовой своей части кривая a имеет г о р и з о н т а л ь н у ю «а с и м п т о т у» AB. Действительно, горизонтальная прямая AB характеризуется условием (см. обозначения dh и ds, показанные на рис. 7-28)

$$\frac{dh}{ds} = i. \tag{7-88}$$

Таким образом, вниз по течению кривая a_I будет все более и более приближаться к горизонтальной прямой.

3. При стремлении h к h_0 (см. левый конец кривой a_I) величина K^2 стремится к K_0^2, а потому [см. (7-78)]

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_{h\to h_0} = \left(\frac{ч}{з}\right)_{h\to h_0} \to 0; \tag{7-89}$$

следовательно, в верховой части кривая a_{I} будет иметь асимптоту в виде линии $N-N$, характеризуемой условием $\frac{dh}{ds}=0$.

4. Учитывая, что кривая a_{I} имеет, как доказано выше, две асимптоты в виде линий $A-B$ и $N-N$, можем утверждать, что выпуклость рассматриваемой кривой обращена вниз.

5. Так как кривая a_{I} асимптотически приближается к прямой $N-N$, то ясно, что подпор, вызванный плотиной (рис. 7-27), распространяется вверх по течению теоретически на бесконечно большую длину. Однако практически пренебрегают некоторой незначительной величиной Δh, равной, например $(0{,}01 \div 0{,}02)\,h_0$, и считают длину кривой подпора $L_п$ конечной.

6. Удельная энергия сечения Э вниз по течению в случае кривой a_{I} должна увеличиваться. Это ясно из того, что кривая a_{I} вниз по течению удаляется от линии $K-K$, которой отвечает минимум Э.[1]

Кривая b_{I}. Эта кривая называется кривой спада типа b_{I}. Она появляется в русле, когда искусственно фиксируемая глубина $h_ф$ дает точку F свободной поверхности, лежащую в зоне b, т. е. когда (рис. 7-29)

$$h_0 > h_ф > h_к. \tag{7-90}$$

Как видно, все глубины h потока, ограниченного сверху кривой b_{I}, удовлетворяют условию

$$h_0 > h > h_к. \tag{7-91}$$

Анализируя уравнение (7-78), имеем следующее:

1. Так как данная кривая характеризуется соотношением (7-91), то для этой кривой

$$K_0 > K \text{ и } \Lambda > \Lambda_к, \tag{7-92}$$

а следовательно,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{-ч}{+з} < 0. \tag{7-93}$$

Отсюда заключаем, что глубины потока вниз по течению уменьшаются, т. е. здесь мы действительно получаем кривую спада.

2. При стремлении h к h_0 величина K^2 стремится к K_0^2, а следовательно,

$$\left(\frac{dh}{ds}\right)_{h\to h_0} = \left(\frac{ч}{з}\right)_{h\to h_0} \to 0, \tag{7-94}$$

т. е. кривая b_{I} в левой (верховой) своей части имеет асимптоту в виде линии $N-N$.

3. При $h=h_к$ кривая b_{I} имеет вертикальную касательную (см. § 7-6).

4. Учитывая, что кривая b_{I} имеет асимптоту $N-N$ и вертикальную касательную $W-W$ (рис. 7-26), можем утверждать, что выпуклость этой кривой обращена вверх.

---

[1] Надо заметить, что более подробный формальный анализ уравнения (7-78) показывает, что кривая a_{I} в некоторых случаях (в практическом отношении не имеющих существенного значения) в низовой своей части получает вид иной, чем то показано на рис. 7-26 и 7-27 (характеризуемый наличием точек перегиба и максимума).

5. Длина кривой $b_{\rm I}$, поскольку она асимптотически приближается к ли $N-N$, теоретически равна бесконечности. Однако, пренебрегая незначител величиной Δh (рис. 7-29), практически длину этой кривой $L_{\rm cn}$ считаем коне

6. Удельная энергия сечения Э вниз по течению в случае кривой $b_{\rm I}$ уме шается, поскольку данная кривая по течению приближается к линии $K-$ которой отвечает $Э_{\rm мин}$.

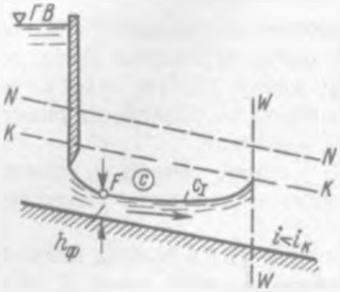


Рис. 7-30. Кривая свободной поверхности типа $c_{\rm I}$

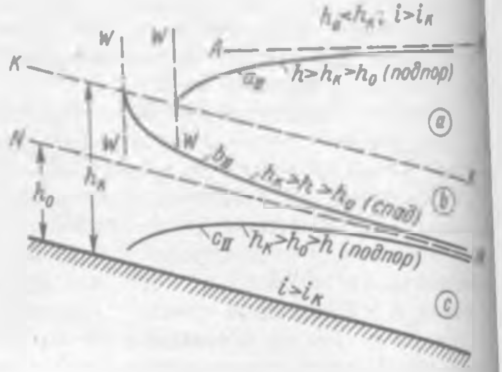


Рис. 7-31. Формы (виды) отдельных кривы свободной поверхности при $i > i_{\rm к}$

Кривая $c_{\rm I}$. Кривая подпора типа $c_{\rm I}$ появляется в русле, когда искусствен фиксируемая глубина $h_ф$ дает точку F свободной поверхности, лежащ в зоне c, т. е. когда (рис. 7-30)

$$h_ф < h_{\rm к} < h_0. \qquad (7\text{-}95)$$

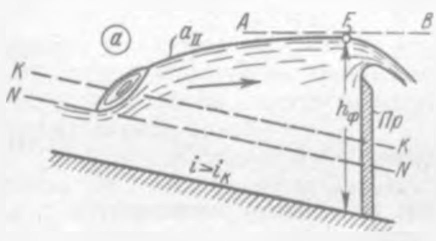


Рис. 7-32. Кривая свободной поверхности типа $a_{\rm II}$

Все глубины h потока, ограничен ного сверху кривой $c_{\rm I}$, удовлетворяют условию

$$h_0 > h_{\rm к} > h. \qquad (7\text{-}96)$$

Рассуждая, как и выше, можем по казать, что кривая $c_{\rm I}$ обладает следую щими свойствами:

1) она является кривой подпора;

2) на правом своем конце имеет вертикальную касательную $W-W$;

3) асимптот не имеет;

4) выпуклость ее обращена вниз;

5) удельная энергия сечения Э вдоль данной кривой (по течению) умень шается;

6) длина ее является конечной.

2-й случай, характеризуемый условиями (7-80). Путем исследования уравнения (III), проводимого точно так же, как и в 1-м случае, легко доказать, что в канале при условиях (7-80) может иметь место одна из трех поверх ностей, изображенных на рис. 7-31 ($a_{\rm II}$, $b_{\rm II}$ или $c_{\rm II}$).

Из чертежа видно: 1) какая из этих кривых является кривой подпора и какая – кривой спада; 2) какие имеются у данных кривых (по их концам) асимптоты или касательные; 3) в какую сторону обращены выпуклости кривых; 4) как изменяется величина Э вдоль течения для различных кривых.

Та или другая из рассматриваемых кривых появляется в русле в зависимости от того, в какой зоне (a, b или c) мы фиксируем точку свободной поверхности F. Например, на рис. 7-32 показана кривая a_{II}, появившаяся в русле после того, как в нем была создана преграда $Пр$, при помощи которой искусственно зафиксировали в русле глубину $h_{\text{ф}}$ и получили точку F, лежащую в зоне a.[1]

3-й с л у ч а й, характеризуемый условиями (7-81). Здесь линии $N-N$ и $K-K$ совпадают (рис. 7-33), а потому зона b исчезает; остаются только две зоны: a и c. Соответственно этому получаем две кривые свободной поверхности: типа a_{III} и типа c_{III}.

Кривая a_{III} характеризуется соотношением

$$h > h_к = h_0; \qquad (7\text{-}97)$$

кривая c_{III} — соотношением

$$h < h_к = h_0. \qquad (7\text{-}98)$$

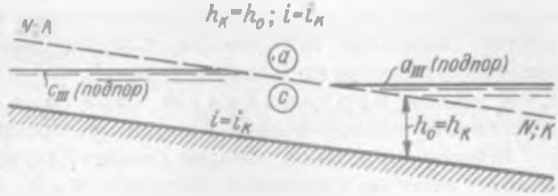


Рис. 7-33. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i = i_к$

Путем исследования уравнения (7-78) можно доказать, что эти кривые являются кривыми подпора и имеют форму, показанную на рис. 7-33. Можно также убедиться, что в случае широкого прямоугольного русла, если будем считать, что коэффициент Шези C не изменяется с глубиной (C = const), данные кривые обращаются в п р я м ы е г о р и з о н т а л ь н ы е л и н и и.

Рис. 7-34. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i = 0$

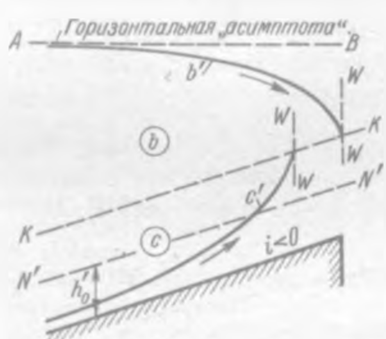


Рис. 7-35. Формы (виды) отдельных кривых свободной поверхности при $i < 0$

2.° **Русло с горизонтальным дном ($i = 0$).** После соответствующего преобразования уравнения $(II)_{цилиндр;\, i=0}$ [приведения его к виду $(III)_{i=0}$, удобному для исследования] и после анализа данного уравнения легко показать, что в случае $i = 0$ может иметь место одна из д в у х свободных поверхностей, показанных на рис. 7-34 (кривая b_0 или c_0).

В данном случае $h_0 = \infty$, поэтому зона a исчезает (линия $N-N$ располагается на бесконечно большом расстоянии от линии дна); остаются только две зоны: b и c. Кривая спада b_0, лежащая в зоне b, на левом своем конце имеет

[1] Более подробный формальный анализ уравнения (7-78) показывает, что кривая a_{II} должна иметь в верхней (правой) своей части несущественный с практической точки зрения максимум.

горизонтальную «асимптоту», удаленную на бесконечно большое рассто
от линии дна русла. На правом своем конце кривая b_0, так же как и кри
лежащая в зоне c и являющаяся кривой подпора, имеет вертикальную
тельную $W-W$.

3°. Русло с обратным уклоном дна ($i < 0$). Здесь, как и в случае $i = 0$,
чаем только две свободные поверхности: типа b' (кривая спада) и ти
(кривая подпора) – рис. 7-35. Подчеркнем, что b' имеет такую же горизонтал
«асимптоту», как и b_0.

4°. Заключительные замечания. Как видно, для случая неравномерного
жения воды в цилиндрическом русле мы получили всего двенадцать ф
кривых свободной поверхности. Следует запомнить, что кривые свобод
поверхности всегда подходят к линии $N-N$ асимптотически, к линии
$K-K$ – имея вертикальную касательную, причем кривая свобод
поверхности данной формы никогда не пересекает линий $K-K$ и $N-N$.

Величина удельной энергии сечения Э увеличивается по течению для
кривых, которые удаляются от линии $K-K$, и уменьшается по течению
тех кривых, которые приближаются к линии $K-K$.

§ 7-8. ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРЯМОГО УКЛОНА РУСЛА ($i > 0$)

Преобразуем знаменатель правой части уравнения (7-30):

$$з = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3} = 1 - \frac{\alpha (K_0^2 i)}{g}\frac{B}{\omega\omega^2}\frac{C^2R}{C^2R}. \qquad (7\text{-}99)$$

Так как

$$\omega^2 C^2 R = K^2 \text{ и } \frac{\omega}{R} = \chi, \qquad (7\text{-}100)$$

то (7-99) можно представить в виде

$$з = 1 - \frac{\alpha K_0^2 i}{g}\frac{BC^2}{\chi K^2} = 1 - \frac{\alpha i C^2}{g}\frac{B}{\chi}\frac{K_0^2}{K^2}. \qquad (7\text{-}101)$$

Вводим обозначение:

$$\frac{\alpha i C^2}{g}\frac{B}{\chi} = j; \qquad (7\text{-}102)$$

при этом (7-101) получает вид

$$з = 1 - j\frac{K_0^2}{K^2}. \qquad (7\text{-}103)$$

В случае широкого русла $B \approx \chi$, причем

$$j = \frac{\alpha i C^2}{g}. \qquad (7\text{-}104)$$

Подставляя (7-74) и (7-103) в (7-30), получаем

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1 - \dfrac{K_0^2}{K^2}}{1 - j\dfrac{K_0^2}{K^2}}\, i. \qquad (7\text{-}105)$$

Вводим дополнительное обозначение:

$$\boxed{\frac{K}{K_0} = \varkappa,} \tag{7-106}$$

где ϰ называется **относительным модулем расхода**.

Применяя это обозначение, окончательно вместо (7-105) получаем

$$(\mathrm{IV})_{i>0} \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2 - j}\, i. \tag{7-107}$$

Уравнение $(\mathrm{IV})_{i>0}$ является **четвертым** видом дифференциального уравнения, удобным для интегрирования (при $i > 0$).

Приведем несколько замечаний в отношении величины j:

1) из (7-102) видно, что величина j для заданного цилиндрического русла зависит только от глубины h:

$$j = f(h); \tag{7-108}$$

2) можно показать, что для широкого прямоугольного русла

$$j = \frac{h_к^3}{h_0^3}\frac{C^2}{C_0^2}; \tag{7-109}$$

если для этого русла пренебречь изменением коэффициента Шези C с изменением глубины, то можно считать, что $C = C_0$; при этом

$$j = \left(\frac{h_к}{h_0}\right)^3; \tag{7-110}$$

3) из формулы (7-110) видно, что при малых уклонах (когда $h_0 > h_к$) $j < 1{,}0$; при больших же уклонах (когда $h_к > h_0$) $j > 1{,}0$, причем j в этом случае может достигать большой величины.

§ 7-9. ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ, УДОБНЫЙ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РУСЛА ($i = 0$)

Преобразовав уравнение $(\mathrm{II})_{цилиндр;\, i=0}$ [см. (7-34)] так же, как и уравнение, относящееся к прямому уклону дна, окончательно получаем

$$(\mathrm{IV})_{i=0} \qquad \frac{dh}{ds} = -\frac{1}{\varkappa_к^2 - j_к}\, i_к, \tag{7-111}$$

где $i_к$ – критический уклон; $\varkappa_к$ – новое обозначение:

$$\varkappa_к = \frac{K}{K_к}; \tag{7-112}$$

здесь $K_к$ – модуль расхода, отвечающий критической глубине.

Величина $j_к$ будет

$$j_к = \frac{\alpha i_к C^2}{g}\frac{B}{\chi}, \tag{7-113}$$

где C, B и χ отвечают действительной глубине h (а не критической глубине $h_к$).

Для случая широкого русла, когда $B \approx \chi$,

$$j_к = \frac{\alpha i_к C^2}{g}; \tag{7-114}$$

если в эту формулу подставить (7-65), то получаем

$$j_к = \left(\frac{C}{C_к}\right)^2; \tag{7-115}$$

отсюда видно, что, пренебрегая изменением C с изменением h, величину $j_к$ для широкого русла получаем

$$j_к = 1.$$

§ 7-10. ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ, УДОБНЫЙ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ РУСЛА С ОБРАТНЫМ УКЛОНОМ ДНА ($i < 0$)

В результате преобразования уравнения $(II)_{цилиндр, i<0}$ [см. (7-36)] окончательно получаем

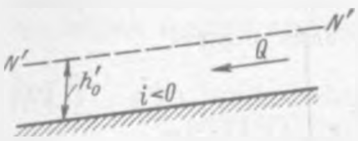


Рис. 7-36. Определение фиктивной нормальной глубины h'_0

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{\varkappa'^2 + 1}{\varkappa'^2 - j'} i', \tag{7-116}$$

$$\varkappa' = \frac{K}{K'_0}, \tag{7-117}$$

$$j' = \frac{\alpha i' C^2}{g} \frac{B}{\chi}; \tag{7-118}$$

здесь i' — абсолютная величина уклона дна русла: $i' = |i|$; K'_0 — модуль расхода, отвечающий некоторой воображаемой нормальной глубине h'_0, которая получается, если представим себе, что при заданном расходе Q вода движется по уклону, т. е. в обратную сторону относительно действительного течения, причем в русле имеется равномерный режим (рис. 7-36). Заметим, что свободная поверхность $N'-N'$ такого фиктивного потока, в отличие от свободной поверхности $N-N$ фиктивного потока, с которым мы сталкивались ранее, может пересекать действительную свободную поверхность b' или c' (рис. 7-35).

§ 7-11. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ

Уравнение $(IV)_{i>0}$ [см. (7-107)] можно записать в виде:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i} \frac{\varkappa^2 - j}{\varkappa^2 - 1}. \tag{7-119}$$

Поскольку правая часть этого уравнения является функцией только h:

$$\frac{1}{i} \frac{\varkappa^2 - j}{\varkappa^2 - 1} = f(h),$$

то (7-119) можно представить в виде:

$$ds = f(h)\, dh. \tag{7-120}$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$s = \int_{h_1}^{h_2} f(h)\, dh. \tag{7-121}$$

Как видно, для того чтобы получить расчетное уравнение, связывающее h и s, необходимо отыскать неопределенный интеграл:

$$f_0(h) = \int f(h)\,dh \qquad (7\text{-}122)$$

В общем случае эта задача может быть решена только приближенно. Существует много различных приближенных способов отыскания указанного неопределенного интеграла (Бресса, Толькмитта, Дюпюи – Рюльмана, Б. А. Бахметева, Р. Р. Чугаева, А. Н. Рахманова и др.).[1]

Ниже остановимся на пояснении только способа Б. А. Бахметева, который и следует в настоящее время рекомендовать для большинства русел «правильного» поперечного сечения, встречающихся в практике. Предварительно осветим особую показательную зависимость для отношения модулей расхода, поскольку эта зависимость полагается в основу способа Б. А. Бахметева.

§ 7-12. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ ОТНОШЕНИЯ МОДУЛЕЙ РАСХОДА. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ РУСЛА

Будем вначале рассматривать случай $i > 0$. В уравнение неравномерного движения [см., например (7-119)] входит отношение $K^2 : K_0^2 = \varkappa^2$. Это отношение представляет собой достаточно сложную функцию от h, поскольку

$$K = \omega C \sqrt{R}, \qquad (7\text{-}123)$$

где ω, C и R иногда сложно выражаются через h. В связи с этим отыскание интеграла, приведенного в § 7-11, представляет значительные трудности.

Для облегчения решения указанной задачи вместо формулы Шези, в соответствии с которой мы устанавливаем связь между K и h, Б. А. Бахметев предложил для интегрирования уравнения (7-119) использовать особую показательную[2] зависимость, дающую более простую связь между K и h; эта зависимость имеет вид:

$$\boxed{\left(\frac{K''}{K'}\right)^2 = \left(\frac{h''}{h'}\right)^x,} \qquad (7\text{-}124)$$

где h'' и h' – две произвольные глубины, взятые для рассматриваемого поперечного сечения русла; K'' и K' – модули расхода, отвечающие этим глубинам (см. далее рис. 7-38, *а*); что касается показателя степени x, то он принимается постоянным для данного русла: величина x считается не зависящей от величины глубины h' и h'' ($x = \text{const}$). Этот показатель в формуле (7-124) называется **гидравлическим показателем русла**.

Зависимость (7-124) можно представить в виде (полагая $K'' = K$):

$$K = A\sqrt{h^x}, \qquad (7\text{-}124')$$

где

$$A = \frac{K'}{\sqrt{(h')^x}} = \text{const (для данного сечения)}. \qquad (7\text{-}124'')$$

Логарифмируя (7-124), получаем

---

[1] Первые три названных способа являются устаревшими; об остальных способах см. петит на стр. 308 – 309.

[2] Строго говоря, данная зависимость (при постановке вопроса по Бахметеву) является не «показательной», а «степенной» (для данного русла принимается $x = \text{const}$).

$$x = \frac{2\lg K'' - 2\lg K'}{\lg h'' - \lg h'}. \qquad (7\text{-}1$$

Легко показать, что зависимость (7-124′) для некоторых русел явл теоретически «точной», т. е. она в точности совпадает с зависимостью (7-1 для других же русел – только приближенной, т. е. она только приближен описывает зависимость (7-123); наконец, имеется группа русел, к котор зависимость (7-124′) вообще не применима: для этих русел она дает результат значительно отличающиеся от получаемых по зависимости (7-123).

Рассмотрим более подробно различные русла, встречающиеся в практи

1. Русла, для которых зависимость (7-124′), а следователь и зависимость (7-124), является теоретически «точной» (для эт русел x вовсе не зависит от глубины: $x = \mathrm{const}$). Сюда относятся русла:

а) весьма узкие прямоугольные ($x = 2{,}0$);

б) широкие прямоугольные ($x = 3{,}4$);

в) узкие параболические ($x = 3{,}7$);

г) широкие параболические ($x = 4{,}4$);

д) треугольные ($x = 5{,}4$).

2. Русла, для которых зависимость (7-124) может быт применима с некоторым приближением. Сюда относятся русл

а) прямоугольные и параболические (исключая широкие и узкие);

б) трапецеидальные;

в) по своему очертанию приближающиеся к названным.

Для таких русел при $i > 0$ величину x следует определять:

а) или по формуле

$$x = \frac{2\lg K_{\text{ср}} - 2\lg K_0}{\lg h_{\text{ср}} - \lg h_0}, \qquad (7\text{-}126$$

где $h_{\text{ср}}$ – средняя глубина на данном участке потока, $K_{\text{ср}}$ – модуль расхо отвечающий этой глубине;

б) или по формулам Р. Р. Чугаева:

для прямоугольного русла

$$x = 3{,}4 - \frac{2{,}8}{\dfrac{b}{h_{\text{ср}}} + 2}; \qquad (7\text{-}127)$$

для трапецеидального русла

$$x = 3{,}4\left(1 + \frac{m}{\dfrac{b}{h_{\text{ср}}} + m}\right) - 1{,}4\,\frac{m'}{\dfrac{b}{h_{\text{ср}}} + m'}, \qquad (7\text{-}128)$$

где b – ширина русла по дну, m – коэффициент откоса; $m' = 2\sqrt{1 + m^2}$.

При использовании формул (7-126)–(7-128) величину $h_{\text{ср}}$ можно устанавливать весьма приближенно (погрешность в величине $h_{\text{ср}}$ мало сказывается на окончательных результатах расчетов).

3. Русла, к которым зависимость (7-124) явно неприменима.[1] К этой категории русел относятся:

---

[1] Поскольку в этой зависимости x считается величиной постоянной; для полного же совпадения (7-124) с (7-123) в данном случае необходимо иметь переменную величину x (как то указано на рис. 7-37).

а) имеющие замкнутый профиль поперечного сечения;

б) составные;

в) некоторые правильные русла типа, представленного на рис. 7-37.

4. Остальные русла, в отношении которых заранее неизвестно, применима ли к ним зависимость (7-124). С тем, чтобы выяснить вопрос о применимости к этим руслам зависимости (7-124), необходимо прежде всего вычертить особый график, называемый логарифмической анаморфозой. Этот график, строящийся для данного поперечного сечения русла (рис. 7-38, *а*), имеет вид, показанный на рис. 7-38, *б*.

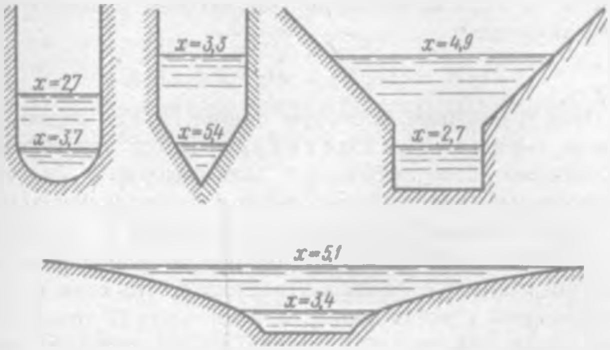


Рис. 7-37. Русла, для которых $x \neq \text{const}$ (величина x изменяется с глубиной наполнения)

По вертикальной оси этого графика откладываются величины $\lg h$, по горизонтальной оси — величины $2 \lg K$. На данном графике нанесено две линии: *I* и *II*, причем каждая из этих линий выражает зависимость

$$2 \lg K = f(\lg h). \qquad (7\text{-}129)$$

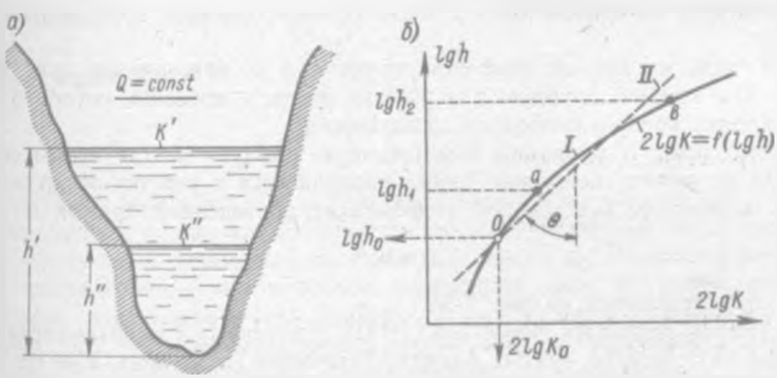


Рис. 7-38. Логарифмическая анаморфоза $2 \lg K = f(\lg h)$; $\operatorname{tg} \theta = x$

Линия *I* построена по уравнению (7-123). При построении этой линии задаются различными величинами h и затем вычисляют $\lg h$ и $2 \lg K$, причем для определения K пользуются формулой (7-123). Эту линию можно назвать линией Шези.

Линия *II* является прямой; для построения ее пользуемся показательной

§ 7-13. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СЛУЧАЕ РУСЕЛ С ПРЯМЫМ УКЛОНОМ ДНА ($i > 0$) ПО СПОСОБУ БАХМЕТЕВА

Этот способ, предложенный Б. А. Бахметевым в 1911–1914 гг., применим только к руслам, для которых приемлема показательная зависимость (7-124); как известно из *§ 7-12*, такие русла характеризуются тем, что линия *Шези*, описываемая уравнением $2\lg K = f(\lg h)$, является или прямой линией, или кривой, близкой к прямой.[1]

Выше мы получили дифференциальное уравнение (7-107):

$$(\mathrm{IV})_{i>0} \qquad \frac{dh}{ds} = \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2 - j}\, i. \qquad (7\text{-}133)$$

Для интегрирования этого уравнения переписываем зависимость Бахметева для модуля расхода в виде (7-130) или в виде

$$\boxed{\varkappa^2 = \eta^x,} \qquad (7\text{-}134)$$

где

$$\boxed{\varkappa = \frac{K}{K_0}} \text{ и } \boxed{\eta = \frac{h}{h_0},} \qquad (7\text{-}135)$$

причем здесь величина η называется относительной глубиной.

Подставляя (7-134) в (7-133), имеем

$$h_0 \frac{d\eta}{ds} = \frac{\eta^x - 1}{\eta^x - j}\, i, \qquad (7\text{-}136)$$

где

$$h_0\, d\eta = dh.$$

Уравнение (7-136) можно переписать:

$$\frac{i}{h_0} ds = \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} d\eta = \left(1 - 1 + \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1}\right) d\eta, \qquad (7\text{-}137)$$

откуда получаем

откуда получаем

$$\frac{i}{h_0} ds = d\eta - \frac{1 - j}{1 - \eta^x} d\eta. \qquad (7\text{-}138)$$

— угловой коэффициент проведенной прямой II:

$$x = \operatorname{tg}\theta, \qquad (7\text{-}132)$$

где θ — угол, указанный на рис. 7-38.

Разумеется, пользуясь формулой (7-132), величину $\operatorname{tg}\theta$ надо вычислять, как отношение двух катетов, взятых в соответствующих масштабах, а не по углу θ, измеренному в градусах.

Заметим, что для русел, перечисленных выше в п. 1, линия Шези *I* является строго прямой.

Выше мы имели в виду случай $i > 0$. Что касается горизонтальных русел и русел с обратным уклоном, то, как будет видно из дальнейшего, в этих случаях величину x следует определять, как указано выше, заменяя только нормальную глубину h_0 глубиной $h_к$ (когда $i = 0$) или глубиной h'_0 (когда $i' < 0$; об этой глубине см. § 7-10).

В результате получаем

$$\frac{i}{h_0}(s_2 - s_1) = \eta_2 - \eta_1 - \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1-j}{1-\eta^x}\,d\eta, \tag{7-139}$$

где

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0} \text{ и } \eta_2 = \frac{h_2}{h_0}. \tag{7-140}$$

Как показывают специальные подсчеты, j обычно мало изменяется с изменением глубины потока. Имея это в виду, $(1 - j)$ можно вынести за знак интеграла, приписав величине j некоторое среднее ее значение, которое далее будем обозначать через $\bar{j}$. Учитывая дополнительно, что

$$s_2 - s_1 = l, \tag{7-141}$$

вместо (7-139) получаем

$$\frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j})\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{1-\eta^x}. \tag{7-142}$$

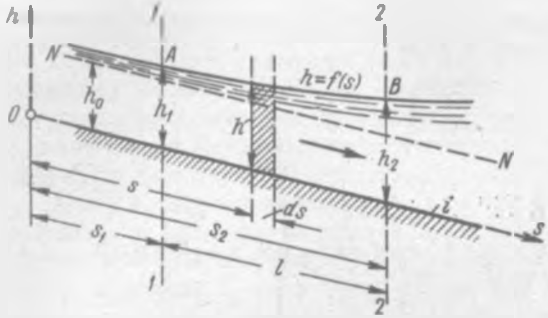


Рис. 7-39. К интегрированию уравнения (7-138)

Считая, что для данного русла $x = \text{const}$, подынтегральную функцию в уравнении (7-142) следует рассматривать как функцию только η. Поэтому можем написать

$$\int \frac{d\eta}{1-\eta^x} = \varphi(\eta) + C_0, \tag{7-143}$$

где C_0 — произвольная постоянная величина.

Пользуясь обозначением (7-143), уравнение (7-142) окончательно можно представить в виде[1]

$$\boxed{\frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j})[\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)].} \tag{7-144}$$

Это и есть уравнение кривой свободной поверхности потока AB. Оно называется **уравнением неравномерного движения** или иначе — **уравнением Бахметева** (для случая $i > 0$).

Приведем в заключение некоторые дополнительные пояснения, относящиеся к уравнению (7-144).

1. В (7-144) входит среднее для рассматриваемого участка потока значение j, т. е. $\bar{j}$. Величину $\bar{j}$ практически определяют:

а) или по формуле

$$\bar{j} = \frac{1}{2}(j_1 + j_2), \tag{7-145}$$

где j_1 и j_2 вычисляются по зависимости (7-102) соответственно для глубин h_1 и h_2;

[1] В некоторых литературных источниках вместо обозначения $\varphi(\eta)$ применяется обозначение $Б(\eta)$.

б) или по формуле

$$\bar{j} = \frac{\alpha i \bar{C}^2}{g} \frac{\bar{B}}{\bar{\chi}}, \tag{7-146}$$

где $\bar{C}$, $\bar{B}$, $\bar{\chi}$ вычисляются для глубины

$$\bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2}. \tag{7-147}$$

2. Величины $\varphi(\eta)$, входящие в уравнение (7-144) [см. также зависимость (7-143)], были вычислены путем разложения подынтегральной функции в ряд для разных значений η и x. Результаты этих вычислений были сведены в таблицу (см. табл. П-4 приложения, стр. 639).

Установив для данного русла величину x (см. § 7-12), при помощи указанной таблицы можем легко найти по вычисленным предварительно η_1 и η_2 соответствующие им функции $\varphi(\eta_1)$ и $\varphi(\eta_2)$. Разумеется, по этой таблице можно решать и обратную задачу: зная, например, $\varphi(\eta_1)$, можно найти соответствующие значения η_1.

Численное значение x нам практически необходимо лишь для того, чтобы выбрать по таблице соответствующее $\varphi(\eta)$ [по η] или η [по $\varphi(\eta)$]. В том случае, если найденное значение x не совпадает с табличным его значением, приходится иногда интерполировать по x между соответствующими значениями $\varphi(\eta)$, взятыми из соседних вертикальных граф таблицы [1]. Впрочем, в большинстве случаев практически можно округлять найденное значение x до ближайшего его табличного значения, чтобы избавиться от указанной интерполяции. Надо заметить, что в некоторых книгах табл. П-4 приложения дается в несколько иной форме, чем у нас: она разбивается на ряд отдельных таблиц, каждая из которых отвечает определенному x.

3. Пользуясь уравнением (7-144), можно решить следующие практические задачи:

а) дана глубина h_1 (или h_2). Требуется определить глубину h_2 (или h_1) в сечении потока, расположенном на расстоянии l от сечения, где задана глубина h_1 (или h_2);

б) заданы две глубины: h_1 и h_2. Требуется найти расстояние l между сечениями, для которых глубины h_1 и h_2 заданы;

в) в определенном сечении потока задана глубина h_1 или h_2. Требуется построить кривую свободной поверхности AB.[2]

§ 7-14. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СЛУЧАЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РУСЛА ($i = 0$) ПО СПОСОБУ БАХМЕТЕВА

В этом случае показательную зависимость для модуля расхода переписывают в виде

$$\left(\frac{K}{K_к}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_к}\right)^x \tag{7-148}$$

или в виде

$$\boxed{\varkappa_к^2 = \xi^x,} \tag{7-149}$$

[1] Разумеется, к интерполяции приходится прибегать и в случае, когда известные η [или $\varphi(\eta)$] не совпадают с табличными значениями.

[2] Порядок расчета, которого следует придерживаться при решении упомянутых задач, освещен в материалах практических занятий (см. стр. 305–307).

где ξ – относительная глубина и $\varkappa_к$ – относительный модуль расхода:

$$\xi = \frac{h}{h_к}; \quad \varkappa_к = \frac{K}{K_к}. \tag{7-150}$$

Как видно, в случае $i = 0$ действительные элементы потока (h и K) относим к критическим элементам потока ($h_к$ и $K_к$). Пользуясь соотношением (7-149), уравнение $(IV)_{i=0}$ (см. § 7-9) можно решить так же, как мы решали в § 7-13 уравнение $(IV_{i>0})$. В результате для случая $i = 0$ получаем соответствующее уравнение неравномерного движения. Этому уравнению обычно придают один из следующих видов:

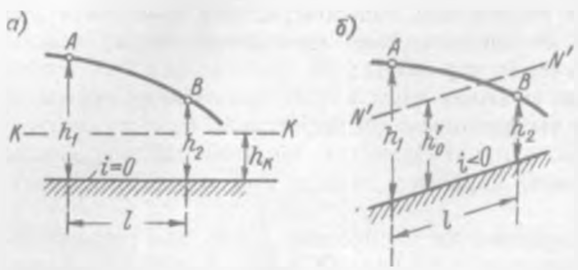


Рис. 7-40. Кривые свободной поверхности при $i = 0$ и $i < 0$: *а* – к уравнениям (7-151) и (7-152); *б* – к уравнению (7-157)

а) первый вид уравнения:

$$\frac{i_к l}{h_к} = \bar{j}_к(\xi_2 - \xi_1) - \frac{1}{x+1}\left[\xi_2^{x+1} - \xi_1^{x+1}\right]; \tag{7-151}$$

б) второй вид уравнения:

$$\frac{i_к l}{h_к} = (\bar{j}_к - 1)(\xi_2 - \xi_1) - [\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)], \tag{7-152}$$

где $\bar{j}_к$ – среднее значение $j_к$ на рассматриваемом участке потока ($\bar{j}_к$ вычисляется аналогично величине $\bar{j}$, см. § 7-13); величины ξ_1 и ξ_2 равны (рис. 7-40, *а*):

$$\xi_1 = \frac{h_1}{h_к} \text{ и } \xi_2 = \frac{h_2}{h_к}, \tag{7-153}$$

что касается функций $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$, то они определяются по таблицам, приводимым в литературе, в зависимости от величин ξ_1 и ξ_2, а также в зависимости от предварительно найденной величины x (см. табл. П-5 приложения, стр. 642–646).

§ 7-15. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В СЛУЧАЕ РУСЛА С ОБРАТНЫМ УКЛОНОМ ДНА ($i < 0$) ПО СПОСОБУ БАХМЕТЕВА

В этом случае показательную зависимость для модуля расхода переписывают в виде:

$$\left(\frac{K}{K_0'}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0'}\right)^x \tag{7-154}$$

или в виде

$$\boxed{\varkappa'^2 = \zeta^x,} \tag{7-155}$$

где ζ – относительная глубина и $\varkappa'$ – относительный модуль расхода:

$$\zeta = \frac{h}{h_0'}; \quad \varkappa' = \frac{K}{K_0'}. \tag{7-156}$$

Как видно, в случае $i < 0$ действительные элементы h и K мы относим к элементам фиктивного равномерного потока h'_0 и K'_0 (K'_0 есть модуль расхода, отвечающий глубине h'_0, поясненной в § 7-10; см. рис. 7-36).

Пользуясь соотношением (7-155), уравнение $(\mathrm{IV})_{i<0}$ (см. § 7-10) можно решить так же, как $(\mathrm{IV})_{i>0}$. В результате получаем следующее уравнение неравномерного движения для случая $i < 0$:

$$\frac{i'l}{h'_0} = -(\zeta_2 - \zeta_1) + (1 + \bar{j}')[\varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_1)]; \qquad (7\text{-}157)$$

где $\bar{j}'$ – среднее значение j' на рассматриваемом участке потока, вычисляемое так же, как и $\bar{j}$ (см. § 7-13); величины ζ_1 и ζ_2 равны (рис. 7-40, *б*):

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{h'_0}; \quad \zeta_2 = \frac{h_2}{h'_0}; \qquad (7\text{-}158)$$

что касается функций $\varphi(\zeta_1)$ и $\varphi(\zeta_2)$, то эти функции определяются по таблицам, приводимым в литературе, в зависимости от величин ζ_1 и ζ_2, а также от предварительно найденной величины x (см., например, [7-4]).

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ПОСТРОЕНИЮ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Будем предполагать, что нам, как это обычно и бывает, заданы: расход Q, уклон дна[1] русла i, форма и размеры поперечного сечения русла (например, канал трапецеидального сечения, ширина по дну b, коэффициент откоса m), а также даны указания относительно шероховатости русла, позволяющие выбрать его коэффициент шероховатости n. Кроме того, будем полагать, что нам задано условие, определяющее глубину $h_ф$ потока в начале или в конце того участка русла, на котором предполагается построить кривую свободной поверхности потока (см. § 7-1; рис. 7-2).

При решении задачи о построении кривой свободной поверхности весь расчет удобно разбить на отдельные пункты, которые мы ниже и поясним.

1°. Определение нормальной глубины наполнения h_0. Этот вопрос решаем так, как было пояснено в гл. 6 (см. § 6-4 задачу № 3).

2°. Определение критической глубины $h_к$. Критическая глубина находится, как указано в § 7-5, п. 2°. В общем случае, когда приходится строить график, представленный на рис. 7-17, вычисления, связанные с его построением, следует выполнять в табличной форме 1.

Форма 1

h	mh	$b + mh$	ω	ω^3	B	$\dfrac{\omega^3}{B}$
. . . . . .						
. . . . . .						
. . . . . .						

3°. Установление формы свободной поверхности потока. Вопрос о форме свободной поверхности потока решается путем сопоставления заданной глубины $h_ф$ с глубинами h_0 и $h_к$ [см. неравенства (7-79)–(7-80), а также рис. 7-26, 7-31, 7-33 и относящиеся к ним пояснения].

4°. Определение гидравлического показателя русла x. Гидравлический показатель русла определяется, как указано в § 7-12. В случае построения логарифмической анаморфозы все необходимые вычисления выполняем в табличной форме 2.

---

[1] Считаем, что в рассматриваемом случае имеется канал с прямым уклоном дна ($i > 0$); горизонтального русла и русла с обратным уклоном здесь касаться не будем.

h	K	$\lg h$	$\lg K$	$2\lg K$	Примечание
. . . . . .					Численные значения K взяты из таблицы, составленной при определении h_0 (см. п. 1°)

Как было отмечено выше, в большинстве случаев найденное значение x можно округлить (для упрощения расчета) до ближайшего табличного значения (см. табл. П-4 приложения, стр. 639 – 641).

5°. **Определение величины $\bar{j}$.** Величину $\bar{j}$ определяем по формуле (7-146) или (7-145). При этом можно различать два разных способа учета величины $\bar{j}$ при построении свободной поверхности потока.

Первый способ (менее точный). Здесь предполагаем, что величина $\bar{j}$ постоянна по всей длине потока. При этом под глубинами h_1 и h_2, входящими в указанные формулы, понимаем глубины в начале и в конце нашего русла.

Второй способ (более точный). Согласно этому способу, рассматриваемое русло разбиваем на ряд участков, причем принимаем, что $\bar{j}$ постоянно только в пределах каждого выделенного участка. При этом под глубинами h_1 и h_2, входящими в упомянутые выше формулы, понимаем глубины в начале и в конце каждого выделенного участка русла.

Следуя второму способу, удобно предварительно, пользуясь формулой (7-102), построить по нескольким точкам кривую

$$j = f(h)$$

с тем, чтобы, вычислив по формуле (7-147) величину $\bar{h}$, далее по этой кривой находить $\bar{j}$.

В случае построения кривых типа a_1, когда $\bar{j}$ имеет малые значения, всегда можно применить более простой (первый) способ определения $\bar{j}$.

6°. **Построение кривой свободной поверхности потока по уравнению Бахметева.** Это построение можно выполнить двумя способами.

Первый способ (когда $\bar{j}$ считается постоянным по всей длине потока; см. п. 5°). Предположим, что нам задана глубина[1] $h_2 = h_ф$. В этом случае переписываем уравнение неравномерного движения (7-144) в виде:

$$l = A - D\left[\eta_1 - E\varphi(\eta_1)\right], \tag{A}$$

где

$$A = \frac{h_0}{i}\left[\eta_2 - (1 - \bar{j})\,\varphi(\eta_2)\right] = \text{const};$$

$$D = \frac{h_0}{i} = \text{const}; \quad E = (1 - \bar{j}) = \text{const}. \tag{Б}$$

Зная глубину $h_2 = h_ф$ (глубину в конце русла), определяем относительную глубину

$$\eta_2 = h_2/h_0,$$

а затем и величину $\varphi(\eta_2)$, которую находим по табл. П-4 приложения в зависимости от установленных величин η_2 и x.

После этого в соответствии с установленной выше формой кривой свободной поверхности (см. п. 3°) выясняем, в каких пределах должна лежать глубина h_1 потока. Например, для кривой типа a_1 глубина h_1 должна лежать в пределах

$$h_0 < h_1 < h_2.$$

---

[1] Как отмечалось ранее, глубина h_2 намечается всегда ниже по течению глубины h_1 (отсчет сечений всегда ведется по течению).

Установив таким образом возможные пределы изменения глубин h_1, составляем таблицу по форме 3, в которой задаемся рядом значений h_1 (в указанных пределах) и вычисляем соответствующие этим глубинам l, т. е. расстояния от сечений $1-1$, где мы задались глубинами h_1, до заданного нам сечения $2-2$, где глубина $h_ф$ зафиксирована.

По данным вертикальных граф 1 и 7 формы 3 и строим кривую свободной поверхности на чертеже продольного профиля русла.[1]

В тех случаях, когда задана не глубина h_2, а глубина h_1, при построении свободной поверхности приходится идти вниз по течению; весь ход расчета остается таким же, как пояснено выше, меняются лишь знаки в уравнении (А) перед коэффициентами A и D, причем в уравнениях (А) и (Б) величину η_1 заменяем величиной η_2, а величину η_2 — величиной η_1.

Форма 3

h_1	η_1	$\varphi(\eta_1)$ по табл. П-4 приложения, стр. 639–641	$E\varphi(\eta_1)$	$\eta_1 - E\varphi(\eta_1)$	$D[\eta_1 - E\varphi(\eta_1)]$	l
1	2	3	4	5	6	7

Форма 4

Номера участков	h	$\bar{h}$	$\bar{j}$	η	$\varphi(\eta)$ по табл. П-4 приложения, стр. 639–641	$\eta - (1-\bar{j})\varphi(\eta)$	l
I	h_1	$\bar{h}$	$\bar{j}$	η_1	$\varphi(\eta_1)$	$\eta_1 - (1-\bar{j})\varphi(\eta_1)$	l_1
	h_2			η_2	$\varphi(\eta_2)$	$\eta_2 - (1-\bar{j})\varphi(\eta_2)$	
II	h_1	$\bar{h}$	$\bar{j}$	η_1	$\varphi(\eta_1)$	$\eta_1 - (1-\bar{j})\varphi(\eta_1)$	l_2
	h_2			η_2	$\varphi(\eta_2)$	$\eta_2 - (1-\bar{j})\varphi(\eta_2)$	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
							Σl

[1] Обычно подобные профили строятся в искаженном масштабе (вертикальный масштаб более крупный, чем горизонтальный). При построении подобного профиля русла в таком масштабе линию дна русла следует намечать, разумеется, не по заданному углу наклона ее к горизонту, а по катетам, откладываемым в разных масштабах (в вертикальном и горизонтальном). Однако, откладывая от сечения $2-2$ вверх по течению найденные длины l (для получения местоположения сечений, в которых мы задались глубинами h_1), размеры l при малых действительных уклонах i можно измерять по горизонтали (в горизонтальном масштабе).

Второй способ (когда при определении j русло разбивается на участки; см. выше п. 5°). В этом случае уравнение неравномерного движения (7-144) удобнее представить в виде:

$$l = D_0\{[\eta_2 - (1-\bar{j})\varphi(\eta_2)] - [\eta_1 - (1-\bar{j})\varphi(\eta_1)]\}, \tag{В}$$

где

$$D_0 = \frac{h_0}{i} = \text{const}. \tag{Г}$$

Далее поступаем следующим образом. Разбиваем заданное русло на ряд участков, выясняем, в каких пределах должны лежать искомые глубины. Задаемся, сообразуясь с этими пределами, глубинами в начале и в конце каждого выделенного участка русла (одна глубина в конце или в начале нашего русла нам задана для расчета).

После этого, зная глубины в начале и в конце каждого участка, вычисляем по уравнению (В) длины l всех участков. Все вычисления сводим в таблицу, составленную по форме 4.

По данным такой таблицы и строим на чертеже кривую свободной поверхности.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КРАТКИЕ УКАЗАНИЯ О СУЩЕСТВУЮЩИХ СПОСОБАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ (7-133) (СЛУЧАЙ $i > 0$)[1]

Выше был изложен только один из этих способов – способ Б. А. Бахметева, причем было отмечено, что суть способа Б. А. Бахметева заключается в замене «формулы Шези» [записанной в виде (7-123)] формулой (7-131) показательного вида, получаемой из соотношения (7-130).

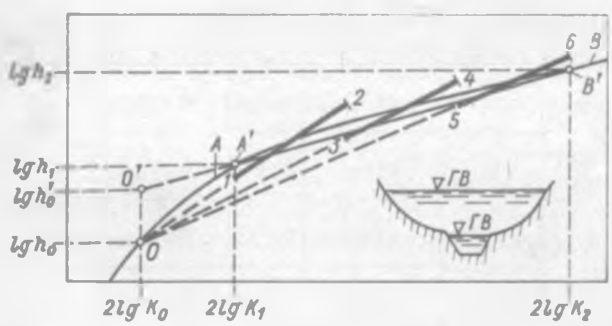


Рис. 7-41. Аппроксимирование логарифмической анаморфозы по способу Бахметева (см. отрезки $1-2$, $3-4$, $5-6$) и по способу Чугаева – Рахманова (см. прямую $A'-B'$)

Указанную замену для общего случая призматического русла можно пояснить при помощи рис. 7-41, на котором линией OAB показана логарифмическая анаморфоза, построенная для заданного русла по формуле Шези (7-123). Аппроксимируя участок AB рассматриваемой кривой, прямыми линиями, приходится, согласно Б. А. Бахметеву, заменять его рядом секущих отрезков $1-2$, $3-4$, $5-6$, построенных по зависимости (7-131). Все эти «линии Бахметева» должны проходить через точку O, отвечающую нормальной глубине h_0. Как видно, в общем случае (см., например, русла на рис. 7-37), когда действительная логарифмическая анаморфоза OAB (построенная по формуле Шези) значительно отличается от прямой, проходящей через точку O, способ Б. А. Бахметева оказывается мало удовлетворительным.

Как было отмечено выше, для указанного общего случая русла следует применять способ Чугаева – Рахманова, который основан на аппроксимации «действительной линии» AB, не секущими отрезками $1-2$, $3-4$, $5-6$, как у Б. А. Бахметева, а прямой $A'B'$ (рис. 7-41). При этом расчетное уравнение неравномерного движения получает вид:

[1] Подробнее см. Р. Р. Чугаев. О неравномерном установившемся медленно изменяющемся движении жидкости в открытых призматических руслах. Изв. ВНИИГ имени Б. Е. Веденеева, т. 61, 1958, с. 86–107; а также т. 1, 1971, с. 157–227.

$$\frac{il}{h_0'} = \eta_2' - \eta_1' - (1 - \bar{j})\left[\varphi(\eta_2') - \varphi(\eta_1')\right],$$

где h_0' – условная нормальная глубина; смысл этой глубины ясен из рис. 7-41; под величинами η_1' и η_2' следует понимать здесь отношения: $\eta_1' = h_1 : h_0'$; $\eta_2' = h_2 : h_0'$; величина же x определяется по формуле

$$x = \frac{2\lg K_2 - 2\lg K_1}{\lg h_2 - \lg h_1},$$

а не по зависимости (7-126); в остальном указанное уравнение ничем не отличается от уравнения Бахметева.

Можно считать, что в области рассматриваемого вопроса существует только **д в а о б щ и х м е т о д а** решения задачи:

а) метод Б. А. Бахметева, согласно которому уравнение Шези (7-123) для интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения предлагается заменить **о д н о ч л е н н о й** показательной зависимостью $K^{2/x} = Ah$, где $A = \text{const}$ и $x = \text{const}$;

б) метод А. Н. Рахманова, согласно которому уравнение Шези (7-123) предлагается заменять **д в у ч л е н н о й** зависимостью вида $K^{2/x} = Ah + B$, где x, A и B являются постоянными величинами.

Внутри этих двух общих методов следует различать целый ряд различных **с п о с о б о в** (предложенных разными авторами), служащих для определения постоянных параметров (x, A, B), входящих в показательную зависимость Б. А. Бахметева или А. Н. Рахманова.

Анализируя отраженный в литературе материал, легко видеть следующее:

1) Отмечаемые иногда в литературе способы М. Д. Чертоусова и И. И. Агроскина не являются оригинальными; эти авторы повторяют работы А. Н. Рахманова 1930–1931 гг.

2) Окончательное уравнение неравномерного движения, предложенное тем или другим автором (в частности уравнение Б. А. Бахметева) всегда можно записать в двух различных формах, выразив его: а) или через η, б) или через $\varkappa = \eta^{2/x}$. Легко показать, что форма записи уравнения с использованием η всегда более удобна, чем форма записи с использованием $\varkappa$.

3) Приводимое иногда в литературе уравнение Н. Н. Павловского – неудовлетворительно: а) оно выражается через $\varkappa$, б) данное уравнение для расчета хотя и требует только одной таблицы (для $x = 2{,}0$), но эта таблица должна быть во много раз больше, чем одна из таблиц Бахметева. Главным недостатком вывода уравнения Н. Н. Павловского является неприемлемое допущение, согласно которому зависимость $K = f(h)$ может быть графически представлена прямой линией (в обычных не логарифмических координатах, при $x = 2{,}0$).

В заключение отметим, что выше мы считали величину j постоянной ($j = \text{const}$), причем выносили ее за интеграл. Однако еще в 1925 г. В. Д. Журин указал на возможность использования соответствующей показательной зависимости для величины j. В это же время с учетом такой зависимости для j И. И. Леви получил уравнение неравномерного движения, не прибегая к допущению, согласно которому $j = \text{const}$ (к сожалению, в этом уравнении названного автора были допущены некоторые опечатки; правильный вид данного уравнения приводится в нашей статье, отмеченной в сноске на стр. 308).

Б. НЕРАВНОМЕРНОЕ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИСКУССТВЕННЫХ РУСЛАХ (КАНАЛАХ)

§ 7-16. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ПО УРАВНЕНИЮ БЕРНУЛЛИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (СПОСОБ ЧАРНОМСКОГО)[1]

Рассмотрим нецилиндрический (сужающийся или расширяющийся по длине) канал. В этом случае дифференциальное уравнение неравномерного движения оказывается относительно сложным [см. уравнение (7-24)]. Такое уравнение в общем случае не интегрируется даже приближенно.

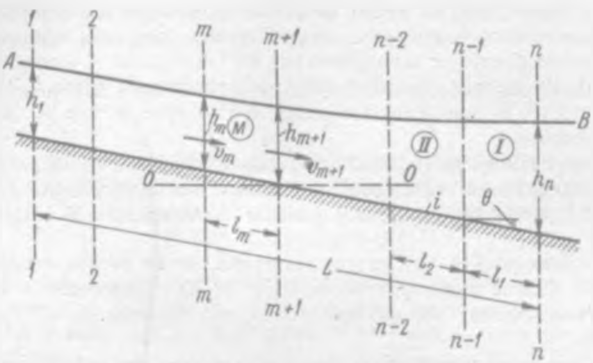


Рис. 7-42. К способу Чарномского

Вопрос о построении свободной поверхности потока в непризматическом канале осложняется еще и тем, что мы не имеем достаточно полных сведений о том, какие именно формы свободной поверхности могут иметь потоки, образующиеся в тех или других условиях в рассматриваемом канале.[2]

Имея в виду такое положение, для построения свободной поверхности в данном случае приходится непосредственно применять уравнение Бернулли, предварительно разбив канал на отдельные расчетные участки.

Положим, что нам заданы: русло канала, расход Q и глубина воды h_n, например, в конце канала (в сечении $n-n$; рис. 7-42).

Чтобы построить кривую AB свободной поверхности потока, разбиваем данный канал, имеющий длину L, на отдельные участки относительно малой длины, равной l. При этом каждый выделенный участок канала длиной l рассматриваем в отдельности, идя вверх по течению: сперва рассчитываем I участок, затем II и т. д. Расчет каждого выделенного участка (например, участка M) состоит в определении глубины h_m потока в начале данного участка (по известным величинам l_m и h_{m+1}). Идя по такому пути, можно последовательно определить глубины в граничных сечениях $(n-1)$, $(n-2)$, ..., ..., (2), (1), а затем по точкам, определяемым этими глубинами, провести на чертеже искомую кривую AB свободной поверхности.[3]

---

[1] Этот способ был опубликован В. И. Чарномским в 1914 г. Иногда данный способ называют способом Хестеда (опубликовавшим его в 1924 г.), что не является правильным.

[2] В литературе на эту тему опубликованы работы В. Б. Дульнева (относящиеся только к случаю плавно изменяющегося движения в руслах с прямолинейными в плане боковыми стенками), а также работы В. М. Овсепяна и Б. Т. Емцева.

[3] При построении на чертеже свободной поверхности необходимо учитывать указания, приведенные выше в сноске на стр. 307.

Рассмотрим для примера упомянутый участок M, ограниченный сечениями m и $(m+1)$. Намечаем плоскость сравнения OO на уровне низшей точки дна сечения $(m+1)$ и, соединив уравнением Бернулли сечения m и $(m+1)$, получаем:

$$il_m + h_m + \frac{\alpha v_m^2}{2g} = h_{m+1} + \frac{\alpha v_{m+1}^2}{2g} + \Delta h_l, \tag{7-159}$$

где il_m – падение дна канала от сечения m до сечения $(m+1)$; v_m и v_{m+1} – средние скорости в сечениях m и $(m+1)$; Δh_l – потеря напора по длине от сечения m до сечения $(m+1)$.

Ранее было введено понятие уклона трения (см. § 7-2):

$$i_f = \frac{v^2}{C^2 R}. \tag{7-160}$$

Пользуясь этой величиной, потерю напора Δh_l можно представить в виде

$$\Delta h_l = \bar{i}_f l_m, \tag{7-161}$$

где $\bar{i}_f$ – среднее значение уклона трения на длине l_m.

Используя зависимость (7-161), уравнение Бернулли (7-159) представляем в виде

$$\boxed{l_m = \frac{Э_{m+1} - Э_m}{i - \bar{i}_f},} \tag{7-162}$$

где $Э_m$ и $Э_{m+1}$ – удельные энергии сечения соответственно в сечениях m и $(m+1)$:

$$Э_m = h_m + \frac{\alpha v_m^2}{2g}; \quad Э_{m+1} = h_m + \frac{\alpha v_{m+1}^2}{2g}. \tag{7-163}$$

Величину $\bar{i}_f$, входящую в (7-162), можно находить по одной из следующих двух формул:

$$\bar{i}_f = \frac{1}{2}(i_{f_m} + i_{f_{m+1}}), \tag{7-164}$$

где i_{f_m} и $i_{f_{m+1}}$ – уклоны трения, найденные для сечений m и $(m+1)$, в которых имеют место глубины h_m и h_{m+1};

$$\overline{i_f} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2 \bar{R}}, \tag{7-165}$$

где $\bar{v}$, $\bar{C}$, $\bar{R}$ – известные гидравлические элементы, найденные для некоторого «среднего» сечения, расположенного между сечениями m и $(m+1)$, и для некоторой средней глубины, равной, например,

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(h_m + h_{m+1}). \tag{7-166}$$

Уравнение (7-162) и является здесь основным расчетным уравнением.

В случае горизонтального русла в уравнение (7-162) следует подставить $i = 0$; в случае же русла с обратным уклоном $i = -i'$, где i' – абсолютная величина уклона.

Если бы нам была задана глубина h_1 в начале нецилиндрического русла (а не глубина h_2 в конце его, что мы имели в виду выше), то расчет пришлось

h, м	Э (по графику), м	$Э_{m+1} - Э_m$, м	$\bar{h}$, м	$i - \bar{i}_f$ (по графику)	l, м
h_n	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
h_{n-1}	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
h_1	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .

бы вести по тому же уравнению (7-162), идя вниз по течению. При этом мы должны были бы из этого уравнения найти глубину h_{m+1}, зная глубину h_m и длину рассматриваемого участка l_m.

При построении свободной поверхности потока в **нецилиндрическом** русле уравнение (7-162) применительно к тому или другому участку рассматриваемого русла приходится решать **подбором**. При этом поступаем следующим образом. Задаемся в намеченном сечении m рядом глубин: h_{m_1}; h_{m_2}; h_{m_3}; ..., h_{m_i}; ... и для каждой такой глубины вычисляем величины $Э_m$ и $\bar{i}_f$. В результате отыскиваем такую глубину h_m, при которой будет иметь место равенство (7-162).

Поскольку цилиндрическое русло можно рассматривать как частный случай нецилиндрического, то описанный выше способ расчета может быть использован и для построения свободной поверхности потока в **любом цилиндрическом** русле. В этом случае уравнение (7-162) решается **без подбора**, а расчет по построению свободной поверхности выполняют по форме 5.

В такой таблице (форма 5) задаемся рядом значений h (принимая, например, $\Delta h = h_{m+1} - h_m = 0{,}1$ или $0{,}2$ *м* и т. п.) и находим соответствующие расстояния l. Для облегчения вычислений, приводимых в таблице, предварительно следует построить два вспомогательных графика:

а) $Э = f(h)$, по которому для разных глубин находим при расчете величины Э;

б) $(i - \bar{i}_f) = f(\bar{h})$, при помощи которого по установленной глубине $\bar{h}$ можно находить величины $(i - \bar{i}_f)$.

В. ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-17. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Рассматривая движение воды в естественных водотоках, всегда сталкиваемся с **неравномерным** ее движением. Такое движение обусловливается тем, что уклоны дна и поперечные сечения русла в значительной мере изменяются вдоль потока.

При проектировании плотин на реках, а также при проектировании расчисток естественных русел приходится строить кривые свободной поверхности потока. Полученное выше дифференциальное уравнение неравномерного движения воды в случае естественных русел интегрированию не поддается. В этом случае приходится обращаться к различным специальным способам расчета, которые являются в значительной мере приближенными.

Относительно точное решение для естественных русел может быть получено только при наличии достаточных данных, освещающих:

а) формы поперечных и продольного профилей русла;

б) коэффициенты шероховатости русла;

в) величины ожидаемых расходов,

г) кривые связи $Q = f(\nabla \text{ГВ})$ для отдельных створов водотока в естественном его состоянии [створов $(m+1)$, m, $(m-1)$, ...; см. рис. 7-43].

При построении кривой свободной поверхности потока прежде всего заданное русло разбивают на отдельные расчетные участки; в пределах каждого такого участка кривую свободной поверхности потока считают прямой линией (имеющей тот или другой уклон) – рис. 7-43.

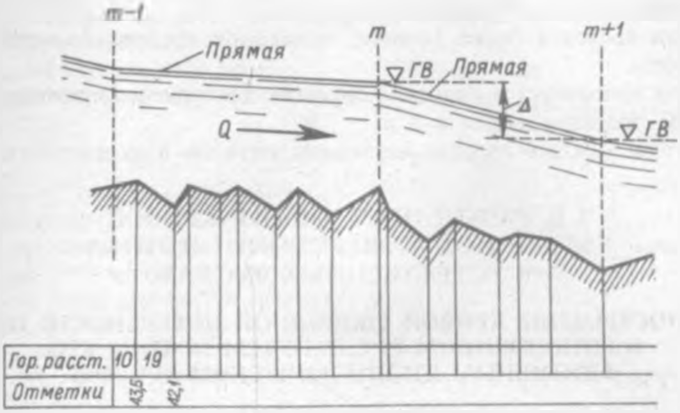


Рис. 7-43. Продольный профиль естественного водотока (в искаженном масштабе)

При разбивке русла на расчетные участки руководствуются тем, чтобы каждый из них был более или менее однородным в отношении:

а) его поперечных сечений;

б) шероховатости;

в) уклонов свободной поверхности, имеющихся в естественном состоянии (до постройки плотины или выполнения расчисток).

Длина расчетных участков может быть различной; иногда эта длина достигает нескольких километров. Величина падения горизонта воды в пределах каждого расчетного участка в естественных условиях обычно не превосходит 0,5 – 1,0 м.

Задача построения свободной поверхности для заданного естественного потока, как видно из рис. 7-43, заключается в отыскании отметок горизонтов воды в граничных сечениях $(m-1)$, m, $(m+1)$ и т. д. Обычно для решения этой задачи имеют заданными: расход Q и отметку горизонта воды в одном сечении [например, в сечении $(m+1)$, расположенном ниже других сечений по течению].

Часто в естественных руслах имеем спокойное движение, которое в дальнейшем и будем рассматривать. В случае такого движения кривую свободной поверхности, как правило, приходится строить, идя вверх по течению: по заданной отметке горизонта воды в сечении $(m+1)$ находим отметку горизонта воды в сечении m; по последней определяем отметку горизонта воды в сечении $(m-1)$ и т. д.

Из сказанного ясно, что нам следует рассмотреть вопрос о том, *каким образом определяется отметка горизонта воды в начале расчетного участка, если отметка горизонта воды в конце его, а также расход Q – заданы.*

Для решения этого вопроса имеем два различных метода:

1-й метод заключается в замене действительного естественного русла в пределах расчетного участка цилиндрическим фиктивным руслом.

Далее для намеченного фиктивного цилиндрического русла по уравнению неравномерного движения, полученному в разделе *А* данной главы (см. выше), находим искомую отметку горизонта воды в начале расчетного участка;

2-й метод заключается в непосредственном применении к выделенному расчетному участку основного дифференциального уравнения неравномерного движения (I) – см. зависимость (7-12). Для случаев естественных водотоков имеется ряд способов решения уравнения (I), по которым отыскиваем отметку горизонта воды в начале расчетного участка.

2-й метод является более точным, однако он требует большей вычислительной работы.

1-й метод используется главным образом для ориентировочных подсчетов при эскизном проектировании и т. п.

Рассмотрим каждый из двух названных методов в отдельности.

1-Й МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-18. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЕСТЕСТВЕННОМ РУСЛЕ ПУТЕМ ЗАМЕНЫ ЕГО ФИКТИВНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РУСЛОМ

Используя первый метод, приходится решать два разных вопроса:

а) как именно данный расчетный участок естественного русла следует заменять фиктивным цилиндрическим руслом;

б) каким образом следует рассчитывать намеченное фиктивное русло, т. е. как надо определять отметку горизонта воды в начале этого русла, зная отметку горизонта воды в конце его.

Рассмотрим отдельно два этих вопроса.

1°. Замена расчетного участка действительного русла фиктивным цилиндрическим. Вообще говоря, данное естественное русло можно заменить любым цилиндрическим руслом: трапецеидальным, прямоугольным и т. п. Однако, поскольку рассматриваемый метод является весьма приближенным, для упрощения расчета (см. ниже) идут на замену естественного русла или фиктивным широким прямоугольным, или фиктивным широким параболическим. Другие формы фиктивного русла, как правило, следует исключать из рассмотрения.

Имея в виду сказанное, при решении поставленной задачи приходится выяснить следующие вопросы:

1) какое поперечное сечение фиктивного русла следует выбрать: прямоугольное или параболическое. Очевидно, здесь следует останавливаться на том, которое по своей форме ближе к естественным поперечным сечениям данного русла;

2) каким должен быть уклон дна фиктивного русла. Обычно уклон дна фиктивного русла назначают равным:

$$i = J_0 = \frac{\Delta_0}{l}, \tag{7-167}$$

где l – длина рассматриваемого расчетного участка; Δ_0 – падение свободной поверхности на длине l в естественном состоянии при том расходе Q, для которого нам необходимо построить кривую свободной поверхности; J_0 – уклон свободной поверхности в естественном состоянии. Как видно, принимая i по формуле (7-167), линию дна $D-D$ фиктивного русла (рис. 7-44) назначаем параллельной свободной поверхности E_0-E_0 в естественном состоянии;

3) вопрос о высотном положении линии дна $D-D$ фиктивного русла.

Последний вопрос решается следующим образом: от линии E_0-E_0, отвечающей заданному расходу Q, откладываем вниз отрезок, равный нормальной глубине h_0 фиктивного русла, в результате и получаем высотное положение линии дна $D-D$ (рис. 7-44). Следовательно, нам необходимо знать величину глубины h_0 (она необходима также и для выполнения самого расчета; см. ниже). Для определения глубины h_0, относящейся к фиктивному руслу, используется прием, предложенный Тольманом.

Определение глубины h_0 в случае широкого прямоугольного фиктивного русла. Представим на рис. 7-45 некоторое среднее поперечное сечение естественного русла. Через E_0-E_0 на чертеже обозначен уровень воды в естественном состоянии (при заданном расходе); через $П-П$ — уровень воды после постройки плотины (подпертый уровень). Величина $B_{ср}$ — средняя ширина потока поверху в подпертом состоянии — заранее нам неизвестна, так как в начале расчета неизвестно положение уровня $П-П$. Однако согласно Тольману $B_{ср}$ мы все же предварительно можем установить — грубо приближенно, на глаз.

Имея $B_{ср}$, далее поступаем так:

1. Ширину фиктивного прямоугольного русла принимаем

$$B_ф = B_{ср}. \tag{7-168}$$

2. Глубину h_0, определяющую высотное положение линии $D-D$ (рис. 7-44), находим из условия, что живое сечение фиктивного русла $abcd$ (рис. 7-45) пропускает при равномерном режиме и при уклоне i [см. формулу (7-167)] такой же расход, как и живое сечение $a_1b_1c_1$ действительного русла.

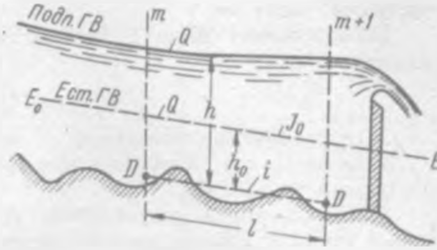


Рис. 7-44. Построение фиктивного цилиндрического русла

Исходя из этого условия, можем написать

$$Q = \omega_ф C_ф \sqrt{R_ф i}, \tag{7-169}$$

где индексом «ф» обозначены элементы, относящиеся к фиктивному руслу.[1]

В зависимости (7-169)

$$\omega_ф = B_{ср}h_0; \quad R_ф = h_0; \quad i = J_0. \tag{7-170}$$

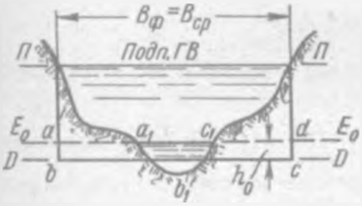


Рис. 7-45. Определение глубины h_0 для фиктивного прямоугольного русла

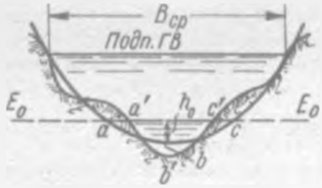


Рис. 7-46. Определение глубины h_0 для фиктивного параболического русла

Подставляя (7-170) в (7-169), имеем

$$Q = h_0 B_{ср} C_ф \sqrt{h_0 J_0}, \tag{7-171}$$

откуда

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B_{ср}^2 C_ф^2 J_0}}. \tag{7-172}$$

По этой формуле и определяем h_0, установив предварительно величину C для какой-либо глубины $h (\approx R)$ фиктивного русла, взятой на глаз.

Определение глубины h_0 в случае широкого параболического русла. На рис. 7-46 показана замена действительного русла фиктивным параболическим. Глубину h_0 находим из того же условия, что и в случае прямоугольного русла:

$$Q_{abc} = Q_{a'b'c'}, \tag{7-173}$$

[1] Русло рассматривается как достаточно широкое, для которого $\chi \approx B$.

где Q_{abc} и $Q_{a'b'c'}$ — расходы для живых сечений abc и $a'b'c'$ (см. чертеж).

Используя (7-173), можем получить соответствующую формулу для h_0. Эту формулу приводить здесь не будем (она получается более сложной, чем для прямоугольного русла, причем ее приходится решать в отношении h_0 подбором).

2°. Расчет фиктивного цилиндрического русла. Имея в виду приближенность 1-го метода, при расчете вводят следующие дополнительные допущения:

1) величину j считают равной нулю:

$$j = 0. \tag{7-174}$$

В случае спокойного движения, которое условились рассматривать, значение j достаточно мало (см. § 7-8);

2) коэффициент Шези C считают не изменяющимся с изменением глубины наполнения русла,

$$C = \text{const}; \tag{7-175}$$

3) гидравлический показатель x округляют до ближайшего целого его значения и принимают: для прямоугольного фиктивного русла $x = 3$; для параболического фиктивного русла $x = 4$.

Пользуясь этими допущениями, уравнение неравномерного движения Бахметева можно привести к более простым уравнениям:

а) в случае прямоугольного фиктивного русла — к так называемому уравнению Дюпюи — Рюльмана (предложенному еще в 1880 г.):

$$\frac{il}{h_0} = Д\left(\frac{a_к}{h_0}\right) - Д\left(\frac{a_н}{h_0}\right), \tag{7-176}$$

где $a_к$ и $a_н$ — превышения кривой свободной поверхности над линией нормальных глубин $N - N$ (соответственно в конце и в начале расчетного участка);

б) в случае параболического фиктивного русла — к так называемому уравнению Толькмитта (предложенному в 1907 г.):

$$\frac{il}{h_0} = T(\eta_к) - T(\eta_н), \tag{7-177}$$

где $\eta_к$ и $\eta_н$ — известные относительные глубины в конце и начале участка фиктивного русла.

Функции $Д\left(\dfrac{a}{h_0}\right)$ и $T(\eta)$, входящие в (7-176) и (7-177), при определении отметки горизонта воды в начале рассматриваемого участка фиктивного русла берутся из особых таблиц, приводимых в литературе, например [7-3].

2-Й МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

§ 7-19. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Представим на рис. 7-47 продольный разрез расчетного участка естественного русла, ограниченного сечениями m и $(m + 1)$; отсчет сечений ведем по течению.

Выше, в связи с выводом уравнения (I) — см. формулу (7-12), имели зависимость (7-6). Учитывая возможность возникновения в естественном русле местных потерь напора, эту зависимость в данном случае следует переписать в виде[1]

[1] В естественных водотоках можем получить неравномерное резко изменяющееся движение. При этом оценка потерь напора по длине с помощью формул равномерного движения (см. § 7-2) может давать здесь уже значительную погрешность. Имея это в виду, под dh_j следует понимать не только местные потери напора, но и разность между действительными потерями напора по длине (получающимися при резко изменяющемся движении) и вычисленными по формулам равномерного движения.

$$-dz = dh_v + dh_l + dh_j, \tag{7-178}$$

где

$$dh_v = d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right); \tag{7-179}$$

$$dh_l = \frac{v^2}{C^2 R}\, ds = \frac{Q^2}{K^2}\, ds. \tag{7-180}$$

Что касается местных потерь dh_j, то их принято представлять здесь в виде

$$dh_j = \zeta d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) = \zeta dh_v, \tag{7-181}$$

где dh_v в случае расширяющегося потока является отрицательной величиной.

В отношении коэффициента сопротивления ζ в литературе имеются следующие данные:

а) если средняя скорость уменьшается вдоль течения (поток расширяется), то:[1]

$$\zeta = (-0{,}2) \div (-1{,}0); \tag{7-182}$$

б) если средняя скорость увеличивается вдоль течения (поток сужается), то

$$\zeta = 0. \tag{7-183}$$

Подставляя (7-179), (7-180) и (7-181) в (7-178), имеем

$$-dz = (1+\zeta)\, d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2}\, ds. \tag{7-184}$$

Интегрируя (7-184) от сечения m до сечения $(m+1)$, получаем (рис. 7-47)

$$z_m - z_{m+1} = (1+\zeta)\left[\frac{\alpha v_{m+1}^2}{2g} - \frac{\alpha v_m^2}{2g}\right] + Q^2 \int_{s_m}^{s_{m+1}} \frac{ds}{K^2}, \tag{7-185}$$

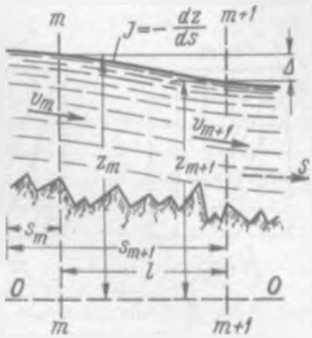


Рис. 7-47. Построение свободной поверхности по уравнениям (7-187) – (7-189)

где z_m и z_{m+1} – отметки горизонтов воды в сечениях m и $(m+1)$; v_m и v_{m+1} – скорости в этих сечениях.

С некоторым приближением можно считать, что

$$Q^2 \int_{s_m}^{s_{m+1}} \frac{ds}{K^2} = \left(\frac{1}{\overline{K^2}}\right) Q^2 (s_{m+1} - s_m) = Q^2 \left(\frac{1}{\overline{K^2}}\right) l, \tag{7-186}$$

где $\overline{K^2}$ – среднее значение K^2 на рассматриваемом участке.[2]

Подставляя (7-186) в (7-185), получаем:

1) полную форму уравнения, учитывающую как изменение скоростного напора по длине потока, так и «местные потери» напора:

(А)
$$z_m - z_{m+1} = Q^2\left[(1+\zeta)\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{1}{\omega_{m+1}^2} - \frac{1}{\omega_m^2}\right) + \frac{l}{\overline{K^2}}\right]; \tag{7-187}$$

2) промежуточную форму, учитывающую изменение скоростного напора, но не учитывающую «местных потерь» напора:

(Б)
$$z_m - z_{m+1} = Q^2\left[\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{1}{\omega_{m+1}^2} - \frac{1}{\omega_m^2}\right) + \frac{l}{\overline{K^2}}\right]; \tag{7-188}$$

3) упрощенную форму, не учитывающую изменений скоростного напора и «местных потерь» напора и учитывающую только потери напора по длине потока h_l:

---

[1] В формуле (7-182) ζ отрицательно, при этом величина dh_j по формуле (7-181) получается положительной.

[2] В выражении (7-186) вместо $\frac{1}{\overline{K^2}}$ следовало, собственно, иметь $\left(\overline{\frac{1}{K^2}}\right)$.

(В) $$z_m - z_{m+1} = Q^2 \frac{l}{\bar{K}^2}. \qquad (7\text{-}189)$$

Последним упрощенным уравнением главным образом и пользуются в практике. При помощи одного из приведенных уравнений (7-187) – (7-189) можно найти отметку z_m, зная отметку горизонта воды z_{m+1} в сечении $(m + 1)$.

§ 7-20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ $\frac{l}{\bar{K}^2}$! ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ГРАФИКИ

Как видно, для определения отметки z_m по одному из уравнений (7-187), (7-188) или (7-189) необходимо знать величину $\frac{l}{\bar{K}^2}$.

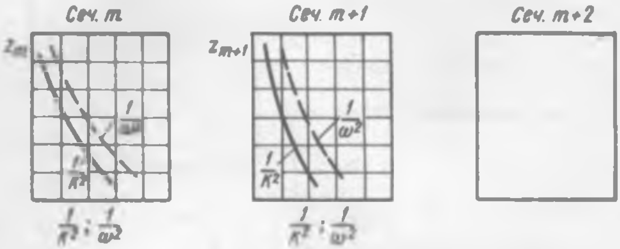


Рис. 7-48. Вспомогательные графики для расчета свободной поверхности

Для установления этой величины можно предложить много различных приближенных приемов. В частности, ее можно определять:

а) или по формуле

$$\frac{l}{\bar{K}^2} = \frac{\frac{1}{K_m^2} + \frac{1}{K_{m+1}^2}}{2}\, l, \qquad (7\text{-}190)$$

б) или по формуле

$$\frac{l}{\bar{K}^2} = \frac{\frac{1}{K_m^2} + \frac{1}{K'^2} + \frac{1}{K''^2} + \ldots + \frac{1}{K_{m+1}^2}}{n+2}\, l, \qquad (7\text{-}191)$$

где

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{\omega^2 C^2 R}; \qquad (7\text{-}192)$$

здесь K_m и K_{m+1} – модули расхода, относящиеся соответственно к сечениям m и $(m + 1)$; K', K'', K''', ... – модули расхода, подсчитанные для вспомогательных промежуточных сечений, намеченных между сечениями m и $(m + 1)$; n – количество промежуточных сечений.

Очевидно, величины K_m, K', K'', ... можно установить только задавшись предварительно положением свободной поверхности на рассматриваемом расчетном участке.[1]

При определении величины (7-192) приходится устанавливать значения ω, χ, R.

Величины ω находят или при помощи планиметра, или путем разбивки рассматриваемого «неправильного» живого сечения на элементарные геометрические фигуры. Величину χ обычно принимают приблизительно равной B. Наконец, часто можно считать $R = h$ или $R = \frac{2}{3} h$, где h – наибольшая глубина в рассматриваемом сечении.

Что касается размера l, то в плане его измеряют или по средней линии водной поверхности, или по линии наибольших глубин потока. На продольном профиле l измеряют по горизонтали.

При массовых расчетах всегда предварительно следует строить вспомогательные графики для каждого намеченного сечения потока.[2] Эти графики имеют вид, представленный на рис. 7-48.

---

[1] Напомним, что кривая свободной поверхности в пределах расчетного участка всегда принимается в виде [illegible] для определения K_m, [illegible] достаточно задаться отметкой z_m [illegible]

[2] Если [illegible] [illegible]ующие графики [illegible] [illegible]ительных сечений потока.

Штриховые кривые, указанные на графиках, необходимы только при расчете отметки z_m по уравнениям (7-187) и (7-188) [в случае использования упрощенного уравнения (7-189) эти кривые не нужны].

Имея указанные графики, легко можно определить величины $\frac{1}{K^2}$ и $\frac{1}{\omega^2}$ для любой отметки z свободной поверхности в данном сечении. Зная же указанные величины, по формуле (7-190) можно определить и величину $\frac{l}{K^2}$.

Как видно, первый этап расчета свободной поверхности заключается в разбивке естественного русла на расчетные участки. Второй этап расчета состоит в построении поясненных выше вспомогательных графиков.

Заметим в заключение, что в этом параграфе мы пояснили способ определения величины $\frac{l}{K^2}$, когда для расчета K пользуются формулой $K = \omega C\sqrt{R}$ (в связи с чем приходится устанавливать для данного русла коэффициент шероховатости n и т. п.). Далее в § 7-22 поясним еще способ, позволяющий найти $\frac{l}{K^2}$ на основании имеющихся г и д р о м е т р и ч е с к и х   д а н н ы х (без использования формулы $K = \omega C\sqrt{R}$). Такой способ, разумеется, дает более точные результаты расчета.

§ 7-21. ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Будем рассматривать расчетный участок русла, показанный на рис. 7-49. Считаем, что Q и z_{m+1} известны. Требуется найти z_m.

Эту задачу решаем, пользуясь уравнением (7-187), (7-188) или (7-189) – см. § 7-19. Здесь поясним только решение упрощенного уравнения (7-189).

Для решения задачи переписываем уравнение (В) в виде

$$z_m - Q^2\frac{l}{K^2} = z_{m+1}. \qquad (7\text{-}193)$$

Как видно, левая часть этой зависимости является функцией z_m, т. е.

$$z_m - Q^2\frac{l}{K^2} = f(z_m); \qquad (7\text{-}194)$$

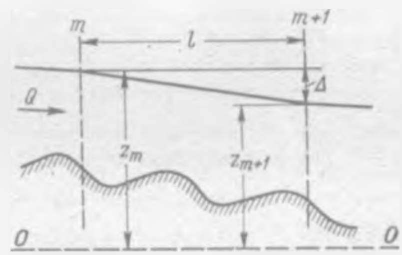


Рис. 7-49. К общему методу построения кривой свободной поверхности

правая же часть зависимости (7-193) нам известна.

Имея это в виду, уравнение (7-193) решаем в отношении z_m подбором; все вычисления сводим в таблицу формы 6.

Очевидно, искомое значение z_m должно давать $f(z_m) = z_{m+1}$.

Форма 6

z_m	$\frac{l}{K^2}$	$\frac{l}{K^2}Q^2$	$f(z_m)$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

Гидрометрический способ построения кривой $F = \theta(\bar{z})$, предложенный А. Н. Рахмановым, заключается в следующем.

Упрощенное уравнение неравномерного движения [см. (7-189)] можно переписать в виде

$$\Delta = Q^2 \frac{l}{K^2}, \tag{7-200}$$

где Δ – падение свободной поверхности на рассматриваемом расчетном участке,

$$\Delta = z_m - z_{m+1}. \tag{7-201}$$

Зависимость (7-200) можно представить также в виде

$$\frac{l}{K^2} = \frac{\Delta}{Q^2}. \tag{7-202}$$

Следовательно, модуль сопротивления русла, отвечающий определенной прямолинейной свободной поверхности,

$$F = \frac{\Delta}{Q^2}. \tag{7-203}$$

Измеряя в натуре величины Δ и Q для разных наблюденных свободных поверхностей и устанавливая для этих поверхностей отметки $\bar{z}$, можно, вычислив по формуле (7-203) величину F, построить искомую кривую $F = \theta(\bar{z})$. Разумеется, такую кривую мы сможем построить только в пределах наблюденных отметок $\bar{z}$.

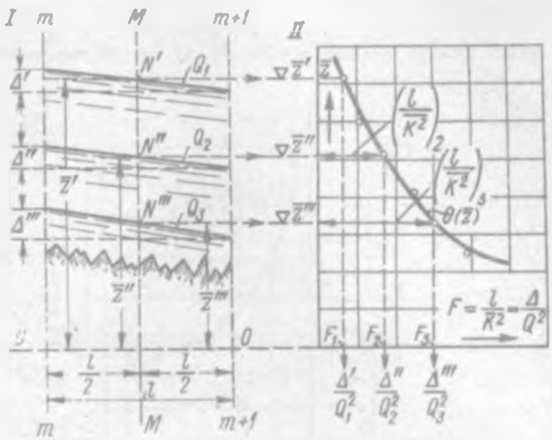


Рис. 7-51. Построение кривой $\theta(z)$

Способ построения свободных поверхностей А. Н. Рахманова и заключается в использовании при расчете, поясненном в § 7-21, кривой $F = \theta(\bar{z})$, найденной на основании гидрометрических данных. Как видно, в основу этого способа кладется упрощенное уравнение неравномерного движения (7-189).

§ 7-23. ПОСТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО СПОСОБУ ПАВЛОВСКОГО

Н. Н. Павловский предложил два способа решения упрощенного уравнения (7-189): графический и графоаналитический.[1] Ниже осветим только графический способ, основанный на использовании уравнения (7-189), при условии, что постулат инвариантности для рассматриваемого русла оказывается приемлемым. Особенностью этого способа является то обстоятельство, что отметку z_m по заданной отметке z_{m+1} и заданному расходу Q можно найти без подбора.

Представим на рис. 7-52, *б* продольный профиль расчетного участка и на рис. 7-52, *а* кривую $F = \theta(\bar{z})$, построенную или по формуле Шези (см. § 7-20), или при помощи гидрометрического способа (см. кривую AB). Будем считать, что кривая $F = \theta(\bar{z})$ соответствующим образом увязана в высотном отношении с продольным профилем русла (как показано на чертеже).

Рассмотрим два уравнения.

Первое уравнение. Упрощенное уравнение неравномерного движения:

$$z_m - z_{m+1} = Q^2 \frac{l}{K^2} \tag{7-204}$$

или

$$\Delta = Q^2 F. \tag{7-205}$$

[1] Н. Н. Павловским был разработан также особый способ решения уравнений (А) и (Б) [7-3].

Последнюю зависимость можно переписать в виде

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{Q^2}{2} F \qquad (7\text{-}206)$$

или окончательно в виде:

$$\Delta' = \frac{Q^2}{2} F, \qquad (7\text{-}207)$$

где

$$\Delta' = \frac{\Delta}{2}. \qquad (7\text{-}208)$$

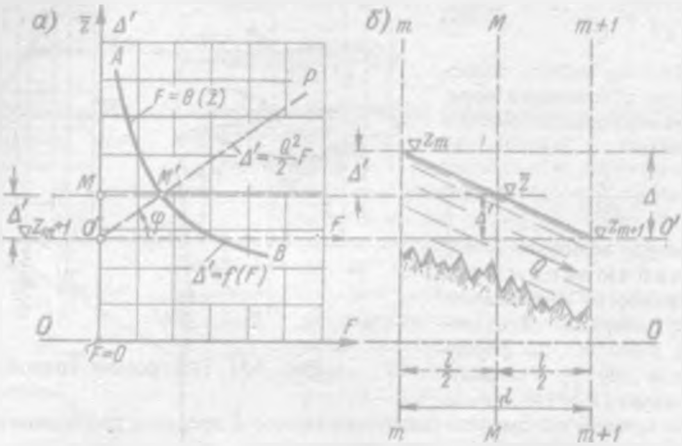


Рис. 7-52. К способу Павловского для построения кривой свободной поверхности

Если примем начало оси $\bar{z}$ (для отсчета отметок свободной поверхности) на уровне отметки z_{m+1} (в точке O'), то получим:

$$z_{m+1} = 0;\ z_m = \Delta; \qquad (7\text{-}209)$$

$$\bar{z} = \frac{\Delta}{2} = \Delta', \qquad (7\text{-}210)$$

причем точку O' можно рассматривать и как начало координат для величин Δ'.

Ясно, что на графике рис. 7-52 уравнение (7-207), в котором при принятом начале координат величина $\Delta' = \bar{z}$, будет выражаться прямой линией $O'P$ с угловым коэффициентом

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q^2}{2}. \qquad (7\text{-}211)$$

При $F = 0$ уравнение (7-207) дает $\Delta' = \bar{z} = 0$; поэтому прямая $O'P$ должна начинаться в точке O', расположенной на отметке z_{m+1}.

В т о р о е у р а в н е н и е. Так как $F = \theta(\bar{z})$, то, следовательно, и $\bar{z}$ будет некоторой функцией F:

$$\bar{z} = f(F), \qquad (7\text{-}212)$$

причем зависимость (7-212) выражается той же кривой, что и зависимость $F = \theta(\bar{z})$, т. е. кривой AB.

Принимая начало оси $\bar{z}$, как и выше, на уровне отметки z_{m+1} (в точке O') и учитывая, что при таком положении начала координат $\bar{z} = \Delta'$, уравнение (7-212) можно переписать в виде

$$\Delta' = f(F). \tag{7-213}$$

Зависимость (7-213) и является вторым необходимым уравнением.

Уравнения (7-207) и (7-213) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными: Δ' и F. Решая графически эту систему уравнений, получаем точку M' пересечения прямой $O'P$ и кривой AB. Очевидно, точке M' и будет отвечать искомое Δ' (равное отрезку $O'M$).

Зная, таким образом, Δ', величину z_m находим по формуле

$$z_m = z_{m+1} + 2\Delta'. \tag{7-214}$$

Общий ход расчета свободной поверхности, по Н. Н. Павловскому, может быть намечен в следующем виде:

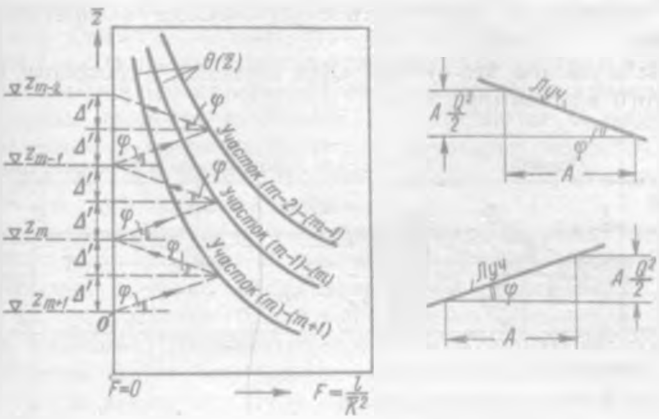


Рис. 7-53. Построение кривой свободной поверхности в естественном водотоке по способу Павловского

1) строим график, на котором совмещаем кривые $F = \theta(z)$ для разных расчетных участков (рис. 7-53);

2) строим у графика направление лучей, идущих под углом φ к горизонту (см. чертеж);

3) параллельно этим лучам, начиная от точки O, определяемой известной отметкой z_{m+1}, проводим прямые линии, как показано на графике. В результате и получаем отметки z_m, z_{m-1}, z_{m-2} и т. д.

Чтобы построить кривую свободной поверхности для другого расхода Q, достаточно изменить только угол φ, т. е. наклон намеченных на чертеже лучей. Эти лучи в соответствии с формулой (7-211) должны строиться по катетам так, чтобы отношение вертикального катета к горизонтальному было равно $\frac{Q^2}{2}$, где Q – заданный расход $\left(\text{см. чертеж, где через } A \text{ обозначен отрезок произвольной величины, взятый в масштабе } \frac{l}{K^2}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

7-1. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений, т. 1,– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1955.

7-2. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика. Специальный курс.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.

7-3. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК И ПОСЛЕПРЫЖКОВЫЙ УЧАСТОК. ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РУСЛАХ, ИМЕЮЩИХ РЕЗКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ УКЛОНА ДНА

§ 8-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ. ПОСЛЕПРЫЖКОВЫЙ УЧАСТОК

Будем иметь в виду, как и в предыдущей главе, что движение воды уст новившееся, безнапорное, турбулентное (отвечающее квадратичной облас сопротивления).

В § 7-6 было указано, что бурный поток переходит в спокойный при помощ гидравлического прыжка (рис. 8-1).

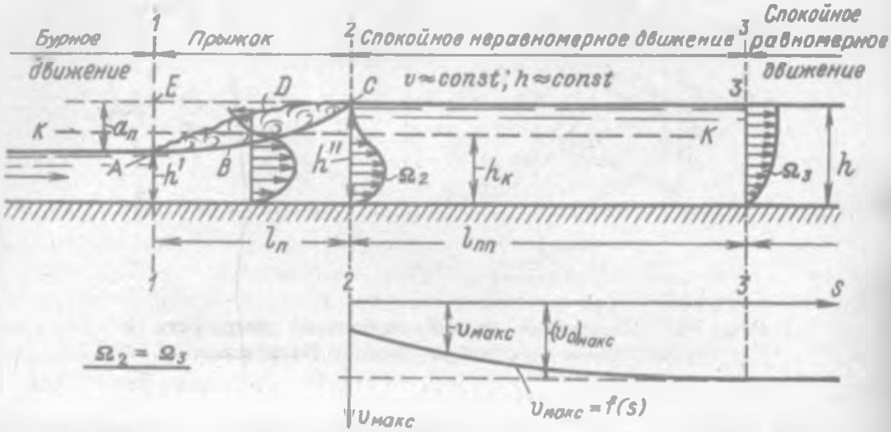


Рис. 8-1. Гидравлический прыжок и послепрыжковый участок. График максимальной допустимой скорости $v_{макс}$ (линия $K-K$ располагается к точке A ближе чем к точке E)

Гидравлическим прыжком называется р е з к о е *увеличение глубины потока от величины h', меньшей $h_к$, до величины h'', большей $h_к$.*

Величина $a_п$, показанная на чертеже, называется в ы с о т о й прыжка; $l_п$ – д л и н о й п р ы ж к а. Глубины h' и h'', измеряемые в сечениях $1-1$ и $2-2$, ограничивающих прыжок, называются с о п р я ж е н н ы м и.

Надо запомнить, что прыжок появляется всегда, когда при увеличении глубин свободная поверхность пересекает линию критических глубин $K-K$ (имеется только один частный случай, являющийся исключением; см. § 14-5).

Поясним характер движения воды в пределах гидравлического прыжка.

В потоке между сечениями $1-1$ и $2-2$ наблюдается п о в е р х н о с т ь р а з д е л а ABC; ниже этой поверхности струя (т р а н з и т н а я с т р у я) резко расширяется от глубины h' до глубины h''; выше поверхности раздела ABC имеем п о в е р х н о с т н ы й в а л е ц. О самом вальце можно сказать следующее. Валец представляет собой в о д о в о р о т н у ю о б л а с т ь, описанную в § 4-14; он характеризуется весьма беспорядочным движением (см. зону A на рис. 4-27, *а*), которое, однако, с некоторым приближением можно привести к осредненному водоворотному движению (см. аналогичную картину на рис. 4-27, *б*). В отличие от рис. 4-27, в случае прыжка имеем *безнапорное* движение жидкости. Верхняя поверхность *ADC* вальца получается неровной, волнообразной. Валец насыщен пузырьками воздуха и потому малопрозрачен.

Благодаря пульсации актуальных скоростей в прыжке через поверхность раздела *ABC* происходит постоянный обмен жидкости между вальцом и транзитной струей. Все явление прыжка носит бурный характер, причем прыжок не находится на одном месте; он совершает некоторые небольшие поступательные движения то вправо (по течению), то влево (против течения).

В прыжке получается *местная потеря напора*, относящаяся к случаю *безнапорного* движения жидкости.[1]

Непосредственно за прыжком располагается так называемый *послепрыжковый участок* потока. Этот участок характеризуется следующим.

В сечении $2-2$ за прыжком эпюра осредненных скоростей u имеет вид, показанный на чертеже: скорость u в верхней точке C живого сечения равна нулю; вместе с тем придонные скорости в сечении $2-2$ являются большими. Прыжок способствует резкому повышению пульсации актуальных скоростей и давлений; в связи с этим за прыжком получаем поток, который характеризуется *интенсивной турбулентностью*.

На длине $l_{пп}$ послепрыжкового участка, в пределах между сечениями $2-2$ и $3-3$, происходит затухание пульсаций до величин, свойственных равномерному движению, а также выравнивание эпюры осредненных скоростей до той формы, которая отвечает также равномерному движению.

Наличие больших придонных осредненных скоростей и повышенная пульсация обусловливают большую размывающую способность потока. Для сечения $3-3$, где имеем структуру потока, находящегося в состоянии равномерного движения, максимальную допустимую скорость $(v_0)_{макс}$ можно определить по данным § 6-5, относящимся к равномерному движению. Что же касается сечения $2-2$, то здесь благодаря повышенной пульсации и большим придонным скоростям размывы грунта, образующего русло, должны начинаться при *меньших* средних скоростях, чем в сечении $3-3$. Поэтому сечениям $2-2$ и $3-3$ будут свойственны *максимальные допустимые* скорости $v_{макс}$ разной величины (хотя средние скорости v в этих сечениях, так же как и глубины h, — примерно одинаковы).

Величина $v_{макс}$ в пределах послепрыжкового участка должна *увеличиваться* по течению так, как показано на схеме графика, изображенного на рис. 8-1 (внизу). Размывающая же способность потока вдоль послепрыжкового участка должна соответственно *уменьшаться* от наибольшей величины в сечении $2-2$ до размывающей способности, свойственной равномерному движению в сечении $3-3$.

Различные авторы для определения длины $l_{пп}$ послепрыжкового участка дают разные эмпирические формулы, выражая обычно величину $l_{пп}$ через глубину h в русле за послепрыжковым участком:

$$l_{пп} \approx (10 \div 30)\,h. \tag{8-1}$$

Закончив на этом описание послепрыжкового участка, который представляет интерес в связи, например, с проектированием устройств нижнего бьефа плотин, обратимся снова к гидравлическому прыжку, причем рассмотрим его с *энергетической точки* зрения.

[1] В гл. 5, посвященной напорным трубам, говорилось о местных потерях напора, относящихся к случаю напорного движения. При безнапорном движении, помимо местной потери напора в прыжке, различают еще местные потери напора: «на поворот потока», при местном расширении потока и т. п.

Представим на рис. 8-2 гидравлический прыжок, получающийся при истече воды из-под щита *Щ*. Кривая свободной поверхности *ab* является кривой т c_0; кривая свободной поверхности *cd* является кривой типа b_0. Эти две кри одна из которых отвечает бурному движению, а другая – спокойно сопрягаются прыжком *bc*.

Представим на рис. 8-2 (справа) кривую удельной энергии сечения, отвеч щую заданному руслу и заданному расходу. Точки a', b', c', d' кри $Э = f(h)$ отвечают точкам *a*, *b*, *c*, *d* свободной поверхности потока. П движении вдоль потока от то ки *a* до точки *d* мы переме емся по кривой $Э = f(h)$, сле по пути $a'b'c'd'$ (показан на г фике стрелками). В точке b' (о вечающей точке *b*) осуществл ется переход с *I* ветви крив $Э = f(h)$ на *II* ветвь, причем м попадаем в точку c' (отвеча щую точке *c*). В конце пото получается минимум Э (с точки d' и *d*), а следовательно здесь устанавливается критиче ская глубина.

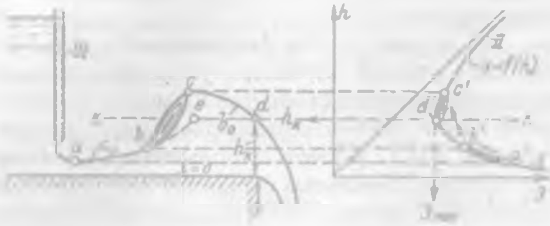


Рис. 8-2. Энергетическая интерпретация гидравлического прыжка

Прыжок показан в искаженном масштабе: горизонтальные размеры его сильно преуменьшены

Если бы мы допустили, что прыжок в природе отсутствует, то кривая *ab* в некоторой точке *e* подо к линии *K – K*, поток в этом месте получил бы минимальную возможн энергию, причем дальнейшее движение жидкости было бы невозможно (в связи с отсутствием того запаса энергии, который должен затрачиваться на работу сил трения при дальнейшем движении жидкости).

В заключение заметим, что вопрос о гидравлическом прыжке впервые был исследован (в прошлом столетии) Бидоне, Беланже и Буссинеском. Последний автор, использовав теорему о количестве движения, нашел уравнение, связывающее сопряженные глубины h' и h''. Такое уравнение получило название **основного уравнения прыжка**.

§ 8-2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЫЖКА

Будем рассматривать случай, когда прыжок устанавливается в **достаточно длинном цилиндрическом русле**, имеющем прямоугольное или близкое к прямоугольному поперечное сечение.[1]

Так как прыжок имеет относительно малую длину, то падением дна русла на этой длине при малых значениях *i* часто можно пренебречь и считать, что дно русла в пределах прыжка – горизонтально, т. е. $i = 0$ (это положение следует рассматривать как **первое** допущение, делаемое при выводе основного уравнения прыжка).

Представим на рис. 8-3 схему продольного разреза прыжка, причем ось *s* наметим, как указано на чертеже. В сечении *AB* потока имеем плавно изменяющееся движение; в сечении *CD* движение является не вполне плавно изменяющимся, однако будем считать при выводе искомого уравнения, что и в этом сечении движение является плавно изменяющимся (**второе** допущение).

[1] В случае, например, трапецеидального русла возникают боковые водоворотные области, причем качественная сторона протекания воды в пределах прыжка несколько изменяется.

Наша задача состоит в том, чтобы найти аналитическую связь между сопряженными глубинами h' и h''.

Для решения этой задачи прилагаем уравнение количества движения (3-124) к отсеку жидкости $ABCD$:

$$\alpha_0 \rho Q (v_2 - v_1) = T_{0_s} + G_s + R_s + P_s, \tag{8-2}$$

где v_1 и v_2 – средние скорости в живых сечениях AB и CD; T_{0_s} – проекция силы внешнего трения, приложенной к отсеку $ABCD$, на ось s; силой T_{0_s} пренебрегаем ввиду ее малости сравнительно с другими силами (третье допущение):

$$T_{0_s} = 0; \tag{8-3}$$

G_s – проекция веса рассматриваемого отсека на ось s; R_s – проекция реакции дна на ось s:

$$G_s = 0; \; R_s = 0; \tag{8-4}$$

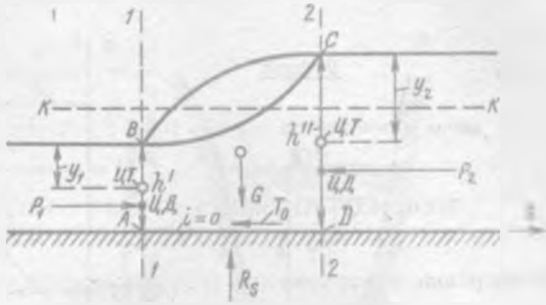


Рис. 8-3. Схема гидравлического прыжка

P_s – проекция на ось s сил давления, действующих на рассматриваемый отсек со стороны окружающей жидкости; с учетом 2-го допущения, предусматривающего распределение давления в сечении $2-2$ по гидростатическому закону, величина P_s может быть записана в виде

$$P_s = P_1 - P_2 = \omega_1 y_1 \gamma - \omega_2 y_2 \gamma. \tag{8-5}$$

Здесь P_1 и P_2 – силы, указанные на чертеже; они приложены в центре давления (ЦД) сечений; ω_1 и ω_2 – площади живых сечений AB и CD; y_1 и y_2 – заглубления под уровнем жидкости соответственно центра тяжести (ЦТ) сечения AB и центра тяжести (ЦТ) сечения CD; $y_1\gamma$ и $y_2\gamma$ – гидродинамические давления в центрах тяжести сечений AB и CD.

Учитывая (8-3), (8-4) и (8-5), вместо (8-2) получаем

$$\alpha_0 \frac{\rho}{\gamma} Q \left(\frac{Q}{\omega_2} - \frac{Q}{\omega_1} \right) = \omega_1 y_1 - \omega_2 y_2, \tag{8-6}$$

или дополнительно, учитывая, что $\dfrac{\rho}{\gamma} = \dfrac{1}{g}$,

$$\boxed{\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 y_2 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_1} + \omega_1 y_1.} \tag{8-7}$$

Уравнение (8-7) и называется **основным уравнением прыжка** (для достаточно длинного цилиндрического русла с небольшим уклоном дна отмеченного выше поперечного сечения). При выводе этого уравнения корректив количества движения α_0 для сечений AB и CD был принят одинаковым: $\alpha_{0_1} = \alpha_{0_2} = \alpha_0$ (четвертое допущение). Заметим, однако, что в сечении CD корректив α_{0_2}, в связи со значительной неравномерностью распределения осредненных скоростей (см. рис. 8-1) и интенсивной пульсацией скоростей в этом сечении, может значительно отличаться от $\alpha_{0_1} \approx 1{,}0$.

§ 8-3. ПРЫЖКОВАЯ ФУНКЦИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ СОПРЯЖЕННЫХ ГЛУБИН ПО ЗАДАННОЙ ДРУГОЙ СОПРЯЖЕННОЙ ГЛУБИНЕ

Положим, что русло и расход нам заданы (рис. 8-4, *а*). При этом условии левая часть уравнения (8-7) представляет собой некоторую функцию только от глубин h''; правая же часть данного уравнения является такой же точно функцией только от глубин h'.

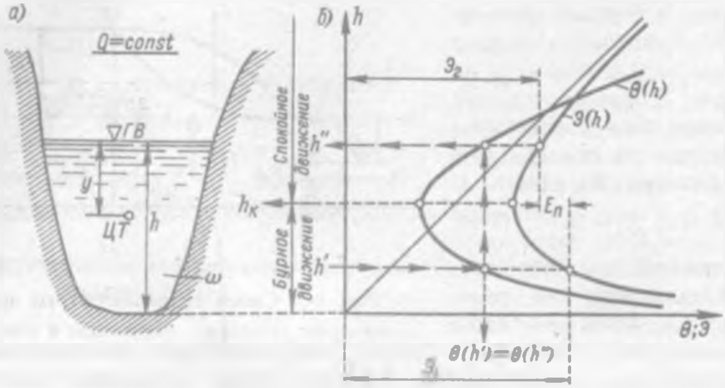


Рис. 8-4. График прыжковой функции $\Theta(h)$

Учитывая сказанное, введем обозначение:

$$\boxed{\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega} + y\omega = \Theta(h),} \qquad (8\text{-}8)$$

где h – глубина в данном сечении; ω и y – соответствующие величины, отвечающие этой глубине.

Функция $\Theta(h)$ называется прыжковой функцией. Размерность ее – длина в кубе (например, м^3).

Пользуясь обозначением (8-8), основное уравнение прыжка (8-7) можно переписать в виде

$$\Theta(h') = \Theta(h''), \qquad (8\text{-}9)$$

где $\Theta(h')$ – значение прыжковой функции, отвечающее глубине h'; $\Theta(h'')$ – значение прыжковой функции, отвечающее глубине h''.

Из (8-9) видно, что сопряженные глубины обладают следующим свойством: *для сопряженных глубин прыжковая функция имеет одну и ту же величину.* Этим свойством и пользуются при отыскании одной сопряженной глубины, когда другая задана.

В литературе приводится подробное исследование функции $\Theta(h)$. Из этого исследования вытекает, что $\Theta(h)$ может быть выражена кривой $\Theta(h)$, показанной на рис. 8-4. Как видно, эта кривая обладает следующими свойствами:

а) минимум кривой $\Theta(h)$ совпадает (если $\alpha \approx \alpha_0$) с минимумом кривой $Э(h)$ удельной энергии сечения и отвечает глубине $h = h_к$;

б) при $h \to 0$ величина Θ стремится к бесконечности;

в) при $h \to \infty$ величина Θ стремится к бесконечности.

Пользуясь этой кривой, можно по заданной глубине h' найти глубину h'' и, наоборот, зная h'' – найти глубину h'. Из рис. 8-4 видно, что если глубина

h' уменьшается, то сопряженная с ней глубина h'' увеличивается (и наоборот). Отметим, что линия критических глубин $K-K$ всегда пересекает прыжок, причем $h_к$ несколько меньше величины, равной $0{,}5(h'+h'')$.

Для определения сопряженных глубин можно пользоваться приближенными формулами А. Н. Рахманова:

$$\xi' = \frac{1{,}2}{\xi''} - 0{,}2; \ \xi'' = \frac{1}{0{,}167 + 0{,}834\xi'}, \tag{8-10}$$

где ξ' и ξ'' – относительные глубины:

$$\xi' = \frac{h'}{h_к}; \ \xi'' = \frac{h''}{h_к}. \tag{8-11}$$

Эти полуэмпирические формулы при $\xi'' \leqslant 5$ дают обычно погрешность менее 7%.

§ 8-4. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЫЖКА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

В случае прямоугольного цилиндрического русла основное уравнение прыжка (8-7) упрощается.

Для прямоугольного русла имеем

$$\omega = bh; \ y = \frac{h}{2}; \ q = \frac{Q}{b}; \ Q = qb, \tag{8-12}$$

где q – удельный (или единичный) расход.

Прыжковая функция для прямоугольного русла выразится в виде

$$\Theta(h) = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega} + y\omega = \frac{\alpha_0 q^2 b^2}{gbh} + \frac{h}{2}bh \tag{8-13}$$

или

$$\Theta(h) = b\left(\frac{\alpha_0 q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}\right). \tag{8-14}$$

Рассматривая теперь 1 м ширины прямоугольного русла, введем понятие удельной, или единичной, прыжковой функции, т. е. прыжковой функции, отнесенной к единице ширины потока,

$$\theta(h) = \frac{\Theta(h)}{b}. \tag{8-15}$$

При этом вместо (8-9) можем написать

$$\theta(h') = \theta(h''). \tag{8-16}$$

Учитывая (8-14) и (8-15), видим, что

$$\theta(h) = \frac{\alpha_0 q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}. \tag{8-17}$$

Имея в виду, что

$$h_к^3 = \frac{\alpha q^2}{g}, \tag{8-18}$$

получаем (при $\alpha \approx \alpha_0$)

$$\theta(h) = \frac{h_к^3}{h} + \frac{h^2}{2}. \tag{8-19}$$

Используя (8-19), формулу (8-16) представим в виде

$$\frac{h_к^3}{h'} + \frac{h'^2}{2} = \frac{h_к^3}{h''} + \frac{h''^2}{2}, \tag{8-20}$$

откуда

$$h_к^3\left(\frac{1}{h'} - \frac{1}{h''}\right) = \frac{h''^2 - h'^2}{2}, \tag{8-21}$$

или

$$2h_к^3 = \frac{h''^2 - h'^2}{\dfrac{1}{h'} - \dfrac{1}{h''}}, \tag{8-22}$$

или

$$h'h''(h' + h'') = 2h_к^3. \tag{8-23}$$

Решая это уравнение относительно h' и h'', получаем

$$h' = \frac{h''}{2}\left[\sqrt{1 + 8\left(\frac{h_к}{h''}\right)^3} - 1\right]; \tag{8-24}$$

$$h'' = \frac{h'}{2}\left[\sqrt{1 + 8\left(\frac{h_к}{h'}\right)^3} - 1\right]. \tag{8-25}$$

Уравнение (8-24) позволяет найти h', если задано h''; уравнение (8-25) – найти h'', если задано h'. Как видно, в случае прямоугольного русла глубины h' и h'' находятся непосредственно без предварительного построения графика прыжковой функции.

В формулу (8-24) вместо выражения $8\left(\dfrac{h_к}{h''}\right)^3$ можно ввести величину

$$8\left(\frac{h_к}{h''}\right)^3 = 8\,\frac{1}{h''^3}\,\frac{\alpha q^2}{g} = \frac{8\alpha q^2}{gh''^3} = \frac{8\alpha v_2^2}{gh''}; \tag{8-26}$$

аналогично можно поступить и с формулой (8-25).

Зависимости (8-24) и (8-25) можно представить также и в относительных величинах. С этой целью разделим (8-23) на $h_к^3$, в результате получаем

$$\xi'\xi''(\xi' + \xi'') = 2, \tag{8-27}$$

где ξ' и ξ'' определяются (8-11).

Решая (8-27) относительно ξ', вместо (8-24) имеем

$$\xi' = \frac{\xi''}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8}{\xi''^3}} - 1\right). \tag{8-28}$$

По этому уравнению А. А. Угинчусом был построен расчетный график. Пользуясь таким графиком (приводимым в литературе), можно определять одну из взаимных глубин, зная другую взаимную глубину, не прибегая к вычислениям по формуле (8-24) или (8-25). Вместо формул (8-24) и (8-25) можно пользоваться также формулами Рахманова (8-10), которые при $\xi'' < (3 \div 3{,}5)$ дают здесь высокую точность.

§ 8-5. ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРЫЖКА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ РУСЛЕ. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ПРЫЖКЕ

Выше мы рассматривали высотные элементы прыжка. Вместе с тем при проектировании, например плотин (при расчете нижнего бьефа), приходится интересоваться и длиной прыжка $l_п$ (рис. 8-1). Однако вопрос об этом размере до сего времени не получил даже приближенного теоретического решения. Различные авторы предложили для практического определения длины $l_п$ разные чисто эмпирические формулы (в литературе опубликовано около четырех десятков таких формул).

При сопоставлении этих формул, проведенном в последнее время, выяснилось, что в длинах прыжка, вычисленных по ним, получается большое расхождение. В связи с этим в настоящее время приходится рекомендовать из числа упомянутых экспериментальных формул ту зависимость, которая, с одной стороны, является наиболее простой и, с другой стороны, дает примерно *средние* значения $l_п$ (среди тех, которые получаются по разным экспериментальным формулам, имеющимся в литературе).

В качестве именно таких зависимостей приведем здесь следующие:

а) *формулу Павловского* (1937 г.)

$$l_п = 2{,}5(1{,}9\,h'' - h'); \tag{8-29}$$

б) *формулу Сафранеца* (1927 – 1930 гг.)

$$l_п = 4{,}5\,h''; \tag{8-30}$$

в) *формулу Бахметева и Матцке* (1936 г.)

$$l_п = 5a_{пр} = 5(h'' - h'). \tag{8-31}$$

В пределах прыжка, где имеется водоворотная область в виде поверхностного вальца, получается относительно большая потеря напора (см. § 4-14). Поэтому удельная энергия транзитной струи в пределах прыжка резко уменьшается по течению; уменьшение же удельной энергии для бурного потока [см., например, кривую $Э = f(h)$ на рис. 8-4, *б*] обусловливает резкое расширение струи.

Для горизонтального русла (при $i = 0$) потеря напора (потеря удельной энергии) в прыжке будет

$$E_п = \left(h' + \frac{\alpha v_1^2}{2g}\right) - \left(h'' + \frac{\alpha v_2^2}{2g}\right); \tag{8-32}$$

Эту величину можно найти также по графику на рис. 8-4, *б*, где помимо кривой прыжковой функции, нанесена еще кривая удельной энергии сечения Э.

В случае прямоугольного русла формула (8-32) приводится к виду

$$E_п = \frac{a_п^3}{4h'h''}; \tag{8-33}$$

рассматривая эту зависимость, можно показать, что потеря энергии в прыжке прямо пропорциональна примерно *третьей степени* высоты прыжка; следовательно, $E_п$ сильно растет с увеличением высоты прыжка.

§ 8-6. ОСОБЫЕ ВИДЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЫЖКА. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

С явлением прыжка весьма часто встречаемся в практике, в частности, при строительстве плотин; здесь приходится сталкиваться иногда с гидравлическими прыжками особого вида:

а) с так называемым **затопленным прыжком** (см. далее, например, рис. 12-42);

б) с так называемым **несвободным прыжком**, который получается в недостаточно длинном русле, например, в особом колодце, устраиваемом за плотиной (этот колодец стесняет развитие горизонтальных размеров прыжка, причем длина его получается относительно небольшой).

Можно сказать, что выше мы ограничивались рассмотрением только **свободного незатопленного прыжка в правильном призматическом русле** (имеющем поперечное сечение, близкое к прямоугольному) **с уклоном** $i = 0$.

При малой разнице сопряженных глубин h' и h'' сила $P_s = P_1 - P_2$, входящая в уравнение (8-2), получается относительно небольшой. В этом случае

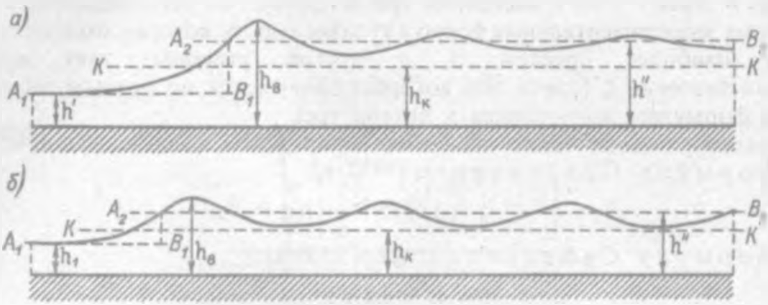


Рис. 8-5. Свободный волнистый прыжок в виде затухающих (*а*) и периодических (*б*) волн

сила внешнего трения T_{0_s} становится соизмеримой с силой P_s, и поэтому в уравнении количества движения силой T_{0_s} уже пренебрегать нельзя (что мы делали выше при выводе основного уравнения прыжка).

В связи со сказанным, найденное выше основное уравнение (8-7) может оказаться недостаточно точным при малой разности глубин h' и h'', т. е. в случае, когда эти глубины близки к критической глубине. При этих условиях внешний вид свободного прыжка качественно изменяется. Следует считать, что описанный в предыдущих параграфах свободный прыжок, который может быть назван здесь **совершенным**, получается только в случае, когда

$$h' \leqslant 0{,}60\, h_к. \tag{8-34}$$

При больших величинах h', а именно:

а) в случае

$$0{,}60 h_к < h' \leqslant 0{,}70 h_к \tag{8-35}$$

имеем так называемый **несовершенный** прыжок; здесь на поверхности прыжка получаем относительно небольшой валец, в связи с чем интенсивность турбулентности потока непосредственно за прыжком повышается не сильно;

б) в случае

$$0{,}70 h_к < h' \leqslant 0{,}85 h_к \tag{8-36}$$

имеем **волнистый прыжок** в виде затухающих волн (рис. 8-5, *а*); здесь валец вовсе отсутствует; высота первой волны получается примерно в 1,5 раза больше высоты гидравлического прыжка, определенной в соответствии с формулой (8-25); за упомянутой первой волной следуют небольшие волны, затухающие на короткой длине, причем в конце этого ряда волн получаем глубину, близкую к глубине h'', вычисленной по формуле (8-25);[1]

в) в случае

$$0{,}85\,h_к < h' \leqslant h_к \tag{8-37}$$

имеем «прыжок» в виде периодических волн (рис. 8-5, *б*), т. е. некоторого цуга волн, затухающих на относительно большой длине.

Специальный анализ кривой прыжковой функции и кривой удельной энергии сечения (рис. 8-4) показывает, что имеется некоторая «околокритическая» область глубин h:

$$0{,}85h_к \leqslant h \leqslant 1{,}15h_к, \tag{8-38}$$

при которой переход бурного движения в спокойное осуществляется практически без потерь напора (при помощи упомянутых периодических волн).[2]

Выше мы рассматривали горизонтальное русло. Явление гидравлического прыжка в русле с достаточно большим уклоном дна исследовалось рядом авторов. Можно привести следующие данные, относящиеся к этому случаю:

а) при $i > 0$ длина прыжка возрастает; эту длину при $i \leqslant {}^1/_3$ можно определять по эмпирической формуле Г. Н. Косяковой (1949 г.):

$$l_п = l'_п(1 + 3i), \tag{8-39}$$

где $l_п$ – искомая длина прыжка, измеренная по горизонтали; $l'_п$ – длина прыжка, вычисленная для горизонтального русла при той же глубине h';

б) для прямоугольного наклонного русла, согласно Г. Н. Косяковой, величина h'' может определяться по формуле:

$$h'' = h' + a' + il_п, \tag{8-40}$$

где $l_п$ – устанавливается по формуле (8-39); величина же a' – по зависимости:

$$a' = a_п(1 - 1{,}75i),$$

где $a_п$ – высота прыжка, найденная для горизонтального русла при глубине h'.

В практике приходится сталкиваться с явлением прыжка, возникающего в пространственных условиях; в этих условиях мы можем получить так называемые косые прыжки, т. е. прыжки, фронт которых в плане не ортогонален к оси струи. В отличие от косых прыжков, описанные выше прыжки могут быть названы прямыми.

Встречаются случаи, так сказать, *полубезнапорного прыжка*, получающегося, например, в напорном туннеле за затвором, частично перекрывающим этот туннель, при наличии аэрационного канала за затвором (см. рис. 5-8) могут возникнуть условия, когда перед прыжком будет безнапорное движение, а непосредственно за прыжком – напорное.

Изучая поясненные выше гидравлические прыжки, интересуются не только длиной этих прыжков и сопряженными глубинами, но также вопросами о распределении скоростей в районе прыжка, пульсации скоростей и давлений, размывающей способностью потока в пределах прыжка, аэрацией потока.

Надо в заключение подчеркнуть, что выше мы всюду имели в виду турбулентный режим; следует, однако, учитывать, что гидравлический прыжок может возникать при определенных условиях и в случае ламинарного режима.

---

[1] Здесь всюду имеем в виду прямоугольное русло.

[2] Пределы существования околокритической области, а также пределы существования «прыжков» различного вида нами были заимствованы из работ А. А. Турсунова, обобщившего имеющиеся экспериментальные данные.

§ 8-7. ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ПРИ РЕЗКОМ ИЗМЕНЕНИИ УКЛОНА ДНА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА

В этом параграфе обобщим данные, полученные в гл. 7, с данными о гидравлическом прыжке; кроме того, рассмотрим здесь более сложные случаи неравномерного движения – случаи, когда дно канала резко изменяет свой уклон. Представим на рис. 8-6, *а*, *б* цилиндрическое русло, имеющее в точке *O* «перелом» дна. Будем считать, что вдали от вертикали $W-W$, проходящей через точку *O*, на левом и правом участках русла имеет место равномерный режим, характеризуемый глубинами h_{0_1} (для левого участка русла) и h_{0_2} (для правого участка русла).

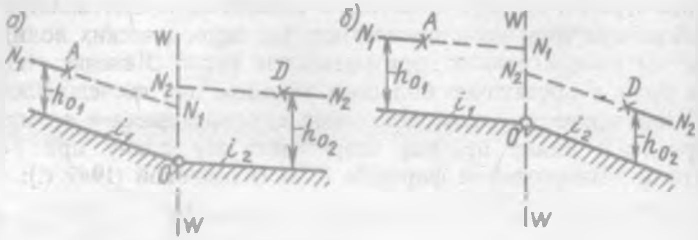


Рис. 8-6. Каналы с резким изменением уклона дна (в точке *O*)

Поставим себе целью выяснить, какие формы свободной поверхности могут иметь место в районе перелома дна, т. е. какой именно кривой должны сопрягаться точки *A* и *D* свободной поверхности (рис. 8-6).

При рассмотрении этой задачи можно различать разные случаи канала:

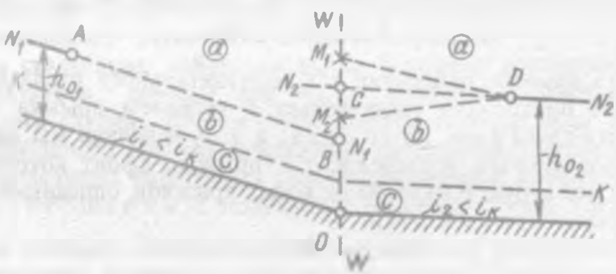


Рис. 8-7. К построению свободной поверхности в канале при отсутствии гидравлического прыжка

1) оба уклона дна канала (i_1 и i_2) меньше критического (возникновение гидравлического прыжка невозможно);

2) оба уклона (i_1 и i_2) больше критического (прыжок также невозможен);

3) $i_1 < i_к$; $i_2 > i_к$ (прыжок невозможен);

4) $i_1 > i_к$; $i_2 < i_к$; здесь свободная поверхность, поднимаясь по течению, должна пересекать линию $K-K$ (следовательно, в русле возникнет прыжок).

1°. Случай, когда прыжок в русле отсутствует. Общий метод рассуждений, при помощи которого устанавливается возможная форма свободной поверхности, поясним на следующем примере (рис. 8-7):

1) обозначим через *B* и *C* точки пересечения вертикали $W-W$ с линиями нормальных глубин: N_1N_1 (для 1-го участка канала) и N_2N_2 (для 2-го участка канала);

2) обозначим через M точку пересечения искомой свободной поверхности с вертикалью $W-W$; эту точку назовем м а р к о й M;

3) далее рассматриваем возможные положения марки M на вертикали $W-W$; при этом в случае, показанном на рис. 8-7, рассуждаем так:

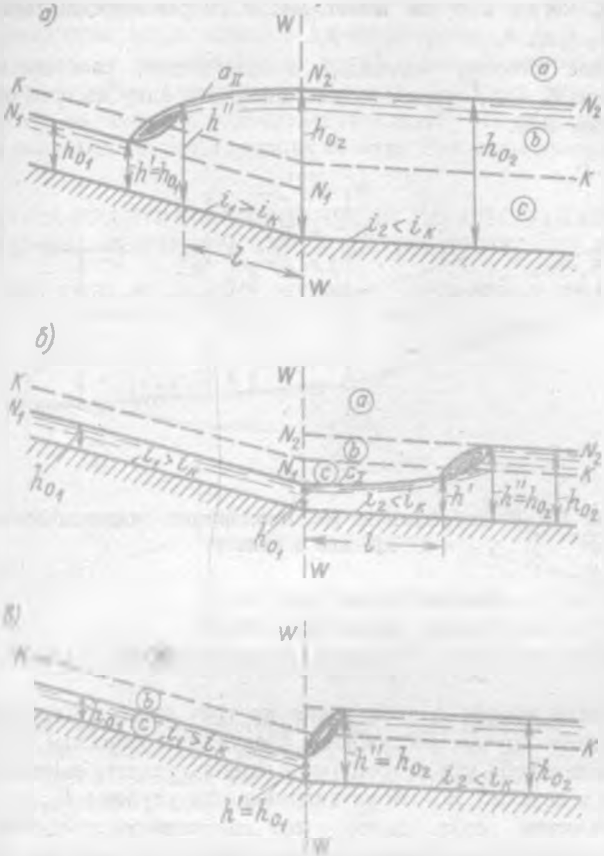


Рис. 8-8. К построению свободной поверхности в канале при наличии гидравлического прыжка

а) марка M не может располагаться в ы ш е точки C, так как при этом для правого участка русла в зоне a получаем кривую спада M_1D, что невозможно, – в зоне a может быть только кривая подпора;

б) марка M не может находиться н и ж е точки C, так как при этом для правого участка русла в зоне b получается кривая подпора M_2D, что также невозможно, – в зоне b может быть только кривая спада;

в) из сказанного заключаем, что единственно приемлемым положением марки M на вертикали $W-W$ (при котором мы получаем физически возможные формы свободной поверхности для правого и левого участков русла) является положение, когда марка M совпадает с точкой C; при этом в пределах левого участка русла имеет место кривая подпора типа a_1; в пределах же правого участка русла на всем его протяжении существует равномерный режим.

Из приведенного примера дополнительно можно сделать следующий общий вывод (см. также § 7-6); *в случае спокойного движения воды построение кривой свободной поверхности следует вести снизу вверх, т. е. идя против течения.*

Если бы мы рассмотрели пример русла с большими уклонами ($i > i_к$), когда в русле имеется бурное движение воды, то пришли бы к прямо противоположному выводу (см. также § 7-6): *построение кривой свободной поверхности бурных потоков следует вести в направлении вниз по течению.*

2°. Случай, когда в русле имеет место гидравлический прыжок. В этом случае $i_1 > i_к$; $i_2 < i_к$; $h_{0_1} < h_к$; $h_{0_2} > h_к$.

Здесь бурное течение переходит в спокойное; свободная поверхность пересекает линию $K - K$, причем можем получить одну из трех схем свободной поверхности (рис. 8-8):

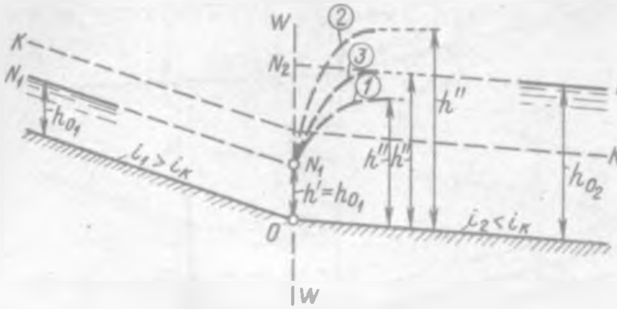


Рис. 8-9. К определению местоположения гидравлического прыжка в канале

а) прыжок на 1-м участке русла (рис. 8-8, *а*);

б) прыжок на 2-м участке русла (рис. 8-8, *б*);

в) промежуточная схема – прыжок устанавливается в месте перелома дна (рис. 8-8, *в*).

Чтобы решить вопрос о том, какая из трех схем должна иметь место в данном конкретном случае, рассуждаем следующим образом (рис. 8-9).

1. Представляем себе, что на всей длине первого участка имеется равномерный режим, причем в сечении $W - W$ устанавливается глубина h_{0_1}.

2. Представляем себе далее, что в сечении $W - W$ образовался фиктивный гидравлический прыжок, имеющий сопряженные глубины $h' = h_{0_1}$ и h'', причем фиктивную глубину h'' вычисляем по основному уравнению прыжка, зная h'. Три возможных варианта фиктивного прыжка показаны на рис. 8-9 жирной штриховой линией.

3. После этого руководствуемся следующими правилами:

а) если $h'' < h_{0_2}$, т. е. если фиктивный прыжок, представленный в сечении $W - W$, затопляется потоком 2-го участка канала (см. фиктивный прыжок *1*), *то действительный прыжок* устанавливается на первом участке русла (рис. 8-8, *а*);

б) если $h'' > h_{0_2}$, т. е. глубина фиктивного прыжка (см. фиктивный прыжок 2) больше нормальной глубины второго участка русла, то уровень воды этого участка канала отгоняется от вертикали $W - W$, причем действительный прыжок устанавливается на втором участке (рис. 8-8, *б*);

в) если $h'' = h_{0_2}$, то ясно, что прыжок устанавливается в точке *O* (фиктивный прыжок *3* обращается в действительный); рис. 8-8, *в*.

4. В случае схем *а* и *б* находим длину *l* (см. рис. 8-8), которая определяет местоположение прыжка. Эту длину вычисляем, пользуясь уравнением неравномерного движения, как длину кривой подпора a_{II} (рис. 8-8, *а*) или длину кривой подпора c_I (рис. 8-8, *б*). Здесь при использовании уравнения неравномерного движения нам, помимо заданной глубины h_{0_2} (8-8, *а*) или заданной глубины

h_{0_1} (рис. 8-8, *б*), надо еще знать глубину h'' или h'. Глубину h'' следует определять по основному уравнению прыжка, полагая $h' = h_{0_1}$ (рис. 8-8, *а*); глубину же h' (рис. 8-8, *б*) – по основному уравнению прыжка, полагая $h'' = h_{0_2}$.

В заключение обратим внимание, что приведенное выше решение вопроса относится только к случаю, когда вдали от вертикали $W - W$ имеет место равномерное движение (определяемое глубинами h_{0_1} и h_{0_2}). Более сложный случай, когда вдали от прыжка имеет место неравномерное движение, будет рассмотрен далее в § 14-4. Отметим, также, что схемы на рис. 8-8, *б* и *в* могут характеризоваться наличием в районе вертикали $W - W$ относительно больших центробежных сил инерции, действующих на воду. Эти силы нами не учитывались.

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ПОСТРОЕНИЮ СХЕМ СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РУСЛАХ

Пример 1. Для русла на рис. 8-10 представить принципиальную схему свободной поверхности.

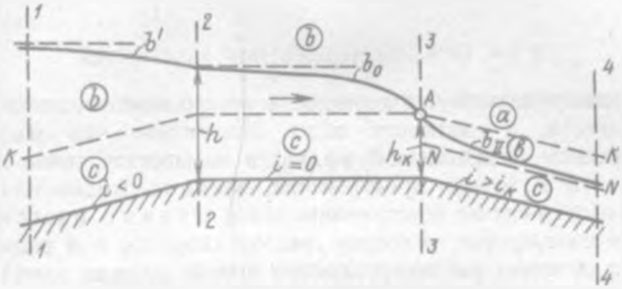


Рис. 8-10. К примеру 1

При построении такой схемы поступаем следующим образом:

1) проводим вспомогательные вертикали *1*, *2*, *3*, *4*. Эти вертикали выделяют отдельные участки русла, имеющие свои особые характеристики;

2) определяем местоположение критической глубины. Здесь надо запомнить правило: критическая глубина устанавливается в конце русла, имеющего уклон $i < i_к$; другими словами, глубина $h_к$ устанавливается или в самом конце русла с уклоном $i < i_к$ (где русло обрывается и поток переходит в свободную ниспадающую струю), или в точке перелома дна, где уклон $i < i_к$ переходит в уклон $i \geqslant i_к$. Очевидно, в случае, представленном на рис. 8-10, критическая глубина $h_к$ должна устанавливаться на вертикали *3 – 3*;

3) получив точку *A* искомой свободной поверхности, определяемую критической глубиной, через эту точку проводим линию критических глубин $K - K$. После этого для участка русла, характеризуемого уклоном $i > i_к$, проводим линию $N - N$;

4) имея линии $N - N$ и $K - K$, отмечаем на чертеже наименование зон (*a*, *b*, *c*) возможного расположения участков свободной поверхности;

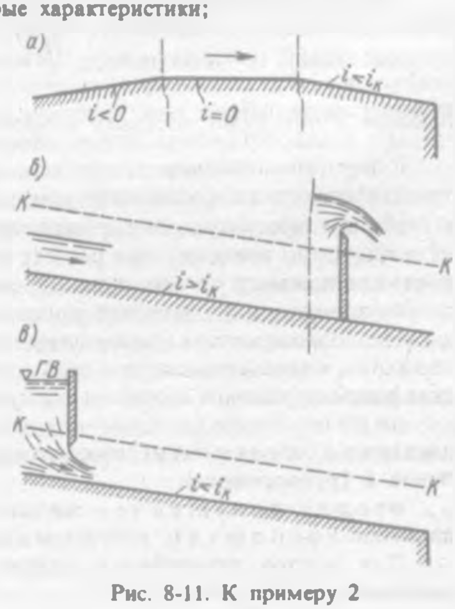


Рис. 8-11. К примеру 2

5) наконец, начиная от установленной выше точки A, проводим кривые свободной поверхности для отдельных участков заданного русла; при этом сообразуемся с возмож-ными формами свободной поверхности для разных намеченных зон (a, b, c), см. рис. 7-31, 7-34, 7-35.

Пример 2. Построить схемы свободных поверхностей для русел на рис. 8-11,*а*, *б*, *г*, для русла на рис. 8-11,*в* изобразить три различные возможные здесь схемы свобод-ной поверхности (характеризующиеся наличием или отсутствием гидравлического прыжка).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

8-1. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика. Специальный курс. – М.-Л.; Госэнергоиздат, 1962.

8-2. **Чоу В. Т.** Гидравлика открытых каналов. – М.: Стройиздат, 1969.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ И БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

§ 9-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать неустановившееся плавно изменяющееся турбулентное движение жидкости, в частности воды. Напомним, что неустановившимся движением несжимаемой жидкости называется такое движение, при котором скорости в точках пространства, занятого жидкостью, изменяются во времени. В общем случае неустановившегося плавно изменяющегося движения несжимаемой жидкости средняя скорость v и расход Q во всех *плоских* живых сечениях рассматриваемого потока должны иметь отличные от нуля частные производные по времени:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0.$$

При установившемся плавно изменяющемся напорном движении несжимаемой жидкости в абсолютно жестком (недеформирующемся) русле во всех плоских живых сечениях потока $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; в случае сжимаемой жидкости к этому условию необходимо добавить второе: $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

С неустановившимся движением воды часто приходится сталкиваться при проектировании гидростанций: при расчете трубопроводов, подводящих воду к турбинам (при закрытии турбин скорость движения воды и давление в трубах изменяются во времени), при расчете каналов, подводящих воду к гидростанции и отводящих воду от нее, и т. п. С неустановившимся движением встречаемся в практике и при расчете водопроводных сетей.

Наиболее простым (в отношении исследования) случаем неустановившегося движения жидкости является напорное неустановившееся движение жидкости, рассматриваемое с учетом следующих двух допущений:

первое допущение – стенки напорного трубопровода являются абсолютно жесткими (абсолютно не деформируются при изменении давления в трубопроводе);

второе допущение – жидкость, движущаяся в трубе (например, вода), является абсолютно несжимаемой.

Для такого простейшего случая имеем следующие условия движения жидкости:

А. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА НЕ УЧИТЫВАЕМ ЕЕ СЖИМАЕМОСТЬ, ПРИЧЕМ СТЕНКИ ТРУБОПРОВОДА СЧИТАЕМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ – НЕДЕФОРМИРУЮЩИМИСЯ (ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ НАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ)

§ 9-2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ В СЛУЧАЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ (УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЖИДКОСТИ)

Будем изучать только параллельноструйное и плавно изменяющееся движение вязкой жидкости, т. е. случай, когда имеют место плоские расчетные живые сечения. В связи с этим будем интересоваться только продольными скоростями и ускорениями, всюду нормальными к расчетным живым сечениям.

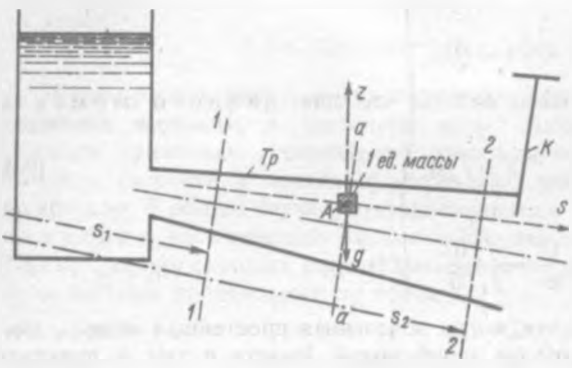


Рис. 9-1. К выводу уравнения Бернулли (9-12)

Представим на рис. 9-1 несколько расширяющийся напорный трубопровод *Тр*, на протяжении которого от сечения *1 – 1* до сечения *2 – 2* происходит указанное движение жидкости. Считаем, что местные потери напора в этом трубопроводе отсутствуют. Положим, что кран *K*, установленный в конце трубопровода, постепенно закрывается или открывается. При этом расход жидкости Q в трубопроводе должен изменяться во времени; во времени будут изменяться и скорости u. В трубопроводе будет происходить неустановившееся движение жидкости.

Считаем, что стенки трубопровода абсолютно жестки и что жидкость абсолютно несжимаема. При этом, как отмечалось выше, в данный момент времени средняя скорость v будет являться функцией только координаты s [см. зависимость (9-4)].

Наметим некоторое плоское расчетное живое сечение $a-a$ и на нем точку A (рис. 9-1). Ось координат z направим вертикально вверх. В качестве второй оси выберем направление s (линии тока).

Предположим вначале, что жидкость является идеальной (невязкой). При этом выделим в точке A единицу массы жидкости. Далее выясним все силы, действующие на нее. Сумму проекций всех этих сил (включая силы инерции) на ось s приравниваем нулю. В результате получим известное уравнение динамического равновесия рассматриваемой единицы массы в проекциях на ось s, т. е. уравнение Эйлера, написанное для оси s. Это уравнение для единицы массы жидкости может быть представлено в виде ~~(см. § 3-3)~~

$$\phi_s - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{du}{dt} = 0; \qquad (1) \qquad (9\text{-}6)$$

здесь: ϕ_s – проекция на ось s объемной силы, действующей на единицу массы жидкости; поскольку в данном случае объемной силой является сила тяжести, потенциальная функция которой

$$U = -gz, \tag{9-7}$$

то

$$\phi_s = \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}(gz); \tag{9-8}$$

$\frac{du}{dt}$ – ускорение частиц жидкости; эта величина представляет собой (см. § 3-3) взятую с обратным знаком силу инерции рассматриваемой единицы массы жидкости; в соответствии с зависимостями (3-8) можем написать

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{9-9}$$

Подставляя (9-8) и (9-9) в (9-6), имеем

$$-\frac{\partial}{\partial s}(gz) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{9-10}$$

Деля все слагаемые уравнения (9-10) на вес единицы массы (на величину g), т.е. относя его к единице веса жидкости, проходящей через рассматриваемое живое сечение, переписываем данное уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{9-11}$$

Обратимся к интегрированию полученного уравнения. Интегрировать его будем для данного момента времени ($t = t_0$) по координате s. Умножая уравнение (9-11) на ds и интегрируя его от сечения $1-1$ до сечения $2-2$, получаем известное уравнение Бернулли, дополненное одним новым членом,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial u}{\partial t}ds. \tag{9-12}$$

Это уравнение относится к элементарной струйке идеальной жидкости. Все слагаемые этого уравнения (исключая z_1 и z_2) отвечают одному и тому же моменту времени.

Переходя от элементарной струйки идеальной жидкости к элементарной струйке реальной жидкости, мы должны ввести в уравнение (9-12) потерю напора по длине h'_l, а также величину $\pm h'_{\Delta E}$, поясненную в § 3-16. При этом вместо (9-12) получаем

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \pm h'_{\Delta E} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_l + \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial u}{\partial t}ds. \tag{9-13}$$

Далее введем новое обозначение:

(A) $$\frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial u}{\partial t}ds = h'_i; \tag{9-14}$$

в результате вместо (9-13) окончательно получаем [1]

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \pm h'_{\Delta E} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_l + h'_i.} \tag{9-15}$$

Представим величину h'_i через расход dQ элементарной струйки. С этой целью напишем

$$dQ = u\delta\omega; \quad u = \frac{dQ}{\delta\omega}; \tag{9-16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\delta\omega} \frac{\partial (dQ)}{\partial t}, \tag{9-17}$$

где площадь сечения элементарной струйки $\delta\omega$ не зависит от времени t, так как стенки рассматриваемой трубы считаются недеформирующимися при изменении давления жидкости.

Следовательно,

$$h'_i = \frac{1}{g} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds = \frac{1}{g} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\delta\omega} \frac{\partial (dQ)}{\partial t} ds \tag{9-18}$$

или, так как $\dfrac{\partial (dQ)}{\partial t}$ не зависит от s, то

(Б)
$$h'_i = \frac{1}{g} \frac{\partial (dQ)}{\partial t} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\delta\omega}. \tag{9-19}$$

Таким образом, как видно, имеются два выражения для величины h'_i: (А) и (Б).

Величина h'_i имеет размерность длины и может быть названа и н е р ц и о н н ы м н а п о р о м. [2] Применение такого термина объясняется следующим.

Сила инерции, отнесенная к е д и н и ц е в е с а движущейся жидкости, равна [3]

$$I' = -\frac{1}{g} \frac{du}{dt}, \tag{9-20}$$

где $\dfrac{1}{g}$ — масса единицы веса жидкости.

Уравнение (9-20) согласно (9-9) можно переписать в виде

$$I' = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \right], \tag{9-21}$$

---

[1] Значок «прим» (′) у h'_l и h'_i указывает, что эти величины относятся к элементарной струйке, а не к целому потоку.

[2] Точнее эту величину следовало бы назвать «л о к а л ь н ы м инерционным напором» (см. ниже).

[3] Значок «прим» (′) у I', $I'_к$ и $I'_л$ указывает, что эти величины относятся к единице веса, а не к единице массы. С тем чтобы получить силу инерции одной единицы веса жидкости, безразмерную величину I' следует умножить на 1 ед. веса жидкости.

или в виде

$$I' = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2g}\right) - \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} = I'_к + I'_л, \tag{9-22}$$

где обозначено:

$$I'_к = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2g}\right) = f_1\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right); \tag{9-23}$$

$$I'_л = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} = f_2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{9-24}$$

Как видно, удельная сила инерции I' состоит из двух частей:

$I'_к = f_1\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)$, называемой конвективной частью удельной силы инерции; величина $I'_к$ обусловливается изменением скорости по пути s (по длине струйки). С этой частью силы инерции мы сталкивались ранее, когда рассматривали установившееся движение. Умножив выражение (9-23) на ds и интегрируя его от сечения $1-1$ до сечения $2-2$, получаем разность скоростных напоров (приращение удельной кинетической энергии при переходе от сечения $1-1$ к сечению $2-2$):

$$\delta h_u = -\left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}\right). \tag{9-25}$$

Отсюда видно, что разность скоростных напоров, входящих в уравнение Бернулли, полученное для установившегося движения (в § 3-12), учитывает конвективную часть удельной силы инерции, определяемую частной производной $\frac{\partial u}{\partial s}$ (см. § 3-21, п. 3°).

$I'_л = f_2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, называемой локальной частью удельной силы инерции; величина $I'_л$ обусловливается изменением скорости в данной точке пространства во времени. С этой частью силы инерции мы ранее не сталкивались. Она появляется только в случае неустановившегося движения и определяется частной производной $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Умножая (9-24) на ds и интегрируя его от сечения $1-1$ до сечения $2-2$, получаем величину h'_i (с обратным знаком). Отсюда и видно, что h'_i может быть названа инерционным напором, точнее – напором, учитывающим только локальную часть силы инерции. Полученное уравнение (9-15) представляет собой уравнение Бернулли,[1] учитывающее локальные силы инерции. Это уравнение относится к некоторому определенному моменту времени. Поэтому все члены уравнения (9-15) должны вычисляться для одного и того же момента времени.

Заметим в заключение, что данное уравнение мы получили, пользуясь началом Даламбера, поскольку для вывода его было применено уравнение Эйлера. Ранее, рассматривая установившееся движение (см. § 3-12), мы выводили уравнение Бернулли, исходя из теоремы изменения кинетической энергии. Вместе с тем уравнение Бернулли для установившегося движения легко может быть получено и из уравнения (9-15), если в него подставим $h'_i = 0$.

---

[1] См. сноску на стр. 110 (об авторстве).

§ 9-3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЦЕЛОГО ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ)

Рассматривая плавно изменяющееся движение на всем пути от сечения $1-1$ до сечения $2-2$, мы должны всюду пренебрегать составляющими скоростей и ускорений, направленными вдоль расчетных (плоских) сечений (см. рис. 3-12). Поэтому составляющие силы инерции, в частности локальной, направленные вдоль расчетных живых сечений, в случае плавно изменяющегося движения не учитываются.

Распространяя уравнение Бернулли, полученное в § 9-2 для элементарной струйки, на целый поток, характеризуемый плавно изменяющимся движением, рассуждаем примерно так же, как и в случае уравнения Бернулли, относящегося к установившемуся движению (см. § 3-19, 3-20). В результате получаем уравнение Бернулли, относящееся к целому потоку жидкости в виде

(I) $$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_l + h_i,} \qquad (9\text{-}26)$$

где все члены, кроме последнего, известны из предыдущего. Что касается нового члена h_i, учитывающего напор, затрачиваемый в среднем на преодоление локальной силы инерции единицы веса жидкости, находящейся в данный момент времени между сечениями $1-1$ и $2-2$, то он, согласно указаниям, приведенным в § 3-19 (см. п. 1-3), может быть записан в виде

$$h_i = \frac{\int\limits_{\omega} (h_i') \,\gamma\, dQ\, dt}{\gamma Q\, dt} = \frac{\int\limits_{\omega} \left[\frac{1}{g} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds \right] dQ}{Q} = \frac{1}{gQ} \int\limits_{s_1}^{s_2} \left[\int\limits_{\omega} u \frac{\partial u}{\partial t} d\omega \right] ds, \qquad (9\text{-}27)$$

где dQ — расход элементарной струйки.

Выражая величину h_i через среднюю скорость v, вместо зависимости (9-27) получаем (для данного момента времени) [1]

(A) $$\boxed{h_i = \frac{\alpha_0}{g} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds.} \qquad (9\text{-}28)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \omega \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (9\text{-}29)$$

а следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad (9\text{-}30)$$

выражение (9-28) для члена h_i можно еще представить в следующей форме:

---

[1] Вывод зависимости (9-28), относящийся только к безвихревому потоку, приведен петитом в [9-10; с. 297].

(Б)
$$h_i = \frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial Q}{\partial t}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\omega}. \tag{9-31}$$

Подчеркнем, что интеграл, входящий в эту формулу,

$$\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\omega} \tag{9-32}$$

для трубопровода заданной геометрической формы имеет вполне определенный геометрический смысл.

Рис. 9-2. К пояснению уравнения Бернулли (9-35)

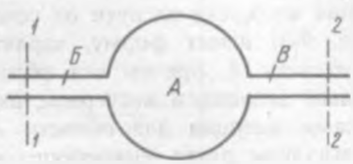


Рис. 9-3. К пояснению уравнения Бернулли (9-35)

Приведем теперь вторую форму записи уравнения Бернулли (9-26). С этой целью на рис. 9-2 изобразим трубопровод, снабженный двумя пьезометрами $П_1$ и $П_2$. Разность отметок горизонтов жидкости в этих пьезометрах

$$a = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right). \tag{9-33}$$

Согласно же (9-26) величина

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{\alpha}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + h_l + h_i; \tag{9-34}$$

отсюда заключаем, что разность a отметок горизонтов жидкости в пьезометрах, приключенных к сечениям $1-1$ и $2-2$, в случае неустановившегося движения (в каждый данный момент времени)

(II)
$$\boxed{a = \frac{\alpha}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + h_l + h_i.} \tag{9-35}$$

В заключение приведем еще отдельные замечания, касающиеся уравнений (9-26) и (9-35).

1. При неустановившемся движении, в связи с отсутствием необходимых данных, потерю напора h_l приходится обычно вычислять по формулам установившегося равномерного движения, что, строго говоря, не совсем правильно (эпюры скоростей и при установившемся и неустановившемся движениях различны).

2. Когда движение жидкости во времени изменяется достаточно медленно, член h_i уравнения Бернулли оказывается незначительным, в связи с чем им можно пренебрегать. При этом получаем для неустановившегося движения обычное уравнение Бернулли (см. § 3-20). С примерами такого медленно изменяющегося движения, рассчитываемого по обычному уравнению Бернулли, встретимся далее (см. § 10-10, 10-11).

3. В случае установившегося движения уравнением Бернулли, как известно, можно пользоваться, если в районе сечений $1-1$ и $2-2$, соединяемых этим уравнением, движение является плавно изменяющимся; наличие резко изменяющегося движения в промежутке между сечениями $1-1$ и $2-2$ не может служить препятствием к применению данного уравнения при установившемся движении (когда $h_i = 0$).

В случае неустановившегося движения уравнением Бернулли, содержащим дополнительный член h_i, можно пользоваться лишь тогда, когда на всем протяжении потока движение является плавно изменяющимся. Это ясно из того, что выражение для дополнительного члена h_i было получено нами в предположении плавно изменяющегося движения жидкости на пути от сечения $1-1$ до сечения $2-2$. Однако, если поток (рис. 9-3) имеет форму, характеризуемую резко изменяющимся движением в области A, причем эта область, в свою очередь, характеризуется весьма малым значением интеграла, входящего в зависимость (9-31), то локальными силами инерции для области A вообще можно пренебречь и не считаться с наличием резко изменяющегося движения жидкости между сечениями $1-1$ и $2-2$. В случае потока, изображенного на рис. 9-3, локальные силы инерции при использовании уравнения Бернулли приходится учитывать только для областей потока $Б$ и $В$, где движение плавно изменяющееся.

4. В уравнения (9-26) и (9-35), в отличие от (3-101), входит только потеря напора по длине; эти уравнения получены для случая, когда местные потери напора между сечениями $1-1$ и $2-2$ отсутствуют (узлам, где возникают местные потери, свойственно резко изменяющееся движение). Практически, однако, уравнения (9-26) и (9-35) могут применяться и к трубопроводам, по длине которых встречаются местные потери, но в ограниченном количестве. В этом случае поступают следующим образом:

а) при подсчете члена h_i пренебрегают локальной силой инерции, свойственной узлам, где возникают местные потери (эту силу инерции мы не можем рассчитывать);

б) в уравнении Бернулли (9-26) или (9-35) вместо члена h_i вводят полную потерю напора h_f, причем местные потери напора, так же как и потери по длине, вычисляют по обычным формулам, относящимся к установившемуся движению.

5. Введем обозначения:

V_0 – объем жидкости, заключенный между неподвижными сечениями $1-1$ и $2-2$ (рис. 9-1); $КЭ$ (или E_0) – кинетическая энергия всего этого объема в данный момент времени.

Используя такие обозначения, можно показать, что величина h_i, выражаемая формулой (9-28) или (9-31), оказывается также равной:

$$h_i = \frac{\textit{приращение (за время } dt\textit{) КЭ объема } V_0}{\begin{array}{c}\textit{вес жидкости, протекающей за время } dt\\ \textit{через любое живое сечение потока}\end{array}}, \tag{9-36'}$$

т. е.

$$\boxed{h_i = \frac{dE_0}{\gamma Q\, dt}.} \tag{9-36''}$$

Справедливость этого соотношения будет доказана (только для частного случая горизонтальной цилиндрической трубы, по которой движется идеальная жидкость) в конце § 9-4.

§ 9-4. ОБЩАЯ РАСЧЕТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Для цилиндрической трубы (рис. 9-4) в рассматриваемый момент времени

$$v_1 = v_2. \tag{9-37}$$

При этом уравнение Бернулли (9-35) перепишется в виде:

$$(\text{II})_{\text{цилиндр}} \qquad a = h_l + h_i. \tag{9-38}$$

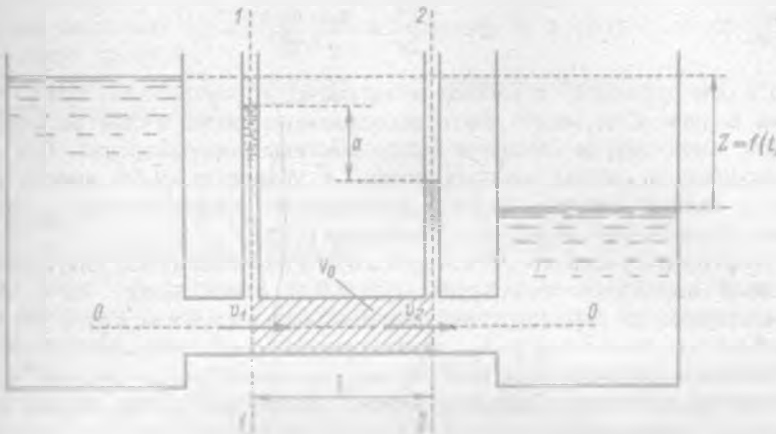


Рис. 9-4. К расчету цилиндрической трубы

V_0 – рассматриваемый объем пространства, занятый движущейся жидкостью

Рассмотрим два слагаемых правой части (9-38).

1. Потеря напора по длине h_l:

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} = \zeta_l \frac{v^2}{2g}, \tag{9-39}$$

где ζ_l – коэффициент сопротивления по длине, вычисляемый условно по зависимостям установившегося движения.

2. Член уравнения h_i, учитывающий локальные силы инерции. В случае цилиндрического трубопровода

$$\omega = \text{const} \ (\textit{по длине потока}).$$

Поэтому для такого трубопровода

$$h_i = \frac{\alpha_0}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\omega} = \frac{\alpha_0}{g} \frac{\partial \left(\dfrac{Q}{\omega} \right)}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} ds = \frac{\alpha_0 l}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \tag{9-40}$$

или, так как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{9-41}$$

$\left(\text{поскольку } \frac{\partial v}{\partial s} \text{ для цилиндрического трубопровода равно нулю}\right)$, то вместо (9-40) можем для цилиндрического трубопровода написать

$$(\mathrm{A})_{\text{цилиндр}} \qquad \boxed{h_l = \frac{\alpha_0 l}{g}\frac{dv}{dt},} \tag{9-42}$$

где

$$l = s_2 - s_1. \tag{9-43}$$

3. Окончательная расчетная зависимость. Подставляя (9-39) и (9-42) в $(\mathrm{II})_{\text{цилиндр}}$, получаем

$$(\mathrm{II})'_{\text{цилиндр}} \qquad a = \zeta_l \frac{v^2}{2g} + \frac{\alpha_0 l}{g}\frac{dv}{dt}. \tag{9-44}$$

По этому уравнению и удобно вести расчет трубопроводов при отсутствии местных потерь. Оно может быть использовано также и для расчета трубопроводов, имеющих не слишком много местных сопротивлений. При расчете трубопроводов с учетом местных потерь в уравнение (9-44) вместо коэффициента ζ_l следует вводить полный коэффициент сопротивления ζ_f (см. п. 4 в конце § 9-3), определяемый по уравнению (5-18).

4. Дополнительные замечания. Уравнение (9-42) для случая горизонтальной цилиндрической трубы (рис. 9-4) легко может быть получено непосредственно из рассмотрения уравнения динамического равновесия объема жидкости V_0, находящегося между сечениями $1-1$ и $2-2$. Действительно, рассматривая этот объем (заштрихован на рисунке) и только для простоты пояснения считая жидкость идеальной ($h_l = 0$), можем написать следующую зависимость:

$$(\omega p_1 - \omega p_2) = (\rho l \omega)\frac{dv}{dt}, \tag{9-45}$$

где в левой части данного уравнения представлена горизонтальная сила, действующая на рассматриваемый объем жидкости, а в правой части уравнения – масса данного объема жидкости, умноженная на ускорение. Именно это уравнение и отражает (для простейшего случая) зависимость (9-6), которая была составлена Эйлером для общего случая движения единицы массы жидкости.

Деля уравнение (9-45) на величину $\omega(\rho g) = \omega\gamma$, получаем

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{l}{g}\frac{dv}{dt} = h_i, \tag{9-46}$$

что для рассматриваемого частного случая соответствует зависимости (9-42). Для этого частного случая дополнительно можем написать еще следующие соотношения:

E_0 – величина кинетической энергии, принадлежащей объему V_0 жидкости:

$$E_0 = (\omega l \gamma)\frac{v^2}{2g}; \tag{9-47}$$

dE_0 – изменение кинетической энергии E_0 (за время dt):

$$dE_0 = \frac{\gamma}{g} l\omega v\, dv = \frac{\gamma}{g} lQ\, dv. \tag{9-48}$$

Как видно, деля dE_0 на величину $\gamma Q\, dt$, получаем:

$$\frac{dE_0}{\gamma Q\,dt}=\frac{\frac{\gamma}{g}\,lQ\,dv}{\gamma Q\,dt}=\frac{l}{g}\,\frac{dv}{dt}=h_i, \tag{9-49}$$

что соответствует соотношениям (9-36).

§ 9-5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДЕ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ (НЕДЕФОРМИРУЮЩИМИСЯ) СТЕНКАМИ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИНЕРЦИОННОГО НАПОРА

Рассматривая уравнение Бернулли (9-26), будем различать: случай ускоряющегося во времени движения жидкости и случай замедляющегося во времени движения жидкости (когда величина h_i в уравнении приобретает отрицательное значение).

1. В случае ускоряющегося во времени движения полный напор в некотором сечении $1-1$

$$H_{e_1}=z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha v_1^2}{2g} \tag{9-50}$$

затрачивается:

а) на образование полного напора H_{e_2} в сечении $2-2$;

б) на работу сил трения в пределах от сечения $1-1$ до сечения $2-2$, которая переходит в тепло и рассеивается; величина этой безвозвратно теряемой части напора равна h_l;

в) на преодоление локальных сил инерции жидкости между сечениями $1-1$ и $2-2$; эта часть энергии, мерой которой является величина h_i (см. ниже), не должна рассматриваться как потеря напора.

2. В случае замедляющегося во времени движения получаем иную картину. Кинетическая энергия в некотором количестве (измеряемом величиной h_i), высвобождается из объема V_0 жидкости (см. ниже) заключенного между сечениями $1-1$ и $2-2$ (так как кинетическая энергия этого отсека жидкости в данном случае со временем уменьшается). При этом высвобождающаяся удельная энергия h_i вместе с напором H_{e_1} в первом сечении, т.е. величина $(H_{e_1}+h_i)$ затрачивается:

а) на образование напора H_{e_2} в сечении $2-2$;

б) на работу сил трения, которая переходит в тепло (в размере h_l).

Имея в виду сказанное, уравнение Бернулли можно геометрически интерпретировать следующим образом:

1) пример ускоряющегося во времени движения; см. рис. 9-5, на котором представлено равномерное в данный момент времени (см. § 3-11, п. 1°, 2), но ускоряющееся во времени движение:

$$H_{e_2}=H_{e_1}-h_l-|h_i|; \tag{9-51'}$$

$$H_{e_1}=H_{e_2}+h_l+|h_i|; \tag{9-51''}$$

2) пример замедляющегося во времени движения; см. рис. 9-6, на котором представлено равномерное в данный момент времени (см. § 3-11, п. 1°, 2), но замедляющееся во времени движение:

$$H_{e_2}=H_{e_1}+|h_i|-h_l; \tag{9-52'}$$

$$H_{e_1}+|h_i|=H_{e_2}+h_l. \tag{9-52''}$$

Как видно, в случае замедляющегося во времени движения жидкости, если

$$h_l < h_l, \qquad (9\text{-}53)$$

полный напор H_e по течению может возрастать, причем напорная линия $E - E$ будет подниматься по течению, как показано на рис. 9-6, данном для случая $h_l < h_l$.

Необходимо подчеркнуть, что изображенные на рис. 9-5 и 9-6 картины относятся к одному определенному моменту времени (рассматриваемому согласно Эйлеру, а не по Лагранжу; см. § 3-2). В следующий момент времени все линии $E-E$, $P-P$, $i-i$ в общем случае должны занять новое положение (рис. 9-5 и 9-6 являются как бы фотографиями, фиксирующими расположение упомянутых линий, отвечающих определенному моменту времени).

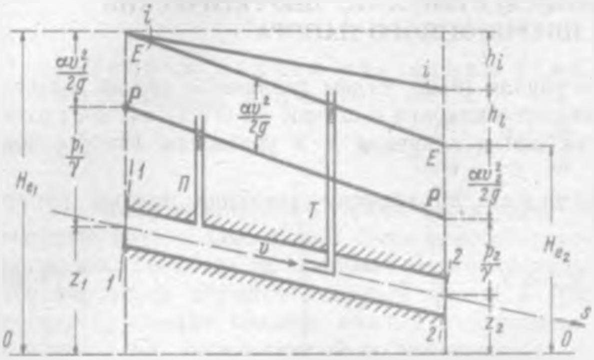


Рис. 9-5. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для ускоренного (во времени) движения (по Эйлеру: для данного момента времени)

Обратимся теперь к более подробному пояснению энергетического смысла инерционного напора h_l. С этой целью покажем для примера:

а) на рис. 9-7 равноускоренное движение идеальной жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе, когда величина h_l должна быть неизменна во времени: $h_l = \text{const}$ (во времени), поскольку $\frac{dv}{dt} = \text{const}$ [см., например, формулу (9-42)];

б) на рис. 9-8 неравнозамедленное движение идеальной жидкости (также в горизонтальной цилиндрической трубе), когда $h_l \neq \text{const}$; в этом случае величина скорости v уменьшается во времени, но неравномерно.

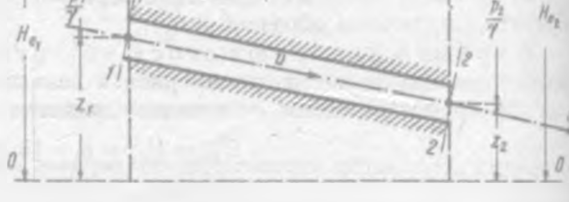


Рис. 9-6. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для замедленного (во времени) движения (по Эйлеру: для данного момента времени)

Оба отмеченных случая движения жидкости легко себе представить, считая, что в баке $Б$ уровень жидкости все время поддерживается на постоянной отметке; в трубе же (правее сечения $2-2$) расположен поршень $П$, которому мы можем придавать любую скорость, любым образом изменяющуюся во времени.

Рассматривая рис. 9-7 (когда $h_l = \text{const}$ во времени), выпишем для этой схемы уравнение Бернулли (относящееся к определенному моменту времени) в виде:

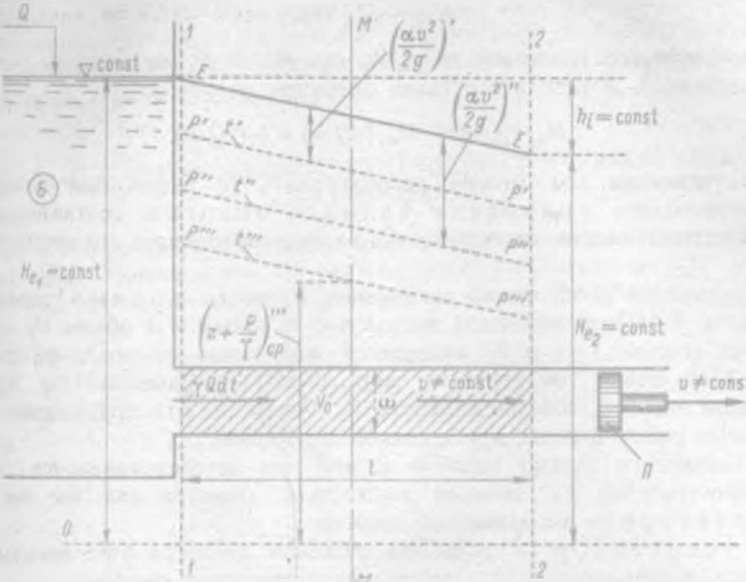


Рис. 9-7. Равноускоренное движение идеальной жидкости в цилиндрической трубе; случай $\frac{dv}{dt} = \text{const}$ (в начальный момент времени – до приложения к жидкости поршня *П* – жидкость находилась в покое)

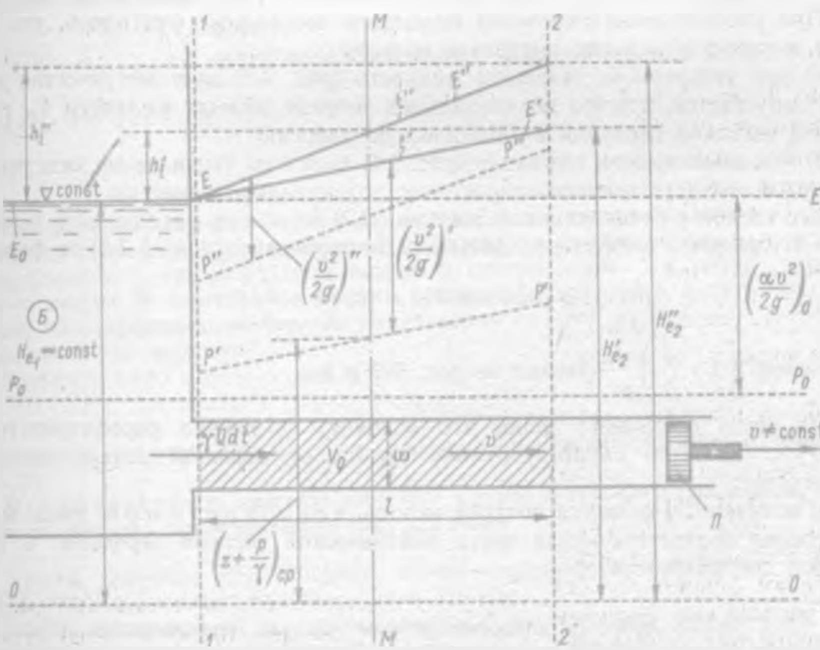


Рис. 9-8. Неравнозамедленное движение идеальной жидкости в цилиндрической трубе; случай $\frac{dv}{dt} \neq \text{const}$

($E_0 - E_0$) и ($P_0 - P_0$) – горизонтальные напорная и пьезометрическая линии до начала неустановившегося движения идеальной жидкости (когда поршень *Пр* в трубе отсутствует и скорость $v = v_0 = \text{const}$ во времени)

$$H_{e_1} - H_{e_2} = h_i; \tag{9-54}$$

далее умножим это уравнение на $\gamma Q\, dt$, причем dt будем считать бесконечно малой величиной. В результате такой операции получаем:

$$H_{e_1}(\gamma Q\, dt) - H_{e_2}(\gamma Q\, dt) = h_i(\gamma Q\, dt). \tag{9-55}$$

Это уравнение мы можем рассматривать (с некоторым допустимым приближением) как уравнение баланса энергии, составляемого для объема V_0 пространства, расположенного между неподвижными сечениями $1-1$ и $2-2$.

Из уравнения (9-55) видно следующее. Разность полных энергий [см. левую часть (9-55)]: а) внесенной жидкостью за время dt в объем V_0 пространства через сечение $1-1$ и б) вынесенной жидкостью из этого объема через сечение $2-2$, равна [см. правую часть (9-55)] приращению (за время dt) собственной энергии, объема жидкости V_0. Очевидно, это приращение энергии обусловлено работой силы, приложенной к поршню $П$.

Из сказанного можно заключить, что при неустановившемся движении объем пространства V_0, занятый жидкостью, является как бы «жидким аккумулятором» механической энергии:

при ускоренном (во времени) движении жидкости этот «аккумулятор» заряжается; в нем накопляется механическая энергия в размере

$$h_i(\gamma Q\, dt) = d(E_{KЭ}), \tag{9-56}$$

при замедленном (во времени) движении поршня $П$, «жидкий аккумулятор» разряжается; он выдает через сечение $2-2$ ранее накопившуюся в нем энергию; величина этой «выдаваемой» энергии также равна $h_i(\gamma Q\, dt)$.[1]

При рассмотрении указанных процессов необходимо учитывать, что в течение интересующего нас интервала времени:

а) при ускоренном движении жидкости (рис. 9-5) пьезометрическая линия $P-P$ опускается, причем потенциальная энергия объема жидкости V_0 уменьшается, частично переходя в кинетическую энергию;

б) при замедленном движении (рис. 9-6) получаем уменьшение кинетической энергии и соответствующее возрастание потенциальной энергии.[2]

Что касается потенциальной энергии ($ПЭ$) жидкости, находящейся в объеме V_0, то эту энергию следует подсчитывать (подробнее см. п. 4°, § 2-8) по формуле:

$$ПЭ \text{ (объема } V_0) = \gamma l \omega \left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_{ср}, \tag{9-57}$$

где размер $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)_{ср}$ — указан на рис. 9-7 и 9-8.

Из всего сказанного ясно, что величину h_i можно рассматривать как особую «потерю напора», отличающуюся от обычной потери напора h_l следующим:

а) величина h_l является потерей напора невозвратимой: здесь за счет сил трения соответствующая часть механической энергии переходит в теплю, которое диссипируется;

---

[1] Здесь можно провести аналогию: имеем маховик, вращающийся на оси; при приложении к нему внешней силы он начинает вращаться ускоренно и «накапливает» механическую энергию; переходя в режим замедленного вращения этот маховик, как аккумулятор, начинает разряжаться.

[2] Обратим внимание на то, что в этом случае движение жидкости происходит в сторону большего давления p.

б) величина же h_l является «потерей напора» (при ускоренном во времени движении жидкости) возвратимой: при наличии в последующем замедленного движения данная «потеря» возвращается потоком (благодаря «разрядке аккумулятора», поясненного выше). [1]

§ 9-6. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ В АТМОСФЕРУ

На рис. 9-9 представлен сосуд, от которого отходит цилиндрическая труба T с краном K на конце. Положим, что мы мгновенно полностью открыли кран K. После этого можно различать два разных периода истечения жидкости. [2]

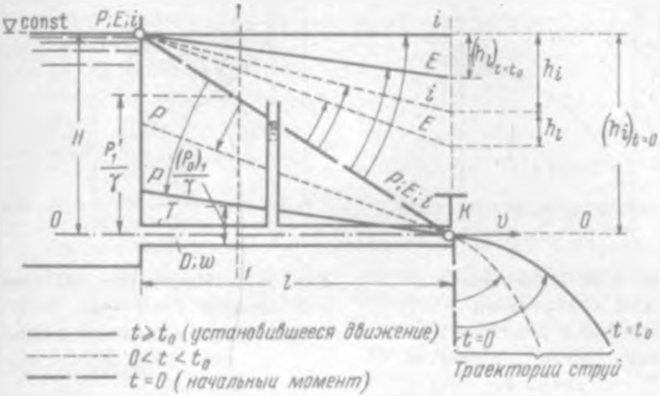


Рис. 9-9. Деформация (во времени) напорной и пьезометрической линий после мгновенного открытия крана K

Первый период: [3]

$$0 < t < t_0, \tag{9-58}$$

где t_0 измеряется иногда долями секунды. Этот начальный период истечения характеризуется неустановившимся движением жидкости. Напор H (рис. 9-9) в пределах этого периода затрачивается не только на потерю напора h_l и на образование скоростного напора $v^2/(2g)$ в выходном сечении трубы: [4] в течение времени t_0 за счет напора H кинетическая энергия жидкости, находящейся в трубе (все время, однако, обновляющейся), постепенно увеличивается от нуля до величины, свойственной установившемуся движению.

Второй период:

$$t \geqslant t_0. \tag{9-59}$$

Это – период установившегося движения, рассматривавшийся нами ранее (в гл. 5).

Первый период движения жидкости в трубе может быть исследован на основании полученного выше уравнения $(\mathrm{II})'_{\text{цилиндр}}$ (9-44).

---

[1] Более подробно см. Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 4. – М.: Высшая школа, 1981.

[2] Мгновенное закрытие трубы краном K анализировать при помощи модели, рассматриваемой в настоящем подразделе (жидкость несжимаемая и стенки трубопровода недеформирующиеся) нерационально.

[3] Время t отсчитывается от момента открытия крана K.

[4] Местной потерей на вход пренебрегаем и учитываем только потерю напора по длине h_l.

Результаты такого анализа следующие:[1]

1. В первое мгновение после открытия крана K весь напор H будет затрачиваться на преодоление инерции массы жидкости, находящейся в трубе. Следовательно, для этого мгновения будем иметь:

$$h_i = H; \quad v = 0; \quad v^2/(2g) = 0; \quad h_l = 0. \tag{9-60}$$

Отсюда заключаем, что в первое мгновение жидкость в трубе будет находиться в покое, причем известные три линии $E - E$, $P - P$, $i - i$ в первое мгновение будут сливаться в одну прямую линию, показанную на рис. 9-9 жирными штрихами.

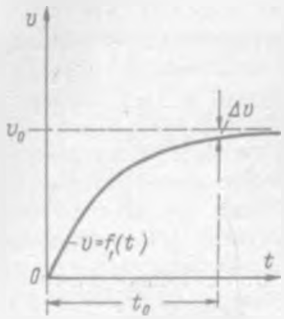


Рис. 9-10. Изменение скорости v в сечении $I - I$ (рис. 9-9) с течением времени после открытия крана K

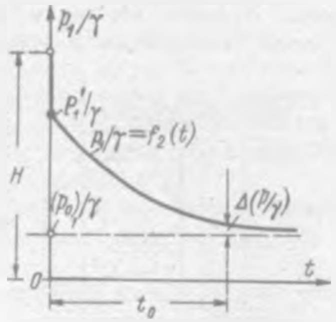


Рис. 9-11. Изменение давления p в сечении $I - I$ (рис. 9-9) с течением времени после открытия крана K

Жидкость, находящаяся в самом конце трубы, в рассматриваемый начальный момент будет иметь нулевую скорость «истечения»; в связи с этим жидкость в данный момент времени, выйдя из трубы (под действием своего веса), должна падать по вертикали вниз.

2. С течением времени линии $E - E$, $P - P$, $i - i$ будут расходиться все более и более, причем $E - E$ и $i - i$ будут подниматься, а $P - P$ будет опускаться (см. линии, показанные на рис. 9-9 для некоторого промежуточного момента времени тонкими штрихами). При этом ось струи, выходящей из трубы, будет перемещаться вправо, постепенно поднимаясь.

3. В момент времени $t = t_0$ линия $i - i$ примет горизонтальное положение ($h_i = 0$); линии $E - E$ и $P - P$ будут отвечать условиям установившегося движения (см. сплошные линии на рис. 9-9). Дальность боя струи, выходящей из трубы, в этот момент достигает наибольшей величины, свойственной установившемуся движению.

4. Из сказанного выше ясно, что в течение рассматриваемого периода скорость v в трубе и пьезометрическая высота p/γ в каком-либо сечении $I - I$ трубы изменяются так, как показано на графиках рис. 9-10 и 9-11, где через v_0 и p_0/γ обозначены соответствующие величины, относящиеся к установившемуся движению.

Как видно из рис. 9-10 и 9-11, теоретически период неустановившегося движения длится в течение $t_0 = \infty$: кривые v и p/γ на графиках асимптотически приближаются к соответствующим горизонтальным прямым, отвечающим установившемуся режиму. Однако, пренебрегая некоторыми небольшими величинами Δv и $\Delta\left(\frac{p}{\gamma}\right)$, получаем практическое время t_0, в течение которого наблюдается неустановившееся движение.

[1] Самого анализа здесь не приводим.

§ 9-7. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О КОЛЕБАНИИ ГОРИЗОНТА ВОДЫ В УРАВНИТЕЛЬНОМ РЕЗЕРВУАРЕ ГИДРОСТАНЦИЙ

Так называемые деривационные гидростанции устраивают по схеме, представленной на рис. 9-12, где изображены: *I* – водохранилище; *II* – напорный туннель; *III* – уравнительный резервуар; *IV* – напорный турбинный трубопровод; *V* – здание гидростанции, в котором установлены турбины.

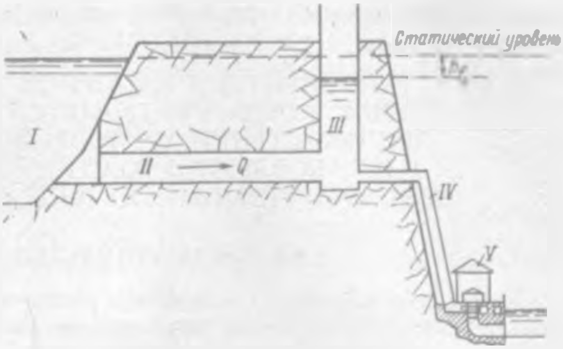


Рис. 9-12. Схема деривационной гидростанции

В следующем разделе будет указано, что при достаточно быстром закрытии конца какого-либо напорного трубопровода в нем возникает гидравлический удар (повышение или понижение давления), причем этот удар будет тем сильнее, чем больше длина напорного трубопровода. Чтобы уменьшить гидравлический удар и устраивают уравнительный резервуар, который расчленяет напорный тракт, соединяющий водохранилище и гидростанцию, на две отдельные части (*II* и *IV*; см. чертеж), причем при наличии такого резервуара сила гидравлического удара определяется длиной только *IV* части напорного тракта (а не всей его длиной).

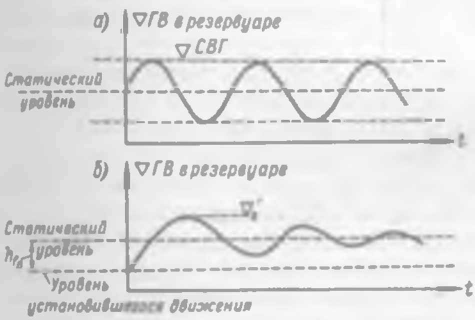


Рис. 9-13. Колебания уровня воды в уравнительном резервуаре после мгновенного закрытия регулирующего органа турбин: *а* – для идеальной и *б* – для реальной жидкости

Ясно, что при установившемся движении горизонт воды в уравнительном резервуаре будет стоять ниже горизонта воды в водохранилище на величину h_{f_0} (h_{f_0} – потеря напора в туннеле при установившемся движении).

Поясним, что будет происходить с горизонтом воды в уравнительном резервуаре после мгновенного закрытия или мгновенного открытия регулирующих органов турбин.

Случай мгновенного закрытия регулирующих органов турбин. После мгновенного закрытия регулирующих органов турбин масса воды, находящаяся в туннеле *II*, благодаря своей инерции будет стремиться продолжать двигаться в направлении к уравнительному резервуару *III*, в связи с чем горизонт воды в нем будет подниматься до определенной высоты – выше статического уровня. После этого начнется колебательное движение горизонта воды в уравнительном резервуаре относительно статического уровня. Если представить себе, что жидкость, находящаяся в туннеле *II* и уравнительном резервуаре *III*, является идеальной, то колебательное движение горизонта воды в уравнительном резервуаре *III* будет незатухающим (рис. 9-13, *а*). Колебания же горизонта реальной жидкости в резервуаре *III* будут затухать, как показано на рис. 9-13, *б*.

Рис. 9-14. Колебание уровня воды в уравнительном резервуаре после мгновенного открытия регулирующих органов турбин

Случай мгновенного открытия

...улирующих органов турбин. В этом случае в резервуаре возникнет колебание гориз... воды (относительно уровня, отвечающего установившемуся движению) – см. рис. ... Как видно, горизонт воды в резервуаре в некоторые моменты времени будет зани... самое высокое положение, определяемое отметкой ∇_0' (рис. 9-13, *б*); в другие же ... менты – самое низкое положение, определяемое отметкой ∇_0'' (рис. 9-14).

При проектировании уравнительного резервуара необходимо знать отметки ∇_0' и ... Они могут быть найдены при помощи уравнения Бернулли (9-26). Данный воп... подробно рассматривается в курсе «Использование водной энергии» [9-2].

Б. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА УЧИТЫВАЕТСЯ ЕЕ СЖИМАЕМОСТЬ, ПРИЧЕМ СТЕНКИ ТРУБОПРОВОДА СЧИТАЮТСЯ НЕ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ (УПРУГИМИ, ДЕФОРМИРУЮЩИМИСЯ). ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР

§ 9-8. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Гидравлическим ударом называется повышение или понижение гидромеханического давления в напорном трубопроводе, вызванное изменением во времени (в каком-либо сечении трубопровода) средней скорости движения жидкости. Явление гиравлического удара обусловливается инерцией той массы жидкости, заключенной в трубопроводе, скорость которой изменяется во времени.

Гидравлический удар в трубопроводе может достигать большой силы: давление в трубопроводе может значительно изменяться благодаря изменению во времени скорости движения жидкости. Поэтому при расчете толщины стенок трубопроводов (например, трубопроводов гидростанций) приходится учитывать силу гидравлического удара.

Положим, что мы имеем трубу, на конце которой установлен кран *К*. Жидкость, находящаяся в трубе, будучи остановлена закрытием крана, благодаря своей инерции окажет большое давление на закрытый кран.

Если при рассмотрении такого явления пренебрежем сжимаемостью жидкости и деформируемостью стенок трубы, как делали выше в разделе *А*, то при этом получим в трубе так называемый «абсолютно жесткий» удар, что, как показывает опыт, вовсе не отвечает действительности.

На характер явления гидравлического удара оказывают большое влияние сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода, т. е. способность стенок трубопровода соответствующим образом деформироваться с изменением гидромеханического давления в трубе. Благодаря этим обстоятельствам в трубопроводе при закрытии или открытии крана *К* получается упругий удар, качественно отличающийся от «абсолютно жесткого» удара. В случае упругого удара давление вдоль трубопровода распространяется волнами, причем эти волновые явления оказываются весьма резко выраженными, и с ними нельзя не считаться при изучении гидравлического удара.

Достаточно точное исследование задачи о гидравлическом ударе было впервые выполнено Н. Е. Жуковским (в 1898 г.), который дал дифференциальные уравнения, описывающие явление удара, а также полное решение этих уравнений, кроме того, Н. Е. Жуковский проверил свою теорию специально поставленными им опытами на Московской водопроводной сети.

Основные соотношения, полученные Н. Е. Жуковским, можно найти, с некоторым приближением, исходя из теоремы количества движения и уравнения неразрывности движения жидкости.

Представим себе, что в горизонтальную трубу *Т*, наполненную жидкостью, введен поршень *Пр* (рис. 9-15). Если жидкость и поршень неподвижны, то при этом в жидкости всюду будет некоторое давление, определяемое горизонтальной пьезометрической линией *P'P"* (см. пьезометрическую высоту p/γ, указанную на рисунке). Если представить себе, что поршень *Пр* в некоторый момент $t = 0$ начал мгновенно двигаться со скоростью v, то в случае абсолютно несжимаемой жидкости и абсолютно жестких (недеформирующихся) стенок трубопровода, жидкость в момент $t = 0$ также начнет двигаться с той же скоростью v сразу по всей длине трубопровода.

Иная картина получается при наличии сжимаемой жидкости и упругих стенок трубопровода.

В этом случае поршень *Пр*, приведенный в движение, будет выводить жидкость, находящуюся в трубе, из состояния покоя п о с т е п е н н о. Такое положение обусловливается, с одной стороны, сжимаемостью жидкости и упругостью стенки трубопровода и, с другой стороны, наличием сил инерции жидкости. Для некоторого момента времени t' (после начала движения поршня) будем иметь граничную вертикаль $W - W$, которая разделяет жидкость, заполняющую трубу, на два разных объема (см. чертеж):

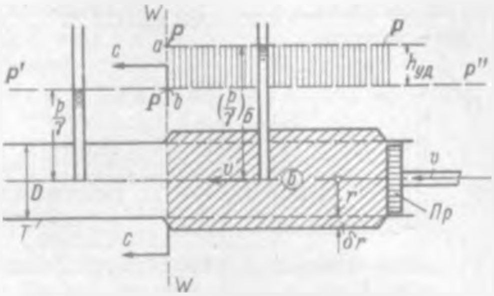


Рис. 9-15. Распространение (со скоростью c) зоны возмущения *Б* после начала движения поршня *Пр* со скоростью v

а) объем левее вертикали $W - W$; здесь жидкость находится еще в состоянии покоя, и давление в этой жидкости то же, что было до начала движения поршня, т. е. равное p/γ;

б) объем правее вертикали $W - W$; здесь жидкость находится уже в состоянии движения, причем скорость движения жидкости в любом живом сечении, взятом в пределах данного объема, равна скорости v движения поршня.

Важно подчеркнуть, что по мере движения поршня влево со скоростью v упомянутая выше граничная вертикаль $W - W$ движется также влево со скоростью c, причем c значительно больше скорости v:

$$c \gg v. \tag{9-61}$$

Область жидкости *Б*, расположенную правее вертикали $W - W$, можно назвать з о н о й в о з м у щ е н и я или з о н о й у п р у г о й д е ф о р м а ц и и ж и д к о с т и; скорость c — с к о р о с т ь ю р а с п р о с т р а н е н и я в о з м у щ е н и я или с к о р о с т ь ю р а с п р о с т р а н е н и я у п р у г о й д е ф о р м а ц и и ж и д к о с т и.

Как видно из соотношения (9-61), длина (протяженность) области возмущения *Б* с течением времени должна расти: расстояние между поршнем и границей $W - W$ должно изменяться от нуля до сколь угодно большой величины.

Зона возмущения *Б*, имеющая подвижную границу $W - W$, характеризуется еще следующими обстоятельствами:

1) гидродинамическое давление внутри этой зоны оказывается всюду п о в ы ш е н н ы м на величину, измеряемую высотой $h_{уд}$:

$$h_{уд} = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_Б - \frac{p}{\gamma}. \tag{9-62}$$

где $(p/\gamma)_Б$ – пьезометрическая высота, соответствующая области *Б*; p/γ – пьезометрическая высота для трубы, имевшая место до начала движения поршня.

Эпюра величин $h_{уд}$ на чертеже может быть представлена вертикально заштрихованным прямоугольником, выражающим волну повышения давления.[1] «Лоб» *ab* этой волны вместе с вертикалью *W – W* должен двигаться влево со скоростью *c*. Поэтому скорость *c* можно рассматривать так же, как скорость распространения в трубопроводе повышенного давления;

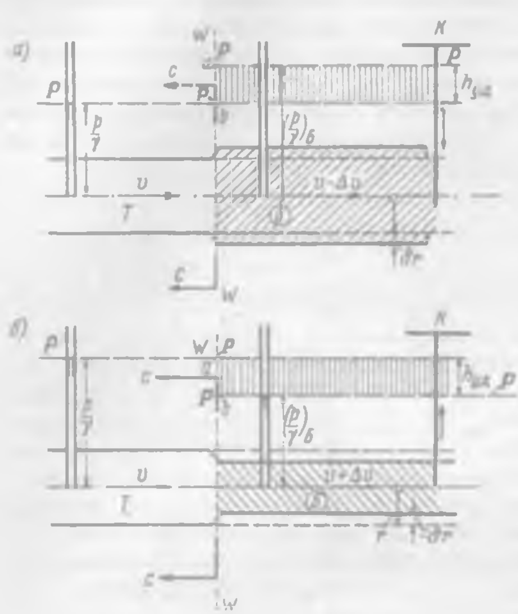


Рис. 9-16. Явление гидравлического удара: *а* – при закрытии крана *K*; *б* – при открытии крана *K*

2) в зоне возмущения *Б*, сообразно с имеющимся здесь повышенным давлением, сжатие жидкости оказывается относительно большим (жидкость получает повышенную плотность), а упругие стенки трубопровода – раздавшимися на некоторую величину δr (см. чертеж).

Описанная картина получается, как было указано выше, при движении поршня в трубе, наполненной покоящейся жидкостью. Совершенно тождественная картина получается и в обратном случае, когда жидкость движется в трубе со скоростью *v*, причем в некоторый момент времени $t = 0$ мы мгновенно перекрываем данную трубу неподвижным поршнем, т. е. задвижкой *K*. Здесь в момент $t = 0$ у задвижки зарождается зона возмущения *Б*, и граница *W – W* этой зоны начинает перемещаться со скоростью *c* вдоль трубы. Такой случай закрытия задвижки показан на рис. 9-16, *а*. На этом чертеже изображено частичное прикрытие задвижки, когда скорость *v* в конце трубы уменьшается не до нуля, а до величины, равной $(v - \Delta v)$.[2]

В случае открытия задвижки, когда скорость *v* в трубе (у задвижки) увеличивается до величины, равной $(v + \Delta v)$, получаем картину, показанную на рис. 9-16, *б*; как видно, здесь возникает волна понижения давления, причем эта волна распространяется вдоль трубы со скоростью *c*.

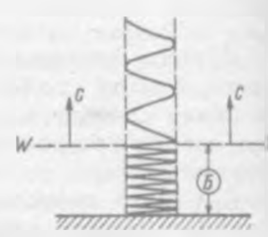


Рис. 9-17. К пояснению гидравлического удара

При рассмотрении гидравлического удара полезно иметь в виду следующую аналогию. Представим себе обычную спиральную пружину, имеющую достаточно большую длину. Положим, что эта пружина падает

[1] Как здесь, так и ниже потерями напора в жидкости пренебрегаем.

[2] Под $(\pm\Delta v)$ здесь и далее следует понимать любое приращение скорости (во времени) – хотя бы весьма большое.

на горизонтальную плоскость. Очевидно, до момента, когда пружина еще не коснулась этой плоскости, расстояние между витками пружины будет всюду одинаковым. После же того, как пружина коснулась горизонтальной плоскости, получим картину, представленную на рис. 9-17: ниже подвижной границы $W-W$, перемещающейся вверх с некоторой скоростью c, расстояние между витками пружины относительно мало (эта область будет соответствовать области возмущения $Б$, рассмотренной выше).

Из всего сказанного видно, что описанное явление, представляющее собой явление гидравлического удара, характеризуется следующими двумя основными величинами:

1) приращением давления $h_{уд}$ (положительным или отрицательным), дающим величину гидравлического удара;[1]

2) скоростью c распространения возмущений, т.е. скоростью распространения гидравлического удара (скоростью движения «лба» волны повышения или понижения давления).

Найдем соответствующие расчетные зависимости для величины $h_{уд}$ и c.

§ 9-10. РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ВЕЛИЧИНЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА И СКОРОСТИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Изобразим на рис. 9-18 цилиндрический трубопровод T, в конце которого имеется частично открытый кран K. Будем считать, что в трубопроводе, в частности в сечении W_0-W_0, намеченном непосредственно у крана, скорость движения жидкости равна v_0. Представим себе далее, что в момент времени $t=0$ открытие крана K мгновенно изменилось, в связи с чем скорость в сечении W_0-W_0 также мгновенно изменилась (например, уменьшилась) на величину Δv. При этом непосредственно у крана зародится область возмущения $Б$.

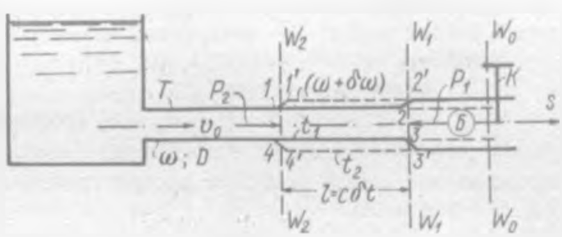


Рис. 9-18. К пояснению зависимостей (9-64) и (9-70)

Будем считать, что в некоторый произвольный момент времени t_1 граница области возмущения занимает положение W_1-W_1; в некоторый же момент $t_2=t_1+\delta t$ эта граница переместится в положение W_2-W_2. Расстояние между вертикалями W_1-W_1 и W_2-W_2

$$l=c\delta t; \qquad (9\text{-}63)$$

ясно, что за время δt стенки трубы на длине l раздадутся и примут положение, показанное на чертеже штриховой линией.

Применяя к отсеку жидкости W_1-W_2, заключенному между сечениями W_1-W_1 и W_2-W_2, уравнение неразрывности и теорему количества движения, получаем следующие расчетные зависимости:

а) Зависимость для величины $h_{уд}$:[2]

---

[1] Как здесь, так и ниже приращение пьезометрической высоты $h_{уд}$, обусловленное гидравлическим ударом, будем называть приращением давления.

[2] Вывод зависимостей (9-64) и (9-67) приводится петитом в [9-10; с. 309].

$$\boxed{h_{уд} = \frac{p_{уд}}{\gamma} = -\frac{c}{g}\Delta v,} \tag{9-64}$$

где Δv – положительное или отрицательное приращение (во времени) скорости движения жидкости.

Именно таким образом выражается величина гидравлического удара. Как видно, при положительном Δv, т. е. при увеличении начальной скорости v_0, получаем отрицательное значение $h_{уд}$, обусловливающее возникновение волны понижения давления.[1]

В случае полного закрытия крана K, когда

$$\Delta v = -v_0, \tag{9-65}$$

величина гидравлического удара оказывается равной

$$\boxed{h_{уд} = \frac{c}{g} v_0.} \tag{9-66}$$

б) Зависимость для величины c (в случае круглой трубы):

$$c = \sqrt{\frac{g}{\gamma} E_ж} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D}{e}\frac{E_ж}{E_т}}}, \tag{9-67}$$

где $E_ж$ – модуль объемной упругости жидкости; $E_т$ – модуль упругости материала стенок трубы; D – внутренний диаметр трубы; e – толщина стенок трубы.

Величина

$$\sqrt{\frac{g}{\gamma} E_ж} = c_0 \text{ (обозначение)} \tag{9-68}$$

представляет собой скорость распространения звука в покоящейся жидкости, причем для воды

$$c_0 = 1425 \text{ м/с}. \tag{9-69}$$

Учитывая это, выражение (9-67) для относительной скорости распространения гидравлического удара в круглой тонкостенной трубе, заполненной водой, можно окончательно представить в виде

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{e}\frac{E_ж}{E_т}}}, \text{ м/с}. \tag{9-70}$$

Как видно, для данной жидкости

$$c = f\left(\frac{D}{e};\ \frac{E_ж}{E_т}\right) \tag{9-71}$$

и не зависит от характера возмущения.

Надо заметить, что величина c может измеряться сотнями и даже тысячами метров в секунду.

[1] Понижение давления может обусловить возникновение в жидкости вакуума, который, однако, не может быть больше «предельного» (стр. 229), когда сплошность движения жидкости оказывается нарушенной.

§ 9-11. ПРЯМОЙ (НАЧАЛЬНЫЙ) И ОТРАЖЕННЫЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ УДАРЫ. КОЛЕБАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В НЕПОДВИЖНОМ ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ТРУБЫ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

Представление о гидравлическом ударе будет неполным, если мы не учтем еще следующего существенного обстоятельства.

Изобразим на рис. 9-19, *а* трубу, заполненную жидкостью;[1] один конец трубы открыт (см. сечение *1—1*), другой же конец прикрывается краном *К* (см. сечение *2—2*). Как уже известно, в случае мгновенного закрытия крана в жидкости зарождается волна положительного давления, имеющая вертикальный «лоб» *ab*, причем эта волна движется вдоль трубы.[2]

Как только «лоб» указанной положительной волны доходит до открытого конца трубы, в этом месте (в сечении *1—1*) возникает о т р а ж е н н а я о т р и ц а т е л ь н а я волна, представляющая собой как бы зеркальное отображение прямой волны, повернутое на 180°. «Лоб» *a'b'* отраженной отрицательной волны движется с той же скоростью *c* в сторону, противоположную положительной волне (рис. 9-19, *б*); положительные давления прямой (начальной) волны и отрицательные давления отраженной волны складываются; в результате на участке трубы, охваченном в данный момент времени отраженной волной, давление, обусловленное гидравлическим ударом, оказывается равным нулю (см. пьезометр $П_2$).

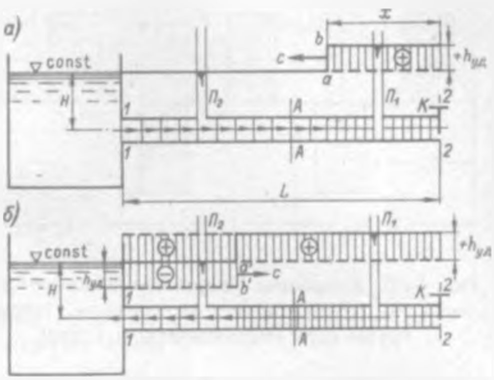


Рис. 9-19. Прямой (начальный) и отраженный гидравлические удары

Как только «лоб» указанной отрицательной волны доходит до закрытого конца трубы, в этом месте (в сечении *2—2*) возникает о т р а ж е н н а я о т р и ц а т е л ь н а я волна, движущаяся со скоростью *c* в сторону, противоположную той отрицательной волне, которая подошла к сечению *2—2*.

Высказанные положения об отражении волн давления от открытого и закрытого концов трубы можно представить себе физически.

Когда «лоб» *ab* положительной волны (рис. 9-19, *а*) подойдет к начальному сечению *1—1* трубы, вся жидкость в трубе будет сжата повышенным давлением, причем сжатие ее будет значительно большим, чем в сосуде.

После этого, начиная с левого конца трубы (рис. 9-19, *б*) будет происходить постепенное «разжатие» жидкости (расширение ее объемов, показанное на рисунке редкой вертикальной штриховкой), причем н е к о т о р ы е (в е с ь м а м а л ы е) о б ъ е м ы «р а з ж а в ш е й с я» ж и д к о с т и б у д у т в ы т е к а т ь ч е р е з с е ч е н и е *1—1* и з т р у б ы в с о с у д. В результате и возникает отрицательная волна давления, которая в данный момент времени должна охватывать ту часть трубы, в пределах которой уже «разжавшиеся» (расширившиеся) объемы жидкости движутся в сторону сосуда. Давление жидкости в этой части трубы должно определяться горизонтом жидкости в сосуде.

Когда «лоб» *a'b'* отрицательной волны (рис. 9-19, *б*) подойдет к крану *К* (к закрытому концу трубы), вся жидкость, заполняющая трубу, «разожмется», причем в этот момент

[1] Здесь всюду жидкость считаем невязкой.

[2] На рис. 9-19 и других масштаб длин $h_{уд}$ принят отличным от масштаба длин *H*. Величина напора *H* может оказаться пренебрежимо малой сравнительно с величиной $h_{уд}$.

времени скорости движения расширяющейся жидкости по всей трубе будут направлены от крана K к сечению $1-1$. Такое положение благодаря инерции жидкости вызовет отрицательную волну давления, которая от крана начнет распространяться в сторону сечения $1-1$.

Важно запомнить, что *у открытого конца трубы $1-1$ всегда зарождаются отраженные волны обратного знака* (*по отношению к прямым волнам, подошедшим к этому концу*); *у закрытого же конца трубы $2-2$ всегда зарождаются отраженные волны того же знака, что и прямые волны, подошедшие к этому концу.*

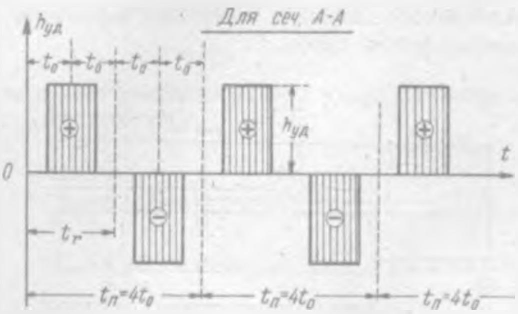


Рис. 9-20. Колебание гидромеханического давления в неподвижном поперечном сечении трубы (при гидравлическом ударе)

Обозначим через t_0 время пробега «лба» волны ab от сечения $2-2$ до сечения $1-1$:

$$t_0 = \frac{L}{c},$$

где L – длина трубы. Пользуясь этим обозначением, укажем следующее:

а) в момент $t_1 = t_0$ времени, отсчитываемого от момента закрытия крана, по всей длине трубы давление[1] должно быть одинаковым и равным $+h_{уд}$;

б) в момент времени $t_2 = 2t_0$ давление по всей длине трубы должно быть равным нулю (т. е. отвечающим горизонту жидкости в сосуде);

в) в момент времени $t_3 = 3t_0$ давление по всей длине трубы должно быть равным $-h_{уд}$;

г) в момент времени $t_4 = 4t_0$ давление по всей длине трубы должно быть равным нулю, и т. д.

Таким образом, полный период $t_п$ колебания давления в любом неподвижном поперечном сечении трубы будет равен четырехкратному времени пробега «лбом» волны расстояния L:

$$t_п = 4t_0 = 4\frac{L}{c}. \tag{9-72}$$

Если наметим на трубе неподвижное сечение $A-A$, то, как ясно из сказанного выше, давление в этом сечении будет изменяться во времени так, как показано на рис. 9-20.[2] Такое колебание давлений будет иметь место в случае невязкой жидкости. В реальных условиях указанное колебание величины давления должно постепенно затухать.

§ 9-12. СЛУЧАЙ ПОСТЕПЕННОГО ЗАКРЫТИЯ КРАНА. ПОЛНЫЙ И НЕПОЛНЫЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ УДАРЫ

Положим, что мы имеем истечение в атмосферу из весьма длинной горизонтальной трубы T, присоединенной к сосуду $Б$ (рис. 9-21, *а*). Будем считать, что кран K, установленный в конце трубы, закрывается не мгновенно, а так, что скорость $v_{кн}$ в самом конце трубы (перед краном) уменьшается, например, по

[1] Здесь и ниже имеется в виду давление, обусловленное только ударом.

[2] Предполагается, что волна пониженного давления не дает слишком большого вакуума (при котором может возникнуть разрыв сплошности жидкости).

линейному закону от $v_{кн} = v_0$ до $v_{кн} = 0$ (см. прямую AB на рис. 9-21, *б*), где v_0 – скорость в трубе при установившемся движении, когда кран полностью открыт.

Обозначим время полного закрытия крана через $t_з$. В момент $t_з$, отсчитываемый от начала закрытия крана, скорость в конце трубы уменьшается на величину $\Delta v = v_0$ и становится равной нулю. Представим себе, что скорость $v_{кн}$ уменьшается не по линейному закону, а по графику в виде ступенчатой линии (показанной на рис. 9-21, *б* штриховой линией), причем высоту каждой намеченной достаточно малой («элементарной») ступени обозначим через $\delta\,(\Delta v)$.

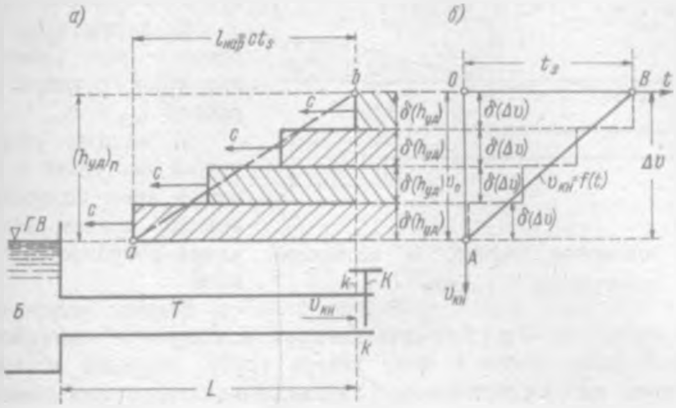


Рис. 9-21. Нарастание величины гидравлического удара при постепенном закрытии крана K

Уменьшая скорость $v_{кн}$ на элементарную величину $\delta\,(\Delta v)$, будем посылать в трубу элементарный гидравлический удар,

$$\delta\,(h_{уд}) = -\frac{c}{g}\,\delta\,(\Delta v). \tag{9-73}$$

В момент времени $t_з$, когда в трубу будет послан последний элементарный удар $\delta\,(h_{уд})$, будем иметь ступенчатый график волны повышения давления, показанный штриховкой на рис. 9-21, *а*.[1] В данном случае назовем **полным ударом** $(h_{уд})_п$ величину

$$(h_{уд})_п = \frac{c}{g}\,v_0. \tag{9-74}$$

Из графика на рис. 9-21, *а* видно следующее:

а) в момент $t_з$ полного закрытия крана в конце трубы (у крана) получается **полный гидравлический удар**

$$(h_{уд})_п = \sum \delta\,(h_{уд}) = \frac{c}{g}\,v_0, \tag{9-75}$$

величина которого здесь сохраняется на протяжении последующего времени;

б) **длина нарастания полного удара**, т. е. длина графика волны, на протяжении которой давление возрастает от нуля до $(h_{уд})_п$,

$$l_{нар} = ct_з. \tag{9-76}$$

---

[1] На рис. 9-21, *а* и *б* вертикальные масштабы графиков взяты такими, что $h_{уд}$ и Δv измеряются отрезками одинаковой длины; «отношение этих масштабов» равно c/g [см. формулу (9-74)].

Будем теперь уменьшать высоту ступени δ (Δv) (рис. 9-21, *б*) до предела, т. е. приближать ступенчатый график к прямой линии AB. Легко видеть, что при этом формулы (9-75) и (9-76) будут сохранять свою силу; графическое же изображение «лба» волны в пределе примет «остроконечную» форму, как показано линией ab на рис. 9-21, *а* и 9-22 (см. график I).

Следует запомнить, что при постепенном закрытии крана, когда скорость $v_{кн}$ в конце трубы уменьшается по линейному закону, имеем следующее:

а) «лоб» волны оказывается очерченным не вертикальной линией $a'b'$, а наклонной прямой ab;

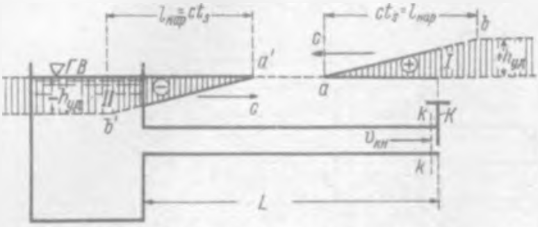


Рис. 9-22. К пояснению полного и неполного гидравлических ударов

б) длина этого «остроконечного лба» (длина нарастания полного удара) получается равной $l_{нар} = ct_з$;

в) полный удар в конце трубы наступает в момент $t_з$ (когда кран полностью закрывается), причем эта величина удара сохраняется в дальнейшем.

Выше мы рассмотрели весьма длинную трубу, для которой в конечном счете всегда получается полный удар. Имея в виду теперь трубу любой длины, будем различать при постепенном закрытии крана два разных случая: 1) полного гидравлического удара; 2) неполного гидравлического удара.

С тем, чтобы пояснить вопрос о неполном ударе, обратимся к рис. 9-22. При постепенном закрытии крана K, когда положительная волна давления (см. график I на рис. 9-22) отражается от жидкости в сосуде, мы получаем отрицательную отраженную волну, изображенную графиком II (рис. 9-22).[1]

Если длина нарастания полного удара $l_{нар}$ оказывается большей, чем удвоенная длина L трубы,

$$l_{нар} > 2L, \tag{9-77}$$

то гидравлический удар у крана K в процессе его закрытия, постепенно нарастая, но еще не достигнув своей полной величины, в некоторый момент времени перестает увеличиваться благодаря тому, что отрицательная отраженная волна, успев подойти к крану до момента его полного закрытия, начинает накладываться в этом месте на положительную волну.

Можно сказать, что

1) *полным гидравлическим ударом называется наибольшая величина постепенно нарастающего (до определенной величины) прямого (начального) гидравлического удара, не сниженная отраженным ударом (имеющим другой знак и не успевшим дойти до места зарождения данного прямого удара к моменту завершения его роста)*;

2) *неполным гидравлическим ударом называется наибольшая величина гидравлического удара, получающаяся в месте зарождения прямого (начального) удара при условии, когда отраженный удар успевает прийти к указанному месту раньше, чем постепенно нарастающий прямой удар достигнет полной своей величины.*

[1] В этом легко убедиться, если оперировать, как и выше, элементарными «ступенчатыми» волнами (рис. 9-21).

Величина полного гидравлического удара выражается формулой (9-74); величина же неполного удара

$$(h_{уд})_{неп} < (h_{уд})_{п} \tag{9-78}$$

или

$$(h_{уд})_{неп} < \frac{c}{g} v_0. \tag{9-79}$$

Условие, при котором получается неполный удар, записывается в виде (9-77) или в виде

$$ct_з > 2L \tag{9-80}$$

или

$$\boxed{t_з > t_r,} \tag{9-81}$$

где

$$t_r = \frac{2L}{c}, \tag{9-82}$$

причем t_r – время пробега лобовой точкой a волны давления от крана до сосуда и обратно от сосуда до крана (время t_r иногда называют фазой гидравлического удара)[1].

Величина неполного гидравлического удара $(h_{уд})_{неп}$ будет равна тому гидравлическому удару $(h_{уд})_r$, который получается у крана в момент времени t_r, когда точка a отрицательной отраженной волны только подойдет к крану. По истечении времени t_r величина гидравлического удара перестает расти (хотя кран и продолжает закрываться). Величину $(h_{уд})_r$ находим из соотношения

$$\frac{(h_{уд})_r}{(h_{уд})_{п}} = \frac{t_r}{t_з}, \tag{9-83}$$

откуда

$$(h_{уд})_r = \frac{t_r}{t_з} (h_{уд})_{п}. \tag{9-84}$$

Подставляя в (9-84) вместо $(h_{уд})_r$ искомую величину $(h_{уд})_{неп}$ и вместо t_r и $(h_{уд})_{п}$ их выражения (9-82) и (9-74), получаем:

$$\underline{(h_{уд})_{неп} = 2\,\frac{v_0 L}{g t_з}.} \tag{9-85}$$

Из этой формулы видно, что *стремясь уменьшить давление жидкости в трубопроводе, следует увеличивать время закрытия крана $t_з$ и уменьшать длину рассматриваемого напорного трубопровода L.*

С целью снижения давления в трубопроводе, на которое ведется расчет толщины его стенок, применяют также различные конструктивные меры борьбы с гидравлическим ударом: гидравлический удар снижают при помощи особых открывающихся предохранительных клапанов, устроенных на трубопроводе, и т. п.

Попутно отметим, что явление гидравлического удара иногда может обусловливать и положительный эффект: например, используя силу гидравлического удара, устраивают особые насосы (так называемые гидравлические тараны), служащие для поднятия жидкости [9-5].

---

[1] Впрочем, фазой гидравлического удара в некоторых литературных источниках называют также и время, равное $\frac{1}{2} t_r$.

§ 9-13. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ БЕЗНАПОРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ. ТЕРМИНОЛОГИЯ

Ограничимся рассмотрением только спокойного движения. В практике приходится сталкиваться со случаями, когда в некотором сечении $W-W$, намеченном или в начале, или в конце водотока (канала), резко изменяются отметка z уровня воды и (или) расход Q.

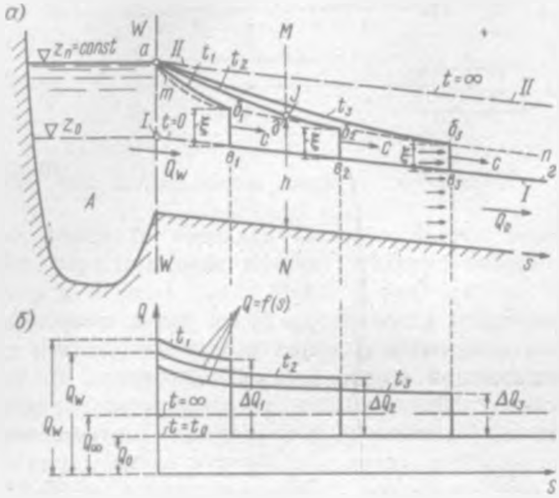


Рис. 9-23. Положительная нисходящая волна перемещения, возникающая при быстром поднятии горизонта воды в водоеме A: a – продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, ...; $б$ – график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

Такого рода изменения z и (или) Q в упомянутом сечении обусловливаются:

а) резким изменением отметки горизонта воды в одном из водоемов, соединяемых каналом (верховом или низовом);

б) резким увеличением или уменьшением степени открытия водопропускных отверстий в начале или в конце канала.

Изменение z и Q в сечении $W-W$ русла влечет за собой соответствующие изменения во времени величин z и Q, относящихся к другим сечениям русла.

Эти последние изменения происходят в течение определенного периода времени – периода, отвечающего неустановившемуся движению воды.

Можно различать следующие случаи безнапорного неустановившегося движения.

1. Случай положительной нисходящей волны (рис. 9-23 и 9-24). Такой случай возникает, когда в начальном сечении $W-W$ канала происходит резкое увеличение отметки z и (или) расхода Q.

На рис. 9-23 представлена схема водоема A, из которого вода поступает в канал. Предполагается, что горизонт воды в водоеме A был быстро поднят с отметки z_0 до отметки $z_п$, которая в дальнейшем сохраняется постоянной. В течение некоторого периода времени после поднятия уровня воды в водоеме A (периода неустановившегося движения) свободная поверхность потока в канале также поднимается от «начального» положения $I-I$ до «конечного» положения $II-II$ (отвечающего новому уровню воды в водоеме A).

Как видно, за период времени, отвечающий неустановившемуся движению, водой должен быть заполнен объем, заключенный между свободными поверхностями $I-I$ и $II-II$. Заполнение этого объема в данном случае происходит так, как показано на рис. 9-23, $а$, где изображен ряд свободных поверхностей $абвг$ потока (см. поверхности $аб_1в_1г$; $аб_2в_2г$; $аб_3в_3г$), соответствующих различным моментам времени t_1, t_2, t_3 (причем $t_3 > t_2 > t_1$). На графике рис. 9-23, $б$ пред-

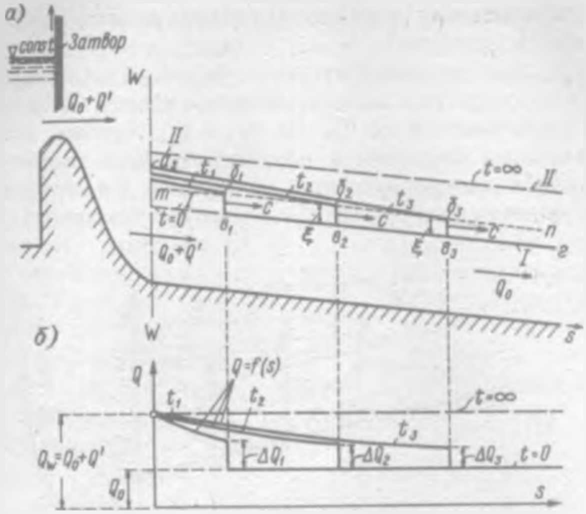


Рис. 9-24. Положительная нисходящая волна перемещения, возникающая при открытии затвора: *а* — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, ...; *б* — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

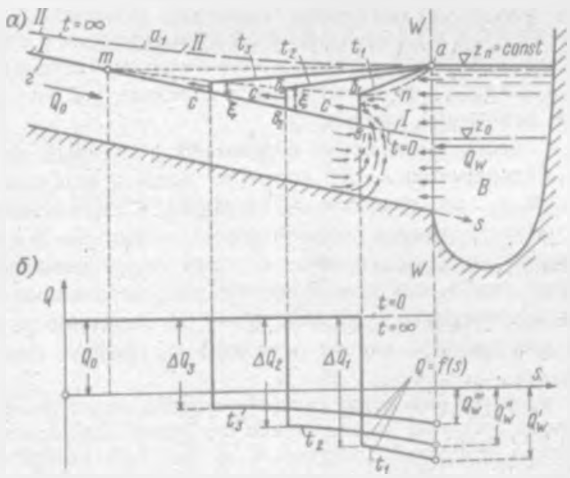


Рис. 9-25. Положительная восходящая волна при поднятии горизонта воды в водоеме B: *а* — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, ...; *б* — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

ставлены кривые изменения расхода Q вдоль потока, также отвечающ... различным моментам времени.[1]

На рис. 9-24 в качестве дополнительного примера изображен случай, когда благодаря быстрому открытию затворов в начале канала, расход, сбрасываемый в канал, резко увеличивается от Q_0 до $(Q_0 + Q')$, причем величина расхода $(Q_0 + Q')$ в дальнейшем сохраняется постоянной. Здесь также на рис. 9-24,*а* показаны схемы свободных поверхностей *абвг* потока, а на графике рис. 9-24,*б* — кривые $Q = f(s)$, отвечающие различным моментам времени.[2]

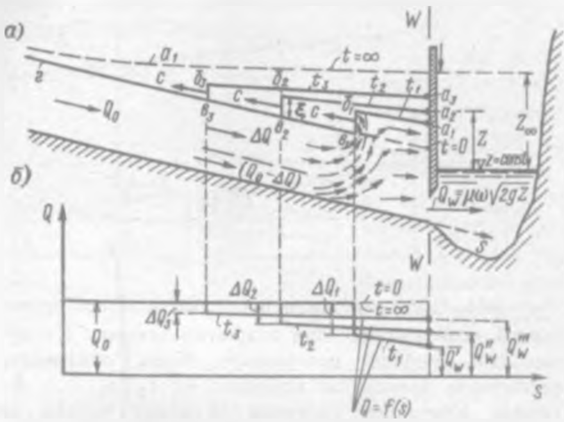


Рис. 9-26. Положительная восходящая волна при закрытии затвора: *а* — продольные профили поверхности воды, отвечающие различным моментам времени: t_1, t_2, t_3, ...; *б* — график изменения расходов Q вдоль потока для различных моментов времени t

2. Случай положительной восходящей волны (рис. 9-25 и 9-26). Такой случай возникает, когда в конечном сечении $W-W$ канала происходит резкое увеличение отметки z и резкое уменьшение (иногда до отрицательной величины) расхода Q.

На рис. 9-25,*а* представлена схема водоема B, в который поступает вода из открытого русла. Предположим, что горизонт воды в водоеме B был быстро поднят от отметки z_0 до отметки $z_п$, которая в дальнейшем сохраняется постоянной. При таком поднятии горизонта воды в водоеме B в открытом русле возникнет свободная поверхность *абвг*, которая будет изменять свою форму во времени (см. ряд свободных поверхностей *абвг*, показанных на чертеже для различных моментов времени).[3] Кривые $Q = f(s)$, отвечающие различным моментам времени, для данного случая показаны на графике рис. 9-25,*б*.

---

[1] На рис. 9-23 и других (см. ниже) соответствующие схемы даются в искаженном масштабе. При этом на всех этих схемах детали свободной поверхности потока (например, «входной» перепад свободной поверхности на рис. 9-23, особая форма свободной поверхности в районе так называемого лба волны и т. п.) не показаны.

[2] На рис. 9-24 представлено так называемое неподтопленное истечение из отверстий, образуемых затворами. При таком истечении расход $(Q_0 + Q')$ не зависит от отметки горизонта воды в канале. При подтопленном истечении вопрос усложняется в связи с тем, что при изменении уровня воды в канале будет изменяться и величина расхода $(Q_0 + Q')$, поступающего в канал.

[3] Подобные свободные поверхности возникают, например, в реках, впадающих в моря, где наблюдаются приливные явления.

На рис. 9-26 дополнительно показан случай, когда благодаря частичному закрытию затворов, установленных в конце канала, расход в сечении $W-W$ уменьшился от Q_0 до Q_W. Как видно, в этом случае получаем деформирующуюся во времени свободную поверхность *абвг*.

3. Случай отрицательной нисходящей волны. Это случай, когда в начальном сечении $W-W$ канала происходит резкое уменьшение отметки z и расхода Q (рис. 9-27, *а* и *б*).

4. Случай отрицательной восходящей волны. Здесь в конечном сечении $W-W$ открытого русла происходит резкое снижение отметки z (рис. 9-28, *а*) или резкое увеличение расхода Q (рис. 9-28, *б*).

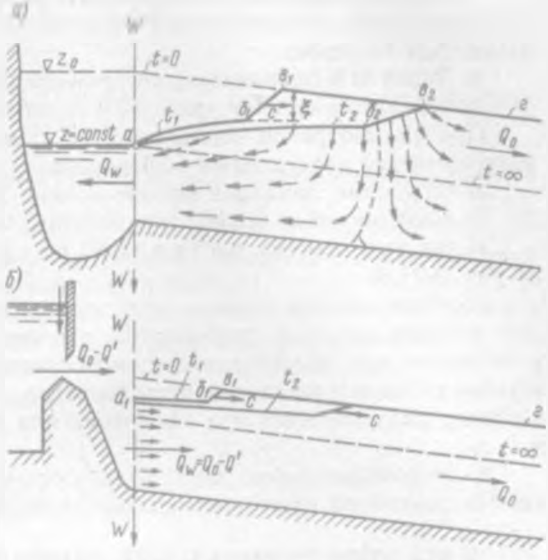


Рис. 9-27. Отрицательная нисходящая волна

Как видно из приведенных чертежей, нарушение условий движения воды в некотором сечении $W-W$ вызывает возмущение, распространяющееся по длине канала в виде волны. Поэтому неустановившееся движение в открытом русле иногда называют волновым.

Разумеется, волны, возникающие на свободной поверхности при рассмотренном выше неустановившемся движении жидкости, по своему характеру существенно отличаются от так называемых ветровых волн (см. гл. 19). При наличии ветровых волн мы часто не наблюдаем перемещения воды по длине водного пространства. Волны же потока, поясненного выше, переносят иногда значительные объемы воды. В связи с этим обстоятельством волны, представленные на рис. 9-23 – 9-28, называют иногда волнами перемещения.

Рис. 9-28. Отрицательная восходящая волна

Поясним некоторые дополнительные термины (см., например, рис. 9-23):

1. Участок *бв* волны называется «лбом» волны. Иногда этот участок свободной поверхности бывает крутым (даже вертикальным), причем в его районе возникает резко изменяющееся движение. Иногда же данный участок бывает пологим (см., например, рис. 9-27).

Форма лба волны в некоторых случаях бывает сходной с формой свободного волнистого прыжка (рис. 8-5). Начертание лба волны в плане называют **фронтом** волны.

2. Участок *аб* отвечает **телу волны**. В районе тела волны всегда имеет место плавно и медленно изменяющееся движение. В связи с этим после прохода лба волны через данное сечение русла отметка горизонта воды в нем должна изменяться медленно.

3. Линия MN (штриховая), которая представляет собой траекторию точки *б* лба волны (см., например, рис. 9-23, *а*), называется **волновой границей**.

При рассмотрении описанного неустановившегося движения приходится интересоваться следующими величинами:

а) скоростью движения фронта волны; эту скорость обозначаем через c;

б) высотой «лба» волны; эту величину обозначаем через ξ;

в) так называемым **волновым расходом** ΔQ (см., например, график на рис. 9-23, *б*).

Соответствующие расчеты безнапорного неустановившегося движения воды, при помощи которых выявляются величины c, ξ и ΔQ, приходится вести, в частности, при проектировании гидростанций, например, в связи с так называемым суточным регулированием расходов, а также с анализом гидравлической картины, получающейся при включении или выключении турбин гидростанции, и т. п.

В настоящем курсе даем только **основные понятия** из области рассматриваемого неустановившегося движения.[1]

§ 9-14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ И ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ОБ ИХ РЕШЕНИИ

Рассматриваемое движение воды, имеющее место в пределах тела волны, может быть описано двумя дифференциальными уравнениями: уравнением неразрывности и уравнением динамического равновесия.

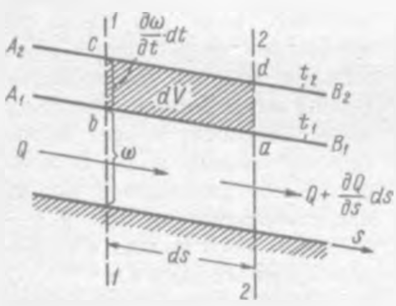


Рис. 9-29. К выводу уравнения неразрывности

1°. Уравнение неразрывности (уравнение баланса расхода). Представим на рис. 9-29 продольный разрез тела волны, причем изобразим на этом чертеже две свободные поверхности: A_1B_1, отвечающую моменту времени t_1, и A_2B_2, отвечающую моменту времени t_2 ($t_2 = t_1 + dt$). Наметим два неподвижных (скрепленных с неподвижным пространством) сечения потока: $1-1$ и $2-2$, причем расстояние ds между этими сечениями считаем бесконечно малым. Будем рассматривать отсек пространства, заключенный между упомянутыми сечениями.

Обозначим через dV элементарный объем жидкости, выраженный на чертеже площадью *абсд* и заключенный между свободными поверхностями A_1B_1 и A_2B_2 в пределах рассматриваемого отсека пространства. Для величины dV можно написать два разных выражения.

С одной стороны,

$$dV = Q\,dt - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s}ds\right)dt = -\frac{\partial Q}{\partial s}ds\,dt, \tag{9-86}$$

[1] Дальнейшее развитие этого вопроса излагается в специальных курсах («Использование водной энергии» и т. п.).

где Q – расход в сечении $1-1$; $\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial s}ds\right)$ – расход в сечении $2-2$.

Выражение (9-86) представляет собой разность объемов воды, поступившей за время dt через сечение $1-1$ в рассматриваемый отсек пространства и вытекшей из него за то же время dt через сечение $2-2$.

С другой стороны,

$$dV=\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}dt\right)ds, \tag{9-87}$$

где $\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}dt\right)$ – приращение (за время dt) площади живого сечения ω (измеряемой в сечении $1-1$).

Очевидно, выражение (9-87) дает приращение за время dt объема воды, заключенной в рассматриваемом отсеке пространства.

Считая воду несжимаемой, можем приравнять выражения (9-86) и (9-87). При этом и получаем первое искомое дифференциальное уравнение:

$$-\frac{\partial Q}{\partial s}ds\,dt=\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}dt\right)ds. \tag{9-88}$$

или

(I)
$$\frac{\partial Q}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0. \tag{9-89}$$

В случае прямоугольного призматического русла данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{9-90}$$

или

$$\frac{\partial(hv)}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial t}=0. \tag{9-91}$$

2°. Уравнение динамического равновесия. Здесь, как и в предыдущем пункте, рассматриваем элементарный отсек потока между сечениями $1-1$ и $2-2$, ограниченный свободной поверхностью A_1B_1 (рис. 9-29). При этом, выяснив все силы, действующие на данный отсек (включая силы инерции), проектируем эти силы на направление движения; сумму проекций этих сил согласно принципу Даламбера приравниваем нулю и в результате получаем искомое дифференциальное уравнение.

Идя по такому пути, получаем известное дифференциальное уравнение неравномерного плавно изменяющегося движения (7-12); однако это уравнение в случае неустановившегося движения оказывается дополненным одним новым членом, выражающим локальную часть сил инерции. Данное уравнение имеет вид (если примем $\alpha=\alpha_0=1$).

$$J=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{v^2}{C^2R}+\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{9-92}$$

Здесь последний член правой части учитывает упомянутую локальную часть силы инерции: $\frac{1}{g}$ – масса единицы веса жидкости; $\frac{\partial v}{\partial t}$ – локальная часть ускорения. Что касается остальных членов (9-92), то, как было показано в § 7-3:

величина J представляет собой уклон свободной поверхности:

$$J = i - \frac{\partial h}{\partial s}; \tag{9-93}$$

выражение $\frac{v^2}{C^2 R}$ дает нам уклон трения:

$$i_f = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2}. \tag{9-94}$$

С учетом (9-93) и (9-94) уравнение (9-92) можно переписать в виде

(II) $$i - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{Q^2}{K^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{9-95}$$

3°. Общие замечания о существующих методах решения дифференциальных уравнений (I) и (II). Полученные выше уравнение баланса расхода (I) и уравнение динамического равновесия (II) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений, которые принято называть уравнениями Сен-Венана.

В результате решения этой системы, вообще говоря, мы должны получить две функции:

$$Q = f_1(t, s) \text{ и } \omega = f_2(t, s). \tag{9-96}$$

Если бы эти функции были известны, то можно было бы решать различные практические задачи, например, можно было бы построить свободную поверхность тела волны, отвечающую данному моменту времени, и т. п. В результате решения этих уравнений можно также получить высоту вертикального лба волны ξ и скорость c движения волны.

Система уравнений (I) и (II) является системой нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. Решение этой системы уравнений представляет значительные математические трудности.

Существует целый ряд различных методов приближенного решения данной системы уравнений. Главнейшие из этих методов могут быть разбиты на следующие две группы.

1. Первая группа решений. Сюда относятся методы, основанные на использовании ЭВМ, без введения в расчет каких-либо особых дополнительных допущений.

Здесь имеют место два разных пути:

а) использование разностных методов (методов численного интегрирования); общая идея таких методов достаточно хорошо известна; эти методы получили в настоящее время широкое развитие (в частности, благодаря работам сотрудников Сибирского отделения АН СССР);

б) использование так называемого прямого метода; в этом случае исходные уравнения представляют в виде сумм по выбранным системам линейно-независимых функций; здесь неизвестными функциями являются коэффициенты сумм, которые в свою очередь являются функциями от новых независимых переменных; упомянутые коэффициенты определяют, используя соответствующие граничные условия, по методу Бубнова – Галеркина; в конечном счете такого рода задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений; этим решениям посвящены, в частности, работы Н. А. Картвелишвили.

2. Вторая группа решений. Сюда относятся методы, основанные на использовании дополнительных допущений [несколько упрощающих исходные уравнения (I) и (II)]:

а) метод характеристик, основанный на присоединении к исходным уравнениям (I) и (II) соответствующих им уравнений характеристик; при этом исходные уравнения (I) и (II) несколько упрощают, например, в этих уравнениях пренебрегают уклонами дна и силами гидравлического сопротивления; такого рода метод разрабатывался в СССР С. А. Христиановичем;

б) метод мгновенных режимов, основанный на последовательном рассмотрении картин движения воды, относящихся соответственно к моментам времени t_1 и t_2 при условии, что величина $\Delta t = t_1 - t_2$ является достаточно малой; при этом здесь в исходных уравнениях пренебрегают членами $\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}$; впервые этот метод нашел отражение в работах Н. М. Бернадского;

в) методы, основанные на использовании теории волн малой амплитуды (эти методы нашли отражение в работах Н. Т. Мелещенко, Г. Г. Самородова, В. П. Симонова и др.); здесь рассуждают следующим образом. Имеем, например, бьеф суточного регулирования гидростанции; горизонт воды в этом бьефе колеблется вокруг некоторого среднего положения. В найденные дифференциальные уравнения вместо h, Q и т.д. вводят величины $h_{ср} + \Delta h$, $Q_{ср} + \Delta Q$ и т. д., где $h_{ср}$ и $Q_{ср}$ – параметры, отвечающие упомянутому выше среднему положению уровня воды в бьефе. Далее, после некоторого преобразования рассматриваемых уравнений, получаем отдельные члены уравнений, содержащие произведения $\Delta h \Delta Q$, $(\Delta h)^2$, $(\Delta Q)^2$. Пренебрегая этими членами ввиду их малости, получаем линейные дифференциальные уравнения. Такая линеаризация уравнений и позволяет решить задачу.

Кроме отмеченных выше методов, существуют еще и другие предложения по решению рассматриваемой задачи, в основу которых заложены более смелые допущения. При этом иногда данную задачу некоторые авторы предлагают решать графоаналитическим способом.

Надо сказать, что в СССР, помимо названных выше ученых, в рассматриваемой весьма сложной и вместе с тем весьма актуальной области, работали многие другие исследователи (В. А. Архангельский, Н. М. Бернадский, В. В. Ведерников, И. В. Егиазаров, В. М. Маккавеев, Н. В. Мастицкий, А. Н. Рахманов и др.).

Ниже мы ограничимся кратким освещением только решения Сен-Венана, относящегося к простейшему частному случаю потока воды.

§ 9-15. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ, ОТНОСЯЩЕГОСЯ К ПРОСТЕЙШЕМУ СЛУЧАЮ РУСЛА. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим призматическое русло прямоугольного поперечного сечения с горизонтальным дном; потерями напора будем пренебрегать, считая, что жидкость идеальная.

Этот случай, решенный А. Сен-Венаном, характеризуется условиями

$$i = 0; \quad i_f = \frac{Q^2}{K^2} = 0. \tag{9-97}$$

Подставляя соотношения (9-97) в уравнение (9-95), получаем систему дифференциальных уравнений в виде [см. также уравнение (9-91)]:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} \qquad \frac{\partial (hv)}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0; \\ &\text{(II)} \qquad -g\frac{\partial h}{\partial s} = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{9-98}$$

Полученную систему уравнений, используя обычные методы математики [9-9], можно легко решить. Не останавливаясь здесь на этой чисто математической стороне вопроса, ограничимся пояснением только окончательных результатов решения.

Изобразим на рис. 9-30 продольный разрез рассматриваемого русла. Горизонтальной линией $N-N$ на чертеже покажем свободную поверхность, отвечающую случаю установившегося движения. (Напомним, что потерями напора при движении жидкости пренебрегаем.) На схемах *а, б, в, г* этого чертежа представим известные четыре случая волны перемещения (см. § 9-13).

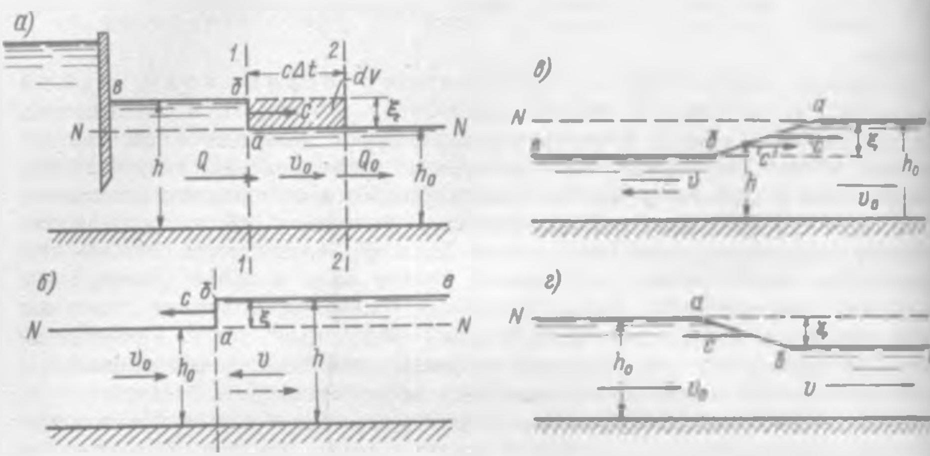


Рис. 9-30. Волны перемещения в призматическом прямоугольном русле (жидкость идеальная)

Соответствующее исследование полученных уравнений показывает, что в случае положительной волны (рис. 9-30, *а* и *б*) «лоб» волны *аб* практически можно принимать вертикальным, как показано на чертеже. Что касается отрицательной волны (рис. 9-30, *в* и *г*), то здесь «лоб» волны *аб* оказывается достаточно пологим, причем в различных точках линии *аб* имеем разную скорость, которую обозначим через c'. Для этих отрицательных волн под скоростью c (скорость движения фронта волны) следует понимать среднюю величину из скоростей c', относящихся к разным точкам линии *аб*.

Упомянутое решение системы (9-98) дает следующие расчетные зависимости.[1]

$$c = v_0 \pm \sqrt{gh_0}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\xi}{h_0}\right); \qquad (9\text{-}99)$$

$$c' = v_0 \pm (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}), \qquad (9\text{-}100)$$

[1] Формула (9-99) получена в результате некоторого упрощения соответствующих математических выражений. Более точное рассмотрение вопроса дает нам вместо (9-99) зависимость

$$c = v \pm \sqrt{gh_0}\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{\xi}{h_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{h_0}\right)^2}. \qquad (9\text{-}99')$$

где индексом «0» обозначены элементы, относящиеся к установившемуся режиму, который имел место до возникновения неустановившегося движения; ξ — высота «лба» волны;[1] h — глубина потока при неустановившемся движении в той точке линии *аб* (рис. 9-30, *в*), где измеряется скорость c'.

Часто высота волны ξ мала сравнительно с глубиной h_0, отвечающей установившемуся движению. Поэтому, пренебрегая отношением $\xi:h_0$, формулу (9-99) можно представить в виде:

$$\boxed{c = v_0 \pm \sqrt{gh_0}\,,} \tag{9-101}$$

где c является абсолютной скоростью перемещения лба волны.

Если волна распространяется в бьефе, находившемся до момента возникновения неустановившегося движения в покое ($v_0 = 0$), то скорость движения фронта волны c оказывается равной

$$c_0 = \sqrt{gh_0}\,; \tag{9-102}$$

c_0 следует рассматривать также как относительную скорость перемещения лба волны (по отношению к движущейся воде); формула (9-102) называется формулой Лагранжа.

Приведенные выше зависимости (9-99)–(9-101) содержат после скорости v_0 два знака ($\pm$). Подчеркнем, что плюс относится к случаю нисходящей волны, т. е. распространяющейся вниз по течению (рис. 9-30, *а* и *в*); минус относится к восходящей волне, т. е. к распространяющейся вверх по течению (рис. 9-30, *б* и *г*). В случае отрицательной волны (рис. 9-30, *в* и *г*) величину ξ в формуле (9-99) следует считать отрицательной.

Рассматривая далее положительную волну (рис. 9-30, *а* и *б*), установим дополнительную связь между величиной ξ и волновым расходом $\Delta Q = Q - Q_0$. Для этого на рис. 9-30, *а* наметим два неподвижных сечения: *1–1* и *2–2*; будем считать, что расстояние между этими сечениями равно $c\Delta t$. Обозначим через dV объем воды, отложившейся за время Δt в отсеке *1–2* между указанными сечениями. Очевидно, для величины dV можно написать два различных выражения:

$$dV = Q\,\Delta t - Q_0\,\Delta t = (Q - Q_0)\,\Delta t; \tag{9-103}$$

$$dV = B\xi c\,\Delta t, \tag{9-104}$$

где B — ширина прямоугольного русла.[2]

Приравнивая выражения (9-103) и (9-104), имеем:

$$(Q - Q_0)\,\Delta t = B\xi c\,\Delta t \tag{9-105}$$

или

$$\Delta Q = Q - Q_0 = B\xi c, \tag{9-106}$$

или

$$\xi = \frac{\Delta Q}{Bc} = \frac{Q - Q_0}{Bc}. \tag{9-107}$$

Располагая зависимостью (9-106) или (9-107), а также (9-101) или (9-99), можно решать различные задачи. Например:

[1] В действительности положительной волне предшествует передний вал, высота которого составляет примерно $\frac{3}{2}\xi$.

[2] Если бы рассматривали непрямоугольное русло (см. ниже), то под величиной B надо было бы понимать ширину потока на высоте половины волны.

а) положим, что мы мгновенно увеличили открытие щита (рис. 9-30, так, что расход Q_0 возрос на величину ΔQ. Требуется найти высоту волны ξ и скорость c ее распространения вдоль канала. Для решения этой задачи по формуле (9-101) вычисляем c и далее по формуле (9-107) находим ξ. Получив ξ, величину c можно уточнить по формуле (9-99), а затем по найденной уточненной величине c снова определить по (9-107) значение ξ и т. д.;

Рис. 9-31. Отражение волн перемещения

б) положим, что мы резко подняли горизонт воды в конце канала на величину ξ над линией $N-N$ (рис. 9-30, *б*). Требуется найти волновой расход и скорость распространения волны вдоль канала. Для решения этой задачи по формуле (9-99) или (9-101) находим c; по формуле же (9-106) вычисляем ΔQ.

В случае **отрицательной** волны решение подобных задач несколько осложняется необходимостью строить по формуле (9-100) очертание линии *ab*.

В заключение приведем следующие замечания:

1. При выводе приведенных выше зависимостей мы пренебрегали потерями напора. Гидравлические сопротивления здесь мало влияют на результаты расчета.

2. Приведенное выше решение с некоторым приближением может быть распространено и на случай любых правильных цилиндрических русел. При этом только в зависимостях для скорости c под величиной h_0 следует понимать отношение $\frac{\omega_0}{B}$, где ω_0 – площадь живого сечения потока до возникновения неустановившегося движения, B – его ширина на высоте половины волны.

3. Рассмотрим для примера случай движения воды, показанный на рис. 9-23. Наметим некоторое произвольное вертикальное сечение $M-N$. Для момента времени t_2 в этом сечении будем иметь глубину воды h, показанную на чертеже.

Величина расхода Q_{MN} в данном сечении (в момент времени t_2) будет определяться величиной уклона J свободной поверхности в этом же сечении, согласно формуле (9-92). Пренебрегая же силами инерции в рассматриваемом сечении, величину Q_{MN} можно с некоторым приближением выразить через уклон J при помощи известной формулы Шези.

Очевидно, расход Q_{MN} можно представить в виде суммы:

$$Q_{MN} = Q' + \Delta Q_2 + Q_0, \quad (9\text{-}108)$$

где Q_0 – расход, отвечающий «начальной» свободной поверхности $I-I$ в канале;

ΔQ_2 – волновой расход;

$$\Delta Q_2 = \xi B c; \quad (9\text{-}109)$$

причем здесь c приближенно можно установить по формуле (9-101);

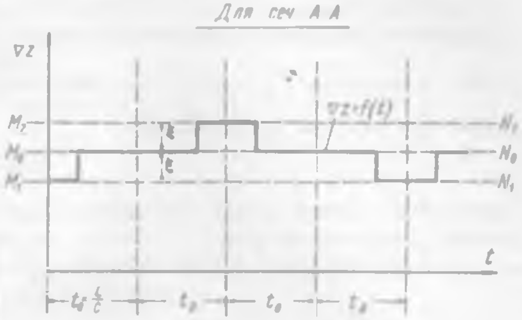


Рис. 9-32. Незатухающие колебания горизонта идеальной жидкости в сечении $A-A$ (рис. 9-31)

Q' – расход воды, которая заполняет объем, расположенный выше кривой $д-б_2$ и обусловливает подъем свободной поверхности $a-б_2$.

Руководствуясь этими соображениями, можно более подробно с качественной стороны проанализировать схемы движения воды, показанные на рис. 9-27 и 9-28.

4. Рассмотрим волну перемещения в русле конечной длины. Здесь сталкиваемся с явлением о т р а ж е н и я этой волны, аналогичным отражению волны давления при гидравлическом ударе (см. рис. 9-19, и 9-20).

На схемах рис. 9-31 представлен случай движения идеальной жидкости в призматическом горизонтальном русле после того, как горизонт жидкости в бассейне $Б$ был мгновенно поднят на величину δz (от уровня M_1N_1 до уровня M_0N_0).

Из этого чертежа видно, что от «закрытого» конца русла (от стенки ab) волна перемещения отражается с тем знаком, который имеет волна, подошедшая к стенке ab; от «открытого» же конца канала (от бассейна $Б$) волна перемещения отражается с обратным знаком.

Незатухающие колебания горизонта идеальной жидкости в некотором сечении $A-A$ русла, обусловленные поясненным волновым движением, изображены графиком на рис. 9-32.

§ 9-16. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЙ СПОКОЙНОГО И БУРНОГО ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК КАК ОСТАНОВИВШАЯСЯ ВОЛНА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В § 7-6 понятия спокойного и бурного движения нами были определены чисто формально. Мы говорили, что спокойным движением называется случай, когда $h > h_к$, а бурным – случай, когда $h < h_к$. Осветив в настоящей главе вопрос о волнах перемещения и установив величину скорости c движения этих волн, мы можем теперь дать более точное и физически ясное определение понятий спокойного и бурного движений.

Рассмотрим, например, формулу (9-101), причем будем иметь в виду случай восходящей волны, т. е. *волны, имеющей тенденцию перемещаться вверх по течению*. Для такого случая упомянутую формулу следует переписать в виде

$$c = v_0 - \sqrt{gh_0} = v_0 - c_0, \tag{9-110}$$

где через c_0 обозначено *относительное* перемещение лба волны (по отношению к воде, движущейся со скоростью v_0):

$$c_0 = \sqrt{gh_0}. \tag{9-111}$$

Очевидно, что при соотношении

$$c_0 > v_0 \tag{9-112}$$

возмущение в виде волны, возникшее (по тем или другим причинам) на свободной поверхности (см. рис. 9-30, *б*), будет перемещаться вверх по течению; в случае же обратного соотношения:

$$c_0 < v_0 \tag{9-113}$$

указанное возмущение свободной поверхности (в виде волны) должно перемещаться («сноситься» течением) только вниз по течению.

Именно этот последний случай движения жидкости, характеризуемый неравенством (9-113), не рассматривавшийся нами выше в настоящей главе, и называется *бурным движением*; случай же, характеризуемый неравенством (9-112), называется *спокойным движением*.

Таким образом, можно сказать, что *спокойное движение жидкости есть такое движение, при котором то или другое возмущение, например, искусственно созданное на свободной поверхности, будет распространяться как вверх, так и вниз по течению; при бурном же движении указанное возмущение будет распространяться только вниз по течению.*

Исходя из такого определения бурного и спокойного движений, вообще говоря, можно различать русла (например, составного поперечного профиля, см. рис. 6-3, *в*), в одной части живого сечения которых (например, в центральной части) мы можем иметь бурное движение; в другой же части рассматриваемого живого сечения – спокойное движение.

В связи со сказанным следует различать частный случай, когда

$$v_0 = c_0, \tag{9-114}$$

т. е. когда скорость движения воды v_0 оказывается равной скорости c_0 относительного движения (вверх по течению) волны перемещения. Очевидно, в этом случае возникшая волна перемещения окажется *неподвижной* в пространстве; для нее будем иметь $c = 0$. Такая неподвижная волна является известным нам гидравлическим прыжком, рассматриваемым в гл. 8. Поэтому гидравлический прыжок иногда называют *остановившейся волной перемещения*. Выведенное ранее основное уравнение прыжка (8-23) может быть легко получено из зависимости (9-99′), если в этой зависимости положить $c = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

9-1. **Архангельский В. А.** Расчеты неустановившегося движения в открытых водотоках. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1947.

9-2. **Использование** водной энергии./Под ред. Д. С. Щавелева. – Л.: Энергия, 1976.

9-3. **Картвелишвили Н. А.** Неустановившиеся режимы в силовых узлах гидроэлектрических станций. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1951.

9-4. **Кривченко Г. И.** Гидравлический удар и рациональные режимы регулирования турбин гидроэлектростанций. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1951.

9-5. **Овсепян В. М.** Гидравлический таран и таранные установки. – М.: Машиностроение, 1968.

9-6. **Сурин А. А.** Гидравлический удар в водопроводах и борьба с ним. – М.: Трансжелдориздат, 1946.

9-7. **Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б.** Некоторые вопросы механики сплошной среды. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1938.

9-8. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М. – Л.: Гостехиздат, 1951.

9-9. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика: Специальный курс. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1962.

9-10. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика. – Л.: Энергия, 1975.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ. СВОБОДНЫЕ СТРУИ

А. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЯ В ТОНКОЙ ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

§ 10-1. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ В АТМОСФЕРУ

Как показывают опыты, картина истечения жидкости из некоторого сосуда через малое отверстие в вертикальной тонкой стенке имеет вид, изображенный на рис. 10-1, где обозначено: p_0 — давление на поверхности жидкости в сосуде; в общем случае p_0 не равно атмосферному давлению p_a; ω — площадь отверстия; ω_c – площадь сечения струи в некотором сечении $C-C$, называемом сжатым сечением (см. ниже); H – заглубление центра тяжести *ЦТ* площади ω отверстия под уровнем жидкости в сосуде; падением жидкости на расстоянии l_0 от стенки сосуда до сжатого сечения пренебрегаем, а поэтому считаем, что H является также заглублением центра тяжести площади ω_c под уровнем жидкости в сосуде.

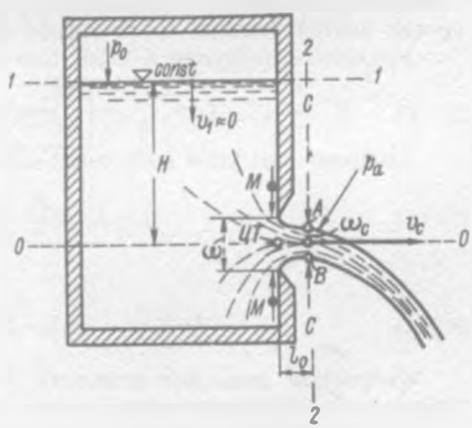


Рис. 10-1. Истечение жидкости из малого отверстия в атмосферу

Струя жидкости по выходе из отверстия резко сжимается на протяжении до сечения $C-C$. Такое сжатие обусловливается инерцией частиц жидкости, движущихся при подходе к отверстию по криволинейным траекториям [в частности, инерцией частиц M (рис. 10-1), которые скользят непосредственно по стенке сосуда и, выйдя из него, движутся по границам струи].

Если не учитывать возможной аэрации струи, т. е. насыщения ее пузырьками воздуха, а также не учитывать сопротивления воздуха, то надо считать, что за сжатым сечением $C-C$, в связи с увеличением скорости падающей жидкости, струя должна продолжать сжиматься, но относительно слабо.

Если скорость истечения жидкости из отверстия велика, то по боковой поверхности струи должны возникнуть достаточно большие касательные напряжения (приложенные к ней со стороны воздуха). Это сопротивление воздуха будет тормозить движение жидкости, ее скорости начнут уменьшаться, кроме того, она начнет аэрироваться, причем струя за сечением $C-C$ будет расширяться (см. далее § 10-12).

До сечения $C-C$ имеется резко изменяющееся движение; после сечения $C-C$ — плавно изменяющееся движение. Сечение струи по линии CC и называется сжатым сечением.

Сжатое сечение $C-C$ является тем первым (по течению) сечением, к которому можно прилагать уравнение Бернулли; к сечениям струи левее линии $C-C$ уравнение Бернулли неприменимо, так как движение здесь резко изменяющееся. Как показывает опыт, в сжатом сечении линии тока параллельны друг другу, причем скорости u здесь распределяются равномерно. Эпюра скоростей u для линии AB данного сечения близка к прямоугольнику.

Если отверстие круглое, то расстояние от внутренней поверхности стенки до сжатого сечения, согласно имеющимся опытам, будет

$$l_0 \approx 0{,}5D, \tag{10-1}$$

где D — диаметр отверстия.

Введем обозначение:

$$\boxed{\frac{\omega_c}{\omega} = \varepsilon;} \tag{10-2}$$

величина ε называется коэффициентом сжатия струи.

Найдем среднюю скорость v_c в сжатом сечении и расход Q жидкости, вытекающей из сосуда. Для решения этой задачи соединяем уравнением Бернулли два сечения: $1-1$ и $2-2$, из которых первое намечаем на уровне жидкости в сосуде и второе — по линии $C-C$. Плоскость сравнения OO проведем на уровне центра тяжести $ЦТ$ площади ω_c.

Уравнение Бернулли в известных нам обозначениях имеет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_f. \tag{10-3}$$

Выясняем значения отдельных слагаемых, входящих в это уравнение:

$$\left.\begin{aligned} &z_1 = H; \quad \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}; \quad \frac{\alpha v_1^2}{2g} \approx 0; \\ &z_2 = 0; \quad \frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}; \quad \frac{\alpha v_2^2}{2g} \approx \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_c^2}{2g}. \end{aligned}\right\} \tag{10-4}$$

Скоростью движения жидкости в сосуде пренебрегаем (см. § 10-5). Подчеркнем, что давление в жидкости в сечении $C-C$ равно атмосферному p_a.

Величину потерь напора h_f от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ представим в виде

$$h_f = \zeta \frac{v_c^2}{2g}, \tag{10-5}$$

где ζ — коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора от сечения $1-1$ до сечения $2-2$. Заметим, что потери напора сосредотачиваются в основном в районе самого отверстия, где скорости движения жидкости уже достаточно велики.

Подставляя (10-4) и (10-5) в (10-3), получаем

$$H + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_c^2}{2g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g}. \tag{10-6}$$

Обозначим

$$H + \left(\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_a}{\gamma}\right) = H_{пр}, \tag{10-7}$$

где $H_{пр}$ можно назвать **приведенным напором.**

При этом вместо (10-6) имеем

$$H_{пр} = (1 + \zeta)\frac{v_c^2}{2g}, \tag{10-8}$$

откуда

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}\sqrt{2gH_{пр}}, \tag{10-9}$$

или

$$v_c = \varphi\sqrt{2gH_{пр}}, \tag{10-10}$$

где

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}; \tag{10-11}$$

коэффициент φ, учитывающий в формуле (10-10) потери напора, называется **коэффициентом скорости.**

В частном случае, когда $p_0 = p_a$, т. е. когда сосуд открыт,

$$H_{пр} = H,$$

причем вместо (10-10) получаем

$$\boxed{v_c = \varphi\sqrt{2gH}.} \tag{10-12}$$

Для идеальной жидкости

$$h_f = \zeta\frac{v_c^2}{2g} = 0, \tag{10-13}$$

т. е. в этом случае

$$\zeta = 0; \quad \varphi = 1{,}0 \tag{10-14}$$

Следовательно, для идеальной жидкости

$$v_c = \sqrt{2gH}. \tag{10-15}$$

Эта формула называется **формулой Торричелли**; Торричелли впервые установил (в 1643 г.) экспериментальным путем зависимость (10-15), не учитывающую потери напора; коэффициент φ в формуле (10-12) близок к единице (см. ниже).[1]

---

[1] Торричелли формулу (10-15) дал в виде $v_c = k\sqrt{H}$, где k — некоторый коэффициент, которым Торричелли не интересовался. Значение $k = \sqrt{2g}$ в формулу (10-15) было введено значительно позже.

Зная скорость v_c в сжатом сечении, найдем расход Q для случая $p_0 = p_a$ (сосуд открыт). Очевидно,

$$Q = \omega_c v_c = \omega_c \varphi \sqrt{2gH} = \omega \frac{\omega_c}{\omega} \varphi \sqrt{2gH}; \tag{10-16}$$

подставляя сюда ε по (10-2), получим

$$Q = \varepsilon\varphi\omega \sqrt{2gH} \tag{10-17}$$

или

$$\boxed{Q = \mu_o \omega = \sqrt{2gH},} \tag{10-18}$$

где

$$\mu_o = \varepsilon\varphi, \tag{10-19}$$

причем здесь μ_o называется к о э ф ф и ц и е н т о м р а с х о д а о т в е р с т и я. Этот коэффициент учитывает и потери напора h_f, и степень сжатия струи, выходящей из отверстия.

Как видно, при рассмотрении истечения жидкости из отверстия были введены ч е т ы р е н о в ы х к о э ф ф и ц и е н т а: сжатия ε; сопротивления ζ; скорости φ; расхода отверстия μ_o.

§ 10-2. ТИПЫ СЖАТИЯ СТРУИ. ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ε, ζ, φ И μ_o ДЛЯ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ В АТМОСФЕРУ. ИНВЕРСИЯ СТРУИ

На степень сжатия струи могут влиять боковые стенки, а также дно сосуда. В зависимости от удаления отверстия от боковых стенок и дна сосуда различают следующие типы сжатия струи.

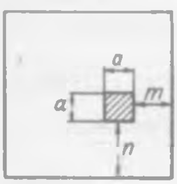


Рис. 10-2. К вопросу о совершенном и несовершенном сжатии струи при истечении из отверстия

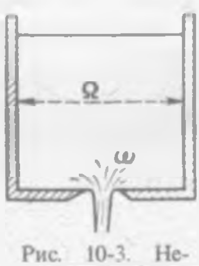


Рис. 10-3. Несовершенное сжатие струи

1°. Совершенное сжатие. *Совершенным сжатием называется сжатие, возникающее, когда боковые стенки и дно сосуда (или водоема) практически не оказывают влияния на степень сжатия струи (не влияют на истечение).* Такое сжатие получается, когда отверстие расположено достаточно далеко от боковых стенок и дна сосуда, именно, когда расстояния m и n (рис. 10-2) удовлетворяют условиям

$$m > 3a; \quad n > 3a, \tag{10-20}$$

где a – длина одной стороны квадратного отверстия; m – расстояние от отверстия до боковой стенки; n – расстояние от отверстия до дна сосуда. Как показывают опыты, при соблюдении условий (10-20) величина ε практически не зависит от размеров m и n.

Для случая совершенного сжатия имеем следующие средние численные значения коэффициентов ε, ζ, φ и μ_o, относящиеся к круглым и квадратным отверстиям (найденные опытным путем) для квадратичной области сопротивления:

$$\varepsilon = 0{,}63 \div 0{,}64; \quad \zeta = 0{,}06; \quad \varphi = 0{,}97; \quad \mu_o = 0{,}62. \tag{10-21}$$

2°. **Несовершенное сжатие.** Несовершенное сжатие получается при несоблюдении условий (10-20), т. е. когда отверстие расположено сравнительно б л и з к о к боковой стенке или дну сосуда. В этом случае величина ε зависит от размеров m и n; чем меньше размеры m и n, тем меньше сжатие струи и, следовательно, тем больше величина ε.

В случае отверстий одинаковой формы и одинаковых размеров площадь сжатого сечения при несовершенном сжатии $\omega_{\text{н сов}}$ всегда больше площади сжатого сечения при совершенном сжатии $\omega_{\text{сов}}$:

$$\omega_{\text{н сов}} > \omega_{\text{сов}}. \qquad (10\text{-}22)$$

Для несовершенного сжатия можно привести, например, следующую эмпирическую формулу для коэффициента расхода отверстия (рис. 10-3):

$$\mu_o \approx (\mu_o)_{\text{сов}} \left(1 + \frac{\tau}{100}\right), \qquad (10\text{-}23)$$

где $(\mu_o)_{\text{сов}}$ – коэффициент расхода отверстия для совершенного сжатия; τ – величина, зависящая от отношения ω/Ω:

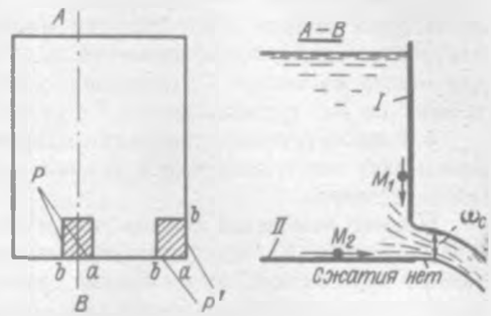


Рис. 10-4. Неполное сжатие струи

$$\tau = f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right), \qquad (10\text{-}24)$$

причем здесь Ω – площадь горизонтального сечения сосуда (площадь живого сечения потока перед отверстием). Величина «поправок» на несовершенность сжатия τ для круглого отверстия будет

а) $\tau \approx 1{,}5$ при $\omega : \Omega = 0{,}1$;

б) $\tau \approx 3{,}5$ при $\omega : \Omega = 0{,}2$.

Рис. 10-5. Инверсия струи

3°. **Неполное сжатие.** Неполное сжатие получается, когда m или n или m и n оказываются равными нулю (рис. 10-4).[1] В этом случае поджатия струи со стороны ab отверстия (см. чертеж) нет. Рассматривая стенку сосуда I (см. разрез по линии AB), видим, что жидкая частица M_1, двигаясь вдоль стенки I и затем сойдя с этой стенки, благодаря своей инерции стремится двигаться по вертикали; этим обстоятельством и обусловливается сжатие струи сверху. Рассматривая же стенку сосуда II (в данном случае дно сосуда), видим, что жидкая частица M_2, сойдя со стенки II и двигаясь в прежнем своем направлении, не вызывает сжатия струи. При неполном сжатии площадь ω_c получается относительно большой, за счет чего коэффициент μ_o должен увеличиться.

Для примера можно привести следующую экспериментальную формулу для коэффициента расхода μ_o в случае неполного сжатия:

$$\mu_o \approx (\mu_o)_{\text{сов}} \left(1 + 0{,}4\frac{P'}{P}\right), \qquad (10\text{-}25)$$

где P – периметр отверстия; P' – часть периметра отверстия, где струя не испытывает сжатия.

[1] Как видно, под полным сжатием понимается такой случай, когда сжатие струи (совершенное или несовершенное) имеется со всех сторон отверстия.

4°. Заключительные замечания:

1. Следует запомнить, что коэффициент скорости φ, как правило, близок к единице (несколько меньше единицы); коэффициенты же ε и μ_0 очень часто лежат в пределах от 0,6 до 1,0 (в среднем равны приблизительно $^2/_3$).

2. Расход Q в случае неполного и несовершенного сжатия при равных прочих условиях всегда больше расхода Q в случае совершенного сжатия.

3. Приведенные выше значения μ_0 относятся как к воде, так и к другим жидкостям в случае турбулентного режима, когда число Рейнольдса Re достаточно велико. При больших числах Рейнольдса Re, вычисленных для сжатого сечения,[1] коэффициент расхода μ_0 оказывается не зависящим от Re: при малых же числах Re (меньших ~ 50) коэффициент расхода μ_0 существенно зависит от Re: с уменьшением Re величина μ_0 также уменьшается.

4. Если истечение происходит, например, из квадратного отверстия, то, как показывает опыт, поперечное сечение струи меняет свою форму по длине ее (вдоль течения).

Пример изменения формы поперечного сечения струи вдоль течения представлен на рис. 10-5 (штриховкой здесь показаны сечения струи, намеченные на разных расстояниях от плоскости отверстия). Подобное явление, называемое *инверсией струи*, происходит благодаря тому, что скорости подхода к отверстию оказываются неодинаковыми для различных участков периметра отверстия; кроме того, здесь играют роль еще силы молекулярного давления (см. § 1-4, п. 5), а также силы инерции движущейся жидкости.

§ 10-3. ТРАЕКТОРИЯ СТРУИ

Рассмотрим истечение из малого отверстия в *вертикальной* стенке (рис. 10-6).

«*Траекторией струи*» называют ось струи жидкости, свободно падающей после истечения из отверстия. Для того чтобы найти уравнение оси струи, рассуждаем следующим образом.

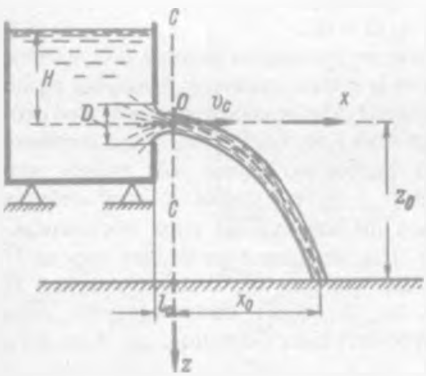


Рис. 10-6. Траектория струи (отверстие в вертикальной стенке)

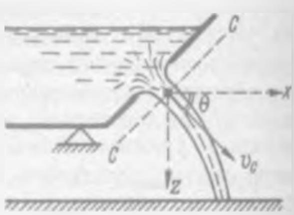


Рис. 10-7. Траектория струи (отверстие в наклонной стенке)

Намечаем сжатое сечение струи $C-C$, местоположение которого определяется известным размером l_0. В центре O этого сечения располагаем начало

[1] Т. е. числах Рейнольдса, выраженных через диаметр струи и скорость, относящиеся к сжатому сечению.

4. Заключительные замечания:

1. Следует запомнить, что коэффициент скорости φ, как правило, близок к единице (несколько меньше единицы); коэффициенты же ε и μ_0 очень часто лежат в пределах от 0,6 до 1,0 (в среднем равны приблизительно $^2/_3$).

2. Расход Q в случае неполного и несовершенного сжатия при равных прочих условиях всегда больше расхода Q в случае совершенного сжатия.

3. Приведенные выше значения μ_0 относятся как к воде, так и к другим жидкостям в случае турбулентного режима, когда число Рейнольдса Re достаточно велико. При больших числах Рейнольдса Re, вычисленных для сжатого сечения,[1] коэффициент расхода μ_0 оказывается не зависящим от Re; при малых же числах Re (меньших ~ 50) коэффициент расхода μ_0 существенно зависит от Re: с уменьшением Re величина μ_0 также уменьшается.

4. Если истечение происходит, например, из квадратного отверстия, то, как показывает опыт, поперечное сечение струи меняет свою форму по длине ее (вдоль течения).

Пример изменения формы поперечного сечения струи вдоль течения представлен на рис. 10-5 (штриховкой здесь показаны сечения струи, намеченные на разных расстояниях от плоскости отверстия). Подобное явление, называемое *инверсией струи*, происходит благодаря тому, что скорости подхода к отверстию оказываются неодинаковыми для различных участков периметра отверстия; кроме того, здесь играют роль еще силы молекулярного давления (см. § 1-4, п. 5), а также силы инерции движущейся жидкости.

§ 10-3. ТРАЕКТОРИЯ СТРУИ

Рассмотрим истечение из малого отверстия в *вертикальной* стенке (рис. 10-6).

«*Траекторией струи*» называют ось струи жидкости, свободно падающей после истечения из отверстия. Для того чтобы найти уравнение оси струи, рассуждаем следующим образом.

Рис. 10-6. Траектория струи (отверстие в вертикальной стенке)

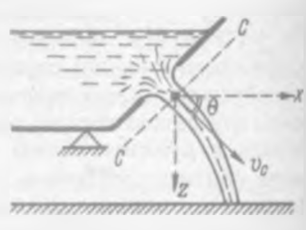


Рис. 10-7. Траектория струи (отверстие в наклонной стенке)

Намечаем сжатое сечение струи $C-C$, местоположение которого определяется известным размером l_0. В центре O этого сечения располагаем начало

[1] Т. е. числах Рейнольдса, выраженных через диаметр струи и скорость, относящиеся к сжатому сечению.

координатных осей x и z. Пренебрегаем сопротивлением воздуха. В указанной точке O мысленно помещаем материальную частицу, имеющую некоторую массу, причем этой частице приписываем скорость v_c.

Далее, прилагая к упомянутой материальной частице уравнения движения, известные из теоретической механики,

$$x = v_c t; \quad z = \frac{gt^2}{2}, \tag{10-26}$$

где t – время, получаем уравнение траектории материальной частицы, имеющей начальную скорость v_c, в виде:

$$z = \frac{gx^2}{2v_c^2}, \tag{10-27}$$

где

$$v_c = \varphi\sqrt{2gH}. \tag{10-28}$$

Уравнение (10-27) и принимаем за уравнение оси струи. Полученное уравнение дает ось струи в виде параболы. Подставляя в (10-27) заданную величину z_0 (рис. 10-6), можем найти величину x_0, т. е. дальность боя струи.[1]

В случае, когда отверстие сделано в наклонной стенке сосуда (рис. 10-7), уравнение оси струи получается аналогично изложенному выше; только здесь начальная скорость v_c рассматриваемой материальной частицы принимается наклонной к горизонту под заданным углом θ.

§ 10-4. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ ПОД УРОВЕНЬ (СЛУЧАЙ ЗАТОПЛЕННОГО ОТВЕРСТИЯ)

Так называемое затопленное отверстие представлено на рис. 10-8. Здесь Z – разность уровней в левом и правом сосудах. Соединяя уравнением Бернулли показанные на чертеже сечения $1-1$ и $3-3$ и выражая потерю напора между этими сечениями известной зависимостью

$$h_f = Z = \zeta\frac{v_c^2}{2g} = (\zeta_{1-2} + \zeta_{2-3})\frac{v_c^2}{2g} = (\zeta_{1-2} + 1)\frac{v_c^2}{2g}, \tag{10-29}$$

окончательно получаем формулу для расхода Q того же вида, что и в случае истечения в атмосферу; только в эту формулу вместо величины H входит разность уровней Z жидкости в сосудах

$$\boxed{Q = \mu_o\omega\sqrt{2gZ}.} \tag{10-30}$$

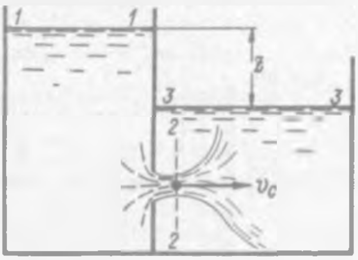


Рис. 10-8. Истечение из отверстия под уровень (затопленное отверстие)

Заметим, что в зависимости (10-29) через ζ_{1-2} и ζ_{2-3} обозначены коэффициенты сопротивления, учитывающие потери напора соответственно от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ и от сечения $2-2$ до сечения $3-3$ (рис. 10-8). Имея в виду, что за сечением $2-2$ получается резкое расширение

[1] Измерив, например, в условиях лабораторного опыта величины x_0 и z_0 (рис. 10-6), можем затем, пользуясь формулами (10-27) и (10-28), вычислить коэффициент скорости φ для данного отверстия.

координатных осей x и z. Пренебрегаем сопротивлением воздуха. В указанной точке O мысленно помещаем материальную частицу, имеющую некоторую массу, причем этой частице приписываем скорость v_c.

Далее, прилагая к упомянутой материальной частице уравнения движения, известные из теоретической механики,

$$x = v_c t; \quad z = \frac{gt^2}{2}, \tag{10-26}$$

где t – время, получаем уравнение траектории материальной частицы, имеющей начальную скорость v_c, в виде:

$$z = \frac{gx^2}{2v_c^2}, \tag{10-27}$$

где

$$v_c = \varphi\sqrt{2gH}. \tag{10-28}$$

Уравнение (10-27) и принимаем за уравнение оси струи. Полученное уравнение дает ось струи в виде параболы. Подставляя в (10-27) заданную величину z_0 (рис. 10-6), можем найти величину x_0, т. е. дальность боя струи.[1]

В случае, когда отверстие сделано в наклонной стенке сосуда (рис. 10-7), уравнение оси струи получается аналогично изложенному выше; только здесь начальная скорость v_c рассматриваемой материальной частицы принимается наклонной к горизонту под заданным углом θ.

§ 10-4. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ ПОД УРОВЕНЬ (СЛУЧАЙ ЗАТОПЛЕННОГО ОТВЕРСТИЯ)

Так называемое затопленное отверстие представлено на рис. 10-8. Здесь Z – разность уровней в левом и правом сосудах. Соединяя уравнением Бернулли показанные на чертеже сечения $1-1$ и $3-3$ и выражая потерю напора между этими сечениями известной зависимостью

$$h_f = Z = \zeta\frac{v_c^2}{2g} = (\zeta_{1-2} + \zeta_{2-3})\frac{v_c^2}{2g} = (\zeta_{1-2} + 1)\frac{v_c^2}{2g}, \tag{10-29}$$

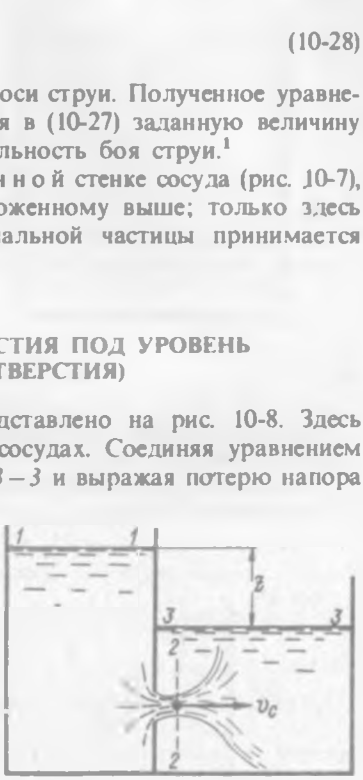


Рис. 10-8. Истечение из отверстия под уровень (затопленное отверстие)

окончательно получаем формулу для расхода Q того же вида, что и в случае истечения в атмосферу; только в эту формулу вместо величины H входит разность уровней Z жидкости в сосудах

$$\boxed{Q = \mu_o\omega\sqrt{2gZ}.} \tag{10-30}$$

Заметим, что в зависимости (10-29) через ζ_{1-2} и ζ_{2-3} обозначены коэффициенты сопротивления, учитывающие потери напора соответственно от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ и от сечения $2-2$ до сечения $3-3$ (рис. 10-8). Имея в виду, что за сечением $2-2$ получается резкое расширение

[1] Измерив, например, в условиях лабораторного опыта величины x_0 и z_0 (рис. 10-6), можем затем, пользуясь формулами (10-27) и (10-28), вычислить коэффициент скорости φ для данного отверстия.

струи до весьма больших размеров, можно считать $\zeta_{2-3} = 1,0$. Что касается численного значения μ_0, входящего в (10-30), то, как показывают опыты, оно оказывается примерно таким же, как и при истечении в атмосферу (см. § 10-2).

§ 10-5. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ. ПОНЯТИЕ МАЛОГО И БОЛЬШОГО ОТВЕРСТИЙ. УКАЗАНИЯ О РАСЧЕТЕ БОЛЬШИХ ОТВЕРСТИЙ

При истечении жидкости через отверстие, сделанное в боковой стенке или дне сосуда, **вся жидкость**, находящаяся в нем, приходит в движение. В зависимости от характера поступления жидкости в сосуд и скоростей в нем условия движения в сосуде могут быть различными:

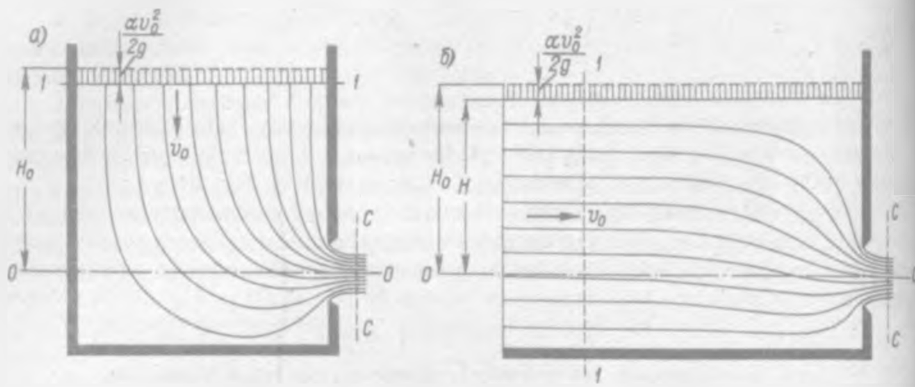


Рис. 10-9. Движение жидкости в сосуде

а) в сосуде может наблюдаться в основном потенциальное (безвихревое) движение, и потери напора в нем будут ничтожны;

б) в сосуде может быть также вихревое движение, причем в нем могут появляться водоворотные области.

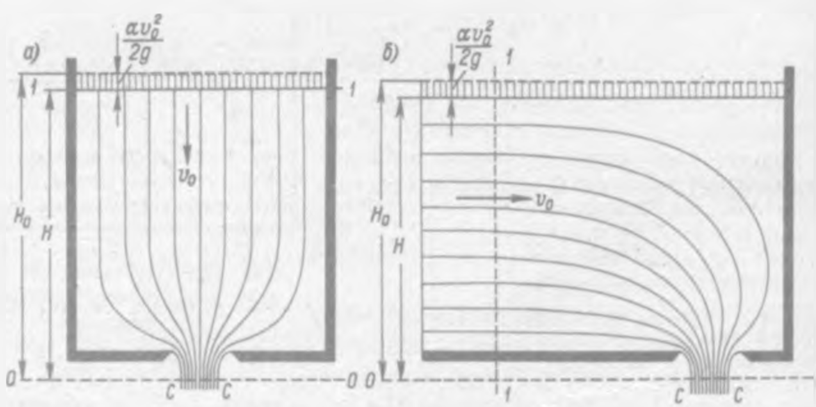


Рис. 10-10. Движение жидкости в сосуде

На рис. 10-9 и 10-10 показаны некоторые возможные (наиболее простые) схемы линий тока, характеризующие потенциальное движение жидкости в сосуде. Для рис. 10-9, *б* и 10-10, *б* «подходное» живое сечение *1 — 1* будет не горизонтальным, а вертикальным.

Обозначим через v_0 скорость подхода, т. е. среднюю скорость в подходном плоском живом сечении $1-1$. При этом полный напор в сечении $1-1$ (относительно плоскости сравнения, указанной на чертежах) будет

$$H_{e_1} = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = H_0 \text{ (обозначение)}. \qquad (10\text{-}31)$$

Потеря напора на пути между сечениями $1-1$ и $C-C$ оценивается коэффициентом скорости φ.

Для схем на рис. 10-9, *а* и 10-10, *б* величина φ будет меньше, чем для схем на рис. 10-9, *б* и 10-10, *а* в связи с наличием поворота потока в сосуде. Однако, поскольку скорости в самом сосуде невелики и потери напора концентрируются главным образом вблизи отверстия, можно считать, что в случае малого отверстия численные значения φ для всех приведенных выше схем примерно одинаковы; φ практически не зависит от условий движения жидкости в сосуде, если отверстие относительно мало.

Чтобы учесть при расчете скорость подхода v_0, в формулу (10-18) вместо H следует ввести полный напор H_0; при этом вместо (10-18) получаем [1]

$$Q = \mu_o \omega \sqrt{2gH_0}. \qquad (10\text{-}32)$$

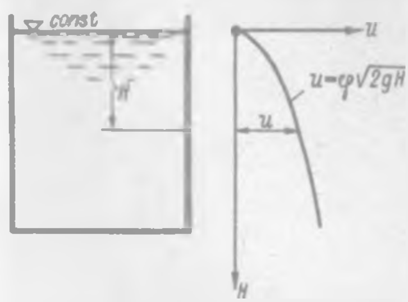


Рис. 10-11. Зависимость скорости истечения от глубины погружения рассматриваемой точки отверстия

Обозначим через Ω площадь подходного живого сечения $1-1$. Можно показать, что в случае

$$\Omega : \omega > 4{,}0 \qquad (10\text{-}33)$$

скоростью подхода v_0 следует пренебрегать и считать [2]

$$H_0 = H. \qquad (10\text{-}34)$$

Согласно формуле (10-12), скорость v_c увеличивается с увеличением H. На рис. 10-11 показана кривая $u = f(H)$, построенная по этой формуле (после замены в ней скорости v_c скоростью u).

Как видно из рис. 10-1, заглубление точек A и B под свободной поверхностью жидкости в сосуде различно. Поэтому скорости u_A и u_B в точках A и B будут, строго говоря, различными:

$$u_A = \varphi \sqrt{2gH_A} \neq u_B = \varphi \sqrt{2gH_B}, \qquad (10\text{-}35)$$

где H_A и H_B – заглубления соответствующих точек под свободной поверхностью.

Однако в случае

$$H' \geqslant 10D, \qquad (10\text{-}36)$$

где H' – заглубление верхней кромки отверстия под уровнем жидкости в сосуде и D – высота отверстия, различие между скоростями u_A и u_B несущественно (менее 5%).

Условимся малым отверстием называть такое отверстие, которое одновременно удовлетворяет двум условиям:

1-е условие: скорость подхода v_0 пренебрежимо мала, т. е. имеет место неравенство (10-33);

2-е условие: скорости u_A и u_B (в верхней и нижней точках сжатого сечения) примерно равны друг другу: $u_A \approx u_B$, т. е. имеет место неравенство (10-36).

Принимая такие условия, можно считать, что малое отверстие получается:

а) в случае отверстия в вертикальной стенке и при горизонтальном подходном сечении (рис. 10-9, *а*), когда одновременно соблюдаются условия (10-33) и (10-36);

б) в случае отверстия в вертикальной стенке и при вертикальном

---

[1] Всюду ниже имеем в виду случай истечения в атмосферу.

[2] Ошибка в расчете при этом не будет превышать 5%.

подходном сечении $1-1$ (рис. 10-9, б), когда соблюдается неравенство (10-36); неравенство (10-33) при этом всегда будет выдержано;

в) в случае отверстия в горизонтальном дне сосуда (рис. 10-10) при соблюдении неравенства (10-33); условие (10-36) здесь отпадает.

Рис. 10-12. Воздушная воронка

Как видно, рассчитывая малые отверстия, мы вовсе не должны интересоваться условиями движения жидкости в сосуде, и всегда можно полагать $v_0 = 0$ и $H_0 = H$.

Что касается больших отверстий, т. е. отверстий, не удовлетворяющих указанным двум условиям или одному из них, то практически их расчет выполняется по тем же формулам, что и малых отверстий. Однако при установлении коэффициента расхода μ_0 здесь, в случае несоблюдения неравенства (10-33), приходится интересоваться движением жидкости в сосуде. Достаточно точные значения μ_0 для больших отверстий могут быть установлены на основании специальных опытов. Только в качестве грубо ориентировочных данных можно привести следующие сведения о величинах μ_0, относящихся к большим отверстиям, выполненным в вертикальной стенке сосуда (в случае квадратичной области сопротивления):

1) отверстия со сжатием со всех сторон при отсутствии направляющих стенок имеют $\mu_0 = 0{,}65$;

2) отверстия с несовершенным полным (всесторонним) сжатием имеют $\mu_0 = 0{,}70$;

3) донные отверстия (т. е. вовсе без сжатия по дну)[1] со значительным влиянием бокового сжатия имеют $\mu_0 = 0{,}65 \div 0{,}70$;

4) донные отверстия с умеренным влиянием бокового сжатия имеют $\mu_0 = 0{,}70 \div 0{,}75$;

5) донные отверстия с плавными боковыми подходами имеют $\mu_0 = 0{,}80 \div 0{,}85$.

В заключение отметим, что при истечении жидкости через отверстие в сосуде при определенных условиях может возникнуть винтообразное движение, которое иногда обусловливает образование так называемой воздушной воронки (рис. 10-12).

Б. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ НАСАДКОВ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

§ 10-6. ТИПЫ НАСАДКОВ. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

В гл. 5 были введены понятия «длинной» и «короткой» трубы. При этом указывалось, что для длинной трубы учитываются только потери по длине h_l; для короткой трубы учитывают как потери h_l, так и местные потери $\sum h_j$.

Насадком (или насадкой) называется весьма короткая напорная (на всем своем протяжении[2]) труба, при гидравлическом расчете которой следует пре-

[1] Об истечении жидкости через донное отверстие в канал см. § 12-13.

[2] Следовательно, выходное сечение этой трубы должно быть полностью заполненным жидкостью.

небрегать потерями напора по длине h_l; необходимо учитывать только местные потери напора.

Различают следующие основные типы насадков (рис. 10-13): внешний цилиндрический насадок, или иначе, насадок Вентури (см. *A*); внутренний цилиндрический насадок, или иначе, насадок Борда (см. *B*); конические насадки: сходящиеся (см. *C*) и расходящиеся (см. *D*); так называемый коноидальный насадок (см. *E*), т. е. насадок, имеющий форму струи жидкости, вытекающей из отверстия в тонкой стенке. Предполагается, что поверхность струи при выходе ее из отверстия близка к коноидальной (линейчатой) поверхности.

Представим себе истечение жидкости из отверстия, сделанного не в тонкой стенке, а в толстой (рис. 10-14, *а*). С гидравлической точки зрения здесь получаем насадок Вентури *ab*. Таким образом, изучая истечение жидкости из насадков, мы при этом изучаем также и истечение жидкости из отверстий, сделанных в толстой стенке.

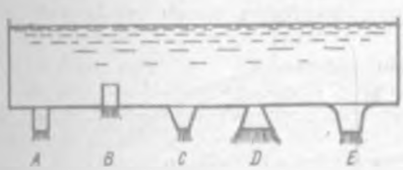


Рис. 10-13. Типы насадков

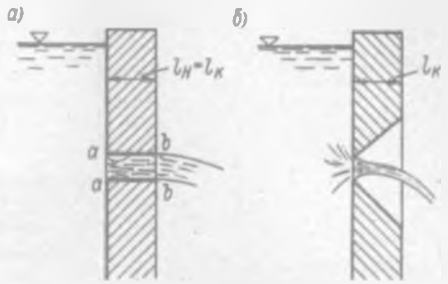


Рис. 10-14. Истечение из отверстия в толстой стенке (*а*) и тонкой стенке (*б*)

Назовем сечение *aa* «входным» (в отверстие), а сечение *bb*, где струя при истечении в атмосферу отделяется от стенки, «выходным» (из отверстия). Расстояние между сечениями *aa* и *bb* обозначим через $l_н$ и назовем его «длиной насадка» или «гидравлической толщиной стенки».[1]

Для стенки на рис. 10-14, *б* «входное» и «выходное» сечения практически совпадают, причем $l_н \approx 0$. Поэтому стенка на этом рисунке в гидравлическом отношении должна рассматриваться, как тонкая (хотя конструктивная ее толщина $l_к$ велика).

В заключение подчеркнем, что ниже мы ограничимся рассмотрением только случая турбулентного движения жидкости в насадках, отвечающего квадратичной области сопротивления.

§ 10-7. ВНЕШНИЙ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ НАСАДОК (НАСАДОК ВЕНТУРИ)

1°. Общая картина движения жидкости при истечении в атмосферу (рис. 10-15). Струя жидкости, обходя кромку *a*, благодаря силам инерции частиц жидкости, поступающих в насадок (см., например, частицы *M*), сжимается до сечения ω_C, затем струя расширяется и заполняет весь насадок. При этом получаем одну вальцовую (водоворотную) область *A*, имеющую кольцевую форму.

В выходном сечении *B—B*, где на жидкость действует атмосферное давление p_a, имеем площадь живого сечения транзитной струи жидкости

---

[1] Рассматриваем только тот случай, когда сечения *aa* и *bb* являются плоскими параллельными сечениями, при этом неполного сжатия струи здесь не касаемся.

$$\omega_B = \omega, \qquad (10\text{-}1?)$$

причем здесь ω – площадь отверстия, к которому присоединен насадок; как видно, при выходе в среду атмосферного давления **сжатие струи отсутствует**.

В отношении вальцовой области A, а также поверхности раздела, отделяющей транзитную струю от вальцовой области, следует иметь в виду все то, что говорилось в § 4-14.

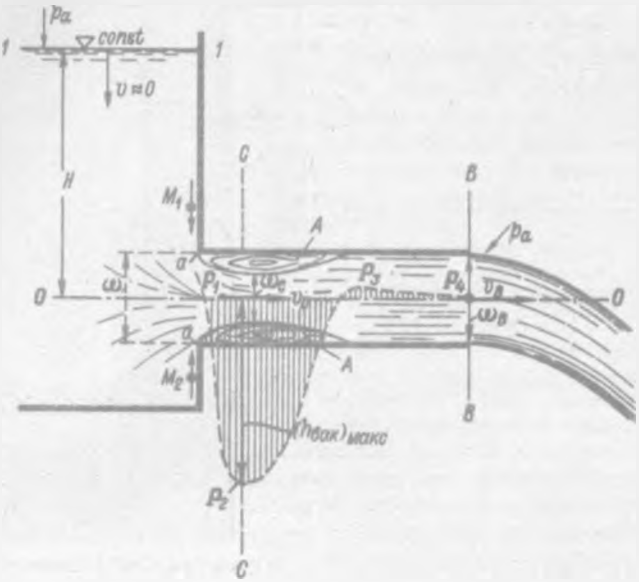


Рис. 10-15. Насадок Вентури

Вальцовая область, равно как и транзитная струя в пределах этой области, характеризуется наличием **вакуума**. Максимальный вакуум получается в сечении $C-C$, где струя имеет наибольшее сжатие и где скорости, а также кинетическая энергия жидкости, образующей транзитную струю, оказываются наибольшими.

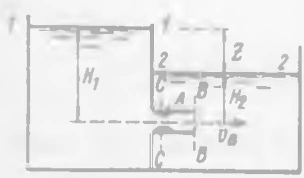


Рис. 10-16. Истечение из насадка Вентури под уровень

Известно, что с возрастанием кинетической энергии потенциальная энергия должна уменьшаться. Если в сечении $B-B$ имеем атмосферное давление, то, двигаясь от этого сечения против течения и попадая в область, где скорости благодаря сжатию струи оказываются большими, чем в сечении $B-B$, мы получим давление в этой области меньшее, чем в сечении $B-B$, т. е. меньше атмосферного давления.

Пьезометрическая линия $P_1P_2P_3P_4$ для насадка в соответствии со сказанным получает вид, изображенный на рис. 10-15.

2°. Расчетные зависимости для v_B и Q. Соединяя сечения $1-1$ и $B-B$ (рис. 10-15) или сечения $1-1$ и $2-2$ (рис. 10-16) уравнением Бернулли и рассуждая точно так же, как в § 10-1 и 10-4, получаем следующие расчетные формулы.

$$\omega_B = \omega, \tag{10-7}$$

причем здесь ω — площадь отверстия, к которому присоединен насадок; как видно, при выходе в среду атмосферного давления **сжатие струи** отсутствует.

В отношении вальцовой области A, а также поверхности раздела, отделяющей транзитную струю от вальцовой области, следует иметь в виду все то, что говорилось в § 4-14.

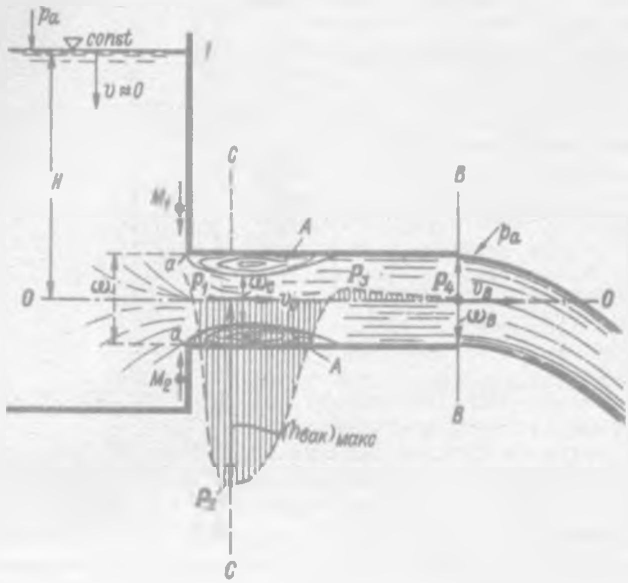


Рис. 10-15. Насадок Вентури

Вальцовая область, равно как и транзитная струя в пределах этой области, характеризуется наличием **вакуума**. Максимальный вакуум получается в сечении $C-C$, где струя имеет наибольшее сжатие и где скорости, а также кинетическая энергия жидкости, образующей транзитную струю, оказываются наибольшими.

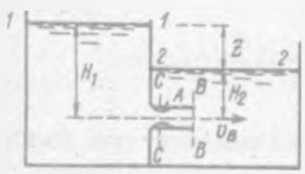


Рис. 10-16. Истечение из насадка Вентури под уровень

Известно, что с возрастанием кинетической энергии потенциальная энергия должна уменьшаться. Если в сечении $B-B$ имеем атмосферное давление, то, двигаясь от этого сечения против течения и попадая в область, где скорости благодаря сжатию струи оказываются большими, чем в сечении $B-B$, мы получим давление в этой области меньшее, чем в сечении $B-B$, т. е. меньше атмосферного давления.

Пьезометрическая линия $P_1P_2P_3P_4$ для насадка в соответствии со сказанным получает вид, изображенный на рис. 10-15.

2°. Расчетные зависимости для v_B и Q. Соединяя сечения $1-1$ и $B-B$ (рис. 10-15) или сечения $1-1$ и $2-2$ (рис. 10-16) уравнением Бернулли и рассуждая точно так же, как в § 10-1 и 10-4, получаем следующие расчетные формулы.

1. Случай истечения в атмосферу (рис. 10-15):

$$\boxed{v_B = \varphi \sqrt{2gH},} \tag{10-38}$$

где v_B – скорость в выходном сечении $B-B$; H – превышение свободной поверхности жидкости в сосуде над осью насадка; φ – коэффициент скорости:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + (\zeta_{\text{нас}})_a}}; \tag{10-39}$$

причем здесь $(\zeta_{\text{нас}})_a$ – коэффициент сопротивления в формуле

$$(h_l)_{1-B} = (\zeta_{\text{нас}})_a \frac{v_B^2}{2g}, \tag{10-40}$$

где $(h_l)_{1-B}$ – местная потеря напора в насадке.

Расход Q при истечении из насадка

$$\boxed{Q = \mu_{\text{н}}\omega \sqrt{2gH},} \tag{10-41}$$

где $\mu_{\text{н}}$ – коэффициент расхода насадка,

$$\mu_{\text{н}} = \varepsilon_B \varphi = \varphi, \tag{10-42}$$

так как для насадка [см. выше (10-37)] коэффициент сжатия, отнесенный к сечению $B-B$, где давление атмосферное,

$$\boxed{\varepsilon_B = \frac{\omega_B}{\omega} = 1{,}0.} \tag{10-43}$$

2. Случай истечения под уровень (рис. 10-16). Здесь вместо (10-38) и (10-41) получаем

$$v_B = \varphi \sqrt{2gZ}; \tag{10-44}$$

$$Q = \mu_{\text{н}}\omega \sqrt{2gZ}, \tag{10-45}$$

где Z – разность уровней жидкости; φ – коэффициент скорости, равный в данном случае (см. ниже п. 3°):

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{\text{нас}})_{\text{под ур}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{\text{нас}})_a + 1}}; \tag{10-46}$$

$\mu_{\text{н}}$ – коэффициент расхода насадка; $\mu_{\text{н}}$ имеет тот же смысл и то же численное значение, что и в предыдущем случае ($\mu_{\text{н}} = \varphi$).

3°. Численные значения коэффициентов ε, ζ, φ, $\mu_{\text{н}}$. Коэффициент сжатия ε_B для выходного сечения $B-B$ (рис. 10-15 и 10-16) равен единице, т. е. $\varepsilon_B = 1{,}0$ [см. формулы (10-37) и (10-43)].

Коэффициент сжатия ε_C для сечения $C-C$ (рис. 10-15 и 10-16), где имеется максимальный вакуум, равняется коэффициенту сжатия при истечении из отверстия в тонкой стенке (см. § 10-2):

$$\varepsilon_C = 0{,}63 \div 0{,}64. \tag{10-47}$$

Коэффициент сопротивления при истечении из насадка в атмосферу (рис. 10-15) равен коэффициенту сопротивления на вход в трубу [см. формулу (4-163)]

1. Случай истечения в атмосферу (рис. 10-15):

$$\boxed{v_B = \varphi\sqrt{2gH},} \tag{10-38}$$

где v_B – скорость в выходном сечении $B-B$; H – превышение свободной поверхности жидкости в сосуде над осью насадка; φ – коэффициент скорости:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+(\zeta_{\text{нас}})_a}}; \tag{10-39}$$

причем здесь $(\zeta_{\text{нас}})_a$ – коэффициент сопротивления в формуле

$$(h_j)_{1-B} = (\zeta_{\text{нас}})_a \frac{v_B^2}{2g}, \tag{10-40}$$

где $(h_j)_{1-B}$ – местная потеря напора в насадке.

Расход Q при истечении из насадка

$$\boxed{Q = \mu_{\text{н}}\omega\sqrt{2gH},} \tag{10-41}$$

где $\mu_{\text{н}}$ – коэффициент расхода насадка,

$$\mu_{\text{н}} = \varepsilon_B\varphi = \varphi, \tag{10-42}$$

так как для насадка [см. выше (10-37)] коэффициент сжатия, отнесенный к сечению $B-B$, где давление атмосферное,

$$\boxed{\varepsilon_B = \frac{\omega_B}{\omega} = 1{,}0.} \tag{10-43}$$

2. Случай истечения под уровень (рис. 10-16). Здесь вместо (10-38) и (10-41) получаем

$$v_B = \varphi\sqrt{2gZ}; \tag{10-44}$$

$$Q = \mu_{\text{н}}\omega\sqrt{2gZ}, \tag{10-45}$$

где Z – разность уровней жидкости; φ – коэффициент скорости, равный в данном случае (см. ниже п. 3°):

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{\text{нас}})_{\text{под ур}}}} = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{\text{нас}})_a + 1}}; \tag{10-46}$$

$\mu_{\text{н}}$ – коэффициент расхода насадка; $\mu_{\text{н}}$ имеет тот же смысл и то же численное значение, что и в предыдущем случае ($\mu_{\text{н}} = \varphi$).

3°. Численные значения коэффициентов ε, ζ, φ, $\mu_{\text{н}}$. Коэффициент сжатия ε_B для выходного сечения $B-B$ (рис. 10-15 и 10-16) равен единице, т. е. $\varepsilon_B = 1{,}0$ [см. формулы (10-37) и (10-43)].

Коэффициент сжатия ε_C для сечения $C-C$ (рис. 10-15 и 10-16), где имеется максимальный вакуум, равняется коэффициенту сжатия при истечении из отверстия в тонкой стенке (см. § 10-2):

$$\varepsilon_C = 0{,}63 \div 0{,}64. \tag{10-47}$$

Коэффициент сопротивления при истечении из насадка в атмосферу (рис. 10-15) равен коэффициенту сопротивления на вход в трубу [см. формулу (4-163)]

$$(\zeta_{нас})_a = \zeta_{вх} = 0,5; \qquad (10$$

при истечении под уровень (рис. 10-16):

$$(\zeta_{нас})_{под\ ур} = \zeta_{вх} + \zeta_{вых} = 0,5 + 1,0 = 1,5, \qquad (10$$

где $\zeta_{вых} = 1,0$ (см. § 4-15).

Коэффициент скорости φ и коэффициент расхода насадка $\mu_н$, как в слу истечения в атмосферу, так и в случае истечения под уровень, равны [формулы (10-39), (10-42), (10-46)]:

$$\varphi = \mu_н = \sqrt{\frac{1}{1 + (\zeta_{нас})_a}} = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{нас})_{под\ ур}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,5}} = \sqrt{\frac{1}{1,5}}$$

или

$$\boxed{\varphi = \mu_н = \sqrt{\frac{1}{1,5}} = 0,82.} \qquad (10\text{-}50)$$

Установим еще величину коэффициента сопротивления ζ_{C-B} (от сечения $C-C$ д сечения $B-B$); этот коэффициент нам понадобится в дальнейшем.

Коэффициент сопротивления ζ_{1-C} (от сечения $1-1$ до сечения $C-C$) равен $\zeta_{отв}$ в случае отверстия в тонкой стенке (если ζ_{1-C} будем относить к скорости v_C в сжатом сечении $C-C$). Относя ζ_{1-C} к скорости v_B, имеем

$$\zeta_{1-C} = \frac{\zeta_{отв}}{\varepsilon^2} = \frac{0,06}{0,63^2} \approx 0,15, \qquad (10\text{-}51)$$

а потому искомый коэффициент ζ_{C-B} оказывается

$$\zeta_{C-B} = (\zeta_{нас})_a - \zeta_{1-C} = 0,5 - 0,15 = 0,35. \qquad (10\text{-}52)$$

4°. Сопоставление истечения жидкости через отверстие в тонкой стенке с истечением через насадок Вентури. В случае насадка Вентури (при истечении в атмосферу)

$$Q_{нас} = 0,82\omega\sqrt{2gH}; \quad (v_B)_{нас} = 0,82\sqrt{2gH}. \qquad (10\text{-}53)$$

В случае отверстия в тонкой стенке (при истечении в атмосферу)

$$Q_{отв} = 0,62\omega\sqrt{2gH}; \quad (v_C)_{отв} = 0,97\sqrt{2gH}. \qquad (10\text{-}$$

Если величины H и ω для насадка и отверстия одинаковы, то в резул тате деления (10-53) на (10-54) получаем

$$\frac{Q_{нас}}{Q_{отв}} = \frac{0,82}{0,62} \approx 1,34; \qquad (10$$

$$\frac{(v_B)_{нас}}{(v_C)_{отв}} = \frac{0,82}{0,97} \approx 0,85. \qquad (10$$

Как видно, внешний цилиндрический насадок, присоединенный к отверсти сделанному в тонкой стенке, дает следующие эффекты: а) скорость истече жидкости в атмосферу уменьшается на 15%; б) расход жидкости, вытекающ из сосуда, увеличивается на 34%.

Такое положение объясняется следующим. В [illegible] как мы видели, снижение (согласно формуле Борда) скорости $(v_B)_{нас}$ в сечении $B-B$ примерно в $(^1/_{0,85})$ раза, т.е на 15% сравнительно со скоростью $(v_C)_{отв}$. Вместе с тем площадь выходного живого сечения $B-B$ в случае насадка (по сравнению с площадью сжатого сечения при истечении из отверстия в атмосферу) увеличивается в $(1/\varepsilon_C)$ раза, т.е. в $1:0{,}63 = 1{,}58$ раза. Так как расход $Q = v\omega$, то, следовательно, расход в случае насадка (по сравнению с расходом при истечении из отверстия в атмосферу) и должен увеличиться в $0{,}85 \cdot 1{,}58 = 1{,}34$ раза, т.е. на 34%.

Дополнительно надо иметь в виду еще следующее (рис. 10-15). Можно показать, что величина площади сжатого сечения ω_c зависит (при рассматриваемом турбулентном движении) только от очертания кромок a и вовсе не зависит от давления в области A. Поэтому ω_c в случае насадка и ω_c при истечении из отверстия в атмосферу должны быть одинаковы. Вместе с тем, соединяя сечение $1-1$ и сечение $C-C$ уравнением Бернулли (рис. 10-15), мы видим, что в этом случае получается как бы истечение жидкости не в атмосферу, а в с р е д у в а к у у м а (в среду пониженного давления), т.е. истечение п р и б о л ь ш е м н а п о р е (чем при истечении из отверстия). Такое положение, естественно, обусловливает увеличение скорости в сечении $C-C$ (по сравнению со скоростью в сечении $C-C$, когда мы имеем истечение из отверстия). Поскольку расход $Q = \omega v$, то легко видеть, что сохраняя площадь ω_C и увеличивая (в случае насадка) скорость в сечении $C-C$, мы и должны, применяя насадок, увеличить расход Q.

5°. Величина вакуума в сечении $C-C$. Рассмотрим два случая.

1. С л у ч а й и с т е ч е н и я в а т м о с ф е р у. Соединяя уравнением Бернулли сечения $C-C$ и $B-B$, получаем (при плоскости сравнения OO, показанной на рис. 10-15)

$$\frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + h_{j_{C-B}}, \tag{10-57}$$

где величины p_C и v_C относятся к сечению $C-C$,

$$h_{j_{C-B}} = \zeta_{C-B}\frac{v_B^2}{2g}; \tag{10-58}$$

$$v_C = \frac{v_B}{\varepsilon_C}. \tag{10-59}$$

Подставляя (10-58) и (10-59) в (10-57), получаем

$$\frac{v_B^2}{\varepsilon_C^2 2g} - \frac{v_B^2}{2g} - \zeta_{C-B}\frac{v_B^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_C}{\gamma} = (h_{\text{вак}})_{\text{макс}} \tag{10-60}$$

или

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = \left(\frac{1}{\varepsilon_C^2} - \zeta_{C-B} - 1\right)\frac{v_B^2}{2g}, \tag{10-61}$$

где $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ – вакуум в сечении $C-C$.

Подставляя в (10-61) выражение для v_B (10-38), имеем

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = kH, \tag{10-62}$$

где

$$k = \varphi^2\left(\frac{1}{\varepsilon_C^2} - \zeta_{C-B} - 1\right). \tag{10-63}$$

Если теперь в формулу (10-63) подставить численные значения коэффициентов φ, ε_C и ζ_{C-B}, указанные в п. 3°, то получаем

$$k = 0{,}82^2\left(\frac{1}{0{,}63^2} - 0{,}35 - 1\right) = 0{,}77. \tag{10-64}$$

Решая уравнение (10-57) [с учетом зависимостей (10-60)–(10-64)], получаем, что при истечении в атмосферу максимальный вакуум (возникающий в сечении

$C-C$) равен

$$\boxed{(h_{вак})_{макс}=(0{,}75\div 0{,}80)\,H.}\tag{10-65}$$

2. С л у ч а й и с т е ч е н и я п о д у р о в е н ь. Соединяя уравнением Бернулли сечения $C-C$ и $2-2$ (рис. 10–16) и рассуждая, как и выше, вместо (10-65) получаем

$$\boxed{(h_{вак})_{макс}=(0{,}75\div 0{,}80)\,Z-H_2,}\tag{10-66}$$

где Z и H_2 указаны на чертеже.

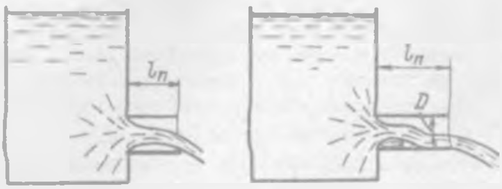


Рис. 10-17. Срыв вакуума в насадке Вентури (при малой длине патрубка)

При больших значениях H_2 величина $(h_{вак})_{макс}$ по формуле (10-66) может получиться отрицательной. Это будет указывать на то, что в данном случае вакуума в насадке не будет (будет иметь место положительное давление).

6°. Условия, при которых цилиндрический патрубок (цилиндрическая труба) работает как насадок Вентури. Не всякий патрубок присоединенный к отверстию, работает как насадок Вентури (с коэффициентом расхода $\mu_н=0{,}82$).

В некоторых случаях имеем картину, показанную на рис. 10-17. При таком истечении описанный выше эффект в отношении увеличения расхода получить нельзя. Для того, чтобы картина истечения была такой, как на рис. 10-15, т.е. *чтобы патрубок работал как насадок (увеличивая Q на 34 %), необходимо, чтобы одновременно были соблюдены следующие два условия.*

1-е у с л о в и е. Длина патрубка $l_п$ должна находиться в пределах

$$\boxed{(3{,}5\div 4{,}0)\,D\leqslant l_п\leqslant\ \sim(6\div 7)\,D,}\tag{10-67}$$

где D – диаметр патрубка.

Если $l_п<(3{,}5\div 4{,}0)\,D$, то получается картина, показанная на рис. 10-17: длина патрубка оказывается недостаточной, чтобы в ее пределах транзитная струя успела расшириться до полного сечения трубы.

Если же $l_п>(6\div 7)\,D$, то вместо насадка получаем «короткий трубопровод», когда потерями напора по длине уже нельзя пренебрегать.[1]

В случае, когда $l_п$ близка к $(3{,}0\div 3{,}5)\,D$, получаем неустойчивое истечение: если прикрыть выходное сечение патрубка на рис. 10-17, то при этом жидкость заполнит весь патрубок; после того, как мы его осторожно откроем, истечение будет иметь вид, показанный на рис. 10-15; однако при небольшом сотрясении патрубка вакуум, получившийся в нем, сорвется (рис. 10-17).

2-е у с л о в и е. Максимальный вакуум, вычисленный по формуле (10-65) или (10-66), должен удовлетворять условию:

а) при истечении в атмосферу (рис. 10-15)

$$(h_{вак})_{макс}\leqslant(h_{вак})_{доп};\tag{10-68}$$

[1] Погрешность в определении скорости v_B при пренебрежении потерями напора h_l здесь получается более 5 %.

б) при истечении под уровень (рис. 10-16)

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} \leqslant (h_{\text{вак}})_{\text{доп}} - H_2, \tag{10-69}$$

где $(h_{\text{вак}})_{\text{доп}}$ – допускаемый вакуум в сечении $C-C$ по условиям невозможности прорыва воздуха или воды нижнего бьефа (навстречу течению) в область водоворотной зоны A.

При несоблюдении условий (10-68) или (10-69) можем получить неустойчивое истечение. Обычно считают, что для воды [1]

$$(h_{\text{вак}})_{\text{доп}} \approx 8 \text{ м вод. ст.}$$

7°. Дополнительные замечания. Рассмотрим случай истечения в атмосферу (рис. 10-15). Согласно формуле (10-65) с возрастанием H величина $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ будет расти по линейному закону (см. прямую OA на рис. 10-18).

Однако, как было указано ранее (стр. 119; 229), вакуум в жидкости не может быть больше «предельного». Поэтому действительная зависимость

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = f(H)$$

будет выражаться на рис. 10-18 кривой OB.

Начиная от некоторого напора H', в районе сечения $C-C$ будут появляться кавитационные разрывы жидкости, причем объем их будет расти по мере возрастания H. При этом уравнение Бернулли для отыскания величины вакуума в сечении $C-C$ (см. п. 5°) уже не может быть использовано (участок прямой mA, построенный по уравнению Бернулли, не отвечает действительности).

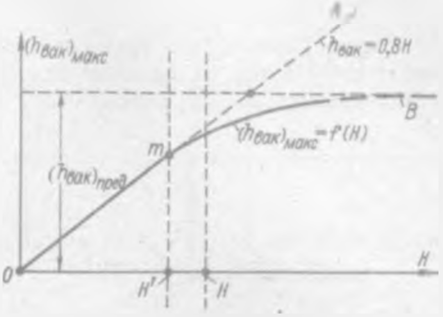


Рис. 10-18. Рост вакуума в насадке Вентури с увеличением напора H

Вместе с тем в этом случае уравнение Бернулли для сечения $B-B$ (рис. 10-15) практически будет приемлемо, поскольку кавитационные «пузырьки», не дойдя до сечения $B-B$, должны закрыться. Поэтому расход Q можно определять по (10-41) и при $H > H'$ (однако значение $\mu_{\text{н}}$ здесь может быть отличным от 0,82). Уравнение (10-41) потеряет силу только тогда, когда вакуум в сечении $C-C$ сделается настолько большим, что воздух начнет прорываться снаружи в водоворотную область навстречу течению жидкости в насадке.

В заключение обратим внимание на следующее:

1) при расчете больших отверстий надо считаться с тем, что величина вакуума в верхней части области A (рис. 10-15) может быть существенно больше, чем в нижней ее части;

2) иногда в практике водоворотную область A приходится аэрировать (см. стр. 227). При этом эффект насадка (в отношении увеличения расхода) может быть значительно снижен;

3) при выводе формулы (10-41) мы могли бы соединить уравнением Бернулли сечение $1-1$ не с сечением $B-B$, а с сечением $C-C$. При этом пришлось бы учитывать сжатие струи и оперировать величиной $\varepsilon_C = 0{,}63 \div 0{,}64$. Введение такого сжатия в формулу (10-42) уменьшило бы коэффициент расхода μ. Однако, пользуясь уменьшенным значением $\mu_{\text{н}}$, отнесенным к сечению $C-C$, мы должны были бы в формулах (10-38) и (10-41) увеличить значение напора H на величину $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$, поскольку можно считать, что напор по отношению к сечению $C-C$ равен $H + (h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$; при этом вместо формул (10-38) и (10-41) получили бы

---

[1] Вопрос о допускаемом вакууме [см., в частности, формулу (10-69)] в настоящее время исследован еще недостаточно. Надо полагать, что упомянутый прорыв воздуха или воды нижнего бьефа (навстречу течению) должен происходить при определенной разности давлений в сечениях $C-C$ и $B-B$ (например, для воды при разности, соответствующей 8 м вод. ст.).

$$v_C = \varphi_0 \sqrt{2g\left[H + (h_{вак})_{макс}\right]}; \quad Q = \mu_0 \omega \sqrt{2g\left[H + (h_{вак})_{макс}\right]}, \qquad (10\text{-}70)$$

где φ_0 и μ_0 – соответствующие коэффициенты для отверстия в тонкой стенке.

Так как $(h_{вак})_{макс}$ не может быть больше $(h_{вак})_{пред}$ (рис. 10-18), то, очевидно, наибольший расход, который можно получить для данного насадка при увеличении H до достаточно больших размеров, равняется:

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2g\left[H + (h_{вак})_{пред}\right]}, \qquad (10\text{-}71)$$

где μ_0 – коэффициент расхода отверстия в тонкой стенке.

§ 10-8. ВНУТРЕННИЙ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ НАСАДОК (НАСАДОК БОРДА)

Рассмотрим только истечение жидкости в атмосферу (рис. 10-19). Насадок Борда отличается от насадка Вентури только условиями входа. Считая, что длина насадка Борда должна быть не менее $(3{,}5 \div 4)\,D$, коэффициент сжатия ε_C получаем равным [см. § 4-17; (формулу 4-157)]:

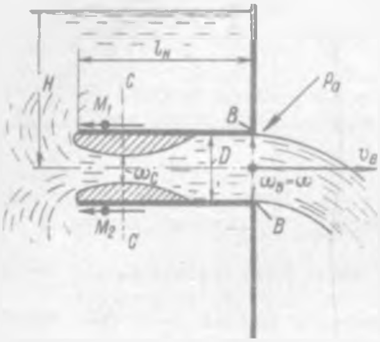


Рис. 10-19. Насадок Борда

$$\varepsilon_C = \frac{\omega_C}{\omega} = 0{,}5. \qquad (10\text{-}72)$$

Как видно, для насадка Борда сжатие в сечении $C-C$ получается бо́льшим, чем для насадка Вентури. В связи с этим обстоятельством потеря напора, а также скорость и вакуум в сечении $C-C$ для насадка Борда также получаются бо́льшими, чем для насадка Вентури (при равных прочих условиях).

Коэффициент сопротивления $\zeta_{нас}$ при $\varepsilon_C = 0{,}5$ оказывается равным [см. формулу (4-151)]:

$$\zeta_{нас} = 1{,}0. \qquad (10\text{-}73)$$

Остальные известные коэффициенты приобретают в случае насадка Борда следующие численные значения:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{1}{1+\zeta_{нас}}} = \sqrt{\frac{1}{1+1}} = 0{,}71; \\ \mu_н &= \varphi = 0{,}71; \ \varepsilon_B = 1{,}0. \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}74)$$

Расчетные формулы здесь остаются те же, что и для насадка Вентури.

Легко убедиться, что насадок Борда увеличивает расход жидкости, вытекающей из отверстия, но несколько меньше, чем насадок Вентури.

§ 10-9. НАСАДКИ ПРОЧИХ ТИПОВ

Будем иметь в виду только случай истечения в атмосферу.

1°. Насадок со скругленными входными кромками. Если входные кромки скруглены (рис. 10-20), то сжатие струи в насадке уменьшается и площадь сечения струи ω_C увеличивается. В результате степень расширения струи от сечения $C-C$ до сечения $B-B$ снижается, причем потери напора уменьшаются, а следовательно, скорость истечения v_B увеличивается.

Как показывают опыты, путем скругления кромок насадка коэффициент расхода можно довести до величины $\mu_н = 0{,}95$.

2°. Конические сходящийся и расходящийся насадки. Представим на рис. 10-21 два указанных насадка, причем будем считать, что площадь отверстия, к которому приключен сходящийся насадок ($\omega_{\rm I}$), равна площади отверстия, к которому приключен расходящийся насадок ($\omega_{\rm II}$), т. е.

$$\omega_{\rm I} = \omega_{\rm II}. \tag{10-75}$$

Сопоставляя в этом предположении сходящийся и расходящийся, а также внешний цилиндрический насадки, имеем

$$(h_f)_{\rm сх} < (h_f)_{\rm ц} < (h_f)_{\rm расх}, \tag{10-76}$$

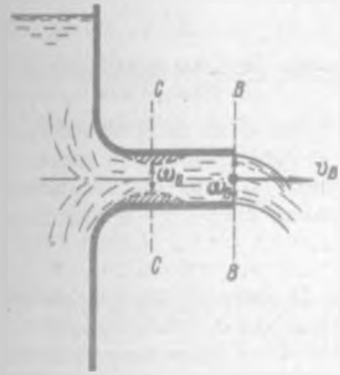


Рис. 10-20. Насадок со скругленной входной кромкой

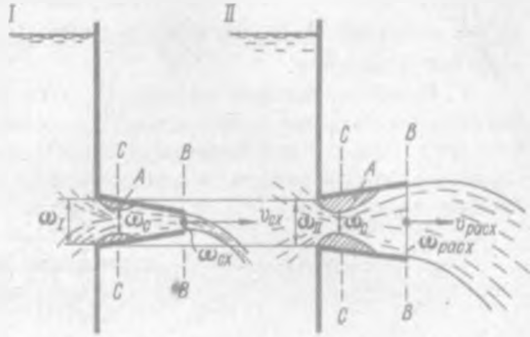


Рис. 10-21. Конические насадки

поскольку потеря напора определяется степенью расширения струи в насадке; как и ниже, индексы «$_{\rm сх}$», «$_{\rm ц}$», «$_{\rm расх}$» указывают на то, что рассматриваемая величина относится или к сходящемуся, или к цилиндрическому, или к расходящемуся насадку.

Учитывая (10-76), можем утверждать, что при одинаковых значениях напора H для всех рассматриваемых насадков (напор H см., например, на рис. 10-15) будем иметь соотношение

$$v_{\rm сх} > v_{\rm ц} > v_{\rm расх}. \tag{10-77}$$

Действительно, легко видеть, что для расходящегося насадка в связи с неравенством (10-76) возвышение напорной линии (построенной для насадка) над центром выходного сечения $в-в$ (равное, как известно, величине скоростного напора в сечении $в-в$) будет наименьшим, а следовательно, и скорость $v_{\rm расх}$ будет также наименьшей.

Поскольку скорость истечения жидкости из насадка выражается зависимостью типа (10-38), то ясно, что[1]

$$\varphi_{\rm сх} > \varphi_{\rm ц} > \varphi_{\rm расх}. \tag{10-78}$$

Рис. 10-22. Комбинированный насадок

[1] Что касается величин $\zeta_{\rm сх}$, $\zeta_{\rm ц}$ и $\zeta_{\rm расх}$, то, учитывая то обстоятельство, что величина φ выражается через ζ формулой типа (10-39), можем утверждать, сообразуясь дополнительно с соотношением (10-78), что $\zeta_{\rm сх} < \zeta_{\rm ц} < \zeta_{\rm расх}$.

Отсюда видно, что при желании получить возможно большие скорости истечения из насадка следует устраивать сходящийся насадок.

Наряду с соотношением (10-77) можно написать

$$\omega_{сх} < \omega_{ц} < \omega_{расх} \tag{10-79}$$

($\omega_{сх}$ и $\omega_{расх}$ указаны на чертеже).

Расход жидкости

$$Q = v\omega,$$

причем для скоростей v имеем неравенство (10-77), а для площадей живых сечений ω – неравенство (10-79).

Дополнительные исследования показывают, что [1]

$$Q_{сх} < Q_{ц} < Q_{расх}; \tag{10-80}$$

поэтому, чтобы получить возможно больший расход, следует применять расходящийся насадок.

3°. Комбинированный насадок. С точки зрения увеличения расхода особенно выгодна комбинация коноидального насадка *а–б* с расширяющимся насадком *б–в* (рис. 10-22). Здесь благодаря скруглению входных кромок мы добиваемся снижения потерь напора, а следовательно, увеличения скоростей в выходном сечении *в–в*.

В. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

§ 10-10. ИСТЕЧЕНИЕ В АТМОСФЕРУ ИЛИ ПОД ПОСТОЯННЫЙ УРОВЕНЬ ЖИДКОСТИ

Представим на рис. 10-23 сосуд, наполненный жидкостью до уровня *1–1*. Введем обозначения:

Ω – площадь горизонтального сечения сосуда; в общем случае, когда сосуд нецилиндрический,

$$\Omega = f_1(H); \tag{10-81}$$

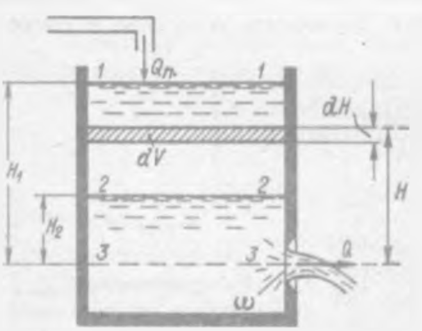


Рис. 10-23. Истечение жидкости в атмосферу при переменном напоре

Q – расход жидкости, вытекающей через отверстие (или насадок),

$$Q = \mu_0\omega\sqrt{2gH} = f_2(H); \tag{10-82}$$

$Q_п$ – расход жидкости, поступающей в сосуд; вообще расход $Q_п$ может изменяться с течением времени t:

$$Q_п = f(t), \tag{10-83}$$

однако здесь ограничимся рассмотрением только частного случая, когда $Q_п = \text{const}$.

Если $Q_п > Q$, то сосуд будет напол-

---

[1] Пренебрегая потерями напора, для схем на рис. 10-21 получаем согласно уравнению Бернулли: $(h_{вак})_{макс} = \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1\right]H.$

Как видно, в случае расходящегося насадка вакуум в сечении оказывается большим, чем в случае сходящегося насадка. Учтя теперь формулы (10-70), можем утверждать справедливость неравенства (10-80).

няться и уровень жидкости в нем должен подниматься до тех пор, пока не получим равенство $Q_п = Q$.

Если $Q_п < Q$, то уровень жидкости в сосуде будет опускаться, пока не получим такое H, при котором $Q_п = Q$.

Рассмотрим случай, когда $Q_п < Q$, и найдем время t, в течение которого горизонт жидкости $1-1$ опустится до положения $2-2$. При решении этой задачи рассуждаем следующим образом. За бесконечно малый отрезок времени dt из сосуда вытекает объем жидкости

$$Q\,dt = \mu_о\omega\sqrt{2gH}\,dt. \tag{10-84}$$

За этот же отрезок времени dt в сосуд поступает объем жидкости

$$Q_п\,dt. \tag{10-85}$$

Изменение объема жидкости в сосуде (dV) можно представить двумя разными зависимостями:

с одной стороны,

$$dV = Q_п\,dt - \mu_о\omega\sqrt{2gH}\,dt, \tag{10-86}$$

с другой же стороны,

$$dV = \Omega\,dH, \tag{10-87}$$

где объем $\Omega\,dH$ показан на чертеже штриховкой.[1]

Приравнивая правые части зависимостей (10-86) и (10-87), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$Q_п\,dt - \mu_о\omega\sqrt{2gH}\,dt = \Omega\,dH. \tag{10-88}$$

Разделив переменные, вместо (10-88) имеем

$$dt = \frac{\Omega}{Q_п - \mu_о\omega\sqrt{2gH}}\,dH. \tag{10-89}$$

Наконец, интегрируя (10-89) в пределах от H_1 до H_2, получаем искомое время:

$$t = \int\limits_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega}{Q_п - \mu_о\omega\sqrt{2gH}}\,dH = \int\limits_{H_2}^{H_1} \frac{\Omega}{\mu_о\omega\sqrt{2gH} - Q_п}\,dH. \tag{10-90}$$

Рис. 10-24. Истечение жидкости под уровень при переменном напоре

В общем случае, когда $\Omega \neq \mathrm{const}$ (сосуд нецилиндрический), величина t по формуле (10-90) может быть вычислена методом конечных разностей.

В частном случае, когда $Q_п = 0$ и $\Omega = \mathrm{const}$ (сосуд цилиндрический), зависимость (10-90) упрощается и получает вид:[2]

$$t = \frac{\Omega}{\mu_о\omega\sqrt{2g}} \int\limits_{H_2}^{H_1} \frac{dH}{\sqrt{H}} = 2\frac{\Omega}{\mu_о\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right). \tag{10-91}$$

---

[1] При опорожнении сосуда, которое мы здесь рассматриваем, величина dH отрицательна; величина (10-86) также имеет отрицательное значение.

[2] Вынося $\mu_о$ за интеграл, имеем в виду, что $\mu_о$ не зависит от H (что для случая истечения воды, когда получаем большие числа Рейнольдса, и имеет место).

Время $t_о$ полного опорожнения сосуда до уровня $3-3$ (при $Q_п = 0$ и $\Omega = \text{const}$) получится, если в (10-91) подставим $H_2 = 0$:

$$t_о = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu_о\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu_о\omega\sqrt{2gH_1}} = 2\,\frac{\Omega H_1}{Q_1} = 2t', \tag{10-92}$$

где Q_1 – расход жидкости при H_1; t' – время полного опорожнения сосуда, если предположить, что из сосуда в течение всего периода опорожнения вытекает постоянный расход жидкости, равный Q_1 (а не переменный расход Q, изменяющийся от Q_1 до нуля, что имеет место в действительности).

При рассмотрении истечения жидкости не в атмосферу, как это было в случае, описанном выше, а под уровень (рис. 10-24) расчетные формулы получаются те же, что и выше; однако в этих формулах под величиной H следует понимать не заглубление центра отверстия под уровнем жидкости в левом сосуде, а разность Z уровней жидкости в сосудах.

§ 10-11. ИСТЕЧЕНИЕ ПОД ПЕРЕМЕННЫЙ УРОВЕНЬ ПРИ ПОСТОЯННОМ УРОВНЕ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассматривая не опорожнение сосуда, а наполнение сосуда, в который жидкость поступает из другого сосуда (рис. 10-25), расчетную формулу в результате аналогичных рассуждений (см. § 10-10) получаем того же вида, что и выше:

$$t = \frac{2\Omega}{\mu_о\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2}\right), \tag{10-93}$$

где Ω – площадь горизонтального сечения наполняемого сосуда ($\Omega = \text{const}$); величины Z_1 и Z_2 показаны на чертеже.

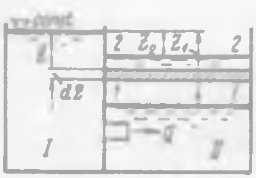


Рис. 10-25. Истечение жидкости под переменный уровень

В заключение приведем отдельные замечания.

1. В практике встречаются случаи, когда при истечении жидкости из отверстия оба уровня жидкости (и верховой, и низовой) оказываются переменными. Такого рода задачи решаются аналогично задачам, поясненным выше; однако окончательные расчетные формулы здесь более сложны.

2. С расчетами, поясненными выше, приходится сталкиваться, например, при подсчете времени наполнения и опорожнения камер судоходных шлюзов, а также водохранилищ. В случае водохранилищ $\Omega \neq \text{const}$, в связи с чем задача расчета несколько усложняется.

3. При наполнении и опорожнении различных водоемов (водохранилищ, шлюзовых камер и т. п.) имеет место *неустановившееся движение* воды. Вместе с тем при описанных выше расчетах мы пользовались обычным уравнением Бернулли, не учитывающим локальные силы инерции [как известно, формула (10-82) получается из этого уравнения]. Такое допущение часто бывает вполне приемлемым, так как рассматриваемый случай неустановившегося движения обычно характеризуется пренебрежимо малой величиной локальных сил инерции (в связи с тем, что движение жидкости здесь является *медленно изменяющимся*). Впрочем, в некоторых случаях при расчетах наполнения камер судоходных шлюзов приходится учитывать локальные силы инерции воды.

Г. СВОБОДНЫЕ СТРУИ

§ 10-12. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СВОБОДНЫХ СТРУЯХ

Свободной струей жидкости называется поток, не ограниченный твердыми стенками. Различают затопленные и незатопленные свободные струи.

Затопленной свободной струей жидкости называется струя, окруженная жидкостью. Примером затопленной струи может являться водяная струя, выпускаемая в воду, например для взмучивания отложившихся наносов и т. п.

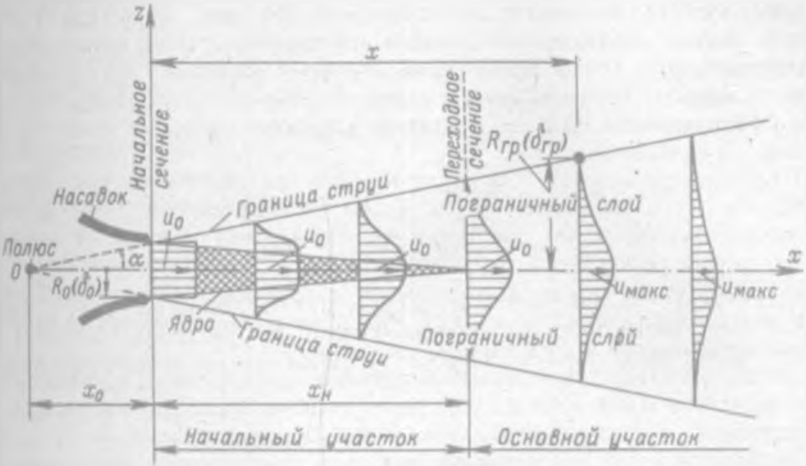


Рис. 10-26. Схема затопленной свободной турбулентной струи

Незатопленной свободной струей жидкости называется струя, окруженная газом, в частности воздушной средой. К незатопленным свободным струям относятся водяные струи, выпускаемые в воздушное пространство: пожарные, фонтанные струи, получаемые при помощи дождевальных аппаратов и гидромониторов, и т. п.

Свободные струи могут быть ламинарными и турбулентными. В практике чаще приходится иметь дело с турбулентными струями (затопленными и незатопленными). Ниже, не излагая имеющейся теории свободных турбулентных струй, приведем только некоторые общие сведения из этой области, а также поясним наиболее важные расчетные зависимости, относящиеся к затопленным турбулентным струям.

1°. Затопленная свободная турбулентная струя. Струя, попадая в массу окружающей ее жидкости, постепенно расширяется и в конечном счете рассеивается в жидкости (рис. 10-26). Рассматривая такую струю, мы должны различать ее границу, т. е. поверхность раздела, отделяющую саму струю от окружающей ее жидкости.

В отношении этой поверхности раздела и тех явлений, которые происходят в районе, окружающем ее, следует иметь в виду все то, что говорилось ранее в § 4-7 и 4-14. В связи с наличием поперечных по отношению к поверхности раздела пульсационных скоростей будет происходить постоянный обмен частицами жидкости между струей и окружающей ее средой. Сама среда, окружающая струю, должна рассматриваться как водоворотная (вальцовая, циркуляционная) область (см. § 4-14) с постепенно затухающими — по мере удаления от струи – отдельными водоворотами. Такую водоворотную зону, разумеется, можно себе представить (используя модель Рейнольдса-Буссинеска) соответствующими линиями тока, относящимися к осредненному потоку. Напомним, что осредненное движение жидкости в водоворотных областях, как было указано, обусловливается поперечной диффузией механической энергии.

Опишем[1] структуру затопленной свободной струи (рис. 10-26). Начало струи совпадает с выходным сечением трубы или насадка. Это выходное сечение называют здесь начальным сечением струи. На протяжении от начального сечения до так называемого переходного сечения имеется ядро струи, или ядро постоянных скоростей (где скорости по длине потока считаются постоянными). Во всех точках этой области скорости можно считать одинаковыми (равными u_0). Как показывает опыт, ядро ограничено с боков практически прямыми линиями. Эти прямые линии отделяют ядро от окружающего его так называемого турбулентного струйного пограничного слоя, в пределах которого скорости изменяются, как показано на рис. 10-26.

В переходном сечении, где заканчивается «размыв» ядра постоянных скоростей, обе части струйного пограничного слоя сливаются. Если до переходного сечения скорость по оси струи постоянна, то, начиная от переходного сечения, эта скорость вдоль оси потока падает.

Участок струи между выходным и переходным сечениями называется начальным участком струи. Остальная часть струи (за переходным сечением) называется основным участком.

Считают, что внешние границы струйного турбулентного пограничного слоя очерчены прямыми линиями, проходящими через кромки насадка. Точка O пересечения этих прямых называется полюсом струи.

Соответствующие исследования показали, что размеры эпюр осредненных скоростей, построенных для плоских живых сечений струи, связаны между собой относительно простыми зависимостями. Эти же исследования привели также к выводу, что в случае равномерной эпюры скоростей в выходном сечении гидродинамическое давление в струе практически равно давлению в окружающей среде.

Практический интерес представляют следующие величины, определяющие изучаемую струю: расстояние x_0, дающее положение полюса струи; длина $x_н$ начального участка; угол α, равный половине угла расхождения прямолинейных лучей, ограничивающих струю; радиус $R_{гр}$ или полувысота $\delta_{гр}$ струи на заданном расстоянии x от выходной кромки отверстия и, наконец, скорость на оси основного участка струи $u_{макс}$.

Все эти величины для круглых и плоских струй могут быть найдены по формулам, полученным Г. Н. Абрамовичем (см. табл. 10-1, в которой через R_0 обозначен радиус насадка, через δ_0 – полувысота прямоугольного отверстия, из которого выходит струя; через u_0 – скорость истечения из отверстия, определяемая по данным, приведенным выше). В эти формулы входит только один экспериментальный коэффициент a, называемый коэффициентом структуры; он учитывает структуру потока в выходном сечении.

2°. Незатопленные свободные турбулентные струи. Ограничимся рассмотрением водяной струи круглого поперечного сечения в воздушном пространстве.

Соответствующие исследования показывают, что в общем случае струя может быть разбита на три характерные части: компактную, частично раздробленную и распыленную (рис. 10-27).

---

[1] Ниже приводим описание только упрощенной схемы этой струи (которой часто руководствуются в практике).

Таблица 10-1

Формулы для определения параметров свободной струи

Параметр свободной струи	Круглая струя	Плоская струя
Расстояние от начального сечения до полюса струи	$x_0 = \frac{0{,}29}{a} R_0$	$x_0 = \frac{0{,}41}{a} \delta_0$
Длина начального участка	$x_н = \frac{0{,}67}{a} R_0$	$x_н = \frac{1{,}03}{a} \delta_0$
Тангенс угла, равного половине угла расширения струи	$\operatorname{tg} \alpha = 3{,}4a$	$\operatorname{tg} \alpha = 2{,}4a$
Половина высоты струи на расстоянии x от начального сечения	$R_{тр} = \left(3{,}4 \frac{ax}{R_0} + 1\right) R_0$	$\delta_{тр} = \left(2{,}4 \frac{ax}{\delta_0} + 1\right) \delta_0$
Скорость на оси основного участка струи	$u_{макс} = \dfrac{0{,}96}{\frac{ax}{R_0} + 0{,}29} u_0$	$u_{макс} = \dfrac{1{,}2}{\sqrt{\frac{ax}{\delta_0} + 0{,}41}} u_0$
Коэффициент структуры	$a \approx 0{,}08$	$a \approx 0{,}09 \div 0{,}12$

В пределах компактной части еще сохраняется цилиндрическая форма струи, причем сплошность движения жидкости оказывается не нарушенной.

В пределах частично раздробленной части струи сплошность потока нарушается, причем струя постепенно расширяется.

Рис. 10-27. Схема незатопленной свободной струи
T – труба

Наконец, в пределах распыленной части струи происходит окончательный распад потока на отдельные капли.

Разрушение компактной струи на протяжении второго и третьего ее участков объясняется аэрацией струи. Аэрация же обусловливается турбулентным обменом через границу струи между воздушной и водной средами.

В практике предъявляют различные требования к струям разного назначения.

Например, пожарная струя должна иметь большие радиусы действ... ударную силу. Струя, применяемая для размыва грунта (гидромонитор... струя), должна иметь сильно развитую компактную часть. Наоборот, ст... дождевых аппаратов (применяемых для орошения земель) иногда должны им... достаточно развитую распыленную часть. Распыление струи достига... устройством специальных насадков (распылителей). С целью получения на... более развитой компактной части применяют также особые насадки.

В специальных курсах подробно изучается вопрос об указанных стру... В курсах водоснабжения даются специальные формулы, позволяющие най... «дальность полета» вертикальных и наклонных пожарных струй; в кур... гидромеханизации приводятся эмпирические зависимости для длины компа... ной части струи; наконец, в курсах инженерной мелиорации подробно из... чается вопрос о проектировании дождевальных струй.

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО РАСЧЕТУ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

Задачи

№ 1. На рис. 10-28 представлена бетонная плотина, в теле которой имеется кругл... водоспускная труба. Истечение из этой трубы происходит в атмосферу.

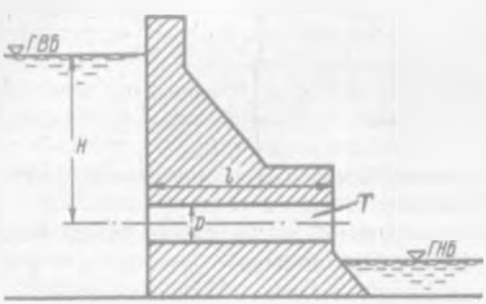


Рис. 10-28. К задаче № 1

Дано (обозначения см. на чертеже): $H = 9{,}0$ м; $D = 2{,}0$ м; $l = 10{,}0$ м.

Требуется найти расход Q.

Решение. С тем, чтобы выяснить, будет ли рассматриваемая труба работать как насадок Вентури, воспользуемся соот... ношениями (10-67) и (10-68):

$$3{,}5D = 3{,}5 \cdot 2{,}0 = 7{,}0 \text{ м};$$

$$6D = 6 \cdot 2{,}0 = 12{,}0 \text{ м};$$

как видно,

$$3{,}5D < l < 6D;$$

таким образом, 1-е условие (10-67), *необходимое для того, чтобы труба работала как насадок Вентури, соблюдается.*

Согласно (10-65) наибольший вакуум в трубе

$$(h_{вак})_{макс} = 0{,}80H = 0{,}80 \cdot 9{,}0 = 7{,}2 \text{ м}.$$

Этот вакуум оказывается меньше допустимого:

$$7{,}2 \text{ м} < 8{,}0 \text{ м},$$

т. е. 2-е условие (10-68), необходимое, чтобы наша труба работала как насадок Вентури, также соблюдается. Имея в виду это обстоятельство, рассчитываем заданную трубу по формуле (10-41), относящейся к насадку Вентури:

$$Q = \mu_н \omega \sqrt{2gH},$$

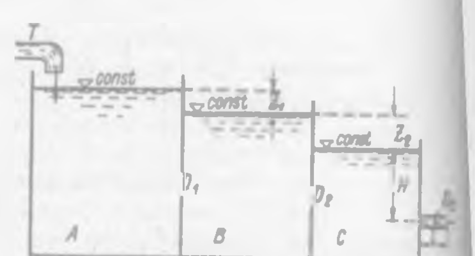


Рис. 10-29. К задаче № 2

причем коэффициент расхода $\mu_н$ в этой формуле принимаем, согласно зависимости (10-50)

$$\mu_н = 0{,}82.$$

Подставляя в приведенную формулу заданные величины, получаем:

$$Q = 0{,}82\,\frac{3{,}14\cdot 2{,}0^2}{4}\sqrt{2\cdot 9{,}80\cdot 9{,}0} = 34{,}2\ \text{м}^3/\text{с}.$$

№ 2. Вода по трубе T подается в резервуар A (рис. 10-29), откуда из сделанного в стенке отверстия диаметром D_1 перетекает в резервуар B. Далее через отверстие диаметром D_2 вода попадает в резервуар C и, наконец, вытекает в атмосферу через короткую трубу диаметром D_3 и длиной l.

Дано: $H = 1{,}0$ м; $D_1 = 30$ мм; $D_2 = 15$ мм; $D_3 = 20$ мм; $l = 9{,}0$ см.

Требуется найти: расход Q и перепады уровней Z_1 и Z_2.

Ответ: $Q = 1140$ см^3/с; $Z_1 = 34{,}5$ см; $Z_2 = 55{,}2$ см.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

10-1. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. – М.: Физматгиз, 1960.

10-2. **Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И.** Гидравлика. – М.: Госэнергоиздат, 1964.

10-3. **Качановский Б. Д.** Гидравлика судоходных шлюзов. – М. – Л.: Речиздат, 1951.

10-4. **Позднеев М. В.** Противопожарное водоснабжение. – Л. – М.: Изд. Наркомхоза РСФСР. 1940.

10-5. **Тер-Степанов Г. А.** Гидромониторные работы. – М.: Стройвоенмориздат, 1948.

10-6. **Френкель Н. З.** Гидравлика. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1956.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ВОДОСЛИВЫ

§ 11-1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ВОДОСЛИВОВ

Представим на рис. 11-1, например, некоторый канал, прегражденный поперек стенкой. Вода, скопившись перед такой стенкой, переливается через нее или через порог выреза, сделанного в этой стенке.

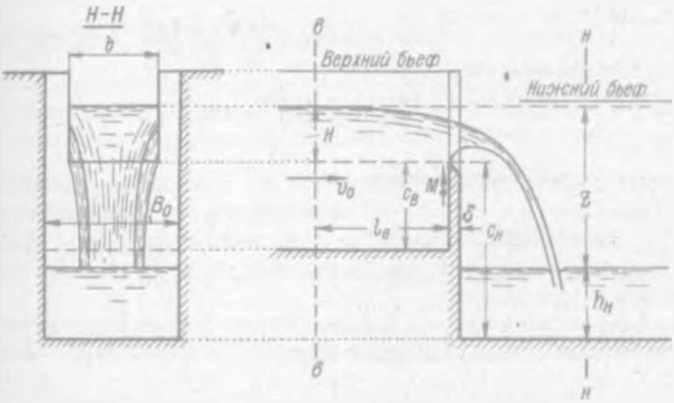


Рис. 11-1. Истечение через водослив с тонкой стенкой (неподтопленный водослив)

Водосливом называется безнапорное отверстие (*водосливное отверстие*) – вырез, сделанный в гребне стенки, через который протекает вода. Часть стенки в пределах водосливного отверстия, через которую переливается вода, называется *водосливной стенкой.*

В дальнейшем будем пользоваться следующими дополнительными терминами и обозначениями.

1. Область потока перед водосливной стенкой будем называть верхним бьефом (ВБ); область потока за водосливной стенкой – нижним бьефом (НБ).

2. Наметим на расстоянии l_B от верховой грани водосливной стенки сечение *в – в*, в котором начинается заметный спад свободной поверхности, обусловленный наличием водослива. Как показывают опыты, длина

$$l_B = (3 \div 5)\,H, \tag{11-1}$$

где величина H (см. чертеж), измеряемая в сечении *в–в*, называется *геометрическим напором на водосливе.*

Надо твердо запомнить, что *геометрический напор H на водосливе представляет собой превышение над гребнем водосливной стенки горизонта воды в сечении в – в, где еще нет заметного спада свободной поверхности, обусловленного истечением воды через водослив.*

3. Введем еще такие обозначения:

b – *ширина водослива*, или иначе, ширина водосливного отверстия;

δ – толщина водосливной стенки;

c_B и c_H – высоты водосливной стенки соответственно в верхнем и нижнем бьефах; в случае $c_B = c_H$ эту высоту обозначаем через c;

B_0 – ширина русла, в котором устроен водослив;

Z – геометрический перепад на водосливе (разность горизонтов воды в верхнем и нижнем бьефах);

v_0 – *скорость подхода*, т. е. средняя скорость, измеряемая в указанном выше сечении *в – в*;

H_0 – так называемый *полный напор на водосливе*, или, иначе, напор с учетом скорости подхода:

$$H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}; \tag{11-2}$$

Z_0 – так называемый *полный перепад на водосливе*, или, иначе, перепад на водосливе с учетом скорости подхода:

$$Z_0 = Z + \frac{\alpha v_0^2}{2g}. \tag{11-3}$$

Водосливы принято классифицировать по следующим признакам.

Классификация № 1 – в зависимости от геометрической формы водосливного отверстия. Здесь различают водосливы (рис. 11-2): *а*) прямоугольные; *б*) треугольные; *в*) трапецеидальные; *г*) круговые; *д*) параболические; *е*) с наклонным гребнем.

Классификация № 2 – в зависимости от формы и размеров поперечного сечения водосливной стенки. Эта классификация является наиболее важной. Здесь различают:

а) *водосливы с тонкой стенкой* (рис. 11-1); в случае этих водосливов струя воды, переливающейся через водосливную стенку, формируется под действием только верховой ее грани; остальные поверхности водосливной стенки не влияют на картину истечения; при наличии вертикальной стенки (рис. 11-1) водослив с тонкой стенкой имеет место, когда

$$\delta \leqslant (0{,}1 \div 0{,}5)\,H; \tag{11-4}$$

б) *водосливы с широким порогом*, имеющие водосливную стенку любой высоты, гребень которой обычно (в случае прямоугольного отверстия) представляет собой горизонтальную плоскость (рис. 11-3); в общем случае этот гребень является цилиндрической поверхностью с горизонтальной образующей в виде прямой линии, направленной вдоль течения; толщина (ширина) δ в случае водосливов с широким порогом должна удовлетворять двум условиям:

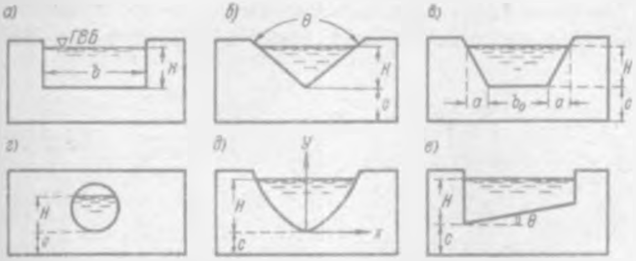


Рис. 11-2. Различные формы водосливного отверстия

1) на расстоянии δ потеря напора по длине h_l должна быть пренебрежимо мала;[1]

2) в пределах расстояния δ должен быть хотя бы небольшой участок потока, характеризуемый наличием плавно изменяющегося движения.

В случае прямоугольных водосливов с широким порогом толщина δ стенки, удовлетворяющая указанным условиям, лежит в пределах

$$2H \leqslant \delta \leqslant 8H; \qquad (11\text{-}5)$$

при $\delta > 8H$ уже получается не водослив, а канал с горизонтальным дном, при расчете которого необходимо, помимо местных потерь, учитывать еще и потери напора по длине; при $\delta < 2H$ на длине δ мы не получаем плавно изменяющегося движения;

Рис. 11-3. Водослив с широким порогом

в) *водосливы со стенкой практического профиля*; к таким водосливам относится любой водослив, отличный от водослива с тонкой стенкой и водослива с широким порогом (см., например, рис. 11-4).

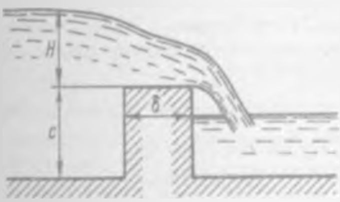


Рис. 11-4. Водослив со стенкой практического профиля

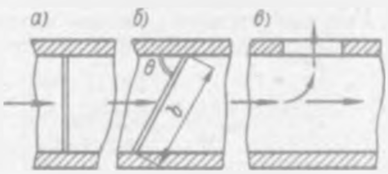


Рис. 11-5. Водосливы с прямолинейным гребнем (в плане)

Классификация № 3 – в зависимости от очертания гребня водосливной стенки в плане. Здесь различают:

[1] Как и в случае насадков (см. § 10-6).

$$
\left.\begin{aligned}
&1)\ Q = \omega v;\\
&2)\ \omega :: bH;\\
&3)\ v :: \sqrt{2gH}\ \text{(см. гл. 10)};\\
&4)\ Q :: (bH)(\sqrt{2gH});\\
&5)\ Q = mbH\sqrt{2gH},
\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}6)
$$

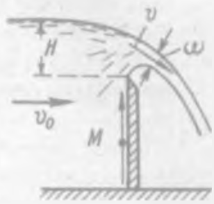


Рис. 11-8. К «водосливной» формулы (11-8)

где m – коэффициент пропорциональности.

Формулу (11-6) можно переписать в виде:

$$Q = mb\sqrt{2g}\,H^{3/2} \qquad (11\text{-}7)$$

или, наконец, в виде:

$$\boxed{Q = mb\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}.} \qquad (11\text{-}8)$$

Как видно, заменяя в (11-7) геометрический напор H полным напором H_0, мы тем самым учитываем влияние скорости подхода v_0 на величину расхода Q.

Безразмерный коэффициент m в формуле (11-8) называется **коэффициентом расхода водослива**.[1]

А. ПРЯМЫЕ (ЛОБОВЫЕ) ВОДОСЛИВЫ С ТОНКОЙ СТЕНКОЙ

§ 11-3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КЛАССИФИКАЦИИ ВОДОСЛИВОВ С ТОНКОЙ СТЕНКОЙ

В данном случае приходится различать еще следующие классификации водосливов (дополнительно к приведенным в § 11-1).

Классификация № 6 – в зависимости от наклона водосливной стенки:

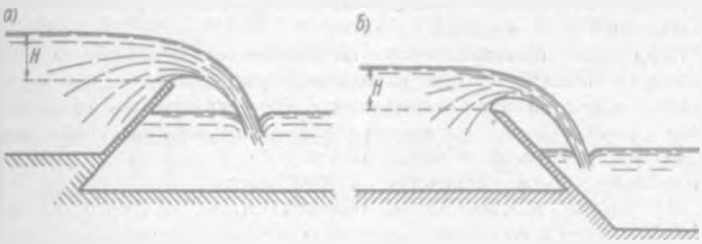


Рис. 11-9. Водосливы с наклонной тонкой стенкой

а) водосливы с вертикальной стенкой (рис. 11-8);

б) водосливы с наклонной стенкой (по течению или против течения; рис. 11-9, *а*, *б*).

Классификация № 7 – в зависимости от степени свободы доступа воздуха (или воды нижнего бьефа) под струю жидкости, переливающейся через водосливную стенку;

а) водосливы **со свободным** истечением, когда в пространство под струю с боков обеспечен свободный доступ воздуха (или воды нижнего бьефа в случае, если уровень воды нижнего бьефа стоит выше гребня водослива),

[1] Коэффициент m не следует смешивать с коэффициентом расхода μ, относящимся к случаю истечения через трубы ($\mu_т$), отверстия (μ_0) и насадки ($\mu_н$).

причем под струей имеем атмосферное давление (или давление, отвечающ[ее] горизонту воды нижнего бьефа);

б) водослив с **несвободным** истечением, когда в подструйное прос[т]ранство доступ воздуха (или воды нижнего бьефа) затруднен.

§ 11-4. СВОБОДНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ НЕПОДТОПЛЕННЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОДОСЛИВ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТОНКОЙ СТЕНКОЙ

Неподтопленный прямоугольный водослив с вертикальной стенкой пр[и] наличии свободного истечения и при отсутствии бокового сжатия называетс[я] **нормальным** водосливом. Картина истечения жидкости в случае нормаль[]ного водослива показана на рис. 11-8. [1]

Величину расхода Q в случае нормального водослива обычно определяют по формуле (см. § 11-2):

$$\boxed{Q = m_{0н} b \sqrt{2g}\, H^{3/2},} \tag{11-9}$$

где H – геометрический (а не полный) напор на водосливе; здесь скорость подхода v_0 учитывается коэффициентом расхода $m_{0н}$, а не путем замены величины H величиной H_0.

Существует несколько различных эмпирических формул для определения коэффициента расхода $m_{0н}$ нормального водослива (Базена, Ребока, швейцарских инженеров и т. д.). Наиболее рациональной является формула, предложенная Р. Р. Чугаевым для технических условий и норм [11-7; 11-13]

$$m_{0н} = 0{,}40 + 0{,}05\,\frac{H}{c_в}; \tag{11-10}$$

ее можно применять, когда $c_в \geqslant 0{,}5H$ и $H \geqslant 0{,}1$ м.

Точность расчетных формул, относящихся к нормальному водосливу, является относительно высокой. Отчасти благодаря этому нормальные водосливы применяются в качестве **измерительных** водосливов на каналах. Измерив в натуре величину H на водосливе, специально устроенном в канале, легко по формулам (11-9) и (11-10) найти расход воды в нем.

В случае неподтопленного водослива с **боковым сжатием** в формулу (11-9) вместо коэффициента $m_{0н}$ следует ввести коэффициент m_0', определяемый по формуле

$$m_0' = A_1 A_2, \tag{11-11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0{,}40 - 0{,}03\,\frac{B_0 - b}{B_0}; \\ A_2 &= 1 + 0{,}55\left(\frac{b}{B_0}\,\frac{H}{H + c_в}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{11-12}$$

---

[1] При рассмотрении рис. 11-8 следует обратить внимание на траекторию жидкой частицы M, движущейся непосредственно у верховой грани водосливной стенки. Как видно, траектория этой частицы, ограничивающая струю снизу, поднимается выше гребня водослива.

§ 11-5. СВОБОДНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПОДТОПЛЕННЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОДОСЛИВ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТОНКОЙ СТЕНКОЙ

Картина истечения в этом случае имеет вид, показанный на рис. 11-10.

При свободном истечении подтопленный водослив с тонкой стенкой получается, если одновременно оказываются соблюденными следующие два условия:

1) *горизонт воды нижнего бьефа располагается выше гребня водослива:*

$$\boxed{h_п > 0,} \tag{11-13}$$

где $h_п$ – высота подтопления водослива, т. е. превышение горизонта воды нижнего бьефа над гребнем водослива;

2) *в нижнем бьефе имеет место спокойный режим движения воды.*

При несоблюдении второго условия, т. е. при наличии в нижнем бьефе бурного режима непосредственно за водосливной стенкой, в нижнем бьефе появляется отогнанный гидравлический прыжок (рис 11-11) и водослив оказывается неподтопленным даже при соблюдении условия (11-13).

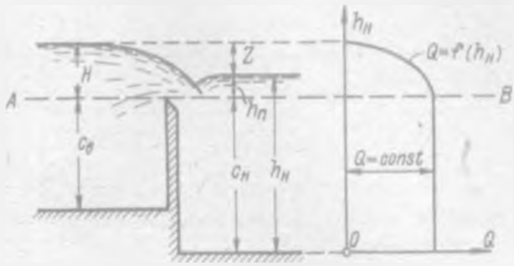


Рис. 11-10. Подтопленный водослив с тонкой стенкой

Наличие в нижнем бьефе спокойного или бурного режима устанавливается в результате расчета сопряжения бьефов (см. гл 12) В частном случае, когда русло нижнего бьефа прямоугольное, причем $b = B_0$, считают, что спокойный

Рис. 11-11. Неподтопленный водослив с отогнанным прыжком

режим в нижнем бьефе будет при условии если так называемый относительный перепад $(Z : c_н)$ менее его критического значения $(Z : c_н)_{кр}$:

$$\frac{Z}{c_н} < \left(\frac{Z}{c_н}\right)_{кр}; \tag{11-14}$$

где $(Z : c_н)_{кр}$ может быть найдено по особому экспериментальному графику (рис. 11-12) в зависимости от величины $(H : c_н)$ Как видно из этого графика часто величина $(Z : c_н)_{кр} = 0{,}70 \div 0{,}75$.

В случае подтопленного водослива со свободным истечением без бокового сжатия расход Q определяется по формуле

$$\boxed{Q = m_0 b\sqrt{2g}\, H^{3/2}}, \tag{11-15}$$

где

$$m_0 = \sigma_п m_{0н}, \tag{11-16}$$

причем здесь $m_{0н}$ определяется, как указано в § 11-4; величина же $\sigma_п$, согласно Базену, находится (для $h_п/c$ от 0,0 до 1,5) по эмпирической формуле

$$\sigma_п = 1{,}05\left(1 + 0{,}2\ \frac{h_п}{c}\right)\sqrt[3]{\frac{Z}{H}}; \tag{11-17}$$

см. табл. П-6 (с. 647), составленную по этой формуле.

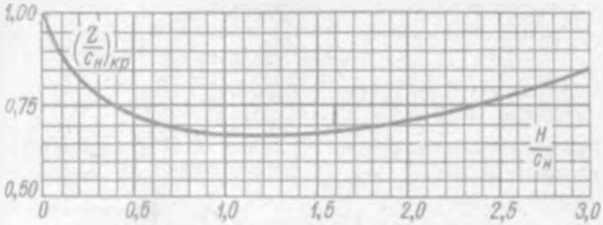


Рис. 11-12. Кривая $\left(\frac{Z}{c_н}\right)_{кр} = f\left(\frac{H}{c_н}\right)$

На рис. 11-10 представлен график, показывающий, как (при $H \approx H_0 = \text{const}$) изменяется величина расхода Q с изменением глубины $h_н$ воды в нижнем бьефе.

Данный график построен в предположении, что при глубинах $h_н > c_н$ в нижнем бьефе всегда имеет место спокойный режим, отогнанный прыжок отсутствует. Как видно из этого графика, до тех пор, пока горизонт воды нижнего бьефа находится ниже линии AB, проведенной на уровне гребня водослива, имеем неподтопленный водослив (величина Q не зависит от $h_н$). Как только горизонт воды нижнего бьефа поднимается выше линии AB, величина Q оказывается уже зависящей от $h_н$; здесь получаем подтопленный водослив, причем с увеличением $h_н$ расход Q должен уменьшаться до нуля; расход Q будет равным нулю в момент, когда горизонт нижнего бьефа сравняется с горизонтом верхнего бьефа.

Необходимо подчеркнуть, что снижение расхода, получающееся при подтоплении любого водослива, обусловливается тем, что под струей, нисходящей с водосливной стенки, при поднятии горизонта воды нижнего бьефа повышается давление. До тех пор, пока давление под струей не зависит от горизонта воды нижнего бьефа, водослив будет неподтоплен.

§ 11-6. НЕСВОБОДНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТОНКОЙ СТЕНКОЙ

При затрудненном подводе воздуха (или воды) под струю, т. е. при наличии несвободного истечения различают два случая:

1) когда горизонт воды нижнего бьефа (ГНБ) непосредственно у водосливной стенки стоит ниже гребня водосливной стенки;

2) когда ГНБ непосредственно у водосливной стенки стоит выше гребня водосливной стенки.

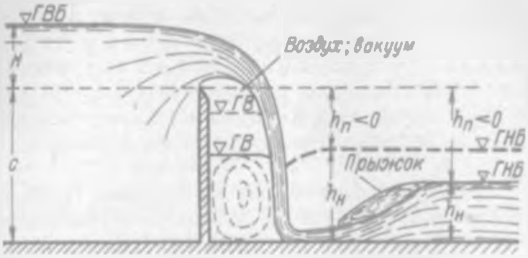


Рис. 11-13. Струя поджатая, не подтопленная снизу

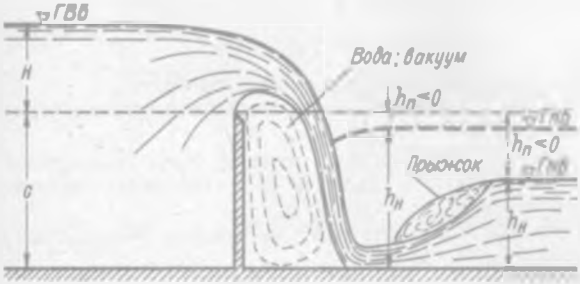


Рис. 11-14. Струя поджатая, подтопленная снизу

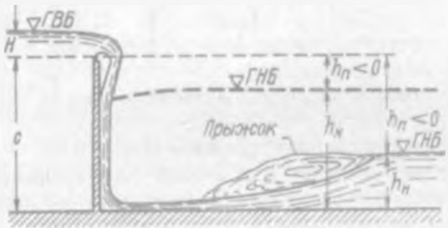


Рис. 11-15. Струя прилипшая

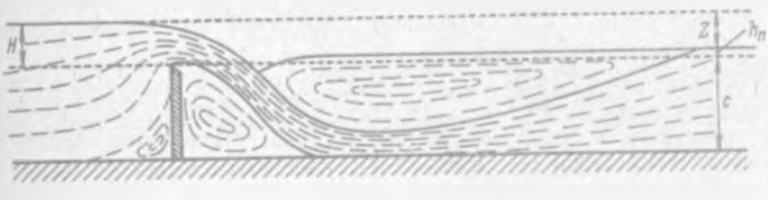


Рис. 11-16. Донный режим истечения

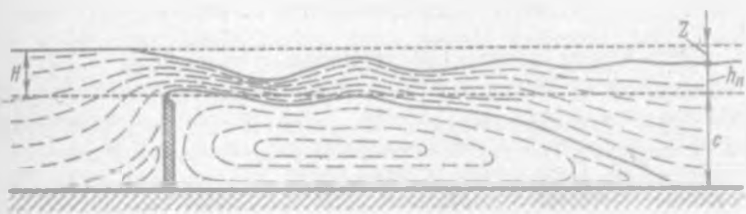


Рис. 11-17. Поверхностный режим истечения

1°. **ГНБ стоит ниже гребня водосливной стенки.** Как показывают опыты, проведенные Базеном, здесь получаем следующие формы струй:

1) струя поджатая, не подтопленная снизу (рис. 11-13); в этом случае под струей имеется воздух, причем давление под струей меньше атмосферного. Благодаря наличию под струей вакуума она несколько прижимается к водосливной стенке. Вакуум оказывает «подсасывающее» действие и увеличивает коэффициент расхода m;

2) струя поджатая, подтопленная снизу (рис. 11-14); здесь все подструйное пространство заполнено водой; вакуум под струей в этом случае больше, чем в предыдущем (при прочих равных условиях);

3) струя прилипшая (рис. 11-15); здесь вакуум весьма велик, благодаря чему коэффициент расхода m получается особенно большим.

Если через m_1, m_2, m_3 обозначим коэффициенты расхода соответственно для случаев, показанных на рис. 11-13, 11-14 и 11-15, то можем написать:

$$m_1 < m_2 < m_3. \tag{11-18}$$

В каждом отмеченном выше случае можно различать:

а) непокрытую струю, когда в нижнем бьефе имеется отогнанный гидравлический прыжок;

б) покрытую струю, когда в нижнем бьефе отогнанного гидравлического прыжка нет (см. на рис. 11-13, 11-14 и 11-15 свободную поверхность, показанную жирной штриховой линией).

Если доступ воздуха под струю вовсе невозможен и водослив не имеет бокового сжатия, то, согласно опытам Базена:

а) при $H > 0{,}4c$ всегда будем иметь поджатую, подтопленную снизу струю;

б) при $H < 0{,}4c$ и при $h_н > (c - H)$ также будем иметь поджатую, подтопленную снизу струю.

Истечение воды через водослив в случае поджатой, подтопленной снизу струи (рис. 11-14), в отличие от других случаев (рис. 11-13 и 11-15), носит достаточно условный характер. В литературе приводятся эмпирические формулы для коэффициента расхода m_0 при таком виде истечения.

2°. **ГНБ непосредственно у водосливной стенки выше ее гребня.** Здесь может иметь место:

а) или так называемый донный режим (рис. 11-16)

б) или так называемый поверхностный режим (рис. 11-17).

При донном режиме струя достигает дна нижнего бьефа; при поверхностном режиме струя находится на поверхности воды нижнего бьефа.

Можно считать (на основании опытов), что

1) при $\dfrac{Z}{c} \leqslant 0{,}15$ всегда будет поверхностный режим;

2) при $\dfrac{Z}{c} \geqslant 0{,}30$ всегда будет донный режим.

Что касается расхода Q, то его здесь определяют, пользуясь зависимостью, приведенной в § 11-5.

§ 11-7. ВОДОСЛИВЫ С ТОНКОЙ СТЕНКОЙ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ

Будем иметь в виду только неподтопленные водосливы.

1°. **Треугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой при свободном доступе воздуха под струю (рис. 11-18).** Здесь имеются следующие эмпирические формулы для определения расхода Q (Q в м^3/с и H в м).

1. Случай, когда угол θ (см. чертеж) равен 90°:

а) по Кингу

$$Q = 1{,}343H^{2{,}47}; \tag{11-19}$$

б) по Томсону

$$Q = 1{,}4H^{5/2}. \qquad (11\text{-}20)$$

2. Случай, когда $22° \leqslant \theta \leqslant 118°$, – по Граве

$$Q = 1{,}331\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{0{,}996} H^{2{,}47}. \qquad (11\text{-}21)$$

2°. Трапецеидальный водослив с вертикальной тонкой стенкой при свободном доступе воздуха под струю (рис. 11-19). Здесь обычно пользуются приближенной формулой:

$$Q = mb_{cp}\sqrt{2g}\,H_0^{3/2} = m\varepsilon(b_0 + 0{,}8\,nH)\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}, \qquad (11\text{-}22)$$

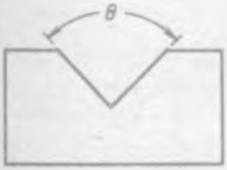


Рис. 11-18. Треугольный водослив

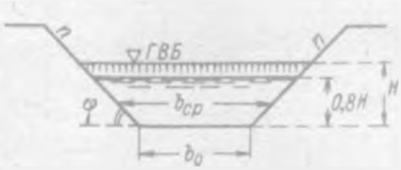


Рис. 11-19. Трапецеидальный водослив

где b_{cp} – с р е д н я я   ш и р и н а водослива; b_0 – ширина трапецеидального выреза понизу; n – коэффициент откоса: $n = \operatorname{ctg}\varphi$; ε – так называемый коэффициент бокового сжатия (см. далее водосливы с широким порогом).

Коэффициент расхода m, входящий в формулу (11-22), в случае $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{1}{4}$ может быть принят: $m = 0{,}42$.

3°. Заключительное замечание. Существуют эмпирические формулы и для водосливов параболических, круговых и т. п.

Некоторые из упомянутых водосливов применяются в качестве измерительных водосливов (для измерения расхода Q).

Б. ПРЯМЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ВОДОСЛИВЫ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

§ 11-8. НЕПОДТОПЛЕННЫЙ ВОДОСЛИВ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

1°. Общие положения. Неподтопленный водослив с широким порогом обычно характеризуется наличием двух перепадов свободной поверхности: $Z_в$ и $Z_н$ (рис. 11-20).

Поясним причины возникновения первого перепада $Z_в$ с физической точки зрения. Представим себе безнапорное с п о к о й н о е движение воды, например в верхнем бьефе перед водосливной стенкой (рис. 11-20). Ясно, что при наличии местного сжатия такого потока (или выступами с боков – со стороны боковых стенок русла, или выступами в виде порога водослива снизу, как то показано на рис. 11-20) мы получим в данном месте уменьшение живого сечения потока. Следствием этого будет: а) увеличение скорости v в месте сжатия, б) увеличение кинетической, а следовательно, уменьшение потенциальной энергии, в) снижение свободной поверхности потока в месте его сжатия, обусловленное уменьшением потенциальной энергии.

Надо учитывать, что в *месте сжатия (с боков или снизу) безнапорного потока (при спокойном движении жидкости) всегда получается резкое снижение его свободной поверхности.*

В данном случае возникновение перепада $Z_в$ и обусловливается стеснением потока снизу порогом водослива.

Несмотря на то, что ГНБ (горизонт воды нижнего бьефа) на рис. 11-20 показан выше линии *AB*, проходящей по гребню водослива, здесь все же имеем неподтопленный водослив; условия подтопления в случае водослива с широким порогом отличаются от условий подтопления в случае водослива с тонкой стенкой.

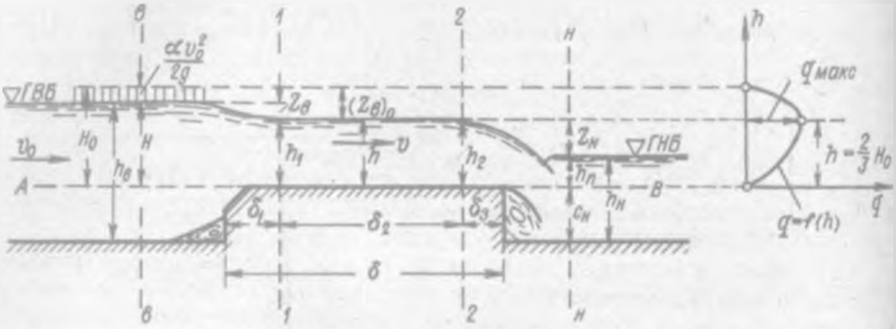


Рис. 11-20. Неподтопленный водослив с широким порогом

Так как потерей напора по длине вдоль порога водослива пренебрегают, то свободную поверхность потока в пределах гребня водослива считают горизонтальной и полагают, что

$$h_1 = h_2 = h = \text{const}; \tag{11-23}$$

здесь h – глубина воды на пороге водослива между сечениями $1-1$ и $2-2$ (где измеряются глубины h_1 и h_2), выделяющими участок потока, характеризующийся плавно изменяющимся движением (см. чертеж).

Длины δ_1 и δ_2, определяющие положение сечений $1-1$ и $2-2$, т. е. начало и конец горизонтального участка свободной поверхности потока, как показывает опыт, равны:[1]

$$\delta_1 \approx 2H; \ \delta_3 = 0 \div H. \tag{11-24}$$

Соединяя уравнением Бернулли сечения $в-в$ и $1-1$ и принимая, что потери напора (местные) между этими сечениями

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}, \tag{11-25}$$

можем написать (при плоскости сравнения *AB*)

$$H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h + \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}, \tag{11-26}$$

откуда получаем

$$v = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h)} = \varphi \sqrt{2g(Z_в)_0}, \tag{11-27}$$

где v – средняя скорость на пороге (в любом вертикальном сечении, намеченном между вертикалями $1-1$ и $2-2$); $(Z_в)_0$ – полный верховой перепад, учитывающий скорость подхода,

[1] Рисунок 11-20 выполнен в отдельных его частях не в масштабе.

$$(Z_в)_0 = Z_в + \frac{\alpha v_0^2}{2g};\tag{11-28}$$

φ – коэффициент скорости,

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}},\tag{11-29}$$

причем здесь коэффициент сопротивления ζ учитывает местную потерю напора, получающуюся на входе при обтекании потоком входного горизонтального ребра водослива.

Для прямоугольного водослива, пользуясь формулой (11-27), величину расхода Q можно записать в виде

$$Q = bhv = bh\varphi\sqrt{2g(H_0 - h)}.\tag{11-30}$$

При этом, переходя к удельному (единичному) расходу, получаем

$$q = \frac{Q}{b} = \varphi h\sqrt{2g(H_0 - h)} = \varphi h\sqrt{2g(Z_в)_0}.\tag{11-31}$$

Как видно, для того, чтобы по уравнению (11-30) или (11-31) найти расход, необходимо знать глубину h, которая при заданном H сама собой устанавливается на пороге водослива. Для определения h и Q в случае водослива с широким порогом было предложено много различных способов. Рассмотрим некоторые из них.

2°. Старые способы определения глубины потока на пороге водослива. Рассмотрим два способа: Беланже и Бахметева.

С п о с о б Б е л а н ж е (п р и н ц и п м а к с и м у м а р а с х о д а). Перепишем уравнение (11-31) в виде

$$q = \varphi h\sqrt{2g(H_0 - h)} = f(h).\tag{11-32}$$

Из чертежа на рис. 11-20 видно, что искомая глубина на пороге при всех условиях не может быть более H_0. Можем утверждать, что глубина h лежит в пределах

$$0 < h < H_0.\tag{11-33}$$

Считая, что H_0 нам задано ($H_0 = \text{const}$), обратимся к ф о р м а л ь н о м у анализу уравнения (11-32).

Назначив в этом уравнении

$$h = H_0,\tag{11-34}$$

получим

$$q = 0;\tag{11-35}$$

назначив же в указанном уравнении

$$h = 0,\tag{11-36}$$

величину q, формально вычисленную по (11-32), получаем также

$$q = 0.\tag{11-37}$$

Как видно, положительная функция $f(h)$, согласно (11-32), при возможных г р а н и ч н ы х значениях h получает величины, равные нулю; отсюда заключаем, что при некотором п р о м е ж у т о ч н о м значении h непрерывная функция $q = f(h)$ должна иметь максимум, причем кривая $q = f(h)$ получает вид, изображенный на графике рис. 11-20.

Учитывая указанное обстоятельство, Беланже предложил пользоваться для определения глубины h следующим постулатом (положением, принимаемым без доказательства): *при заданном напоре H_0 глубина h на пороге водослива сама собой устанавливается такой, при которой уравнение (11-32) дает $q = q_{макс}$; другими словами, явление истечения через рассматриваемый водослив само собой устанавливается в такой форме, при которой расход из всех возможных расходов получается наибольшим.* Этот постулат называют иногда принципом наибольшего расхода.

Согласно данному постулату, искомая глубина h должна удовлетворять уравнению

$$q'_h = 0, \tag{11-38}$$

т. е.

$$\frac{dq}{dh} = \frac{d\left[\varphi h\sqrt{2g(H_0 - h)}\right]}{dh} = 0. \tag{11-39}$$

Считая $\varphi = \text{const}$, из (11-39) получаем:

$$\frac{d(h\sqrt{H_0 - h})}{dh} = \sqrt{H_0 - h} - \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{H_0 - h}} = 0, \tag{11-40}$$

что дает

$$\boxed{h = \frac{2}{3}H_0.} \tag{11-41}$$

Именно такая глубина h, согласно Беланже, должна устанавливаться на пороге рассматриваемого водослива.

Как видно, по Беланже отношение $h : H_0 = k$ (обозначение) будет

$$k = \frac{h}{H_0} = \frac{2}{3}. \tag{11-42}$$

Уравнение (11-30) можно переписать в виде

$$Q = \varphi b\frac{h}{H_0}H_0\sqrt{2gH_0\left(1 - \frac{h}{H_0}\right)} \tag{11-43}$$

или в виде

$$Q = \varphi k\sqrt{1 - k}\, b\sqrt{2g}\, H_0^{3/2}, \tag{11-44}$$

или, наконец, в виде

$$Q = mb\sqrt{2g}\, H_0^{3/2}, \tag{11-45}$$

где

$$m = \varphi k\sqrt{1 - k}. \tag{11-46}$$

Как видно, (11-45) ничем не отличается от основной расчетной зависимости (11-8), приведенной в § 11-2.

Подставляя в (11-46) величину k по Беланже, получаем

$$m = \varphi\frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = 0{,}385\varphi. \tag{11-47}$$

Некоторые авторы рекомендовали принимать величину φ для широкого порога, не имеющего скругления входного ребра (рис. 11-21, *а*), равной $\varphi \approx 0{,}85$; имеющего скругленное ребро (рис. 11-21, *б*) – равной $\varphi \approx 0{,}92$.

Исходя из этих значений φ, получаем в соответствии с (11-47) величину коэффициента расхода m: а) $m \approx 0{,}32$ — для порога на рис. 11-21, *а*; б) $m \approx 0{,}35$ — для порога на рис. 11-21, *б*.

Способ Бахметева. Б. А. Бахметев вместо принципа максимума расхода для определения глубины h воспользовался другим постулатом. Согласно Бахметеву, *на пороге рассматриваемого водослива сама собой должна устанавливаться такая глубина h, которой отвечает минимум удельной энергии сечения* $\left(\text{минимум величины } Э = h + \dfrac{\alpha v^2}{2g}\right)$; другими словами, согласно Бахметеву, на пороге рассматриваемого водослива должна устанавливаться критическая глубина:

$$\boxed{h = h_{кр}} \tag{11-48}$$

т. е. по Бахметеву,

$$k = \frac{h_к}{H_0}, \tag{11-49}$$

или, подставляя сюда (7-49):[1]

$$k = \frac{1}{H_0}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{H_0^3 g b^2}}, \tag{11-50}$$

что, учитывая (11-44), дает:

$$k = \frac{2\varphi^2}{1 + 2\varphi^2}. \tag{11-51}$$

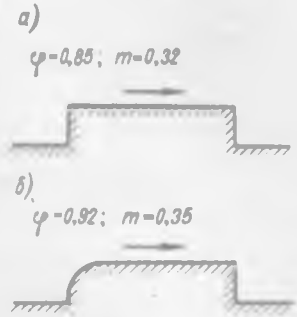


Рис. 11-21. Водосливные стенки: *а* — не скругленное входное горизонтальное ребро порога, *б* — скругленное входное горизонтальное ребро порога

Расчетная формула для Q здесь остается та же [см. формулу (11-45)]; величина же коэффициента расхода m получается из (11-46), если в эту зависимость подставить φ, найденное из (11-51):[2]

$$m = \sqrt{\frac{k^3}{2}}, \tag{11-52}$$

откуда

$$k = \sqrt[3]{2m^2}. \tag{11-53}$$

Принимая указанные выше численные значения φ, получаем по Бахметеву примерно те же значения m, что и по Беланже (см. выше).[3] Величины же k, согласно Бахметеву [см. (11-51)], оказываются равными:

а) $k = 0{,}59$ — для порога на рис. 11-21, *а*;

б) $k = 0{,}63$ — для порога на рис. 11-21, *б*.

Только при $\varphi = 1{,}0$, по Бахметеву, так же как и по Беланже, получаем $k = 2/3$.

3°. **Новые способы расчета водослива.** Рядом исследователей при помощи соответствующих опытов было показано, что постулат Беланже и постулат Бахметева не вполне отвечают действительности. Оказывается, что

$$h < h_к < 2H_0/3, \tag{11-54}$$

---

[1] Величину α принимаем: $\alpha \approx 1{,}0$.

[2] Здесь всюду считаем $\varphi = \text{const}$.

[3] Сам Беланже, собственно, в зависимости (11-46) полагал $\varphi = 1{,}0$ и получал $m = 0{,}385$. Величину $\varphi < 1$ ввели в зависимость (11-46) в последующем другие исследователи.

т. е. действительная глубина на пороге h меньше критической глубины, а также меньше глубины, получаемой по Беланже; только при весьма плавном скруглении входного ребра водослива величина h приближается к критической глубине.

Кроме того, эксперименты показали, что величина коэффициента расхода m существенно зависит от отношения $c_в : H$, а также от отношения $b : B_0$, т. е. от степени сжатия потока, поступающего на водослив с боков.

Весьма подробные теоретические и экспериментальные исследования указанных вопросов были проведены рядом авторов.

Ниже изложим в несколько измененном виде метод расчета водосливов с широким порогом, нашедший отражение в Технических условиях и нормах б. Министерства электростанций (ТУ 12–51).[1] Согласно этому методу, в значительной мере основанному на работах Д. И. Кумина, расчет неподтопленного водослива с широким порогом выполняем следующим образом.

1. Расход воды, переливающейся через водослив, определяем по формуле

$$\boxed{Q = \varepsilon m b \sqrt{2g}\, H_0^{3/2},} \qquad (11\text{-}55)$$

где ε – так называемый коэффициент бокового сжатия струи, поступающей в водосливное отверстие (см. рис. 11-7, *б*); величина ε учитывает пространственную работу водослива; с некоторым приближением она определяется по формуле:

$$\varepsilon = b_c / b; \qquad (11\text{-}56)$$

для условий плоской задачи (рис. 11-7, *а*), когда $b = B_0$, величина $\varepsilon = 1{,}0$. Отсюда видно, что коэффициент расхода m, входящий в формулу (11-55), отвечает упомянутым условиям плоской задачи (когда рассматриваемый водослив работает без бокового сжатия струи; $\varepsilon = 1{,}0$).

2. В случае, если

$$\Omega_в > 4(bH), \qquad (11\text{-}57)$$

где $\Omega_в$ – площадь живого сечения по линии *в–в* (рис. 11-20), скоростью подхода v_0 пренебрегаем, причем расчетную зависимость (11-55) переписываем:

$$Q = \varepsilon m b \sqrt{2g}\, H^{3/2}. \qquad (11\text{-}58)$$

Заметим, что расчет по формуле (11-58) значительно проще, чем по формуле (11-55): уравнение (11-55) обычно приходится решать методом последовательного приближения.

3. При отсутствии бокового сжатия ($\varepsilon = 1{,}0$) коэффициент расхода m в формулах (11-55) и (11-58) берется из табл. 11-1 и 11-2 (составленных на основании опытов Д. И. Кумина) в зависимости от величины

$$\eta = c_в / H, \qquad (11\text{-}59)$$

а также в зависимости от очертания входного горизонтального ребра водослива. В первом приближении величину m в данном случае можно принимать равной: $m = 0{,}32$ – для порога на рис. 11-21, *а*; $m = 0{,}35$ – для порога на рис. 11-21, *б*.

4. При наличии бокового сжатия ($\varepsilon < 1{,}0$) коэффициент расхода m в формулах (11-55) и (11-58) определяется, как указано выше в п. 3. Величина же ε назначается в зависимости от очертания (в плане) входных вертикальных ребер A устоев, ограничивающих данное водосливное

[1] Руководствуясь этими ТУ (составленными нами в 1951 г., см. [11-10]), а также учитывая некоторые новые предложения, включенные во второе издание указанного нормативного документа [11-5; 11-6], мы и излагаем различные расчеты водосливов, освещаемые в этой главе.

отверстие (рис. 11-22). В первом приближении (при $H_0 : b \leqslant 1{,}0$) величину ε можно назначать, например, в пределах

$$\varepsilon \approx 0{,}85 \div 0{,}95, \qquad (11\text{-}60')$$

учитывая, что большие значения ε должны относиться к схемам, когда входные вертикальные ребра устоев скруглены или притуплены. Для приближенной оценки величины ε рекомендуют также формулу следующего вида:

$$\varepsilon = 1 - 0{,}2\,\xi_{y}\,\frac{H_0}{b}, \qquad (11\text{-}60'')$$

где ξ_{y} — коэффициент уменьшения, учитывающий скругление или притупление вертикальных ребер устоев (величину ξ_{y} — см. на рис. 11-22).[1]

Уточненное значение ε для случая, когда

$$\frac{H}{b} \leqslant 1{,}0;\ \frac{a}{H} = 0{,}0 \div 0{,}5;\ \frac{a}{b} = 0{,}0 \div 0{,}5, \qquad (11\text{-}61)$$

может быть определено по формуле Г. К. Дерюгина (полученной на основании обобщения соответствующих экспериментальных данных):

$$\varepsilon = 1 - \frac{K_{b/B_0}}{1 + c_в/H}\left(K_{a/H}\,\frac{c_в}{b} + K_{a/b}\right), \qquad (11\text{-}62)$$

где под величиной a следует понимать радиус r скругления входных вертикальных ребер или величину f «при-

Таблица 11-1

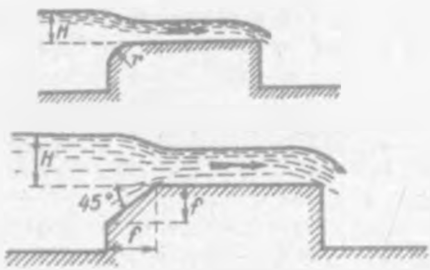
Коэффициенты расхода m для водослива с широким порогом без бокового сжатия
(плоская задача; $b = B_0$; $\varepsilon = 1{,}0$)
Случай водосливной стенки (порога) с вертикальной или наклонной верховой гранью

$\eta = \frac{c_в}{H}$	Вертикальная грань ctg θ = 0	ctg θ			
		0,5	1,0	1,5	≥2,5
0,0	0,385	0,385	0,385	0,385	0,385
0,2	0,366	0,372	0,377	0,380	0,382
0,4	0,356	0,365	0,373	0,377	0,381
0,6	0,350	0,361	0,370	0,376	0,380
0,8	0,345	0,357	0,368	0,375	0,379
1,0	0,342	0,355	0,367	0,374	0,378
2,0	0,333	0,349	0,363	0,371	0,377
4,0	0,327	0,345	0,361	0,370	0,376
8,0	0,324	0,343	0,360	0,369	0,376
∞	0,320	0,340	0,358	0,368	0,375

Таблица 11-2

Коэффициент расхода m для водослива с широким порогом без бокового сжатия
(плоская задача; $b = B_0$; $\varepsilon = 1{,}0$)
Случай водосливной стенки (порога) с вертикальной верховой гранью и скругленным или притупленным входным ребром

$\eta = \frac{c_в}{H}$	$\frac{r}{H}$ или $\frac{f}{H}$			$\frac{r}{H}$	
	0,025	0,05	0,2	0,6	≥1,0
0,0	0,385	0,385	0,385	0,385	0,385
0,2	0,372	0,374	0,377	0,380	0,382
0,4	0,365	0,368	0,374	0,377	0,381
0,6	0,361	0,364	0,370	0,376	0,380
0,8	0,357	0,361	0,368	0,375	0,379
1,0	0,355	0,359	0,366	0,374	0,378
2,0	0,349	0,354	0,363	0,371	0,377
6,0	0,344	0,349	0,359	0,369	0,376
∞	0,340	0,346	0,357	0,368	0,375



Примечание. При $f/H > 0{,}2$ коэффициент расхода m следует принимать соответствующим этому крайнему значению отношения.

[1] Формула (11-60″) дает хорошие результаты в случае высоких водосливных стенок ($c_в > 3H$) и при наличии совершенного бокового сжатия (когда $B_0 > 3b$).

тупления» этих ребер (см. рис. 11-22, *б* и *в*, на котором представлен устой, ограничивающий сбоку данное водосливное отверстие): $a = r = f$.[1]

Входящие в формулу (11-62) коэффициенты K равны:

а) K_{b/B_0} – коэффициент, учитывающий влияние на величину ε отношения b/B_0:

$$K_{b/B_0} = 1{,}0 \text{ при } b/B_0 \leqslant 0{,}2; \qquad (11\text{-}63)$$

$$K_{b/B_0} = 1{,}0 - 1{,}4\left(\frac{b}{B_0} - 0{,}2\right)^{3/2} \text{ при } \frac{b}{B_0} > 0{,}2; \qquad (11\text{-}64)$$

при отсутствии бокового сжатия ($b = B_0$) величина $K_{b/B_0} = 0$, причем, согласно формуле (11-62), величина $\varepsilon = 1{,}0$;

б) $K_{a/H}$ – коэффициент, учитывающий влияние на величину ε отношения a/H:

$$K_{a/H} = 0{,}04 \text{ при } a/H \geqslant 0{,}5; \qquad (11\text{-}65)$$

$$K_{a/H} = 0{,}17 - \sqrt{\frac{1}{30}\,\frac{a}{H}} \text{ при } a/H < 0{,}5; \qquad (11\text{-}66)$$

в) $K_{a/b}$ – коэффициент, учитывающий влияние на величину ε отношения a/b:

$$K_{a/b} = 0{,}04 \text{ при } a/b \geqslant 0{,}5; \qquad (11\text{-}67)$$

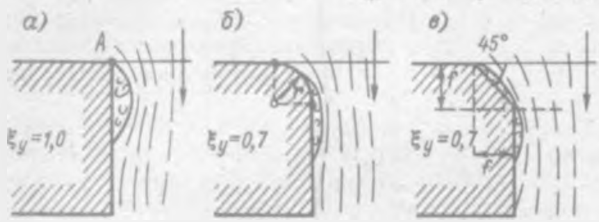


Рис. 11-22. Устой (в плане), ограничивающий сбоку водосливное отверстие

A – входное вертикальное ребро устоя (или быка)

$$K_{a/b} = 0{,}17 - \sqrt{\frac{1}{30}\,\frac{a}{b}}$$

$$\text{при } a/b < 0{,}5. \qquad (11\text{-}68)$$

При отсутствии скругления или притупления входных ребер (рис. 11-22, *а*) получаем

$$K_{a/H} = K_{a/b} = 0{,}17. \qquad (11\text{-}69)$$

В отдельных частных случаях формула (11-62) упрощается:

а) при наличии так называемого водослива без порога, т. е. когда $c_в = 0$ (см. далее рис. 11-28):

$$\varepsilon = 1 - K_{b/B_0}K_{a/b}; \qquad (11\text{-}70)$$

в частном же случае водослива без порога, когда $b/B_0 \leqslant 0{,}2$, величина

$$\varepsilon = 1 - K_{a/b}; \qquad (11\text{-}71)$$

б) при наличии весьма высокого порога ($c_в \geqslant 5H$):

$$\varepsilon = 1 - K_{b/B_0}K_{a/H}\,\frac{H}{b}; \qquad (11\text{-}72)$$

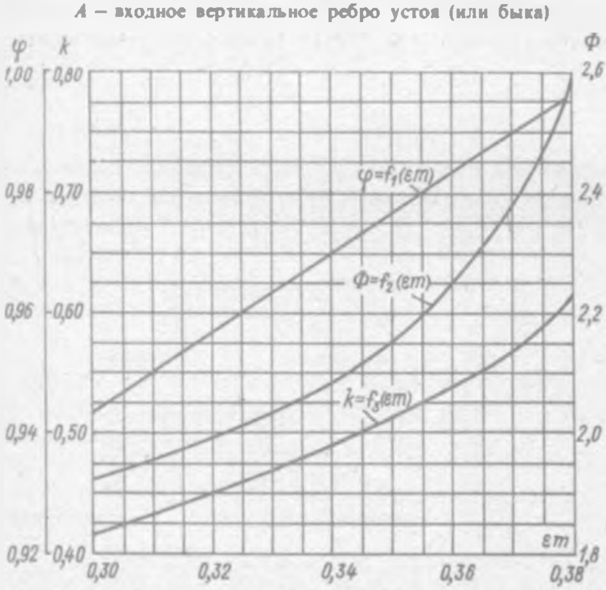


Рис. 11-23. Кривые: $\varphi = f_1(\varepsilon m)$; $\Phi = f_2(\varepsilon m)$; $k = f_3(\varepsilon m)$ для расчета водослива с широким порогом

[1] Зависимость (11-62) относится к случаям, характеризуемым любыми отношениями B_0/b и $c_в/H$.

в частном же случае весьма высокого порога, когда $b/B_0 \leqslant 0{,}2$, величина

$$\varepsilon = 1 - K_{a/H} \frac{H}{b}. \tag{11-73}$$

5. Глубину h на пороге неподтопленного водослива определяем, зная величины Q, b и H_0, из уравнения:

$$Q = \varphi h b \sqrt{2g (H_0 - h)}, \tag{11-74}$$

причем здесь φ берется (согласно экспериментальным данным Д. И. Кумина) в зависимости от величины εm, где ε и m найдены выше:

εm	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38
φ	0,94	0,96	0,97	0,98	1,00

Глубину h на пороге можно найти также по формуле

$$h = kH_0, \tag{11-75}$$

где коэффициент k определяем по графику на рис. 11-23. Кривая $k = f_3(\varepsilon m)$ этого графика была построена по формуле (11-46), в которой величина m была предварительно заменена (для случая пространственной задачи – наличия бокового сжатия) произведением εm. При вычислении этой кривой величины φ определялись по экспериментальной кривой $\varphi = f_1(\varepsilon m)$, приведенной на том же рис. 11-23.

Из графика на рис. 11-23 видно, что для случая $\varepsilon = 1$ (плоская задача) при $m = 0{,}32$ величина $k = 0{,}450$ и при $m = 0{,}35$ величина $k = 0{,}515$. Такие значения k мы получаем здесь вместо $k = 0{,}666$ (по Беланже) и $k \approx 0{,}60$ [по Бахметеву; см. формулы (11-51) и (11-53)].

4°. Заключительное замечание. Отметим, что выше мы рассматривали случай, когда имеется только одно водосливное отверстие. Расчет двух или нескольких рядом расположенных водосливов с широким порогом выполняется с учетом соответствующих соображений, приводимых далее (см., в частности, § 11-13 и 11-15).

§ 11-9. КРИТЕРИЙ ПОДТОПЛЕНИЯ ВОДОСЛИВА С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

Соответствующими опытами было показано, что в общем случае картина истечения воды через подтопленный водослив с широким порогом выглядит, как показано на рис. 11-24.

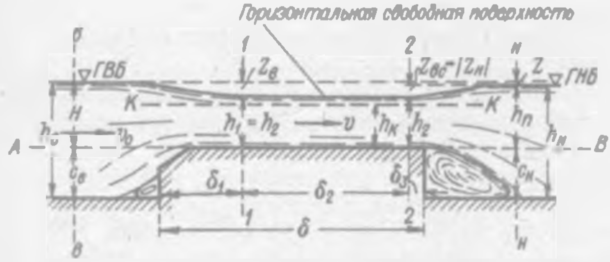


Рис. 11-24. Подтопленный водослив с широким порогом

$z_{вс}$ – перепад восстановления

Из этого рисунка ясно, что поток в районе рассматриваемого водослива может быть разбит на три отдельные части: а) подходную часть (между сечениями $в - в$ и $1 - 1$), в пределах которой имеют место потери напора на вход; здесь поток претерпевает сжатие; б) собственно водослив (между сечениями $1-1$ и $2-2$), где потерями напора пренебрегают; в) выходную часть (между сечениями $2-2$ и $н-н$), в пределах которой имеет место потеря напора на выход; здесь поток получает резкое расширение.

Как видно, подтопленный водослив характеризуется в общем случае наличием одного положительного перепада $Z_в$ и одного **отрицательного** перепада $Z_{вс}$. Свободная поверхность за сечением $2-2$ может подниматься вверх на величину $Z_{вс}$, благодаря тому, что часть кинетической энергии потока в этом месте переходит в потенциальную энергию. В связи с этим перепад

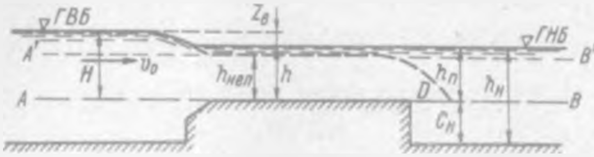


Рис. 11-25. Подтопленный водослив с широким порогом при отсутствии перепада восстановления

$Z_{вс}$ называется **перепадом восстановления** (см. § 5-6). Заметим, однако, что при наличии больших потерь напора в пределах выходного участка водослива перепад $Z_{вс}$ может и не иметь места.

В «старых способах» расчета перепадом восстановления $Z_{вс}$ пренебрегали и представляли себе картину истечения в случае подтопленного водослива в виде, показанном на рис. 11-25, т. е. считали, что подтопленный водослив характеризуется наличием только одного перепада свободной поверхности $Z_в$.

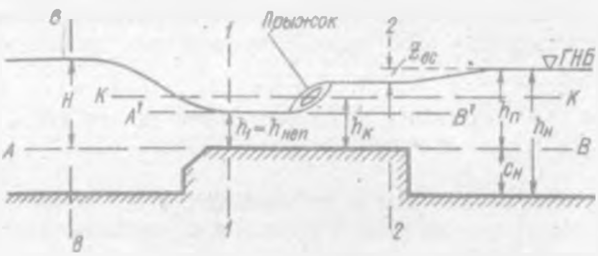


Рис. 11-26. Подтопление водослива с широким порогом (с надвигающимся гидравлическим прыжком)

Представим на рис. 11-25 штриховой линией поверхность струи, которая получается, когда при заданном H водослив является неподтопленным ($h_{неп}$ – глубина, которая сама собой устанавливается на пороге в этом случае; $A'B'$ – уровень, возвышающийся на величину $h_{неп}$ над порогом водослива).

Следуя упомянутым «старым способам», надо считать, что как только горизонт воды нижнего бьефа поднимется выше линии $A'B'$, т. е. как только **высота подтопления** $h_п$ (см. чертеж) сделается больше глубины $h_{неп}$:

$$h_п > h_{неп}, \tag{11-76}$$

указанный горизонт воды начнет надвигаться на порог и покрывать струю неподтопленного водослива; при этом глубина воды на пороге будет расти, и расход Q (при $H = \text{const}$) начнет уменьшаться или напор H (при $Q = \text{const}$) начнет увеличиваться, т. е. мы получим подтопленный водослив.

Как видно, в том случае, когда пренебрегаем перепадом восстановления, можно сказать, что *водослив с широким порогом получается подтопленным, если уровень воды нижнего бьефа поднимается выше того горизонта воды, который сам собой устанавливается на пороге неподтопленного водослива.*

Имея это в виду, получаем следующие критерии подтопления водослива:

1) согласно Беланже, водослив с широким порогом следует считать подтопленным, если [1]

$$\boxed{h_п > \frac{2}{3} H_0,} \text{ или } h_н > c_н + \frac{2}{3} H_0, \tag{11-77}$$

поскольку, по Беланже, $h_{неп} = \frac{2}{3} H_0$;

2) согласно Бахметеву, водослив следует считать подтопленным, если

$$\boxed{h_п > h_к} \text{ или } h_н > c_н + h_к, \tag{11-78}$$

поскольку, по Бахметеву, $h_{неп} = h_к$.

Что касается «новых способов» расчета водослива с широким порогом, то согласно им, когда водослив не подтоплен, в сечении $1-1$ устанавливается глубина (рис. 11-26) $h_1 = h_{неп} < h_к$.

Поэтому, когда горизонт воды нижнего бьефа, поднявшись выше линии $K-K$, определяемой критической глубиной, будет надвигаться на порог водослива, на последнем возникнет гидравлический прыжок и сечение $1-1$ при соотношении (11-76) может оказаться не покрытым горизонтом воды нижнего бьефа. В этом случае (рис. 11-26) водослив будет еще неподтопленным (хотя картина истечения здесь будет иная, чем это показано на рис. 11-20). Подтопление такого водослива (обусловливающее уменьшение Q при заданном H или увеличение H при заданном Q) наступит только после того, как упомянутый прыжок при дальнейшем поднятии горизонта воды нижнего бьефа переместится выше сечения $1-1$.

Исследования Р. Р. Чугаева, проведенные с учетом явления гидравлического прыжка на водосливе и с учетом поясненного выше перепада восстановления $Z_{вс}$, показали, что *водослив с широким порогом следует считать подтопленным, если высота подтопления*

$$\boxed{h_п > nH_0} \text{ или } h_п > \frac{n}{\sqrt[3]{2m^2}} h_к, \tag{11-79}$$

где

$$n = 0{,}85 \div 0{,}75. \tag{11-80}$$

Уточненное значение n, лежащее в пределах от 0,85 до 0,75, может быть найдено по графику, приводимому в [11-13, фиг. 17] или в [11-7, рис. 14], однако к этому графику часто нет надобности обращаться, так как во многих случаях отношение $h_п : H_0$ заведомо или меньше 0,75 или больше 0,85.

§ 11-10. ПОДТОПЛЕННЫЙ ВОДОСЛИВ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

Поясним здесь три способа расчета, которые мы рассматривали выше: Беланже, Бахметева и способ, приводимый в [11-13; 11-7] (основанный на данных Д. И. Кумина).

1°. Способ Беланже. Согласно Беланже, принимаем $Z_{вс} = 0$, причем глубину на пороге подтопленного водослива получаем (рис. 11-25)

---

[1] Здесь через $h_н$ обозначена глубина воды в нижнем бьефе.

$$\boxed{h = h_п} \text{ или } \boxed{h = h_н - c_н}, \tag{11-81}$$

где $h_п$ — высота подтопления.

Зная глубину на пороге водослива и величины H и b, расход Q находим по формуле (11-30), которую переписываем в виде

$$\boxed{Q = \varphi b h_п \sqrt{2g(H_0 - h_п)} = \varphi b h_п \sqrt{2g(Z_в)_0};} \tag{11-82}$$

численные значения φ см. в § 11-8, п. 2°. По этой формуле можно найти также H, если известно Q, $h_п$ и b.

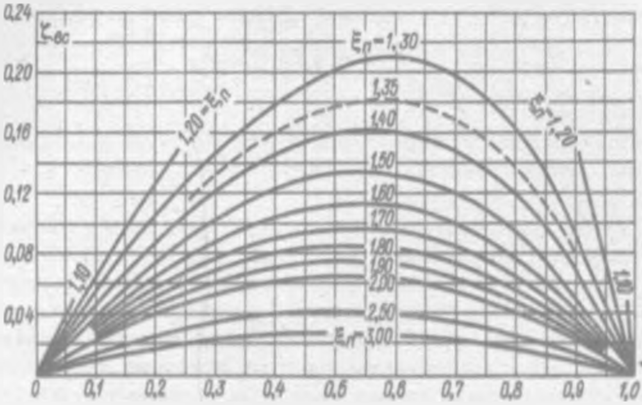


Рис. 11-27. График Чугаева для определения перепада восстановления

2°. Способ Бахметева. Способ Бахметева отличается от способа Беланже только критериями подтопления (см. § 11-9). Расчетные же формулы, относящиеся к подтопленному водосливу, здесь остаются теми же, что и в способе Беланже [см. формулы (11-81) и (11-82)].

3°. Способ, приводимый в ТУ 12-51. Согласно этому способу, расчет подтопленного водослива ведем по формуле (рис. 11-24)

$$\boxed{Q = \varphi_п b h_1 \sqrt{2g(H_0 - h_1)};} \tag{11-83}$$

$\varphi_п$ здесь берется, в соответствии с экспериментальными данными Д. И. Кумина, из особой таблички в зависимости от величины εm, которая должна быть предварительно установлена, как указано в § 11-8:

εm	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38
$\varphi_п$	0,77	0,84	0,90	0,96	0,99

Глубина h_1 в сечении $1-1$ (рис. 11-24), входящая в формулу (11-83), принимается равной:

$$h_1 = h_2 = h_п - Z_{вс}, \tag{11-84}$$

где

$$Z_{вс} = \zeta_{вс} h_к, \tag{11-85}$$

причем здесь $h_к$ находится по формуле (7-49); $\zeta_{вс}$ — относительный перепад восстановления, определяемый по графику Р. Р. Чугаева (рис. 11-27) в зависимости от величин [1]

$$\xi_{зп} = h_п/h_к \text{ и } \nu_н = h_п b/(h_н B_0). \quad (11\text{-}86)$$

В первом приближении перепадом восстановления следует пренебрегать. При этом, как видно, формула (11-83) отличается от формулы (11-82) только уточненным значением коэффициента скорости $\varphi_п$.

В случае учета перепада восстановления формула (11-83) решается в отношении Q (при заданных H и b) или в отношении b (при заданных Q и H) путем подбора; в отношении же H данная формула решается без подбора (если будем пренебрегать скоростью подхода v_0).

Что касается размеров δ_1 и δ_3 (рис. 11-24), то они определяются по формуле (11-24), т. е. так же, как и в случае неподтопленного водослива.

В заключение подчеркнем, что в случае подтопленного водослива с широким порогом расчетная формула (11-82) или (11-83) **имеет вид, отличный от расчетной формулы, используемой во всех других случаях водослива.**

§ 11-11. РАСЧЕТ ВОДОСЛИВА БЕЗ ПОРОГА ПО ЗАДАННОЙ СКОРОСТИ В ВОДОСЛИВНОМ ОТВЕРСТИИ. СТЕСНЕНИЕ РУСЛА ПЕРЕМЫЧКАМИ

В практике, например, железнодорожного строительства устраивают небольшие мостики и безнапорные трубы, работающие по схеме, представленной на рис. 11-28. В этом случае высота водосливной стенки $c = 0$ (водосливного порога здесь нет).

Водослив без порога с некоторым приближением можно рассматривать как частный случай водослива с широким порогом (§ 11-8, 11-9, 11-10), [2] при этом его можно рассчитывать, пользуясь всеми теми способами, которые были изложены ранее.

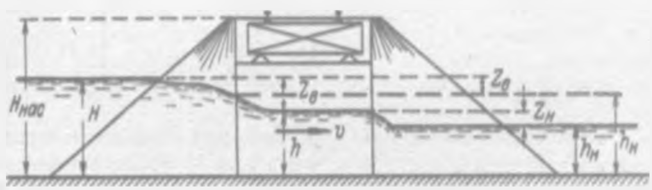


Рис. 11-28. Водослив без порога (отверстие железнодорожного мостика)

Задача расчета здесь ставится несколько иначе, чем для обыкновенных водосливов. Обычно для расчета железнодорожного мостика задают (рис. 11-28):

1) скорость v в водосливном отверстии (в пролете мостика); в качестве такой скорости, как правило, принимают максимальную допускаемую скорость $v_{макс}$ для крепления русла в пределах водосливного отверстия; [3]

2) высоту насыпи $H_{нас}$; при пропуске через водослив расчетного расхода Q напор на водосливе H должен получаться меньше $H_{нас}$:

$$H < H_{нас}, \quad (11\text{-}87)$$

иначе железнодорожное полотно будет затоплено; [4]

---

[1] Перепад восстановления $Z_{вс}$ здесь был найден по общему методу (см. § 5-6).

[2] См. петит в конце § 11-1 (стр. 408).

[3] Иногда, имея в виду боковое сжатие потока под мостом, скорость v принимают равной $\varepsilon v_{макс}$. Величину $v_{макс}$ назначают обычно по данным гл. 6, относящейся к равномерному движению воды. Строго говоря, это не вполне правильно, так как условия движения воды под мостом (эпюры осредненных скоростей и интенсивность пульсации скорости) отличны от условий равномерного движения.

[4] Иногда в формуле (11-87) под величиной $H_{нас}$ понимают превышение низа пролетного строения мостика над дном водотока.

3) расход Q, величину расхода Q обычно устанавливают на основании особых гидрологических расчетов (сообразуясь с площадью бассейна водотока, через который устраивают мостик, и т. п.);

4) глубину воды в нижнем бьефе $h_н$, получающуюся при пропуске расхода Q; эта глубина, как правило, принимается равной естественной глубине, получающейся в русле при пропуске расхода Q.

Исходя из указанных величин, при помощи гидравлического расчета устанавливают ширину водослива b, т. е. отверстие проектируемого мостика.

Такая задача решается следующим образом.

Предполагаем, что рассматриваемый водослив является неподтопленным. При этом, имея величину скорости v, определяем напор на водосливе H_0, пользуясь зависимостью

$$H_0 = \Phi \frac{v^2}{2g}, \tag{11-88}$$

где величина Φ, как это нетрудно показать,[1]

$$\Phi = \frac{1}{\varphi^2(1-k)}. \tag{11-89}$$

Величину Φ можно определить, установив предварительно коэффициент расхода m, а затем ε, φ и k (как пояснялось в § 11-8). Эту величину также можно найти по графику на рис. 11-23, где дается кривая $\Phi = f_2(\varepsilon m)$; пользуясь этой кривой, по известной величине εm находим Φ.

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом случае почти всегда допустимо пренебрегать скоростью подхода v_0. Поэтому можно считать, что

$$H_0 \approx H. \tag{11-90}$$

Зная, таким образом, геометрический напор на водосливе, сопоставляем его с высотой насыпи $H_{нас}$. Если условие (11-87) оказывается невыдержанным, то приходится уменьшать скорость в пролете мостика, добиваясь соблюдения неравенства (11-87). Заметим, что уменьшая скорость v, мы при этом будем увеличивать пролет мостика (см. ниже), т. е. получать более дорогой мостик.

Установив величину $H_0 \approx H$, проверяем, действительно ли наш водослив является неподтопленным. Для этого (см. § 11-9) сопоставляем заданную глубину нижнего бьефа $h_н$ с величиной, равной $0{,}75H$.

Если оказывается, что

$$h_н < 0{,}75H, \tag{11-91}$$

то водослив неподтоплен; при этом обращаемся к определению ширины водослива b. Размер b находим по формуле

$$b = \frac{Q}{vh}, \tag{11-92}$$

где

$$h = kH_0. \tag{11-93}$$

Здесь коэффициент k определяем, как указано выше (в зависимости от величины εm); величину k легко также найти по графику на рис. 11-23.

Если неравенство (11-91) оказывается невыдержанным, то заключаем, что наш водослив будет подтоплен. При этом проделанные выше вычисления H отбрасываем и рассчитываем водослив как подтопленный. Здесь можно придерживаться следующей схемы расчета.

---

[1] Действительно, согласно (11-27), имеем $v = \varphi\sqrt{2g(H_0 - h)} = \varphi\sqrt{2gH_0(1-k)}$, а следовательно, $H_0 = \frac{1}{\varphi^2(1-k)}\frac{v^2}{2g}$, откуда и получаем (11-89).

1. Пренебрегая перепадом восстановления $Z_{вс}$, считаем, что глубина воды в пролете мостика

$$h = h_н. \tag{11-94}$$

2. Имея скорость v, вычисляем пролет мостика:

$$b = \frac{Q}{vh_н}. \tag{11-95}$$

3. Для скорости v имеем формулу (11-27):

$$v = \varphi\sqrt{2g(Z_в)_0}. \tag{11-96}$$

Решая это уравнение в отношении $(Z_в)_0$, получаем:

$$(Z_в)_0 = \frac{1}{\varphi^2}\frac{v^2}{2g}. \tag{11-97}$$

Рис. 11-29. Стеснение русла перемычкой

По этой зависимости, подставив вместо φ величину $\varphi_п$ (см. § 11-10) и считая $(Z_в)_0 \approx Z_в$, находим верховой входной перепад свободной поверхности $Z_в$:

$$Z_в = \frac{1}{\varphi_п^2}\frac{v^2}{2g}. \tag{11-98}$$

4. Зная $Z_в$, определяем H:

$$H = h_н + Z_в. \tag{11-99}$$

5. Найденное по (11-99) значение H сопоставляем с величиной $H_{нас}$. Если оказывается, что неравенство (11-87) не выдержано, то приходится уменьшать скорость v в пролете мостика и идти на увеличение ширины водосливного отверстия. При этом будем получать снижение перепада $Z_в$, а следовательно, уменьшение напора H.

Заметим в заключение, что, следуя описанному выше методу, в некоторых случаях можно рассчитывать (с известным приближением [1]) стеснение рек, вызванное постройкой перемычек, сооружаемых при возведении плотин. Более точное решение этого вопроса излагается ниже.

Расчет стеснения русла перемычками [11-4]. При возведении основных сооружений, входящих в гидротехнический узел, создаваемый на реке, приходится строить временные

[1] Не в сторону запаса. См. петит в конце § 11-1 (стр. 408).

сооружения (перемычки, дамбы и т. п.). Под защитой таких временных сооружений и осуществляется постройка основных сооружений (плотины и т. п.).

Временные сооружения (перемычки) стесняют естественное (бытовое) русло реки и вызывают деформацию потока, причем эта деформация распространяется на участке реки значительной протяженности (*участок деформации*). В зависимости от характера возникающих здесь гидравлических явлений часть реки, в пределах которой возникла деформация потока, в свою очередь, может быть подразделена (в случае спокойного движения воды в русле) на следующие участки (рис. 11-29).

1. Участок подпора, ограниченный сечением *в – в* (выше которого река находится в естественном состоянии) и сечением *н – н* (проведенным так, как было указано в § 11-1). По длине участка подпора происходит увеличение глубины потока, сопровождающееся уменьшением скоростей, а следовательно, и уменьшением потерь напора. В результате получаем накопление потенциальной энергии, необходимой потоку для преодоления сопротивлений, обусловленных перемычкой *П*. Превышение подпертого уровня воды в сечении *в – в* над естественным уровнем обозначим через Z', причем величину Z' будем именовать максимальным подпором.

2. Участок сжатия, ограниченный сечением *в – в* и сечением *н – н*, намеченным в месте выхода потока из отверстия, образованного перемычкой.[1] Этот участок характеризуется интенсивным преобразованием потенциальной энергии в кинетическую. Потери напора на этом участке сравнительно малы. Как видно из чертежа, на данном участке возникает максимальный перепад Z'', обусловленный в основном переходом потенциальной энергии в кинетическую.

3. Участок растекания, ограниченный сечением *н – н* и сечением *к – к*, намеченным в месте, где заканчивается водоворотная область, образующаяся в нижнем бьефе. Переход кинетической энергии в потенциальную здесь сопровождается значительной потерей напора.

4. Участок перехода, ограниченный сечением *к – к* и сечением *б – б*, намеченным в месте, где эпюра осредненных скоростей приобретает нормальный вид, причем повышенные пульсации скоростей и давлений, возникающих на участке растекания, снижаются до величин, свойственных естественному потоку.

Рассматривая стесненное русло как подтопленный водослив с широким порогом, под величиной геометрического перепада Z на водосливе условимся понимать превышение подпертого уровня воды в сечении *в – в* над уровнем воды в сечении *к – к* (уровень воды в сечении *к – к* мало отличается от уровня воды в сечении *б – б*).

Не следует смешивать «подпор» Z' и «перепад» Z. Если пренебречь малой разницей в кинетических энергиях, подсчитанных для сечений *в – в* и *б – б*, то можно сказать, что, во-первых, Z (перепад) представляет собой потерю напора в пределах участков сильной деформации потока (участков сжатия и растекания), и во-вторых, Z' (подпор) – разность потерь напора на этих же участках потока в стесненном и естественном руслах.

Гидравлический расчет естественного и неразмываемого русла[2] выполняется в предположении, что нам заданы: а) само неразмываемое русло; б) расчетный расход; в) размеры и очертание перемычки в плане; г) кривая связи бытовых (естественных) глубин и расходов реки.

В результате гидравлического расчета необходимо найти перепад Z и подпор Z' с тем, чтобы, зная эти величины, установить отметку гребня перемычки. Такую задачу для русла прямоугольного поперечного сечения приближенно можно решить, пользуясь следующими расчетными формулами [11-4]:

$$Z' = (\bar{i}_f - i_б)(L_{вх} + L_р) + (i_п - i_б) L_п + \Theta^2 \frac{v_с^2}{2g};$$

$$Z = \bar{i}_f (L_{вх} + L_р) + i_п L_п + \Theta^2 \frac{v_с^2}{2g}.$$

[1] Здесь ограничиваемся рассмотрением случая безотрывного обтекания потоком входного вертикального ребра перемычки (считаем, что бокового сжатия потока в пределах водосливного отверстия нет).

[2] Учет размываемости русла в значительной мере усложняет задачу. Этого вопроса здесь не будем касаться.

Здесь Θ – степень стеснения русла:

$$\Theta = b_п/B_р,$$

где $B_р$ – ширина естественного русла, $b_п$ – длина перемычки, заданная для расчета (рис. 11-29);

$i_б$ – уклон трения для естественного русла:

$$i_б = \frac{v_б^2}{C_б^2 R_б},$$

причем здесь $v_б$, $C_б$ и $R_б$ подсчитываются для сечения $б-б$;

$i_п$ – уклон трения для «протоки»:

$$i_п = \frac{v_c^2}{C_c^2 R_c},$$

причем здесь v_c, C_c и R_c подсчитываются для сечения $н-н$, уровень воды в котором принимается (в первом приближении) тот же, что и в сечении $б-б$; i_f – средний уклон трения для входного участка (длиной $L_{вх}$; см. ниже) и участка растекания, равный, например,

$$\bar{i}_f = \sqrt{i_б i_п};$$

$L_{вх}$ – длина входного участка. Ее рекомендуют принимать равной ширине B стесненной части русла («протоки»);

$L_п$ – длина «водосливного канала» (задана для расчета);

$L_в$ – длина водоворотной области:

$$L_в = \frac{b_п}{\operatorname{tg}\psi},$$

причем здесь угол ψ указан на чертеже.

Для вычисления $\operatorname{tg}\psi$ И. В. Лебедев рекомендует следующую формулу:

$$\operatorname{tg}\psi = a\frac{\lambda\beta\Theta}{\lg\dfrac{1}{1-\Theta}} = a\frac{\lambda B_р\Theta}{R_р\lg\dfrac{1}{1-\Theta}},$$

где λ – коэффициент гидравлического трения:

$$\lambda = \frac{8g}{C_р^2};$$

величины $B_р$, $R_р$ и $C_р$, входящие в указанные формулы, вычисляются для сечения $б-б$ при уровне воды в нем, совпадающем с естественным уровнем.

Как показывают опыты, коэффициент a, входящий в формулу для $\operatorname{tg}\psi$, будет

$$a = 0{,}01 + 0{,}056\,\Theta;$$

эта формула справедлива для случая, когда

$$0{,}2 \leqslant \Theta \leqslant 0{,}8 \text{ и } \lambda\frac{B_р}{R_р} \geqslant 3 \div 4.$$

В. ПРЯМЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ВОДОСЛИВЫ СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

§ 11-12. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВОДОСЛИВОВ СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

В случае водосливов со стенкой практического профиля приходится дополнительно различать:

1) вакуумные водосливы, характеризуемые тем, что на поверхности гребня водосливной стенки под струей образуется вакуум;

2) безвакуумные водосливы нормального очертания, когда положительное давление под струей близко к атмосферному;

3) безвакуумные водосливы с уширенным гребнем, когда положительное давление на гребне под струей значительно отличается от атмосферного.

Одна и та же водосливная стенка в зависимости от величины напора H может работать и как безвакуумная, и как вакуумная. Поясним это положение, пользуясь рис. 11-30.

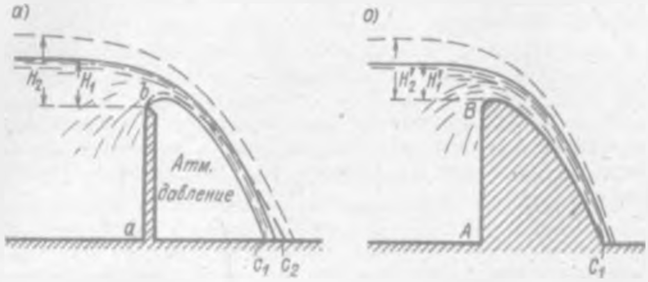


Рис. 11-30. Построение очертания поперечного профиля безвакуумной водосливной плотины

Положим, что на рис. 11-30, *а* имеется нормальный водослив с тонкой стенкой, причем напору H_1 отвечает струя, ограниченная снизу кривой bc_1. Под струей, ниспадающей с водосливной стенки, имеется атмосферное давление. Если выполнить водосливную стенку практического профиля ABC_1 (рис. 11-30, *б*) так, чтобы сливная поверхность BC_1 этой стенки была в точности очерчена по кривой bc_1, то при этом получим безвакуумный профиль нормального очертания. Если теперь увеличить напор на водосливе до величины H_2, то при этом нижняя граница струи на рис. 11-30, *а* примет положение bc_2; что касается водосливной стенки практического профиля (рис. 11-30, *б*), то здесь струя будет стремиться оторваться от сливной поверхности BC_1, причем под струей возникнет вакуум, и мы получим при увеличенном напоре H_2 уже вакуумный водослив.

§ 11-13. ОСНОВНАЯ РАСЧЕТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВОДОСЛИВОВ СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

С водосливными стенками практического профиля часто приходится сталкиваться при проектировании плотин (см. рис. 11-31, на котором изображена плотина). Как видно, в гребне плотины может быть устроено несколько водосливных отверстий, разделенных быками. Крайние отверстия (левое и правое) ограничены со стороны берегов так называемыми устоями. В общем случае отметки гребня водосливных стенок (∇ Гр. в. с.) в пределах отдельных отверстий могут быть разными. Однако далее мы будем рассматривать наиболее простой случай, когда указанные отметки одинаковы.

Для расчета водосливов со стенкой практического профиля (рис. 11-31) удобно пользоваться водосливной формулой, записанной в виде:

$$\boxed{Q = \sigma_п \varepsilon m B \sqrt{2g}\, H_0^{3/2},} \tag{11-100}$$

где B – ширина водосливного фронта:

$$B = \sum b, \tag{11-101}$$

здесь b – ширина отдельных водосливных отверстий; $\sigma_п$ – коэффициент подтопления, учитывающий уменьшение Q благодаря подтоплению водослива нижним бьефом; для неподтопленного водослива $\sigma_п = 1$; ε – коэффициент бокового сжатия:

$$\varepsilon = B_c/B, \tag{11-102}$$

здесь B_c – действительная, или, иначе, эффективная ширина водосливного фронта:

$$B_c = \sum b_c,$$

где b_c – так называемая сжатая ширина отдельных струй (см. рис. 11-7); m – коэффициент расхода водослива.

В том случае, когда

$$\Omega_в > 4(BH), \tag{11-103}$$

где $\Omega_в$ – площадь живого сечения верхнего бьефа по линии $в-в$ (рис. 11-1), скоростью подхода следует пренебрегать и считать [1]

$$H_0 = H. \tag{11-103'}$$

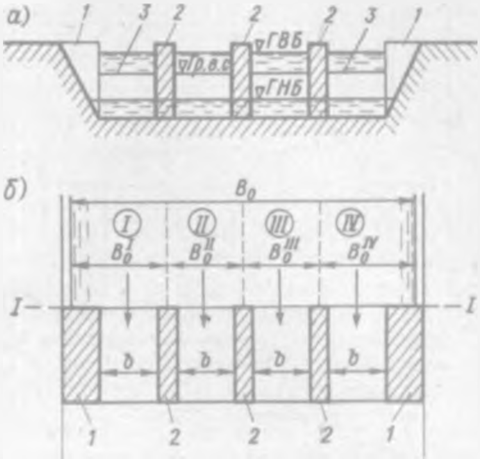


Рис. 11-31. Плотина: *а* – вид с нижнего бьефа, *б* – план плотины

1 – устои; *2* – быки; *3* – гребень водосливной плотины (Гр. в. с.)

Основным вопросом расчета водослива со стенкой практического профиля является вопрос о величине коэффициентов $\sigma_п$, ε и m. Зная для данного водослива величины этих коэффициентов, можем по формуле (11-100) легко решать следующие три основные задачи: [2]

1) дано B и H; требуется найти Q;
2) дано H и Q; требуется найти B;
3) дано B и Q; требуется найти H.

Имея это в виду, ниже остановимся на пояснении вопроса о том, каким образом следует устанавливать численные значения коэффициентов $\sigma_п$, ε и m для того или другого конкретного случая водослива.

§ 11-14. КОЭФФИЦИЕНТ ПОДТОПЛЕНИЯ ВОДОСЛИВА СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Величину $\sigma_п$ надлежит устанавливать на основании экспериментальных данных, представленных в виде кривых, показанных на рис. 11-32.

Как видно, величина $\sigma_п$ зависит от отношения $h_п : H_0$, где $h_п$ – высота подтопления, т. е. превышение горизонта воды нижнего бьефа над гребнем водослива.

На рис. 11-32 нами даются три кривые:

---

[1] Погрешность в расчете величины Q, получающаяся из-за пренебрежения скоростью подхода, в случае (11-103) не превышает $\sim 2\%$.

[2] В случае учета скорости подхода v_0 некоторые из этих задач приходится решать по формуле (11-100) методом последовательного приближения.

а) кривая *I* относится к вакуумным водосливам (см. § 11-12);

б) кривая *II* – к безвакуумным водосливам нормального очертания;

в) кривая *III* – к безвакуумным водосливам с уширенным гребнем (приближающимся к водосливу с широким порогом).

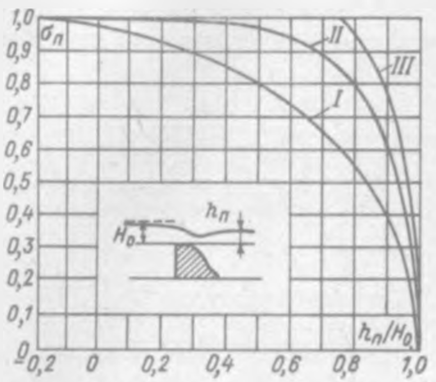


Рис. 11-32. График для определения коэффициента подтопления $\sigma_п$ водослива вакуумного (*I*), безвакуумного нормального очертания (*II*), безвакуумного с уширенным гребнем (*III*)

Сообразуясь с этими кривыми, и следует решать вопрос о величине $\sigma_п$.[1]

Для определения $\sigma_п$ может быть использована [при положительных значениях $h_п/H_0$ и при условии $h_п < (1 - 1{,}7m)^{2/5} H_0$] также формула Г. К. Дерюгина, дающая значение $\sigma_п$ в зависимости не только от $h_п/H_0$, но и от коэффициента расхода рассматриваемого водослива m:

$$\sigma_п = \sqrt{1 - \left[1 - \left(1 - \frac{h_п}{H_0}\right)\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{m}{0{,}59}\right)^{2/5}}\right]^2}. \tag{11-104}$$

Если в нижнем бьефе имеется незатопленный гидравлический прыжок, то величина $\sigma_п$ должна быть принята равной 1,0, так как в этом случае водослив будет не подтоплен.

§ 11-15. КОЭФФИЦИЕНТ БОКОВОГО СЖАТИЯ ДЛЯ ВОДОСЛИВА СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

При наличии о д н о г о в о д о с л и в н о г о отверстия величина коэффициента бокового сжатия ε для водослива со стенкой практического профиля определяется так, как то было описано в § 11-8, п. 3° применительно к водосливу с широким порогом [см., в частности, приближенные рекомендации (11-60′) и (11-60″), а также расчетную зависимость (11-62)].

В случае р я д а о т в е р с т и й (см. плотину на рис. 11-31) при $(H_0 : b) \leqslant 1{,}0$ приближенное значение ε, входящее в зависимость (11-100), иногда рекомендуют определять по формуле

$$\varepsilon = 1 - 0{,}2\,\frac{\xi_у + (n-1)\,\xi_б}{n}\,\frac{H_0}{b}, \tag{11-105}$$

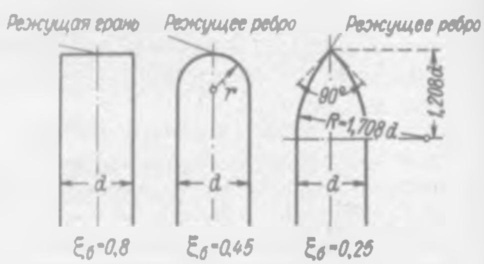


Рис. 11-33. Различные очертания (в плане) верховой части быков

где n – число отдельных водосливных отверстий (одинакового размера); $\xi_у$ – к о э ф ф и ц и е н т у м е н ь ш е н и я, учитывающий скругление вертикальных ребер устоев (см. рис. 11-22); $\xi_б$ – к о э ф ф и ц и е н т у м е н ь ш е н и я, учитывающий форму быков в плане (см. рис. 11-33).[2]

[1] В литературе приводится только одна кривая *II*, что является недостаточным.

[2] Формула (11-105) справедлива для условий, указанных в сноске на стр. 421.

Уточненный расчет плотины (рис. 11-31), имеющей ряд отверстий, приходится выполнять, рассматривая каждое ее отверстие в отдельности. При этом план верхнего бьефа плотины расчленяем (согласно Н. П. Розанову) на отдельные фрагменты: *I*, *II*, *III*... (рис. 11-31, *б*), причем устанавливаем для каждого отдельного отверстия свою «ширину верхнего бьефа» (см. на рисунке B'_0, B''_0 ...) и свою величину ε. Разумеется, прилагая формулу (11-100) к отдельному отверстию под величиной B в этой формуле должны понимать ширину данного отверстия b.

При желании оперировать все же полной шириной водосливного фронта $B = \Sigma b$ в формулу (11-100) следует вводить некоторое среднее значение ε из найденных для отдельных отверстий. Такое среднее значение ε в первом приближении можно найти в некоторых случаях и не прибегая к фрагментированию верхнего бьефа, описанному выше. При этом, используя формулу (11-100), поступаем следующим образом: а) отношение b/B_0, входящее в формулу (11-62), заменяем отношением B/B_0, где B_0 — полная ширина русла в верхнем бьефе, б) отношение же a/b, входящее в указанную формулу, заменяем отношением $a : \frac{1}{n} B$, где n — намечаемое число отдельных отверстий.

В заключение отметим, что в некоторых случаях верховую («режущую») грань быков выдвигают в верхний бьеф (по отношению к верховой грани *I – I* самой плотины; рис. 11-31, *б*). При этом величина ε может ощутимо изменяться. Однако этого случая мы здесь рассматривать не будем. Укажем только, что при выдвижении быков в верхний бьеф на расстояние большее $3H$ величину ε для отверстий, ограниченных такими быками, всегда следует принимать (при $c_в > 3H$ и любом очертании быков) равной единице.

§ 11-16. КОЭФФИЦИЕНТ РАСХОДА ВОДОСЛИВА СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Водосливы со стенкой практического профиля разделяются на отдельные группы. Для каждой группы даются на основании опытов, проведенных в лаборатории, численные данные, необходимые для определения коэффициентов расхода m. Различают, в частности, следующие группы водосливов:

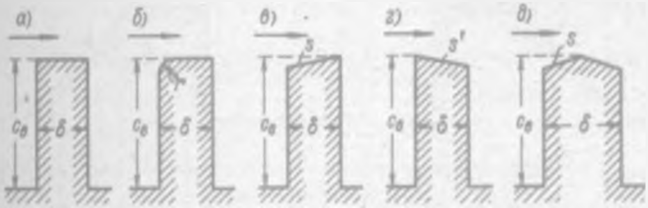


Рис. 11-34. Прямоугольные водосливные стенки

1) со стенкой прямоугольного поперечного сечения (рис. 11-34);

2) со стенкой трапецеидального очертания (рис. 11-35);

3) со стенкой треугольного сечения (рис. 11-36);[1]

4) со стенкой трапецеидального очертания со скругленными углами (рис. 11-37);

5) с водосливной стенкой нормального очертания (Кригера – Офицерова), применяемой часто при сооружении водосливных плотин (рис. 11-38).

Н. Н. Павловский предложил выражать коэффициент расхода для той или другой группы водосливов при помощи следующей обобщенной формулы:

$$m = m_т\sigma_п\sigma_ф, \qquad (11\text{-}106)$$

---

[1] Эти стенки часто могут работать как водослив с тонкой стенкой.

где m_r — приведенный коэффициент расхода, найденный опытами: а) для определенного напора H, называемого **профилирующим** и обозначаемого через $H_{прф}$, и б) для одного из профилей, относящегося к данной группе (для, так сказать представителя данной группы); $\sigma_н$ — корректив, учитывающий изменение m при отклонении напора H от величины $H_{прф}$; этот корректив

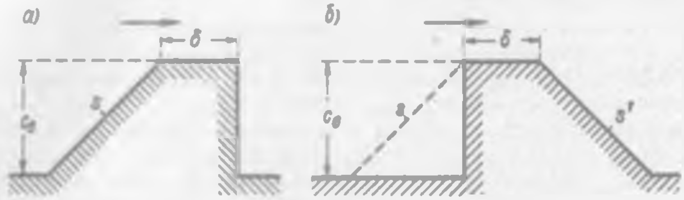


Рис. 11-35. Трапецеидальные водосливные стенки

называется **коэффициентом полноты напора**; $\sigma_ф$ — корректив, учитывающий изменение m при переходе от исследованного в лаборатории представителя данной группы к другому, интересующему нас профилю, относящемуся к той же группе водосливов; этот корректив называется **коэффициентом формы**.

Рис. 11-36. Треугольные водосливные стенки

Как видно, каждая группа водосливов характеризуется своим значением m. Дополнительно в литературе приводятся различные эмпирические формулы для поправок $\sigma_н$ и $\sigma_ф$. Например, для группы прямоугольных водосливных стенок (см. выше п. 1) даются следующие зависимости для $\sigma_н$ и $\sigma_ф$ (обозначения см. на рис. 11-34):

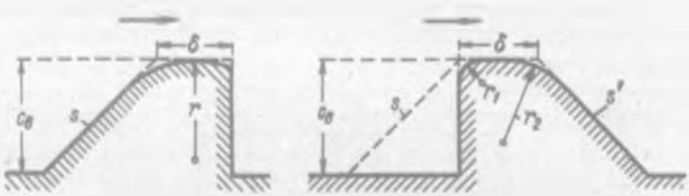


Рис. 11-37. Водосливные стенки трапецеидального очертания со скругленными углами

$$\sigma_н = 0{,}700 + 0{,}185\frac{H}{\delta}; \qquad (11\text{-}107)$$

$$\sigma_ф = 1 + \frac{r}{H} \qquad (11\text{-}108)$$

(для стенки типа рис. 11-34, *б*).

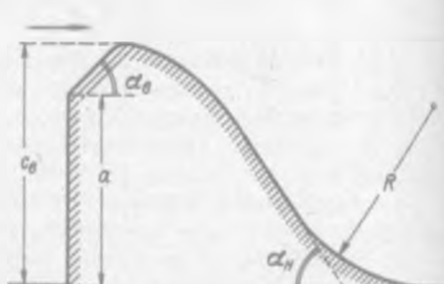


Рис. 11-38. Водосливная стенка нормального очертания (Кригера — Офицерова)

Очертание безвакуумных водосливных стенок нормального очертания (Кригера — Офицерова) проектируют, как показано на рис. 11-30, *б*; водосливная поверхность стенки BC_1 очерчивается по нижней границе bc_1 струи, получающейся в случае перелива воды через тонкую водосливную стенку (рис. 11-30, *а*). Напор H, которому отвечает принятая линия bc_1, считается равным профилирующему (именно для этого напора в данном случае экспериментальным путем были установлены величины m_r).

Соответствующие данные, необходимые для определения численных значений m, приводятся ниже.

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАСХОДА m ДЛЯ ВОДОСЛИВА СО СТЕНКОЙ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ [1]

1°. **Водосливная стенка Кригера – Офицерова** (рис. 11-38). Для этой стенки при использовании формулы (11-106) следует принимать:

а) в случае большой высоты стенки, когда

$$c_в \geqslant 3H_{прф},$$

величину m_r равной $m_r = 0{,}504$; при этом коэффициент формы $\sigma_ф$ берется из табл. 11-3 в зависимости от углов $\alpha_н$ и $\alpha_в$ и отношения $a/c_в$ (обозначения см. на рис. 11-38); коэффициент полноты напора $\sigma_н$ – из табл. 11-4 в зависимости от угла $\alpha_н$ и от величины отношения $H/H_{прф}$;

б) в случае

$$0{,}15H_{прф} < c_в < 3H_{прф},$$

когда $\alpha_в = 90°$ (т. е. когда $a \approx c_в$, причем верховая грань стенки вертикальна), величину m_r равной

$$m_r = 0{,}504 - 0{,}012\frac{H_{прф}}{c_в};$$

Таблица 11-3

Коэффициенты формы $\sigma_ф$ для безвакуумной водосливной стенки Кригера-Офицерова

$\alpha_в$, °	$\alpha_н$, °	$a/c_в$ = 0	$a/c_в$ = 1,0	$\alpha_в$, °	$\alpha_н$, °	$a/c_в$ = 0	$a/c_в$ = 1,0
15	15	0,88	0,93	55	45	0,98	0,99
	30	0,91	0,97		60	0,99	1,00
	45	0,92	0,99	75	15	0,93	0,93
	60	0,93	1,00		30	0,97	0,97
35	15	0,91	0,93		45	0,99	0,99
	30	0,94	0,97		60	1,00	1,00
	45	0,96	0,99	90	15	0,93	0,93
	60	0,96	1,00		30	0,97	0,97
55	15	0,92	0,93		45	0,99	0,99
	30	0,96	0,97		60	1,00	1,00

Примечание. При $\alpha_н > 60°$ значения $\sigma_ф$ надлежит принимать отвечающими $\alpha_н = 60°$.

Таблица 11-4

Коэффициенты полноты напора $\sigma_н$ для безвакуумной водосливной стенки Кригера-Офицерова [2]

$\dfrac{H}{H_{прф}}$	$\alpha_н$, ° 20	30	40	50	60	70	80	90
0,2	0,89	0,89	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85	0,84
0,4	0,93	0,93	0,92	0,92	0,91	0,91	0,91	0,90
0,6	0,96	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95	0,94	0,94
0,8	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,2	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02
1,4	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05
1,6	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,06
1,8	1,06	1,06	1,06	1,07	1,07	1,07	1,08	1,08
2,0	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10

[1] По данным Н. П. Розанова и А. С. Офицерова.

[2] Из предыдущего изложения ясно, что величины m, приводимые ниже, всегда должны относиться к плоской задаче, поскольку обстоятельства движения, отличающие плоское движение от пространственного, учитываются в формуле (11-100) коэффициентом сжатия ε.

при этом коэффициент $\sigma_{\text{ф}}$ берется из табл. 11-3 в зависимости от угла $\alpha_{\text{к}}$ (при величин $\alpha_{\text{в}} = 90^\circ$ и $a/c_{\text{в}} = 1{,}0$); коэффициент полноты напора $\sigma_{\text{н}}$ – из табл. 11-4 в зависимости от $H/H_{\text{прф}}$ (для $\alpha_{\text{в}} = 90^\circ$).

Примечание. При наличии на гребне водосливной стенки плоской горизонтальной площадки, шириной до $2H$, значение m следует устанавливать, руководствуясь указаниями, приведенными ниже в п. 2°.

2°. Водосливные стенки трапецеидального поперечного профиля со скругленными углами (рис. 11-39):

1) Для высокого профиля ($c_{\text{в}} \geqslant 3H$), имеющего размер $\delta = (1 \div 1{,}5)\,H_{\text{прф}}$, величина

$$m = 0{,}48.$$

2) Для криволинейных профилей (см. рис. 11-37) средней высоты ($2H < c_{\text{в}} <$ ...) или низких ($0{,}5H \leqslant c_{\text{в}} \leqslant 2H$), имеющих вертикальную низовую или верховую грань, коэффициент расхода следует принимать:

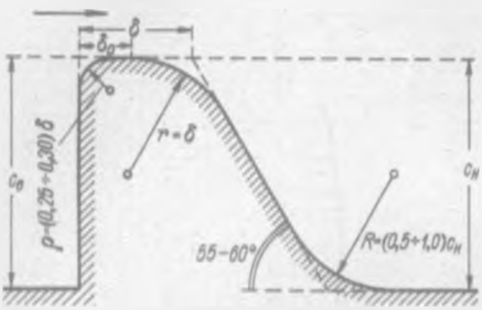


Рис. 11-39. Элементы очертания трапецеидальной водосливной стенки

а) в случае профиля с наклонной верховой гранью – на 3% больше, чем для того трапецеидального профиля (см. ниже), скруглением углов которого был получен данный криволинейный профиль;

б) в случае профиля с наклонной низовой гранью – на 5% больше, чем для трапецеидального профиля (см. ниже), скруглением углов которого был получен данный криволинейный профиль.

Примечание. Для высокого профиля ($c_{\text{в}} > 3H$; рис. 11-39) с вертикальной верховой гранью и низовой поверхностью, очерченной по Кригеру – Офицерову (или – при свободном истечении – низовой поверхностью, вписывающейся в профиль Кригера – Офицерова), величину m можно определять по более точным формулам Г. К. Дерюгина:

а) в случае, когда входное ребро скруглено радиусом $\rho = (0{,}20 \div 0{,}25)\,H$:

$$m = 0{,}40\left(\frac{H}{\delta_0}\right)^{1/6};$$

б) в случае нескругленного входного ребра:

$$m = 0{,}37\left(\frac{H}{\delta_0}\right)^{1/6}.$$

3°. Водосливные стенки прямоугольного поперечного сечения при свободном доступе воздуха под струю:

1) Для чистого прямоугольного профиля (рис. 11-34, *а*) при

$$H \leqslant c_{\text{в}} \leqslant 4H \quad \text{и} \quad 0{,}6H \leqslant \delta \leqslant 2H$$

коэффициент расхода

$$m = 0{,}42\sigma_{\text{н}},$$

где $\sigma_{\text{н}}$ определяется по формуле (11-107).

Примечание. При $0{,}5H < \delta < 0{,}6H$ коэффициент $\sigma_{\text{н}}$ следует считать равным 1,0, т. е. полагать

$$m = 0{,}42.$$

При $c_{\text{в}} > 4H$ значение m можно принимать на 3% меньше найденного по указанной выше формуле.

2) Для прямоугольного профиля с закругленным входным ребром (рис. 11-34, *б*) при

$$H \leqslant c_{\text{в}} \leqslant 4H;\ 0{,}5\,H < \delta < 2H;\ r = (0{,}1 \div 0{,}2)\,\delta$$

коэффициент расхода

$$m = 0{,}44\,\sigma_{п},$$

где $\sigma_{п}$ определяется по формуле (11-107).

3) Для прямоугольной водосливной стенки с верхней гранью, наклоненной в сторону верхнего бьефа (рис. 11-34, *в*), при

$$H \leqslant c_{в} \leqslant 4H \text{ и } 0{,}5\,H < \delta < 2H$$

коэффициент расхода m надлежит принимать:

а) в случае, если котангенс угла наклона верхней грани к горизонту $s > 10$, согласно п. 1 (см. выше);

б) в случае, если котангенс $s = 10 \div 5$, согласно формуле, приводимой в п. 2.

Таблица 11-5

Коэффициенты расхода m для высоких трапецеидальных профилей ($c_{в} \geqslant 3H$) при свободном доступе воздуха под струю (рис. 11-40)

s	H/δ			
	0,5	1,0	1,5	2,0
0	0,32	0,36	0,39	0,41
0,5	0,34	0,38	0,41	0,44

Примечания. 1. Значениями m в крайних вертикальных графах таблицы (отвечающих водосливу с широким порогом и водосливу с тонкой стенкой) можно пользоваться только для интерполяции по величине H/δ. 2. Значениями m в первой строке таблицы можно пользоваться только для интерполяции по величине s.

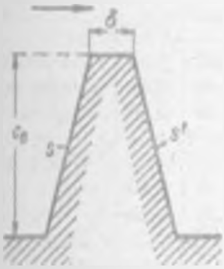


Рис. 11-40. Высокая трапецеидальная водосливная стенка

4) Для прямоугольной стенки с верхней гранью, наклоненной в сторону нижнего бьефа (рис. 11-34, *г*) при

$$H \leqslant c_{в} \leqslant 4H;\ 0{,}5H < \delta < 2H;\ s' > 20{,}0,$$

где s' – котангенс угла наклона верхней грани к горизонту, коэффициент расхода m можно принимать по данным п. 1 (см. выше).

5) Для прямоугольного симметричного профиля с двухскатным верхом (рис. 11-34, *д*) при

$$H \leqslant c_{в} \leqslant 4H \text{ и } 0{,}5H < \delta < 2H$$

коэффициент расхода m следует назначать, как указано в п. 3.

4°. Водосливные стенки трапецеидального и треугольного поперечного профиля:

1) Для высоких трапецеидальных профилей ($c_{в} \geqslant 3H$; рис. 11-40) при свободном доступе воздуха под струю в случае

$$s \leqslant 0{,}5 \text{ и } s' \leqslant 0{,}5,$$

где s и s' – котангенсы угла наклона боковых граней водосливной стенки (соответственно верховой и низовой) к горизонту, коэффициент расхода m принимается по табл. 11-5.

2) Для трапецеидальных профилей (см. рис. 11-35) средней высоты ($2H < c_{в} < 3H$) или низких ($0{,}5H \leqslant c_{в} \leqslant 2H$), имеющих вертикальную низовую или верховую грань, коэффициент расхода принимается согласно табл. 11-6, в которой через s и s' обозначены котангенсы углов наклона боковых граней к горизонту.

Таблица 11-6

Коэффициенты расхода m для трапецеидальных профилей средней высоты и низких (см. рис. 11-35)

Тип профиля	H/δ				Примечание
	0,5	1,0	1,5	2,0	
I. Профили средней высоты ($2H < c_в < 3H$):					
а) с наклонной верховой гранью (рис. 11-35, *а*):					
при $s = 1,0$	0,36	0,39	0,41	0,44	При свободном доступе воздуха под струю
» $s = 2,0$	0,37	0,40	0,41	0,44	
б) с наклонной низовой гранью (рис. 11-35, *б*):					
при $s' = 1,0$	0,33	0,37	0,41	0,42	
» $s' = 2,0$	0,33	0,36	0,40	0,42	
II. Низкие профили ($0,5H < c_в < 2H$):					
а) с наклонной верховой гранью (рис. 11-35, *а*):					
при $s = 3,0$	0,37	0,40	0,41	0,42	При свободном доступе воздуха под струю
» $s = 5,0$	0,37	0,39	0,40	0,41	
» $s = 10,0$	0,37	0,39	0,39	0,40	
б) с наклонной низовой гранью (рис. 11-35, *б*):					
при $s' = 3,0$	0,34	0,36	0,38	0,40	
» $s' = 5,0$	0,34	0,35	0,37	0,38	
» $s' = 10,0$	0,34	0,35	0,36	0,36	

3) Для треугольных профилей с вертикальной верховой гранью и наклонной низовой гранью (рис. 11-36) при $c_в \geqslant 3H$ коэффициент расхода m принимается согласно табл. 11-7, где s' – котангенс угла наклона низовой грани к горизонту.

Таблица 11-7

Коэффициент расхода m для треугольных профилей с вертикальной верховой гранью при $c_в > 3H$ (см. рис. 11-36)

s'	1	2	5	10
m	0,47	0,43	0,38	0,36

5°. Для низких водосливных стенок ($c_в < 5H$) любого прямоугольного очертания в поперечном сечении:[1]

$$m = 0,385 + (m' - 0,385)\,k,$$

где m' – коэффициент расхода для данной стенки, но при высоте ее $c_в \geqslant 5H$; k – поправочный коэффициент, величина которого принимается в зависимости от отношения $c_в/H$:

$c_в/H$	5,0	3,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,0
k	1,00	0,90	0,84	0,67	0,46	0,23	0,00

---

[1] Приводимая формула (предложенная Г. К. Дерюгиным) относится также и к водосливам с тонкой стенкой и с широким порогом.

Чтобы решить задачу об истечении воды через рассматриваемый водослив, необходимо знать закон изменения напоров H вдоль гребня AB водослива. Существует ряд попыток решить этот вопрос. Однако до сего времени мы не имеем еще удовлетворительного решения. В ответственных случаях величину расхода Q для бокового водослива определяют на основании специальных опытов, поставленных в лаборатории (хотя и здесь встречаются некоторые затруднения при решении вопросов моделирования данного явления).

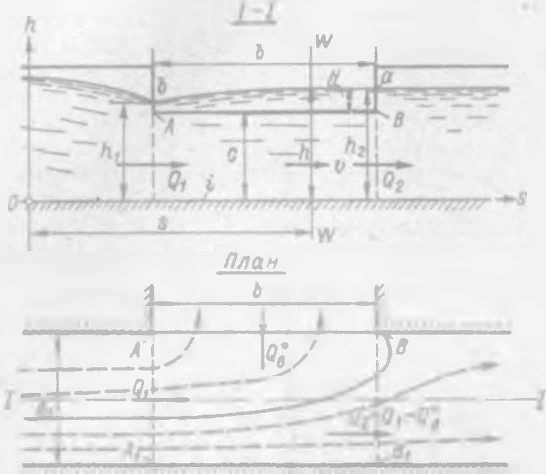


Рис. 11-43. Боковой водослив

Для приближенной оценки полной величины расхода $Q_в^0$ воды, переливающейся через неподтопленный боковой водослив, некоторые авторы рекомендуют следующую формулу:

$$Q_в^0 = 0{,}4b\sqrt{2g}\,H_{ср}^{3/2}, \tag{11-110}$$

где $H_{ср}$ – средний напор на водосливе.

В [11-8] рекомендуется более точный способ для определения расхода воды $Q_в^0$, а также для построения свободной поверхности потока на прилегающих к водосливу участках русла. Однако и этот способ для повышения точности расчета иногда предполагается корректировать на основании специально поставленных опытов.

§ 11-19. ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ В ПЛАНЕ ВОДОСЛИВЫ

Для расчета таких водосливов (рис. 11-6, a) пользуются приближенной формулой

$$Q = m\left(\sum b_п + \sigma_к \sum b_к\right)\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}, \tag{11-111}$$

где $\sum b_п$ – сумма длин всех «прямых» участков гребня водослива: $\sum b_к$ – сумма всех длин всех «косых» участков гребня водослива (о $\sigma_к$ см. § 11-17).

§ 11-20. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше всюду рассматривалось установившееся истечение через водослив, т. е. истечение, происходящее при напоре H, не изменяющемся во времени.[1] Однако в практике встречаются случаи, когда с течением времени верхний бьеф наполняется или опорожняется, причем H изменяется во времени.

Такие водосливы рассчитываются аналогично отверстиям, работающим при переменном напоре (см. предыдущую главу). Более подробно этот вопрос рассматривается в курсе «Гидротехнические сооружения» в связи с расчетом наполнения и опорожнения водохранилищ.

---

[1] Имеется в виду неподтопленный водослив.

Необходимо еще отметить, что пролеты больших мостов, устраиваемых через реки, с некоторым приближением (см. § 11-11) могут рассматриваться как подтопленные водосливы (без порога). Для расчета отверстий больших мостов существуют также специально разработанные методы, которых мы здесь касаться не будем.

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО РАСЧЕТУ ВОДОСЛИВОВ

№ 1. На рис. 11-44, *а*, *б*, *в* изображены три схемы водослива с тонкой стенкой (с указанием отметок горизонта воды в верхнем и нижнем бьефах). Необходимо установить, какой из этих водосливов является подтопленным и какой неподтопленным.

№ 2. На рис. 11-45, *а*, *б* изображены две схемы водослива с широким порогом (с указанием отметок горизонта воды в верхнем и нижнем бьефах). Требуется установить, исходя из критерия Беланже и критериев, приведенных в [7, 8, 13], какой из этих водосливов является подтопленным и какой неподтопленным (скоростью подхода v_0 можно пренебречь).

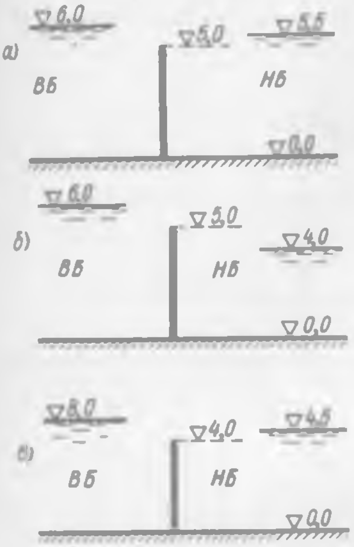


Рис. 11-44. К задаче № 1

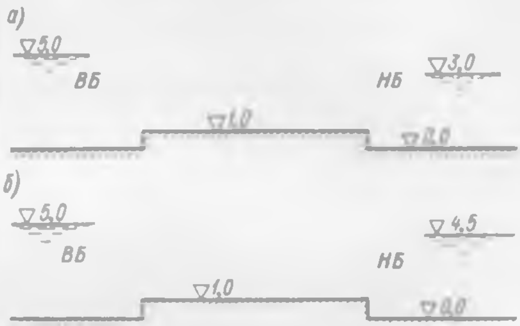


Рис. 11-45. К задаче № 2

№ 3. На рис. 11-46 представлены две схемы водослива со стенкой практического профиля: безвакуумной (рис. 11-46, *а*) и вакуумной (рис. 11-46, *б*). Требуется установить, какой из этих водосливов является подтопленным и какой неподтопленным.

№ 4. На рис. 11-47 представлен водослив со стенкой практического профиля нормального очертания (Кригера-Офицерова). Имеется одно водосливное отверстие, шириной $b = B$.

Дано: геометрический напор на водосливе $H = 5{,}0$ м; высота водосливной стенки $c = 10{,}0$ м; высота подтопления $h_п = 1{,}0$ м; ширина русла в верхнем бьефе $B_0 = 60{,}0$ м (русло верхнего бьефа считается прямоугольным); ширина заданного водосливного отверстия $B = 50{,}0$ м.

Требуется найти расход воды Q.

Решение. Для расчета пользуемся основной зависимостью (11-100):

$$Q = \sigma_п \varepsilon m B \sqrt{2g}\, H_0^{3/2}. \qquad (A)$$

В эту зависимость входит полный напор H_0, учитывающий скорость подхода v_0.

Прежде всего требуется выяснить вопрос о возможности пренебрежения скоростью подхода v_0. С целью решения такого вопроса пользуемся зависимостью (11-103):

$$\Omega_в = B(c + H) = 60 \cdot (10 + 5) = 900 \text{ м}^2;$$

$$4BH = 4 \cdot 50 \cdot 5 = 1000 \text{ м}^2;$$

как видно, $\Omega_в < 4BH$,

следовательно, скоростью подхода пренебрегать нельзя. В связи с этим в форм... (А) не представляется возможным заменить величину H_0 геометрическим напором ... и тем самым упростить нашу задачу.

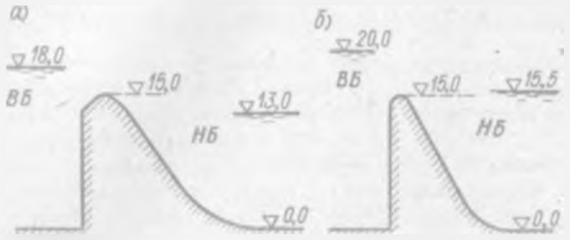


Рис. 11-46. К задаче № 3

Необходимость учета скорости подхода v_0 вынуждает решать данную задачу методом последовательного приближения. Согласно этому методу поступаем следующим образом.

1-е приближение. Считаем, что

$$v_0 = 0,$$

причем получаем

$$H_0 = H.$$

Далее определяем коэффициенты $\sigma_п$, ε и m.

1. Коэффициент подтопления $\sigma_п$ устанавливаем по графику на рис. 11-32 для величины

$$\frac{h_п}{H} = \frac{1,0}{5,0} = 0,2,$$

причем пользуемся кривой *II* этого графика. Как видно, величина $\sigma_п$ оказывается равной:[1]

$$\sigma_п = 0,99.$$

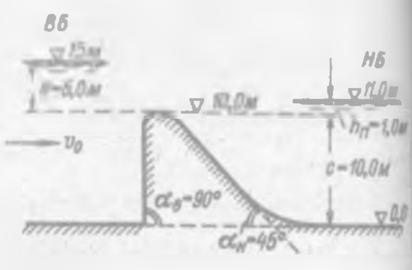


Рис. 11-47. К задаче № 4

2. Коэффициент бокового сжатия определяем по формуле (11-60″):

$$\varepsilon = 1 - 0,2\xi_y \frac{H_0}{B}; \qquad (Б)$$

величину ξ_y, входящую в эту формулу, принимаем (см. рис. 11-22):

$$\xi_y = 0,7;$$

при этом получаем $\varepsilon = 1 - 0,20 \cdot 0,7 \frac{5}{50} = 0,986$.

Вычислим еще значение ε по относительно точной формуле (11-62):

$$\varepsilon = 1 - \frac{K_{b/B_0}}{1 + c_в/H}\left(K_{a/H}\frac{c_в}{b} + K_{a/b}\right), \qquad (Б')$$

где в нашем случае

$$b/B = \frac{B}{B_0} = \frac{50}{60} = 0,833;$$

радиусы скругления входных вертикальных ребер устоев принимаем $r = a = 1,0$ м; при этом получаем

$$\frac{a}{H} = \frac{1,0}{5,0} = 0,2; \quad \frac{a}{b} = \frac{1,0}{50} = 0,02.$$

[1] Применяя график на рис. 11-12, можно убедиться, что в данном случае за водосливом отогнанного прыжка не будет. С большей точностью этот вопрос можно решить, применяя график рис. 12-13 (см. следующую главу, стр. 461). При наличии отогнанного гидравлического прыжка за водосливом следовало бы принять величину $\sigma_п = 1,0$.

Вычислим коэффициенты K, входящие в формулу (Б″):

по зависимости (11-64):

$$K_{b/B_0} = 1,0 - 1,4\,(0,833 - 0,2)^{3/2} = 0,30;$$

по зависимости (11-66):

$$K_{a/H} = 0,17 - \sqrt{\frac{1}{30}\,0,2} = 0,09;$$

по зависимости (11-68):

$$K_{a/b} = 0,17 - \sqrt{\frac{1}{30}\cdot 0,02} = 0,14.$$

Подставляя найденные величины в формулу (Б″), получаем

$$\varepsilon = 1 - \frac{0,3}{1 + \dfrac{10,0}{5,0}}\left(0,99\cdot\frac{10,0}{50,0} + 0,14\right) = 0,984.$$

Как видно, в данном частном случае приближенная формула (11-60″) дала достаточно хорошие результаты.

3. Коэффициенты расхода водослива m находим по формуле (11-106) (см. также п. 1°; стр. 437)

$$m = 0,504\,\sigma_н\sigma_ф,$$

где коэффициент полноты напора $\sigma_н$, принимая $H = H_{прф}$, считаем [1]

$$\sigma_н = 1,0;$$

коэффициент формы $\sigma_ф$, согласно табл. 11-3 (на стр. 438) (считая $\alpha_в = 90°$ и $\alpha_н = 45°$; см. чертеж), получаем

$$\sigma_ф = 0,993.$$

Таким образом,

$$m = 0,504\cdot 1,0\cdot 0,993 = 0,50.$$

Подставляя найденные величины в формулу (А), находим величину расхода в первом приближении:

$$Q = 0,99\cdot 0,984\cdot 0,5\cdot 50\cdot\sqrt{2\cdot 9,80}\cdot 5^{3/2} = 1210 \text{ м}^3/\text{с}.$$

2-е приближение. Скорость подхода во втором приближении считаем

$$v_0 = \frac{Q}{(H + c)\,B_0} = \frac{1210}{(5 + 10)\cdot 60} = 1,35 \text{ м/с}.$$

При этом полный напор H_0 оказывается

$$H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = 5 + \frac{1,1\cdot 1,35^2}{2\cdot 9,80} = 5,1 \text{ м}.$$

Что касается величин $\sigma_п$, ε и m, то их в данном случае сохраняем прежними. [2]

Расход Q во втором приближении будет

$$Q = 0,99\cdot 0,986\cdot 0,5\cdot 50\sqrt{2\cdot 9,80}\cdot 5,1^{3/2} = 1250 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Как видно, величина Q в результате второго приближения увеличилась на 3%. Отсюда заключаем, что к третьему приближению, согласно которому

[1] Здесь мы предполагаем, что очертание профиля Кригера – Офицерова построено для профилирующего напора $H_{прф} = 5,0$ м. Если бы $H_{прф}$ был бы не равен 5,0 м, то для установления $\sigma_н$ пришлось бы пользоваться табл. 11-4.

[2] Как видно из графика на рис. 11-32, с изменением H_0 должен несколько измениться только коэффициент $\sigma_п$, однако этим изменением здесь пренебрегаем.

$$v_0 = \frac{1250}{(5+10)\ 60} = 1{,}39 \text{ м/с},$$

обращаться нет надобности; ясно, что уточненное значение Q, полученное в тре[...] приближении, будет отличаться на пренебрежимо малую величину от $Q = 1250$ м[...] которое мы и принимаем как окончательное значение расхода.

№ 5. Для водослива со стенкой практического профиля, указанного в задаче № [...] требуется найти напор H, если величина $Q = 900$ м^3/с.

Решение. Для расчета пользуемся зависимостью (А), приведенной в задаче № [...]

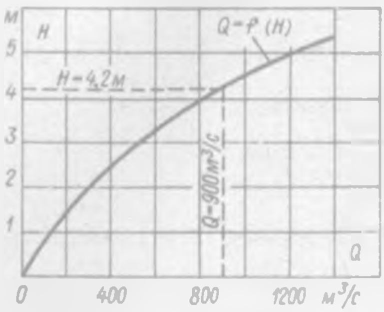


Рис. 11-48. К задаче № 5

$$Q = \sigma_п \varepsilon m B \sqrt{2g}\, H_0^{3/2}. \qquad (А)$$

В этой формуле величины $\sigma_п$, ε, m явл[...] функциями от напора H, в связи с чем [...] непосредственно величину H из уравнения (А) нельзя.[1] Учитывая это обстоятельство, реш[...] уравнение (А) в отношении величины H пут[...] подбора.

В большинстве практических случаев пр[...] расчете водосливов скоростью подхода мож[...] пренебрегать. Учитывая это обстоятельство, в начале расчета будем считать

$$H = H_0.$$

Задаваясь в 1-й строке приводимой таблицы (форма 1) различными значениями H, вычисляем по формуле (А) соответствующие величины расхода Q.

По данным 1-й и 7-й строк таблицы (форма 1) строим на рис. 11-48 график

$$Q = f(H);$$

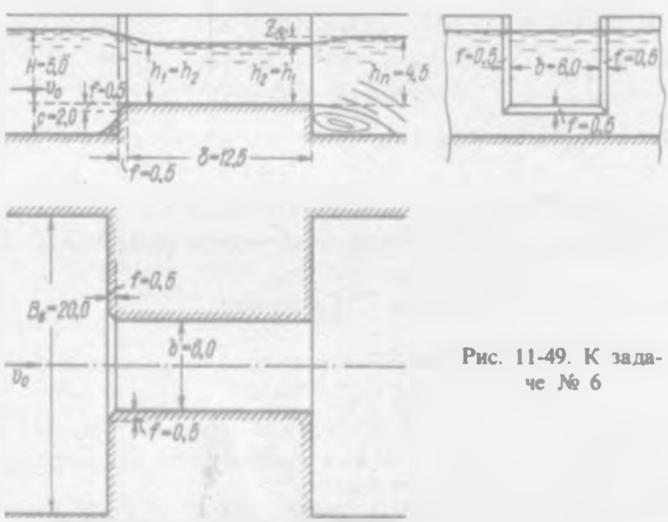


Рис. 11-49. К задаче № 6

откладывая по горизонтальной оси этого графика заданную величину Q ($Q = 900$ м^3/с), находим величину $H = 4{,}2$ м.

Найдя это значение H, проверим теперь, пользуясь соотношением (11-103), приемлемость принятого выше допущения, согласно которому считали, что $H = H_0$.

---

[1] Величина профилирующего напора была принята нами $H_{прф} = 5{,}0$ м; поэтому с изменением H будет меняться отношение $H/H_{прф}$, а следовательно, будет изменяться и коэффициент полноты напора $\sigma_н$.

№ строки	Величина	Единица измерения	Задаваемые и находимые численные значения			Примечание
1	H	м	3,0	4,0	5,0	
2	$H^{3/2}$	$м^{3/2}$	5,2	8,0	11,2	
3	$h_п : H$	—	0,333	0,25	0,20	
4	$\sigma_п$	—	0,99	0,99	0,99	По графику на рис. 11-32
5	ε	—	0,992	0,989	0,986	По формуле (11-60″) при $\xi_{у} = 0,7$
6	m	—	0,47	0,486	0,50	По формуле (11-106) и таблицам 11-3 и 11-4
7	Q	$м^3/с$	533	845	1210	По формуле (А)

$$\Omega_в = B_0(c + H) = 60 \cdot (10 + 4,2) = 852\ м^2;$$

$$4HB = 4 \cdot 4,2 \cdot 50 = 840\ м^2;$$

как видно,

$$\Omega_в > 4HB;$$

следовательно, скоростью подхода действительно можно пренебрегать.[1]

Таким образом, искомое значение $H = 4,2$ м.

№ 6. На рис. 11-49 представлена водосливная стенка с горизонтальным гребнем.

Дано (обозначения см. на чертеже): $c = 2,0$ м; $\delta = 12,5$ м; $f = 0,5$ м; $b = 6,0$ м; $B_0 = 20,0$ м; $H = 5,0$ м; $h_п = 4,5$ м.

Требуется найти расход Q и глубину h_1 на гребне водослива.

Решение:

1. Выясним тип водослива [см. зависимость (11-5)]:

$$2H = 2 \cdot 5,0 = 10,0\ м;$$

$$8H = 8 \cdot 5,0 = 40,0\ м;$$

так как

$$10,0 < \delta < 40,0,$$

то при наличии горизонтального гребня имеем водослив с широким порогом.

2. Решаем вопрос о скорости подхода v_0 [см. критерий (11-57)]:

$$\Omega_в = B_0(c + H) = 20,0 \cdot (2,0 + 5,0) = 140\ м^2;$$

$$4bH = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 = 120,0\ м^2;$$

как видно,

$$\Omega_в > 4bH;$$

следовательно, скоростью подхода v_0 можно пренебречь и считать, что

$$H_0 \approx H.$$

3. Выясняем вопрос о подтоплении водослива, причем пользуемся критерием (11-79):

$$nH = (0,75 \cdot 5,0) \div (0,85 \cdot 5,0) = 3,75 \div 4,25\ м.$$

Как видно,

$$nH < h_п,$$

[1] Расчет в приведенной выше таблице можно было бы выполнить и не пренебрегая скоростью подхода. При этом данную таблицу пришлось бы дополнить несколькими строками, в которых вычисляется величина v_0 (зная H и Q, эту величину легко можно найти).

отсюда заключаем, что водослив будет подтоплен.

4. В первом приближении для определения расхода Q и глубины h_1 можем пренебречь перепадом восстановления $Z_{вс}$ и принять величину εm равной [как для водослива с широким порогом; см. рис. 11-21 и рекомендацию (11-60')]:

$$\varepsilon m = 0{,}35.$$

При таких условиях получаем [см. зависимость (11-84) и (11-83)]; $h_1 = h_п = 4{,}5$ м;

$$Q = \varphi_п b h_1 \sqrt{2g(H - h_1)} = 0{,}93 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,(5 - 4{,}5)} = 78{,}8 \text{ м}^3/\text{с},$$

где $\varphi_п = 0{,}93$ мы взяли по таблице (стр. 426) к формуле (11-83) в зависимости от принятой величины εm ($\varepsilon m = 0{,}35$).

5. Желая получить более точные результаты, уточняем величину εm:

а) величина m (отвечающая плоской задаче) для

$$\eta = \frac{c_в}{H} = \frac{2{,}0}{5{,}0} = 0{,}40 \text{ и } \frac{f}{H} = \frac{0{,}5}{5{,}0} = 0{,}1$$

по табл. 11-2 (стр. 421) будет

$$m = 0{,}37;$$

б) величина ε, согласно приближенной формуле (11-60"), равна (при $\xi_у = 0{,}7$; см. рис. 11-22):

$$\varepsilon = 1{,}0 - 0{,}2\xi_у \frac{H}{b} = 1{,}0 - 0{,}2 \cdot 0{,}7 \frac{5}{6} = 0{,}88;$$

в) величина $\varepsilon m = 0{,}88 \cdot 0{,}37 = 0{,}326$.

При $\varepsilon m = 0{,}326$ получаем по-прежнему (пренебрегая перепадом восстановления):

$h_1 = h_п = 4{,}5$ м;

$$Q = \varphi_п b h_1 \sqrt{2g(H - h_1)} = 0{,}88 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot (5 - 4{,}5)} = 74{,}5 \text{ м}^3/\text{с},$$

где $\varphi_п = 0{,}88$ взято по таблице к формуле (11-83) для $\varepsilon m = 0{,}326$.

Как видно, величина Q при уточнении ее по формуле (11-60") изменилась в данном частном случае на 5%.

6. Дальнейшее уточнение величины Q можно выполнить, используя для определения ε формулу (11-62). Пользуясь этой формулой, предварительно определяем следующие величины:

$$\frac{b}{B_0} = \frac{6}{20} = 0{,}3; \quad \frac{a}{H} = \frac{f}{H} = \frac{0{,}5}{5{,}0} = 0{,}1; \quad \frac{a}{b} = \frac{f}{b} = \frac{0{,}5}{0{,}6} = 0{,}0835.$$

Далее по зависимостям (11-64), (11-66) и (11-68) определяем величины

$$K_{b/B_0} = 1{,}0 - 1{,}4\,(0{,}3 - 0{,}2)^{3/2} = 0{,}96;$$

$$K_{a/H} = 0{,}17 - \sqrt{\frac{1}{30}\,0{,}1} = 0{,}11;$$

$$K_{a/b} = 0{,}17 - \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 0{,}0835} = 0{,}12;$$

наконец, по формуле (11-62) находим

$$\varepsilon = 1 - \frac{K_{b/B_0}}{1 + c_в/H}\left(K_{a/H}\frac{c_в}{b} + K_{a/b}\right) = 1 - \frac{0{,}96}{1 + \frac{2}{5}}\left(0{,}11\frac{2}{6} + 0{,}12\right) = 0{,}89.$$

Зная ε и величину $\varepsilon m = 0{,}37 \cdot 0{,}89 = 0{,}330$, находим Q:

$$Q = 0{,}87 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,(5 - 4{,}5)} = 74{,}0 \text{ м}^3/\text{с},$$

где $\varphi_п = 0{,}87$ взято по таблице к формуле (11-83) для $\varepsilon m = 0{,}33$.

Как видно, в данном частном случае уточнение величины Q оказалось пренебрежимо малым.

7. Учтем перепад восстановления $Z_{вс}$ (которым мы выше всюду пренебрегали):

1-е приближение.

а) Принимаем расход Q, найденный выше (без учета $Z_{вс}$):

$$Q = 74{,}0 \text{ м}^3/\text{с},$$

причем определяем удельный расход

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{74{,}0}{6{,}0} = 12{,}30 \text{ м}^2/\text{с}.$$

б) Исходя из этой величины q, по формуле (7-49) находим критическую глубину $h_к$ для прямоугольного русла, образующего отверстие водослива:

$$h_к = 2{,}50 \text{ м}.$$

в) Согласно формуле (11-86), устанавливаем величины $\xi_п$ и $\nu_н$

$$\xi_п = \frac{h_п}{h_к} = \frac{4{,}5}{2{,}50} = 1{,}80;$$

$$\nu_н = \frac{h_п b}{h_н B_0} = \frac{4{,}5 \cdot 6{,}0}{(4{,}5 + 2{,}0) \cdot 20{,}0} = 0{,}21.$$

г) По графику на рис. 11-27, исходя из найденных $\xi_п$ и $\nu_н$, определяем относительную величину перепада восстановления:

$$\zeta_{вс} = 0{,}05.$$

д) По формуле (11-85) вычисляем перепад восстановления:

$$Z_{вс} = \zeta_{вс} \cdot h_к = 0{,}05 \cdot 2{,}50 = 0{,}13 \text{ м}.$$

е) По формуле (11-84) определяем глубину воды на пороге водослива:

$$h_1 = h_п - Z_{вс} = 4{,}50 - 0{,}13 = 4{,}37 \text{ м}.$$

ж) Наконец, по зависимости (11-83) находим величину расхода (беря $\varphi_п$, равным найденному выше в п. 6)

$$Q = 0{,}87 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}37 \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,(5{,}00 - 4{,}37)} = 80{,}0 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Как видно, учет перепада восстановления в первом приближении обусловил увеличение расхода Q примерно на 8 % (от 74,0 до 80,0 м^3/с). Имея это в виду, обращаемся ко второму приближению.

2-е приближение.

а) Принимаем расход

$$Q = 80{,}0 \text{ м}^3/\text{с};$$

величина удельного расхода

$$q = \frac{80{,}0}{6{,}0} = 13{,}3 \text{ м}^2/\text{с};$$

б) по формуле (7-49) находим $h_к$:

$$h_к = 2{,}70 \text{ м};$$

в) величины $\xi_п$ и $\nu_н$ будут

$$\xi_п = \frac{h_п}{h_к} = \frac{4{,}5}{2{,}70} = 1{,}63;$$

$$\nu_н = 0{,}21 \text{ (см. выше)};$$

г) по графику на рис. 11-27 имеем

$$\zeta_{вс} = 0{,}065;$$

д) согласно зависимости (11-85)

$$Z_{вс} = 0{,}065 \cdot 2{,}70 = 0{,}18 \text{ м};$$

е) глубина на пороге

$$h_1 = h_н - Z_{вс} = 4{,}5 - 0{,}18 = 4{,}32 \text{ м};$$

ж) расход Q по формуле (11-83)

$$Q = 0{,}87 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}32 \sqrt{2 \cdot 9{,}8(5{,}0 - 4{,}32)} = 82{,}0 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Как видно, второе приближение дало изменение величины расхода на 2%. Отсюда ясно, что к третьему приближению обращаться нет надобности. Найденные во втором приближении величины $h_1 = 4{,}3$ м и $Q = 82{,}0$ м^3/с можно считать окончательными.

Из приведенного примера видно, что учет перепада восстановления дал в данном частном случае существенное увеличение расхода (от 74,0 до 82,0 м^3/с, т. е. примерно на 11%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

11-1. **Агасиева С. И.** Боковые водосливы и траншейные водосбросы. – М.: Госстройиздат, 1956.

11-2. **Вопросы** мостовой гидравлики и гидрологии. – М.: Транспорт, 1967.

11-3. **Избаш С. В.** Основы гидравлики. – М.: Госстройиздат, 1952.

11-4. **Лебедев И. В.** Основные положения гидравлического расчета строительной компоновки гидроузлов. – Труды МЭИ, № 1, – М.: изд. МЭИ, 1960.

11-5. **Рекомендации** по гидравлическому расчету водосливов Ч. I. Прямые водосливы II – 18 – 74. – Л.: Энергия, 1974.

11-6. **Рекомендации** по гидравлическому расчету водосливов Ч. II. Косые, боковые, криволинейные и кольцевые водосливы. II – 45 – 75. – Л.: Энергия, 1976.

11-7. **Руднев С. С.** Боковые водосливы. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1941.

11-8. **Примеры** гидравлических расчетов./Под ред. А. И. Богомолова. Изд. 2-е, пер. и доп. – М.: Транспорт, 1977.

11-9. **Справочник** по гидравлическим расчетам./Под ред. П. Г. Киселева. Изд. 4-е, пер. и доп. – М.: Энергия, 1972.

11-10. **Технические условия** и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Гидравлические расчеты водосливов. ТУ 12 – 51. – Л. – М.: Госэнергоиздат, 1952.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ ПРИ УСТРОЙСТВЕ ПЛОТИН

§ 12-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Необходимо различать следующие основные виды истечения воды при пропуске ее через плотину из верхнего бьефа в нижний:

1) истечение из-под затвора (щита) *З* (*Щ*), установленного на гребне *Гр*, плотины, – рис. 12-1;

2) перелив через плотину (затвор полностью открыт) – рис. 12-2;

3) истечение через донное отверстие, образованное, например, поднимающимся затвором, – рис. 12-3.

Схемы на рис. 12-2 и 12-3 являются частными случаями схемы на рис. 12-1.

На рис. 12-1 и 12-3 показано истечение воды через н а п о р н о е о т в е р с т и е; на рис. 12-2 – через б е з н а п о р н о е отверстие, т. е. через водослив.

Дополнительно к уже известным обозначениям введем следующие: E – евышение горизонта воды верхнего бьефа над дном нижнего бьефа; E_0 – то же, но с учетом скорости подхода v_0:

$$E_0 = E + \frac{\alpha v_0^2}{2g},$$

причем E_0 есть полная удельная энергия воды верхнего бьефа относительно дна нижнего бьефа; h_c – так называемая сжатая глубина, т. е. толщина струи, ниспадающей с плотины, измеряемая в «сжатом» сечении потока $C-C$, намеченном у подошвы плотины (рис. 12-1 и 12-2) или за затвором (рис. 12-3).

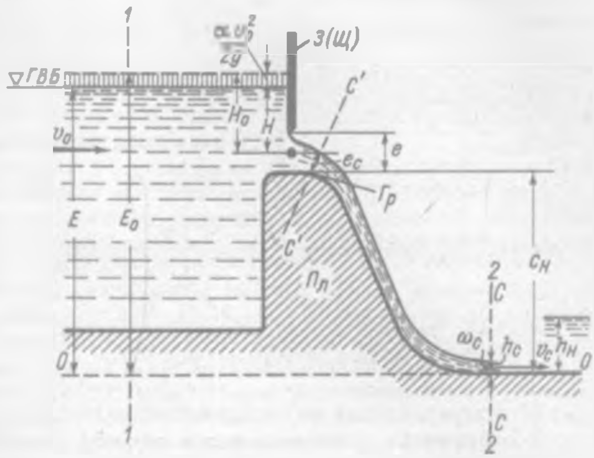


Рис. 12-1. Общий случай сопряжения бьефов. Плотина с затвором

Сечение $C-C$ характеризуется тем, что движение воды в районе его является плавно изменяющимся.

Сжатое сечение $C-C$ не следует смешивать с верховым сжатым сечением $C'-C'$ (рис. 12-1), расположенным непосредственно за затвором, установленным на гребне плотины.

Глубину воды, которая устанавливается в нижнем бьефе в естественном его состоянии (при пропуске заданного расхода), будем обозначать, как и в гл. II, через $h_н$.

При расчете сопряжения бьефов обычно пользуются графиком связи $h_н = f(Q_{НБ})$, построенным на основании гидрометрических данных (рис. 12-4): по этому графику в зависимости от величины расхода воды в нижнем бьефе $Q_{НБ}$ и устанавливают глубину $h_н$ [1].

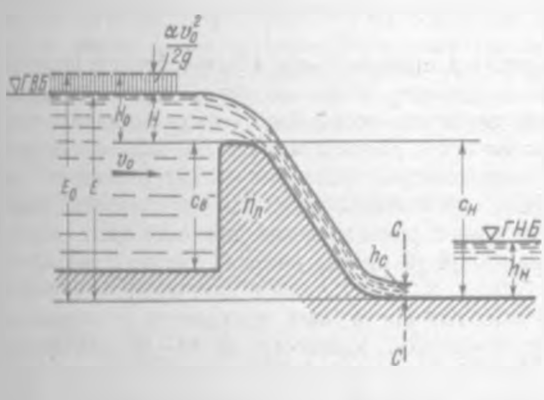


Рис. 12-2. Частный случай сопряжения бьефов. Плотина без затвора

Для расчета сопряжения бьефов часто бывают заданными:

1) отметка горизонта воды верхнего бьефа (∇ГВБ);

2) размеры отверстий плотины; их расположение в теле плотины; отметки порогов этих отверстий (см., например, рис. 11-31);

3) упомянутая выше кривая связи ∇ГНБ $= f(Q_{НБ})$;

4) величины расходов

[1] Практически по вертикальной оси графика на рис. 12-4 откладывают не глубины $h_н$, а отметки горизонта воды нижнего бьефа ∇ГНБ в естественном состоянии водотока.

воды, сбрасываемых в нижний бьеф через соседние сооружения (например, гидростанцию и т. п.);

5) отметка дна нижнего бьефа.

Основные задачи, которые возникают при проектировании нижнего бьефа плотины, состоят:

а) в выяснении формы свободной поверхности потока, при помощи которой поверхность ниспадающей с плотины струи (или струи, выходящей, например, из донного отверстия) сопрягается с горизонтом воды нижнего бьефа. Здесь приходится выяснять также и ряд других условий протекания воды в пределах сооружения и за ним;

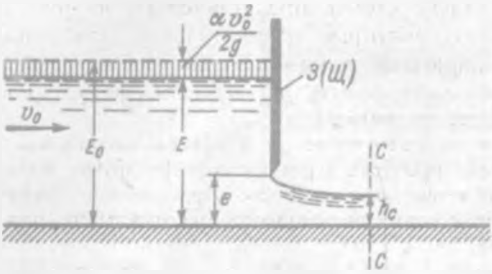


Рис. 12-3. Частный случай сопряжения бьефов. Истечение из-под затвора (из-под щита)

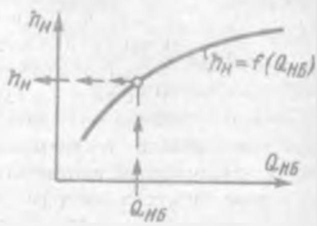


Рис. 12-4. Кривая связи $h_н = f(Q_{НБ})$

б) в установлении сил воздействия потока на различные бетонные и прочие части сооружения, устраиваемые в нижнем бьефе (для укрепления русла, регулирования потока и гашения его энергии, см. ниже);

в) в определении размывающей способности потока за сооружением.

Все эти сложные вопросы приходится выяснять для различных открытий затворов плотины, которые могут иметь место в период ее эксплуатации. Поскольку, изменяя величину открытия затворов, мы при этом изменяем также и величину расхода, сбрасываемого в нижний бьеф, то, следовательно, различным открытиям затворов будут соответствовать разные расчетные глубины $h_н$ воды в нижнем бьефе.

В связи с тем, что ширина русла в нижнем бьефе обычно больше ширины водосбросного фронта плотины, в нижнем бьефе ее, как правило, получаем *пространственную* картину движения воды. Здесь могут возникать гидравлические прыжки пространственного характера (так называемые косые гидравлические прыжки). При определенных условиях может возникать так называемая *сбойность* потока (установившаяся или неустановившаяся), характеризуемая увеличением удельного расхода q (по течению) вдоль какой-либо прямолинейной или искривленной (в плане) «осевой линии» транзитной струи (см. далее рис. 14-13).

В случае плотин большой высоты, когда нам приходится сталкиваться с очень большими скоростями (доходящими, например, до 40 – 50 м/с), дополнительно происходит сильная аэрация потока, причем на определенных участках нижнего бьефа сооружения движется не вода, а водовоздушная смесь. При указанных скоростях за различными даже небольшими бетонными выступами (в частности за выступами шероховатости стенок русла) может возникать кавитация потока, которая порождает кавитационную эрозию сооружения (см. § 1-5) и т. п.

Перечисленные обстоятельства, связанные с проектированием пропуска воды через плотину, сплошь и рядом не представляется возможным выяснить воды, сбрасываемых в нижний бьеф через соседние сооружения (например, гидростанцию и т. п.);

5) отметка дна нижнего бьефа.

Основные задачи, которые возникают при проектировании нижнего бьефа плотины, состоят:

а) в выяснении формы свободной поверхности потока, при помощи которой поверхность ниспадающей с плотины струи (или струи, выходящей, например, из донного отверстия) сопрягается с горизонтом воды нижнего бьефа. Здесь приходится выяснять также и ряд других условий протекания воды в пределах сооружения и за ним;

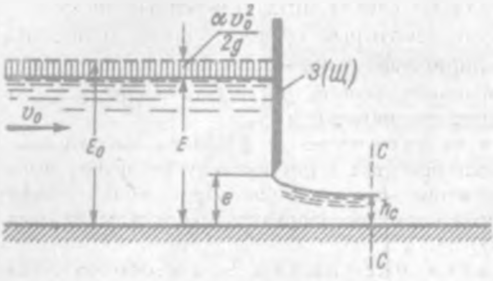


Рис. 12-3. Частный случай сопряжения бьефов. Истечение из-под затвора (из-под щита)

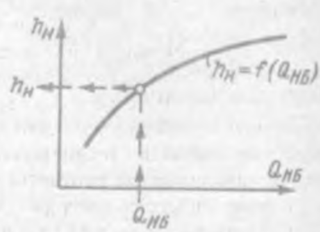


Рис. 12-4. Кривая связи $h_н = f(Q_{НБ})$

б) в установлении сил воздействия потока на различные бетонные и прочие части сооружения, устраиваемые в нижнем бьефе (для укрепления русла, регулирования потока и гашения его энергии, см. ниже);

в) в определении размывающей способности потока за сооружением.

Все эти сложные вопросы приходится выяснять для различных открытий затворов плотины, которые могут иметь место в период ее эксплуатации. Поскольку, изменяя величину открытия затворов, мы при этом изменяем также и величину расхода, сбрасываемого в нижний бьеф, то, следовательно, различным открытиям затворов будут соответствовать разные расчетные глубины $h_н$ воды в нижнем бьефе.

В связи с тем, что ширина русла в нижнем бьефе обычно больше ширины водосбросного фронта плотины, в нижнем бьефе ее, как правило, получаем пространственную картину движения воды. Здесь могут возникать гидравлические прыжки пространственного характера (так называемые косые гидравлические прыжки). При определенных условиях может возникать так называемая сбойность потока (установившаяся или неустановившаяся), характеризуемая увеличением удельного расхода q (по течению) вдоль какой-либо прямолинейной или искривленной (в плане) «осевой линии» транзитной струи (см. далее рис. 14-13).

В случае плотин большой высоты, когда нам приходится сталкиваться с очень большими скоростями (доходящими, например, до 40–50 м/с), дополнительно происходит сильная аэрация потока, причем на определенных участках нижнего бьефа сооружения движется не вода, а водовоздушная смесь. При указанных скоростях за различными даже небольшими бетонными выступами (в частности за выступами шероховатости стенок русла) может возникать кавитация потока, которая порождает кавитационную эрозию сооружения (см. § 1-5) и т. п.

Перечисленные обстоятельства, связанные с проектированием пропуска воды через плотину, сплошь и рядом не представляется возможным выяснить с достаточной точностью путем соответствующих теоретических расчетов. Поэтому при проектировании ответственных сооружений приходится обращаться к постановке опытов, проводимых в специальных гидравлических лабораториях.

Ниже мы не будем касаться всего комплекса названных выше вопросов, возникающих при проектировании устройств нижнего бьефа плотины. Далее осветим только **основы теории сопряжения бьефов**, ограничившись в основном так называемой **плоской задачей**, причем вовсе не будем затрагивать вопросов, отмеченных выше в пп. «б» и «в», а также вопросов сбойности, аэрации, кавитации, косых волн, косых и пространственных прыжков.[1]

Вначале будем рассматривать только схемы, представленные на рис. 12-1 и 12-2; схему на рис. 12-3, имеющую некоторые отличительные особенности, рассмотрим отдельно в последнем параграфе данной главы.

При проектировании плотины приходится решать, в частности, две следующие гидравлические задачи (которые не следует смешивать):

1-я задача. **Расчет размеров водосливного фронта плотины.** Эту задачу решают, исходя из необходимости пропуска через плотину (и другие расположенные при ней гидротехнические сооружения) расхода воды определенной обеспеченности, устанавливаемой соответствующими нормами (например, максимального расхода воды, повторяющегося один раз в 10000 лет и т. п.);

2-я задача. **Расчет сопряжения бьефов.** Эта задача обычно решается в следующем предположении: считаем, что горизонт воды в верхнем бьефе плотины задан (например, задан самый высокий возможный горизонт воды); дополнительно задан расход воды, пропускаемой в нижний бьеф через соседние с плотиной сооружения (например, через гидростанцию и т. п.). Для этих условий рассматриваются различные варианты открытия отверстий плотины, причем для каждого такого варианта, пользуясь поясненными ниже методами, рассчитывается картина сопряжения струи воды, пропускаемой через плотину, с нижним бьефом. Среди этих вариантов выбирается наиболее опасный, применительно к которому и проектируется конструкция плотины и так называемые устройства нижнего бьефа. В результате анализа упомянутых вариантов иногда вырабатывают *эксплуатационный график маневрирования затворами* плотины («диспетчерский график»), который не должен допускать особенно опасных открытий отверстий плотины (обусловливающих особенно тяжелые для работы конструкций условия сопряжения бьефов). Разумеется, при проектировании плотины такой график на основании теоретических расчетов, а иногда и на основании лабораторных опытов, составляется только вчерне. Из рассмотрения этого ориентировочного графика и получаем условия (величину открытия отдельных отверстий, расход воды в нижнем бьефе), на которые окончательно должно рассчитываться сопряжение бьефов. В дальнейшем данный ориентировочный график обычно уточняется после постройки плотины на основании натурных наблюдений.

Все эти вопросы, касающиеся постановки 1-й и 2-й гидравлических задач, связанных с проектированием плотин, изучаются в курсе «Гидротехнические сооружения».

§ 12-2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ В СЖАТОМ СЕЧЕНИИ ПОТОКА

Первое, с чем приходится сталкиваться при расчете сопряжения бьефов, это вопрос о величине глубины h_c в сжатом сечении — так называемой сжатой глубины (рис. 12-1 и 12-2). Если бы сливная грань плотины имела малый уклон и была прямолинейной, то величину h_c легко можно было бы определить, пользуясь уравнением неравномерного движения (соединяя этим уравнением сечение

---

[1] Эти вопросы, как и некоторые другие, касающиеся расчета нижнего бьефа плотины, изучаются в специальных курсах (курсе «Гидротехнические сооружения» и др.). Только некоторые краткие сведения о косых прыжках и косых волнах нами будут приведены в гл. 15.

с достаточной точностью путем соответствующих теоретических расчетов. Поэтому при проектировании ответственных сооружений приходится обращаться к постановке опытов, проводимых в специальных гидравлических лабораториях.

Ниже мы не будем касаться всего комплекса названных выше вопросов, возникающих при проектировании устройств нижнего бьефа плотины. Далее осветим только **основы теории сопряжения бьефов**, ограничившись в основном так называемой **плоской задачей**, причем вовсе не будем затрагивать вопросов, отмеченных выше в пп. «б» и «в», а также вопросов сбойности, аэрации, кавитации, косых волн, косых и пространственных прыжков.[1]

Вначале будем рассматривать только схемы, представленные на рис. 12-1 и 12-2; схему на рис. 12-3, имеющую некоторые отличительные особенности, рассмотрим отдельно в последнем параграфе данной главы.

При проектировании плотины приходится решать, в частности, две следующие гидравлические задачи (которые не следует смешивать):

1-я задача. **Расчет размеров водосливного фронта плотины.** Эту задачу решают, исходя из необходимости пропуска через плотину (и другие расположенные при ней гидротехнические сооружения) расхода воды определенной обеспеченности, устанавливаемой соответствующими нормами (например, максимального расхода воды, повторяющегося один раз в 10 000 лет и т. п.);

2-я задача. **Расчет сопряжения бьефов.** Эта задача обычно решается в следующем предположении: считаем, что горизонт воды в верхнем бьефе плотины задан (например, задан самый высокий возможный горизонт воды); дополнительно задан расход воды, пропускаемой в нижний бьеф через соседние с плотиной сооружения (например, через гидростанцию и т. п.). Для этих условий рассматриваются различные варианты открытия отверстий плотины, причем для каждого такого варианта, пользуясь поясненными ниже методами, рассчитывается картина сопряжения струи воды, пропускаемой через плотину, с нижним бьефом. Среди этих вариантов выбирается наиболее опасный, применительно к которому и проектируется конструкция плотины и так называемые устройства нижнего бьефа. В результате анализа упомянутых вариантов иногда вырабатывают *эксплуатационный график маневрирования затворами* плотины («диспетчерский график»), который не должен допускать особенно опасных открытий отверстий плотины (обусловливающих особенно тяжелые для работы конструкций условия сопряжения бьефов). Разумеется, при проектировании плотины такой график на основании теоретических расчетов, а иногда и на основании лабораторных опытов, составляется только вчерне. Из рассмотрения этого ориентировочного графика и получаем условия (величину открытия отдельных отверстий, расход воды в нижнем бьефе), на которые окончательно должно рассчитываться сопряжение бьефов. В дальнейшем данный ориентировочный график обычно уточняется после постройки плотины на основании натурных наблюдений.

Все эти вопросы, касающиеся постановки 1-й и 2-й гидравлических задач, связанных с проектированием плотин, изучаются в курсе «Гидротехнические сооружения».

§ 12-2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ В СЖАТОМ СЕЧЕНИИ ПОТОКА

Первое, с чем приходится сталкиваться при расчете сопряжения бьефов, это вопрос о величине глубины h_c в сжатом сечении — так называемой *сжатой глубины* (рис. 12-1 и 12-2). Если бы сливная грань плотины имела малый уклон и была прямолинейной, то величину h_c легко можно было бы определить, пользуясь уравнением неравномерного движения (соединяя этим уравнением сечение

---

[1] Эти вопросы, как и некоторые другие, касающиеся расчета нижнего бьефа плотины, изучаются в специальных курсах (курсе «Гидротехнические сооружения» и др.). Только некоторые краткие сведения о косых прыжках и косых волнах нами будут приведены в гл. 15.

$C'-C'$, где глубина известна, с сечением $C-C$ (рис. 12-1). Однако сливная грань плотины обычно имеет большие уклоны и к тому же является криволинейной. В связи с этим величину h_c приходится рассчитывать, исходя непосредственно из уравнения Бернулли.

Намечаем плоскость сравнения OO на уровне дна нижнего бьефа (рис. 12-1). Сечение $1-1$ берем перед плотиной, где движение воды еще плавно изменяющееся; сечение $2-2$ проводим по линии $C-C$. Потерю напора h_f от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ выражаем известной формулой

$$h_f = \zeta \frac{v_c^2}{2g}, \tag{12-1}$$

где v_c – средняя скорость в сжатом сечении; ζ – соответствующий коэффициент сопротивления.

Соединяя уравнением Бернулли сечения $1-1$ и $2-2$, получаем

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2g(E_0 - h_c)}. \tag{12-2}$$

Вводим обозначение

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} = \varphi_c, \tag{12-3}$$

где φ_c – коэффициент скорости, учитывающий потери напора в пределах сооружения (на участке потока от сечения $1-1$ до сжатого сечения $C-C$).

Подставляя (12-3) в (12-2), окончательно получаем

(I) $$\boxed{v_c = \varphi_c\sqrt{2g(E_0 - h_c)}}. \tag{12-4}$$

Дополнительно можем написать

(II) $$v_c = \frac{Q}{\omega_c}, \tag{12-5}$$

где ω_c – площадь сжатого сечения,

$$\omega_c = f(h_c). \tag{12-6}$$

Уравнения (I) и (II) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными: h_c и v_c. Решая эту систему, находим величину h_c.

Система уравнений (I) и (II) может быть использована для определения h_c в случае любой плотины с затвором или без него (рис. 12-2). Эта система получена для русла нижнего бьефа любого поперечного сечения. Для трапецеидального русла и особенно для прямоугольного русла нижнего бьефа расчет по уравнениям (I) и (II) упрощается.

1°. Трапецеидальное русло нижнего бьефа. В этом случае[1]

$$\omega_c = h_c(b + mh_c), \tag{12-7}$$

где m – коэффициент откоса русла; b – ширина его по дну.

Поэтому вместо уравнений (I) и (II) можем написать одно расчетное уравнение

$$Q = \varphi_c h_c (b + mh_c)\sqrt{2g(E_0 - h_c)}. \tag{12-8}$$

Это уравнение приходится решать в отношении h_c путем подбора.

В литературе имеется специальный расчетный график, построенный А. Н. Рахмановым в соответствии с уравнением (12-8). По этому графику значение h_c определяется достаточно просто.

---

[1] Предполагается, что в сжатом сечении водоворотные области отсутствуют.

2. **Прямоугольное русло нижнего бьефа (плоская задача).** В этом случае

$$Q = qb; \ \omega_c = bh_c; \tag{12-9}$$

поэтому вместо уравнения (II) получаем:

$$v_c = \frac{q}{h_c}. \tag{12-10}$$

Подставляя (12-10) в (12-4), имеем:

$$\frac{q}{h_c} = \varphi_c \sqrt{2g(E_0 - h_c)} \tag{12-11}$$

или [1]

$$\boxed{E_0 = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2\varphi_c^2}}. \tag{12-12}$$

Уравнением (12-12) и пользуемся для определения h_c в случае прямоугольного отводящего русла, причем это уравнение приходится решать подбором.

Уравнение (12-12) является кубическим (в отношении h_c) и потому имеет три корня: один – отрицательный, второй – удовлетворяющий условию $0 < h_c < h_к$, третий – характеризуемый условием $h_c > h_к$, где $h_к$ – критическая глубина.

Следует запомнить, что в действительности h_c должно удовлетворять условию [2]

$$0 < h_c < h_к, \tag{12-13}$$

а следовательно, решая подбором уравнение (12-12), мы должны интересоваться вторым из названных выше корней этого уравнения.

При больших E_0 слагаемым h_c в уравнении (12-12) можно пренебречь и вместо (12-12) написать весьма простое расчетное уравнение:

$$h_c = \frac{q}{v_c} = \frac{q}{\varphi_c\sqrt{2gE_0}}; \tag{12-14}$$

этим уравнением следует пользоваться, когда

$$\frac{E_0}{h_к} \geqslant 5; \tag{12-15}$$

при этом ошибка в величине h_c не будет превосходить 5%.

Для упрощения расчетов, относящихся к прямоугольному отводящему руслу, обычно встречающемуся в практике, в литературе приводятся специальные расчетные графики, служащие для определения h_c. Поясним один из таких графиков, построенный Н. Н. Павловским.

Как известно,

$$h_к^3 = \frac{\alpha q^2}{g} \approx \frac{q^2}{g}. \tag{12-16}$$

---

[1] Уравнение (12-12) легко запомнить, представив его в виде

$$E_0 = h_c + \frac{v_c^2}{2g}\frac{1}{\varphi_c^2}. \tag{12-12'}$$

Как видно, в правой части (12-12') имеем выражение, отличающееся от удельной энергии сечения Э (написанной для сечения $C-C$) только наличием множителя $1/\varphi_c^2$.

[2] Глубина воды на гребне плотины без затвора (рис. 12-2) близка к критической глубине (или меньше ее). При падении воды скорость ее движения увеличивается, а следовательно, толщина струи вдоль течения должна уменьшаться; отсюда видно, что h_c всегда должна быть меньше $h_к$.

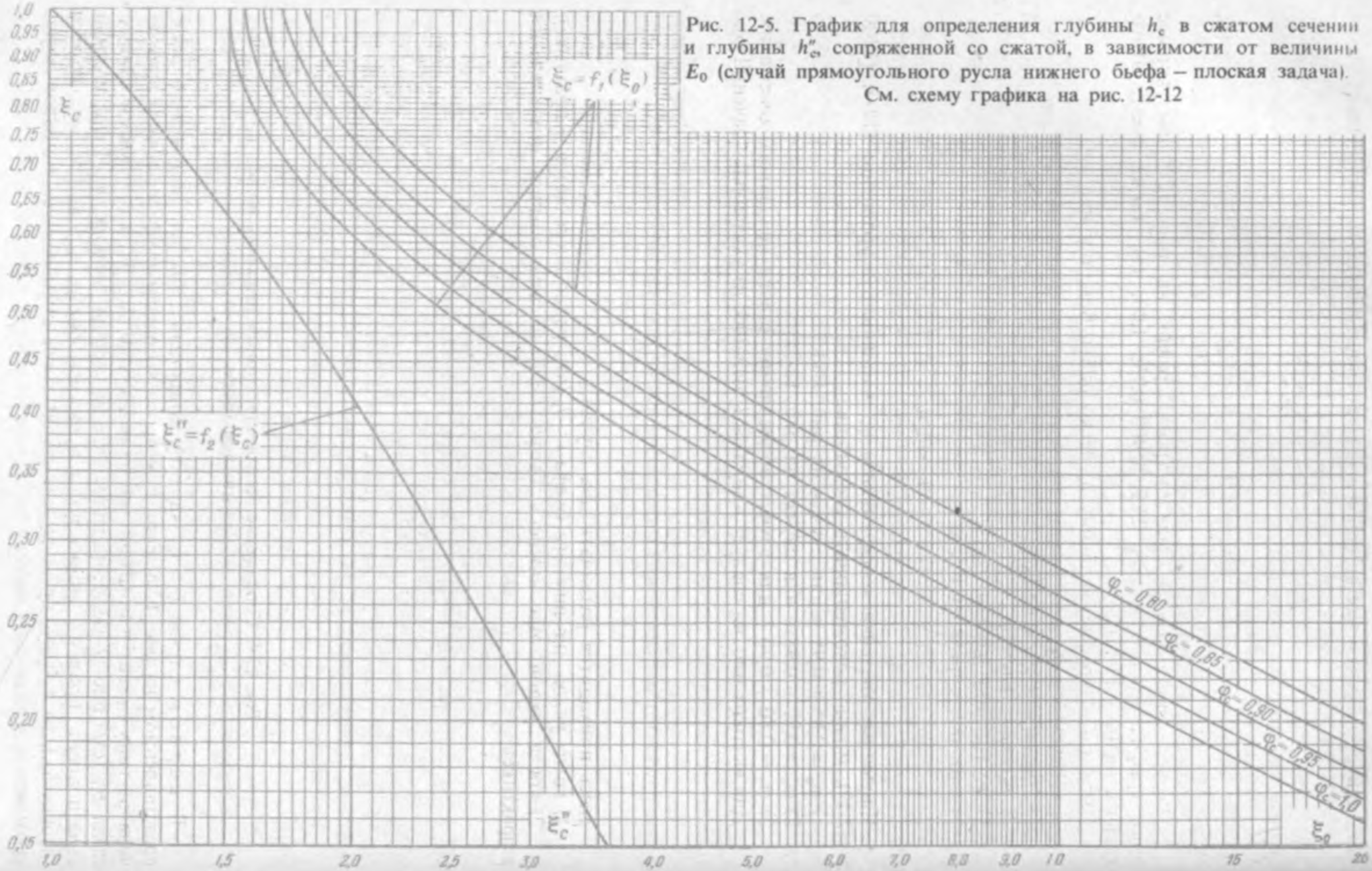


Рис. 12-5. График для определения глубины h_c в сжатом сечении и глубины h''_c, сопряженной со сжатой, в зависимости от величины E_0 (случай прямоугольного русла нижнего бьефа – плоская задача). См. схему графика на рис. 12-12

Разделив на $h_к$ уравнение (12-12) и учтя соотношение (12-16), получаем:

$$\xi_0 = \xi_c + \frac{1}{2\varphi_c^2 \xi_c^2}, \tag{12-17}$$

где

$$\xi_0 = \frac{E_0}{h_к} \quad и \quad \xi_c = \frac{h_c}{h_к}. \tag{12-18}$$

По уравнению (12-17) был построен график на рис. 12-5 (см. кривые этого графика для $\varphi_c = 0{,}80$; 0,85; 0,90; 0,95; 1,00; см. также схему этого графика на рис. 12-12).

Имея такой график, величину h_c легко найти без подбора:

1) определяем $h_к$;
2) определяем $\xi_0 = E_0 : h_к$;
3) устанавливаем φ_c;
4) по графику находим ξ_c;
5) наконец, определяем h_c:

$$h_c = \xi_c h_к.$$

Численные значения коэффициента φ_c, входящего в уравнения (12-4), (12-8) и (12-12), можно рекомендовать следующие:

1) $\varphi_c = 0{,}85 \div 0{,}95$ – для случая на рис. 12-1;
2) $\varphi_c = 0{,}90 \div 0{,}98$ – для случая на рис. 12-2;
3) $\varphi_c = 0{,}80 \div 0{,}90$ – для случая водосливной стенки неплавного очертания.

Для высоких плотин следует принимать меньшее из указанных значений φ_c.

§ 12-3. СОПРЯЖЕНИЕ СТРУИ, НИСПАДАЮЩЕЙ С ПЛОТИНЫ, С НИЖНИМ БЬЕФОМ

Здесь приходится различать два случая:

1) когда уклон дна нижнего бьефа $i > i_к$ (что редко встречается в практике);
2) когда уклон дна нижнего бьефа $i < i_к$ (с чем обычно сталкиваемся в практике).

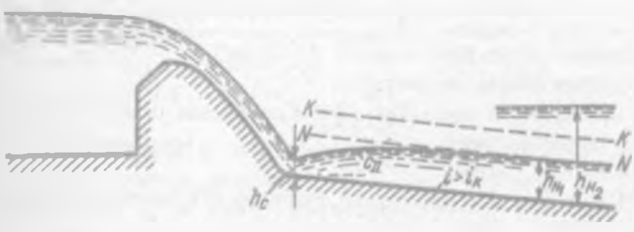


Рис. 12-6. Сопряжение бьефов при бурном движении воды в нижнем бьефе

В первом случае ($i > i_к$) картину сопряжения бьефов получаем в виде, представленном на рис. 12-6. Если $h_c < h_н$, то в нижнем бьефе получаем кривую подпора типа c_{II} (как и показано на чертеже); если $h_c > h_н$, то получаем кривую спада b_{II} (см. рис. 7-31). Напомним, что h_c всегда меньше $h_к$. Если нижний бьеф подперт, причем глубина воды в нижнем бьефе $h_н > h_к$ (см. на чертеже глубину $h_{н_2}$), то в этом случае за плотиной может образоваться гидравлический прыжок.

Обратимся ко втором у из указанных выше случаев ($i < i_к$)[1], причем рассмотрим его подробно. Здесь различают следующие типы сопряжения струи с нижним бьефом.

1-й тип. Сопряжение бьефов при помощи отогнанного прыжка (рис. 12-7). Длина l (см. чертеж) называется длиной отгона прыжка. Она представляет собой длину кривой подпора типа c_1 (или c_0, если $i = 0$) между сечениями, глубина в которых равна $h_с$ и h'; здесь глубина h' является глубиной, сопряженной с глубиной нижнего бьефа $h_н$.

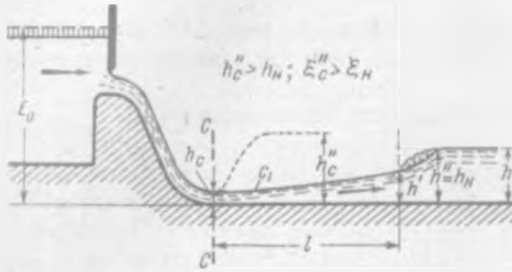


Рис. 12-7. Сопряжение бьефов при помощи отогнанного прыжка

2-й тип. Сопряжение бьефов при помощи затопленного прыжка (рис. 12-8). В этом случае вводят понятие степени затопления прыжка

$$A = \frac{h_н}{h''_с}, \tag{12-19}$$

где $h''_с$ есть глубина, сопряженная со сжатой глубиной $h_с$. Величина A в данном случае должна быть больше единицы.

3-й тип (промежуточный). Прыжок в сжатом сечении (рис. 12-9). Для этого типа сопряжения величина $A = 1{,}0$.

При расчете сопряжения бьефов прежде всего необходимо установить, какой из трех названных типов сопряжения имеет место в рассматриваемом случае. При решении этой задачи поступают следующим образом (рис. 12-10).

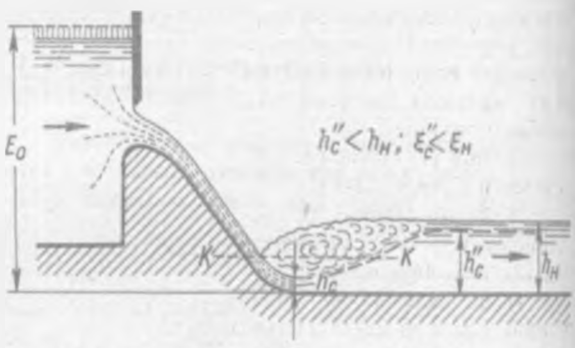


Рис. 12-8. Сопряжение бьефов при помощи затопленного прыжка

Определив, как указано в § 12-2, сжатую глубину $h_с$, находят, пользуясь основным уравнением прыжка, глубину $h''_с$, сопряженную с глубиной $h_с$; при этом в сечении $C-C$ представляют себе фиктивный воображаемый прыжок (см. на рис. 12-10 жирную штриховую линию).

Далее рассуждают так:

1) если нижний бьеф не затапливает фиктивный прыжок (см. уровень воды *1*), т. е. если

$$h_н < h''_с, \tag{12-20}$$

то имеем отогнанный прыжок (1-й тип сопряжения бьефов);

2) если нижний бьеф затапливает фиктивный прыжок (см. уровень воды *2*), т. е.

$$h_н > h''_с, \tag{12-21}$$

то имеем затопленный прыжок (2-й тип сопряжения бьефов);

[1] Часто непосредственно за водосливной стенкой плотины уклон дна $i = 0$.

2°. Расчет при помощи графиков. Для упрощения расчета рядом авторов были предложены различные графики, по которым легко можно находить глубину h_c''.

Чтобы пояснить эти графики, разделим неравенства (12-23) на $h_к$;[1] при этом вместо (12-23) получаем:

$$\frac{h_c''}{h_к} \lesseqgtr \frac{h_н}{h_к}. \tag{12-24}$$

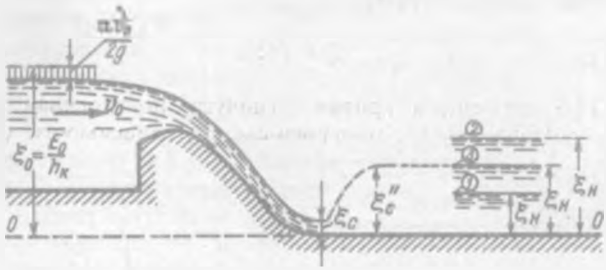


Рис. 12-11. Установление типа сопряжения бьефов по формуле (12-26)

Обозначим:

$$\frac{h_c''}{h_к} = \xi_c'', \quad \frac{h_н}{h_к} = \xi_н, \tag{12-25}$$

где ξ_c'' может быть названа относительной глубиной фиктивного прыжка и $\xi_н$ — относительной глубиной нижнего бьефа.

Пользуясь обозначениями (12-25), неравенства (12-24) можно переписать в виде

$$\xi_c'' \lesseqgtr \xi_н; \tag{12-26}$$

при этом, как видно,

1) если относительная глубина фиктивного прыжка больше относительной глубины нижнего бьефа:

$$\xi_c'' > \xi_н, \tag{12-27}$$

то будет иметь место отогнанный прыжок;

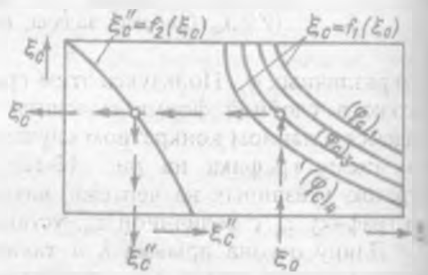


Рис. 12-12. Схема для расчета сопряжения бьефов (по графику на рис. 12-5)

2) если

$$\xi_c'' < \xi_н, \tag{12-28}$$

то получим затопленный прыжок;

3) если же

$$\xi_c'' = \xi_н, \tag{12-29}$$

то будем иметь прыжок в сжатом сечении.

Новый критерий сопряжения бьефов (12-26), даваемый вместо (12-23), можно дополнительно пояснить чертежом на рис. 12-11, который, в отличие от чертежа на рис. 12-10, представлен в относительных величинах.

---

[1] Критическую глубину $h_к$ ввел в зависимости, служащие для приводимого ниже расчета сопряжения бьефов, А. А. Угинчус.

Из формулы (12-17) ясно, что величина ξ_c является функцией ξ_0:

$$\xi_c = f_1(\xi_0); \tag{12-30}$$

основное уравнение прыжка дает связь [см. (8-28)]:

$$\xi_c'' = f_2(\xi_c). \tag{12-31}$$

Сопоставляя (12-30) и (12-31), видим, что

$$\xi_c'' = f(\xi_0). \tag{12-32}$$

На рис. 12-5 совмещена кривая Угинчуса, построенная по зависимости (8-28), и кривые Павловского, построенные по зависимости (12-17) и (12-30),

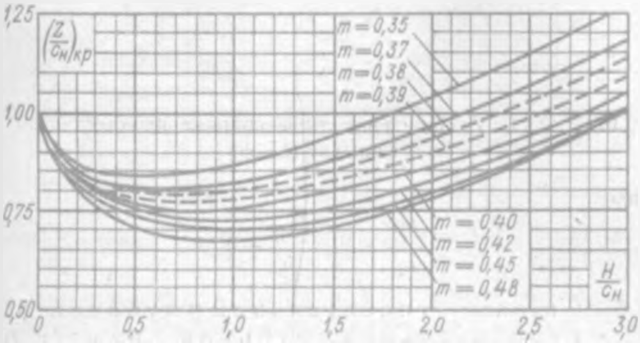


Рис. 12-13. График для определения критических значений $(Z/c_н)_{кр}$ (плоская задача, водосливная стенка без затворов)

для различных φ_c. Пользуясь этим графиком, выполненным М. Д. Чертоусовым, можно в удобной форме выяснить вопрос о типе сопряжения бьефов,[1] имеющемся в данном конкретном случае. При этом поступаем следующим образом (см. схему графика на рис. 12-12): зная величину ξ_0 и идя в направлении стрелок, указанных на чертеже, находим сразу ξ_c и ξ_c''; сопоставляя найденное по графику ξ_c'' с величиной $\xi_н$, устанавливаем форму сопряжения бьефов.

Длину отгона прыжка l, а также величины $l_п$ и $l_{пп}$ в данном случае приходится рассчитывать, как указывалось в п. 1°.

3°. **Приближенный (упрощенный) способ расчета.** С этим способом расчета мы уже сталкивались при изучении водосливов. Согласно ему, если затворы на гребне плотины отсутствуют и если

$$\frac{Z}{c_н} > \left(\frac{Z}{c_н}\right)_{кр}, \tag{12-33}$$

то имеем отогнанный прыжок [обозначения в формуле (12-33) см. на рис. 12-10].

Напомним, что к р и т и ч е с к о е отношение перепада свободной поверхности Z на сооружении к высоте плотины $c_н$, измеренной в нижнем бьефе, часто равняется $0,70 \div 0,75$. Более точное значение $(Z/c_н)_{кр}$ можно найти для водосливных стенок практического профиля по графику на рис. 12-13 в зависимости от коэффициента расхода водослива m.

---

[1] В литературе встречаются и другие графики и таблицы, служащие для определения h_c и h_c'' (предложенные А. Н. Рахмановым, А. А. Угинчусом, Н. М. Бобиным и др.).

§ 12-4. ОСНОВНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ И РАСЧЕТУ УСТРОЙСТВ НИЖНЕГО БЬЕФА ПЛОТИН

Представим на рис. 12-14 случай сопряжения бьефов по типу отогнанного прыжка. В отличие от перепадов (см. гл. 13) плотины обычного профиля характеризуются тем, что струя, сходящая с гребня водослива, располагается на сливной поверхности плотины, причем сжатое сечение $C-C$ устанавливается непосредственно у подошвы плотины. Надо подчеркнуть, что местоположение сжатого сечения $C-C$ целиком определяется конструкцией плотины.

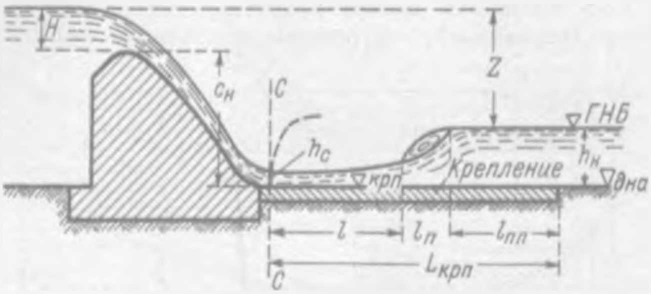


Рис. 12-14. К расчету длины крепления $L_{крп}$ нижнего бьефа

В районе сжатого сечения $C-C$ и правее его будем иметь относительно большие скорости, в связи с чем размывающая способность потока будет в этом месте велика. Имея это в виду, непосредственно за плотиной дно реки, если оно нескальное, приходится покрывать креплением той или другой мощности.

Длина крепления $L_{крп}$, измеряемая от сечения $C-C$, в случае отогнанного прыжка определяется по формуле

$$L_{крп} = l + l_п + l_{пп}, \tag{12-34}$$

где l — длина отгона прыжка; $l_п$ — длина прыжка; $l_{пп}$ — длина послепрыжкового участка.

Крепление нижнего бьефа в случае отогнанного прыжка получается длинным, а также имеющим большую толщину. Поэтому, *руководствуясь экономическими соображениями, отогнанного прыжка за плотиной в случае нескального основания, как правило, не допускают и проектируют сопряжение бьефов по типу затопленного прыжка, принимая степень затопления прыжка A равной примерно 1,10* ÷ 1,05.

Чтобы получить затопленный прыжок, приходится опускать (по отношению к естественной поверхности дна водотока) крепление нижнего бьефа, уменьшая при этом отметку его поверхности ($\nabla_{крп}$) на некоторую величину a (рис. 12-15).[1]

Как видно, в случае устройства такого «пониженного крепления», высота плотины, измеренная со стороны нижнего бьефа, увеличивается; увеличивается также так называемая затопляющая глубина: см. новую глубину нижнего бьефа непосредственно за плотиной

$$h_н' = h_н + a, \tag{12-35}$$

[1] Рисунок 12-15, так же как и ряд других чертежей этой главы (рис. 12-9, 12-16, 12-17 и др.) выполнен в искаженном масштабе (с преуменьшением горизонтальных размеров за сжатым сечением).

где $h_н$ – действительная (естественная) глубина нижнего бьефа, отвечающая расходу воды в нижнем бьефе $Q_{НБ}$.

Длина крепления $L'_{крп}$ при наличии затопленного прыжка оказывается равной

$$L'_{крп} = l'_п + l_{пп}, \qquad (12\text{-}36)$$

где $l'_п$ – длина затопленного прыжка, равная, например, при относительно небольших величинах A (рис. 12-15): [1]

$$l'_п \approx 6\,(h'_н - h_c) \qquad (12\text{-}37)$$

или

$$l'_п \approx (5{,}2 \div 5{,}5)\,h'_н. \qquad (12\text{-}38)$$

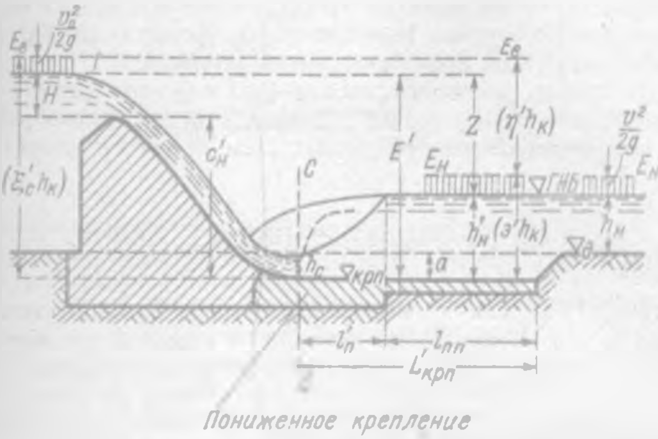


Рис. 12-15. К расчету отметки пониженного крепления нижнего бьефа

Как отмечалось в § 12-1, глубину $h_н$ устанавливаем по графику $h_н = f(Q_{НБ})$ на рис. 12-4, зная расчетный расход нижнего бьефа $Q_{НБ}$. Этот расход

$$Q_{НБ} = Q + Q', \qquad (12\text{-}39)$$

где Q – расход воды, сбрасываемой в нижний бьеф через проектируемую плотину, а Q' – через соседние сооружения. [2]

Расход Q, сбрасываемый через плотину, в зависимости от степени открытия затворов, вообще говоря, может изменяться от $Q = 0$ до $Q = Q_{макс}$, где $Q_{макс}$ получаем, когда все отверстия плотины открыты полностью, причем горизонт воды в верхнем бьефе находится на наиболее высоком уровне.

В качестве расчетного расхода $Q_{расч}$, сбрасываемого через плотину, т. е. расхода, на который должен вестись расчет сопряжения бьефов, следует принимать расход (из ряда возможных), отвечающий наиболее тяжелым усло-

---

[1] Эмпирические формулы (12-37) и (12-38) предлагались различными авторами (Сметаной, Эйнвахтером, Д. И. Куминым, М. Д. Чертоусовым и др.).

[2] В общем случае $Q_{НБ}$ не равняется расходу воды, поступающей в верхний бьеф плотины (поскольку верхний бьеф плотины может наполняться или опорожняться). Соотношение расходов Q и Q' в формуле (12-39) может быть самым различным в зависимости от условий эксплуатации плотины.

виям сопряжения бьефов. Часто считают, что при $Q_{расч}$ должны получать или наибольшую длину отгона прыжка или – при отсутствии отгона прыжка – наименьшую степень его затопления.

Каждому расходу Q отвечает с в о я глубина $h_н$ нижнего бьефа. Чем больше расход, сбрасываемый через плотину, тем больше в неравенстве (12-23) глубина h_c''; вместе с тем с увеличением расхода Q увеличивается в указанном неравенстве и $h_н$ (см. также рис. 12-10). Непосредственные подсчеты показывают, что в связи с указанными обстоятельствами *очень часто наиболее тяжелые условия сопряжения бьефов получаются не при максимальном расходе* $Q_{макс}$. Обычно такие условия сопряжения бьефов имеют место при некотором промежуточном расходе Q_0:

$$0 < Q_0 < Q_{макс}, \tag{12-40}$$

который получается: а) при наиболее высоком горизонте воды в верхнем бьефе, б) при минимально возможном значении Q' [см. формулу (12-39)], в) при некоторой заранее неизвестной степени открытия затворов.

Имея это в виду, расчетный расход $Q_{расч} = Q_0$ при расчете сопряжения бьефов приходится в общем случае отыскивать путем целого ряда попыток; приходится рассматривать ряд различных схем открытия отверстий плотины (см. конец § 12-1).

§ 12-5. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ГАШЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПОТОКА В НИЖНЕМ БЬЕФЕ СООРУЖЕНИЯ

Относительно большая потенциальная энергия воды верхнего бьефа непосредственно за плотиной частично переходит в кинетическую энергию, в связи с чем скорости движения воды в нижнем бьефе резко увеличиваются. Наличие

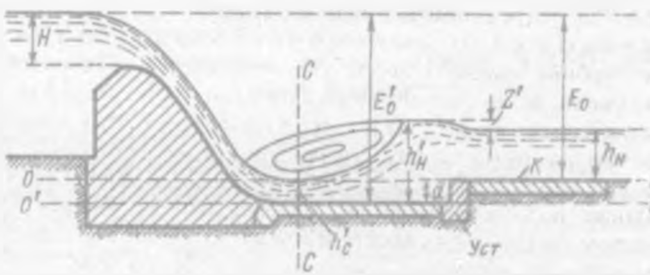


Рис. 12-16. Водобойный колодец

больших скоростей за плотиной заставляет, как отмечалось ранее, сооружать в нижнем бьефе плотины мощное, а следовательно, дорогостоящее крепление.

Для того чтобы уменьшить мощность этого крепления и снизить его стоимость, необходимо на возможно более короткой длине за плотиной:

Рис. 12-17. Водобойная стенка

а) преобразовать часть получившейся в нижнем бьефе избыточной кинетической энергии в потенциальную, доведя относительно малую глубину h_c до величины $h_н$;

б) погасить оставшуюся часть избыточной кинетической энергии, т. е. рассеять ее (преобразовав в тепло за счет работы сил трения).

Гася за плотиной избыточную кинетическую энергию, вместо отогнанного гидравлического прыжка (рис. 12-14), получаем, как и в случае, показанном на рис. 12-15, затопленный прыжок, причем мощность крепления в нижнем бьефе снижается. Специальные устройства, сооружаемые в нижнем бьефе с целью гашения энергии, называются **гасителями энергии**.

Различают следующие типы гасителей энергии:

1) **водобойный колодец** (рис. 12-16). Как видно, идея водобойного колодца заключается в искусственном увеличении глубин нижнего бьефа за счет опускания дна русла нижнего бьефа непосредственно за плотиной на некоторую величину d. В гидравлическом отношении получаем здесь картину,

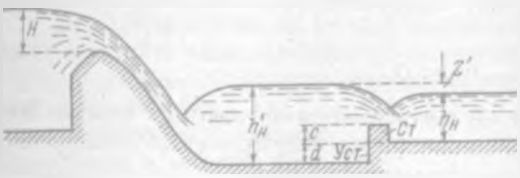


Рис. 12-18. Водобойный колодец комбинированного типа

Рис. 12-19. Схема специальных гасителей энергии (пирсы или шашки)

аналогичную представленной на рис. 12-15. Схемы на рис. 12-15 и 12-16 отличаются друг от друга *только* следующим: в случае схемы на рис. 12-15 послепрыжковый участок длиной $l_{пп}$ располагается в пределах сниженной части *русла; кроме того*, в этом случае отсутствуют бетонная стенка в виде уступа *Уст* и крепление русла *K* за стенкой, показанные на рис. 12-16;

2) **водобойную стенку** (рис. 12-17). Здесь затопляющая глубина $h_н''$ больше глубины $h_н$ на величину подпора z', вызываемого специальной водобойной стенкой *Ст*, устроенной в нижнем бьефе;

3) **водобойный колодец комбинированного типа** (рис. 12-18). В этом случае глубина нижнего бьефа увеличивается и за счет опускания дна русла нижнего бьефа, и за счет подпора, вызванного водобойной стенкой;

4) **специальные гасители энергии**. Идея этих гасителей заключается в том, что на пути потока устраиваются всевозможные препятствия, заставляющие его соответствующим образом деформироваться. В результате такой деформации потока происходит интенсивная диссипация (рассеивание) энергии. Примером специальных гасителей энергии являются пирсы или шашки, устраиваемые на поверхности дна русла нижнего бьефа (рис. 12-19).

В отличие от водобойных колодцев и водобойных стенок, специальные гасители не поддаются гидравлическому расчету. Размеры их, как правило, приходится назначать на основании опытов, проводимых в лаборатории с моделью проектируемого сооружения. Специальные гасители энергии изучаются в курсе «Гидротехнические сооружения». Ниже рассмотрим только водобойные колодцы и водобойные стенки, т. е. так называемые **простейшие типы** гасителей энергии. При этом поясним аналитический расчет колодцев и стенок, а также расчет их при помощи особых графиков, имеющихся в литературе.[1]

---

[1] Современный прием расчета водобойных колодцев и водобойных стенок был дан Н. М. Бобиным, который использовал некоторые предложения А. А. Угинчуса, А. Н. Рахманова и др. (см. «Известия ВНИИГ», т. XIII, 1934). Несколько позже данный вопрос в весьма четкой форме представил в своих работах Н. Н. Павловский. Затем М. Д. Чертоусов внес некоторые дополнительные частные предложения, касающиеся формы построения отдельных расчетных графиков.

§ 12-6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ГЛУБИНЫ ВОДОБОЙНОГО КОЛОДЦА И ОТМЕТКИ ПОНИЖЕННОГО КРЕПЛЕНИЯ ЗА ПЛОТИНОЙ

1°. **Общие указания.** Идея устройства колодца (рис. 12-16) заключается в следующем: создавая колодец, понижаем дно русла нижнего бьефа у плотины от положения *OO* до положения *O'O'* на величину d, где d – глубина водобойного колодца.

В результате этого имеем следующее:

а) полная высота падения струи увеличивается от E_0 до E_0' (см. чертеж);

б) сжатая глубина h_c уменьшается при этом до величины h_c';

в) с уменьшением сжатой глубины сопряженная с ней глубина h_c'' увеличивается и, следовательно, увеличивается высота прыжка $(h_c'' - h_c')$;

г) с увеличением высоты прыжка резко увеличивается потеря энергии в нем (см. § 8-5, где указывалось, что потеря энергии в прыжке прямо пропорциональна высоте прыжка примерно в третьей степени).

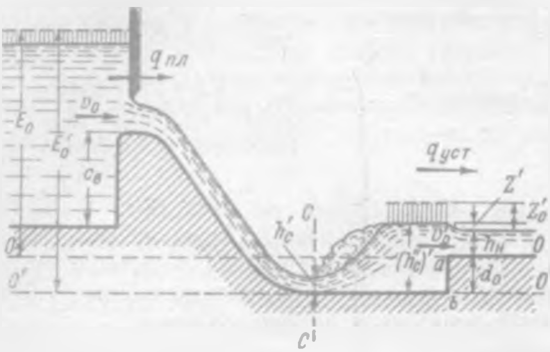


Рис. 12-20. К расчету теоретической глубины d_0 водобойного колодца

Работу водобойного колодца можно пояснить еще и так: отогнанный прыжок (нежелательный тип сопряжения бьефов) получается в случае, когда

$$h_c'' > h_н; \qquad (12\text{-}41)$$

создавая колодец, мы при этом увеличиваем глубину h_c'' (см. выше п. «в»); однако наряду с этим мы еще больше увеличиваем глубину нижнего бьефа, измеряемую **непосредственно** за плотиной (см. глубину $h_н'$ на рис. 12-16); в результате вместо (12-41) можем получить требуемое неравенство

$$h_c'' < h_н'. \qquad (12\text{-}42)$$

Необходимая глубина колодца d, отвечающая затопленному прыжку со степенью затопления $A = (1{,}05 \div 1{,}10)$, находится по формуле

$$d = (1{,}05 \div 1{,}1)\, d_0 + (0{,}05 \div 0{,}10)\, h_н, \qquad (12\text{-}43)$$

где d_0 – так называемая **теоретическая глубина колодца**, т. е. такая глубина, при которой прыжок устанавливается в сжатом сечении и которая характеризуется степенью затопления $A = 1{,}0$ (рис. 12-20). Величина d в формуле (12-43) может быть названа, в отличие от d_0, **практической глубиной колодца**.

Справедливость формулы (12-43) усматривается из следующего.

Степень затопления A прыжка в колодце с некоторым приближением можно представить в виде

$$A \approx \frac{h_н'}{(h_c'')'},$$

где глубины $h_н'$ и $(h_c'')'$ показаны соответственно на рис. 12-16 и на рис. 12-20.

Если пренебречь перепадами свободной поверхности Z', указанными на этих чертежах, то вместо приведенного соотношения можем написать

$$A = \frac{d + h_н}{d_0 + h_н},$$

откуда получаем

$$d = Ad_0 + (A - 1)\, h_н,$$

что при $A = 1{,}05 \div 1{,}10$ и дает нам формулу (12-43).

Для того чтобы по формуле (12-43) установить практическую глубину d водобойного колодца, т. е. глубину, которая должна быть окончательно принята в проекте сооружения, необходимо знать теоретическую глубину колодца d_0. Обратимся к определению глубины d_0.

2°. **Расчет теоретической глубины водобойного колодца.** Значком «прим» (′) будем отмечать те размеры, которые изменили свою величину в связи с устройством колодца (рис. 12-20). Подчеркнем, что на рис. 12-20 представлена не та гидравлическая картина, которую стремимся получить, а некоторая расчетная гидравлическая схема, из рассмотрения которой находим вспомогательную величину d_0.

Рассматривая плоскую задачу, прежде всего находим расход Q, сбрасываемый в нижний бьеф, а также удельный расход для плотины

$$q_{пл} = \frac{Q}{B}, \tag{12-44}$$

где B – ширина водосливного фронта плотины.

При отыскании Q пользуемся или соответствующей водосливной формулой, или расчетной зависимостью, относящейся к случаю истечения из отверстия. Зная $q_{пл}$, ведем расчет, придерживаясь следующей схемы.

1-й пункт расчета. Здесь выполняем следующие действия:

1) задаемся какой-либо величиной d_0;

2) находим новое значение E'_0:

$$E'_0 = E_0 + d_0; \tag{12-45}$$

3) пользуясь E'_0, находим новое значение h_c, т. е. величину h'_c;

4) пользуясь h'_c находим новую, сопряженную глубину h''_c, т. е. глубину $(h''_c)'$;

5) в конце водобойного колодца имеем уступ ab, который может быть назван водобойным уступом; он работает, как водосливная стенка затопленного водослива с широким порогом; в связи с этим в районе уступа ab получается перепад свободной поверхности Z'.

Определив выше глубину $(h''_c)'$ и считая, что $(h''_c)' = h'_н$, находим теперь величину этого перепада (см. чертеж);

$$Z' = (h''_c)' - d_0 - h_н; \tag{12-46}$$

6) находим скорость v'_0 подхода к водобойному уступу:

$$v'_0 = \frac{q_{пл}}{(h''_c)'}; \tag{12-47}$$

7) вычисляем перепад на водобойном уступе с учетом скорости подхода v'_0:

$$Z'_0 = Z' + \frac{\alpha\,(v'_0)^2}{2g}; \tag{12-48}$$

8) наконец, по водосливной формуле, относящейся к затопленному водосливу с широким порогом, определяем удельный расход для водобойного уступа:

$$q_{уст} = \varphi_{уст} h_н \sqrt{2gZ'_0}, \tag{12-49}$$

где $\varphi_{уст}$ – коэффициент скорости для уступа ($\sim 0{,}95$).

2-й пункт расчета. Задаемся другим значением величины d_0 и, следуя схеме расчета, поясненной в 1-м пункте, определяем для этой величины d_0 значение $q_{уст}$ и т. д.

В результате такого расчета находим

$$q_{уст} = f(d_0); \tag{12-50}$$

эта зависимость в виде кривой показана на рис. 12-21.

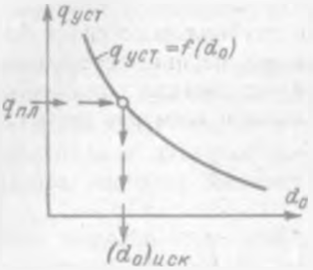


Рис. 12-21. Определение теоретической глубины колодца d_0

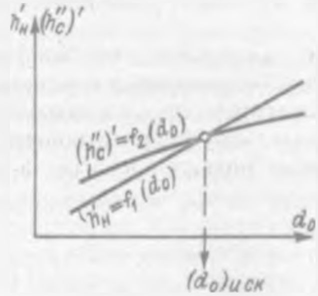


Рис. 12-22. Упрощенный способ определения теоретической глубины колодца d_0

Ясно, что величина $q_{уст}$ должна равняться $q_{пл}$:

$$q_{уст} = q_{пл}. \tag{12-51}$$

Имея это в виду, по кривой на рис. 12-21 находим величину d_0, удовлетворяющую условию (12-51).

3°. Дополнительные замечания. Определение отметки $\nabla_{крп}$ пониженного крепления (рис. 12-15).

1. В некоторых случаях можно пренебречь перепадом Z' на водобойном уступе (рис. 12-16) и считать, что горизонт воды в колодце будет стоять на одном уровне с горизонтом воды в нижнем бьефе; новая глубина $h'_н$ в колодце, отвечающая величине d_0, в этом случае будет:

$$h'_н = h_н + d_0, \tag{12-52}$$

причем расчет глубины колодца значительно упрощается.

Для отыскания d_0 достаточно построить график, представленный на рис. 12-22. По вертикальной оси графика откладываем величины, вычисленные по формуле (12-52), и получаем прямую $h'_н = f_1(d_0)$.

По этой же вертикальной оси откладываем глубины $(h''_c)'$, вычисляемые, как указано выше, и получаем кривую

$$(h''_c)' = f_2(d_0). \tag{12-53}$$

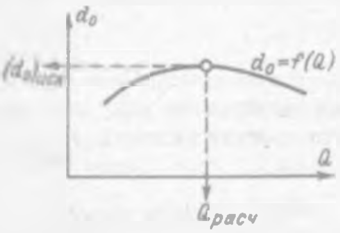


Рис. 12-23. Зависимость теоретической глубины d_0 водобойного колодца от расхода Q, сбрасываемого в нижний бьеф

Ясно, что искомая величина d_0 будет отвечать точке пересечения прямой $h'_н = f_1(d_0)$ и кривой $(h''_c)' = f_2(d_0)$. Этим аналитическим способом можно пользоваться при отыскании отметки поверхности пониженного крепления

$$\nabla_{крп} = \nabla_д - a = \nabla ГНБ - h_н - a$$

в случае, представленном на рис. 12-15, где $\nabla_д$ — отметка поверхности дна нижнего бьефа; размер a, показанный на этом чертеже, вычисляется по формуле (12-43) после замены в ней обозначений d и d_0 соответственно обозначениями a и a_0. В формуле (12-52) обозначение d_0 также надо заменить при этом расчете обозначением a_0, где a_0 есть «теоретическое» заглубление крепления под уровнем дна нижнего бьефа (величина, аналогичная d_0).

2. В зависимости от степени открытия затвора, имеющегося на гребне плотины, будем получать различные расходы Q, сбрасываемые в нижний бьеф. Наибольший расход Q будет иметь место при полном открытии отверстия плотины.

Следует подчеркнуть, что наибольшая глубина колодца, которая должна нас интересовать,[1] получается, в общем случае, не при максимальном расходе Q, а при некотором промежуточном значении расхода $Q_{расч}$, который приходится отыскивать путем ряда попыток. В связи с этим при расчете приходится строить график, представленный на рис. 12-23.

§ 12-7. РАСЧЕТ ГЛУБИНЫ ВОДОБОЙНОГО КОЛОДЦА И ОТМЕТКИ ПОНИЖЕННОГО КРЕПЛЕНИЯ ЗА ПЛОТИНОЙ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФИКОВ

Существуют различные графики, служащие для расчета глубины водобойного колодца. Поясним здесь только график Н. Н. Павловского. С этой целью представим на рис. 12-24 чертеж водобойного колодца, причем на чертеже укажем о т н о с и т е л ь н ы е, а не абсолютные размеры:

$$\xi_0 = \frac{E_0}{h_к}; \quad \xi'_0 = \frac{E'_0}{h_к}; \quad \zeta'_0 = \frac{Z' + \dfrac{\alpha (v'_0)^2}{2g}}{h_к} = \frac{Z'_0}{h_к}; \quad \xi_н = \frac{h_н}{h_к}. \qquad (12\text{-}54)$$

Через η' на рис. 12-24 обозначена потеря напора на сооружении, отнесенная, как и другие величины, к критической глубине (η' — «относительная потеря напора на сооружении»).

Из чертежа видно, что

$$\eta' = \xi_0 - \xi_н - \zeta'_0, \qquad (12\text{-}55)$$

где ξ_0 и $\xi_н$ легко можно найти, зная E_0, $h_н$ и $h_к$.

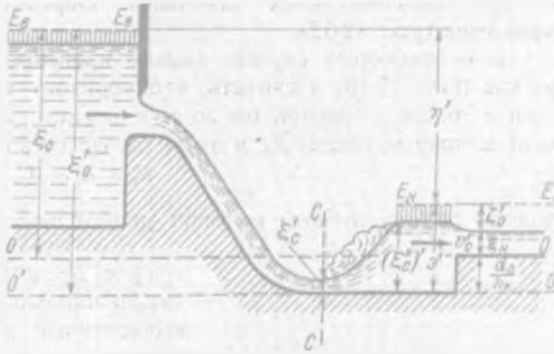


Рис. 12-24. К расчету глубины водобойного колодца при помощи графика на рис. 12-25

Величину полного относительного перепада ζ'_0 на водобойном уступе, входящую в формулу (12-55), можно получить из «водосливной формулы», относящейся к затопленному водосливу с широким порогом. Эта формула приводится здесь к виду.[2]

[1] Именно такая глубина колодца должна быть окончательно принята в проекте плотины.

[2] Действительно, $q = \varphi_{уст} h_н \sqrt{2gZ'_0}$, откуда $Z'_0 = \dfrac{q^2}{g} \dfrac{1}{2\varphi^2_{уст} h^2_н} = \dfrac{h^3_к}{2\varphi^2_{уст} h^2_н}$, что и дает (12-56).

$$\zeta'_0 = \frac{Z'_0}{h_к} = \frac{1}{2\varphi^2_{уст}\xi^2_{эн}} \approx \frac{1}{2\xi^2_{эн}}, \quad (12\text{-}56)$$

где $\varphi_{уст}$ — коэффициент скорости для водобойного уступа ($\sim 1{,}0$).

Учитывая (12-56), зависимость (12-55) можно представить в виде

$$\eta' = \xi_0 - \xi_{эн} - \frac{1}{2\xi^2_{эн}}. \quad (12\text{-}57)$$

При заданных E, Q и $h_н$ по последней формуле находим величину η', после чего обращаемся к графику на рис. 12-25.[1]

На этом графике через φ_c обозначен коэффициент скорости, учитывающий потери напора на сооружении (до сжатого сечения $C-C$); численные значения φ_c даны на стр. 457.

Зная η', по графику, приняв соответствующие значения φ_c (см. § 12-2), находим величину э′, указанную на рис. 12-24.

Определив э′, находим d_0 по формуле

$$d_0 = (\eta' + э' - \xi_0)\, h_к = \left(э' - \xi_{эн} - \frac{1}{2\xi^2_{эн}}\right) h_к. \quad (12\text{-}58)$$

Зная теоретическую глубину колодца d_0, практическую глубину колодца d определяем, как указано в п. 1° § 12-6.

Надо учитывать следующее: если ξ'_0 есть относительное заглубление дна колодца под напорной линией $E_в - E_в$ верхнего бьефа, то э′ есть относительное заглубление этого дна под напорной линией $E_н - E_н$, отвечающей нижнему бьефу.

Пользуясь поясненным графиком, легко также найти и отметку поверхности пониженного крепления нижнего бьефа (рис. 12-15). Здесь применяем те же зависимости (12-57), (12-58), (12-43), причем в двух последних формулах заменяем обозначения d_0 и d соответственно обозначениями a_0 и a.

§ 12-8. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСЧЕТА ВЫСОТЫ ВОДОБОЙНОЙ СТЕНКИ

1°. Общие указания. Представим на рис. 12-26 теоретический случай водобойной стенки, когда гидравлический прыжок находится в сжатом сечении. Через c_0 обозначим теоретическую высоту водобойной стенки.

Видно, что водобойная стенка работает как водосливная стенка практического профиля; при этом получаем водослив:

а) или подтопленный,

б) или неподтопленный.[2]

Удельный расход для водобойной стенки в общем случае определяется формулой[3]

$$q_{ст} = \sigma'_п m' \sqrt{2g}\, (H'_0)^{3/2}, \quad (12\text{-}59)$$

где

$$H'_0 = H' + \frac{\alpha (v'_0)^2}{2g} \quad (12\text{-}60)$$

---

[1] Зависимостей, по которым построен данный график, здесь не приводим.

[2] Отогнанный прыжок за стенкой не допускается.

[3] Здесь всюду величины, относящиеся к водобойной стенке (напор, высота подтопления $h'_п$ и т. п.) отмечаем значком «прим» (′).

и

$$\sigma'_{п} = f\left(\frac{h'_{п}}{H'_0}\right). \qquad (12\text{-}61)$$

Расчет водобойной стенки проще, чем расчет водобойного колодца, поскольку в случае колодца с изменением d_0 изменялись величины h_c и h''_c, в случае же стенки с изменением c_0 величины h_c и h''_c при заданном E_0 ($E_0 = \mathrm{const}$) не должны изменяться. Найдя теоретическую высоту стенки c_0, необходимо установить практическую высоту стенки c, обеспечивающую затопление прыжка (см. свободную поверхность на рис. 12-26, показанную штриховой линией).

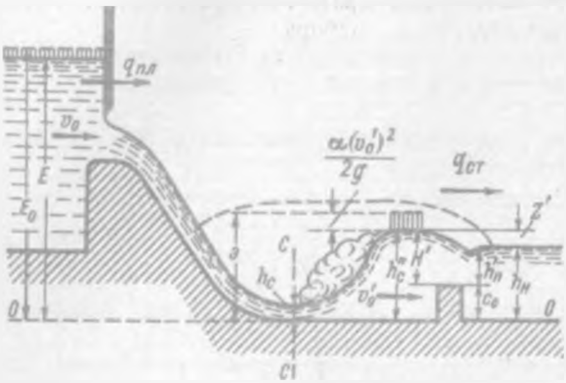


Рис. 12-26. К расчету теоретической высоты c_0 водобойной стенки

Практическая высота стенки c может быть определена по формуле

$$c = c_0 + (0{,}05 \div 0{,}10)\, h''_c. \qquad (12\text{-}62)$$

Действительно,

$$A = \frac{h'_{н}}{h''_c} = \frac{c + H'}{h''_c} = \frac{c + (h''_c - c_0)}{h''_c},$$

где $h'_{н}$ показано на рис. 12-17 и h''_c — на рис. 12-26.

Из этой зависимости получаем:

$$Ah''_c = c + h''_c - c_0 \quad \text{и} \quad c = c_0 + (A - 1)\, h''_c,$$

что при $A = 1{,}05 \div 1{,}10$ и дает (12-62).

Остановимся на определении величины c_0, причем рассмотрим два случая: когда стенка образует неподтопленный водослив и когда она образует подтопленный водослив.

2°. Определение c_0, когда водобойная стенка образует неподтопленный водослив. В этом случае c_0 находится без подбора. Ход решения задачи здесь следующий:

1) зная E и установив удельный расход для плотины $q_{пл} = (Q : B)$, определяем величину h_c (см. § 12-2);

2) пользуясь основным уравнением прыжка, находим глубину h''_c, сопряженную с глубиной h_c;

3) определяем скорость подхода v'_0 для водобойной стенки:

$$v'_0 = \frac{q}{h''_c}, \qquad (12\text{-}63)$$

причем устанавливаем величину скоростного напора $\frac{\alpha (v'_0)^2}{2g}$;

4) полагая в формуле (12-59) $q_{ст} = q_{пл}$ и $\sigma'_{п} = 1{,}0$, находим, исходя из этой формулы, H'_0:

$$H'_0 = \left(\frac{q_{пл}}{m'\sqrt{2g}}\right)^{2/3}; \qquad (12\text{-}64)$$

коэффициент расхода для водобойной стенки может быть принят равным, например,

$$m' \approx 0{,}40 \div 0{,}44 \approx 0{,}42;$$

5) зная полный напор на водобойной стенке H'_0, определяем геометрический напор на водобойной стенке:

$$H' = H'_0 - \frac{\alpha (v'_0)^2}{2g}; \tag{12-65}$$

6) наконец, устанавливаем величину c_0 (см. чертеж):

$$c_0 = h''_c - H'. \tag{12-66}$$

3°. Определение c_0, когда водобойная стенка образует подтопленный водослив. Здесь величину c_0 приходится находить путем подбора.

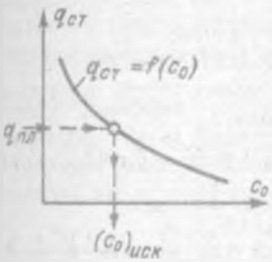


Рис. 12-27. Определение теоретической высоты стенки c_0

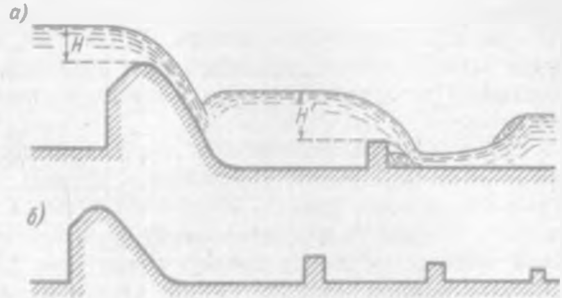


Рис. 12-28. Сопряжение бьефов за водобойной стенкой

Сперва определяем, как это было пояснено в п. 2°, величины:

$$q_{пл},\ h_c,\ h''_c,\ v'_0,\ \frac{\alpha (v'_0)^2}{2g} = h'_v. \tag{12-67}$$

Далее придерживаемся следующей схемы расчета.

1. Задаемся некоторым значением $c_0 = c'_0$ и вычисляем величины:

а) $H' = h''_c - c'_0;$ (12-68)

б) $H'_0 = H' + \dfrac{\alpha (v'_0)^2}{2g};$ (12-69)

в) $h'_п = h_н - c'_0;$ (12-70)

г) $\sigma'_п$, причем эту величину находим по графику на рис. 11-32 в зависимости от предварительно установленного отношения $(h'_п : H'_0)$; [1]

д) удельный расход для стенки $q_{ст} = q'_{ст}$ [по формуле (12-59)].

2. Задаемся другим значением $c_0 = c''_0$ и вычисляем, исходя из этого значения c_0, те же величины, что и в п. 1, в частности величину $q_{ст}$, обозначаемую в данном случае через $q''_{ст}$ и т. д.

В результате такого рода подсчетов строим график, показанный на рис. 12-27:

$$q_{ст} = f(c_0). \tag{12-71}$$

Поскольку удельный расход для стенки $q_{ст}$ должен равняться удельному расходу для плотины $q_{пл}$:

[1] Иногда значения $\sigma_п$, найденные по этому графику, рекомендуют в запас несколько увеличивать.

$$q_{ст} = q_{пл},\tag{12-72}$$

то искомую величину $(c_0)_{иск}$ находим, как показано на рис. 12-27.

4°. Заключительные замечания. 1. Часто заранее неизвестно, будет ли водослив, образованный водобойной стенкой, работать как подтопленный или как неподтопленный.

В таком случае поступают следующим образом: сначала рассчитывают стенку в предположении, что она образует неподтопленный водослив; затем проверяют, исходя из известных критериев, действительно ли в данном случае имеем неподтопленный водослив. Если оказывается, что стенка образует подтопленный водослив, то снова повторяют расчет этой стенки, учитывая подтопление.

2. Высоту водобойной стенки c_0, так же как и глубину водобойного колодца d_0 приходится определять для различных величин открытия затвора на плотине. При этом из ряда полученных значений c_0 окончательно выбираем наибольшее.

3. При расчете водобойной стенки всегда следует выяснить условия сопряжения бьефов за ней. В некоторых случаях за стенкой может получиться отогнанный прыжок (рис. 12-28, *а*). При этом за данной стенкой приходится устраивать вторую водобойную стенку (меньшей высоты). Иногда же за второй стенкой приходится делать третью стенку (рис. 12-28, *б*) и т. д.

Высота каждой дополнительной стенки находится так же, как и высота первой; при расчете дополнительной стенки стенку, расположенную выше по течению, рассматриваем как плотину.

§ 12-9. РАСЧЕТ ВЫСОТЫ ВОДОБОЙНОЙ СТЕНКИ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФИКОВ

Здесь также следует различать два случая.

1°. Водобойная стенка образует неподтопленный водослив. Для определения c_0 в этом случае Н. Н. Павловский дает следующую формулу:[1]

$$c_0 = h_к\left(э - \frac{1}{\sqrt[3]{2m'^2}}\right),\tag{12-73}$$

где m' — коэффициент расхода водобойной стенки.

Как видно, в формулу (12-73) входит неизвестная величина э, показанная на рис. 12-26. Для нахождения ее имеем специальный график, построенный Н. Н. Павловским, и несколько видоизмененный М. Д. Чертоусовым (рис. 12-29). Обозначения ξ_0 и φ_c, указанные на этом графике, известны из предыдущего (см. конец § 12-2).

2°. Водобойная стенка образует подтопленный водослив (рис. 12-26). Согласно Н. Н. Павловскому, теоретическая высота стенки в данном случае устанавливается по формуле

$$c_0 = h_к\left(\xi''_c - \frac{\zeta'}{\eta_н}\right),\tag{12-74}$$

где относительная величина

$$\xi''_c = \frac{h''_c}{h_к}\tag{12-75}$$

может быть найдена (зная q, E_0, φ_c, m) по графику на рис. 12-5.

Относительная величина ζ' может быть легко определена:

$$\zeta' = \frac{h''_c - h_н}{h_к} = \xi''_c - \xi_н,\tag{12-76}$$

где $\xi_н = h_н/h_к$.

[1] Весьма простой вывод ее здесь не приводим.

Что касается неизвестной величины

$$\eta_{н} = \frac{h_{c}' - h_{н}}{H'} = \frac{Z'}{H'},$$

то она находится по специальному графику на рис. 12-30.[1]

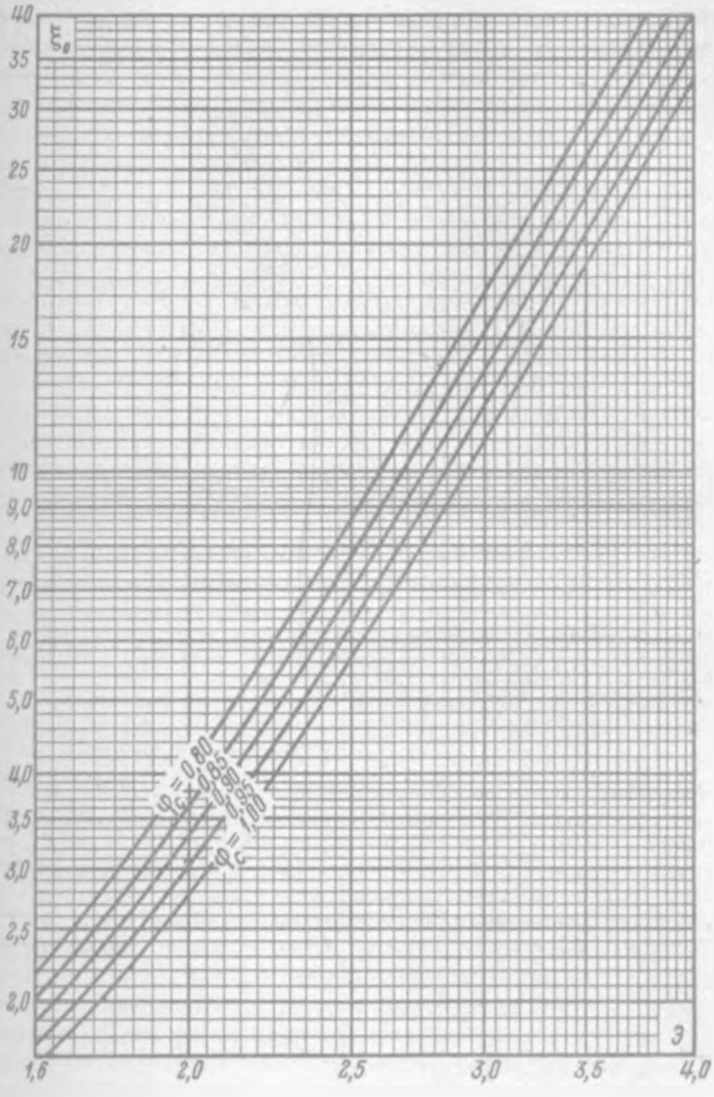


Рис. 12-29. График для определения высоты неподтопленной водобойной стенки (плоская задача)

Для отыскания $\eta_{н}$ по этому графику предварительно необходимо вычислить особые величины A_0 и B_0:

---

[1] Здесь вместо графика Н. Н. Павловского приводим несколько более удобный график М. Д. Чертоусова. Вопроса о построении этого графика не касаемся.

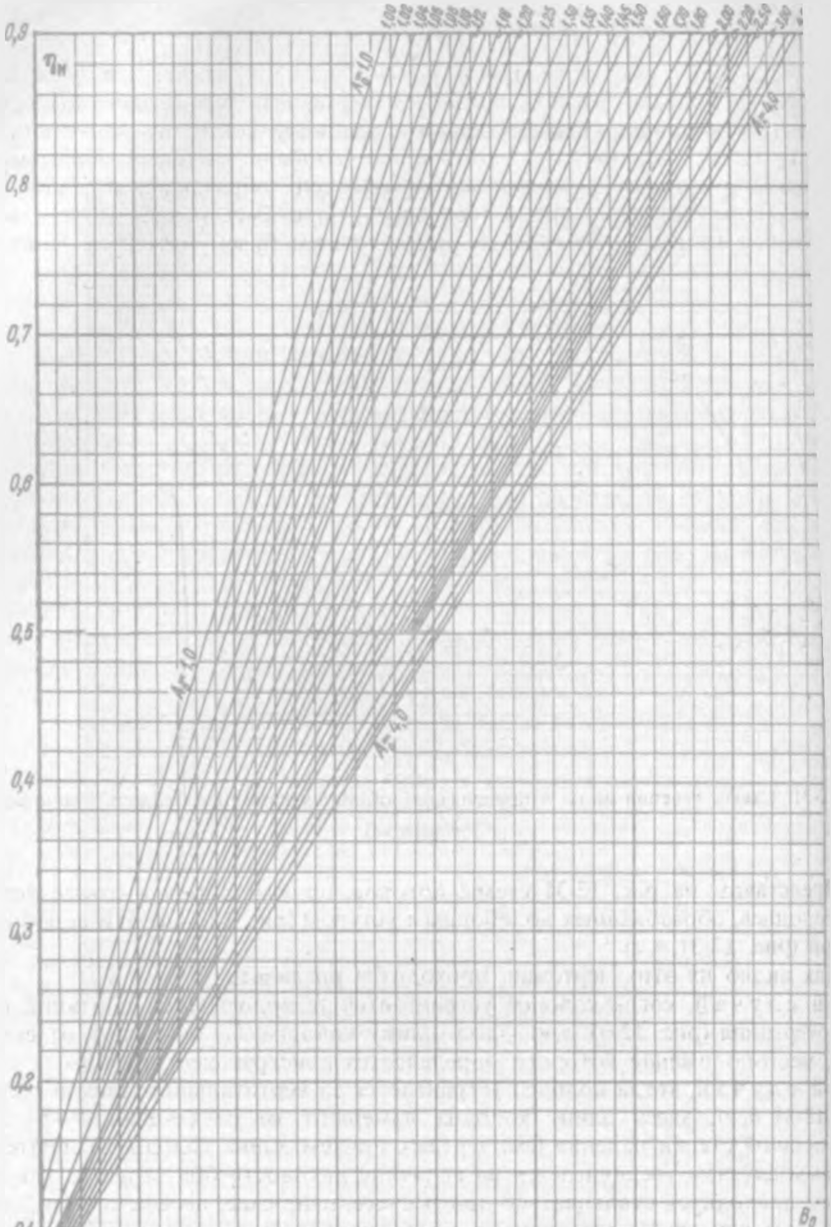


Рис. 12-30. График для определения высоты подтопленной водобойной стенки (плоская задача)

$$A_0 = \frac{\zeta''_c}{\sqrt[3]{2m'^2}}, \qquad (12$$

$$B_0 = \zeta' \sqrt[3]{2m'^2}. \qquad (12$$

Найдя c_0, практическую высоту водобойной стенки c, обеспечивающую необходи степень затопления прыжка, определяем, как указано в п. 1° § 12-8.

§ 12-10. РАСЧЕТ ДЛИНЫ ВОДОБОЙНЫХ КОЛОДЦЕВ, ОБРАЗОВАННЫХ ВОДОБОЙНЫМ УСТУПОМ И ВОДОБОЙНОЙ СТЕНКОЙ

Выше для краткости изложения мы пользовались терминами: водобойный колодец и водобойная стенка. Однако правильнее было бы применять, как предлагал Н. Н. Павловский, термины «водобойный колодец, образованный водобойным уступом» и «водобойный колодец, образованный водобойной стенкой». Пользуясь далее этими терминами, обратимся теперь к определению горизонтальных размеров колодцев, причем будем искать их длину $L_{кл}$.

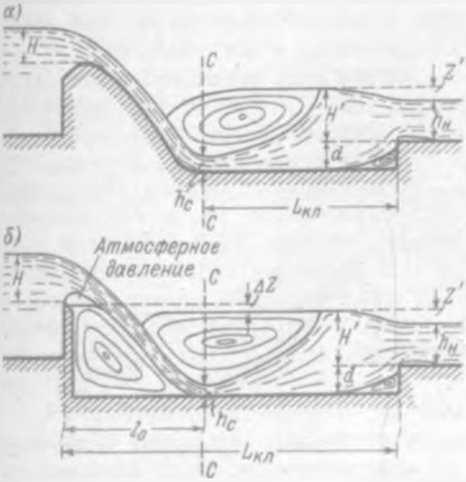


Рис. 12-31. Схема течения воды в пределах водобойных колодцев (модель Рейнольдса — Буссинеска)

Представим на рис. 12-31 схемы потоков, получающихся в случае устройства колодцев, образованных водобойным уступом (рис. 12-31, *а*, *б*) и водобойной стенкой (рис. 12-31, *в*, *г*).[1]

Как видно из этих чертежей, приходится различать:

1-й случай, когда колодец устраивается за водосливной плотиной плавного очертания (рис. 12-31, *а*, *в*); здесь длину колодца $L_{кл}$ измеряют от сечения $C-C$, местоположение которого определяется конструкцией плотины;

2-й случай, когда колодец устраивается за вертикальной стенкой падения (рис. 12-31, *б*, *г*); здесь длину колодца измеряют не от сечения $C-C$, а от вертикальной стенки падения (см. чертеж), причем длина колодца сравнительно с первым случаем увеличивается на величину дальности боя струи l_0. Со 2-ым случаем приходится сталкиваться при расчете, например, перепалов (см. далее).

В этом параграфе остановимся на рассмотрении только 1-го случая. Как видно из рис. 12-31, *а*, *в*, в колодце при наличии в нем затопленного прыжка образуются два вальца с горизонтальной осью, способствующие значительной диссипации энергии потока.

---

[1] На рис. 12-31 показаны картины действительного протекания воды в колодцах, а не те условные, из рассмотрения которых выше определяли теоретические размеры d_0 и c_0. Заметим, что на рис. 12-31 водоворотные области (вальцы) изображены замкнутыми линиями тока, т. е. теми линиями тока, которые относятся к осредненному (во времени) движению (согласно модели Рейнольдса — Буссинеска).

В случае рис. 12-31, *б*, *г* в колодце под струей появляется еще третий валец. Обратим внимание, что горизонт воды под струей, несмотря на наличие в этом месте атмосферного давления (предполагаем, что подвод воздуха под струю обеспечен), устанавливается всегда несколько выше (на величину Δz) горизонта воды в колодце, правее струи.

Длина колодца $L_{кл}$ должна быть назначена такой, чтобы верхний и нижний вальцы не «перекрывали» друг друга, т. е. чтобы перед водобойным уступом или водобойной стенкой имелся участок потока, в вертикальные сечения которого вальцы не попадали; при таком условии нормальный подход воды к водобойному уступу или водобойной стенке будет обеспечен.

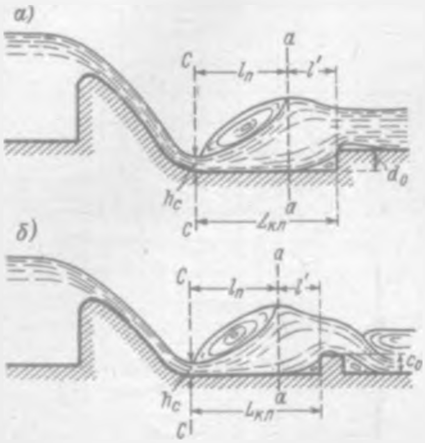


Рис. 12-32. Расчетные схемы течения воды в пределах колодца

Имея в виду это соображение, представим на рис. 12-32 теоретический случай (из рассмотрения которого выше устанавливали величины d_0 и c_0); как видно, здесь $L_{кл}$ намечена

Рис. 12-33. Размыв грунта при недостаточной длине водобойного колодца

такой, что вертикальное сечение $a-a$, проведенное в конце верхнего вальца, отвечает началу нижнего вальца.

Рассматривая рис. 12-32, для искомой длины колодца $L_{кл}$ можно было бы написать следующую формулу:

$$L_{кл} = l_п + l', \tag{12-79}$$

где $l_п$ – длина свободного незатопленного прыжка; l' – длина нижнего вальца.

Однако, как показывают опыты, формула (12-79), полученная из рассмотрения теоретического случая (рис. 12-32), дает завышенные значения $L_{кл}$.

Дело в том, что в колодце получается несвободный прыжок, длина которого меньше длины свободного прыжка, рассмотренного в гл. 8. К тому же в действительности мы имеем затопление прыжка.

В связи с этими обстоятельствами ряд авторов предлагает зависимости, дающие для $L_{кл}$ размер меньший, чем формула (12-79). В частности, М. Д. Чертоусов длину водобойного колодца рекомендует определять по следующей эмпирической формуле:

$$L_{кл} = \beta l_п, \tag{12-80}$$

где $l_п$ – длина свободного незатопленного прыжка (см. § 8-5); β – некоторый эмпирический коэффициент, принимаемый равным:

$$\beta = 0{,}7 \div 0{,}8. \tag{12-81}$$

Подчеркнем, однако, что если длина колодца в проекте плотины будет принята недостаточной, то при этом можем получить весьма опасную картину протекания воды (рис. 12-33): струя выйдет из колодца без образования прыжка[1] и, ударяясь о дно нижнего бьефа за колодцем, может произвести разрушение крепления и размыв дна нижнего бьефа.

§ 12-11. РАСЧЕТ ПЛОТИНЫ С НИЗКИМ УСТУПОМ

Выше всюду имели в виду случай, когда водосливная поверхность плотины плавно сопрягалась с поверхностью водобоя. В практике, однако, встречаются плотины, имеющие в конце сливной поверхности уступ:

а) или низкий, поверхность которого расположена ниже горизонта воды нижнего бьефа,

б) или высокий, поверхность которого расположена выше горизонта воды нижнего бьефа.

В этом параграфе рассмотрим плотину с низким уступом (рис. 12-34).[2] Такие плотины устраивают, когда во время ледохода в нижний бьеф приходится пропускать большие массы льда. Уступ плотины mn в верхней своей части имеет плоский носок km, сбрасывающий воду и лед в нижний бьеф.

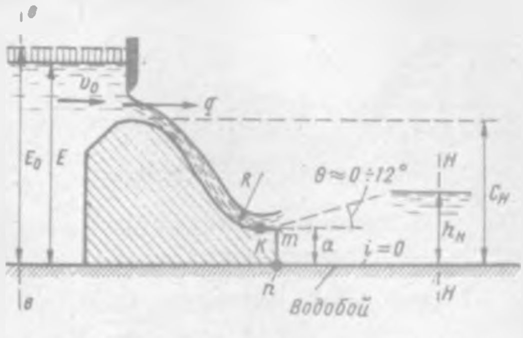


Рис. 12-34. Плотина с низким уступом

Рассматривая плотину с уступом, будем пользоваться обозначениями: a – высота уступа; θ – угол наклона к горизонту носка уступа (принимается равным $0-12°$); R – радиус кривой, по которой очерчена водосливная поверхность плотины при подходе к носку; $(h_с)_{уст}$ – сжатая глубина, устанавливающаяся в конце носка на уступе (рис. 12-35). Остальные обозначения сохраним прежние.

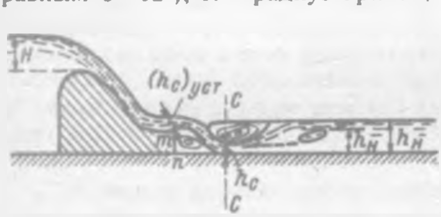


Рис. 12-35. Донный режим

В случае плотины с низким уступом различают следующие основные типы (режимы) сопряжения бьефов.[3]

1-й режим: донный (рис. 12-35). Здесь струя воды, сойдя с носка, падает на дно нижнего бьефа; при этом сжатое сечение струи устанавливается у дна и наибольшие скорости в сечении $C-C$ (рис. 12-35) при затопленном прыжке наблюдаются вблизи дна. На рис. 12-35 сплошными линиями представлен донный режим, когда гидравлический прыжок затоплен; жирной штриховой линией – когда прыжок отогнан от сечения $C-C$.

Донный режим имеет место при относительно малой глубине воды в нижнем бьефе, когда

$$h_н < h_{пр_1}, \qquad (12\text{-}82)$$

---

[1] Напомним, что гашение энергии главным образом обусловливается гидравлическим прыжком.

[2] Первые теоретические расчеты этого типа плотин были предложены А. А. Сабанеевым в связи с проектированием Волховской ГЭС.

[3] В этом параграфе, как и в предыдущих, имеем в виду случай, когда дно нижнего бьефа за плотиной имеет малый уклон (движение воды в нижнем бьефе вдали от плотины – спокойное).

причем здесь глубина $h_{пр_I}$ может быть названа **первой предельной глубиной нижнего бьефа**.

Вопрос об отгоне или затоплении гидравлического прыжка в сечении $C-C$ решается в случае донного режима, как указывалось в § 12-3.

2-й **режим: поверхностный с незатопленной струей** (рис. 12-36). Здесь струя не падает на дно, а находится на поверхности воды нижнего бьефа; при этом наибольшие скорости потока наблюдаются вблизи его свободной поверхности. В этом случае имеется один валец воды с горизонтальной осью, расположенный под транзитной струей. [1]

Рис. 12-36. Поверхностный режим с незатопленной струей

Рис. 12-37. Поверхностный режим с затопленной струей

Второй режим получается, когда

$$h_{пр_I} < h_н < h_{пр_{II}}, \tag{12-83}$$

где глубина $h_{пр_{II}}$ может быть названа **второй предельной глубиной нижнего бьефа**.

3-й **режим: поверхностный с затопленной струей** (рис. 12-37). Здесь появляется второй валец, расположенный над транзитной струей. Этот режим получается, когда

$$h_{пр_{II}} < h_н. \tag{12-84}$$

Предположим, что нам заданы: E, a и q, а также угол θ (рис. 12-34).

Представим себе, что при таких данных глубина воды в нижнем бьефе $h_н$ постепенно увеличивается, начиная от некоторой небольшой величины. При этом получаем следующее:

1) пока $h_н < h_{пр_I}$, имеем, как было отмечено выше, донный режим;

2) при $h_н = h_{пр_I}$ донный режим переходит в поверхностный режим с незатопленной струей;

3) при $h_н = h_{пр_{II}}$ поверхностный режим с незатопленной струей переходит в поверхностный режим с затопленной струей.

Проектируя плотину с низким уступом, высоту a этого уступа стремятся выбрать такой, чтобы в период ледохода имел место **второй** режим: **поверхностный с незатопленной струей**. Здесь имеют в виду, что при таком режиме лед, сбрасываемый через плотину:

а) не ударяется о крепление дна нижнего бьефа и не повреждает его, что может иметь место в случае донного режима;

б) не задерживается над транзитной струей, что получаем в случае затопленной струи, когда льдины, попавшие в верхний валец, вращаются вместе с водой, причем могут ударяться о поверхность носка и повреждать его.

В связи со сказанным задачу о гидравлическом расчете уступа обычно ставят так: задаются несколькими высотами уступа a и для каждой такой высоты находят свои предельные глубины: $h_{пр_I}$ и $h_{пр_{II}}$. Далее, зная диапазон глубин нижнего бьефа $h_н^0$, отвечающих «ледоходным расходам», выбирают,

[1] Говоря о вальцах, имеем в виду осредненное (во времени) движение воды (см. § 4-14).

по возможности, такую высоту a, при которой все имеющиеся глубины $h_н^0$ удовлетворяют соотношению

$$h_{пр_I} < h_н^0 < h_{пр_{II}}. \tag{12-85}$$

Как видно, для решения такой задачи надо уметь найти при заданных E, a и q соответствующие величины $h_{пр_I}$ и $h_{пр_{II}}$. Обратимся к рассмотрению этого вопроса.

1°. Теоретическое определение первой предельной глубины по заданным *E*, *a* и *q*. Рассматриваем момент перехода донного режима в поверхностный с незатопленной струей, т. е. случай, когда

$$h_н = h_{пр_I}. \tag{12-86}$$

Обозначим через h_m разность между пьезометрической высотой в точке m и заглублением этой точки под свободной поверхностью потока в месте расположения точки A, отвечающей «сжатому» живому сечению Am (рис. 12-38, *а*, *б*, *в*, *г*). Как видно, h_m представляет собой превышение давления в точке m над давлением в этой же точке, полученным согласно гидростатическому закону.

На основании опытов Т. Н. Астафичевой было установлено, что при наличии равенства (12-86) величина h_m, записываемая в данном случае в виде h_{m_1}, может быть представлена эмпирической формулой:

$$h_{m_1} \approx 0{,}31\, h_{пр_I} - 0{,}50a. \tag{12-87}$$

Соединяя далее уравнением Бернулли сечения $b-b$ и $1-1$ (рис. 12-38, *а*), получаем уравнение для сжатой глубины на уступе $(h_c)_{уст}$ [аналогичное уравнению (12-12)]:

$$E_0 = a + (h_c)_{уст} \cos\theta + \frac{q^2}{2g\,(h_c)^2_{уст}\,\varphi_c^2} + \frac{1}{2}\,h_{m_1}, \tag{12-88}$$

где φ_c – коэффициент скорости, учитывающий потери напора между сечениями $b-b$ и $1-1$; E_0 – величина E, записанная с учетом скорости подхода v_0.

Наконец, соединяя сечения потока по линиям $1'-1'$ и $н-н$ уравнением количества движения (в проекциях на ось x, направленную вдоль течения),[1] получаем (после соответствующего преобразования этого уравнения):

$$\frac{2q^2}{g\,(h_c)_{уст}\,h_{пр_I}}\left[(h_c)_{уст} - h_{пр_I}\cos\theta\right] = \left[(h_c)_{уст}\cos\theta + a\right]^2 + \left[2a + (h_c)_{уст}\cos\theta\right] h_{m_1} - h^2_{пр_I}. \tag{12-89}$$

При выводе уравнения (12-89) пользуемся следующими допущениями:

а) считаем, что гидродинамическое давление вдоль вертикальной стенки уступа mn, а также вдоль вертикали $B-C$ распределяется по линейному закону;

б) полагаем, что сила внешнего трения вдоль стенки nC (вдоль дна) пренебрежимо мала.

Уравнения (12-87), (12-88) и (12-89) представляют собой систему трех уравнений с тремя неизвестными: $(h_c)_{уст}$; h_{m_1}; $h_{пр_I}$). Решая эту систему уравнений путем подбора, находим величину $h_{пр_I}$.[2]

2°. Теоретическое определение второй предельной глубины $h_{пр_{II}}$ по заданным *E*, *a* и *q*. Рассматриваем момент перехода незатопленной поверхностной струи в затопленную, т. е. случай, когда

$$h_н = h_{пр_{II}}. \tag{12-90}$$

На основании опытов Т. Н. Астафичевой было установлено, что при наличии равенства (12-90) величина h_m, записываемая в данном случае в виде h_{m_2} (рис. 12-38, *г*), может быть представлена эмпирической формулой

$$h_{m_2} \approx 0{,}59\,(h_{пр_{II}} - a). \tag{12-91}$$

---

[1] Как видно из рис. 12-38, *а*, этими двумя сечениями выделяется отсек жидкости *nmABCn*.

[2] Как здесь, так и ниже дно нижнего бьефа считаем горизонтальным ($i = 0$).

Используя далее, как и в предыдущем пункте, уравнение Бернулли и уравнение количества движения, получаем соответственно два уравнения:

$$E_0 = a + (h_c)_{уст} \cos\theta + \frac{q^2}{2g\,(h_c)^2_{уст}\,\varphi_c^2} + \frac{1}{2}h_{m_2}; \qquad (12\text{-}92)$$

$$\frac{2q^2}{g\,(h_c)_{уст}\,h_{пр_{II}}}\left[(h_c)_{уст} - h_{пр_{II}}\cos\theta\right] = \left[(h_c)_{уст}\cos\theta + a\right]^2 + \left[2a + (h_c)_{уст}\cos\theta\right]h_{m_2} - h^2_{пр_{II}}. \qquad (12\text{-}93)$$

Решив систему трех уравнений (12-91), (12-92) и (12-93) относительно $(h_c)_{уст}$, h_{m_2}, $h_{пр_{II}}$, находим искомую величину $h_{пр_{II}}$.

3°. Экспериментальные формулы для определения величин $h_{пр_I}$ и $h_{пр_{II}}$. В результате приведенного выше решения (п. 1° и 2°) получили весьма громоздкие формулы, требующие большой вычислительной работы для отыскания искомых величин.

Имея это в виду, вместо указанных

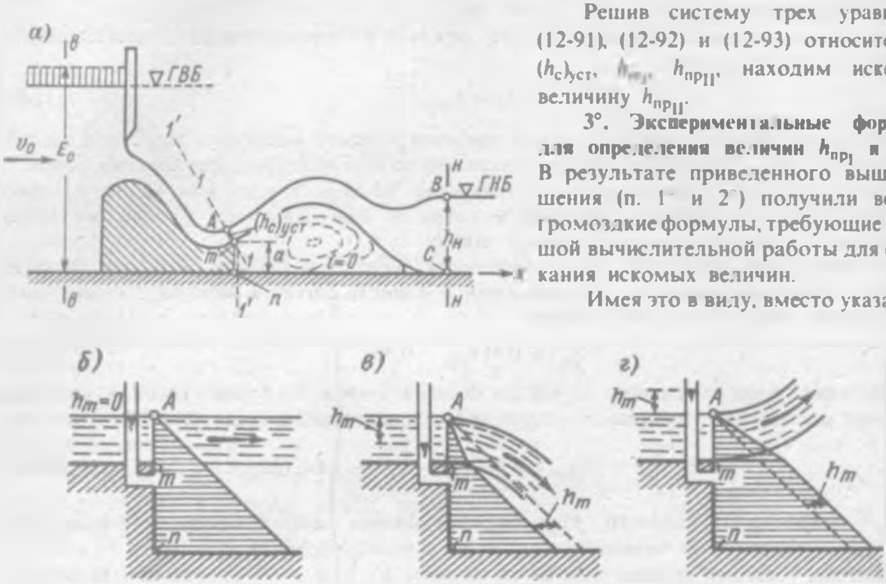


Рис. 12-38. Расчетные схемы истечения воды при наличии низкого уступа плотины

выше уравнений Т. Н. Астафичева предложила следующие достаточно простые экспериментальные формулы, служащие для непосредственного определения $h_{пр_I}$ и $h_{пр_{II}}$:

$$h_{пр_I} = 0{,}82a + \left(2{,}44 - 2{,}0\,\frac{a}{c_н}\right)h_к, \qquad (12\text{-}94)$$

$$h_{пр_{II}} = 1{,}22a + \left(2{,}50 - 2{,}55\,\frac{a}{c_н}\right)h_к, \qquad (12\text{-}95)$$

где $h_к$ — критическая глубина.

Сброс льда в нижний бьеф осуществляется при полном открытии затворов, когда плотина работает как водослив. Именно для этого случая и были получены формулы (12-94) и (12-95). Однако, как показали дополнительные опыты, данные формулы при $H \leqslant \frac{2}{3}c_н$ могут применяться с некоторым приближением и при неполном открытии затворов.

Первая из этих формул справедлива только для случая $\frac{a}{c_н} \geqslant 0{,}2$, что обычно имеет место в практике. Для случая $\frac{a}{c_н} < 0{,}2$ вместо (12-94) Т. Н. Астафичева рекомендует зависимость

$$h_{пр_I} = 0{,}82a + \left(3{,}44 - 7{,}00\,\frac{a}{c_н}\right)h_к. \qquad (12\text{-}94')$$

4°. Дополнительные замечания. В заключение параграфа приведем следующие замечания.

1. С поднятием горизонта воды нижнего бьефа давление в вальце под струей в точке *m* (рис. 12-35) увеличивается. Это давление уравновешивается давлением транзитной струи, действующим сверху на валец. Величина давления транзитной струи, действующего на водоворот, зависит от кривизны образующих ее линий тока. Если бы струя сходила с горизонтального носка, имея строго горизонтальное направление (рис. 12-38, *б*), то под струей давление распределялось бы в соответствии с гидростатическим законом: давление в любой точке уступа *mn* выражалось бы заглублением этой точки под уровнем воды на носке. Когда же выпуклость искривленной струи в точке оказывается направленной вверх, под струей получаем давление меньшее, чем давление, отвечающее уровню воды на носке (рис. 12-38, *в*); наоборот, при направлении выпуклости струи вниз (в точке *m*) под струей за счет центробежных сил инерции давление будет больше гидростатического (рис. 12-38, *г*).

Рис. 12-39. Поверхностно-донный режим

Из сказанного ясно, что с поднятием горизонта воды в нижнем бьефе кривизна струи в точке *m* должна изменяться, причем в результате этого изменения донный режим (когда выпуклость оси струи при сходе с носка направлена вверх) должен переходить, как говорилось выше, в поверхностный режим (когда выпуклость струи при сходе ее с носка направлена вниз).

2. В некоторых условиях поверхностному режиму с незатопленной струей может отвечать небольшой диапазон глубин нижнего бьефа, не охватывающий всех тех глубин нижнего бьефа, которые могут иметь место при ледоходе.

3. Как показывают опыты, при малой высоте уступа поверхностного режима в нижнем бьефе вообще получить нельзя; в этом случае может иметь место только донный режим.

4. При $a < 0{,}2c_н$ наблюдается обычно неустойчивый режим сопряжения бьефов (так называемая зона периодической смены режимов). Поэтому высоту уступа *a* не рекомендуется назначать менее $0{,}2c_н$.

5. При определенных условиях, когда глубина нижнего бьефа удовлетворяет соотношению (12-83), в нижнем бьефе может возникнуть еще так называемый поверхностно-донный режим, т. е. режим, поверхностный вблизи водослива и донный вдали от водослива (см. рис. 12-39).

6. Изменение угла θ в пределах от 0 до 15° почти не влияет на величины глубин $h_{пр_I}$ и $h_{пр_{II}}$.

7. Помимо приведенного выше теоретического решения, основанного на работах А. А. Сабанеева, и решений Т. Н. Астафичевой, в литературе встречаются еще и решения данного вопроса, разработанные Д. И. Куминым, И. И. Леви, М. Д. Чертоусовым, Н. Н. Беляшевским, С. М. Слисским, М. Ф. Складневым и другими авторами.

§ 12-12. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О РАСЧЕТЕ ПЛОТИНЫ С ВЫСОКИМ УСТУПОМ

В случае высоких бетонных плотин на скальном основании обычно предусматривают высокий уступ (рис. 12-40). При таком уступе струя, сходящая с носка этого уступа, отбрасывается достаточно далеко от подошвы плотины. В месте падения струи на дно нижнего бьефа образуется воронка размыва. При правильно запроектированной плотине воронка размыва должна располагаться на таком расстоянии от плотины, при котором опасность подмыва последней исключается.

При гидравлическом расчете плотины с высоким уступом возникают две задачи:

1-я задача. При заданной высоте уступа требуется построить траекторию струи и установить при этом место, где в скальном грунте нижнего бьефа должна образоваться воронка размыва. Эта задача решается с учетом соображений, приведенных в § 10-3 и 13-2;

2-я задача. Установить глубину воронки размыва в скальном трещиноватом грунте. Имеется ряд попыток решить эту задачу, однако еще нельзя считать ее решенной достаточно точно и полно.

Анализ 1-й задачи показывает, что наибольший отлет струи получается в случае, когда высота уступа, имеющего горизонтальный носок ($\theta = 0$), равна $a \approx 0{,}5E$. Однако

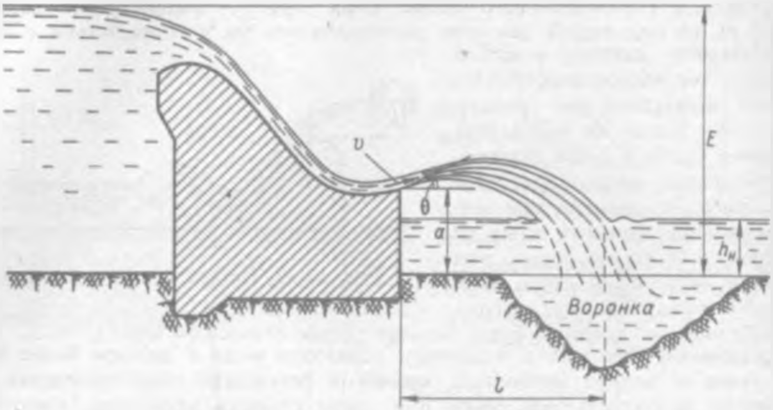


Рис. 12-40. Плотина с высоким уступом

с учетом 2-й задачи, обычно высоту a назначают только несколько больше глубины $h_н$ воды в нижнем бьефе.

Некоторые предварительные сведения с приведением расчетных формул, служащие для решения указанных задач, можно найти в [12-5].

§ 12-13. СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ВОДЫ ИЗ ДОННОГО НАПОРНОГО ОТВЕРСТИЯ (ИЗ-ПОД ЩИТА)

Здесь, как и в случае перелива воды через плотину, различаем три известных нам типа сопряжения бьефов:

а) с отогнанным прыжком (рис. 12-41, *а*);

б) с прыжком в сжатом сечении $C-C$;

в) с затопленным прыжком (рис. 12-41, *б*).

Сжатая глубина h_c в сечении $C-C$ при истечении из-под щита в канал определяется по формуле

$$\boxed{h_c = \varepsilon_0 e,} \tag{12-96}$$

где e – открытие щита; ε_0 – коэффициент вертикального сжатия струи, равный, например, 0,62 – 0,64 (при острой нижней кромке затвора).

Отогнанный прыжок получается в случае, когда

$$h_н < h''_c, \tag{12-97}$$

затопленный, – когда

$$h_н > h''_c, \tag{12-98}$$

где h''_c – глубина фиктивного прыжка в сжатом сечении $C-C$, вычисленная по основному уравнению прыжка (8-25), как сопряженная с глубиной h_c. Как видно, критерии сопряжения бьефов остаются теми же, что и в случае перелива воды через плотину.[1]

---

[1] В этом параграфе, как и выше, рассматриваем плоскую задачу.

Для определения h''_c, входящей в формулы (12-97) и (12-98), помимо величины h_c, необходимо знать еще величину удельного расхода q, получающуюся при заданном открытии затвора и при заданной величине E_0 в случае схемы на рис. 12-41, *а*. Для отыскания величины q соединяем уравнением Бернулли сечение $в-в$ и сечение $C-C$ (рис. 12-41, *а*). В результате получаем известное уравнение (12-12), которое раньше служило нам для определения глубины h_c. Решая это уравнение в отношении q, находим следующую расчетную формулу:

$$q = \frac{Q}{B} = \varphi_c h_c \sqrt{2g(E_0 - h_c)}, \qquad (12\text{-}99)$$

где B – ширина рассматриваемого отверстия; $\varphi_c \geqslant 0{,}95$; при величине открытия щита $e \leqslant (0{,}40 \div 0{,}45)\,E$ величиной скорости подхода v_0 в этой формуле следует пренебрегать (полагая $E_0 = E$).

Пользуясь формулой (12-99), наряду с основным уравнением прыжка и зависимостями (12-96)–(12-98), можно установить тип сопряжения бьефов, получающийся при заданных величинах E_0, $h_н$ и e.

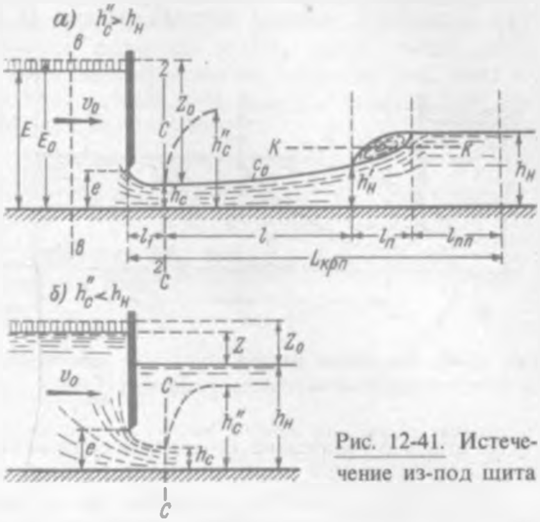


Рис. 12-41. Истечение из-под щита

В практике часто приходится выяснять тип сопряжения бьефов при заданных величинах E_0, q и $h_н$. В этом случае величину h_c определяем из уравнения (12-99), т. е. по известной зависимости (12-12); найдя же h_c, вычисляем h''_c (по уравнению прыжка) и величину e [по зависимости (12-96)].

Как видно, схема на рис. 12-41, *а* отличается от плотины без затвора (рис. 12-2) тем, что при расчете такой плотины (отметка гребня которой известна) величину расхода q всегда можно определить при заданном H_0 из рассмотрения «верхнего водосливного узла» по формуле водослива. Поэтому уравнение (12-99) или, что то же, (12-12) в случае такой плотины всегда служит для определения h_c. В случае же истечения из-под щита это уравнение часто приходится использовать для определения расхода (поскольку в данном случае верхний водосливной узел отсутствует).

В отношении формулы (12-99) необходимо указать еще следующее.

На рис. 12-41, *а*, который мы рассматривали при выводе (12-99), представлено истечение из отверстия. Однако истечение воды здесь происходит не в атмосферу, что имели в виду, например, в § 10-1, а в канал. Поэтому в нижней точке сжатого сечения на рис. 12-41, *а* имеется давление не атмосферное, а равное γh_c. Именно этим и объясняется, что в формулу (12-99) под корень входит не заглубление центра тяжести отверстия под уровнем воды верхнего бьефа (см. § 10-1), а величина $Z_0 = E_0 - h_c$.

Из сказанного ясно, что, определяя расход воды по формуле истечения из отверстия для схемы, показанной, например, на рис. 12-1, заглублением центра тяжести отверстия под уровнем воды верхнего бьефа можно пользоваться только в том случае, если есть уверенность, что в нижней точке сжатого сечения (верхнего сжатого сечения, получающегося на гребне плотины) давление близко к атмосферному.

Рассмотрим отдельно сопряжение бьефов при затопленном и отогнанном прыжках.

1°. Затопленный прыжок. Схема, показанная на рис. 12-41, *б*, отвечает относительно большой степени затопления прыжка

$$A = h_н/h''_с. \tag{12-100}$$

В этом случае поверхность воды нижнего бьефа оказывается примерно горизонтальной, причем полный расход Q может быть найден по формуле, относящейся к истечению из отверстия:

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gZ_0}, \tag{12-101}$$

где μ_0 — коэффициент расхода отверстия (о величине μ_0 см. стр. 383 и 388); ω — площадь отверстия; Z_0 — разность уровней воды в верхнем и нижнем бьефах, подсчитанная с учетом скорости подхода. Во многих случаях, однако, скоростью подхода v_0 можно пренебречь и считать, что $Z_0 \approx Z$.

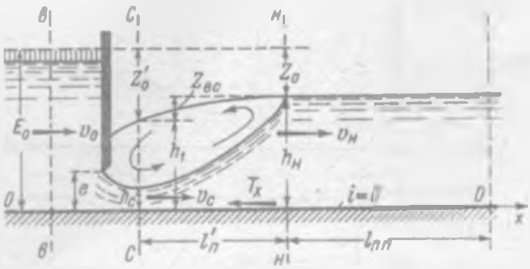


Рис. 12-42. Истечение из-под щита при небольшой степени затопления прыжка

В случае относительно небольшой степени затопления прыжка вместо картины на рис. 12-41, *б* получаем схему истечения, изображенную на рис. 12-42.

Как видно, здесь свободная поверхность в пределах затопленного прыжка поднимается по течению на величину «перепада восстановления» $Z_{вс}$. Длину затопленного прыжка $l'_п$ здесь следует определять по формуле (12-37) или (12-38), в которых под величиной $h'_н$ надо понимать $h_н$. Длину послепрыжкового участка $l_{пп}$ находим по данным § 8-1.

Расход Q в этом случае можно найти по той же формуле (12-101), заменив в ней предварительно величину Z_0 величиной Z'_0, т. е.

$$Z'_0 = Z_0 + Z_{вс}. \tag{12-102}$$

При рассмотрении плоской задачи можно пользоваться также зависимостью (12-99), переписав ее в виде

$$q = \varphi_c h_c \sqrt{2g(E_0 - h_1)}, \tag{12-103}$$

где h_1 — глубина воды в сечении $C-C$ (см. чертеж).

Для определения h_1 (зная которую, легко можно найти $Z_{вс}$) соединяем уравнением количества движения (3-124) сечения $C-C$ и $н-н$.

Пренебрегая силой внешнего трения на пути от сечения $C-C$ до сечения $н-н$ и считая, что давление в сечениях $C-C$ и $н-н$ распределяется по гидростатическому закону, из уравнения (3-124) получаем зависимость

$$2\frac{q^2}{g}\left(\frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_н}\right) = h_н^2 - h_1^2. \tag{12-104}$$

Уравнение Бернулли (12-103), соединяющее сечения $в-в$ и $C-C$, и уравнение количества движения (12-104), соединяющее сечения $C-C$ и $н-н$, являются системой двух уравнений с двумя неизвестными: h_1 и q (остальные величины считаем заданными).

Решая эту систему уравнений, получаем следующую расчетную формулу для h_1 [аналогичную зависимости (5-60)]: [1]

$$h_1 = \left[\frac{1}{2}N + \sqrt{\frac{1}{4}N^2 - N\frac{E_0}{h_н} + 1}\right] h_н, \tag{12-105}$$

[1] При выводе этой формулы считаем $\alpha \approx \alpha_0 \approx 1$ и уклон дна русла $i \approx 0$.

где

$$N = 4\varphi_c^2 \left(1 - \frac{h_c}{h_н}\right)\frac{h_c}{h_н}, \qquad (12\text{-}106)$$

причем численное значение $\varphi_c \approx 0{,}95$.

Как показывает исследование уравнения (12-105), учитывать перепад восстановления при истечении из-под щита имеет практический смысл только в случае, когда $h_н < \sim 2{,}5e$, причем величина открытия затвора относительно мала: $e < (0{,}15 \div 0{,}20)\, E_0$. В противном случае с перепадом восстановления можно не считаться и вести расчет по формуле (12-101).

В заключение отметим, что, пользуясь формулой (3-124), можно также найти величину горизонтального давления P воды на щит в случае, например, рис. 12-41, *а*. Действительно, соединяя этой зависимостью сечения *в–в* и $C-C$, окончательно для одной единицы ширины щита получаем (при $\alpha_0 = 1{,}0$; $v_0 = 0$; $T_0 = 0$):

$$P = \frac{1}{2}(E^2 - h_c^2)\gamma - 2\varphi^2 h_c (E - h_c)\gamma.$$

2°. Отогнанный прыжок. Длина крепления $L_{крп}$ нижнего бьефа в случае отогнанного прыжка (рис. 12-41, *а*) может быть определена по формуле

$$L_{крп} = l_1 + l + l_п + l_{пп}, \qquad (12\text{-}107)$$

где l_1 – расстояние от плоскости отверстия до сжатого сечения $C-C$, согласно опытам

$$l_1 \approx (0{,}5 \div 1{,}0)\, e; \qquad (12\text{-}108)$$

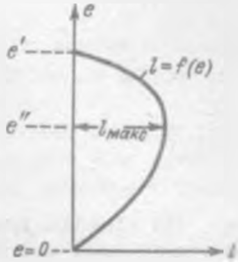


Рис. 12-43. Зависимость длины l отгона прыжка от открытия e щита

l – длина отгона прыжка, определяемая, как длина кривой подпора, сопрягающей глубину h_c и глубину $h'_н$, причем $h'_н$ находится, как глубина, сопряженная с глубиной нижнего бьефа $h_н$; $l_п$ – длина свободного гидравлического прыжка (см. гл. 8); $l_{пп}$ – длина послепрыжкового участка (см. гл. 8).

Длина крепления $L_{крп}$, вычисленная по формуле (12-107), изменяется с изменением открытия e отверстия. Это изменение длины $L_{крп}$ происходит главным образом за счет уменьшения или увеличения длины l отгона прыжка, входящего в формулу (12-107).

Согласно исследованиям Б. А. Мацмана, длина l зависит от величины открытия щита e (при $E = \text{const}$), как показано на графике рис. 12-43. Из этого графика[1] видим, что при $e = 0$ величина $l = 0$. По мере открытия щита l увеличивается и, следовательно, прыжок удаляется от щита. При некотором «расчетном» открытии щита e'' получаем максимальный отгон прыжка ($l_{макс}$). При дальнейшем открытии l уменьшается, и прыжок начинает приближаться к щиту, причем при некотором открытии e' он снова располагается в сжатом сечении $C-C$.

Для установления той длины крепления $L_{крп}$, которая должна быть окончательно принята в проекте, необходимо знать величину $l_{макс}$, получающуюся при открытии щита e'', заранее нам неизвестном.

Б. А. Мацман на основании ряда подсчетов установил, что величина $l_{макс}$ получается при расходе Q'', равном

$$Q'' = \frac{Q'}{2}, \qquad (12\text{-}109)$$

где Q' – расход, отвечающий открытию щита e', т. е. открытию, при котором прыжок располагается в сжатом сечении.

Величину Q' легко установить, пользуясь известными гидравлическими зависимостями; зная Q', по (12-109) находим Q'' и затем по величине Q'' устанавливаем расчетное открытие щита e'', дающее максимальную длину отгона прыжка.

---

[1] График на рис. 12-43 получается в предположении, что в канале за щитом (вдали от щита) имеет место равномерное движение воды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

12-1. **Беляшевский Н. Н.** Сопряжение бьефов за водосливными плотинами с носком.– Киев: Изд-во АН УССР, 1953.

12-2. **Кумин Д. И.** Сопряжение бьефов при поверхностном режиме.– Л.-М.: Госэнергоиздат, 1948.

12-3. **Павловский Н. Н.** Гидравлический справочник.– Л.-М.: ОНТИ НКТП, 1937.

12-4. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений, Т. I.– М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1955.

12-5. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика/Специальный курс.– М.-Л.; Госэнергоиздат, 1962.

12-6. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения/Водосливные плотины.– М.: Высшая школа, 1978.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ПЕРЕПАДЫ

§ 13-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

На каналах, трассируемых по местности с большим уклоном, в частности устраиваемых для сброса воды в обход так называемых глухих плотин, приходится делать перепады (см. гл. 6) или быстротоки, т. е. короткие каналы с весьма большим уклоном, русло которых образовано прочным материалом (бетоном и т. п.).

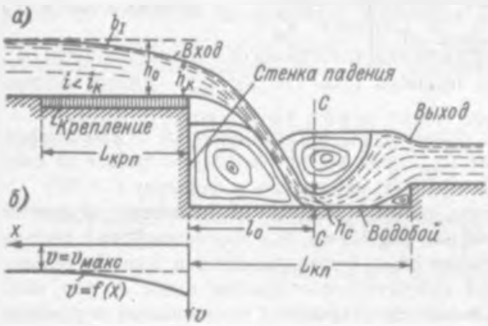


Рис. 13-1. Одноступенчатый перепад

$v_{макс}$ – максимальная допускаемая скорость для канала без крепления

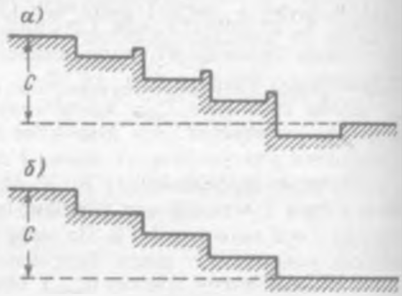


Рис. 13-2. Многоступенчатый перепад: *а* – колодезный, *б* – безколодезный

Освещая в настоящей главе расчеты перепадов, а в следующей главе – расчеты быстротоков, будем иметь в виду, как и выше в гл. 12, в основном только плоскую задачу. Вместе с тем подчеркнем, что часто при проектировании подобных сооружений недопустимо пренебрегать пространственными условиями движения воды в них (например, когда цилиндрическое русло, в котором происходит бурное движение воды, имеет повороты в плане, или когда происходит сжатие бурного потока в плане и т. п.). Учитывая это, в гл. 15 специально рассмотрим основы так называемой плановой задачи движения воды, решение которой позволяет внести некоторые коррективы в расчеты, выполненные на основе рассмотрения плоской задачи, и тем самым несколько приблизить результаты этих расчетов к действительности (в тех случаях, когда указанные выше условия – повороты русла, его сужения и т. п. – существенно влияют на формирование потока). Отметив это обстоятельство, обратимся непосредственно к рассмотрению только плоской задачи о расчете перепадов.

В практике встречаются:

1) одноступенчатый перепад без водобойного колодца или с колодцем, образованным водобойной стенкой или водобойным уступом (рис. 13-1);

2) многоступенчатый перепад колодезного типа (рис. 13-2, *а*) или бесколодезного типа (рис. 13-2, *б*).

Перепад отличается от плотины, рассмотренной выше, во-первых, тем, что он имеет вертикальную стенку падения, и, во-вторых, тем, что дно русла верхнего бьефа здесь находится на большой высоте. Различают четыре основные части перепада (рис. 13-1, *а*): вход, стенку падения, так называемый водобой (т.е. ту часть русла нижнего бьефа, которая принимает удар падающей струи), выход.

При уклоне дна верхнего бьефа $i < i_к$ в конце канала верхнего бьефа получается кривая спада типа b_1, причем у сливного ребра перепада устанавливается глубина, достаточно близкая к критической глубине $h_к$.

В связи с наличием в конце канала верхнего бьефа кривой спада b_1 скорость v в этом канале при подходе к перепаду увеличивается (см. график, рис. 13-1, *б*). Поэтому при подходе к перепаду устраивают крепление русла верхнего бьефа на некоторую длину, равную $L_{крп}$.

Стенка падения перепада не всегда делается вертикальной; иногда ей придают уклон; в некоторых же случаях ее делают криволинейного очертания.

В пределах водобойной части перепада всегда устраивают соответствующее крепление дна русла; иногда здесь устанавливают специальные гасители энергии.

Что касается выходной части перепада, представляющей собой часто водобойный уступ или водобойную стенку, то эта часть с гидравлической точки зрения должна рассматриваться как водослив.

§ 13-2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА (ДАЛЬНОСТИ БОЯ) СТРУИ ПРИ ПЕРЕЛИВЕ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВ

Этим вопросом приходится интересоваться, в частности, при расчете длины водобойного колодца, устраиваемого за перепадом.

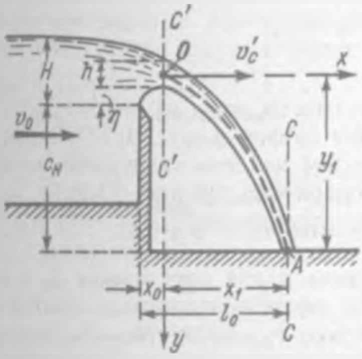


Рис. 13-3. Дальность полета струи в случае водослива с тонкой стенкой

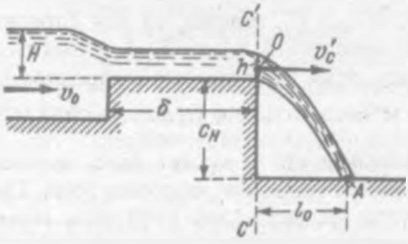


Рис. 13-4. Дальность полета струи в случае водослива с широким порогом

Представим на рис. 13-3 струю, получающуюся при переливе воды через водослив. На чертеже указано:

$C'-C'$ — верхнее сжатое сечение; $C-C$ — нижнее сжатое сечение; [1] O — центр сечения струи по линии $C'-C'$; OA — ось струи, т. е. траектория материальной точки, помещенной в центре O и имеющей начальную скорость v'_c, которая принимается горизонтальной (v'_c — средняя скорость в сечении $C'-C'$); l_0 — дальность полета струи

$$l_0 = x_0 + x_1, \tag{13-1}$$

где x_0 — расстояние от верховой грани водослива с тонкой стенкой до сечения $C'-C'$; x_1 — дальность полета упомянутой материальной точки.

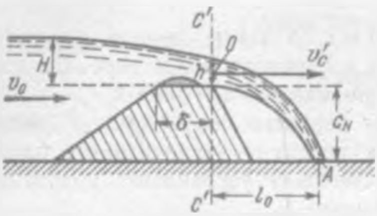


Рис. 13-5. Дальность полета струи в случае водослива со стенкой практического профиля

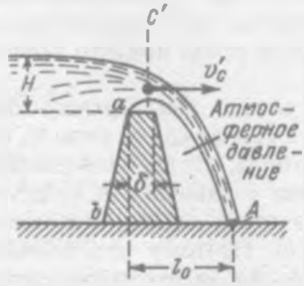


Рис. 13-6. Дальность полета струи при соотношении (13-5) — как в случае водослива с тонкой стенкой ab

В § 10-3 были приведены уравнения (10-26) траектории материальной точки, имеющей начальную скорость v_c. Решая эти уравнения в отношении x, находим величину x_1, входящую в формулу (13-1):

$$x_1 = v'_c \sqrt{\frac{2y_1}{g}}, \tag{13-2}$$

где

$$y_1 = c_н + \eta + \frac{h}{2}; \tag{13-3}$$

$$v'_c = \frac{q}{h} = \frac{m\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}}{h}, \tag{13-4}$$

причем обозначения, входящие в эти зависимости, ясны из рис. 13-3.

Если $c_н$ и H_0 заданы, то для определения по формуле (13-1) l_0 (см. рис. 13-3) необходимо знать x_0, η, h, m. Опытным путем найдены следующие численные значения этих величин для водослива с тонкой стенкой (рис. 13-3):

$$x_0 \approx 0{,}3H_0; \quad \eta = 0{,}11H_0; \quad h = 0{,}67H_0; \quad m \approx 0{,}42.$$

Формула (13-1) может быть использована и для определения l_0 в случае водослива с широким порогом (рис. 13-4), а также водослива со стенкой практического профиля (рис. 13-5). При этом только, руководствуясь обозначениями, указанными на упомянутых рисунках, в зависимости (13-1)–(13-4) необходимо подставлять следующие величины x_0, η, h, m (часть из которых была установлена экспериментальным путем):

[1] Сечением $C-C$ отмечено местоположение сжатого сечения (само сжатое сечение на рисунке не показано, равно как и не показан горизонт воды нижнего бьефа).

а) для водослива с широким порогом (рис. 13-4):

$$x_0 = 0; \quad \eta = 0; \quad h \approx 0{,}5H_0; \quad m \approx 0{,}32 \div 0{,}35;$$

б) для водослива со стенкой практического профиля (рис. 13-5):

$$x_0 = 0; \quad \eta = 0; \quad h \approx 0{,}6H_0; \quad m \approx 0{,}40.$$

Если ширина водосливной стенки (рис. 13-6) невелика:

$$\delta < \sim(0{,}5 \div 0{,}7)\, H, \tag{13-5}$$

то получаем п е р е л е т струи через гребень водосливной стенки (рис. 13-6), причем в этом случае l_0 следует определять, как для водослива с тонкой стенкой ab.

§ 13-3. ЗАМЕЧАНИЯ О РАСЧЕТЕ ОДНОСТУПЕНЧАТОГО ПЕРЕПАДА

При проектировании одноступенчатого перепада, так же как и при проектировании плотины, стремятся получить затопленный прыжок. В связи с этим за перепадом часто устраивают водобойный колодец или водобойную стенку. Расчетные зависимости и ход расчета здесь остаются теми же, что и в случае плотин. Изменяется только расчетная формула, служащая для определения д л и н ы $L_{к1}$ в о д о б о й н о г о к о л о д ц а. Длина колодца $L_{к1}$, найденная, например, по формуле (12-80), в данном случае увеличивается на величину l_0 (см. предыдущий параграф).

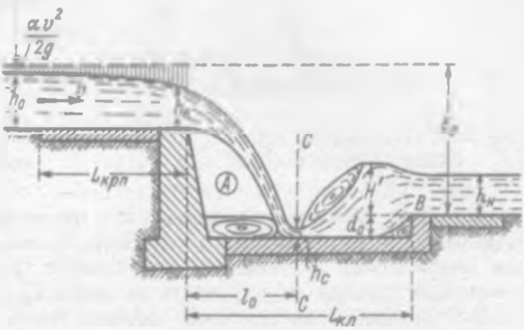


Рис. 13-7. Расчетная схема для определения теоретической глубины водобойного колодца

На рис. 13-7 представлен т е о р е т и ч е с к и й случай, когда глубина колодца равна d_0, причем на этом чертеже указаны длина l_0 и длина $L_{к1}$.

Перепады конструируются всегда так, чтобы в зоне A (под струей) имелось атмосферное давление: конструкция перепадов должна обеспечивать свободный подвод воздуха под струю с боков.

Рис. 13-8. К определению глубины воды $h_{п\,с}$ под струей

Желая получить затопленный прыжок при возможно меньшей глубине водобойного колодца, всегда нужно стремиться к тому, чтобы напор H' на водобойном уступе или на водобойной стенке был возможно большим. Имея это в виду, водосливное ребро B в данном случае не скругляют, так как при скруглении этого ребра напор H' будет уменьшаться и уровень воды в колодце понижаться.

Рисунок 13-7 дан в несколько искаженном масштабе: длина несвободного прыжка здесь преуменьшена. Одноступенчатый перепад, имеющий «донный слив» в верхнем бьефе и свободный прыжок в сжатом сечении, изображен примерно в масштабе на рис. 13-8. Из этого чертежа видно, в частности, что г л у б и н а в о д ы п о д с т р у е й $h_{п\,с}$ (при наличии атмосферного давления в подструйном пространстве A) больше, чем глубина h_c:

$$h_{п\,с} > h_c. \tag{13-6}$$

Величину $h_{\text{п.с}}$ можно найти, применяя к отсеку жидкости $1-2-3-4-5-6$ уравнение количества движения, из которого получаем:

$$h_{\text{п.с}} = \sqrt{2\left[\frac{q}{g}(v_c - v) - \frac{1}{2}(h_\text{к}^2 - h_c^2)\right]}, \qquad (13\text{-}7)$$

где v_c — скорость в сжатом сечении; v — скорость в сечении $1-2$, примерно равная:

$$v \approx q/h_\text{к}.$$

§ 13-4. РАСЧЕТ ЩЕЛЕВОГО ВОДОСЛИВА

В случае цилиндрического канала, имеющего уклон $i < i_\text{к}$ и заканчивающегося «донным сливом», в конце канала, как отмечалось в § 13-1, образуется кривая спада типа b_1 (рис. 13-9), причем скорость в канале при подходе к перепаду постепенно во-

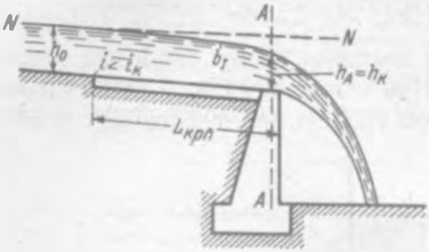


Рис. 13-9. Перепад без щелевого водослива (с кривой спада b_1)

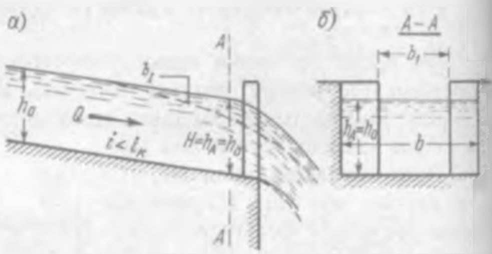


Рис. 13-10. Перепад с прямоугольным щелевым водосливом (а); сечение по $A - A$ (б)

растает. Если канал запроектирован так, что скорость движения воды в нем равна $v_\text{макс}$ (максимально допускаемой), то в области кривой спада b_1 скорости получаются больше, чем максимально допускаемые для данного грунта. В связи с этим обстоятельством у перепада приходится устраивать на длине $L_\text{крп}$ крепление русла.

Это крепление иногда стоит дорого. Чтобы избавиться от необходимости сооружать его, следует тем или другим способом ликвидировать спад воды в канале и довести глубину h_A в конце канала (в сечении $A-A$) до величины, равной h_0 (нормальной глубине воды в канале).

Добиться условия

$$h_A = h_0 \qquad (13\text{-}8)$$

можно путем устройства в конце канала прямоугольного водослива без порога, шириной b_1, где

$$b_1 < b, \qquad (13\text{-}9)$$

причем здесь b — ширина канала (для простоты пояснения будем считать, что канал имеет прямоугольное сечение). Условия работы такого канала представлены на рис. 13-10.

Водослив без порога, сделанный в конце канала, называется **щелевым** (поскольку $b_1 < b$). Из рис. 13-10 видно, что для обеспечения соотношения (13-8) величину b_1 следует назначать такой, чтобы напор на устроенном щелевом водосливе равнялся нормальной глубине в канале h_0:

$$H = h_0. \qquad (13\text{-}10)$$

Тогда для щелевого водослива пишем водосливную формулу в виде:

$$Q = mb_1\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}, \qquad (13\text{-}11)$$

откуда искомая ширина

$$b_1 = \frac{Q}{m\sqrt{2g}\,H_0^{3/2}} \qquad (13\text{-}12)$$

или, согласно (13-10),

$$b_1 = \frac{Q}{m\sqrt{2g}\, h_0^{3/2}} \cdot \tag{13-13}$$

При такой ширине щели равномерный режим в подводящем канале сохранится до самого сечения $A-A$.

В практике устройство щелевого водослива усложняется тем обстоятельством, что расход воды Q в канале обычно является **переменным**, изменяющимся во времени в пределах

$$Q_{мин} \leqslant Q \leqslant Q_{макс}. \tag{13-14}$$

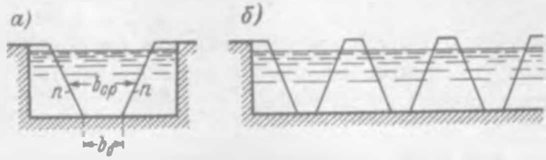


Рис. 13-11. Трапецеидальные щелевые водосливы

В связи с этим, если рассчитать по формуле (13-13) ширину **прямоугольной** щели, исходя из одного расхода Q', то при другом расходе Q'' в нашем канале может появиться спад (или подпор, что также нежелательно). С тем, чтобы иметь на всей длине канала равномерный режим при расходах, лежащих в пределах (13-14), при-

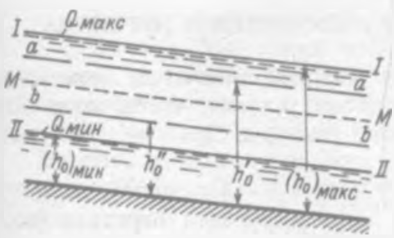


Рис. 13-12. К установлению расчетных расходов $Q_{мин}$ и $Q_{макс}$ для щелевого водослива

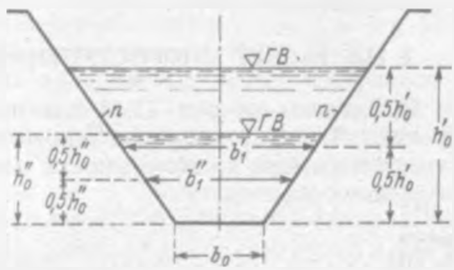


Рис. 13-13. Построение щелевого водослива

ходится идти на устройство не прямоугольного, а трапецеидального щелевого водослива (рис. 13-11, *а*); в некоторых случаях устраивают не однощелевой водослив, а многощелевой (рис. 13-11, *б*).

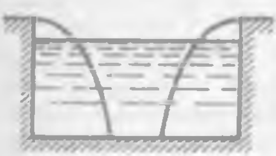


Рис. 13-14. Криволинейный щелевой водослив. Сечение $A-A$ (см. рис. 13-10, *а*)

Расчет однощелевого трапецеидального водослива должен дать нам величины b_0 и n, где b_0 — ширина **трапецеидальной** щели понизу и n — коэффициент откоса боковых поверхностей этой щели.

Выполняя такой расчет, в практике рассматривают не все расходы, лежащие в пределах (13-14), а только два так называемых расчетных расхода: $Q_р'$ и $Q_р''$. Выбор их осуществляется следующим образом.

Представим на рис. 13-12 продольный разрез рассматриваемого канала и наметим на этом чертеже свободные поверхности, отвечающие расходам $Q_{макс}$ (см. прямую $I-I$) и $Q_{мин}$ (см. прямую $II-II$). Далее, проведя среднюю линию $M-M$, наметим свободные поверхности $a-a$ и $b-b$ в виде прямых линий, лежащих в середине между линиями $I-I$ и $M-M$, а также между линиями $M-M$ и $II-II$.

Нормальные глубины, отвечающие свободным поверхностям $a-a$ и $b-b$, соответственно обозначим через h_0' и h_0''. Очевидно,

$$h_0' = (h_0)_{макс} - 0{,}25\,[(h_0)_{макс} - (h_0)_{мин}], \tag{13-15}$$

$$h_0'' = (h_0)_{мин} + 0{,}25\,[(h_0)_{макс} - (h_0)_{мин}], \tag{13-16}$$

где $(h_0)_{макс}$ и $(h_0)_{мин}$ – нормальные глубины, отвечающие свободным поверхностям $I-I$ и $II-II$.

В качестве первого расчетного расхода $Q'_р$ принимаем расход, отвечающий нормальной глубине h'_0; в качестве второго расчетного расхода $Q''_р$ принимаем расход, отвечающий глубине h''_0.

Установив таким образом расчетные расходы $Q'_р$ и $Q''_р$, в соответствии с формулой (13-13) находим две ширины трапецеидальной щели:

$$b'_1 = \frac{Q'_р}{m\sqrt{2g}\,(h'_0)^{3/2}}; \quad (13\text{-}1\ldots)$$

$$b''_1 = \frac{Q''_р}{m\sqrt{2g}\,(h''_0)^{3/2}}. \quad (13\text{-}1\ldots)$$

Как видно, здесь предполагается, что при пропуске по каналу расхода $Q'_р$ напор на щелевом водосливе должен равняться $H'_р = h'_0$; при пропуске же расхода $Q''_р$ напор на водосливе должен равняться $H'' = h''_0$.

Зная ширины b'_0 и b''_0, строим очертание трапецеидальной щели так, как показано на рис. 13-13, причем устанавливаем величины b_0 и n.

Если бы при расчете размеров щелевого водослива исходили не из двух расчетных расходов, а из трех, четырех и более, то очертание щелевого водослива получилось бы криволинейным (рис. 13-14).

§ 13-5. РАСЧЕТ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО КОЛОДЕЗНОГО ПЕРЕПАДА

Представим на рис. 13-15 для примера четырехступенчатый колодезный перепад.[1] Такой перепад проектируют, исходя из условия, чтобы отдельные ступени его имели, по возможности, одинаковые размеры. При этом поступают следующим образом.

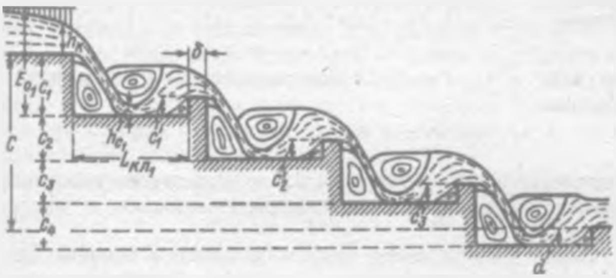


Рис. 13-15. К расчету многоступенчатого колодезного перепада (масштаб искаженный)

Задавшись числом m ступеней перепада (сообразуясь со строительными условиями) и имея общее падение дна канала C, которое должен преодолеть перепад, разбивают это падение так, чтобы высоты отдельных ступеней (c) были одинаковыми. Исключение здесь могут составлять только первая и последняя ступени, высоты которых (в связи, например, с отсутствием водобойной стенки в конце верхового канала и наличием водобойного колодца на последней ступени) могут отличаться от высоты других ступеней.

В результате получаем:

$$c_1 \neq c_2 = c_3 = \ldots \neq c_m. \quad (13\text{-}19)$$

Имея величины c, при помощи гидравлического расчета находим для каждой ступени: а) высоту водобойной стенки c'; б) длину $L_{кл}$ колодца.

Легко видеть, что практически такому гидравлическому расчету следует подвергать т о л ь к о т р и ступени (при любом числе ступеней, образующих перепад):

[1] Рисунок 13-15 выполнен не в масштабе (длина ступеней на чертеже преуменьшена).

1) первую ступень, которая может отличаться от остальных высотой стенки падения и формой верхнего водослива; первая ступень имеет иногда верхний водослив в виде «донного слива»; любая же другая ступень имеет верхний водослив, образованный водобойной стенкой вышележащей ступени;

2) последнюю ступень, которая может иметь отличную от других ступеней высоту; кроме того, здесь могут быть особые условия сопряжения ниспадающей с этой ступени струи с нижним бьефом;

3) вторую ступень.

Практически условия протекания воды по всем другим ступеням можно считать такими же, как и условия протекания воды в пределах второй ступени. Поэтому остальные ступени не рассчитывают и размеры их принимают таким же, как и размеры второй ступени.

Общий ход расчета любой из указанных трех ступеней такой:

а) имея расход Q заданным, а также считая заданной ширину перепада b, находим удельный расход q и критическую глубину $h_к$, отвечающую этому расходу; [1]

б) далее, установив для рассматриваемой ступени размер E_0, находим для этой ступени сжатую глубину h_c и сопряженную с ней глубину h_c'' (см. на чертеже размеры, относящиеся, например, к первой ступени: E_{0_1} и h_{c_1});

в) после этого определяем высоту водобойной стенки c' (см. § 12-8 и 12-9);

г) наконец, находим длину водобойного колодца $L_{кл}$ (см. § 13-3).

Подчеркнем, что длина водобойных колодцев $L_{кл}$ всюду измеряется до внутренней вертикальной грани водобойных стенок. Толщина водобойных стенок δ назначается не по гидравлическим соображениям, а по условиям статической работы этих стенок, а также по конструктивным соображениям.

Заметим в заключение, что перепады всегда проектируются с таким расчетом, чтобы водосливные узлы их (образованные водобойными стенками или, в случае первой ступени, донным сливом) работали как неподтопленные водосливы, [2] причем всегда обеспечивался свободный подвод воздуха под струи, ниспадающие с водосливных стенок.

§ 13-6. РАСЧЕТ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО БЕСКОЛОДЕЗНОГО ПЕРЕПАДА

Как указывалось выше, бесколодезный перепад имеет вид, показанный на рис. 13-2, *б*. Ступени этого перепада следует делать, как правило, горизонтальными. Число ступеней перепада и высоты c стенок падения выбираются по строительным соображениям. Задача гидравлического расчета здесь состоит только в установлении длины $L_{стп}$ для каждой ступени. Величину $L_{стп}$ назначают, исходя из условия, чтобы в пределах каждой ступени получалась картина протекания воды, представленная на рис. 13-16. Как видно, эта картина характеризуется тем, что в конце ступени устанавливается критическая глубина $h_к$.

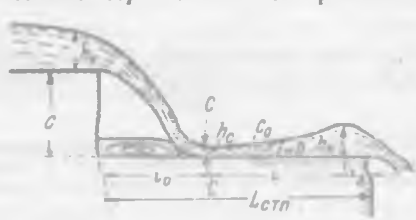


Рис. 13-16. Расчетный случай ступени бесколодезного перепада

Исходя из этого основного условия, расчетную формулу для длины $L_{стп}$ получают в виде:

$$L_{стп} = l_0 + l + l_3, \qquad (13\text{-}20)$$

где l_0 – дальность полета струи, устанавливаемая так, как указано в § 13-2; l – длина кривой подпора типа c_0, сопрягающей сжатую глубину h_c с критической глубиной $h_к$; l_3 – запас, принимаемый равным, например:

---

[1] Размер b назначается по строительным (гидротехническим) соображениям.

[2] В частности, с учетом этого условия назначается высота стенок падения отдельных ступеней.

$$l_3 \approx 2h_к.$$

Если длина ступени назначена большей, чем по формуле (13-20), то в пр ступени должен образоваться гидравлический прыжок (рис. 13-17, *а*).

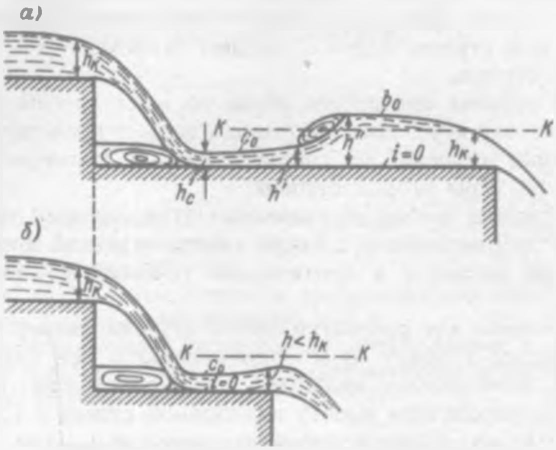


Рис. 13-17. Ступени бесколодезного перепада, удлиненная (*а*) и укороченная (*б*)

Если же длина ступени $L_{стп}$ назначена меньшей, чем по формуле (13-20), то в к ступени установится глубина меньше критической (рис. 13-17, *б*). При этом в конце сту получим удельную энергию сечения $Э > Э_{мин}$. При короткой ступени, как видно, эне потока не успевает снизиться до вел ны $Э_{мин}$, отвечающей критической бине $h_к$. В результате на нижележа ступень сбрасывается поток, обладаю большим количеством энергии, че случае ступени нормальной длины, п чаемой по формуле (13-20). Легко диться, что при коротких ступенях наковой длины происходит возраста удельной энергии сечения при пере от одной ступени к другой (нижеле шей), причем получаем весьма выгодную картину сопряжения бье (рис. 13-18).

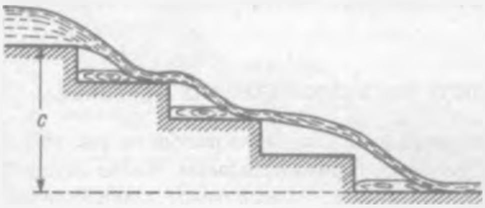


Рис. 13-18. Недопустимая картина движения воды в случае укороченных ступеней перепада

Разумеется, картина, представленная на рис. 13-16, должна получаться при пропу **максимального** расхода Q. В случае других расходов должны получить карт изображенную на рис. 13-17, *а*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

13-1. **Замарин Е. А., Фандеев В. В.** Гидротехнические сооружения/(Гидравличес расчет перепадов). – М.: Сельхозгиз, 1960.

13-2. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика/Специальный курс. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 19

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ КАНАЛАМИ

§ 14-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

В практике часто приходится сопрягать два каких-либо бьефа (водоема) при помощи канала.

Рассматривая схему такого канала (рис. 14-1), в общем случае можно различать два разных его участка:

I – первый участок длиной l_1, в пределах которого свободная поверхность потока падает на величину $Z_{вх}$;

II – второй участок длиной l_2, в пределах которого свободная поверхность водотока падает на величину Z.

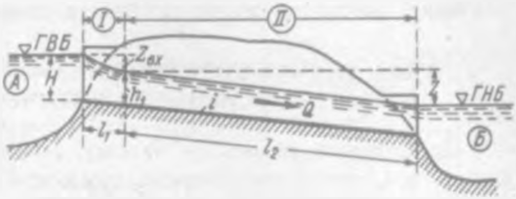


Рис. 14-1. Канал, соединяющий два бьефа

Первый участок с гидравлической точки зрения представляет собой водослив, характеризуемый наличием местной потери напора h_j (потерями напора по длине для водосливов пренебрегают). Входной перепад $Z_{вх}$ возникает в основном благодаря переходу потенциальной энергии верхнего бьефа в кинетическую энергию воды, поступающей в канал: при входе в канал скорости потока резко повышаются. Кроме того, на величине $Z_{вх}$ сказывается упомянутая местная потеря h_j.

Второй участок является собственно каналом; здесь имеет место равномерное или неравномерное плавно изменяющееся движение воды, причем на этом участке канала учитывают только потери напора по длине h_l.

В связи со сказанным в практике различают следующие три случая:

1-й случай: длина l_2 имеет незначительную, пренебрежимо малую величину, благодаря чему и потеря напора h_l оказывается пренебрежимо малой сравнительно с потерей напора h_j. В этом случае рассматриваемый канал обращается в водослив, который изучали выше (в гл. 11).

2-й случай: длина l_2 велика, в связи с чем потерей напора h_j, имеющей место в пределах длины l_1, можно пренебречь сравнительно с потерей напора h_l, имеющей место в пределах длины l_2. Получаем так называемый длинный канал. Скорости в длинных каналах обычно относительно невелики, причем входным перепадом $Z_{вх}$ в них часто можно пренебречь и считать, что горизонт воды в начале канала стоит на одном уровне с горизонтом воды верхнего бьефа.

3-й случай: потери напора h_j и h_l соизмеримы так же, как и длины l_1 и l_2. Здесь нельзя пренебрегать ни величиной h_j, ни величиной h_l, в связи с чем получаем гидравлическую систему: водослив (входной) плюс собственно канал. Такого рода каналы называются короткими каналами или лотками (при большом уклоне их – быстротоками).

Далее будем рассматривать главным образом плоскую задачу о движении воды в коротких каналах. Расчет длинных каналов осветим только кратко.[1]

Короткие каналы иногда устраиваются при плотинах для пропуска сплавляемой по реке древесины (так называемые лесосплавные лотки); иногда

[1] Подробно вопрос о длинных каналах рассматривается в курсах «Использование водной энергии» и «Инженерная мелиорация».

2. По полученным в п. 1 данным строим на рис. 14-3 кривую

$$h_1 = f_1(Q_л). \tag{14-2}$$

3. Для ряда полученных глубин h_1', h_1'', h_1''', ... по водосливной формуле для подтопленного водослива с широким порогом находим расходы воды $Q_в$, переливающейся через водослив. Указанную водосливную формулу при расчете можно переписать в виде:

$$Q_в = \varphi_п b h_1 \sqrt{2g(H_0 - h_1)}, \tag{14-3}$$

где $\varphi_п$ – коэффициент скорости для подтопленного водослива; b – ширина водослива.[1]

4. По данным п. 3 на рис. 14-3 строим вторую кривую

$$Q_в = f_2(h_1). \tag{14-4}$$

Очевидно, расход в лотке должен равняться расходу водослива:

$$Q_л = Q_в \tag{14-5}$$

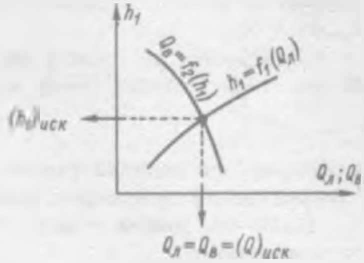


Рис. 14-3. К расчету короткого канала (при $i < i_к$)

Отсюда заключаем, что искомый расход ($Q_{иск}$) должен отвечать точке пересечения двух кривых, представленных на рис. 14-3. Найдя, таким образом, расход Q, который должен иметь место в нашем случае, мы при этом, как видно, одновременно определили и глубину h_1, которая установится в сечении $1-1$; эта глубина должна отвечать также точке пересечения двух упомянутых кривых.

Зная Q, легко по уравнению неравномерного движения построить всю кривую свободной поверхности в канале.

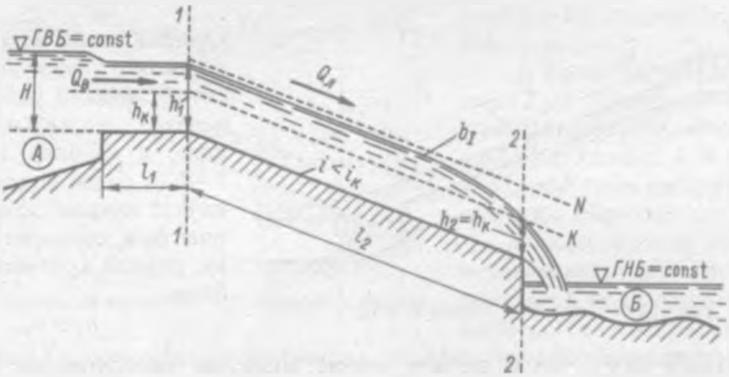


Рис. 14-4. Короткий канал ($i < i_к$); истечение в атмосферу

Если установленная глубина h_1 удовлетворяет условию

$$h_1 < h_Б, \tag{14-6}$$

то в канале должны получить кривую подпора типа a_1 (рис. 14-2); если же найденная глубина удовлетворяет условию

[1] Предполагаем, что канал и водослив (прямоугольный) имеют одинаковые ширины b.

поверхность потока. Кривая свободной поверхности в данном случае является кривой типа b_{II}. Эта кривая относительно коротка, и поэтому на небольшом расстоянии от сечения $1-1$ получаем уже равномерное движение воды в лотке.

2°. Случай истечения при подтопленном конце короткого канала. Построим свободную поверхность в канале, как в предыдущем случае (см. свободную поверхность, показанную на рис. 14-6 жирной штриховой линией).

При этом через n' обозначим точку, лежащую на вертикали $2-2$ и принадлежащую линии критических глубин $K-K$.

Если горизонт воды в водоеме *Б* располагается ниже точки n', то заведомо получаем случай, который должен рассматриваться как истечение в атмосферу, описанное в предыдущем пункте. Если же горизонт воды в водоеме *Б* располагается выше точки n', то конец лотка может оказаться подтопленным, и в лотке образуется прыжок.

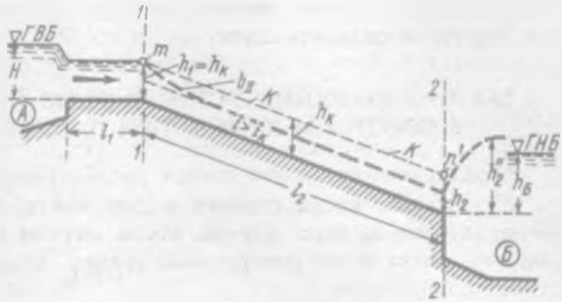


Рис. 14-6. Короткий канал ($i > i_к$); к расчету подтопления канала нижним бьефом

С тем, чтобы в последнем случае окончательно решить вопрос о наличии или отсутствии подтопления лотка нижним бьефом, поступаем так:

1) найдя, как указано в п. 1°, расход Q и построив свободную поверхность в лотке (показанную на рисунке жирной штриховой линией), определяем h_2 в сечении $2-2$, получающуюся в этом сечении в предположении, что лоток не подтоплен;[1]

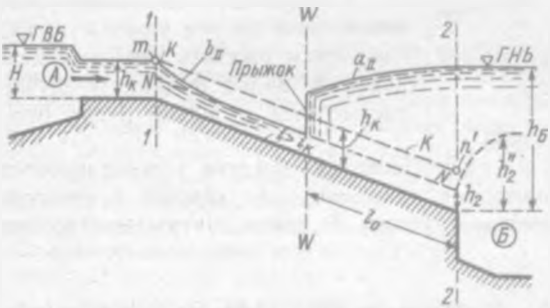


Рис. 14-7. Короткий канал ($i > i_к$); прыжок в канале

2) находим, пользуясь основным уравнением прыжка, глубину h_2'', сопряженную с глубиной h_2;

3) представляем себе в сечении $2-2$ фиктивный (воображаемый) прыжок с сопряженными глубинами: $h' = h_2$ и $h'' = h_2''$; при этом рассуждаем следующим образом:

а) если $h_2'' > h_Б$ (где $h_Б$ — возвышение горизонта воды в водоеме *Б* над дном лотка в его конце), т. е. если нижний бьеф не покрывает (не затапливает) фиктивного прыжка, то в действительности прыжка в лотке не будет. В этом случае получаем ту же картину истечения, что и в п. 1°, причем построенная ранее (рис. 14-6) кривая b_{II} (показанная жирной штриховой линией) обращается на всем своем протяжении в действительную кривую свободной поверхности;

б) если $h_2'' < h_Б$, т. е. если нижний бьеф покрывает (затапливает) фиктивный прыжок, то конец лотка будет подтоплен, и в результате получим картину истечения в виде, показанном на рис. 14-7.[2]

[1] Часто указанная глубина h_2 получается весьма близкой к глубине h_0 равномерного режима.

[2] Расчет, поясненный в п. 3, носит, разумеется, приближенный (условный) характер.

Как видно, в последнем случае в лотке появляется гидравлический прыжок; слева от прыжка имеем кривую свободной поверхности b_{II}; справа же от прыжка – кривую свободной поверхности a_{II}.

Заметим, что при построении такого рода свободных поверхностей длиной гидравлического прыжка обычно можно пренебрегать и представлять себе прыжок, образованный свободной поверхностью, поднимающейся по вертикали вверх. Как видно из рис. 14-7, местоположение прыжка в лотке определяется длиной l_0, т. е. длиной кривой подпора a_{II}. Ниже рассмотрим вопрос о том, как следует определять длину l_0.

§ 14-4. ПРОДОЛЖЕНИЕ: УСТАНОВЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПРЫЖКА В КОРОТКОМ КАНАЛЕ ПРИ ПОДТОПЛЕННОМ ЕГО КОНЦЕ

Можно различать два случая рассматриваемой задачи.

1°. Случай, когда глубина в том месте, где ожидаем прыжок, заведомо равна глубине h_0 (т. е. случай, когда на том участке, где ожидается прыжок, заведомо имеет место равномерный режим). Здесь вопрос о величине l_0 решается относительно просто:

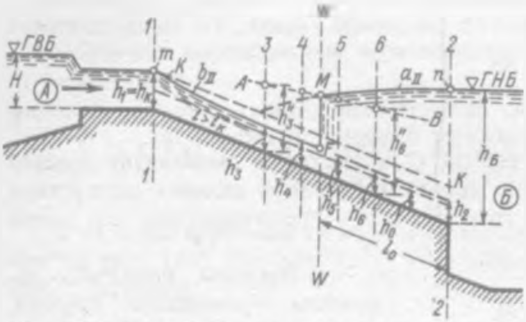


Рис. 14-8. Определение местоположения прыжка в канале (прямоугольное русло)

1) находим глубину h_0'', сопряженную с глубиной h_0;

2) глубину воды в самом конце лотка принимаем равной $h_2 = h_Б$;

3) искомую длину l_0 определяем по уравнению неравномерного движения как длину кривой подпора типа a_{II}, сопрягающей известные глубины h_0'' и $h_Б$.

2°. Случай, когда прыжок устанавливается на том участке лотка, где можем ожидать неравномерное движение воды. В данном случае рассмотрим отдельно русло прямоугольного и любого иного сечения.

П р я м о у г о л ь н о е   р у с л о   л о т к а. Поскольку прыжок устанавливается на участке, где возможно неравномерное движение, нам заранее неизвестна ни меньшая, ни бóльшая сопряженные глубины. В связи с этим приходится поступать следующим образом:

а) определяем Q и $h_к$;

б) строим кривую b_{II}, начиная от точки m (рис. 14-8) до самого конца лотка, причем на чертеже показываем эту кривую на всем ее протяжении штриховой линией;

в) строим кривую a_{II}, начиная от точки n (рис. 14-8) до тех пор, пока она не упрется в линию критических глубин $K-K$, причем на чертеже показываем эту кривую на всем ее протяжении штриховой линией;

г) намечаем ряд вертикальных сечений: 3, 4, 5, ... и устанавливаем для каждого сечения глубины h_3, h_4, h_5, ..., определяемые кривой b_{II};

д) по основному уравнению прыжка находим (в данном случае без подбора) глубины h_3'', h_4'', h_5'', ..., сопряженные с глубинами h_3, h_4, h_5, ...;

е) откладывая в соответствующих сечениях глубины h_3'', h_4'', h_5'', ... от дна лотка вверх, получаем в сечениях 3, 4, 5, ... точки, по которым проводим кривую AB. Легко видеть, что кривая AB является кривой глубин, сопряженных с глубинами, определяемыми кривой b_{II};

Как видно, в последнем случае в лотке появляется гидравлический прыжок; слева от прыжка имеем кривую свободной поверхности b_{II}; справа же от прыжка – кривую свободной поверхности a_{II}.

Заметим, что при построении такого рода свободных поверхностей длиной гидравлического прыжка обычно можно пренебрегать и представлять себе прыжок, образованный свободной поверхностью, поднимающейся по вертикали вверх. Как видно из рис. 14-7, местоположение прыжка в лотке определяется длиной l_0, т. е. длиной кривой подпора a_{II}. Ниже рассмотрим вопрос о том, как следует определять длину l_0.

§ 14-4. ПРОДОЛЖЕНИЕ: УСТАНОВЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПРЫЖКА В КОРОТКОМ КАНАЛЕ ПРИ ПОДТОПЛЕННОМ ЕГО КОНЦЕ

Можно различать два случая рассматриваемой задачи.

1°. Случай, когда глубина в том месте, где ожидаем прыжок, заведомо равна глубине h_0 (т. е. случай, когда на том участке, где ожидается прыжок, заведомо имеет место равномерный режим). Здесь вопрос о величине l_0 решается относительно просто:

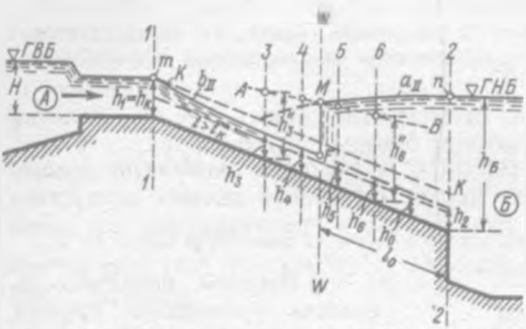


Рис. 14-8. Определение местоположения прыжка в канале (прямоугольное русло)

1) находим глубину h_0'', сопряженную с глубиной h_0;

2) глубину воды в самом конце лотка принимаем равной $h_2 = h_Б$;

3) искомую длину l_0 определяем по уравнению неравномерного движения как длину кривой подпора типа a_{II}, сопрягающей известные глубины h_0'' и $h_Б$.

2°. Случай, когда прыжок устанавливается на том участке лотка, где можем ожидать неравномерное движение воды. В данном случае рассмотрим отдельно русло прямоугольного и любого иного сечения.

П р я м о у г о л ь н о е р у с л о л о т к а. Поскольку прыжок устанавливается на участке, где возможно неравномерное движение, нам заранее неизвестна ни меньшая, ни бóльшая сопряженные глубины. В связи с этим приходится поступать следующим образом:

а) определяем Q и $h_к$;

б) строим кривую b_{II}, начиная от точки m (рис. 14-8) до самого конца лотка, причем на чертеже показываем эту кривую на всем ее протяжении штриховой линией;

в) строим кривую a_{II}, начиная от точки n (рис. 14-8) до тех пор, пока она не упрется в линию критических глубин $K-K$, причем на чертеже показываем эту кривую на всем ее протяжении штриховой линией;

г) намечаем ряд вертикальных сечений: 3, 4, 5, ... и устанавливаем для каждого сечения глубины h_3, h_4, h_5, ..., определяемые кривой b_{II};

д) по основному уравнению прыжка находим (в данном случае без подбора) глубины h_3'', h_4'', h_5'', ..., сопряженные с глубинами h_3, h_4, h_5, ...;

е) откладывая в соответствующих сечениях глубины h_3'', h_4'', h_5'', ... от дна лотка вверх, получаем в сечениях 3, 4, 5, ... точки, по которым проводим кривую AB. Легко видеть, что кривая AB является кривой глубин, сопряженных с глубинами, определяемыми кривой b_{II};

ж) находим точку M пересечения кривой AB с кривой свободной поверхности a_{II}. *Очевидно, точка M и будет* давать местоположение прыжка, поскольку в этом месте глубина, определяемая кривой b_{II}, и глубина, определяемая кривой a_{II}, являются сопряженными глубинами.

Найдя таким образом местоположение прыжка, далее отбрасываем участок кривой b_{II}, лежащий правее точки F, и участок кривой a_{II}, лежащий левее точки M. В результате искомую кривую свободной поверхности получаем в виде линии $mFMn$.

Русло любого поперечного сечения. В этом случае приходится строить две кривые прыжковой функции Θ вдоль потока: первую кривую – для воображаемого потока, определяемого кривой свободной поверхности b_{II} (построенной, как пояснялось выше); вторую кривую – для воображаемого потока, определяемого кривой свободной поверхности a_{II} (построенной, как пояснялось выше).

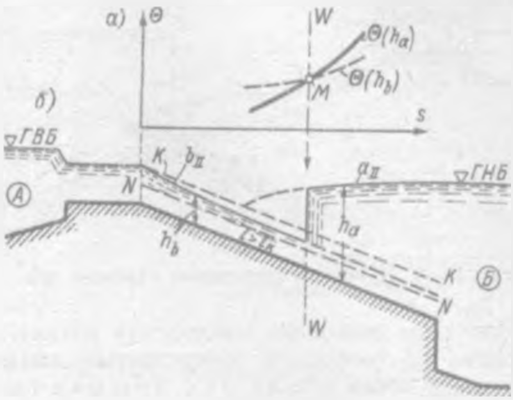


Рис. 14-9. Определение местоположения прыжка в канале (не прямоугольное русло)

Две указанные кривые прыжковой функции представлены на рис. 14-9, *а* (см. график, расположенный над основным чертежом и соответствующим образом увязанный с ним). Прыжок должен установиться в вертикальном поперечном сечении лотка, проходящем через точку пересечения M двух упомянутых кривых прыжковой функции, поскольку в этом сечении глубина h_a, относящаяся к кривой a_{II} и глубина h_b относящаяся к кривой b_{II}, имеют прыжковую функцию одинаковой величины. В заключение приведем следующее замечание.

Представим себе (рис. 14-9, *б*), что горизонт воды в водоеме *Б* постепенно повышается. Из приведенных выше объяснений должно быть ясно, что при этом гидравлический прыжок должен постепенно перемещаться вверх по течению. В конце концов прыжок может надвинуться на входной водослив, и в результате получим условия когда входной водослив работает как подтопленный.

Таким образом, можем видеть, что в случае лотка с уклоном дна $i > i_к$ при очень высоком стоянии горизонта воды в водоеме *Б* входной водослив может оказаться подтопленным. В этом случае лоток с уклоном $i > i_к$ приходится рассчитывать так, как мы рассчитывали лоток с уклоном $i < i_к$.

§ 14-5. УКАЗАНИЯ О РАСЧЕТЕ ЛОТКОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РЯДА УЧАСТКОВ РАЗНОГО УКЛОНА. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше рассматривался лоток постоянного уклона. Однако в практике не всегда можно наметить трассу канала так, чтобы уклон дна канала был всюду одинаковым. Часто можем получить при определенном рельефе местности картину, показанную, например, на рис. 14-10. Здесь участок *I* канала имеет уклон $i < i_к$, причем этот участок представляет собой входной водослив; остальные участки канала имеют уклон $i > i_к$.

Расчет канала, показанного на рис. 14-10, следует начинать с участка В результате рассмотрения участка *I* (как неподтопленного водослива) находи расход Q, а также начальную точку m свободной поверхности в сечении I – (эта точка должна определяться критической глубиной $h_к$). Далее, идя от точк m вниз по течению и рассматривая участок *II* канала, находим по уравнени ж) находим точку M пересечения кривой AB с кривой свободной поверхности a_{II}. Очевидно, точка M и будет давать местоположение прыжка, поскольку в этом месте глубина, определяемая кривой b_{II}, и глубина, определяемая кривой a_{II}, являются сопряженными глубинами.

Найдя таким образом местоположение прыжка, далее отбрасываем участок кривой b_{II}, лежащий правее точки F, и участок кривой a_{II}, лежащий левее точки M. В результате искомую кривую свободной поверхности получаем в виде линии $mFMn$.

Русло любого поперечного сечения. В этом случае приходится строить две кривые прыжковой функции Θ вдоль потока: первую кривую – для воображаемого потока, определяемого кривой свободной поверхности b_{II} (построенной, как пояснялось выше); вторую кривую – для воображаемого потока, определяемого кривой свободной поверхности a_{II} (построенной, как пояснялось выше).

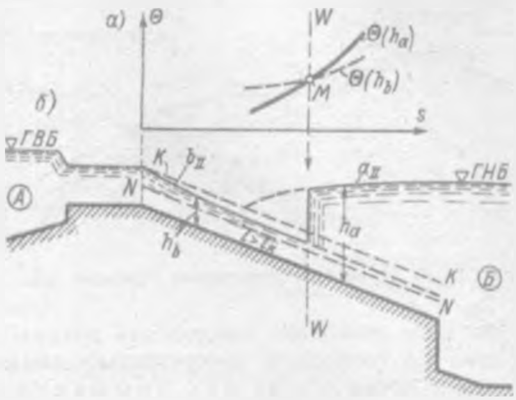


Рис. 14-9. Определение местоположения прыжка в канале (не прямоугольное русло)

Две указанные кривые прыжковой функции представлены на рис. 14-9, a (см. график, расположенный над основным чертежом и соответствующим образом увязанный с ним). Прыжок должен установиться в вертикальном поперечном сечении лотка, проходящем через точку пересечения M двух упомянутых кривых прыжковой функции, поскольку в этом сечении глубина h_a, относящаяся к кривой a_{II} и глубина h_b, относящаяся к кривой b_{II}, имеют прыжковую функцию одинаковой величины. В заключение приведем следующее замечание.

Представим себе (рис. 14-9, $б$), что горизонт воды в водоеме $Б$ постепенно повышается. Из приведенных выше объяснений должно быть ясно, что при этом гидравлический прыжок должен постепенно перемещаться вверх по течению. В конце концов прыжок может надвинуться на входной водослив, и в результате получим условия, когда входной водослив работает как подтопленный.

Таким образом, можем видеть, что в случае лотка с уклоном дна $i > i_к$ при очень высоком стоянии горизонта воды в водоеме $Б$ входной водослив может оказаться подтопленным. В этом случае лоток с уклоном $i > i_к$ приходится рассчитывать так, как мы рассчитывали лоток с уклоном $i < i_к$.

§ 14-5. УКАЗАНИЯ О РАСЧЕТЕ ЛОТКОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РЯДА УЧАСТКОВ РАЗНОГО УКЛОНА. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше рассматривался лоток постоянного уклона. Однако в практике не всегда можно наметить трассу канала так, чтобы уклон дна канала был всюду одинаковым. Часто можем получить при определенном рельефе местности картину, показанную, например, на рис. 14-10. Здесь участок I канала имеет уклон $i < i_к$, причем этот участок представляет собой входной водослив; остальные участки канала имеют уклон $i > i_к$.

Расчет канала, показанного на рис. 14-10, следует начинать с участка I. В результате рассмотрения участка I (как неподтопленного водослива) находим расход Q, а также начальную точку m свободной поверхности в сечении $1-1$ (эта точка должна определяться критической глубиной $h_к$). Далее, идя от точки m вниз по течению и рассматривая участок II канала, находим по уравнению неравномерного движения глубину h_2. Затем переходим к участку *III* лотка, соединяем уравнением неравномерного движения сечения *2—2* и *3—3*, причем находим глубину h_3, и т. д. Наконец, выясняем условия сопряжения бьефов за лотком, а также вопрос о наличии или отсутствии прыжка в лотке.

Приведем в заключение настоящего параграфа следующие отдельные замечания.

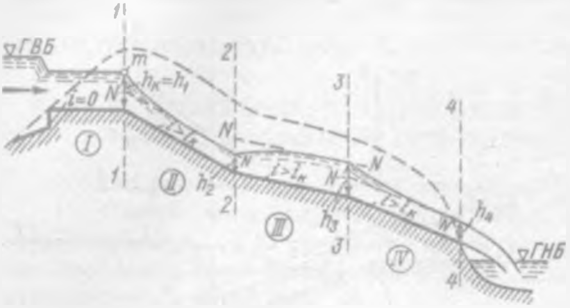


Рис. 14-10. Канал с переменным уклоном дна

1. Наличие прыжка в лотке является нежелательным, например, при сплаве леса (в так называемых лесосплавных лотках), так как в районе образования прыжка будут происходить удары сплавляемой древесины о стенки лотка; кроме того, прыжок в лотке может вызвать лесной залом (пробку).

Чтобы избежать прыжка, можно придать последнему участку лотка уклон дна $i = i_к$. При этом свободная поверхность потока в лотке (где глубина $h < h_к$) сопрягается со свободной поверхностью нижнего бьефа (дающей глубину воды в конце лотка $h_Б > h_к$) без прыжка (рис. 14-11). Этот случай является тем исключением, о котором мы говорили в § 8-1, где указывали, что при пересечении линии $K - K$ свободной поверхностью (при возрастании глубин) в русле должен получаться прыжок.

Однако такое решение имеет следующие недостатки:

а) последний участок канала с уклоном $i = i_к$ оказывается слишком длинным, и потому иногда его трудно запроектировать;

б) в случае, когда расход в лотке в процессе его эксплуатации получается отличным от расчетного, т. е. от расхода, на который проектировался лоток, величины $h_к$ и $i_к$ изменяют свое значение; при этом уклон построенного последнего участка лотка перестает быть критическим, и в лотке может возникнуть прыжок. Разумеется, прыжок в канале при $i = i_к$ должен также возникнуть, если горизонтальная прямая a_{III} окажется расположенной выше горизонтальной прямой c_{III}.

Рис. 14-11. Свободная поверхность потока в пределах концевого участка канала при $i = i_к$

Избавиться от прыжка в лотке можно также путем создания в нем так называемой **искусственной шероховатости**. Устраивая искусственную шероховатость, увеличиваем коэффициент шероховатости n. Благодаря этому получаем следующее: а) нормальная глубина h_0 увеличивается (при Q = const); б) также увеличиваются и действительные глубины в лотке.

Что касается критической глубины $h_к$, то **с изменением коэффициента шероховатости n величина $h_к$ остается без изменения.**[1]

[1] Влиянием шероховатости на коэффициент α, входящий в формулу для $h_к$, пренебрегаем.

неравномерного движения глубину h_2. Затем переходим к участку *III* лотка, соединяем уравнением неравномерного движения сечения $2-2$ и $3-3$, причем находим глубину h_3, и т. д. Наконец, выясняем условия сопряжения бьефов за лотком, а также вопрос о наличии или отсутствии прыжка в лотке.

Приведем в заключение настоящего параграфа следующие отдельные замечания.

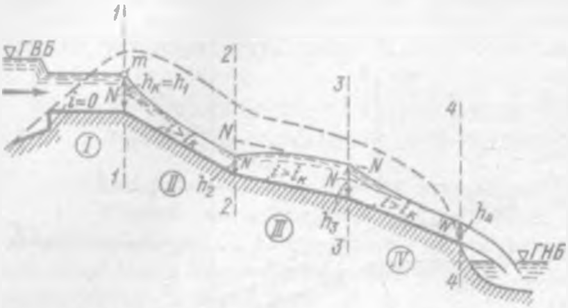


Рис. 14-10. Канал с переменным уклоном дна

1. Наличие прыжка в лотке является нежелательным, например, при сплаве леса (в так называемых лесосплавных лотках), так как в районе образования прыжка будут происходить удары сплавляемой древесины о стенки лотка; кроме того, прыжок в лотке может вызвать лесной залом (пробку).

Чтобы избежать прыжка, можно придать последнему участку лотка уклон дна $i=i_к$. При этом свободная поверхность потока в лотке (где глубина $h<h_к$) сопрягается со свободной поверхностью нижнего бьефа (дающей глубину воды в конце лотка $h_Б>h_к$) без прыжка (рис. 14-11). Этот случай является тем исключением, о котором мы говорили в § 8-1, где указывали, что при пересечении линии $K-K$ свободной поверхностью (при возрастании глубин) в русле должен получаться прыжок.

Однако такое решение имеет следующие недостатки:

а) последний участок канала с уклоном $i=i_к$ оказывается слишком длинным, и потому иногда его трудно запроектировать;

б) в случае, когда расход в лотке в процессе его эксплуатации получается отличным от расчетного, т. е. от расхода, на который проектировался лоток, величины $h_к$ и $i_к$ изменяют свое значение; при этом уклон построенного последнего участка лотка перестает быть критическим, и в лотке может возникнуть прыжок. Разумеется, прыжок в канале при $i=i_к$ должен также возникнуть, если горизонтальная прямая a_{III} окажется расположенной выше горизонтальной прямой c_{III}.

Рис. 14-11. Свободная поверхность потока в пределах концевого участка канала при $i=i_к$

Избавиться от прыжка в лотке можно также путем создания в нем так называемой **искусственной шероховатости**. Устраивая искусственную шероховатость, увеличиваем коэффициент шероховатости n. Благодаря этому получаем следующее: а) нормальная глубина h_0 увеличивается (при $Q=\text{const}$); б) также увеличиваются и действительные глубины в лотке.

Что касается критической глубины $h_к$, то **с изменением коэффициента шероховатости n величина $h_к$ остается без изменения.**[1]

[1] Влиянием шероховатости на коэффициент α, входящий в формулу для $h_к$, пренебрегаем.

Как видно, искусственная шероховатость дает следующий эффект:

если до устройства искусственной шероховатости лоток характеризовался соотношениями

$$h_0 < h_к; \; i > i_к, \tag{14-13}$$

то после устройства искусственной шероховатости, увеличив глубину h_0 (и оставив без изменения $h_к$; см. выше), можем получить соотношения

$$h_0 \geqslant h_к; \quad i \leqslant i_к, \tag{14-14}$$

при которых гидравлический прыжок невозможен.

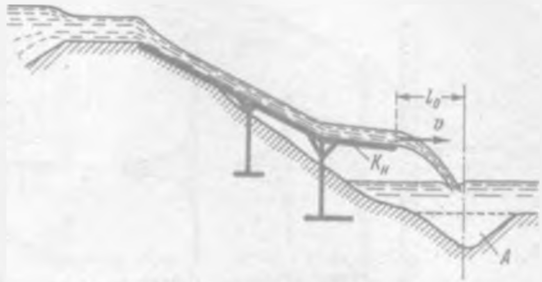


Рис. 14-12. Консольный быстроток

Однако «конструкция» искусственной шероховатости, представляющей собой различного рода выступы, создаваемые на дне и стенках лотка, затрудняет сплав древесины, и потому в последнее время искусственную шероховатость применять для лесосплавных лотков не рекомендуют.

2. Вода в коротких каналах, выполненных с большим уклоном (в так называемых быстротоках), может иметь очень большие скорости.

При движении воды в канале приводится в движение также воздух, соприкасающийся со свободной поверхностью потока. При этом в случае больших скоростей воды поток захватывает воздух и насыщается в некоторой мере пузырьками воздуха (а э р и р у е т с я). В результате аэрации потока в канале движется смесь воды и пузырьков воздуха. При этом глубины потока возрастают.

В настоящее время отсутствуют еще достаточно надежные методы расчета аэрации потока.

3. Существует особый тип короткого канала с большим уклоном (быстротока), представленного на рис. 14-12. Как видно, здесь канал заканчивается консолью *Кн*, причем струя отбрасывается от последней опоры канала достаточно далеко.

Гидравлический расчет такого быстротока ведется так же, как и обычного канала. Дополнительно здесь приходится определять:

а) дальность полета струи l_0 (см. рис. 14-12); этот вопрос решается на основании уже известных зависимостей; длина l_0 нам необходима для того, чтобы установить местоположение в о р о н к и р а з м ы в а *A*, показанной на рисунке;

б) глубину воронки размыва; этот вопрос можно решить только весьма приближенно, пользуясь некоторыми расчетами, освещенными в литературе (этих расчетов здесь касаться не будем; см. § 12-12).

Зная местоположение воронки размыва, а также глубину и величину коэффициентов откоса ее, можно решить вопрос о том, насколько правильно запроектирована последняя опора быстротока (не будет ли она подмыта потоком).

4. Сталкиваясь с каналами, имеющими большой уклон, и прилагая к ним при расчете известные уравнения неравномерного и равномерного движения, полученные для условий, когда плоские живые сечения потока можно считать вертикальными, мы, разумеется, допускаем здесь некоторую погрешность

Для такого рода каналов, строго говоря, допущение о вертикальности живых сечений неприемлемо.

5. В следующей главе будет показано, что в случае бурного движения воды в быстротоках при их сужении, расширении или повороте (в плане) на свободной поверхности потока должны возникать так называемые косые волны, с которыми иногда нельзя не считаться при выполнении гидравлических расчетов.

6. Если быстроток (или нижний бьеф быстротока) достаточно широк, причем выпуск воды в него осуществляется не по всей его ширине, то в быстротоке (или нижнем бьефе) может возникнуть с б о й н о е т е ч е н и е (сбойность).

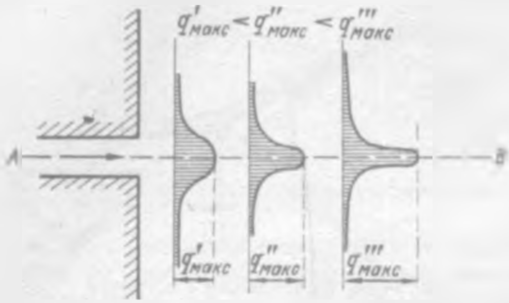


Рис. 14-13. План потока. Сбойное движение («сбойность расхода»)

Отметим, что под с б о й н о с т ь ю р а с х о д а следует понимать условия движения воды, когда «расход q в точке плана потока» (см. стр. 510) самопроизвольно увеличивается по течению вдоль динамической оси AB потока (рис. 14-13); при этом соответствующим образом деформируется вдоль течения и эпюра расходов q. Такое явление обусловливается возникновением поперечных (по отношению к потоку) гидравлических градиентов, направленных (в случае спокойного потока) в сторону динамической оси. Явлением «противоположным» с б о й н о с т и р а с х о д а является самопроизвольное р а с т е к а н и е потока в плане, когда величина q уменьшается вдоль динамической оси.

Часто при наличии сбойности динамическая ось прямолинейного потока искривляется в плане. Такого рода сбойность может быть названа с б о й н о с т ь ю о с и п о т о к а. Положение искривленной оси может быть устойчивым и неустойчивым (во времени).

Явление сбойности может наблюдаться и в каналах, которые были рассмотрены в гл. 6. Здесь при достаточно больших $\beta = b/h$ (больших, например, 8-10) динамическая ось потока в силу тех или других – иногда случайных – причин, может отклониться (в плане) от геометрической оси канала (на том или другом его участке), причем в этом случае будет получаться «прижатие» потока (при спокойном движении) к одному из берегов канала, что может вызвать размыв русла.

§ 14-6. СОПРЯЖЕНИЕ ДВУХ ВОДОЕМОВ ПРИ ПОМОЩИ ДЛИННОГО КАНАЛА

Как отмечалось в § 14-1, в случае длинного канала часто пренебрегают перепадом свободной поверхности на входном водосливе; при этом получают картину, показанную на рис. 14-14.

Обычно длинные каналы имеют малый уклон дна ($i < i_к$), в связи с чем прыжка в них быть не может. Далее и будем рассматривать такой случай длинного канала.

Рассчитывая длинный канал, различаем три задачи:

1-я з а д а ч а. Дана отметка ∇_A горизонта воды в водоеме A (рис. 14-14), причем считается, что $\nabla_A = \text{const}$;[1] отметка горизонта воды $\nabla_Б$ в водоеме $Б$ считается пере-

[1] При решении рассматриваемых здесь задач предполагается, что размеры канала, уклон и шероховатость русла заданы.

менной. Требуется вычислить зависимость $Q = f_1(\nabla_Б)$, а также установить как изменяются формы свободной поверхности при изменении отметки $\nabla_Б$.

При решении этой задачи поступаем следующим образом.

Глубина воды в начале канала

$$h_1 = \nabla_A - \nabla'_д = \text{const}, \tag{14-15}$$

где $\nabla'_д$ – известная отметка дна канала в его начале (в сечении $1-1$); глубина воды в конце канала

$$h_2 = \nabla_Б - \nabla''_д \neq \text{const}, \tag{14-16}$$

где $\nabla''_д$ – известная отметка дна в его конце (в сечении $2-2$).

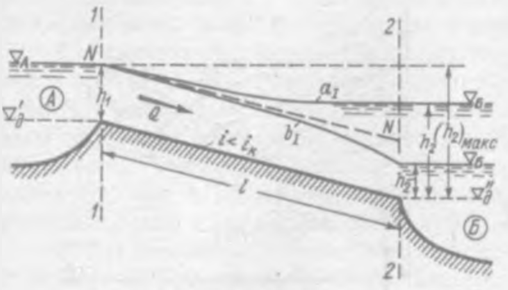


Рис. 14-14. Длинный канал

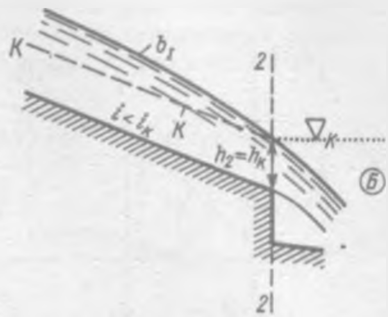


Рис. 14-15. Истечение из длинного канала в атмосферу

Наибольшее возможное значение h_2:

$$(h_2)_{макс} = h_1 + il, \tag{14-17}$$

где l – длина канала; i – уклон дна канала.

В случае

$$(h_2)_{макс} > h_2 > h_1 \tag{14-18}$$

в канале будем иметь кривую подпора; если же

$$h_2 = h_1, \tag{14-19}$$

в канале будет иметь место равномерный режим; наконец при условии

$$h_к \leq h_2 \leq h_1, \tag{14-20}$$

в канале будем получать кривые спада.

Если максимальная глубина в сечении $2-2$ определяется соотношением (14-17), то минимальная глубина в сечении $2-2$, получающаяся, когда горизонт воды в водоеме $Б$ опустится весьма низко, равняется (рис. 14-15):

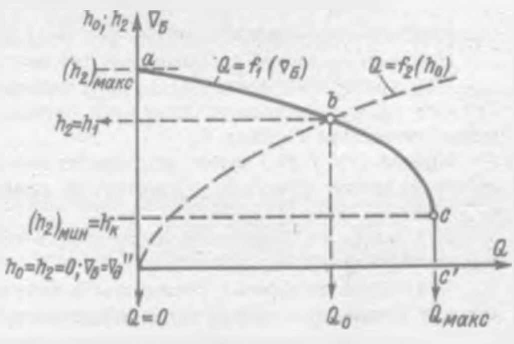


Рис. 14-16. Зависимость $Q = f_1(\nabla_Б)$ для длинного канала

$$(h_2)_{мин} = h_к. \tag{14-21}$$

При снижении отметки горизонта воды в водоеме $Б$ ниже отметки ∇_K, определяемой глубиной $h_к$, картина движения в канале изменяться не будет, и расход канала будет оставаться постоянным.

Имея в виду сказанное, выясним, как изменяется расход воды Q при изменении h_2 в пределах

$$(h_2)_{мин} \leq h_2 \leq (h_2)_{макс}, \tag{14-22}$$

т. е. в пределах

$$h_к \leqslant h_2 \leqslant (h_1 + il). \qquad (14\text{-}23)$$

Кривая $Q = f_1(\nabla_Б)$ вычисляется следующим образом:

1) задаемся рядом значений Q;

2) зная h_1 для каждого заданного расхода Q, вычисляем по уравнению неравномерного движения глубину h_2.

В результате строим график, показанный на рис. 14-16. На этот график наносим также кривую $Q = f_2(h_0)$, где h_0 – нормальная глубина. Очевидно, участок кривой ab отвечает кривой подпора (типа a_1), участок же кривой bcc' – кривой спада (типа b_1).

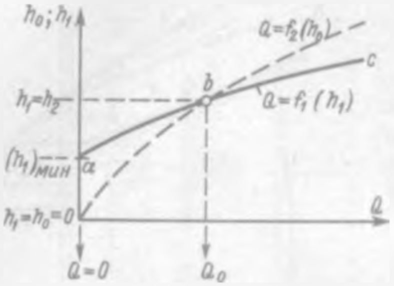


Рис. 14-17. Зависимость $Q = f_1(h_1)$ для длинного канала

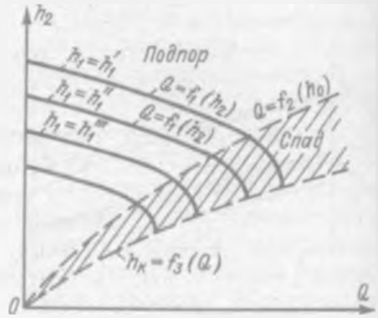


Рис. 14-18. Зависимость $Q = f(h_1, h_2)$ для длинного канала

2-я задача. Дана отметка $\nabla_Б$ ($\nabla_Б$ = const); отметка $\nabla_А$ считается переменной. Требуется построить кривую зависимости $Q = f(\nabla_А)$ или, что то же самое, кривую зависимости $Q = f_1(h_1)$.

Ясно, что минимальное значение h_1, которому отвечает горизонтальная свободная поверхность, равно:

$$(h_1)_{мин} = h_2 - il; \qquad (14\text{-}24)$$

максимальное возможное значение его $(h_1)_{макс} = \infty$.

При $h_1 = h_2$ имеем равномерный режим; при $h_1 < h_2$ – подпор; при $h_1 > h_2$ – спад.

При построении кривой $Q = f_1(h_1)$ задаемся в канале разными расходами Q и для каждого расхода, исходя из известной глубины h_2, по уравнению неравномерного движения вычисляем глубину h_1.

Кривая $Q = f_1(h_1)$ имеет вид, представленный на рис. 14-17. На этом же чертеже нанесена кривая $Q = f_2(h_0)$. Участок ab кривой $Q = f_1(h_1)$ отвечает подпору, участок bc – спаду.

3-я задача. Переменными являются обе отметки: $\nabla_А$ и $\nabla_Б$. Требуется выяснить зависимость $Q = f(h_1, h_2)$.

Эта задача сводится к решению 1-й задачи: берем некоторую глубину h_1' и строим для нее кривую $Q = f_1(h_2)$, затем задаемся другой глубиной h_1'' и т. д.

Результаты расчета могут быть представлены графиком на рис. 14-18, где помимо искомых кривых $Q = f_1(h_2)$, нанесены еще кривые $Q = f_2(h_0)$ и $h_к = f_3(Q)$. Заштрихованная зона этого графика отвечает спаду; зона же, расположенная выше кривой $Q = f_2(h_0)$ (незаштрихованная) – подпору.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

14-1. **Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И.** Гидравлика. – М.: Госэнергоиздат, 1964.

14-2. **Использование** водной энергии./Под ред. Д. С. Щавелева. – М. – Л.: Энергия, 1976.

14-3. **Чертоусов М. Д.** Гидравлика: Специальный курс. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1962.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ[1]

ПЛАНОВАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ БЕЗНАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ ВОДЫ

§ 15-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать только турбулентное движение воды, отвечающее квадратичной области сопротивления. Представим на рис. 15-1 безнапорный резко изменяющийся в плане поток воды. Направление осредненных скоростей движения воды этого потока будем считать близким к горизонтальному.

Для расчета такой действительный поток в соответствующих случаях можно заменить с некоторым приближением условным потоком («неполной воображаемой моделью»), имеющим внешние границы такие же, как у действительного потока, и обладающим следующим свойством:

живые сечения условного потока представляют собой цилиндрические поверхности с вертикальными образующими.

Такого рода модель действительного потока характеризуется рядом особенностей:

а) цилиндрические поверхности, проведенные ортогонально к намеченным цилиндрическим живым сечениям, являются поверхностями тока;

б) живые сечения воображаемого потока и отмеченные поверхности тока, будучи спроектированы на горизонтальную плоскость, дают нам две системы линий (любой кривизны), причем совокупность этих двух систем образует в плане ортогональную сетку, которую можно назвать «гидродинамической сеткой».

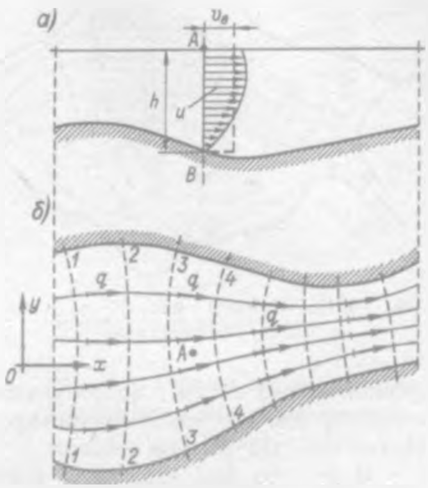


Рис. 15-1. Модель Бернадского («плановый поток»): *а* – вертикальный разрез потока, *б* – план потока (векторное поле расходов q)

в) вертикальные составляющие осредненных скоростей для рассматриваемой модели турбулентного потока равны нулю; при этом давление вдоль любой вертикали, проведенной внутри воображаемого потока, распределится по линейному закону;

г) векторы горизонтальных осредненных скоростей, относящиеся к различным точкам любой рассматриваемой вертикали, проведенной внутри воображаемого потока, лежат в одной вертикальной плоскости.

Описанный условный поток может быть назван моделью Бернадского[2] или «плановым потоком».

[1] Эта глава написана при участии А. А. Турсунова.

[2] Поскольку Н. М. Бернадский в 1933 г. первый начал исследовать такого рода потоки и впервые применил такую модель. [Н. М. Бернадский. Теория турбулентного потока и ее применение в построении течений в открытых водоемах. – В кн.: Материалы по гидрологии, гидрографии и водным силам. – М.: Теплоэлектропроект, 1933.].

Обозначим через $v_в$ скорость, являющуюся средней из скоростей u, относящихся к разным точкам вертикали AB, проведенной через произвольную точку A плана потока (см. рис. 15-1). Легко видеть, что в случае «планового потока» каждая точка его плана характеризуется определенной скоростью $v_в$.

Равным образом каждая точка плана потока характеризуется вполне определенным вектором q, длина (модуль) которого равна

$$q = hv_в, \tag{15-1}$$

где h – глубина потока в данной точке. В связи с этим весь поток в плане может быть представлен как векторное поле величин q, модули которых выражаются зависимостью (15-1).

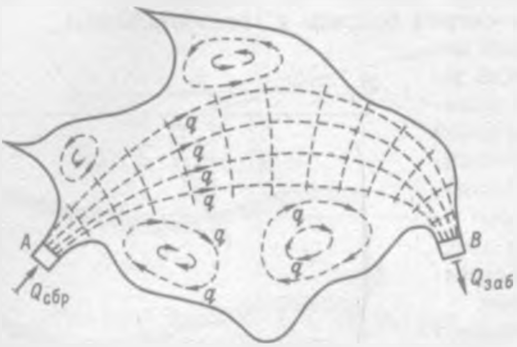


Рис. 15-2. Пример потока в плане (пруд-охладитель)

Векторная величина q представляет собой плотность распределения расхода в плане по рассматриваемому живому сечению; эту величину можно назвать «плотностью расхода» или «расходом в точке плана». Разумеется, не следует смешивать указанную векторную величину со скалярной величиной q, которую мы выше называли «удельным расходом».

В дальнейшем, пользуясь зависимостью (15-1), условимся опускать индекс «в» у средней скорости $v_в$; однако этот индекс всюду (в данной главе) следует подразумевать у скорости v и не смешивать среднюю скорость для вертикали (например, для вертикали AB; рис. 15-1,*а*) со средней скоростью для живого сечения.

Ясно, что при указанной постановке вопроса мы можем, рассматривая план потока, интересоваться, например, «удельной энергией вертикали» Э в точке плана потока:

$$Э = h + \frac{v^2}{2g}, \tag{15-2}$$

а также критической глубиной $h_к$ в точке плана потока:

$$h_к = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}, \tag{15-3}$$

где q – длина (модуль) вектора расхода в точке плана потока.

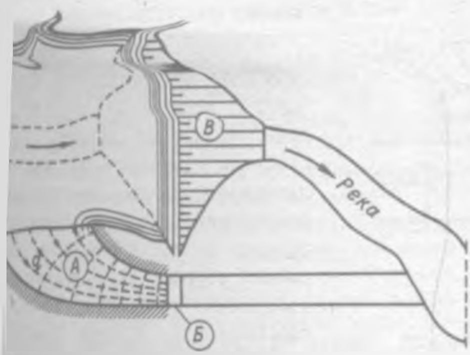
В качестве примера действительных потоков, которые можно для расчета заменить моделью Бернадского, приведем следующие:

1) на рис. 15-2 представлен так называемый пруд-охладитель; в точке A этого пруда сбрасывается расход $Q_{сбр}$ воды, прошедшей через теплоэлектростанцию, где эта вода нагрелась (при охлаждении ею тех или других агрегатов) до определенной температуры; в точке B пруда из него забирается расход $Q_{заб}$ воды, охладившейся в пруде и подаваемой снова на теплоэлектростанцию. При расчете процесса охлаждения воды в пруде приходится интересоваться поясненным выше полем расходов q;

2) на рис. 15-3 представлен план так называемой подходной выемки A, обеспечивающей подвод воды к какому-либо водосливу $Б$, устроенному, например, на берегу реки (сбоку плотины $В$). Здесь мы также получаем поток,

торый можно для расчета заменить моделью Бернадского. Подобного рода дходные выемки проектируют так, чтобы получить безотрывное обтекание дой берегов этой выемки. В связи с этим берега данных выемок в плане лжны очерчиваться по боковым граничным линиям тока рассматриваемого тока. Кроме того, подходная выемка должна быть запроектирована так, обы распределение удельных расходов q воды вдоль фронта водослива $Б$ ло равномерным.

Примеры, приведенные на рис. 15-2 и 15-3, относятся к случаю с п о к о й- о г о движения воды, когда $h > h_к$, т. е. глубины *потока h всюду больше* итической глубины $h_к$.



с. 15-3. Пример потока в плане (подходная выемка $А$ к водосливу $Б$)

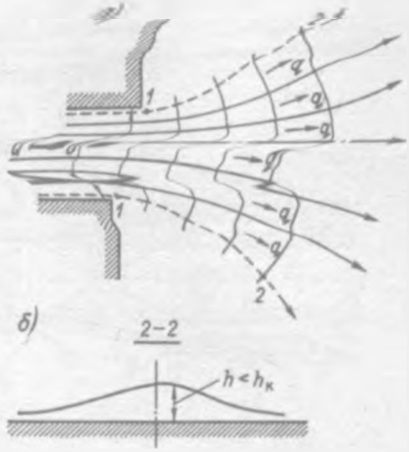


Рис. 15-4. Пример потока в плане (бурный поток в нижнем бьефе водосброса)

Достаточно часто в практике встречаются б у р н ы е потоки, при расчете торых также может быть использована поясненная выше модель. Для приера на рис. 15-4 представлен нижний бьеф какого-либо сооружения; бурный ток, поступающий в него из отверстия сооружения, шириной b, растекается пределах нижнего бьефа, как показано на чертеже [см. граничные линии ока $1-2$ растекающейся струи на схеме (*а*) и разрез этой струи по живому чению $2-2$ на схеме (*б*)].

Надо подчеркнуть, что вопросы «планового движения» воды осложняются ледующими обстоятельствами, существенными в практическом отношении:

1) в случае с п о к о й н о г о движения (когда $h > h_к$) при определенных словиях в том или другом месте потока мы можем получить отрыв «транитной струи» от боковых стенок русла, причем в этом месте возникает о д о в о р о т н а я о б л а с т ь, имеющая (при рассмотрении осредненного о времени движения) вертикальную ось (рис. 15-2);

2) в случае б у р н о г о движения (когда $h < h_к$) при определенных условиях а свободной поверхности потока могут возникнуть особые волны иногда большой высоты.[1]

С тем чтобы в общих чертах пояснить вопрос об этих волнах представим на рис. 15-5, *а* план быстротока, который имеет между сечениями $I-I$ и $II-II$

[1] В случае бурного потока иногда могут возникнуть также и упомянутые выше водоворотные области, но они здесь не имеют большого значения.

который можно для расчета заменить моделью Бернадского. Подобного рода подходные выемки проектируют так, чтобы получить безотрывное обтекание водой берегов этой выемки. В связи с этим берега данных выемок в плане должны очерчиваться по боковым граничным линиям тока рассматриваемого потока. Кроме того, подходная выемка должна быть запроектирована так, чтобы распределение удельных расходов q воды вдоль фронта водослива $Б$ было равномерным.

Примеры, приведенные на рис. 15-2 и 15-3, относятся к случаю спокойного движения воды, когда $h > h_к$, т. е. глубины *потока h всюду больше* критической глубины $h_к$.

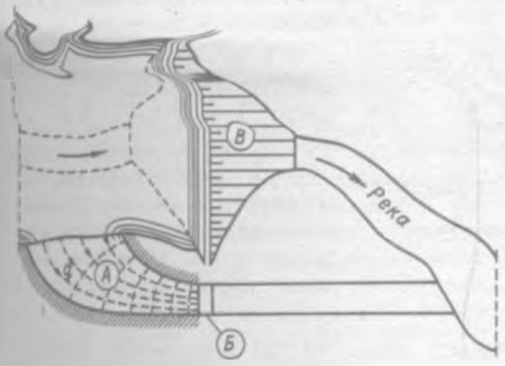


Рис. 15-3. Пример потока в плане (подходная выемка $А$ к водосливу $Б$)

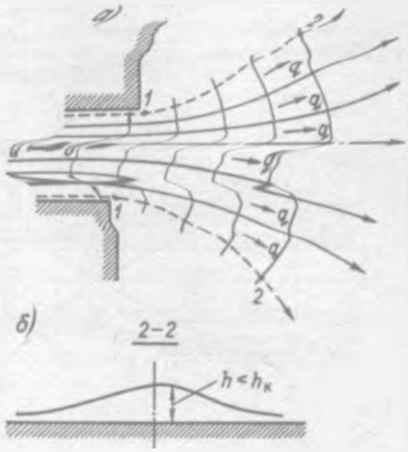


Рис. 15-4. Пример потока в плане (бурный поток в нижнем бьефе водосброса)

Достаточно часто в практике встречаются бурные потоки, при расчете которых также может быть использована поясненная выше модель. Для примера на рис. 15-4 представлен нижний бьеф какого-либо сооружения; бурный поток, поступающий в него из отверстия сооружения, шириной b, растекается в пределах нижнего бьефа, как показано на чертеже [см. граничные линии тока $1-2$ растекающейся струи на схеме ($а$) и разрез этой струи по живому сечению $2-2$ на схеме ($б$)].

Надо подчеркнуть, что вопросы «планового движения» воды осложняются следующими обстоятельствами, существенными в практическом отношении:

1) в случае спокойного движения (когда $h > h_к$) при определенных условиях в том или другом месте потока мы можем получить отрыв «транзитной струи» от боковых стенок русла, причем в этом месте возникает водоворотная область, имеющая (при рассмотрении осредненного во времени движения) вертикальную ось (рис. 15-2);

2) в случае бурного движения (когда $h < h_к$) при определенных условиях на свободной поверхности потока могут возникнуть особые волны иногда большой высоты.[1]

С тем чтобы в общих чертах пояснить вопрос об этих волнах представим на рис. 15-5, $а$ план быстротока, который имеет между сечениями $I-I$ и $II-II$

[1] В случае бурного потока иногда могут возникнуть также и упомянутые выше водоворотные области, но они здесь не имеют большого значения.

сужение, образованное стенками AB. При наличии такого сужения отдельные струйки бурного потока (см. на рис. струйки 1, 2, 3) набегают с большой скоростью на стенки AB; при этом свободная поверхность потока резко поднимается кверху, что и обусловливает возникновение волн. Эти волны налагаются друг на друга и уносятся вниз по течению. В результате возникновения таких волн (в данном примере положительных) и их интерференции свободная поверхность потока в месте его сужения и далее по течению приобретает резко выраженную волнообразную форму [см. на рис. 15-5 схему (б), где представлен продольный разрез потока, и схему (в), где изображено поперечное сечение потока по линии MN]. Такого рода установившиеся, неизменные во времени, волны (косые в плане по отношению к продольной оси потока), возникающие на свободной поверхности потока в случае его деформации (в плане), существенно изменяют ту картину движения воды в пределах сооружения, которую мы описывали в гл. 14, когда говорили только о плоской задаче движения воды в быстротоках. Волны (косые в плане) на свободной поверхности иногда достигают большой высоты, причем их часто приходится учитывать при назначении размеров проектируемого сооружения (высоты бортов быстротоков и т. п.).

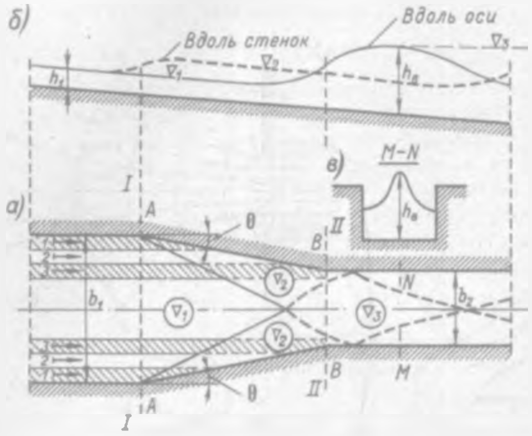


Рис. 15-5. Косые волны на поверхности потока, возникающие при его сужении

Вопрос об установлении границ водоворотных областей (в плане) в случае спокойного потока, затронутый нами на стр. 511, как мы видели, осложняется в частности, тем, что при наличии спокойного движения всегда приходится учитывать потери напора; в этом случае силы трения являются соизмеримыми с силами инерции движущейся воды, и потому модель идеальной жидкости в данном случае является, как правило, неприемлемой. В случае бурного потока достаточно часто силами трения можно пренебрегать и пользоваться моделью идеальной жидкости. В связи с этим бурные потоки оказываются более доступными для их анализа.

Вместе с тем, рассматривая бурный поток, приходится решать ряд специальных задач, касающихся вопроса о возникновении на их свободной поверхности указанных выше волн.

Стремясь «управлять» бурным потоком, т. е. изменять его форму и направление (так, однако, чтобы при этом не образовывались большие волны и не нарушалось равномерное распределение расхода q по ширине русла), в настоящее время устраивают особые русла с криволинейным дном и криволинейными боковыми стенками. В воде, движущейся в таких руслах, возникают большие силы инерции, используя которые и добиваются практически приемлемой деформации бурного потока.

Вопрос о плановой задаче может дополнительно осложняться, когда бурный плановый поток переходит в спокойный плановый поток. В этом случае в месте такого перехода получается иногда гидравлический прыжок особого вида – так называемый **косой гидравлический прыжок**.

Ниже приведем соответствующие дифференциальные уравнения, описывающие плановый (двухразмерный в плане) поток (спокойный и бурный), а также дадим общие указания о решении этих уравнений. Кроме того, приведем еще краткое пояснение вопроса о косых волнах. Вопроса о расчете упомянутых выше криволинейных русел (так называемых **виражей** и **рассеивающих трамплинов**) касаться не будем.

§ 15-2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ (В ПЛАНЕ) БЕЗНАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ И ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИХ РЕШЕНИИ

Рассматриваемое движение воды, заменяемое для расчета воображаемой моделью Бернадского, может быть описано тремя дифференциальными уравнениями: одним уравнением баланса расхода и двумя уравнениями динамического равновесия.

1°. Уравнение баланса расхода. Будем иметь в виду только случай русла с плоским **горизонтальным** дном ($i = 0$). Оси координат Ox и Oy расположим в плоскости этого дна (рис. 15-6); глубины h потока будем измерять вдоль вертикальной оси Oz.

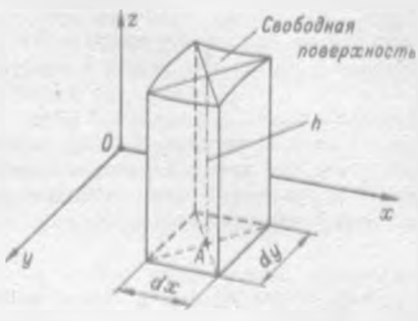


Рис. 15-6. К выводу уравнения баланса расхода

Наметим на дне потока произвольную точку A, причем у этой точки выделим в пределах потока параллелепипед (рис. 15-6), имеющий бесконечно малую площадь основания (равную $dx\,dy$) и высоту, равную h. Считаем, что данный параллелепипед неподвижен в пространстве, причем вода протекает через его вертикальные (боковые) грани. Далее рассуждаем так же, как и в § 3-10: подсчитываем объем воды, вошедший в наш параллелепипед, и объем воды, вышедший из него, причем оба этих объема приравниваем друг другу. В результате такой операции и получаем искомое дифференциальное уравнение (относящееся к любой заданной точке плана потока) в виде

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x}(hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_y) = 0, \qquad (15\text{-}4)$$

где q_x и q_y – проекции вектора q на соответствующие оси координат (рис. 15-1); v_x и v_y – проекции средней скорости для рассматриваемой вертикали на те же оси (Ox и Oy).

На основании уравнений (15-4) можем утверждать следующее: на сколько увеличивается расход q вдоль оси Ox, *настолько же он должен уменьшаться вдоль оси* Oy. Только при этом условии вода (в случае безнапорного **установившегося** движения) будет двигаться сплошным потоком без образования разрывов (см. план потока на рис. 15-1).

2°. Уравнения динамического равновесия. Будем пренебрегать потерями напора, т. е. считать воду идеальной жидкостью; как и выше, будем рассматривать русло с горизонтальным дном ($i = 0$). При этом приложим известные уравнения Эйлера (3-6) (которые представляют собой уравнения динамического равновесия, составленные для элементарного объема жидкости) к единице массы жидкости, заполняющей в данный момент времени параллелепипед, представленный на рис. 15-6.

Используя уравнения Эйлера, учтем следующее:

а) в случае рассматриваемого планового движения скорости u_x, u_y и u_z, входящие в уравнения Эйлера, пренебрегая неравномерностью распределения скоростей u по вертикалям, следует считать

$$u_x = v_x; \; u_y = v_y; \; u_z = v_z = 0;$$

б) для **установившегося** движения **тяжелой** жидкости (т. е. жидкости, находящейся под действием объемных сил тяжести) можно написать

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0; \quad \phi_x = \phi_y = 0; \quad \phi_z = -g,$$

где g – ускорение силы тяжести.

Подставляя указанные соотношения в уравнения Эйлера (3-6) и учитывая дополнительно равенство (3-8), получаем следующую систему уравнений, отнесенную к единице массы рассматриваемой воды:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}; \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15-5}$$

Пренебрежем атмосферным давлением (положим, что $p_a = 0$). Учитывая, что для точек дна потока величина $z = 0$, а для точек свободной поверхности потока, лежащей на данной вертикали $z = h$, получаем, после интегрирования 3-го уравнения системы (15-5) по координате z, следующую зависимость

$$p = (h - z)\gamma, \tag{15-6}$$

где z – координата любой точки, намеченной на рассматриваемой вертикали (возвышение точки над дном); p – гидродинамическое давление в этой точке. Ясно, что согласно (15-6), давление в точке свободной поверхности $p = 0$, а давление в точке у дна (для которой $z = 0$) равняется

$$p = \gamma h. \tag{15-7}$$

Как видно из (15-6), *для описанной выше модели Бернадского гидродинамическое давление p изменяется вдоль любой вертикали, намеченной внутри потока, согласно гидростатическому закону* (что уже отмечалось выше).

Рассматривая любую точку потока, взятую на той или другой вертикали, подставляем величину p, определяемую равенством (15-6), в первые два уравнения системы (15-5); при этом, учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, получаем два искомых уравнения динамического равновесия (относящихся к любой точке плана потока):

$$\left.\begin{aligned} &\text{(II)} & v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -g\frac{\partial h}{\partial x}; \\ &\text{(III)} & v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} &= -g\frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{15-8}$$

3°. Общие замечания о решении дифференциальных уравнений (I), (II) и (III). Полученные выше три уравнения (I), (II) и (III) представляют собой системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$v_x = f_1(x, y); \; v_y = f_2(x, y); \; h = f_3(x, y). \tag{15-9}$$

Эта система впервые была получена Н. Т. Мелещенко в 1940 г.[1]

Решив данную систему уравнений, будем иметь возможность при заданных пограничных условиях построить для случая, когда у боковых стенок отсутствуют водоворотные области, свободную поверхность потока и найти средние скорости v в любой точке плана потока.

---

[1] См. Н. Т. Мелещенко. Плановая задача гидравлики открытых водотоков.– Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, т. 36, 1948 (статья составлена С. Н. Нумеровым на основе отчета Н. Т. Мелещенко по работе: «Разработка вопросов двухразмерной гидравлики в связи с изучением растекания потока в плане» во ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева в 1940 г.).

Анализ этой системы трех уравнений показывает, что способы решения ее оказываются различными для спокойного и для бурного движения:

в случае спокойного движения (когда $h > h_к$) данная система приводится к уравнению эллиптического типа, причем решение задачи об отыскании скоростей v в различных точках плана потока иногда может быть осуществлено при помощи метода конформных отображений;

в случае бурного движения (когда $h < h_к$) данная система приводится к уравнению гиперболического типа, причем для решения задачи могут применяться специальные графоаналитические методы.

Приведем еще следующие дополнительные общие указания в отношении двух указанных случаев.

1. Спокойное движение. Как было отмечено (в § 15-1), специальные исследования показывают, что в этом случае, как правило, не представляется возможным пренебрегать потерями напора. Существуют два метода учета сил сопротивления:

а) первый метод, согласно которому силы сопротивления рассматриваются как силы объемные, равномерно распределенные по глубине и исчисляемые по формуле Шези; этот метод был использован С. Н. Нумеровым,[1] который показал, что при рассмотрении поставленного вопроса данная задача с некоторым приближением может быть решена при помощи метода ЭГДА (см. § 18-11);

б) второй метод, согласно которому силы сопротивления рассматриваются как силы поверхностные, исчисляемые также по формуле Шези и в соответствующих случаях с учетом турбулентных касательных напряжений; по этому пути шел Н. М. Бернадский, причем он записывал уравнения (I), (II) и (III) применительно к криволинейным осям координат (одна ось направлена вдоль линии тока, другая – вдоль живого сечения в плане).

2. Бурное движение. В данном случае очень часто можно пренебрегать силами сопротивления (трения), что мы выше и делали. Здесь для решения задачи, согласно предложению Н. Т. Мелещенко, может быть использован особый разработанный им графоаналитический метод, аналогичный методу характеристик, примененному С. А. Христиановичем для решения задачи неустановившегося движения (см. § 9-14). Заметим, что имеются предложения отдельных авторов (С. Н. Нумерова, Ф. И. Франкля, Б. Т. Емцева), позволяющие при рассмотрении бурных потоков учитывать силы сопротивления и относительно небольшие уклоны дна русла. Н. Т. Мелещенко дал точное решение одного частного случая планового бурного движения жидкости (при $i = 0$), когда это движение можно рассматривать как потенциальное.

§ 15-3. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЛАНОВЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим две особенности плановых потоков.

1°. О распространении волн возмущения, возникающих на свободной поверхности потока, в случае спокойного и в случае бурного движений. В гл. 9, В были рассмотрены «волны перемещения», возникающие при особых условиях на свободной поверхности безнапорного неустановившегося потока. Было отмечено, что эти волны могут быть: а) или положительными; лоб этих волн оказывается ограниченным почти вертикальной плоскостью; б) или отрицательными; лоб таких волн оказывается пологим (см., например, рис. 9-30, *в, г*). В § 9-15 было указано, что при движении идеальной жидкости относительная скорость c перемещения лба волны (по отношению к движущейся или покоящейся воде) может быть с некоторым приближением в случае, когда высота волны ξ мала сравнительно с глубиной потока h, принята

$$c = \sqrt{gh}. \tag{15-10}$$

[1] С. Н. Нумеров. К вопросу о построении плана спокойных течений. – Известия ВНИИГ, т. 42, 1950.

В дальнейшем указанные волны будем называть волнами возмущения, а скорость c — относительной скоростью распространения малых возмущений; лоб волны в плане будем именовать фронтом волны.

Представим на рис. 15-7 план потока воды, движущейся равномерно в широком прямоугольном русле, причем будем считать, что на рис. 15-7, *а* изображено спокойное движение (когда $v < c$; см. § 9-16), а на рис. 15-7, *б* — бурное движение (когда $v > c$).

Если в некоторой точке A рассматриваемого потока в момент времени t_0 мгновенно установим вертикальный тонкий стержень, то в этот момент t_0, благодаря набеганию воды на данный стержень, на свободной поверхности

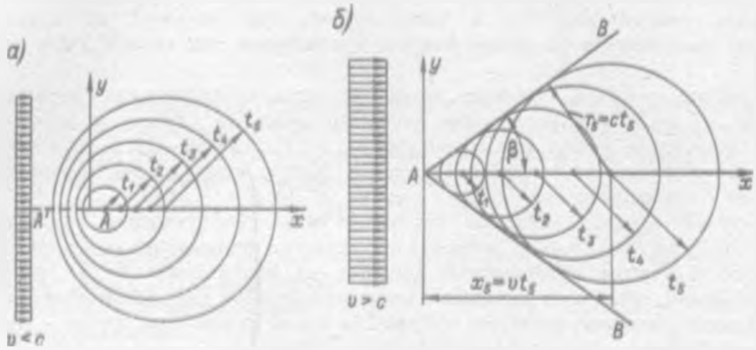


Рис. 15-7. Распространение волн возмущения на свободной поверхности потока: *а* — спокойное движение, *б* — бурное движение

потока в точке A возникает круговая (в плане) волна возмущения (будем считать ее положительной). Фронт этой положительной волны будет перемещаться (по отношению к воде, движущейся с продольной скоростью v) с относительными скоростями c, причем радиус данной круговой волны будет с течением времени увеличиваться.[1]

При этом для спокойного и для бурного потоков получим принципиально различные картины формирования (во времени) свободной поверхности потока:

а) при спокойном движении воды точки фронта круговой волны, лежащие на продольной оси $A'x$, будут перемещаться (в неподвижном пространстве): правая точка — по течению, со скоростью $v + c$, и левая точка — против течения, со скоростью $v - c$ (см. рис. 15-7, *а*, на котором отдельными окружностями представлены положения фронта рассматриваемой волны, отвечающие различным моментам времени t_1, t_2, t_3, t_4, t_5);

б) при бурном движении воды точки фронта круговой волны, лежащие на продольной оси Ax, будут перемещаться (в неподвижном пространстве) только по течению, с теми же скоростями: $v + c$ и $v - c$ (см. рис. 15-7, *б*, где отдельные окружности являются фронтами отдельных круговых волн возмущения, возникающих у стержня в различные моменты

---

[1] Указанный стержень является условной моделью, при помощи которой мы генерируем в точке A свободной поверхности возмущения ее в виде только положительной круговой в плане волны (или в виде положительных круговых в плане волн). В действительности положительная волна возникает только перед стержнем; за стержнем будет образовываться отрицательная пологая волна, которая, однако, будет также распространяться со скоростью c в радиальном направлении.

времени; в частности, волна, зародившаяся у стержня в момент времени t_0, по истечении отрезка времени t_5, будет иметь вид окружности, отмеченной на рисунке, t_5; волна же зародившаяся у стержня в момент t_1, по истечении отрезка времени t_4, будет иметь вид окружности t_4).

В свете сказанного, легко видеть следующее (рис. 15-7):

а) в случае спокойного движения фронт одной волны, возникшей в точке A, по истечении продолжительного времени t уйдет за пределы интересующей нас области, и в пределах этой области мы не будем иметь на свободной поверхности какой-либо волны; здесь останется только некоторая местная установившаяся деформация свободной поверхности, обусловленная набеганием воды на вертикальный стержень, находящийся в точке A;

б) в случае бурного движения на свободной поверхности потока должна установиться по линиям AB (при наличии стержня в точке A) стационарная волна: ее фронт и ее высота в разных точках фронта будут неизменными во времени. Лобовая поверхность данной стационарной волны является поверхностью, огибающей круговые волны возмущения, постоянно возникающие в точке A и сносимые потоком вниз по течению. Можно сказать, что лоб AB указанной стационарной волны является установившейся волновой границей, вдоль которой движутся непрерывно возникающие в точке A волны возмущения. Исходя из сказанного выше, легко найти величину угла β, определяющего направление фронта AB стационарной волны (см. рис. 15-7, *б*):

$$\sin\beta = \frac{r_5}{x_5} = \frac{ct_5}{vt_5} = \frac{c}{v}. \tag{15-11}$$

Как видно, в случае $v = c$ величина β оказывается равной 90°.

Поясненная стационарная волна называется косой волной (в данном примере положительной). Фронт AB этой косой волны иногда называют линией возмущения, а угол β – волновым углом.

Не следует смешивать стационарную косую волну на поверхности воды с круговыми волнами возмущения, зарождающимися в точке A.

2°. Об изменении скорости v и глубины h вдоль расширяющихся и вдоль сужающихся в плане потоков при спокойном и при бурном движениях. Рассмотрим элементарную струйку планового потока (модели Бернадского), ограниченную двумя близко расположенными поверхностями тока (см. рис. 15-2 или 15-4, *а*). Переменную (вдоль течения) ширину этой струйки обозначим через b_0; тогда расход δQ данной струйки можно представить в виде

$$\delta Q = b_0 hv. \tag{15-12}$$

Для установившегося движения величина δQ должна оставаться постоянной вдоль струйки.

Из выражения (15-2) легко можно получить следующие зависимости:

$$h = Э - \frac{v^2}{2g} = \frac{2gЭ - v^2}{2g}; \tag{15-13}$$

$$2gЭ = 2c^2 + v^2, \tag{15-14}$$

где c – скорость распространения малых возмущений, определяемая по формуле (15-10).

Подставляя (15-13) и (15-12), находим ширину элементарной струйки

$$b_0 = \frac{\delta Q}{hv} = \frac{2g\delta Q}{2gЭv - v^3}. \tag{15-15}$$

Для движения идеальной жидкости в прямоугольном горизонтальном русле величина «удельной энергии вертикали» Э должна оставаться одинаковой для всех точек плана потока. Имея это в виду, заключаем, что ширина b_0, согласно (15-13), зависит только от одной переменной величины — от скорости v.

Возьмем производную выражения (15-15) по v, учтя зависимости (15-13) и (15-14):

$$\frac{db_0}{dv} = -4g\delta Q \frac{(c^2 - v^2)}{(2gЭv - v^3)^2}. \tag{15-16}$$

Выражение (15-16) показывает, как с изменением (вдоль потока) скорости v (а следовательно, и с изменением площади живого сечения элементарной струйки $\omega_0 = \delta Q : v$) изменяется ширина элементарной струйки b_0.

Пользуясь зависимостью (15-16) и учитывая, что знаменатель правой части ее всегда положителен, можно доказать справедливость следующих важных положений, относящихся к целому потоку идеальной жидкости, движущейся в прямоугольном горизонтальном русле:

1-е положение. В случае спокойного движения ($v < c$) имеем, согласно (15-16),

$$\frac{db_0}{dv} < 0;$$

следовательно:

а) для расширяющегося по течению русла, когда имеем также и расширяющиеся по течению элементарные струйки ($db_0 > 0$), скорость v должна уменьшаться по течению ($dv < 0$), а глубина h и площадь живого сечения потока ω должна увеличиваться по течению;

б) для сужающегося по течению русла ($db_0 < 0$) получаем обратную картину: скорость v увеличивается ($dv > 0$), а глубина h и площадь ω уменьшаются (по течению);

2-е положение. В случае бурного движения ($v > c$) имеем, согласно (15-16):

$$\frac{db_0}{dv} > 0;$$

следовательно:

а) для расширяющегося по течению потока ($db_0 > 0$) скорость должна увеличиваться по течению ($dv > 0$), а глубина h и площадь живого сечения ω — уменьшаться по течению;

б) для сужающегося по течению потока ($db_0 < 0$) получаем обратную картину: скорость v должна уменьшаться ($dv < 0$), а глубина h и площадь живого сечения ω должны увеличиваться (по течению).

§ 15-4. ОБТЕКАНИЕ ПОТОКОМ БОКОВОЙ СТЕНКИ РУСЛА, ИМЕЮЩЕГО ПОВОРОТ В ПЛАНЕ

В качестве только примера использования теории «плановой задачи» в практике, рассмотрим вопрос о формировании свободной поверхности потока идеальной жидкости при обтекании ею боковой вертикальной стенки (при уклоне дна $i = 0$), имеющей малый угол $\Delta\theta$ поворота в плане (рис. 15-8).[1] Как ясно

[1] Дополнительные примеры использования данной теории (обтекание одной криволинейной стенки, построение плана свободной поверхности потока в прямоугольном русле ограниченной ширины, поворот бурного потока на угол $\Delta\theta$ и т. п.) — см. [15-4, с. 459 – 465].

из предыдущего, этот поворот (как и стержень, рассмотренный в § 15-3) должен порождать волны возмущения малой высоты.

Предварительно отметим, что пологий лоб отрицательной волны возмущения (см. § 15-3, п. 1°) в случае небольшой ее высоты для расчета можно заменить (с некоторым приближением) вертикальным. При таком допущении анализ формирования свободной поверхности плановых потоков в руслах различной формы значительно упрощается. Разумеется, результаты такого анализа, будучи отнесенными к отрицательным волнам, имеющим сравнительно большую длину, могут рассматриваться как справедливые только в качественном (но не в количественном) отношении.

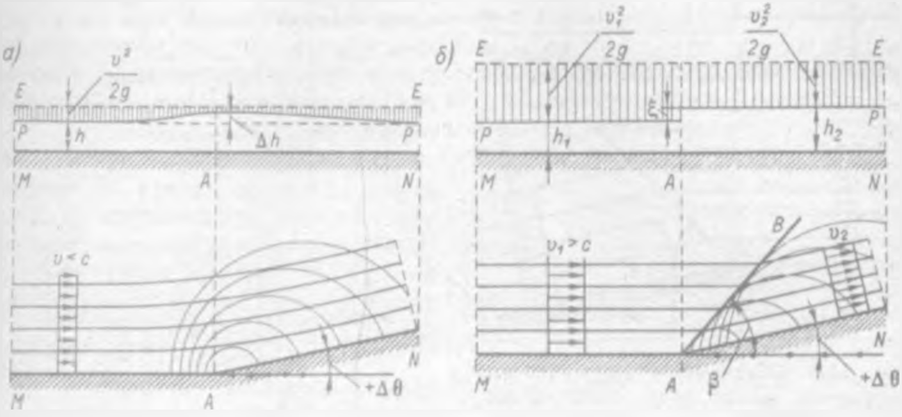


Рис. 15-8. Обтекание спокойным (*а*) и бурным (*б*) потоком внутреннего тупого угла

1°. Обтекание спокойным и бурным потоком внутреннего тупого угла, образованного в плане боковой стенкой. Рассмотрим равномерное течение воды вблизи твердой боковой вертикальной стенки MAN, имеющей малый угол поворота $+\Delta\theta$ в плане (рис. 15-8). Здесь для спокойного и бурного движений воды получим принципиально разные виды свободной поверхности установившегося потока.

При спокойном движении фронт, зародившейся в точке A (в момент времени t_0) волны возмущения, по истечении продолжительного времени t уйдет (так же как и в случае вертикального стержня на рис. 15-7, *а*) за пределы интересующей нас области, причем в районе точки A останется некоторый подпор величиной Δh (см. продольный разрез потока на рис. 15-8, *а*). Этот небольшой подпор при рассмотрении установившегося движения (оставшийся после того, как неустановившаяся волна возмущения уйдет на большое расстояние от точки A) может быть объяснен как следствие действия центробежных сил плавно поворачивающихся струек, а также еще тем, что скорость v в точке A несколько уменьшается.

В случае бурного движения картина получается аналогичной, представленной на рис. 15-7, *б*. Можно считать, что здесь в точке A (рис. 15-8, *б*) постоянно зарождаются волны (такие же как и в случае стержня, показанного на рис. 15-7, *б*), которые сносятся по течению, причем в конечном счете по линии AB возникает установившаяся (неизменная во времени) положительная косая волна (см. продольный разрез потока на рис. 15-8, *б*). Направление (в плане) фронта косой волны AB (вдоль которой движутся волны возмущения, зарождающиеся в точке A) определяется волновым углом β:

$$\sin\beta = \frac{c}{v_1}, \qquad (15\text{-}17)$$

где v_1 – скорость потока перед косой волной. Что касается высоты волны ξ (малой величины), то эта высота может быть найдена из уравнения количества движения (особым образом использованного), которое приводит нас к следующей расчетной формуле:

$$\xi = \frac{v_1^2}{g}(\Delta\theta)\operatorname{tg}\beta. \qquad (15\text{-}18)$$

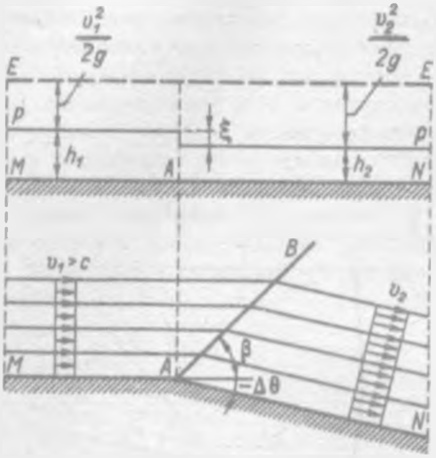


Рис. 15-9. Обтекание бурным потоком наружного тупого угла, образованного боковой стенкой русла

2°. Обтекание бурным потоком наружного тупого угла, образованного в плане боковой стенкой. При тех же условиях, что и в п. 1°, рассмотрим боковую стенку MAN, представленную на рис. 15-9. Условимся в данном случае угол $\Delta\theta$ считать отрицательным.

В отличие от схемы на рис. 15-8,*б*, на рис. 15-9 вдоль фронта AB, направление которого определяется формулой (15-17), получим косую установившуюся отрицательную волну (см. продольный разрез потока); высота ее определяется по формуле (15-18).

Можно показать, что при обтекании бурным потоком внутреннего тупого угла (рис. 15-8,*б*) происходит сужение в плане элементарных струек потока, а следовательно, и увеличение удельных расходов q. Наоборот, при обтекании бурным потоком наружного тупого угла (рис. 15-9) происходит расширение в плане элементарных струек, а следовательно, уменьшение удельных расходов q.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

15-1. **Емцев Б. Т.** Двухмерные бурные потоки. – М.: Энергия, 1967.

15-2. **Сунцов Н. Н.** Методы аналогий в аэрогидродинамике. – М.: Физматгиз, 1958.

15-3. **Сухомел Г. И.** Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1949.

15-4. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика. – Л.: Энергия, 1975.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

§ 16-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

В области, которая может быть названа «*моделированием*», относящимся к исследованию тех или других физических явлений (в нашем случае – к исследованию движения жидкости), необходимо различать два совершенно различных вида моделирования:

1-й вид моделирования — так называемое *физическое моделирование*: в этом случае на модели воспроизводится изучаемое явление (оригинал, натура) с сохранением его физических свойств; например, в натуре мы имеем плотину, под которой фильтрует вода; модель здесь представляет собой плотину (созданную в некотором масштабе), под которой также фильтрует вода (физическое содержание процесса, имеющего место в натуре и на модели — одинаково: в порах грунта движется вода и в натуре, и на модели);

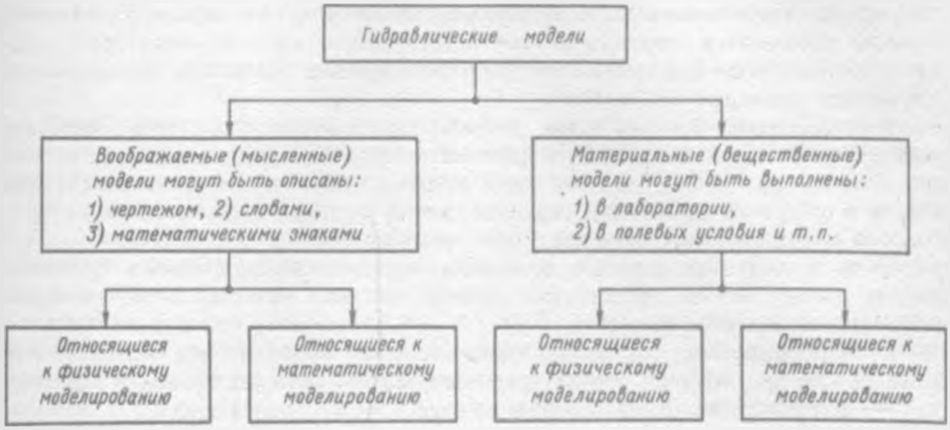


Рис. 16-1. Гидравлические модели

2-й вид моделирования — так называемое *математическое моделирование*: в этом случае исследование натурных состояний или процессов выполняется путем изучения явлений, *имеющих иное физическое содержание*, однако описываемое теми же математическими зависимостями (которые описывают натурное явление); примером такого моделирования может являться моделирование отмеченной выше плотины, когда фильтрация воды под ней изучается при помощи метода ЭГДА — электрогидродинамической аналогии (см. § 18-1); здесь, обращаясь к модели, мы рассматриваем не движение воды, а постоянный электрический ток, учитывая при этом, что и ламинарное движение воды (под плотиной в натуре) и электрический ток в соответствующей области подчиняются одному и тому же математическому уравнению — уравнению Лапласа. К математическому моделированию следует отнести и расчеты тех или других процессов, выполняемые по специально составленным программам на ЭВМ. Действительно в этом случае рассматриваемое физическое явление подменяется и здесь некоторым другим процессом (иного физического содержания). Однако этот процесс, согласно используемой программе, построен на базе математических уравнений, относящихся к действительности (или к неполной воображаемой ее модели, см. ниже).

Наряду со сказанным в отношении видов моделирования следует различать еще две разных категории самих моделей:

1-я категория моделей — так называемые *воображаемые (мысленные) модели*, которые создаются человеком мысленно — в его воображении; к числу таких моделей, как мы говорили ранее, относятся, например: а) модель идеальной жидкости (см. § 1-3), которой мы мысленно заменяем реальную жидкость; б) модель Рейнольдса — Буссинеска, о которой мы говорили в § 4-6; в) модель Бернадского (см. § 15-1); г) модель Форхгеймера, которая будет описана в § 17-1, и т. д. Обычно воображаемые модели являются *неполными*: они не полностью отражают действительность (в той или иной мере упрощая ее), поэтому такие модели иногда называем «идеальными телами» или соответственно «идеальными процессами» («идеальными» в том смысле, что в природе такого рода тел или процессов не существует). Исследуя теоретически (т. е. безэкспериментально) те или другие «идеальные» тела или процессы, мы, разумеется, можем получать результаты иногда недостаточно приближающиеся к тем результатам, которые должны относиться к действительным реальным телам (или реальным процессам). Поэтому в результаты, полученные теоретическим (безэкспериментальным) путем для воображаемой модели, приходится вводить в соответствующих случаях некоторые поправочные коэффициенты (устанавливаемые, например, на основании специально проведенных опытов);

2-я категория моделей – так называемые *материальные* (*вещественные*) *модели*, представляющие собой воспроизведенные (в определенном масштабе) при помощи различных материальных средств соответствующие конструкции или те или другие процессы, имеющие место в действительности (в натуре), с целью изучения таких процессов (или состояний).[1]

Имея в виду приведенные пояснения, вопросы моделирования (рассмотренные выше) можно представить схемой на рис. 16-1. Из этой схемы, в частности, видно следующее:

1) «воображаемая (мысленная) модель» может быть описана чертежом или словами или при помощи соответствующих математических знаков и записей;

2) «материальная (вещественная) модель» может быть создана в лаборатории или «в полевых условиях» и т. п.;

3) как воображаемые, так и материальные модели могут относиться как к физическому, так и к математическому моделированию.

В настоящей главе будем рассматривать только «материальное физическое моделирование» (рис. 16-1).

Ранее мы уже видели, что многие гидравлические формулы были получены на основании опытов, проводимых с использованием материальных моделей.

Опыты с такими моделями приходится проводить не только в связи с необходимостью получить те или другие общие экспериментальные расчетные зависимости или с целью проверки тех или других теоретических соображений. Достаточно часто в современных условиях при помощи материального физического моделирования приходится уточнять соответствующие проектные данные, относящиеся к определенному конкретному сооружению.

Существуют сложные гидротехнические сооружения, которые вообще не поддаются с достаточной степенью точности обычному теоретическому расчету (различные гидроузлы, водозаборы и т. п.) При составлении проекта таких сооружений часто обращаются к так называемому «лабораторному проектированию». При этом в лаборатории создают модель (материальную) рассматриваемого сооружения; через построенную модель пропускают воду и измеряют различные величины (давления, скорости и т. п.); полученные таким образом для модели величины переносят на действительное сооружение.

При выполнении такого рода работ возникает целый ряд вопросов: как следует в лаборатории строить модель сооружения (какие размеры ей следует придавать, какую шероховатость стенок должно иметь «модельное русло» и т. п.); какие значения v и Q следует задавать на модели, если она в определенное

[1] Дополнительно к сказанному выше отметим, что существует еще широко распространенный термин «*математическая модель*»; об этом термине см. сноску на стр. 5.

число раз меньше действительного сооружения; каким образом данные, полученные в лаборатории для модели, следует переносить на действительное сооружение и т. п. Всеми этими вопросами занимается теория так называемого физического моделирования (точнее говоря, «материального физического моделирования»).

Основой такого моделирования (относящегося к механике жидкости) является «теория подобия», которая опирается на учение о размерности физических величин. Имея это в виду, рассмотрим прежде всего вопрос о механическом подобии двух механических (гидравлических) систем («модели» и «натуры»), представляющих собой движущиеся сплошные среды.

§ 16-2. ПОНЯТИЕ О ПОДОБИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Представим себе две геометрически подобные фигуры. Условимся сходственными точками двух этих фигур называть точки, одинаково расположенные по отношению к границам этих фигур.

Рассматривая физическое моделирование, должны считать, что в сходственных точках «натуры» и «модели» на частицы жидкости (сплошной среды) действуют силы одной и той же физической природы (так называемые одноименные силы).

Вообще говоря, физически подобными явлениями называются явления одной и той же физической природы, для которых все характерные величины подобны: в сходственных точках натуры и модели и в соответственные моменты времени для подобных явлений все векторные величины должны быть геометрически подобными, все же скалярные величины – соответственно пропорциональны. Поясним это положение подробнее.

При физическом моделировании гидравлических явлений с использованием материальных моделей, удобно различать геометрическое, а также кинематическое и динамическое подобия.

1. Геометрическое подобие. Две гидравлические системы (два гидравлических явления) будут геометрически подобными в том случае, если между сходственными размерами этих систем всюду существует постоянное соотношение:

$$\frac{l_м}{l_н} = a_l = \text{const}, \tag{16-1}$$

где $l_н$ – некоторый размер действительного сооружения (натуры); $l_м$ – сходственный размер модели; a_l – масштаб длин.

Для геометрически подобных систем

$$\frac{\omega_м}{\omega_н} = a_l^2, \quad \frac{V_м}{V_н} = a_l^3, \tag{16-2}$$

где $\omega_н$, $V_н$ – некоторая площадь и некоторый объем, относящиеся к действительному сооружению; $\omega_м$, $V_м$ – сходственные площадь и объем модели.[1]

2. Кинематическое подобие. Две гидравлические системы будут кинематически подобными, если:

а) траектории движения сходственных частиц жидкости обеих систем, геометрически подобны и одинаково ориентированы по отношению к границам этих систем;

[1] Как здесь, так и ниже величины, относящиеся к действительному сооружению (к натуре), отмечаются индексом «н», а относящиеся к модели, – индексом «м».

б) скорости u и ускорения w в сходственных точках в соответственные моменты времени всюду связаны постоянными соотношениями:

$$\frac{u_{м}}{u_{н}} = a_{u} = \text{const (по всему объему)}, \tag{16-3}$$

$$\frac{w_{м}}{w_{н}} = a_{w} = \text{const (по всему объему)}, \tag{16-4}$$

т. е. величина a_u (м а с ш т а б с к о р о с т и), а также величина a_w (м а с ш т а б у с к о р е н и я) одинаковы для любой пары сходственных точек в определенный момент времени.

Подчеркнем, что кинематически подобные системы всегда будут геометрически подобными системами.

В связи с кинематическим подобием возникает понятие м а с ш т а б а в р е м е н и

$$\frac{t_{м}}{t_{н}} = a_{t}, \tag{16-5}$$

где $t_н$ и $t_м$ – промежутки времени, в течение которых протекают соответственные явления в натуре и на модели. Если какая-либо частица жидкости в действительных условиях прошла за время $t_н$ некоторый путь $l_н$ (описала кривую $l_н$), то сходственная частица модели за время $t_м$ должна пройти путь $l_м$ (описать кривую $l_м$), причем кривая $l_м$ должна быть геометрически подобна кривой $l_н$ и ориентирована по отношению к границам системы так же, как и кривая $l_н$.

Для кинематически подобных систем

$$a_t = \text{const (по всему объему)}. \tag{16-6}$$

3. Д и н а м и ч е с к о е п о д о б и е. Две гидравлические системы будут динамически подобными, если:

а) в любой паре сходственных точек действуют одноименные силы;

б) соотношение величин соответствующих сил для любой пары сходственных точек одинаково по всему объему обеих рассматриваемых гидравлических систем, т. е. масштаб сил:

$$a_F = \frac{F_{м}}{F_{н}} = \text{const (по всему объему)}, \tag{16-7}$$

где через F обозначена любая сила, действующая на жидкость;

в) силы, действующие на первую гидравлическую систему, ориентированы относительно друг друга и относительно границ системы так, как и силы, действующие на вторую гидравлическую систему.

Очевидно, при соблюдении указанных условий мы получаем следующее: для двух динамически подобных систем (например, для натуры и модели) замкнутые многоугольники сил, построенные для любой пары сходственных точек натуры и модели, получаются геометрически подобными, причем отношение размеров этих многоугольников сил всюду (по всему объему) оказывается одинаковым.

Можно сказать, что *динамически подобными системами будут такие, для которых векторные поля сил, действующих на жидкость, образованы одноименными, силами, причем эти поля являются геометрически подобными и одинаково ориентированными относительно границ систем.*

Динамическое подобие может иметь место только при наличии кинематического, а следовательно, и геометрического подобия. Как видно, динамическое подобие предопределяет существование кинематического подобия. Поэтому динамически подобные системы являются механически подобными системами. Иногда такого рода системы, относящиеся к жидкости, называют гидродинамически подобными.

В связи с вопросом о динамическом подобии возникает понятие масштаба плотности жидкости:

$$a_\rho = \frac{\rho_м}{\rho_н}. \tag{16-8}$$

Важно подчеркнуть, что для динамически подобных систем часто получаем следующие соотношения:

а) для коэффициентов сопротивления ζ

$$\zeta_м = \zeta_н; \tag{16-9}$$

б) для коэффициентов гидравлического трения λ

$$\lambda_м = \lambda_н; \tag{16-10}$$

в) для коэффициентов Шези C

$$C_м = C_н. \tag{16-11}$$

Отсюда видно, что для такого рода динамически подобных систем масштабы коэффициента сопротивления (a_ζ), коэффициента гидравлического трения (a_λ), коэффициента Шези (a_C) равны единице:

$$a_\zeta = a_\lambda = a_C = 1. \tag{16-12}$$

Действительно, рассматривая для примера безнапорное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления, имеем, согласно Шези,

$$v_н = C_н \sqrt{R_н J_н};$$

$$v_м = C_м \sqrt{R_м J_м}$$

Так как для геометрически подобных систем (при безнапорном движении) $J_н = J_м$, то

$$\frac{v_м}{v_н} = \frac{C_м}{C_н}\sqrt{\frac{R_м}{R_н}} = \frac{C_м}{C_н}\sqrt{a_l}.$$

С другой стороны, как будет показано ниже, для динамически подобных систем, запроектированных для квадратичной области сопротивления, всегда должно иметь место условие

$$\frac{v_м}{v_н} = \sqrt{a_l}.$$

Подставляя это равенство в предыдущее, получаем (16-11). Учитывая теперь соотношения (4-97) и (5-14), видим, что при наличии равенства (16-11) соотношения (16-10) и (16-9) являются также справедливыми.

Имея это в виду при создании в лаборатории модели сооружения стремятся сделать ее так, чтобы поток, получающийся в лаборатории, был динамически подобен действительному потоку. Величины ζ, λ, C, найденные для такой модели, часто можно без всякого изменения переносить на натуру.

Естественно, возникает вопрос, каким образом следует проектировать модель потока, чтобы она получилась динамически подобной действительному потоку. Этот вопрос осложняется тем, что величины сил, скоростей, давлений и других параметров, обычно бывают неизвестны для различных точек интересующей нас области, так как отыскание этих величин и является целью создания модели и проведения на ней соответствующих измерений.

Чтобы добиться при таких условиях динамического подобия, поступают следующим образом:

а) создают модель русла, геометрически подобную действительному руслу;

б) на одной из границ модельного потока в начальный момент времени задают соответствующие геометрические и кинематические параметры, подобные известным параметрам, имеющимся на сходственной границе действительного потока;[1]

в) жидкость, применяемую в опытах, выбирают с такими физическими характеристиками (ν, ρ, γ), чтобы на фиксируемой границе потока имело место динамическое подобие.

Как видно, здесь предполагают, что поскольку физическое явление в натуре и на модели описывается одними и теми же математическими уравнениями, то при наличии подобных граничных и начальных условий мы воспроизводим в геометрически подобном русле модели явление, динамически подобное искомому. Заметим, что подобие граничных условий для модели слагается из подобия следующих величин на границе модельного потока: глубин, скоростей[2] и давлений (для напорных систем).

Надо, однако, подчеркнуть, что, как видно будет из дальнейшего, следуя указанному *теоретически обоснованному* пути моделирования, нам *практически* далеко не всегда удается создать модель, динамически подобную натуре. Поэтому часто приходится отклоняться от такого теоретического пути и прибегать к различным «условным» методам моделирования, описанным ниже (применять модели, построенные в искаженном масштабе и т. п.).

Судить о динамическом подобии двух систем (см. выше п. «в») путем измерения и сравнения между собой сил, действующих на эти системы, практически неудобно и даже невозможно. Вместе с тем легко видеть, что соотношение сил, действующих в натуре и на модели, может быть установлено *косвенно*: по имеющимся масштабам длины, скорости и плотности жидкости, т. е. по соотношению величин, легко поддающихся измерению.

Принимая такой косвенный метод оценки динамического подобия, пользуемся так называемыми *критериями динамического подобия*.

§ 16-3. КРИТЕРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

В общем случае на движущуюся несжимаемую вязкую жидкость действуют следующие силы:

1) объемная внешняя сила тяжести G;

2) поверхностные (внешние и внутренние) силы гидродинамического давления P;

3) поверхностные (внешние и внутренние) силы трения (вязкости) T.

Геометрическая сумма указанных сил, согласно началу Даламбера, может быть представлена в виде

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{I} = 0, \tag{16-13}$$

где $\vec{I}$ – сила инерции,

[1] Предполагается, что граничные условия для действительного потока при решении поставленной задачи должны быть заданы.

[2] Необходимо иметь подобие эпюр скоростей.

$$\vec{I} = -M\vec{w}, \tag{16-14}$$

причем здесь M – масса выделенного объема жидкости, w – ускорение.

При заданных граничных условиях можно считать, что в данной точке жидкости сила давления P целиком определяется силами G, T и I:

$$\vec{P} = f(\vec{G}, \vec{T}, \vec{I}); \tag{16-15}$$

поэтому (16-13) можно переписать в виде:

$$\vec{G} + \overrightarrow{f(G, T, I)} + \vec{T} + \vec{I} = 0. \tag{16-16}$$

Для различных частных случаев уравнение движения (16-16) может упроститься в связи с тем, что некоторые силы, входящие в него, оказываются или равными нулю, или получают пренебрежимо малую величину сравнительно с другими силами. Например, при параллельно-струйном установившемся движении сила инерции $I = 0$; при напорном движении в трубопроводе эффект действия собственного веса G рассматриваемого объема жидкости по сравнению с эффектом действия сил давления P оказывается ничтожным, и потому сила G из уравнения (16-16) может быть исключена; в этом уравнении останутся только силы T и I; при ламинарном движении силы I часто могут оказаться пренебрежимо малыми сравнительно с силами T; при турбулентном безнапорном движении воды благодаря весьма низкой ее вязкости силы трения T оказываются настолько малыми по сравнению с другими силами, что в уравнении (16-16) силами T можно пренебречь, и т. д. Рассмотрим сперва простейшие случаи, когда на исследуемую жидкость действует только одна система определяющих сил (не считая сил инерции); при этом ограничимся рассмотрением только таких условий движения, при которых силы инерции соизмеримы с силами тяжести или силами внутреннего трения.

1°. Случай, когда на жидкость действуют только силы тяжести (рис. 16-2). В этом случае в уравнение (16-16) будут входить только сила G и сила инерции I.

Для достижения динамического подобия двух систем («натуры» и «модели»), изображенных на рис. 16-2, надо требовать, чтобы треугольники сил, показанных на схемах *а* и *б*, были геометрически подобными.

Чтобы обеспечить подобие указанных треугольников сил, необходимо:

а) кинематическое подобие двух рассматриваемых систем, так как именно это условие обеспечит равенство углов, образованных силами G и I на рис. 16-2, *а* и *б*; напомним, что требуя кинематического подобия, мы тем самым требуем и геометрического подобия;

б) соблюдение равенства

$$\frac{I_м}{G_м} = \frac{I_н}{G_н}, \tag{16-17}$$

или, что то же,

$$\frac{I_м}{I_н} = \frac{G_м}{G_н} = a_F, \tag{16-18}$$

где a_F – масштаб сил.

Как видно, *масштаб сил* в данном случае *равен отношению сил инерции, вычисленных для модели и для натуры.*

Согласно (16-14),

$$[I] = [\rho] L^3 \frac{[u]}{t} = [\rho] L^2 \frac{L}{t}[u] = [\rho] L^2 [u^2], \tag{16-19}$$

где L и t – символы длины и времени.[1]

Поэтому масштаб сил a_F, обеспечивающий динамическое подобие, данном случае будет[2]

$$a_F = \frac{I_м}{I_н} = \frac{\rho_м l_м^2 u_м^2}{\rho_н l_н^2 u_н^2}, \quad (16\text{-}2$$

где $l_н$ и $l_м$ – какие-либо сходственные линейные размеры натуры и модели.

Размерность силы тяжести можно представить в виде

$$[G] = [\gamma] L^3 = [\rho][g] L^3; \quad (16\text{-}2$$

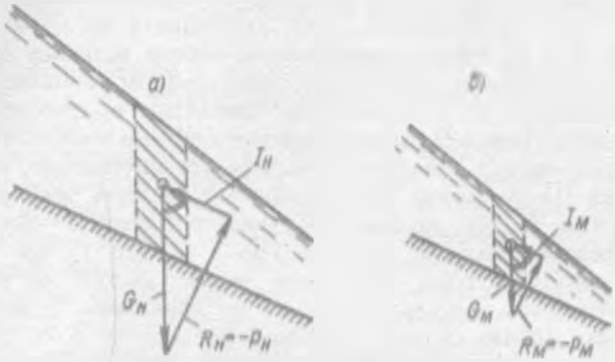


Рис. 16-2. Схема сил, действующих на элементарный объем жидкости: *а* – натура, *б* – модель

следовательно,

$$\frac{G_м}{G_н} = \frac{\rho_м g_м l_м^3}{\rho_н g_н l_н^3}. \quad (16\text{-}22)$$

Учитывая соотношения (16-20) и (16-22), можем написать, согласно (16-18),

$$\frac{\rho_м l_м^2 u_м^2}{\rho_н l_н^2 u_н^2} = \frac{\rho_м g_м l_м^3}{\rho_н g_н l_н^3}. \quad (16\text{-}23)$$

Как видно, для достижения динамического подобия, когда на жидкость действует только сила G (а также сила инерции I), необходимо требовать, помимо соблюдения кинематического подобия, еще и соблюдения равенства (16-23), которое можно переписать в виде

$$\frac{u_м^2}{u_н^2} = \frac{g_м l_м}{g_н l_н}. \quad (16\text{-}24)$$

Отсюда вместо (16-23) получаем

$$\frac{u_м^2}{g_м l_м} = \frac{u_н^2}{g_н l_н}, \quad (16\text{-}25)$$

---

[1] Квадратные скобки в соотношении (16-19) и других указывают, что нас интересует здесь не численное значение, а размерность соответствующих величин.

[2] Для двух динамически подобных систем (натуры и модели) справедливость перехода от соотношения (16-19) к соотношению (16-20), где вместо символов, выражающих размерность отдельных величин, проставлены сами величины, может быть строго обоснована (этого обоснования здесь не приводим).

где u – скорость в данной точке; l – какой-либо линейный размер; g – ускорение силы тяжести.

Следует подчеркнуть, что величина

$$\boxed{\frac{u^2}{gl} = \mathrm{Fr}\ (\text{обозначение})} \tag{16-26}$$

является безразмерной и представляет собой меру отношения сил инерции к силам тяжести. Эту величину принято называть числом Фруда.

Таким образом, *когда на жидкость действуют только силы тяжести, динамическое подобие будет иметь место, если существуют геометрическое и кинематическое подобия и если число Фруда, вычисленное для любой точки модели, оказывается равным числу Фруда, вычисленному для сходственной точки натуры,*

$$\boxed{(\mathrm{Fr})_м = (\mathrm{Fr})_н.} \tag{16-27}$$

Обратим внимание на то, что одно условие (16-27) говорит только (при наличии кинематического подобия) о подобии треугольников сил для любой пары сходственных точек. Для достижения же динамического подобия необходимо иметь еще равенство масштабов сил a_F для всех пар сходственных точек натуры и модели. Это последнее условие обеспечивается наличием геометрического подобия.

Действительно, соотношение (16-23) выражает величину a_F. Умножая это соотношение на величину $\rho_н l_н^2$ и деля на величину $\rho_м l_м^2$, получаем

$$a_F \frac{\rho_н l_н^2}{\rho_м l_м^2} = \frac{u_м^2}{u_н^2} = \frac{g_м l_м}{g_н l_н}.$$

Рассматривая далее только случаи, когда $\rho_м = \rho_н$ и $g_м = g_н$, полученное соотношение можем переписать в виде

$$a_F \frac{1}{a_l^2} = \frac{u_м^2}{u_н^2} = a_l,$$

откуда видно, что $a_F = a_l^3$. Для геометрически подобных систем $a_l = \mathrm{const}$ (по всему объему); следовательно, и величины a_F также должны быть одинаковыми для всех сходственных точек модели и натуры.

2°. Случай, когда на жидкость действуют только силы трения (вязкости). Здесь для соблюдения динамического подобия выражение, определяющее масштаб сил, должно остаться прежним [см. равенство (16-20)].

Считая, что силы трения подчиняются зависимости Ньютона (4-22), можем написать

$$[T] = [\eta] L^2 \frac{[u]}{L} = [\nu][\rho] L[u], \tag{16-28}$$

откуда получаем

$$\frac{T_м}{T_н} = \frac{\nu_м \rho_м l_м u_м}{\nu_н \rho_н l_н u_н}, \tag{16-29}$$

где $l_н$ и $l_м$ – какие-либо сходственные линейные размеры натуры и модели.

Приравнивая (16-29) соотношению (16-20), получаем

$$a_F = \frac{\rho_м l_м^2 u_м^2}{\rho_н l_н^2 u_н^2} = \frac{\nu_м \rho_м l_м u_м}{\nu_н \rho_н l_н u_н}. \tag{16-30}$$

Как видно, для достижения динамического подобия в случае, когда на жидкость действуют сила T и сила инерции I, необходимо требовать, помимо кинематического подобия, соблюдения равенства (16-30). Это последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{l_м u_м}{l_н u_н} = \frac{\nu_м}{\nu_н}, \tag{16-31}$$

или в виде

$$\frac{u_м l_м}{\nu_м} = \frac{u_н l_н}{\nu_н}, \tag{16-32}$$

где u – скорость в данной точке; l – какой-либо линейный размер, например диаметр трубы D или гидравлический радиус R и т. п.; ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости [см. зависимость (3-128)].

Следует подчеркнуть, что величина

$$\boxed{\frac{ul}{\nu} = \mathrm{Re}\ (\text{обозначение})} \tag{16-33}$$

является безразмерной и представляет собой меру отношения сил инерции к силам трения. С этой величиной мы сталкивались ранее и называли ее числом Рейнольдса (§ 3-23).

Таким образом, когда *на жидкость действуют только силы трения, динамическое подобие будет иметь место, если существует геометрическое и кинематическое подобие и если число Рейнольдса, вычисленное для любой точки модели, оказывается равным числу Рейнольдса, вычисленному для сходственной точки натуры:*

$$\boxed{(\mathrm{Re})_м = (\mathrm{Re})_н.} \tag{16-34}$$

3°. Критерии подобия. Предположим, что жидкость сжимаема, в связи с чем на нее действуют силы упругости; будем считать, что каких-либо других сил, действующих на жидкость, нет.

Рассуждая, как и выше, можно показать, что динамическое подобие для модели и натуры получится в том случае, если при наличии кинематического подобия так называемые числа Коши в сходственных точках модели и натуры будут одинаковыми.

Как видно, для достижения динамического подобия между моделью и натурой каждая система сил, действующих на жидкость, требует равенства в сходственных точках модели и натуры некоторого своего числа (числа Фруда, числа Рейнольдса и т. д.).

Эти безразмерные числа (Фруда, Рейнольдса, Коши и т. д.), равенство которых в сходственных точках модели и натуры указывает на наличие динамического подобия между моделью и натурой, называются критериями подобия.

4°. Критерии подобия, выраженные через среднюю скорость v. Будем рассматривать плавно изменяющееся движение, когда живые сечения можно считать плоскими. Будем далее полагать, что для сходственных живых сечений модели и натуры характер распределения скоростей u одинаков.

При этом для любой пары сходственных точек, намеченных на сходственных живых сечениях модели и натуры, можем написать

$$\frac{u_м}{v_м} = \frac{u_н}{v_н} = \beta\ (\text{обозначение}), \tag{16-35}$$

где $u_м$ и $u_н$ – местные скорости для упомянутых сходственных точек; $v_м$ и $v_н$ – средние скорости для упомянутых живых сечений.

Из уравнения (16-35) получаем

$$u_м = \beta v_м; \; u_н = \beta v_н. \tag{16-36}$$

Подставляя эти соотношения в (16-25) и (16-32) и сокращая величину β^2 и β получаем вместо (16-26) и (16-33) следующие выражения для чисел Фруда и Рейнольдса:

$$\boxed{\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{gl};} \tag{16-37}$$

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{vl}{\nu}.} \tag{16-38}$$

Как видно, пользуясь для оценки подобия вместо выражений (16-26) и (16-33) выражениями (16-37) и (16-38), необходимо требовать соблюдения д о п о л н и т е л ь н о г о условия; одинакового характера распределения скоростей u для модели и натуры в сходственных живых сечениях (в данный момент времени)[1].

Необходимо подчеркнуть, что в литературе встречается, что число Фруда представляют выражениями, отличающимися от формулы (16-37). Иногда числом Фруда называют о б р а т н у ю величину по отношению (16-37), т. е.

$$\mathrm{Fr}' = \frac{1}{\mathrm{Fr}} = \frac{gl}{v^2}, \tag{16-37'}$$

а также

$$\mathrm{Fr}_0 = \sqrt{\mathrm{Fr}} = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \tag{16-37''}$$

в частности,

$$\mathrm{Fr}_0 = \frac{v}{\sqrt{gh}} = \frac{v}{c}, \tag{16-37'''}$$

где h – глубина рассматриваемого безнапорного потока и $c = \sqrt{gh}$ – скорость движения лба волны перемещения, возникающей на поверхности безнапорного потока (см. § 9-15).

В некоторых случаях, рассматривая б е з н а п о р н о е   д в и ж е н и е, вместо числа Фруда пользуются так называемым п а р а м е т р о м   к и н е т и ч н о с т и   п о т о к а $ПК$, который представляет собой отношение удвоенной кинетической энергии к средней (в данном живом сечении) глубине h безнапорного потока:

$$ПК = 2\,\frac{\alpha v^2/(2g)}{\bar{h}} \approx \frac{v^2}{g\bar{h}} = \mathrm{Fr}_{\bar{h}},$$

где $\mathrm{Fr}_{\bar{h}}$ – число Фруда (16-37), выраженное через характерный размер $l = \bar{h}$.

Необходимо учитывать, что параметр кинетичности $ПК$ может быть представлен также в виде:

$$ПК = \frac{\alpha Q^2}{g} : \frac{\omega^3}{B},$$

где ω – площадь живого сечения и B – ширина живого сечения поверху. Из последнего соотношения видно, что для критической глубины потока $ПК = 1{,}0$ [см. формулу (7-54)].

---

[1] Заметим попутно, что масштаб для средней скорости v равен, разумеется, масштабу для местных скоростей u, т. е. $a_v = a_u$.

5°. Общий случай, когда на жидкость одновременно действует несколько разных систем сил. В этом случае для получения динамического подобия между моделью и натурой надо требовать одновременного соблюдения равенства соответствующих критериев подобия в сходственных живых сечениях.

Если, например, при постановке гидравлических опытов необходимо учитывать как силы тяжести, так и силы трения, то для достижения динамического подобия между моделью и натурой [см. условие (16-7)] следует, помимо кинематического и геометрического подобий, одновременно выдержать еще два условия:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \qquad (\mathrm{Fr})_{\text{м}} = (\mathrm{Fr})_{\text{н}}; \\ &(\mathrm{II}) \qquad (\mathrm{Re})_{\text{м}} = (\mathrm{Re})_{\text{н}}, \end{aligned}\right\} \tag{16-39}$$

причем эти условия должны относиться ко всем сходственным живым сечениям модели и натуры. По течению жидкости величины Fr и Re для динамически подобных систем, разумеется, могут изменяться.

§ 16-4. ОСНОВНЫЕ УКАЗАНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Положим, что мы приняли некоторый определенный масштаб длин:

$$a_l = l_{\text{м}} : l_{\text{н}}. \tag{16-40}$$

Будем считать, что на жидкость действуют две системы сил, входящих в уравнение (16-16): силы тяжести и силы трения.

Как было отмечено, для достижения динамического подобия необходимо, помимо кинематического подобия, одновременно выдержать два требования (16-39). Каждое из этих требований приводит нас к следующему:

1-е требование. Здесь необходимо соблюсти равенство (16-27) или, что то же, равенство

$$\frac{v_{\text{м}}^2}{g l_{\text{м}}} = \frac{v_{\text{н}}^2}{g l_{\text{н}}}. \tag{16-41}$$

Заметим, что ускорение силы тяжести g в случае модели и натуры одинаково: $g_{\text{м}} = g_{\text{н}} = g$.

Ниже пользуемся критериями подобия, выраженными через среднюю скорость v, которые получаем из (16-41):

$$\frac{v_{\text{м}}}{v_{\text{н}}} = \sqrt{\frac{l_{\text{м}}}{l_{\text{н}}}} = (a_l)^{1/2}. \tag{16-42}$$

Такому условию для сходственных живых сечений должны удовлетворять скорости в натуре и на модели, если соблюдено равенство чисел Фруда [см. соотношения (I), (16-39)].

Расходы $Q_{\text{м}}$ и $Q_{\text{н}}$ должны здесь удовлетворять условию

$$\frac{Q_{\text{м}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{v_{\text{м}}\omega_{\text{м}}}{v_{\text{н}}\omega_{\text{н}}} = \sqrt{a_l}\,a_l^2 = (a_l)^{5/2}. \tag{16-43}$$

Масштаб времени получаем следующим образом:

$$v_{\text{м}} = \frac{l_{\text{м}}}{t_{\text{м}}}; \; v_{\text{н}} = \frac{l_{\text{н}}}{t_{\text{н}}}; \tag{16-44}$$

деля $v_{\text{м}}$ на $v_{\text{н}}$, имеем

$$\frac{v_м}{v_н} = \frac{l_м}{l_н}\frac{t_н}{t_м}, \tag{16-45}$$

откуда

$$a_t = \frac{t_м}{t_н} = \frac{1}{\sqrt{a_l}} a_l = \sqrt{a_l}. \tag{16-46}$$

2-е требование. Здесь необходимо соблюсти равенство (16-34) или, что то же, равенство

$$\frac{v_м l_м}{\nu_м} = \frac{v_н l_н}{\nu_н}. \tag{16-47}$$

Считая

$$\nu_м = \nu_н = \nu, \tag{16-48}$$

т. е. предполагая, что в лаборатории используется та же жидкость, что и в натуре (вода), из (16-47) получаем

$$\frac{v_м}{v_н} = \frac{l_н}{l_м} = \frac{1}{a_l}. \tag{16-49}$$

Такому условию должны удовлетворять скорости $v_м$ и $v_н$, если соблюдено равенство чисел Рейнольдса.

Расходы $Q_м$ и $Q_н$ должны удовлетворять в этом случае следующему условию:

$$\frac{Q_м}{Q_н} = \frac{v_м}{v_н}\frac{\omega_м}{\omega_н} = \frac{1}{a_l} a_l^2 = a_l. \tag{16-50}$$

Именно при условиях (16-49) и (16-50) будем иметь равенство (16-39, II). В результате приведенных рассуждений можно составить табл. 16-1 (в предположении, что $\nu_м = \nu_н$).

Из рассмотрения приведенной табл. 16-1 видно, что условия (16-39, I) и (16-39, II) несовместимы. Поэтому, если гидравлическое явление протекает под действием двух или нескольких систем сил, и в лаборатории принимается та же жидкость, что и в натуре ($\nu_м = \nu_н$), то динамического подобия достигнуть невозможно, так как один критерий подобия требует при переходе от натуры к модели изменения, например, скорости в $a_l^{0,5}$ раз, другой же критерий подобия – в a_l^{-1} раз и т. п.

В данном случае динамического подобия можно было бы достигнуть, применяя для модели иную жидкость (с другим коэффициентом ν). Однако практически такой путь затруднителен в связи с тем, что для существующих в природе жидкостей, которые можно было бы использовать в лаборатории, отношение $\nu_м : \nu_н$ относительно мало отличается от единицы.

Учитывая сказанное, моделирование приходится осуществлять в общем случае только с некоторым приближением.

Как было отмечено выше, часто силы одного рода [из числа входящих в соотношение (16-13)] в определенных условиях превалируют над силами другого рода. В связи с этим в ряде случаев оказывается возможным исходить только из одного критерия подобия, отвечающего главным действующим силам. При этом другими критериями, отвечающими второстепенным силам, пренебрегают.

В случае моделирования безнапорных турбулентных потоков, отвечающих квадратичной области сопротивления (мы далее ограничимся рассмотрением только этого случая движения), исходят из числа

Фруда, считая, что такого рода движение обусловливается только силами тяжести. Эта область параметров потока, когда движение жидкости не зависит от числа Рейнольдса, называется *автомодельной* в отношении чисел Рейнольдса (см. на рис. 4-24 область, расположенную правее кривой *AB*). При моделировании гидравлических явлений, отвечающих указанной автомодельной области, поступают следующим образом: а) создают русло модели, геометрически подобное действительному (натурному) руслу (включая геометрическое подобие выступов шероховатости); б) задают в *граничном сечении* модельного русла движение жидкости, кинематически подобное (для начального момента времени) движению ее в натуре; в) дополнительно в граничном сечении модельного русла создают условия, при которых получается равенство для модели и для натуры чисел Фруда. В результате указанных операций в пределах модельного русла *автоматически* образуется поток, динамически подобный натурному потоку, что и требуется для проведения соответствующих исследований.

Таблица 16-1

Требуемое для достижения динамического подобия отношение характеристики модели (м) к характеристике натуры (н)

Характеристики потока	Масштабы характеристик при условии	
	$(Fr)_м = (Fr)_н$	$(Re)_м = (Re)_н$
Скорость	$a_l^{0,5}$	a_l^{-1}
Расход . . .	$a_l^{2,5}$	a_l
Время . . .	$a_l^{0,5}$	a_l^{2}
Сила	. . . . .	. . . . .
Работа . . .	. . . . .	. . . . .

Выполняя такого рода эксперименты, необходимо еще учитывать следующие обстоятельства:

1. Можно показать, что *бурное* безнапорное движение получается, если число Фруда $Fr_{\bar h} = \frac{v^2}{g\bar h}$ (где $\bar h$ – средняя глубина потока) больше единицы:

$$Fr_{\bar h} > 1{,}0; \tag{16-51}$$

при $Fr_{\bar h} < 1{,}0$ получаем *спокойное* движение. Имея для модели числа Фруда те же, что и для натуры, мы, естественно, для модели автоматически будем получать движение такое же, как и для натуры (бурное или спокойное). Ранее было показано, что, например, при спокойном движении условия движения в нижележащих (по течению) сечениях влияют на формирование вышележащих (по течению) частей потока; в связи с этим, моделируя *спокойное* движение, в качестве «исходного» граничного сечения следует принимать сечение, намеченное в *конце* моделируемого участка русла. В случае *бурного* движения имеем обратную картину: «исходным» граничным поперечным сечением русла следует считать сечение, намеченное в *начале* моделируемого участка.

2. Если в натуре имеем турбулентное движение жидкости, то, естественно, в условиях модели должны иметь такое же движение; поэтому при моделировании турбулентного движения возникает следующее *дополнительное* условие моделирования:

$$(Re)_м > (Re_к)_м, \tag{16-52}$$

где $(Re_к)_м$ – критическое число для модели. Если в натуре имеем турбулентное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления (т. е. области, которую мы здесь и рассматриваем), то вместе (16-52) необходимо требовать условия:

$$(Re)_м \geqslant (Re''_{пред})_м, \tag{16-53}$$

где о числе $Re''_{пред}$ – см. § 4-11. Если условие (16-53) при моделировании потока по Фруду не соблюдается, то приходится отказываться от геометрического подобия и выполнять модель русла в искаженном масштабе (величину a_l для плановых размеров модели принимать отличной от величины a_l для вертикальных ее размеров). Выполняя такое (так называемое аффинное) преобразование действительного русла, вертикальные размеры модели увеличивают сравнительно с горизонтальными, что позволяет увеличить скорости движения жидкости и в результате получить на модели турбулентное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления. При этом вопросы моделирования потока в значительной мере усложняются.

3. Вопросы моделирования потока также значительно усложняются, когда приходится учитывать: размыв русла и движение наносов, аэрацию потока, образование вакуума в потоке.

В заключение отметим, что моделирование напорного движения, отвечающего квадратичной области сопротивления (когда имеем большие числа Рейнольдса), а также моделирование напорного и безнапорного движений при малых числах Рейнольдса (когда имеем ламинарный режим; см. на рис. 4-24 зону, соответствующую прямой *1 – 2*, которая также называется автомодельной зоной) осуществляют, руководствуясь особыми правилами, которых касаться не будем; они в значительной мере аналогичны правилам, поясненным выше (применительно к случаю безнапорного движения, отвечающего квадратичной области сопротивления). Особенно большие трудности возникают при моделировании потоков в зонах, лежащих между двумя упомянутыми выше автомодельными областями (см. на рис. 4-24 область, лежащую между прямой *1 – 2* и кривой *AB*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

16-1. **Гухман А. А.** Введение в теорию подобия. – М.: Высшая школа, 1963.

16-2. **Гухман А. А.** Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. – М.: Высшая школа, 1967.

16-3. **Зегжда А. П.** Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей. – Л. – М.: Госстройиздат, 1938.

16-4. **Избаш С. В.** Основы гидравлики. – М.: Госстройиздат, 1952.

16-5. **Кирпичев М. В.** Теория подобия. – М.: Изд-во АН СССР, 1953.

16-6. **Леви И. И.** Моделирование гидравлических явлений. – Л.: Энергия, 1967.

16-7. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970.

16-8. **Патрашев А. Н.** Гидромеханика. – М.: Военно-морское изд-во, 1953.

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ УСТАНОВИВШЕЕСЯ БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

§ 17-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Водопроницаемый грунт состоит из отдельных частиц (песчинок), между которыми имеются поры. Суммарный объем пор составляет часто 35 – 40% от объема всего грунта. Явление движения воды в этих порах называется фильтрацией. Вода в поры может попасть различным образом. Например, выпадая на поверхность земли в виде дождя, она затем просачивается в грунт. На некоторой глубине такая вода может быть задержана слоем где о числе $Re''_{пред}$ – см. § 4-11. Если условие (16-53) при моделировании потока по Фруду не соблюдается, то приходится отказываться от геометрического подобия и выполнять модель русла в искаженном масштабе (величину a_l для плановых размеров модели принимать отличной от величины a_l для вертикальных ее размеров). Выполняя такое (так называемое аффинное) преобразование действительного русла, вертикальные размеры модели увеличивают сравнительно с горизонтальными, что позволяет увеличить скорости движения жидкости и в результате получить на модели турбулентное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления. При этом вопросы моделирования потока в значительной мере усложняются.

3. Вопросы моделирования потока также значительно усложняются, когда приходится учитывать: размыв русла и движение наносов, аэрацию потока, образование вакуума в потоке.

В заключение отметим, что моделирование напорного движения, отвечающего квадратичной области сопротивления (когда имеем большие числа Рейнольдса), а также моделирование напорного и безнапорного движений при малых числах Рейнольдса (когда имеем ламинарный режим; см. на рис. 4-24 зону, соответствующую прямой *1 – 2*, которая также называется автомодельной зоной) осуществляют, руководствуясь особыми правилами, которых касаться не будем; они в значительной мере аналогичны правилам, поясненным выше (применительно к случаю безнапорного движения, отвечающего квадратичной области сопротивления). Особенно большие трудности возникают при моделировании потоков в зонах, лежащих между двумя упомянутыми выше автомодельными областями (см. на рис. 4-24 область, лежащую между прямой *1 – 2* и кривой *AB*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

16-1. **Гухман А. А.** Введение в теорию подобия. – М.: Высшая школа, 1963.

16-2. **Гухман А. А.** Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. – М.: Высшая школа, 1967.

16-3. **Зегжда А. П.** Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей. – Л. – М.: Госстройиздат, 1938.

16-4. **Избаш С. В.** Основы гидравлики. – М.: Госстройиздат, 1952.

16-5. **Кирпичев М. В.** Теория подобия. – М.: Изд-во АН СССР, 1953.

16-6. **Леви И. И.** Моделирование гидравлических явлений. – Л.: Энергия, 1967.

16-7. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970.

16-8. **Патрашев А. Н.** Гидромеханика. – М.: Военно-морское изд-во, 1953.

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ УСТАНОВИВШЕЕСЯ БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

§ 17-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Водопроницаемый грунт состоит из отдельных частиц (песчинок), между которыми имеются поры. Суммарный объем пор составляет часто 35 – 40% от объема всего грунта. Явление движения воды в этих порах называется фильтрацией. Вода в поры может попасть различным образом. Например, выпадая на поверхность земли в виде дождя, она затем просачивается в грунт. На некоторой глубине такая вода может быть задержана слоем водонепроницаемого грунта (плотной глиной, скалой); при этом вода далее будет двигаться по поверхности водонепроницаемого слоя (рис. 17-1).

Водонепроницаемый слой (так называемый водоупор) образует как бы русло потока грунтовой воды. В этом русле движется грунтовая вода, причем здесь получаем фильтрационный поток со свободной поверхностью, в каждой точке которой имеется атмосферное давление. Такие потоки называются безнапорными.[1]

Движение грунтовой воды в песках и водопроницаемых глинистых грунтах является ламинарным.

Турбулентное движение грунтовой воды может получиться только в крупнозернистых грунтах (например, в гравии, гальке), а также в случае каменной наброски, трещиноватой скалы и т. п.

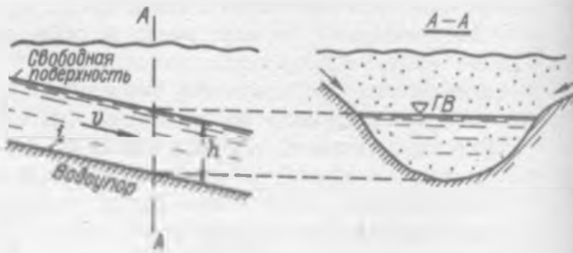


Рис. 17-1. Фильтрационный поток (поток грунтовой воды)

В данной главе будем рассматривать движения грунтовой воды: безнапорное, установившееся, плавно изменяющееся,[2] равномерное и неравномерное, ламинарное (турбулентного движения коснемся только кратко в конце главы).

На рис. 17-1 представлен случай равномерного движения. Однако обычно в практике встречаются случаи неравномерного движения.

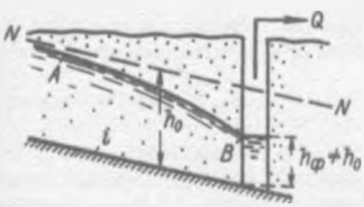


Рис. 17-2. Случай неравномерного движения

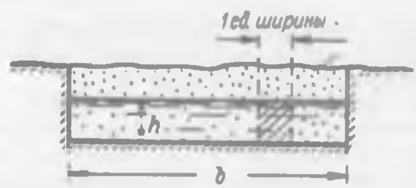


Рис. 17-3. К формуле (17-1)

Неравномерность движения грунтовой воды обусловливается: или неправильностью формы русла; или тем, что уклон дна русла $i \leqslant 0$; или, наконец, тем, что в цилиндрическом русле с прямым уклоном дна каким-либо образом фиксируется глубина $h_ф$, отличная от глубины h_0 равномерного движения (от нормальной глубины); например, из траншеи (рис. 17-2) откачивается вода, причем в траншее все время поддерживается глубина $h_ф \neq h_0$.

Свободная поверхность фильтрационного потока называется депрессионной поверхностью; кривая же свободной поверхности AB (рис. 17-2) – кривой депрессии.

---

[1] В грунте, особенно мелкозернистом, возникает капиллярное поднятие воды (см. § 1-4). Однако это явление мы далее вовсе не будем учитывать.

[2] Рассматривая далее плавно изменяющиеся потоки, иногда будем сталкиваться с отдельными узлами этих потоков, характеризуемыми резко изменяющимся движением.

В настоящей главе главным образом будем заниматься построением кривых депрессии; к этому часто и сводится расчет плавно изменяющихся безнапорных фильтрационных потоков. Дополнительно, еще иногда отыскивают величину фильтрационного расхода.

Существенной, впрочем, является также так называемая в н е ш н я я задача из области движения грунтовой воды, заключающаяся в выяснении величины сил, приложенных со стороны грунтовой воды к скелету грунта («фильтрационных сил»); однако этого вопроса мы далее вовсе не будем касаться (он рассматривается в курсе «Механика грунтов» и в курсе «Гидротехнические сооружения»).

Ниже рассматриваем в основном так называемую п л о с к у ю з а д а ч у; при этом имеем в виду поток шириной, равной, например, 1 м или 1 см, характеризуемый удельным (единичным) фильтрационным расходом q, измеряемым в $м^2/с$ (или в $см^2/с$):

$$q = Q/b, \tag{17-1}$$

где b – ширина грунтового русла (рис. 17-3).

Решая плоскую задачу, оперируем двумя координатами (x и z), располагая оси координат x и z в плоскости продольного вертикального сечения потока.

Выше (в гл. 7), рассматривая вопрос о построении кривых свободной поверхности для открытых русел, поступали следующим образом:

а) потерю напора рассчитывали, исходя из формулы Шези ($v = C\sqrt{RJ}$), полагая, что v прямо пропорционально $J^{1/2}$;

б) учитывали величину скоростного напора $\frac{v^2}{2g}$, поскольку скорости v в случае открытых русел относительно велики.

Надо особенно подчеркнуть, что, в отличие от упомянутого случая турбулентного движения воды в открытых руслах, при расчете ламинарного движения грунтовой воды:

а) вместо формулы Шези пользуются другой формулой (формулой Дарси; см. ниже), согласно которой скорость прямо пропорциональна величине J в п е р в о й степени;

б) скоростным напором $\frac{v^2}{2g}$ ввиду малости скоростей движения грунтовой воды всегда пренебрегают.

Отсюда видно, что *напорная линия $E - E$ в случае грунтовой воды всегда совпадает с пьезометрической линией $P - P$.*

Линия, в которую сливаются кривые $E - E$ и $P - P$, обычно называется п ь е з о м е т р и ч е с к о й.

Понятия гидравлического и пьезометрического уклонов здесь оказываются тождественными:

$$\boxed{J_e = J.} \tag{17-2}$$

Понятия потенциального напора и полного напора (выражаемого в данном случае суммой только д в у х членов) здесь также совпадают:

$$\boxed{H_e = H = z + \frac{p}{\gamma}.} \tag{17-3}$$

Имея в виду такое положение, далее пользуемся вместо обозначения J_e, J, H_e, H только обозначениями J и H, причем J называем п ь е з о м е т р и ч е с к и м у к л о н о м, а H – просто н а п о р о м.

График удельной энергии сечения (см. рис. 7-13) в случае грунтовой воды формально (для принимаемых далее расчетных схем) приобретает вид показанный на рис. 17-4. В связи с пренебрежением величиной $\frac{v^2}{2g}$ и весьма малым фильтрационным расходом кривая $Э = f(h)$ на рис. 7-13 практически сливается со своими асимптотами, причем зависимость $Э = f(h)$ для грунтовой воды оказывается выраженной прямой OM. Из графика на рис. 17-4 видно, что для грунтовых вод критическая глубина всегда практически равна нулю:

$$h_к = 0; \tag{17-4}$$

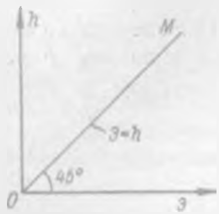


Рис. 17-4. Зависимость удельной энергии сечения Э от глубины h в случае фильтрационного потока; $Э = f(h)$

поэтому известная линия критических глубин $K - K$ всегда должна в случае грунтовой воды практически совпадать с линией дна.

Что касается критического уклона, то для безнапорного движения грунтовой воды он должен был бы равняться бесконечности (так как только при таком условии можно получить $h_0 = h_к = 0$); однако такой уклон существовать не может. Поэтому следует считать, что фильтрационные потоки всегда характеризуются спокойным движением и уклоном дна $i < i_к$.

Отметив перечисленные теоретические положения, приведем теперь на рис. 17-5 три примера, дающие представление о практическом значении рассматриваемого в этой главе вопроса.

На рис. 17-5,*а* представлен случай фильтрации воды из канала в реку; с тем, чтобы оценить величину потерь воды из канала на фильтрацию, приходится рассчитывать соответствующий фильтрационный поток.

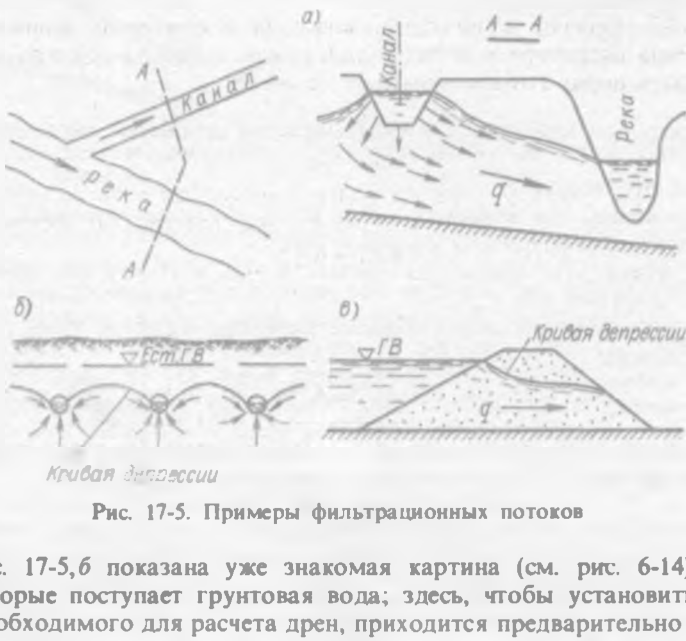


Рис. 17-5. Примеры фильтрационных потоков

На рис. 17-5,*б* показана уже знакомая картина (см. рис. 6-14) — система дрен, в которые поступает грунтовая вода; здесь, чтобы установить величину расхода, необходимого для расчета дрен, приходится предварительно выполнять соответствующий фильтрационный расчет.

На рис. 17-5,*в* показана земляная плотина, через которую просачивается вода. При проектировании земляных плотин необходимо знать положение кривой депрессии.

Подобных примеров можно привести много.

§ 17-2. СКОРОСТЬ ФИЛЬТРАЦИИ. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ЛАМИНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ФОРМУЛА ДАРСИ). ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАВИСИМОСТЯХ, ОТЛИЧНЫХ ОТ ФОРМУЛЫ ДАРСИ

Представим на рис. 17-6 металлическую трубу, заполненную песком, имеющую внутренний диаметр D. Предположим, что под действием разности давлений на концах этой трубы вода, полностью заполняющая все поры в песке, движется (фильтрует) в этих порах.

Наметим плоское поперечное сечение $A - A$ трубы. Рассматривая его, можем различать три разные площади:

Рис. 17-6. К пояснению формулы Дарси (17-13)

а) площадь сечения пор грунта ($\omega_{пор}$); эту площадь можно рассматривать как площадь действительного «живого сечения» потока;

б) площадь сечения частиц грунта ($\omega_{част}$); через эту площадь вода в действительности не проходит;

в) площадь сечения всей трубы ($\omega_{геом}$); очевидно,

$$\omega_{геом} = \frac{\pi D^2}{4} = \omega_{пор} + \omega_{част}. \qquad (17\text{-}5)$$

Рассматривая движение воды в какой-либо отдельной поре, получим эпюру скоростей для элемента живого сечения ab в виде, представленном на рис. 17-7. Однако в практике, вовсе не считаясь с неравномерностью распределения скоростей в порах, «действительной скоростью» движения воды в порах грунта называют величину

$$u' = \frac{Q}{\omega_{пор}}, \qquad (17\text{-}6)$$

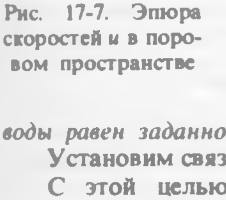


Рис. 17-7. Эпюра скоростей u в поровом пространстве

где Q – расход воды, движущейся в трубе (рис. 17-6).

Наряду с этим вводят понятие так называемой скорости фильтрации

$$u = \frac{Q}{\omega_{геом}} = \frac{Q}{\omega_{пор} + \omega_{част}}. \qquad (17\text{-}7)$$

Как видно, *скорость фильтрации* (u) *есть фиктивная (воображаемая) скорость, получающаяся в том случае, если мы себе представим, что вода движется не только через поры, но и через тельца частиц грунта, причем расход воды равен заданному (действительному расходу).*

Установим связь между действительной скоростью и скоростью фильтрации.

С этой целью обозначим коэффициент объемной пористости грунта[1] через n и коэффициент поверхностной пористости грунта через n_0:

---

[1] В механике грунтов величину n, согласно (17-8), иногда называют просто пористостью грунта; коэффициентом же пористости называют другую величину.

$$n = \frac{\textit{объем пор грунта}}{\textit{объем пор грунта} + \textit{объем частиц грунта}} < 1{,}0; \qquad (17\text{-}8)$$

$$n_0 = \frac{\omega_{пор}}{\omega_{геом}} < 1{,}0. \qquad (17\text{-}9)$$

Можно показать, что в случае однородного (по своему сложению) грунта

$$n = n_0. \qquad (17\text{-}10)$$

Деля (17-7) на (17-6), получаем:

$$\frac{u}{u'} = \frac{\omega_{пор}}{\omega_{геом}} = n_0 = n, \qquad (17\text{-}11)$$

откуда

$$u = nu'. \qquad (17\text{-}12)$$

Так как $n < 1{,}0$ *то скорость фильтрации (u) по величине всегда меньше действительной скорости (u').*

Проводя опыты с фильтрацией в песках и глинах, еще в середине прошлого столетия установили, что скорость фильтрации u в случае установившегося движения может быть представлена следующей зависимостью, называемой формулой Дарси и выражающей основной закон ламинарной фильтрации:

$$\boxed{u = kJ,} \qquad (17\text{-}13)$$

где u — скорость фильтрации в данной точке фильтрационного потока; J — пьезометрический уклон в той же точке; k — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом фильтрации.

Коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости [поскольку J в формуле (17-13) — величина безразмерная], *представляет собой скорость фильтрации при уклоне* $J = 1$. Как показывают опыты, для воды определенной температуры величина k зависит только от рода грунта. Вообще же величина k зависит и от вязкости фильтрующей через грунт воды, а следовательно, и от температуры воды, поскольку с изменением температуры вязкость воды изменяется. Из формулы (17-13) видно, что скорость фильтрации u прямо пропорциональна величине J в первой степени.

Указанную формулу можно представить еще в следующем виде:

$$\omega_{геом} u = \omega_{геом} kJ, \qquad (17\text{-}14)$$

или в виде

$$\boxed{Q = \omega kJ,} \qquad (17\text{-}15)$$

где под величиной ω понимаем $\omega_{геом}$ (значок «геом» как здесь, так и ниже опускаем).

Зависимость (17-15) также называется формулой Дарси.

Формула (17-13) или (17-15), относящаяся к ламинарной фильтрации, имеет определенные границы применимости. Для воды обычной температуры ($\nu \approx 0{,}01$ см^2/с) различные авторы рекомендуют применять указанную формулу в случае, когда

$$ud < 0{,}01 \div 0{,}07, \qquad (17\text{-}16)$$

где u — в см/с, d — диаметр (в см) частицы грунта (некоторого среднего размера).

Если условие (17-16) не удовлетворяется, то получаем турбулентную фильтрацию, причем зависимость Дарси нарушается.[1]

О турбулентной фильтрации. В случае турбулентной фильтрации вместо формулы (17-13) пользуются другой зависимостью, аппроксимирующей действительную связь между величинами u и J. Различают два вида такой зависимости:

1-й вид (одночленная формула):

$$u = kJ^{\frac{1}{m}} \text{ или } J = \frac{1}{k^m} u^m, \qquad (17\text{-}17)$$

где m – устанавливается при помощи опыта; величина m лежит в пределах: $1{,}0 \leq m \leq 2{,}0$.

2-й вид (двучленная формула):

$$J = au + bu^2, \qquad (17\text{-}18)$$

где a и b – постоянные (для данного грунта и для данной температуры воды) коэффициенты, устанавливаемые экспериментально. Как видно, при малых скоростях (когда членом bu^2 можно пренебречь) зависимость (17-18) обращается в формулу Дарси (если положить, что $a = 1/k$); при больших же скоростях (когда можно пренебречь членом au) зависимость (17-18) обращается в формулу

$$J = bu^2, \qquad (17\text{-}19)$$

отвечающую области квадратичного сопротивления.

Аппроксимирующая зависимость (17-18) более удобна, так как согласно этой зависимости для данного грунта и данной температуры воды градиент J является функцией только u; в случае же зависимости (17-17) для доквадратичной области сопротивления величина $J = f(u, m)$.

Модель сплошной движущейся среды. Пользуясь понятием скорости фильтрации, мы заменяем для расчета действительную грунтовую воду, движущуюся только в порах грунта и имеющую разрывы, обусловленные наличием частиц грунта, обтекаемых водой, некоторой воображаемой движущейся сплошной средой, не имеющей вовсе разрывов, указанных выше. Такая сплошная среда в данном случае представляет собой обычную движущуюся воду, заполняющую все пространство (и поры, и объемы, занятые твердыми частицами грунта; твердые частицы мы вовсе исключаем из рассмотрения в геометрическом смысле); скорость движения этой воображаемой воды принимается равной «скорости фильтрации» u (а не «действительной скорости» u'). Здесь дополнительно представляем себе, что в каждой точке такого условного потока воды имеются объемные силы сопротивления движению, направленные против течения; величина этих сил, равномерно распределенных (при равномерном движении) по всему объему рассматриваемой области фильтрации, может быть установлена в сответствии, например, с формулой Дарси.

Начальный градиент. Как видно из общей зависимости (17-18), грунтовая вода даже при весьма малых значениях J (близких к нулю) должна приходить в движение, что и имеем для так называемой ньютоновской жидкости, т. е. для той жидкости, которая подчиняется зависимости Ньютона (4-22).

Однако в природе встречаются грунты (плотные глины) с очень малыми порами, измеряемыми долями миллиметра. Некоторые авторы полагают, что вода, находящаяся в таких порах, теряет свойство ньютоновской жидкости и в состоянии покоя оказывается способной выдерживать (как твердое тело) касательные напряжения той или другой величины. В связи с этим приходится считать, что существуют глины, которые начинают пропускать воду через свое поровое пространство только при градиентах $J > J_0$, где J_0 называется начальным градиентом. При $J \leq J_0$ для таких грунтов движение воды не имеет места; существующая здесь разность напора уравновешивается упомянутыми касательными напряжениями. Величина J_0 обосновывается, опираясь на представление о «твердой воде» (см. конец § 1-4).

---

[1] В литературе, помимо зависимости (17-16), приводятся и другие экспериментальные критерии применимости формул (17-13) и (17-15), в которые входят вместо диаметра d коэффициент фильтрации k и коэффициент пористости n.

§ 17-3. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ

Существуют три различных метода определения коэффициента фильтрации, входящего в формулу Дарси:

1) лабораторный метод: k определяется в лаборатории на специальном приборе, в который закладывается образец интересующего нас грунта (с ненарушенной или нарушенной структурой);

2) расчетный метод: k определяется расчетом по особым эмпирическим формулам в зависимости от величины диаметра частиц грунта;

3) полевой метод: k определяется на месте строительства («в поле») путем откачки воды из специально устроенных колодцев.

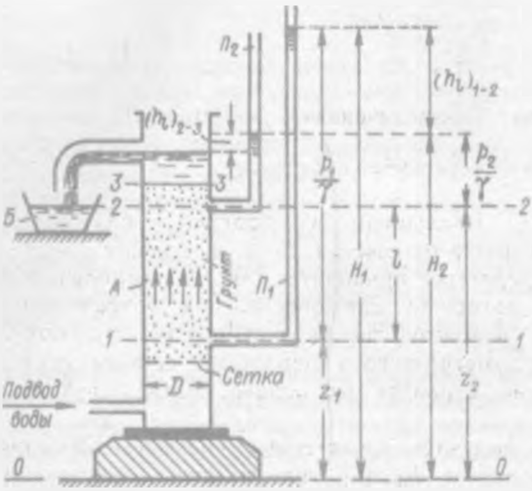


Рис. 17-8. Прибор Дарси для определения коэффициента фильтрации

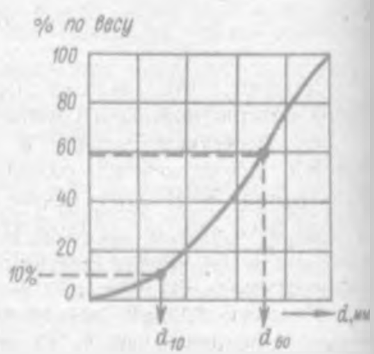


Рис. 17-9. Схема кривой гранулометрического (зернового) состава грунта

1°. Лабораторный метод. Для определения k в лаборатории обычно применяют особый прибор, называемый прибором Дарси.

Прибор Дарси представляет собой металлический цилиндр A (рис. 17-8) с сеткой, на которую укладывается испытываемый грунт. Через этот грунт под соответствующим напором фильтрует вода (например, снизу вверх[1]). В сечениях $1-1$ и $2-2$, находящихся на расстоянии друг от друга, равном l, к цилиндру A приключены пьезометры $П_1$ и $П_2$, при помощи которых можно измерять напоры H_1 и H_2 в указанных двух сечениях. Вода, прошедшая через грунт, попадает в мерный сосуд $Б$, посредством которого можно определить величину фильтрационного расхода:

$$Q = \frac{V}{t}, \tag{17-20}$$

где V – объем воды, скопившейся в мерном сосуде в течение времени t.

[1] При рассмотрении движения воды снизу вверх удобнее разъяснять вопросы гидравлики. Вместе с тем в практике (во избежание выпора грунта вверх фильтрующей водой) приборы Дарси конструируют часто так, чтобы вода в цилиндре A двигалась сверху вниз.

Решим формулу Дарси (17-15) в отношении k:

$$k = \frac{Q}{\omega J}. \qquad (17\text{-}21)$$

По этой зависимости можно найти k для данного грунта. Очевидно, для этого в формулу (17-21) следует подставить Q, полученное по (17-20), и величину ω, т. е.

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4}, \qquad (17\text{-}22)$$

где D – внутренний диаметр цилиндра A.

Что касается величины J, то

$$J = \frac{(h_l)_{1-2}}{l}, \qquad (17\text{-}23)$$

где $(h_l)_{1-2}$ – потеря напора по длине между сечениями $1-1$ и $2-2$:

$$(h_l)_{1-2} = H_1 - H_2. \qquad (17\text{-}24)$$

Заметим, что высота $(h_l)_{2-3}$, показанная на чертеже, представляет собой потерю напора в грунте по длине от сечения $2-2$ до сечения $3-3$.

2°. **Расчетный метод.** В литературе приводится много эмпирических формул, предложенных разными авторами для определения коэффициента фильтрации k. В этих формулах используются те или другие параметры, устанавливаемые по кривой гранулометрического (зернового) состава грунта (рис. 17-9), которая предварительно строится на основе соответствующего механического анализа грунта.

По этой кривой мы можем получить характерные диаметры фракций грунта, обозначаемые через d_{10}, d_{17} и d_{60} (d_{17} на рисунке не показан). Здесь d_{10}, d_{17} и d_{60} (в мм) являются диаметрами частиц, вес которых вместе с весом более мелких частиц составляет соответственно 10, 17 и 60% от веса всего грунта. Отношение

$$\eta = d_{60}/d_{10} \qquad (17\text{-}25)$$

называется коэффициентом разнозернистости грунта.

Для примера приведем эмпирическую формулу М. П. Павчича:

$$k = 4\frac{\varphi}{\nu}\sqrt[3]{\eta}\,\frac{n^2}{(1-n)^2}\,d_{17}^2, \qquad (17\text{-}26)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости (зависящий от температуры жидкости – в см^2/с); φ – коэффициент, учитывающий форму частиц грунта, принимаемый: для песчано-гравелистогалечных грунтов $\varphi = 1{,}0$, а для щебенистых грунтов $\varphi = 0{,}35 - 0{,}40$; k – коэффициент фильтрации в см/с.

3°. **Полевой метод.**[1] Производя откачку воды из специально устроенного колодца, можем установить величину Q; вместе с тем можно в натуре измерить также получающуюся в грунте кривую депрессии. Имея эту кривую и зная Q по особым формулам можно вычислить и величину k.

4°. **Заключительные замечания.** В заключение сделаем следующие замечания.

---

[1] Полевой метод определения k подробно рассматривается в курсе «Инженерная геология».

1. Величина k тем меньше, чем меньше частицы грунта и чем грунт более разнозернистый.

Таблица 17-1

Округленные значения коэффициента фильтрации k для различных грунтов

Грунт	k, см/с	k, м/сут
Песок крупнозернистый	0,1–0,01	100 – 10
Песок мелкозернистый	0,01–0,001	10 – 1
Супесь плотная . . .	0,001–0,0001	1 – 0,1
Суглинок	0,0001–0,00001	0,1 – 0,01
Глина	0,00001–0,000001	0,01 – 0,001

2. Численные значения k встречаются в практике самые различные. Приведем только для примера табл. 17-1 округленных численных значений k для разных грунтов (с тем, чтобы показать только порядок численного значения k для этих грунтов).

3. Величина пьезометрического уклона J для безнапорного движения обычно бывает значительно менее единицы: $J \ll 1{,}0$; только в исключительных случаях J может быть здесь более 1,0. Имея это в виду и учитывая формулу Дарси (17-13), заключаем, что скорости движения грунтовых вод бывают весьма малой величины, порядка 0,01 – 0,000001 см/с.

§ 17-4. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

Представим на рис. 17-10 равномерное движение грунтовой воды. Так как в случае грунтовой воды скоростным напором пренебрегают, то напорная линия $E - E$, так же как и пьезометрическая линия $P - P$, должна совпадать со свободной поверхностью.

Поскольку свободная поверхность потока при равномерном движении параллельна линии $D - D$ дна потока, то

$$J = J_e = i, \tag{17-27}$$

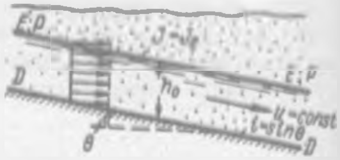


Рис. 17-10. Равномерное движение грунтовой воды ($v = u$)

а, следовательно, формулу Дарси (17 – 13) для случая равномерного безнапорного движения следует переписать в виде

$$u = ki \tag{17-28}$$

или

$$Q = \omega ki. \tag{17-29}$$

Для плоской задачи, когда рассматриваем единицу ширины потока, вместо (17-29) имеем

$$q = \frac{Q}{b} = h_0 ki, \tag{17-30}$$

откуда глубина потока при равномерном движении

$$h_0 = \frac{q}{ki}. \tag{17-31}$$

Уравнение (17-31) и является уравнением безнапорного равномерного движения грунтовой воды в случае плоской задачи.

§ 17-5. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ БЕЗНАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ (ФОРМУЛА ДЮПЮИ)

В основу исследования неравномерного плавно изменяющегося движения грунтовой воды полагается так называемая ф о р м у л а Д ю п ю и. Рассматривая, для простоты пояснения, только плоскую задачу, представим на рис. 17-11 «действительную» картину фильтрации. На этом чертеже штриховой линией показаны линии тока, пунктиром — несколько искривленные д е й с т в и т е л ь н ы е живые сечения.

Ясно, что самой верхней линией тока будет кривая депрессии AB, самой нижней — линия дна $D-D$. Ясно также, что линии тока должны быть ортогональны живым сечениям. Поэтому живые сечения (пунктир) должны подходить ортогонально к кривой депрессии AB и к линии дна $D-D$.

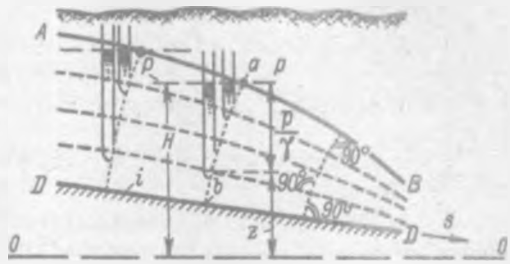


Рис. 17-11. Схема действительного фильтрационного потока в случае плавно изменяющегося движения

Напор в случае грунтовых вод [см. зависимость (17-3)] может быть записан в виде

$$H = z + \frac{p}{\gamma}. \qquad (17\text{-}32)$$

Поскольку мы рассматриваем плавно изменяющееся движение, то на основании данных § 3-17 можем утверждать, что горизонты воды в пьезометрах, приключенных к разным точкам одного и того же живого сечения (например, сечения $a-b$), должны устанавливаться в одной и той же горизонтальной плоскости (см. плоскость $P-P$, возвышающуюся над плоскостью сравнения $O-O$ на величину напора H, отвечающего живому сечению $a-b$).

Как видно, можно написать

$$H = z + \frac{p}{\gamma} = \text{const (для данного живого сечения)}; \qquad (17\text{-}33)$$

отсюда заключаем, что в рассматриваемом случае живые сечения являются л и н и я м и р а в н о г о н а п о р а $H = \text{const}$.

Надо подчеркнуть, что упомянутая выше напорная (пьезометрическая) плоскость $P-P$ должна обязательно проходить через точку a, т. е. через точку пересечения данного живого сечения с кривой депрессии. Это ясно из того, что для точки a напор $H = z$ (атмосферное давление в точках кривой депрессии не учитываем).

Изучение плавно изменяющегося безнапорного движения грунтовых вод основано на двух положениях (допущениях):

а) живые сечения считаются п л о с к и м и, поскольку кривизна их невелика;

б) живые сечения считаются в е р т и к а л ь н ы м и, поскольку уклон дна русла i мал.

Принимая эти два допущения, вместо действительного фильтрационного потока (рис. 17-11) получаем р а с ч е т н у ю м о д е л ь, представленную на рис. 17-12. Эта модель характеризуется вертикальными плоскими живыми сечениями; линии тока здесь несколько неперпендикулярны к живым сечениям; однако с этой неувязкой мы миримся.

Гидравлическое рассмотрение вопроса, в соответствии с которым составляется формула Дюпюи, заключается в замене (для расчета) действительной картины фильтрации (рис. 17-11) схемой фильтрационного потока на рис. 17-12.

Рассматривая последнюю схему, намечаем два живых сечения: $a-b$ и $c-d$. Расстояние между этими живыми сечениями, измеренное в направлении оси s (см. чертеж), всюду одинаково и равно ds ($ds_1 = ds_2 = \ldots = ds$). Напоры в сечениях $a-b$ и $c-d$ соответственно обозначим через H_1 и H_2; потеря напора от сечения $a-b$ до сечения $c-d$ (на длине любого отрезка ds) запишется в виде

$$-dH = H_1 - H_2. \quad (17\text{-}34)$$

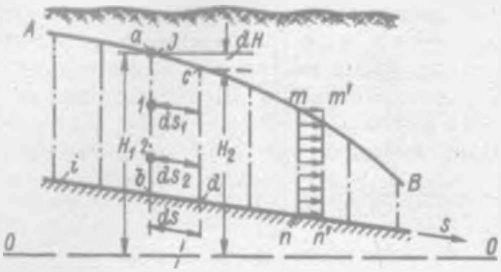


Рис. 17-12. Расчетная модель фильтрационного потока по Дюпюи ($v = u$)

Как видно, для всех точек, намеченных на живом сечении $a-b$, потеря напора на соответствующей длине ds (всюду одинакового размера) будет одинакова и равна $(-dH)$.

Из сказанного ясно, что для схемы на рис. 17-12 *величина пьезометрического уклона во всех точках данного живого сечения* (например, сечения $a-b$) *одинакова и равна уклону свободной поверхности:*

$$J = -\frac{dH}{ds} = \text{const (для живого сечения).} \quad (17\text{-}35)$$

Учитывая это положение, можем утверждать, что при плавно изменяющемся движении *скорости фильтрации во всех точках данного живого сечения* (например, сечения $a-b$) *одинаковы* и равны, согласно Дарси:

$$u = kJ = -k\frac{dH}{ds} = \text{const (для живого сечения).} \quad (17\text{-}36)$$

Отсюда заключаем, что эпюра скоростей фильтрации u в случае плавно изменяющегося движения грунтовых вод для любого живого сечения, например для сечения $m-n$, выражается прямоугольником $m-m'-n'-n$ (см. рис. 17-12).[1]

Таким образом, **средняя скорость** для данного живого сечения в случае плавно изменяющегося движения грунтовых вод равна

$$v = u, \quad (17\text{-}37)$$

где u — скорость в любой точке рассматриваемого живого сечения.

Учитывая (17-36) и (17-37), можем окончательно написать

$$\boxed{v = -k\frac{dH}{ds},} \quad (17\text{-}38)$$

где v — средняя скорость в рассматриваемом плоском вертикальном живом сечении;

H — возвышение точки кривой депрессии, принадлежащей данному плоскому сечению, над произвольной горизонтальной плоскостью сравнения

---

[1] На основании тех же соображений можно утверждать, что и для равномерного движения грунтовой воды (рис. 17-10) эпюра скоростей для любого живого сечения должна иметь вид прямоугольника.

OO; величина H представляет собой также напор для рассматриваемого плоского вертикального сечения;

$-\dfrac{dH}{ds}$ — уклон кривой депрессии в точке, принадлежащей данному живому сечению.

Формула (17-38) и называется формулой Дюпюи. Не следует смешивать формулу Дарси и формулу Дюпюи. Формула Дарси дает нам скорость фильтрации u в любой точке области фильтрации при любом характере движения грунтовых вод (плавно или резко изменяющемся); формула же Дюпюи дает нам среднюю скорость v в плоском вертикальном живом сечении только для плавно изменяющегося (а также для параллельноструйного) фильтрационного потока, причем, согласно Дюпюи, скорость v выражается через уклон свободной поверхности.

Сущность формулы Дюпюи можно выразить так: *средняя скорость v в данном плоском вертикальном живом сечении равна уклону свободной поверхности в этом сечении, умноженному на коэффициент фильтрации.*[1]

§ 17-6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

В данном случае пьезометрическая линия $P-P$ совпадает со свободной поверхностью. Уклон свободной поверхности потока J (рис. 17-13) может быть представлен двумя различными зависимостями [см. формулу (7-17),

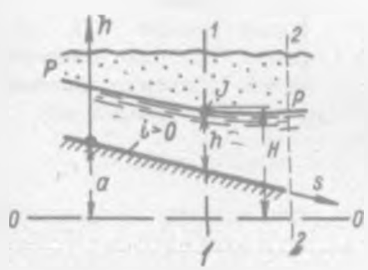


Рис. 17-13. К выводу дифференциального уравнения неравномерного движения ($i > 0$)

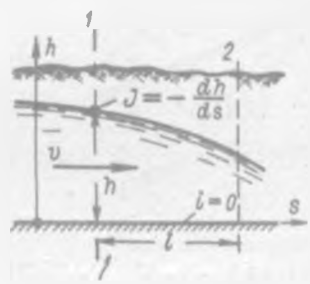


Рис. 17-14. К выводу дифференциального уравнения неравномерного движения ($i = 0$)

полученную при рассмотрении неравномерного движения в открытых руслах, и формулу (17-35)]:

$$J = i - \frac{dh}{ds}, \qquad (17\text{-}39)$$

$$J = -\frac{dH}{ds}, \qquad (17\text{-}40)$$

---

[1] Исследования некоторых авторов (И. А. Чарного, С. Н. Нумерова и др.) показали, что формула Дюпюи отвечает не только модели потока с плоскими вертикальными живыми сечениями (рис. 17-13), но также и моделям потока с криволинейными живыми сечениями. Этим обстоятельством объясняется относительно большая точность формулы Дюпюи.

где i — уклон дна русла.

Учитывая эти соотношения, формулу Дюпюи (17-38) можно переписать в виде

$$v = k\left(i - \frac{dh}{ds}\right), \tag{17-41}$$

где h — глубина воды в рассматриваемом сечении $1-1$; v — средняя скорость в этом сечении.

Зная среднюю скорость v, запишем выражение для расхода Q в форме:

$$Q = \omega v = \omega k\left(i - \frac{dh}{ds}\right). \tag{17-42}$$

Это уравнение и представляет собой искомое дифференциальное уравнение, относящееся к общему случаю цилиндрического русла с прямым уклоном дна.

Для случая плоской задачи вместо (17-42) имеем [разделив (17-42) на ширину b потока прямоугольного поперечного сечения]

$$q = hk\left(i - \frac{dh}{ds}\right). \tag{17-43}$$

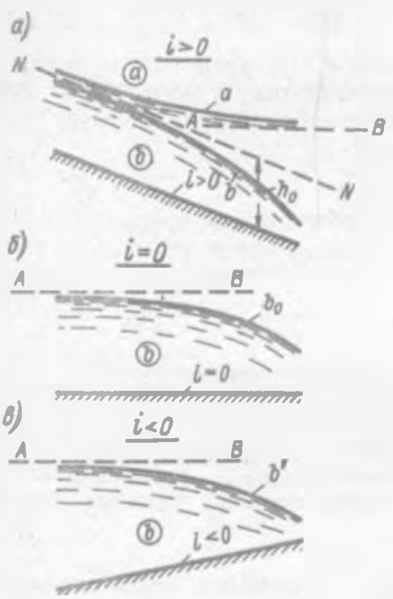


Рис. 17-15. Возможные формы свободной поверхности фильтрационного потока в цилиндрическом русле

Линия AB — горизонтальная условная «асимптота» кривой депрессии

В случае $i = 0$, что главным образом и встречается в практике, из зависимости (17-43) получаем

$$q = -kh\frac{dh}{ds}. \tag{17-44}$$

Справедливость соотношения (17-44) ясна непосредственно из рассмотрения рис. 17-14: намечаем живое сечение $1-1$, где глубина равна h; для плоской задачи $\omega = h \cdot 1$; пьезометрический уклон в этом живом сечении

$$J = -\frac{dh}{ds}; \tag{17-45}$$

выяснив эти обстоятельства, пишем (сообразуясь с формулой Дарси) выражение расхода ($q = \omega v$) для живого сечения $1-1$, причем получаем (17-44).

§ 17-7. ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ (КРИВОЙ ДЕПРЕССИИ) ПРИ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РУСЛЕ

В § 17-1 было отмечено, что в случае грунтовой воды всегда имеем

$$i < i_к \text{ и } h_к = 0.$$

Учитывая это, можем утверждать (см. рис. 7-26, 7-34 и 7-35), что при движении грунтовой воды известная зона c должна отсутствовать. Рассматривая возможные формы свободной поверхности, в данном случае приходится интересоваться только зонами a и b (при $i > 0$) и зоной b (при $i \leqslant 0$).

Как видно, фильтрационный поток имеет только четыре возможные формы свободной поверхности, показанные на рис. 17-15, *а*, *б*, *в*. Эти формы отвечают соответствующим формам, изображенным на рис. 7-26 (см. зоны *a* и *b*) и на рис. 7-34 и 7-35 (см. зону *b*).

Справедливость форм кривых депрессии, показанных на рис. 17-15, может быть обоснована анализом приведенного выше дифференциального уравнения.

§ 17-8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ (ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ)

Рассмотрим уклоны $i > 0$ и $i = 0$.

1°. Прямой уклон дна русла ($i > 0$). Удельный расход может быть выражен через нормальную глубину h_0, согласно формуле (17-30):

$$q = kh_0 i. \tag{17-46}$$

Подставляя это выражение для q в зависимость (17-43), получаем

$$kh_0 i = kh\left(i - \frac{dh}{ds}\right). \tag{17-47}$$

Как видно, в уравнении (17-47) коэффициент фильтрации сокращается, причем получаем

$$h_0 i = hi - h\frac{dh}{ds}, \tag{17-48}$$

или

$$1 = \frac{h}{h_0} - \frac{1}{i}\frac{h}{h_0}\frac{dh}{ds} = \frac{h}{h_0} - \frac{1}{i}h_0\frac{h}{h_0}\frac{d\left(\frac{h}{h_0}\right)}{ds}. \tag{17-49}$$

Вводя известное обозначение

$$\frac{h}{h_0} = \eta, \tag{17-50}$$

вместо (17-49) имеем

$$1 = \eta - \frac{1}{i}h_0\eta\frac{d\eta}{ds} \tag{17-51}$$

или

$$\frac{i\,ds}{h_0} = \frac{\eta}{\eta - 1}d\eta. \tag{17-52}$$

Интегрируя данное уравнение от сечения потока *1 – 1* до сечения потока *2 – 2* (рис. 17-13), получаем

$$\frac{il}{h_0} = \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\eta}{\eta - 1}d\eta \tag{17-53}$$

или

$$\frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + \ln\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}, \tag{17-54}$$

где

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}; \ \eta_2 = \frac{h_2}{h_0}; \ l = s_2 - s_1, \tag{17-55}$$

причем l — расстояние между сечениями $1-1$ и $2-2$ (как и в открытых потоках); h_1 и h_2 — глубины соответственно в сечении $1-1$ и сечении $2-2$.[1]

Переходя от натуральных логарифмов к десятичным, имеем окончательно

$$\frac{il}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + 2{,}3 \lg \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}. \tag{17-56}$$

Эта зависимость представляет собой уравнение кривой депрессии. Пользуясь уравнением (17-56), можно решать те же задачи, что и при рассмотрении открытых русел (с. гл. 7).

2°. Горизонтальное русло ($i = 0$). Переписываем уравнение (17-44) в виде

$$\frac{q}{k} ds = - h dh. \tag{17-57}$$

Разделив таким образом переменные, интегрируем (17-57) от сечения $1-1$ до сечения $2-2$ (рис. 17-14); при этом получаем[2]

$$\frac{q}{k}(s_2 - s_1) = \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2), \tag{17-58}$$

откуда

$$\boxed{\frac{q}{k} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l}} \tag{17-59}$$

или

$$\frac{q}{k} = h_{ср} J_{ср}, \tag{17-59'}$$

где

$$h_{ср} = \frac{h_1 + h_2}{2}; \ J_{ср} = \frac{h_1 - h_2}{l}.$$

Уравнение (17-59) также часто называют уравнением Дюпюи. По уравнению (17-59) легко построить кривую депрессии потока грунтовой воды, а также найти фильтрационный расход q.

Изобразим на рис. 17-16 прямоугольный грунтовый массив $ABCD$ длиной L, причем через h_1 и h_2 обозначим глубины воды в верхнем и нижнем бьефах. С тем, чтобы найти удельный расход воды, фильтрующей через грунтовый массив из верхнего бьефа в нижний, полагаем в уравнении (17-59)

$$l = L; \tag{17-60}$$

при этом получаем

$$q = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L} k. \tag{17-61}$$

[1] Сечение $2-2$, как и при движении воды в каналах, располагается всегда ниже по течению сечения $1-1$.

[2] Все обозначения, приводимые здесь, известны из предыдущего изложения.

Вычислив по этой формуле q, обращаемся к построению кривой депрессии $M-N$. При этом в уравнении (17-59) полагаем

$$h_1 = h; \; l = x, \tag{17-62}$$

где h – глубина в произвольном живом сечении $W_1 - W_1$, находящемся на расстоянии x от конца грунтового массива.

Как видно, уравнением Дюпюи (17-59) мы здесь соединяем два сечения: $W_1 - W_1$ и $W_2 - W_2$. В результате (17-59) приводится к виду

$$\frac{q}{k} = \frac{h^2 - h_2^2}{2x}, \tag{17-63}$$

откуда

$$h = \sqrt{h_2^2 + \frac{q}{k}2x}. \tag{17-64}$$

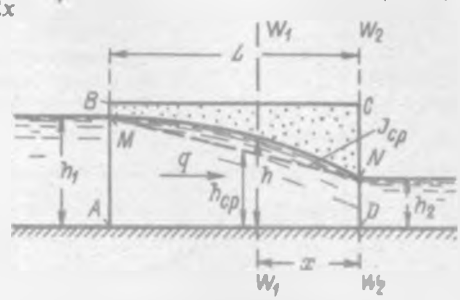


Рис. 17-16. Фильтрация через прямоугольный грунтовый массив

Задавая в уравнении (17-64) различные значения x, можем по этому уравнению вычислить соответствующие значения h и в результате по точкам построить кривую депрессии $M-N$.

В уравнение (17-64) вместо q можно подставить его выражение (17-61). При этом получим уравнение кривой депрессии:

$$h = \sqrt{h_2^2 + (h_1^2 - h_2^2)\frac{x}{L}}. \tag{17-65}$$

Как видно, в уравнение (17-65) коэффициент фильтрации не входит. Отсюда можно сделать следующий существенный вывод:

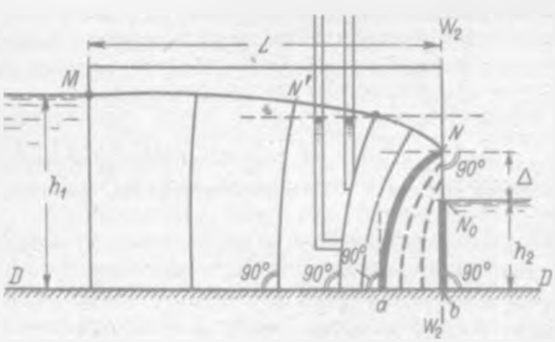


Рис. 17-17. Возникновение промежутка высачивания Δ (рисунок выполнен не в масштабе)

в случае однородного грунта кривая депрессии не зависит от численного значения k, т. е. от степени водопроницаемости грунта. При заданных h_1 и h_2 кривая депрессии $M-N$ будет совершенно одинаковой для песка и для глины. Согласно (17-61), от коэффициента фильтрации зависит только фильтрационный расход; величина этого расхода прямо пропорциональна численному значению коэффициента фильтрации.

О «промежутке высачивания». Задача о построении кривой депрессии и об определении фильтрационного расхода решалась выше в предположении, что кривая депрессии $M-N$ выклинивается в нижний бьеф на уровне уреза воды нижнего бьефа, причем «выходная глубина» фильтрационного потока равна глубине воды нижнего бьефа h_2.

В действительности, однако, в области выхода фильтрационного потока, в связи с возникновением здесь резко изменяющегося движения, имеет место картина, представленная на рис. 17-17: с одной стороны, в связи с искривлением живых сечений (линий равного напора; см., например, линию $N-a$) и, с другой стороны, в связи с тем, что линия равного напора $N_0 - b$ остается всегда строго вертикальной (совпадающей с вертикальным ограничением $W_2 - W_2$) точка отходит влево от точки b на расстояние $\overline{ab}$, вдоль которого теряется напор размере Δ. В соответствии с этим точка N отрывается от точки N_0 и подни мается над ней на величину Δ.

Участок с размером $\Delta = \overline{N - N_0}$, на протяжении которого происходит высачивани грунтовой воды непосредственно в атмосферу, называется **промежутком высачивания**. Как будет дополнительно пояснено (§ 17-12, п. 1°), напор вдоль линии $N - N_0$ изменяется по линейному закону.

Рис. 17-18. График П. Я. Полубариновой-Кочиной для определения величины промежутка высачивания Δ в случае фильтрационного потока на рис. 17-17.

Если линия равного напора (живое сечение) $N - a$ подходит ортогонально к линиям $D - D$ и $W_2 - W_2$, то остальные линии равного напора, показанные на чертеже жирной штриховой линией, подходят к линии $N - N_0$ не ортогонально. Линия $W_2 - W_2$ в точке N является касательной к кривой депрессии.

Величина расхода q, проходящего через живое сечение $N - a$, будет $q = q_1 + q_2$, где q_1 — расход воды, проходящей через сечение $N_0 - b$ и q_2 — расход воды, относящийся к промежутку высачивания (стекающий вниз по наружному ограничению грунтового массива в область нижнего бьефа).

Величина промежутка высачивания Δ для плоской задачи впервые была установлена методом математической механики жидкости Б. Б. Девисоном в 1937—1938 г.

На рис. 17-18 приводится график, предложенный П. Я. Полубариновой-Кочиной, по которому легко определить величину Δ (обозначения, указанные на этом графике, см. на рис. 17-17).

Надо, впрочем, сказать, что формула Дюпюи дает величину расхода q достаточно точно, когда в зависимость (17-59) подставляем именно глубину воды h_2 нижнего бьефа, а не «выходную глубину» $(h_2 + \Delta)$ фильтрационного потока. Таким образом, величина Δ представляет практический интерес только при построении кривой депрессии.

Анализ графика на рис. 17-18 показывает, что величина Δ имеет существенное значение при построении кривых депрессии для относительно коротких грунтовых массивов. При относительно длинных грунтовых массивах величина Δ, будучи небольшой, сказывается только на положении концевого участка $N' - N$ кривой депрессии, чем часто можно пренебречь.

§ 17-9. ПРИТОК ГРУНТОВОЙ ВОДЫ К ВОДОСБОРНОЙ ГАЛЕРЕЕ ИЛИ ДРЕНЕ

Галерея, в которую поступает грунтовая вода, может располагаться или непосредственно на водоупоре, или выше водоупора.

1°. Галерея, расположенная на водоупоре (рис. 17-19). Для определения удельного расхода q, поступающего в такую галерею (на 1 м ее длины) **с одной ее стороны**, пользуемся формулой Дюпюи (17-59), которую переписываем в виде

$$q = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L} k, \tag{17-66}$$

где h_1 — глубина грунтовой воды в естественном состоянии (до устройства галереи); h_2 — глубина воды в галерее; L — так называемая **длина влияния галереи** (см. чертеж).

Эту длину приходится устанавливать на основании данных гидрогеологических изысканий. Иногда ее выражают в виде

$$L = \frac{h_1 - h_2}{J_{ср}}, \tag{17-67}$$

где $J_{ср}$ — средний уклон кривой депрессии, назначаемый в соответствии с указанными данными.

Очевидно, на 1 *м* длины галереи с двух ее сторон будет поступать расход $2q$. Зная q, по уравнению (17-64) строим кривую депрессии AB. Эту кривую депрессии можно строить также по уравнению (17-65), не вычисляя q.

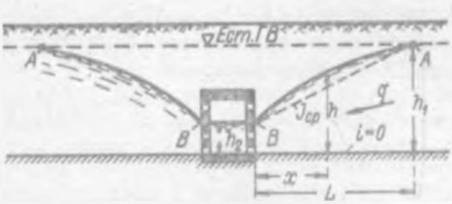


Рис. 17-19. Приток воды к галерее, расположенной на водоупоре

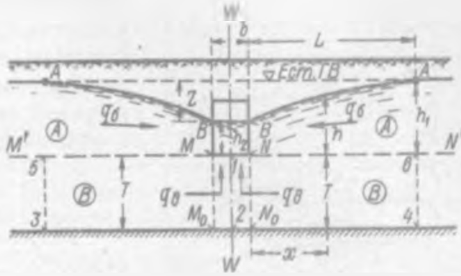


Рис. 17-20. Приток грунтовой воды к галерее (дрене), расположенной выше водоупора (использование метода «параллельного фрагментирования» фильтрационного потока)

2°. Галерея, расположенная выше водоупора — висячая галерея (или дрена); рис. 17-20. Р. Р. Чугаевым (в 1935 — 1938 гг.) было предложено гидравлическое решение вопроса о симметричном притоке воды к висячей галерее (или дрене).[1] Это решение заключается в следующем.

Обозначим через M и N угловые точки галереи. Будем считать,[2] что линии тока, выклинивающиеся в точках M и N, представляют собой горизонтальные прямые $M' - M$ и $N' - N$.

Наметим ось симметрии $W - W$ имеющегося фильтрационного потока.

Рассматривая, например, левую часть симметричного потока, видим, что условная линия тока $M' - M$ разбивает эту часть на два фрагмента:

а) фрагмент A, обеспечивающий приток воды к галерее сбоку; величину этого бокового притока обозначим через $q_б$;

б) фрагмент B, обеспечивающий приток воды к галерее **через половину ширины ее дна**; величину этого притока обозначим через $q_д$.

---

[1] Р. Р. Чугаев. Приток грунтовой воды к траншеям и горизонтальным водосборам, заложенным выше водонепроницаемого слоя. — Известия ВНИИГ, т. 22, 1938. См. также [17-11].

[2] Это допущение специально обосновывается. При таком обосновании рассуждаем следующим образом: если глубина залегания водоупора значительна, то в питании галереи через ее дно участвует только верхняя часть водоносного пласта, называемая «**активной зоной фильтрации**». Путем соответствующих расчетов можно показать, что глубина этой активной зоны для сравнительно узких галерей (или дрен) **невелика**. Отсюда заключаем, что для галерей и дрен упомянутые линии $M - M'$ и $N - N'$ незначительно отличаются от горизонтальных прямых.

Очевидно приток воды на одну единицу длины висячей галереи (или дрены) может быть представлен в виде

$$q = 2(q_б + q_д). \tag{17-68}$$

Величину $q_б$, входящую в эту формулу, можем найти по зависимости (17-66), считая, что горизонтальная линия тока $M' - M$ является поверхностью водоупора (для потока, относящегося к фрагменту A); при этом кривую депрессии мы сможем построить для этих же условий по зависимости (17-65), как в п. 1°.

Что касается д о н н о г о притока $q_д$, то величина его может быть найдена на основании особого гидромеханического решения задачи о фильтрации в области B (см. гл. 18). При выполнении такого решения считаем, что в области B имеется н а п о р н ы й фильтрационный поток, ограниченный с боков водонепроницаемыми стенками $M'-M$ и $3-2-1$; входным и выходным живыми сечениями этого потока являются сечения $5-3$ и $M-1$; напор, под действием которого происходит фильтрация в рассматриваемой области B, равен

$$Z = h_1 - h_2. \tag{17-69}$$

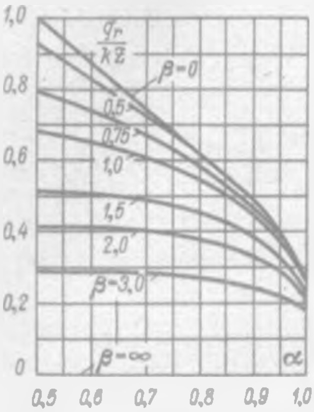


Рис. 17-21. График Р. Р. Чугаева для определения фильтрационного расхода $q_д$, поступающего через дно галереи (дренажной траншеи), показанной на рис. 17-20.

Результаты упомянутого теоретического решения поясненной задачи были представлены Р. Р. Чугаевым в виде графика на рис. 17-21, по которому можно установить величину

$$\frac{q_д}{kZ} = q_r \text{ (обозначение)}, \tag{17-70}$$

в зависимости от коэффициентов α и β:

$$\alpha = \frac{L}{L + \frac{b}{2}}; \quad \beta = \frac{L}{T}; \tag{17-71}$$

зная же величину q_r, легко определить и значение $q_д$:

$$q_д = kZq_r. \tag{17-72}$$

Кривые графика на рис. 17-21 можно аппроксимировать сравнительно простыми зависимостями. Такая аппроксимация дает возможность использовать следующий прием расчета величины q_r, входящей в формулу (17-72) (позволяющий при решении практических задач обходиться без графика на рис. 17-21).

В случае[1] $0{,}95 < \alpha < 1{,}0$ упомянутую величину q_r находим:

а) если $\beta < 3{,}0$, по формуле

$$q_r = A\sqrt[6]{1-a}, \tag{17-73}$$

где коэффициент A имеет следующие значения:

$$A = 0{,}1(7 - \beta) \text{ при } \beta \geqslant 0{,}6;$$

$$A = 0{,}64 \text{ при } \beta \leqslant 0{,}6;$$

б) если $\beta \geqslant 3{,}0$, по формуле

---

[1] Ограничимся рассмотрением только этого случая, который обычно и имеет место при расчете висячих дрен.

$$q_r = \frac{q'_r}{1 + (\beta - 3)q'_r}, \tag{17-74}$$

где q'_r имеет следующие значения:

$$q'_r = 0{,}01\left(29{,}3 - \frac{1}{1 + \frac{b}{6T}}\right) \approx 0{,}29 \text{ при } \frac{1}{1 + \frac{b}{6T}} \leqslant 0{,}75;$$

$$q'_r = 0{,}34 \sqrt[8]{1 - \frac{1}{1 + \frac{b}{6T}}} \text{ при } \frac{1}{1 + \frac{b}{6T}} \geqslant 0{,}75.$$

Необходимо подчеркнуть, что как показывают специальные исследования, в случае

$$\beta > 11{,}0 \text{ и } \alpha < \left(1 - \frac{40}{\beta^2}\right) \tag{17-75}$$

всегда можно пренебречь сопротивлениями в области $M_0 - M - N - N_0$ (см. рис. 17-20) и заменить для расчета действительную висячую галерею (рис. 17-20) воображаемой галереей $M_0 - B - B - N_0$, расположенной на водоупоре (сохранив в этой воображаемой галерее горизонт воды на заданном уровне); величина притока воды и положение кривых депрессии AB для этой условной галереи (рассчитываемой, как указано в п. 1°) практически будут теми же, что и для действительной висячей галереи.

§ 17-10. ПРИТОК ГРУНТОВОЙ ВОДЫ К КРУГЛЫМ ОДИНОЧНЫМ КОЛОДЦАМ

1°. **Круглый колодец, доходящий до водоупора.** Колодец, доходящий до водоупора, называется *совершенным*. Представим на рис. 17-22 разрез такого колодца вертикальной плоскостью, проходящей через его центр; на этом же чертеже изобразим также план колодца (на чертеже показана только половина колодца в плане).

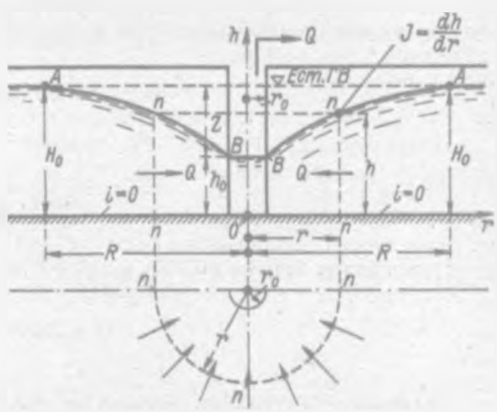


Рис. 17-22. Приток грунтовой воды к круглому совершенному колодцу

Через некоторое время после того, как колодец будет выкопан в грунте, он заполнится водой, причем уровень воды в нем будет совпадать с горизонтом $A - A$, отвечающим естественному горизонту грунтовых вод.

Представим себе, что из такого колодца начали откачивать определенный расход воды $Q = \text{const}$. При этом уровень воды в колодце будет понижаться; по мере понижения уровня расход воды, поступающей из грунта в колодец, будет увеличиваться. В конце концов, наступит такой момент, когда расход воды, поступающей из грунта в колодец, сделается равным расходу Q, откачиваемому из колодца. При этом получим *установившееся* движение грунтовой воды, которому отвечает определенная глубина h_0 в колодце.

Геометрическая форма фильтрационного потока, отвечающая установившемуся движению воды, показана на рис. 17-22:

а) поток сверху ограничен так называемой депрессионной воронкой, представляющей собой поверхность, получающуюся в результате вращения кривой депрессии AB относительно вертикальной оси колодца Oh;

б) живые сечения данного потока представляют собой круглоцилиндрические коаксиальные поверхности, имеющие вертикальные образующие; осью этих цилиндрических поверхностей является ось колодца Oh; каждое живое сечение характеризуется своим радиусом r (ось Or показана на чертеже; здесь же, для примера, дано одно живое сечение $nn-nn$).

Обозначим через r_0 радиус колодца и через R – радиус депрессионной воронки; на расстоянии R от оси колодца Oh естественный уровень грунтовых вод практически не снижается. Глубину воды в этом месте обозначим через H_0. Величина H_0 может быть названа мощностью водоносного слоя. Заметим, что расход Q, отдаваемый колодцем, называется дебитом[1] колодца.

Рассматривая описанное установившееся движение грунтовой воды, поставим цель найти фильтрационный расход Q (дебит колодца), отвечающий заданным глубинам H_0 и h_0, а также уравнение кривой депрессии AB.

Как видно, здесь имеем не плоскую задачу, которую рассматривали до сих пор, а так называемую осесимметричную задачу движения грунтовой воды. Для решения ее возьмем некоторое произвольное живое сечение $nn-nn$, определяемое радиусом r.

Расход воды для этого сечения

$$Q = \omega v, \tag{17-76}$$

где

$$\omega = 2\pi r h, \tag{17-77}$$

причем здесь через h обозначена глубина потока в данном круглоцилиндрическом живом сечении, имеющем площадь ω.

Средняя скорость фильтрации

$$v = kJ, \tag{17-78}$$

где J – уклон кривой депрессии в данном сечении[2]

$$J = \frac{dh}{dr}. \tag{17-79}$$

Подставляя (17-79) в (17-78), имеем:

$$v = k\frac{dh}{dr}. \tag{17-80}$$

Подставляя теперь (17-80) и (17-77) в (17-76), получаем

$$Q = 2\pi r h k\frac{dh}{dr}. \tag{17-81}$$

Разделив переменные, вместо (17-81) находим

$$\frac{Q}{k}\frac{1}{2\pi}\frac{dr}{r} = h\,dh. \tag{17-82}$$

---

[1] Слово «дебит» (франц. «расход», «счёт») не следует смешивать со словом «дебет» (лат. «он должен»).

[2] В зависимости (17-79) знак минус отсутствует, так как ось r направлена против течения.

Интегрируя это дифференциальное уравнение в пределах от $r = r_0$ до $r = R$, получаем

$$\frac{Q}{k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{R} \frac{1}{r} dr = \int_{h_0}^{H_0} h\, dh \tag{17-83}$$

или

$$\frac{Q}{k} \frac{1}{2\pi} ln \frac{R}{r_0} = \frac{H_0^2 - h_0^2}{2} \quad ; \tag{17-84}$$

откуда

$$Q = \pi \frac{H_0^2 - h_0^2}{ln \dfrac{R}{r_0}} k; \tag{17-85}$$

переходя же к десятичным логарифмам, окончательно получим

$$Q = 1{,}36 \frac{H_0^2 - h_0^2}{lg \dfrac{R}{r_0}} k. \tag{17-86}$$

По этой формуле и находят дебит колодца.

Для построения кривой депрессии AB переписываем формулу (17-86) в виде

$$Q = 1{,}36 \frac{h^2 - h_0^2}{lg \dfrac{r}{r_0}} k, \tag{17-87}$$

где h – произвольная глубина; r – отвечающий ей радиус.

Решая эту зависимость в отношении h, имеем

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{Q}{k} \frac{1}{1{,}36} \lg \frac{r}{r_0}}. \tag{17-88}$$

Задаваясь в этой формуле разными r, находим соответствующие им величины h; в результате представляется возможным по вычисленным точкам построить кривую депрессии AB.

Подставляя в (17-88) величину Q по (17-86), получаем второе уравнение для построения кривой депрессии

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{\lg \dfrac{r}{r_0}}{\lg \dfrac{R}{r_0}} (H_0^2 - h_0^2)}. \tag{17-89}$$

Из этого уравнения ясно, что при заданных H_0, h_0 и R кривая депрессии не зависит от коэффициента фильтрации k.

Как видно, для определения дебита колодца Q, а также для построения кривой депрессии AB необходимо знать величину R, т. е. так называемый р а д и у с в л и я н и я к о л о д ц а. Понятие радиуса влияния колодца R носит несколько условный характер: в точке A кривой депрессии (рис. 17-22) уклон свободной поверхности теоретически не может быть равен нулю. Пренебрегая, однако, этим обстоятельством, величину R назначают иногда по данным практики – в зависимости от рода грунта; например, принимают: для мелкозернистого песка $R = 250$ м; для крупнозернистого песка $R = 1000$ м. В литературе также приводятся различные приближенные зависимости для определения R (полученные, в частности, в результате рассмотрения неустановившегося движения грунтовой воды).

Иногда для определения R рекомендуется эмпирическая формула Зихарда:

$$R = 3000Z\sqrt{k}, \tag{17-90}$$

где Z — снижение горизонта воды в колодце, м; k — коэффициент фильтрации, м/с.

Более точное значение R может быть установлено, на основании гидрогеологических изысканий.

Надо обратить внимание на то, что погрешность, получаемая при выборе величины R, мало влияет на окончательные результаты расчета, поскольку R в расчетной формуле (17-86) входит под знак логарифма.

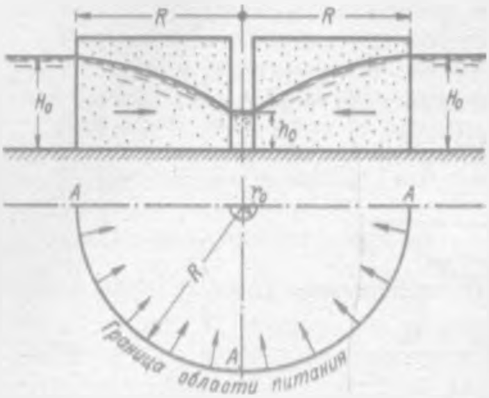


Рис. 17-23. Приток воды к совершенному круглому колодцу (граница области питания имеет в плане форму окружности)

Приведем в заключение следующие два замечания:

1. О границе области питания колодца. Выше мы рассмотрели случай, когда водоносный слой имеет неограниченное простирание. При этом депрессионная воронка оказалась ограниченной в плане окружностью, имеющей радиус R.

Условия фильтрации в рассмотренном выше случае нисколько не изменились бы, если бы водоносный слой оказался ограниченным в плане окружностью AAA радиуса R (рис. 17-23), а не имел бы неограниченного простирания. При таком положении величину $\bar{R}$ можно назвать «радиусом области питания водоносного пласта». Полученная формула здесь вполне приемлема, причем какие-либо условности, связанные с назначением величины R, отпадают.

В практике, однако, встречаются условия, когда граница области питания водоносного пласта значительно отличается (в плане) от окружности AAA, показанной на рис. 17-23. К таким случаям относится колодец, расположенный вблизи берега реки или между двумя параллельно текущими реками и т. п. При таком расположении колодцев живые сечения фильтрационного потока уже не будут представлять собой в плане концентрические окружности. Поэтому полученная выше формула (17-86) для расчета таких колодцев оказывается неприемлемой.

Рис. 17-24. Промежуток высачивания Δ в случае притока воды к колодцу

Расчеты одиночного колодца, имеющего границу области питания водоносного слоя, отличную в плане от окружности, приводятся в специальной литературе.

2. О промежутке высачивания (в случае колодца). Расчетная формула (17-89), найденная для водоносного пласта неограниченного простирания, строго говоря, годна для построения кривой депрессии только при относительно больших величинах h_0, т. е. при относительно малых снижениях Z уровня воды в колодце.

Дело в том, что в действительности кривая депрессии выклинивается всегда выше горизонта воды в колодце на величину промежутка высачивания Δ (рис. 17-24). При выводе же формулы (17-89) мы пренебрегали величиной Δ; однако так можно поступать только тогда, когда глубина воды в колодце h_0 достаточно велика; при $h_0 < 0{,}5H_0$ величина Δ приобретает столь большое значение, что пренебрежение ею влечет за собой сильное искажение кривой депрессии (в ее конце).

Способы определения Δ для колодцев освещаются в специальной литературе. Величина Δ для осесимметричной задачи получается значительно больше, чем для плоской задачи (§ 17-8).

Как показывают соответствующие исследования, формула (17-86) для определения р а с х о д а, несмотря на неучет Δ при ее выводе, дает все же достаточно точные величины Q и в случае больших снижений уровня воды в колодце.

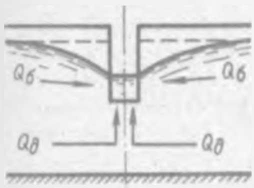


Рис. 17-25. Несовершенный колодец

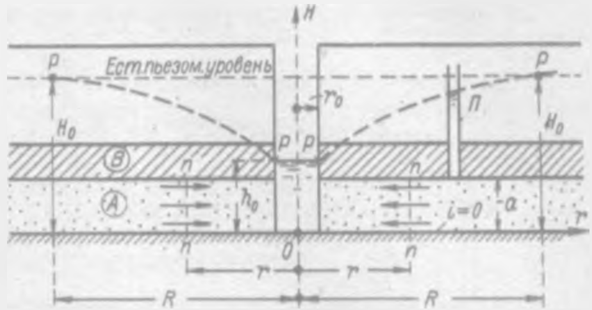


Рис. 17-26. Совершенный артезианский колодец

2°. Круглый колодец, не доходящий до водоупора – несовершенный колодец (рис. 17-25). В отличие от предыдущего случая, здесь вода поступает в колодец не только через его боковые стенки, но и через дно.[1]

Можно сказать, что полный дебит колодца равняется $Q_б + Q_д$, где $Q_б$ – боковой и $Q_д$ – донный приток воды к колодцу. Для определения дебита колодца в этом случае были предложены некоторые экспериментальные формулы, на которых останавливаться не будем.[2]

3°. Совершенный артезианский колодец (рис. 17-26). Для такого колодца получаем не безнапорное, а н а п о р н о е движение воды в водоносном слое A, прикрытом сверху «водонепроницаемым» слоем B.

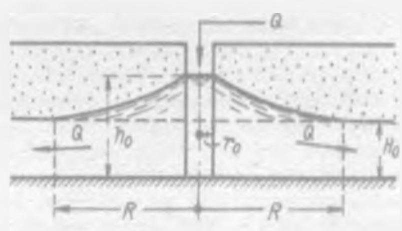


Рис. 17-27. Поглощающий колодец

В отличие от случая, рассмотренного в п. 1°, здесь имеем:

а) живые сечения потока в слое A всюду имеют постоянную высоту

$$h = a,$$

где a – мощность напорного водоносного слоя;

б) кривая депрессии отсутствует. Вместо кривой депрессии AB (рис. 17-22) получаем пьезометрическую линию $P - P$ (рис. 17-26).

Вопрос о величине Q решается так же точно, как и в случае совершенного колодца (п. 1°). В результате получаем расчетную зависимость для Q в виде

$$Q = 2{,}73 \frac{a(H_0 - h_0)}{\lg(R/r_0)} k. \tag{17-91}$$

4°. Совершенный поглощающий (абсорбирующий) колодец (рис. 17-27). Здесь имеем случай, когда вода не откачивается из колодца, а, наоборот, сбрасывается

[1] Имеются в виду колодцы достаточно большого диаметра.

[2] См., например, Н. И. Д р у ж и н и н. Изв. ВНИИГ, т. 37, 40, 42, 1948–1950 гг.

в колодец с поверхности земли (абсорбирующие колодцы устраиваются, нап мер, с целью осушения поверхности земли).

Течение грунтовой воды имеет такой же осесимметричный характер, и в п. 1°. Однако в отличие от этого случая, здесь мы имеем движе грунтовой воды не по направлению к оси колодца, а в противоположн сторону.

Применяя тот же метод рассуждения, что и в п. 1°, окончательно по чаем

$$Q = 1{,}36\,\frac{h_0^2 - H_0^2}{\lg \dfrac{R}{r_0}}\,k. \qquad (17\text{-}$$

§ 17-11. ПЛАНОВАЯ ЗАДАЧА О ПРИТОКЕ ВОДЫ К ГРУППЕ КРУГЛЫХ СОВЕРШЕННЫХ КОЛОДЦЕВ («ВОДОПОНИЖЕНИЕ»). «СЛОЖЕНИЕ» ПРОСТЕЙШИХ БЕЗНАПОРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

В практике встречаются случаи, когда приходится устраивать группу произволь расположенных в плане колодцев. Например, чтобы осушить откопанный котлован, е окружают колодцами (рис. 17-28), из которых откачивают воду. В результате урове грунтовой воды снижается величину d до положения $1-2$ $3-4-5$; при этом котлован ос шается, и грунт, образующий е откосы и дно, делается бол устойчивым.

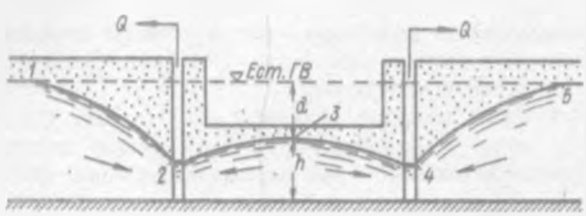


Рис. 17-28. Осушение котлована дренажными колодцами

Как видно, в подобных сл чаях сталкиваемся с необход мостью построения депрессио ной поверхности $1-2-3-4-$

Чтобы пояснить решен этой задачи, обратимся рис. 17-29, на котором дл примера изображены в плане только три колодца: *I*, *II* и *III*.

Положим, что нам требуется найти отметку поверхности депрессии или глубин фильтрационного потока в некоторой произвольной точке a. Очевидно, к этому вопрос и сводится решение указанной задачи.

Наметим на рис. 17-29 вертикальные сечения по линиям $a-I$, $a-II$ и $a-III$. Далее, вращая эти сечения относительно вертикали, проходящей через точку a, совместим их в одной вертикальной плоскости (см. рис. 17-30, на котором вертикаль $a-a$ является общей для всех совмещенных разрезов).

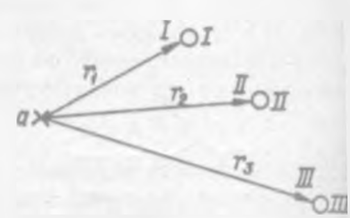


Рис. 17-29. К выводу зависимости Форхгеймера (17-93)

Покажем далее на рис. 17-30 сплошными линиями действительные кривые депрессии по линиям $a-I$, $a-II$ и $a-III$ (см. рис. 17-29), получающиеся, когда из колодцев *I*, *II*, *III* откачивают насосами известные нам расходы Q_1, Q_2, Q_3.

Изобразим затем на рис. 17-30 штриховыми линиями условные кривые депрессии, построенные в предположении, что каждый колодец работает как одиночный (в условиях отсутствия остальных колодцев), причем расход, поступающий в рассматриваемый колодец,[1] равен расходу, поступающему в него в действительности (при наличии остальных колодцев). Например, кривая AB является кривой депрессии, полученной для условий, когда имеется только один колодец *I*, из которого выкачивается действительный расход Q_1.

[1] А следовательно, выкачиваемый из него насосом.

Ясно, что кривую депрессии AB легко можно было бы построить по уравнению (17-88), относящемуся к одиночному колодцу, если бы нам был известен не только расход Q_1, но была бы известна еще и одна глубина (h') в каком-либо месте данного условного фильтрационного потока. Однако глубина h' нам не задана. Имея это в виду, с целью использовать поясненные фиктивные потоки, мы далее вводим в расчет особое пограничное условие (относящееся к точке M, показанной на рис. 17-31; в этой граничной точке, как видно будет из дальнейшего, сумма квадратов глубин, относящихся к отдельным фиктивным потокам, является нам заданной, что является достаточным для решения рассматриваемой задачи). Отметив это обстоятельство, обозначим теперь через h_1, h_2, h_3 глубины в точке a (на вертикали $a-a$), относящиеся к трем показанным на чертеже фиктивным потокам (см. рис. 17-30). Через h обозначим искомую глубину в точке a, относящуюся к действительному фильтрационному потоку (представленному на чертеже сплошной линией).

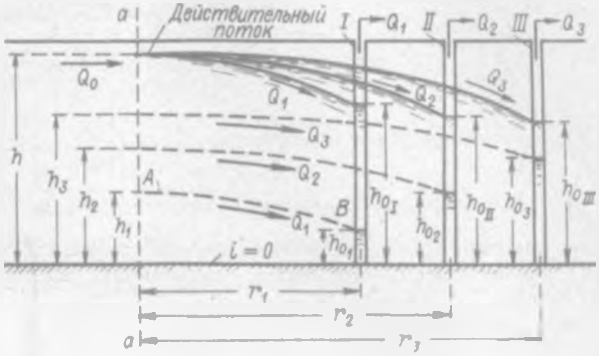


Рис. 17-30. К выводу зависимости Форхгеймера (17-93)

Для глубины h в любой точке поверхности депрессии в случае одновременной работы ряда колодцев Форхгеймер дал следующую теоретическую зависимость:

$$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots + h_n^2, \tag{17-93}$$

где n — число имеющихся колодцев (в нашем примере $n = 3$).

Согласно этой зависимости *квадрат глубины h сложного безнапорного фильтрационного потока в некоторой точке, намеченной на его плане, равен сумме квадратов глубин в этой же точке особым образом подобранных простейших безнапорных фильтрационных потоков* (на которые, так сказать, разлагается рассматриваемый сложный поток).

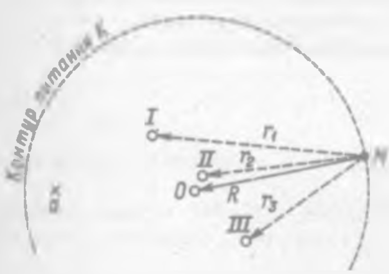


Рис. 17-31. Пограничные условия при решении зависимости (17-99)

Данная общая зависимость, позволяющая осуществлять «сложение» простейших безнапорных потоков (суперпозицию соответствующих функций), может быть использована для расчета не только потока, получающегося в случае группы колодцев, но и для расчета любых других сложных фильтрационных потоков, которые удается «разложить» на простейшие. Эта зависимость была получена Форхгеймером с учетом следующих трех допущений:

1) поверхность водоупора считается строго горизонтальной;

2) величина промежутков высачивания Δ (рис. 17-24) считается равной нулю;

3) живые сечения рассматриваемого действительного фильтрационного потока принимаются в виде цилиндрических поверхностей с вертикальными образующими; направляющие этих цилиндрических живых сечений (являющиеся гидроизогипсами) могут быть кривыми любого вида, причем фильтрационный поток в плане может быть резко изменяющимся.

Условимся в дальнейшем фильтрационный поток, удовлетворяющий указанным трем условиям [к которому может быть приложена зависимость (17-93)], называть **моделью Форхгеймера**.

Зависимость (17-93) получается в результате следующих рассуждений. Рассматривая какой-либо фильтрационный поток (модель Форхгеймера), можно представить его в плане как векторное поле «расходов в точках плана потока»: $q = vh$, где v – средняя скорость по вертикали в той или другой точке потока (в которой измеряется глубина h; см. стр. 510).

Такое векторное поле имеет потенциальную функцию φ (см. стр. 40) в виде

$$\varphi' = -\frac{kh^2}{2}.$$

Действительно, функция φ' зависит только от координат, и частные производные ее по координатам x и y дают проекции вектора q на оси x и y, т. е. величины q_x и q_y:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x} = -h\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right) = q_x;$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial y} = -h\left(k\frac{\partial h}{\partial y}\right) = q_y,$$

где, согласно Дарси и Дюпюи,

$$-k\frac{\partial h}{\partial x} = v_x \text{ и } -k\frac{\partial h}{\partial y} = v_y,$$

причем здесь v_x и v_y – проекции средней скорости v на координатные оси.

Линии равного потенциала, описывающие рассматриваемое векторное поле, будут иметь наименование $\varphi' = -\frac{kh^2}{2} = \text{const}$ или просто $h^2 = \text{const}$, поскольку величина $-\frac{k}{2} = \text{const}$.

Имея в виду последнее обстоятельство и пользуясь методом сложения потенциальных потоков (см. стр. 81), можно, согласно зависимости (3-25′), написать формулу (17-93).

На основании зависимости (17-93) можем утверждать, что *если в какой-либо одной точке М, взятой, например, на границе потока (см. далее рис. 17-31), сумма квадратов глубин фиктивных потоков равна квадрату глубины действительного потока, то такое же соотношение глубины фиктивных потоков и глубины действительного потока будет иметь место во всех остальных точках поверхности депрессии, в частности в точке а.*

Учитывая сказанное, с целью отыскания на основании общей теоретической зависимости (17-93) расчетной формулы для определения глубины действительного фильтрационного потока в точке a (рис. 17-29), поступаем следующим образом.

Интегрируя уравнение (17-82), относящееся к одиночному колодцу, имеем

$$h'^2 = \frac{Q}{\pi k}\ln r + C', \tag{17-94}$$

где h' – глубина потока h при наличии одного колодца; C' – постоянная интегрирования.

Для каждого из n имеющихся колодцев, сообразуясь с (17-94), можем написать следующие выражения для фиктивных глубин в точке (см. вертикаль $a-a$ на рис. 17-30):

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{Q_1}{\pi k}\ln r_1 + C_1, \\ h_2^2 &= \frac{Q_2}{\pi k}\ln r_2 + C_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ h_n^2 &= \frac{Q_n}{\pi k}\ln r_n + C_n, \end{aligned}\right\} \tag{17-95}$$

где $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ – расстояния от оси соответствующих колодцев до рассматриваемой точки (см. рис. 17-29); $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ – известные расходы, определяемые заданной производительностью насосов.

Подставляя (17-95) в (17-93), получаем для искомой глубины выражение

$$h^2 = \sum\left(\frac{Q}{\pi k}\ln r\right) + C, \tag{17-96}$$

где

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n. \tag{17-97}$$

Ограничимся далее рассмотрением простейшего случая, когда

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q_n = \frac{Q_0}{n}, \tag{17-98}$$

где Q_0 – общий расход воды, откачиваемой из всех колодцев.

В этом частном случае вместо (17-96) получаем:

$$h^2 = \frac{Q_0}{n\pi k}\sum(\ln r) + C. \tag{17-99}$$

Постоянную C определяем, исходя из рассмотрения граничных условий водоносного пласта.

Будем считать, что в нашем случае водоносный пласт ограничен в плане контуром питания K (рис. 17-31). Линию этого контура считаем настолько удаленной от рассматриваемой группы колодцев, что для любой точки M контура K можно написать:

$$r_1 \approx r_2 \approx r_3 \approx \ldots \approx R, \tag{17-100}$$

где R – «радиус влияния группы колодцев», или «радиус границы питания водоносного слоя».

Прилагая уравнение (17-99) к какой-либо точке M, расположенной на контуре K, и считая, что глубина H_0 фильтрационного потока в этой точке известна, можем написать:

$$H_0^2 = \frac{Q_0}{n\pi k}\ln R^n + C, \tag{17-101}$$

откуда

$$C = H_0^2 - \frac{Q_0}{n\pi k}\ln R^n. \tag{17-102}$$

Подставляя (17-102) в (17-99), имеем

$$h^2 = H_0^2 - \frac{Q_0}{\pi k}\left[\ln R - \frac{1}{n}\sum(\ln r)\right] \tag{17-103}$$

или

$$h^2 = H_0^2 - 0{,}73\frac{Q_0}{k}\left[\lg R - \frac{1}{n}\lg(r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)\right]. \tag{17-104}$$

Формула (17-104) и является расчетной для случая любой группы совершенных колодцев, когда расходы Q, откачиваемые из этих колодцев, одинаковы и когда плановые размеры проектируемой группы колодцев пренебрежимо малы сравнительно с плановыми размерами области, ограниченной контуром питания K.

В формуле (17-104) имеем следующие обозначения: n – число эксплуатируемых колодцев; Q_0 – расход воды, выкачиваемой насосами из всех колодцев; h – глубина фильтрационного потока в любой точке депрессионной поверхности; $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ – расстояния от этой точки до центров соответствующих колодцев; H_0 – известная глубина в какой-либо точке M контура питания, например, мощность водоносного слоя в естественном состоянии; R – расстояние от точки M до центра группы колодцев; величину R устанавливают на основании данных гидрогеологических изысканий; иногда под R понимают радиус влияния группы колодцев, причем численные значения R принимают те же, что и в случае одиночного колодца.

Часто задача расчета по формуле (17-104) ставится так:

Дано: k, H_0, R, $\frac{Q_0}{n}$, h, где $\frac{Q_0}{n}$ – производительность одного насоса, обслуживающего один колодец;[1] h – глубина фильтрационного потока в центре группы колодцев; эта глубина задается с учетом необходимой степени осушения d (рис. 17-28); дополнительно задается трасса, по которой располагаются колодцы.

Требуется найти: число колодцев n, обеспечивающее заданную степень осушения d; $Q_0 = n\left(\frac{Q_0}{n}\right)$; глубины воды в колодцах h_{0_1}, h_{0_2}, h_{0_3}, ...

При такой постановке вопроса в общем случае величину n, а следовательно, и величину Q_0 по формуле (17-104) отыскивают путем ряда попыток: задаваясь по намеченной трассе разным числом колодцев, а также разным их расположением и определяя по (17-104) искомую величину h.

Установив число колодцев и их расположение в плане и зная дебит каждого колодца, находят глубины воды h_0 в колодцах. При этом поступают следующим образом: рассматривая тот или другой колодец, задаются его радиусом r_0 и затем прилагают зависимость (17-104) к точке депрессионной поверхности, находящейся на расстоянии r_0 от центра рассчитываемого колодца, т. е. к точке, совпадающей со стенкой этого колодца. Очевидно, вычисленная по формуле (17-104) глубина фильтрационного потока для указанной точки и будет представлять собой глубину воды в данном колодце.[2]

Таким образом, для искомой глубины воды h_{0_1}, например, в первом колодце, согласно зависимости (17-104), можем написать расчетную формулу:

$$h_{0_1} = \sqrt{H_0^2 - 0{,}73\,\frac{Q_0}{k}\left[\lg R - \frac{1}{n}\lg\left(r_{0_1} r_2 r_3 \ldots r_n\right)\right]}, \tag{17-105}$$

где r_{0_1} – радиус первого колодца; r_2, r_3, ..., r_n – расстояния от точки, взятой на стенке первого колодца, до центров остальных колодцев.

Установленные величины h_0 и r_0 должны удовлетворять следующим требованиям:[3]

1) внутренние размеры колодца должны быть достаточными для размещения в нем соответствующего насосного оборудования;

2) выходное живое сечение фильтрационного потока не должно быть слишком малым, так как при малом выходном сечении (и при заданном Q) будем получать большие выходные скорости, что может вызвать размыв грунта фильтрационным потоком и возникновение при выходе фильтрационного потока в колодец турбулентного режима, обусловливающего резкое возрастание потерь напора.[4]

Обычно величинами r_0 задаются[5] в пределах $r_0 \approx 75 \div 250$ мм; минимальные допустимые глубины $(h_0)_{мин}$ получаются часто равными $(h_0)_{мин} \approx 4{,}0 \div 8{,}0$ м.

Если трасса, вдоль которой устраиваются колодцы, имеет в плане вид окружности K_0 (рис. 17-32) с радиусом R_0, то рассматривая центральную точку O (см. точку 3 на рис. 17-28), имеем для нее

$$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = R_0, \tag{17-106}$$

---

[1] Предполагается, что дебиты всех колодцев одинаковы.

[2] Промежутком высачивания Δ здесь пренебрегаем (см. выше).

[3] При указанной выше постановке задачи глубины воды h_0 в колодцах должны получаться в общем случае различными.

[4] Небольшое выходное сечение фильтрационного потока нежелательно также в связи с возможностью химического и механического кольматажа («заиления») пор грунта в месте выхода фильтрационного потока.

[5] Задаваясь слишком малым r_0, мы можем по формуле (17-105) получить, вообще говоря, величину h_0^2 отрицательной. При таком положении следует увеличивать r_0.

причем зависимость (17-104) применительно к точке *3* записывается в виде

$$h^2 = H_0^2 - 0{,}73\, n \frac{Q_0}{n} \frac{1}{k} \lg \frac{R}{R_0}. \qquad (17\text{-}107)$$

Это соотношение решается в отношении n или Q_0 без подбора

$$n \frac{Q_0}{n} = Q_0 = 1{,}36 \frac{H_0^2 - h^2}{\lg \frac{R}{R_0}} k. \qquad (17\text{-}108)$$

Формулу (17-108) иногда называют «формулой большого колодца», так как по своему виду она сходна с зависимостью (17-86), относящейся к одиночному колодцу. Очевидно, для осесимметричного расположения колодцев глубины воды в них (при одинаковых радиусах r_0) должны получаться, согласно зависимости (17-105), одинаковыми.

В заключение приведем следующее замечание.

При большом количестве колодцев описанный выше способ построения депрессионной поверхности практически неудобен, так как он требует значительной вычислительной работы. Поэтому в настоящее время, окружая строительные котлованы большим числом скважин (буровых колодцев), расположенных обычно по прямолинейным трассам, для расчета депрессионной поверхности пользуются особым методом, согласно которому отдельные ряды колодцев (совершенных или несовершенных) заменяют совершенными траншеями. Такая замена влечет за собой искажение искомой депрессионной поверхности только в непосредственной близости к линии колодцев, чем пренебрегают.

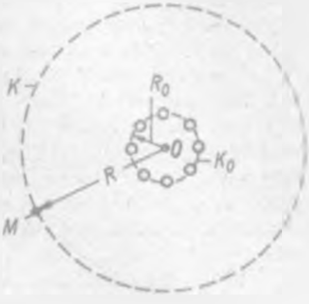


Рис. 17-32. Расположение (в плане) осушительных колодцев по окружности
R – радиус влияния группы колодцев

Выполняя замену колодцев траншеями, пользуются специальными формулами (здесь не приводимыми), устанавливающими связь между уровнями воды в колодцах и другими их параметрами с параметрами расчетных траншей [17-7].

§ 17-12. ФИЛЬТРАЦИЯ ВОДЫ ЧЕРЕЗ ОДНОРОДНУЮ ЗЕМЛЯНУЮ ПЛОТИНУ

Рассмотрим плотину, образованную грунтом, однородным в отношении коэффициента фильтрации, т. е. такую плотину, во всех точках которой коэффициент фильтрации одинаков.

Вначале будем иметь в виду плотину, расположенную на водонепроницаемом основании.

1°. Общий вид фильтрационного потока в теле плотины, расположенной на водонепроницаемом основании. Пограничные условия. Если пренебречь капиллярным поднятием воды, которое имеет место в грунте,[1] то при этом действительная картина фильтрации получает вид, представленный на рис. 17-33. Из этого чертежа видно, что область фильтрации здесь получает форму фигуры *ABCDE*.

Можно различать пять участков границы этой области.

1) Участок *AB*. Во всех точках его напор H одинаков и равен H_1 (см. чертеж). Отсюда заключаем, что *AB* является линией равного напора.

2) Участок *DE*. Этот участок так же, как и *AB*, представляет собой линию равного напора (H_2 = const).

[1] Высотой капиллярного поднятия мы всюду пренебрегаем. Однако в некоторых случаях явление капиллярности может значительно влиять на фильтрацию воды.

3) Участок AE (поверхность водоупора). Как известно, поверхность водоупора представляет собой самую нижнюю линию тока.

4) Участок BC (кривая депрессии). Кривая депрессии является линией равного давления (линией атмосферного давления);[1] кроме того, как известно, кривая депрессии есть самая верхняя линия тока. Характерно для кривой депрессии то обстоятельство, что в любой ее точке

$$H = z, \tag{17-109}$$

где z – превышение рассматриваемой точки над плоскостью сравнения. Надо запомнить, что в *любой точке кривой депрессии напор равен превышению этой точки над плоскостью сравнения.*

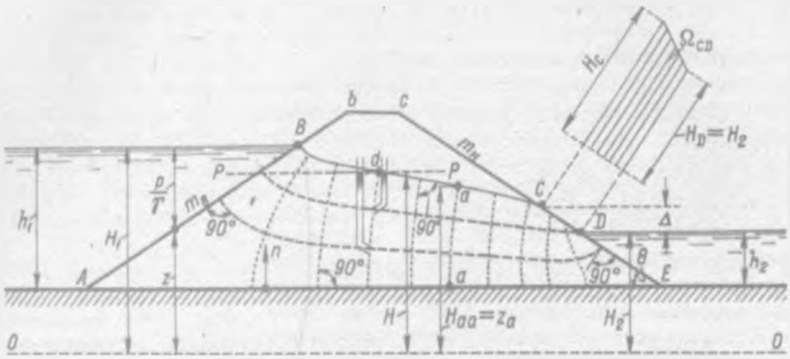


Рис. 17-33. Вид фильтрационного потока в теле земляной плотины на водонепроницаемом основании

A и E – «особые точки» фильтрационного потока

5) Участок CD. Он представляет собой промежуток высачивания воды непосредственно в атмосферу. Этот участок так же, как и кривая депрессии, является линией атмосферного давления, в связи с чем к нему также относится соотношение (17-109). Однако данный участок не является линией тока; линии тока пересекают его под некоторым углом, не равным 90°. Характерно для этого участка то, что напор H вдоль его, согласно зависимости (17-109), изменяется по линейному закону (см. эпюру напоров Ω_{CD} на рис. 17-33).

В точке C линия откоса CE является касательной к кривой депрессии. Следовательно, пьезометрический уклон J_C в точке C должен быть равен уклону низового откоса плотины:

$$J_C = \sin\theta, \tag{17-110}$$

где угол θ отмечен на чертеже.

Как показывают специальные исследования, которых касаться не будем, пьезометрический уклон J_D в точке D теоретически оказывается равным

$$J_D = \infty.$$

Однако область, в пределах которой действуют столь большие градиенты, весьма мала.

[1] Атмосферное давление всюду не учитываем.

Пунктиром на чертеже показаны линии равного напора (живые сечения); штриховой линией – ортогональные им линии тока. Линии равного напора составляют прямой угол с поверхностью водоупора AE. Здесь исключением являются только так называемые особые точки A и E. Линии равного напора являются также ортогональными к кривой депрессии BC. В связи со сказанным каждая точка линий AE и BC за исключением точек A и E характеризуется дополнительным условием:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0, \tag{17-112}$$

где n – нормаль к AE или BC.

Линии тока (за исключением линии тока AE) составляют прямые углы с линиями откосов AB и ED (но не DC).

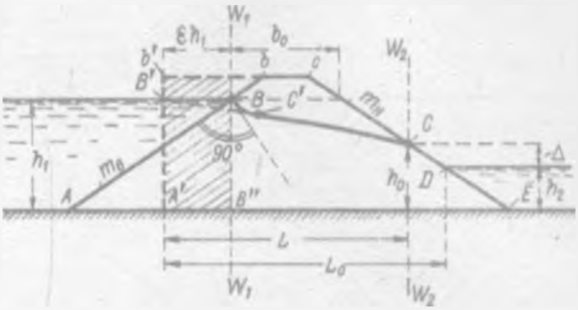


Рис. 17-34. К построению фильтрационного расчета земляной плотины

Если к какой-либо линии равного напора присоединить ряд пьезометров, то горизонты воды в них, как отмечалось ранее, должны установиться в одной горизонтальной плоскости $P-P$, пересекающей кривую депрессии в точке примыкания к ней рассматриваемой линии равного напора (см. на рис. 17-33 точку d).

Гидравлический расчет земляной плотины состоит: а) в определении фильтрационного расхода воды, просачивающейся через плотину; б) в построении кривой депрессии BC, необходимой при проектировании плотины.

2°. Фильтрационный расчет однородной земляной плотины на непроницаемом основании. Для упрощения расчета земляной плотины рядом авторов было предложено заменять действительный трапецеидальный профиль плотины $AbcE$ (рис. 17-34) условным трапецеидальным профилем $A'b'cE$, имеющим вертикальный «откос» (вертикальное ограничение) $A'b'$.

Расстояние εh_1 (где h_1 – глубина в верхнем бьефе) между сечением $W_1 - W_1$, проведенным по урезу воды через точку B, и вертикальным ограничением $A'b'$ условного профиля плотины должно быть выбрано таким, при котором:

а) фильтрационный расход q, отвечающий условному профилю $A'b'cE$, оказывается примерно равным фильтрационному расходу q, отвечающему действительному профилю плотины $AbcE$;

б) кривая депрессии для условного профиля на значительном своем протяжении $C'C$ совпадает с кривой депрессии, относящейся к действительному профилю плотины (рис. 17-34).

Из работ С. Н. Нумерова, посвященных гидромеханическому исследованию фильтрации через земляные плотины (на водопроницаемом основании), вытекает, что коэффициент ε, определяющий указанное расстояние и удовлетворяющий поясненным выше условиям, зависит от величины коэффициента верхового откоса плотины $m_в$, который обычно равен $2 \div 6$.

Для величины ε нами была предложена формула (пригодная и для плотин на проницаемом основании; см. ниже рис. 17-41):[1]

[1] См. [17-11].

$$\varepsilon = \frac{0{,}44}{1 + \dfrac{1}{2m_в}} \approx 0{,}40. \qquad (17\text{-}113)$$

Используя поясненное допущение, вместо действительного профиля $AbcE$ подвергаем расчету условный профиль $A'b'cE$. Такой условный профиль рассчитываем по способу Шафферника (предложенному в 1917 г.)[1] следующим образом.

Из рассмотрения рис. 17-33 можно видеть, что в области низового клина условной плотины $A'b'cE$ (рис. 17-34) должно быть резко изменяющееся движение воды; в остальной же части условного тела плотины – плавно изменяющееся движение.

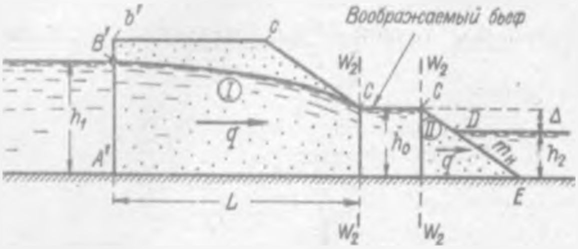


Рис. 17-35. К построению фильтрационного расчета земляной плотины

Учитывая это обстоятельство, разбиваем вертикалью $W_2 - W_2$ всю рассматриваемую условную область фильтрации на две части (на два фрагмента) так, как показано на рис. 17-35.

Имея в виду плоскую задачу и обозначая глубину фильтрационного потока в месте вертикали $W_2 - W_2$ через h_0, рассматриваем далее два выделенных фрагмента плотины в отдельности и находим для каждого из них удельный расход q.

1. Первый фрагмент условной плотины – область плавно изменяющегося движения (рис. 17-35; фрагмент I). В этом случае для определения q можно использовать уравнение Дюпюи (17-59), поскольку здесь имеем плавно изменяющееся движение; это уравнение переписываем в виде

$$q = \frac{h_1^2 - h_0^2}{2L} k = \frac{h_1^2 - h_0^2}{2(L_0 - m_н\Delta)} k, \qquad (17\text{-}114)$$

где L – длина части I плотины (рис. 17-35); Δ – высота промежутка высачивания; $m_н$ – коэффициент низового откоса плотины; L_0 – расстояние от вертикального ограничения $A'b'$ до уреза нижнего бьефа (рис. 17-34):

$$L_0 = \varepsilon h_1 + b_0 + (h_1 - h_2) m_н. \qquad (17\text{-}115)$$

Здесь b_0 – ширина действительного профиля плотины на уровне горизонта воды верхнего бьефа; h_2 – глубина воды в нижнем бьефе.

2. Второй фрагмент условной плотины – область резко изменяющегося движения (фрагмент II – низовой клин). Для определения величины q в случае низового клина плотины (рис. 17-36) используем особый прием, который назовем приемом прямолинейных струек. Согласно этому приему поступаем следующим образом.

Разбиваем горизонтальной линией $D' - D$ рассматриваемый клин плотины на две зоны: верхнюю, через которую проходит расход q_1, и нижнюю, которой отвечает расход q_2.

---

[1] См. [17-6, с. 722].

Искомый расход q будет

$$q = q_1 + q_2. \tag{17-116}$$

Для отыскания величин q_1 и q_2 рассматриваем отдельно верхнюю и нижнюю зоны низового клина.

а) Верхняя зона клина. В пределах этой зоны выделяем элементарную струйку высотой dy (заштрихована на чертеже).

Длина этой струйки

$$l = ym_н, \tag{17-117}$$

где y — заглубление данной струйки под точкой C выхода кривой депрессии на откос.

Потеря напора по длине данной струйки

$$h_l = y. \tag{17-118}$$

Пьезометрический уклон для струйки

$$J = \frac{h_l}{l} = \frac{y}{ym_н} = \frac{1}{m_н}. \tag{17-119}$$

Скорость фильтрации, согласно Дарси,

$$u = kJ = \frac{k}{m_н}. \tag{17-120}$$

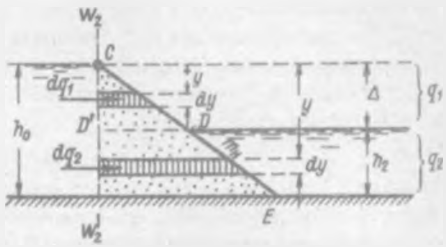


Рис. 17-36. К выводу формулы для расхода q, согласно приему прямолинейных струек (второй фрагмент плотины; область резко изменяющегося движения)

Элементарный удельный расход для струйки

$$dq_1 = \frac{k}{m_н} dy. \tag{17-121}$$

Интегрируя это выражение в пределах от $y = 0$ до $y = \Delta$, получаем:

$$q_1 = \frac{k}{m_н} \Delta. \tag{17-122}$$

б) Нижняя зона клина. Рассматривая в пределах этой зоны такую же элементарную струйку, как и выше, можем для нее написать:

$$\left.\begin{aligned} &l = ym_н;\ h_l = \Delta = \text{const};\ J = \frac{\Delta}{ym_н};\\ &u = k\frac{\Delta}{ym_н};\ dq_2 = k\frac{\Delta}{ym_н} dy. \end{aligned}\right\} \tag{17-123}$$

Интегрируя dq_2 в пределах от $y = \Delta$ до $y = h_0 = h_2 + \Delta$, получаем:

$$q_2 = k\frac{\Delta}{m_н} \ln \frac{h_0}{\Delta}. \tag{17-124}$$

в) Полный расход для всего клина. Подставляя (17-124) и (17-122) в (17-116), получаем уравнение Шафферная:

$$q = k\frac{\Delta}{m_н}\left(1 + \ln \frac{h_0}{\Delta}\right). \tag{17-125}$$

3. Расчетная система уравнений для условного профиля плотины (имеющего вертикальное верховое ограничение).

В результате рассмотрения двух отдельных фрагментов, на которые был разбит условный профиль плотины (рис. 17-35), получили систему двух уравнений (17-114) и (17-125):

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && \frac{q}{k} = \frac{h_1^2 - (h_2 + \Delta)^2}{2(L_0 - m_н \Delta)}; \\ &(\mathrm{II}) && \frac{q}{k} = \frac{\Delta}{m_н}\left(1 + 2{,}3 \lg \frac{h_2 + \Delta}{\Delta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (17\text{-}126)$$

Если поперечное сечение плотины нам задано, а также заданы глубины h_1 и h_2 в верхнем и нижнем бьефах, то указанная система содержит два неизвестных: q и Δ. Эту систему уравнений удобно решать графически: задаваться разными значениями Δ и вычислять по формулам (I) и (II) величины q/k, причем строить две кривые $q/k = f(\Delta)$ соответственно по уравнению (I) и уравнению (II) (точка пересечения этих кривых будет давать искомое значение Δ). В случае, когда воды в нижнем бьефе нет ($h_2 = 0$), данная система легко решается в отношении Δ:

$$\Delta = \frac{L_0}{m_н} - \sqrt{\left(\frac{L_0}{m_н}\right)^2 - h_1^2}. \qquad (17\text{-}127)$$

Зная Δ, находим величину q/k; при $h_2 = 0$ эта величина [см. уравнение (II)]

$$(\mathrm{II}') \qquad \frac{q}{k} = \frac{\Delta}{m_н}; \qquad (17\text{-}127')$$

наконец, определяем q:

$$q = \left(\frac{q}{k}\right)k.$$

Найденная таким образом для условного профиля плотины величина q и будет представлять собой удельный расход для действительного профиля.

4. Построение кривой депрессии для действительного профиля плотины. Зная величину Δ (рис. 17-35), кривую депрессии $B'C$ для первого фрагмента условной плотины строим по уравнению Дюпюи (17-64) или (17-65), полагая в этих уравнениях $h_2 = h_0$. Как видно, этот фрагмент должен рассматриваться как прямоугольный грунтовый массив.

Получив кривую депрессии $B'C$ (рис. 17-34) для условного профиля плотины, далее небольшой участок ее $B'C'$ заменяем проведенной на глаз кривой BC'; кривая BC' должна иметь в точке B касательную, ортогональную к линии откоса. Этим и исчерпывается задача фильтрационного расчета земляной плотины на водонепроницаемом основании.

Из изложенного выше можно видеть, что при заданных h_1 и h_2 кривая депрессии в случае однородной плотины вовсе не зависит от величины коэффициента фильтрации грунта. От коэффициента фильтрации k зависит только величина расхода q: *расход q прямо пропорционален k.*

3°. Дополнительные указания. Частные случаи однородной плотины на непроницаемом основании. Помимо изложенного выше способа, есть еще много других гидравлических способов фильтрационного расчета плотин. Кроме того, существуют еще математические методы решения вопроса о фильтрации воды через земляные плотины (разрабатывавшиеся рядом авторов). Эти последние решения практического применения не находят.

В практике можно встретить следующие частные случаи плотин:

1) плотина без низового клина (так называемая перемычка; рис. 17-37). Здесь, заменяя наклонный откос AB вертикальным ограничением $A'B'$, получаем

для расчета прямоугольный массив $A'b'cD$, который легко рассчитывается по формуле Дюпюи (промежутком высачивания в точке C пренебрегаем);

2) плотина с трубчатым дренажом (рис. 17-38). Этот случай в отношении расчета ничем не отличается от предыдущего;

3) плотина с дренажом в виде банкета из каменной наброски (рис. 17-39).

Практически этот случай плотин можно рассчитывать так же, как предыдущий, намечая низовое ограничение грунтового массива по вертикали $W_2' - W_2$;

4) плотина без верхового клина (перемычка; рис. 17-40). Здесь расчет ведем согласно уравнениям (17-126).

4°. Однородная земляная плотина на водопроницаемом основании. При расчете таких плотин часто поступают следующим образом (рис. 17-41).

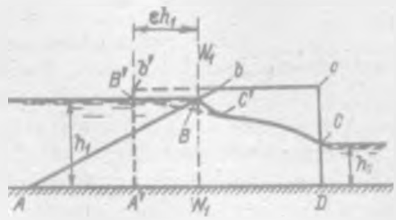


Рис. 17-37. Перемычка

Линию тока, начинающуюся в точке A профиля, принимают за горизонтальную прямую AE. Сделав такое допущение в отношении формы линии тока AE, далее верхнюю часть плотины I (тело плотины) рассчитывают, принимая линию тока AE за поверхность водоупора, причем пользуются методом расчета, изложенным выше. В результате расчета строят кривую

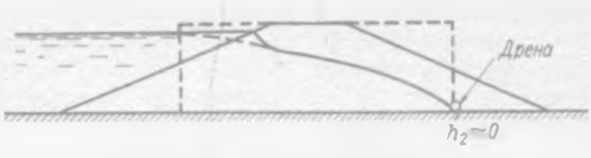


Рис. 17-38. Плотина с дренажом низового клина

депрессии и определяют тот фильтрационный расход воды, который проходит через тело плотины. Для определения расхода воды, просачивающейся через основание плотины в пределах фрагмента II (см. рис. 17-41) области фильтрации, распо-

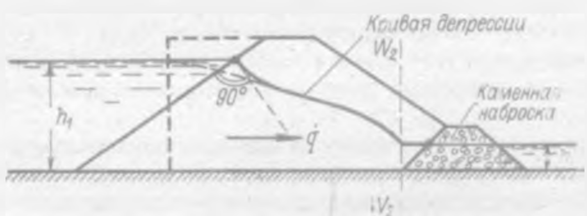


Рис. 17-39. Плотина с дренажным банкетом

ложенной ниже линии AE, применяем способ расчета напорной фильтрации (при таком расчете линию AE рассматривают как подошву так называемого плоского флютбета, работающего при напоре на сооружении, равном Z; см. гл. 18).

При относительно небольшой величине T для расчета плотины на проницаемом основании можно применить еще и следующий прием.[1]

[1] Когда коэффициент фильтрации основания равен коэффициенту фильтрации тела плотины. Надо заметить, что расчеты более сложных случаев земляных плотин рассматриваются в курсе «Гидротехнические сооружения» [17-12].

Согласно С. Н. Нумерову, профиль плотины на рис. 17-41 заменяем для расчета условным профилем с вертикальным ограничением $A''A'b'$, доходящим до водоупора, считая при этом, что глубина воды в верхнем бьефе равна h_1' (см. чертеж). Такое вертикальное ограничение грунтового массива назначаем на расстоянии $\varepsilon h_1'$ от уреза B, причем величину ε принимаем по формуле (17-113).

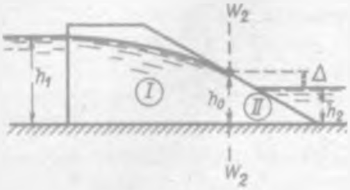


Рис. 17-40. Перемычка

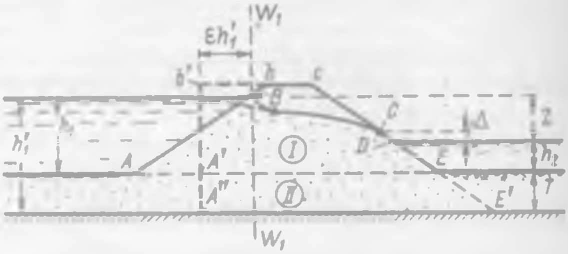


Рис. 17-41. Плотина на водопроницаемом основании

Далее низовой откос плотины cE продолжаем до водоупора (до точки E') и отбрасываем мысленно грунт основания, расположенный правее линии EE'.

В результате таких упрощений расчету приходится подвергать условный профиль $A''b'cE'A''$, расположенный на водонепроницаемом основании $A''E'$.

Заметим, что в случае отсутствия воды в нижнем бьефе при рассмотрении полученного упрощенного условного профиля $A''b'cE'A''$ величину h_2 считаем равной T, т. е. полагаем, что в действительности горизонт грунтовых вод устанавливается на уровне дна нижнего бьефа.

§ 17-13. ЗЕМЛЯНАЯ ПЛОТИНА С ЯДРОМ, РАСПОЛОЖЕННАЯ НА ВОДОНЕПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ

В практике встречаются плотины, в средней части которых устроено ядро, выполненное из маловодопроницаемого грунта (см. на рис. 17-42, *а* область, заключенную между вертикалями W_1 и W_2).

Если низовой и верховой клинья плотины выполняются из песка, то ядро обычно делается из глинистых грунтов, имеющих малый коэффициент фильтрации.

Кривая депрессии, построенная для однородной плотины (штриховая линия на рис. 17-42, *а*), благодаря устройству ядра изменяется следующим образом: перед ядром, в связи с подпором, обусловливаемым маловодопроницаемым ядром, кривая депрессии поднимается; за ядром, в связи с тем, что фильтрационный расход благодаря ядру значительно уменьшается, кривая депрессии понижается[1] (см. кривую депрессии, показанную на чертеже сплошной линией). В пределах самого ядра будем иметь кривую депрессии ab, дающую внутренний промежуток высачивания $\Delta_в$. Вода, просачивающаяся через ядро в пределах промежутка высачивания, свободно падает в порах песчаного грунта низового клина плотины вдоль линии bc. Для расчета плотины с ядром Н. Н. Павловский предложил особый способ, названный им условно «виртуальным». Этот способ расчета заключается в следующем:

---

[1] С уменьшением фильтрационного расхода уменьшатся и скорости фильтрации, следовательно, уменьшатся и уклоны свободной поверхности. Таким образом, в случае плотины с ядром кривая депрессии должна быть более пологой.

а) заменяем маловодопроницаемое ядро, имеющее коэффициент фильтрации k_0 и толщину δ, другим, воображаемым ядром, имеющим коэффициент фильтрации, равный коэффициенту фильтрации k остальной части тела плотины, и толщину

$$\delta_в = \delta \frac{k}{k_0}, \tag{17-128}$$

где $\delta_в$ – называется **виртуальной толщиной** ядра.

Очевидно, фиктивное (виртуальное) ядро, имеющее увеличенный коэффициент фильтрации, но зато и увеличенную толщину, обладает той же сопротивляемостью движению воды, что и действительное ядро;

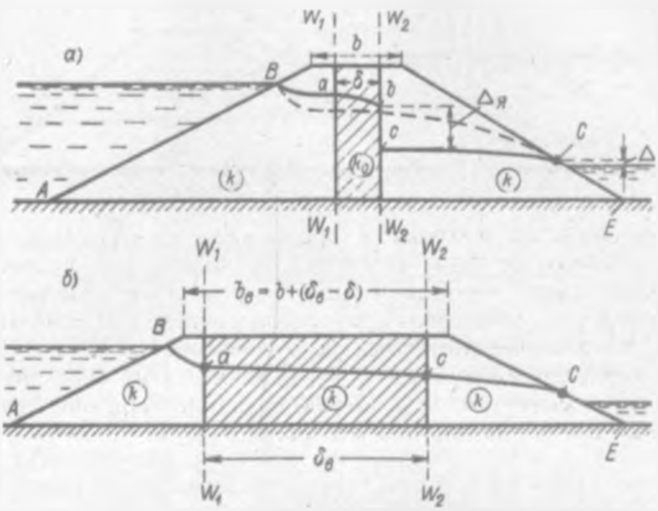


Рис. 17-42. Фильтрационный расчет плотины с ядром (первый «виртуальный способ»)
$\Delta_я$ – внутренний промежуток высачивания

б) после указанной замены (рис. 17-42, *б*) получаем **однородную** плотину, имеющую ширину поверху равную:

$$b_в = b + (\delta_в - \delta), \tag{17-129}$$

где b – ширина поверху действительной плотины.

Полученный однородный профиль рассчитываем, как было объяснено в § 17-12, причем находим q и строим кривую депрессии BC (рис. 17-42, *б*);

в) далее отбрасываем участок кривой депрессии ac и сдвигаем верховой и низовой клинья плотины так, чтобы расстояние между вертикалями W_1 и W_2 снова стало равным δ. Как видно, здесь мы сохранили участки Ba и cC построенной кривой депрессии, а также величину найденного фильтрационного расхода.

§ 17-14. ЗЕМЛЯНАЯ ПЛОТИНА С ЭКРАНОМ, РАСПОЛОЖЕННАЯ НА ВОДОНЕПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ

В практике встречаются также плотины, по верховому откосу которых уложен слой (экран), выполненный из маловодопроницаемого грунта.

Благодаря устройству экрана кривая депрессии, построенная для случая однородной плотины (см. на рис. 17-43 кривую, показанную штриховой линией), изменяется следующим образом: с низовой стороны экрана в теле плотины в связи с уменьшением фильтрационного расхода кривая депрессии становится более пологой (см. кривую cd на рис. 17-43); свободная поверхность фильтрационного потока в пределах экрана представляет собой линию ab, направленную ортогонально к наружной грани экрана; внутренний промежуток высачивания в данном случае оказывается наклонным (см. линию bc на чертеже). Вода, просочившаяся через экран в пределах промежутка высачивания bc, как бы в виде дождя падает на поверхность начального участка кривой депрессии.

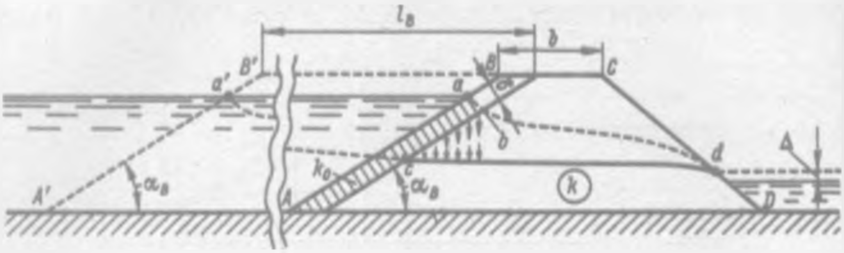


Рис. 17-43. Плотина с экраном
$b-c$ – внутренний наклонный промежуток высачивания

Согласно Н. Н. Павловскому [17-1; с. 666], для расчета такой плотины применяется поясненный выше виртуальный способ. При этом действительный экран, имеющий коэффициент фильтрации k_0 и толщину δ, заменяется воображаемым виртуальным экраном, имеющим коэффициент фильтрации k тела плотины. Наряду с таким изменением величины коэффициента фильтрации экрана верховую грань AB плотины переносим параллельно самой себе в положение $A'B'$, определяемое размером (см. чертеж):

$$l_в = \delta \frac{k}{k_0} \sin\alpha_в. \qquad (17\text{-}130)$$

Полученный однородный профиль $A'B'CD$ рассчитываем, как указано в § 17-12, п. 2°, причем находим расход q и искомую кривую депрессии cd (показана на чертеже сплошной линией).

§ 17-15. ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ ГРУНТ. ДВА «ВИРТУАЛЬНЫХ СПОСОБА» РАСЧЕТА (СПОСОБ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ «ВИРТУАЛЬНЫХ ДЛИН»)

Однородным изотропным (в отношении коэффициента фильтрации) грунтом называется такой грунт, во всех точках которого коэффициент фильтрации имеет одну и ту же величину, причем эта величина для любой точки области фильтрации не изменяется с изменением направления фильтрации в этой точке. Когда коэффициент фильтрации изменяет свою величину с изменением направления фильтрации в данной точке, получаем так называемый анизотропный грунт. Анизотропным пористым телом является, например, торф, который в вертикальном направлении имеет относительно малый коэффициент фильтрации, а в горизонтальном направлении – относительно большой.

Ниже, касаясь, как и в предыдущем изложении, только изотропного грунта, рассмотрим простейшие случаи неоднородного грунта (в отношении коэффициента фильтрации). Представим на рис. 17-44, *а* прямоугольный грунтовый массив, образованный двумя горизонтальными слоями грунта различной водопроницаемости.[1] В этом случае для расчета может быть использован второй виртуальный способ, предложенный Г. Н. Каменским, который заключается в следующем.

Положим, что на рис. 17-44, *а* коэффициент фильтрации второго слоя k_2 больше коэффициента фильтрации первого слоя k_1:

$$k_2 > k_1.$$

В этом случае действительную схему (рис. 17-44, *а*) заменяем виртуальной, представленной на рис. 17-44, *б*, где изображен однородный прямоугольный грунтовый массив той же длины, что и массив на схеме рис. 17-44, *а*. Водоупор

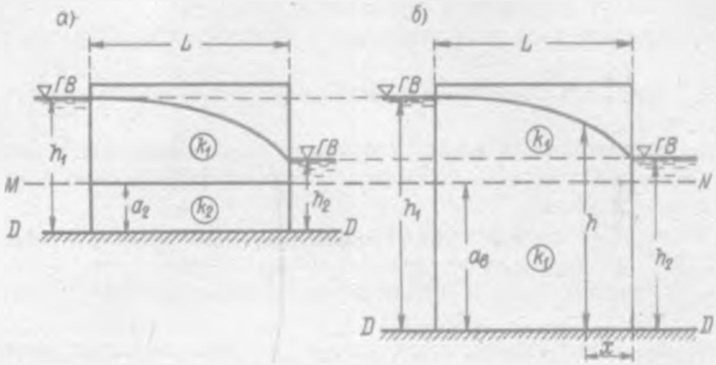


Рис. 17-44. К расчету по второму виртуальному способу

$D-D$ на схеме рис. 17-44, *а* заглублен по отношению к линии $M-N$ на величину a_2 (где a_2 – толщина второго слоя); водоупор же на виртуальной схеме рис. 17-44, *б* заглублен по отношению к тому же уровню $M-N$ на величину

$$a_в = a_2 \frac{k_2}{k_1}, \tag{17-131}$$

которая может быть названа виртуальной толщиной второго слоя.

Если бы вместо соотношения (17-130) имели

$$k_2 < k_1,$$

то, переходя от действительной схемы (рис. 17-44, *а*) к виртуальной (рис. 17-44, *б*), мы должны были бы не опускать водоупор $D-D$, а поднимать его, откладывая вниз от линии $M-N$ величину $a_в$, вычисляемую по той же формуле (17-131).

Получив таким образом виртуальную схему на рис. 17-44, *б* (где грунт однороден), расчет ее ведем по обычной формуле Дюпюи, причем все данные, найденные для виртуальной схемы, принимаем для действительной без всякого изменения.

В заключение подчеркнем следующее важное обстоятельство.

Как видно из сказанного ранее о расчете плотин с ядром (или экраном) и как видно из того, что было приведено в начале этого параграфа, мы располагаем двумя разными виртуальными способами расчета: первым, относящимся к случаю, когда вода фильтрует, в основном, поперек слоев разной водопроницаемости (рис. 17-42), и вторым, относящимся к случаю, когда вода фильтрует, в основном, вдоль слоев разной водопроницаемости

[1] В практике часто встречаются случаи горизонтального напластования грунта.

фильтрация воды из канала (рис. 17-48) получается, когда, во-первых, на некоторой глубине имеется сильно водопроницаемый слой грунта D, играющий роль как бы дренажа, и, во-вторых, когда отвод воды из этого водопроницаемого слоя обеспечен; благодаря этому горизонт грунтовых вод в слое D устанавливается ниже верхней его границы AB.

При наличии указанного дренажного слоя D вода, просачиваясь из канала в грунт, будет как бы свободно падать в порах грунта. Получим фильтрационный поток $abcd$, ограниченный с боков кривыми депрессии ab и cd, которые являются крайними линиями тока. Линии равного напора (они же живые сечения) в данном случае постепенно (по длине потока) будут приближаться к горизонтальным прямым; на некоторой глубине эти линии окажутся практически горизонтальными,[1] а линии тока — вертикальными прямыми. Здесь будет иметь место условие:

$$\Delta h_l = \Delta s. \tag{17-137}$$

Следовательно, потеря напора Δh_l на пути Δs равна Δs. Исходя из этого условия, можем утверждать, что

Рис. 17-47. Потери воды на фильтрацию из канала

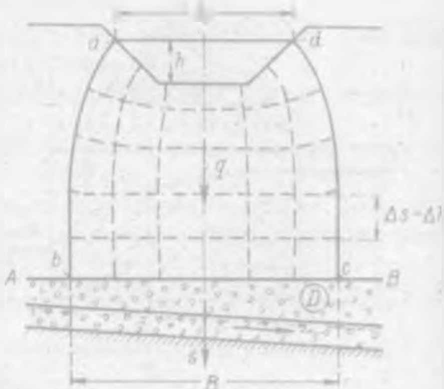


Рис. 17-48. Свободная фильтрация из канала

в указанной области фильтрации пьезометрический уклон

$$J = \frac{\Delta h_l}{\Delta s} = 1{,}0. \tag{17-138}$$

Таким образом, искомый фильтрационный расход (расход, теряемый на единицу длины канала благодаря фильтрации через грунт)

$$q = \omega v = (1B)(kJ) = kB, \tag{17-139}$$

где B — ширина фильтрационного потока (см. рис. 17-48). Эта ширина, согласно Н. Н. Павловскому, для поперечных сечений каналов, обычно встречающихся в практике, может быть принята примерно равной

$$B \approx b_0 + 2h; \tag{17-140}$$

здесь b_0 — ширина потока в канале поверху; h — глубина наполнения канала.

В заключение отметим, что расход q, вычисленный для данного канала по формуле (17-139), т. е. исходя из условий свободной фильтрации, является всегда **большим**, чем расход, вычисленный для этого же канала, исходя из рассмотрения более сложного случая несвободной фильтрации (рис. 17-47). Таким образом, применяя формулу (17-139) к каналам, где имеет место несвободная фильтрация, будем получать потери воды из канала всегда преувеличенными, т. е. определять их с запасом.

§ 17-18. ЗАМЕЧАНИЯ О ТУРБУЛЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ (ОТВЕЧАЮЩЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ОБЛАСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ)

Турбулентный режим движения воды имеет место, например, при фильтрации через каменную наброску или при фильтрации в трещиноватой скальной породе

[1] Анализируя поток, показанный на рис. 17-48, легко убедиться, что горизонтальные линии равного напора являются в то же время линиями атмосферного давления.

и т. п. Скорости фильтрации при турбулентном движении грунтовой воды уже нельзя определять по формуле Дарси (см. § 17-2).

Для расчета турбулентной фильтрации воды, относящейся к квадратичной области сопротивления [см. формулу (17-19)], А. А. Краснопольским еще в 1912 г. было предложено пользоваться зависимостью, записанной в виде

$$u = k_т \sqrt{J}, \qquad (17\text{-}141)$$

где u – скорость фильтрации; J – пьезометрический уклон; $k_т$ – коэффициент фильтрации для турбулентного движения воды.

Надо заметить, что в случае турбулентной фильтрации скоростным напором можно пренебрегать не всегда. Поэтому напорная и пьезометрическая линии при турбулентной фильтрации в общем случае не совпадают. В формуле (17-141), строго говоря, под величиной J в общем случае надо понимать не пьезометрический, а гидравлический уклон (уклон напорной линии).[1]

Рис. 17-49. Турбулентная фильтрация через прямоугольный массив

С. В. Избаш для величины $k_т$ дал следующую эмпирическую зависимость для каменной наброски:

$$k_т = 28{,}7 \frac{n^{1,2}}{\sqrt{(1-n)\psi}} \sqrt{d_{ср}}, \qquad (17\text{-}142)$$

где $k_т$ – в см/с; n – пористость грунта; $d_{ср}$ – средний диаметр камня в см; ψ – коэффициент формы камня (или гальки), равный[2] 1,15 ÷ 2,35.

С. В. Избашем даются также следующие экспериментальные значения $k_т$ (для случая $n = 0{,}4$):

d, см	10	20	40	50	75
$k_т$, см/с	23,5	34,5	50	57	69

При плавно изменяющемся движении (рис. 17-49) под величиной u, входящей в формулу (17-141), можно понимать среднюю скорость v в данном вертикальном живом сечении.

Для расчета фильтрации воды через прямоугольный массив, выполненный каменной наброской (рис. 17-49), рассуждая так же точно, как и при выводе формулы Дюпюи, можно получить, исходя из формулы (17-141) и пренебрегая скоростным напором, следующую зависимость Н. П. Пузыревского (относящуюся к случаю спокойного движения):

$$\left(\frac{q}{k_т}\right)^2 = \frac{h^3 - h_2^3}{3x} \qquad (17\text{-}143)$$

(обозначения ясны из чертежа).

Зная расход q, по уравнению (17-143) можно построить кривую депрессии для прямоугольного массива, выполненного каменной наброской, при наличии турбулентной

---

[1] Отметим, что учитывая скоростной напор (при турбулентной фильтрации), мы должны, пользуясь понятием «скорости фильтрации» v, величину критической глубины и величину скоростного напора вычислять для каменной наброски по формулам Н. Н. Павловского:

$$h_к = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{n^2 g}} \text{ и } h_v = \frac{\alpha v^2}{n^2 2g},$$

где n – пористость наброски.

[2] Подробнее см. С. В. Избаш. Руководство по расчету турбулентной фильтрации в каменнонабросных сооружениях. – Л.: Энергия, 1975.

фильтрации воды в нем. Величину q здесь определяем предварительно по той же формуле (17-143), подставив в нее вместо x величину L (см. рис. 17-49) и вместо h величину h_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

17-1. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1953.

17-2. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. – М.: Госстройиздат, 1955.

17-3. **Ведерников В. В.** Фильтрация из каналов. – М. – Л.: Госстройиздат, 1934.

17-4. **Дренаж** сельскохозяйственных земель/Под ред. Д. Н. Лютина. Пер. с англ. под ред. С. Ф. Аверьянова. – М.: Колос, 1964.

17-5. **Избаш С. В., Халдре Х. Ю.** Гидравлика перекрытия русел. – М – Л.: Госэнергоиздат, 1959.

17-6. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений, Т. II. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

17-7. **Павловская Л. Н., Шестаков В. М.** Методические указания по фильтрационным расчетам водопонизительных установок. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1961.

17-8. **Справочное руководство** гидрогеолога. – Л.: Гостоптехиздат, 1959.

17-9. **Чарный И. А.** Основы подземной гидравлики. – М.: Гостехиздат, 1956.

17-10. **Чугаев Р. Р.** Земляные гидротехнические сооружения: (теоретические основы расчета). – Л.: Энергия, 1967.

17-11. **Чугаев Р. Р.** Подземный контур гидротехнических сооружений: (проектирование подземных частей плотин на нескальном основании). – Л.: Энергия, 1974.

17-12. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения: Глухие плотины – Л.: Высшая школа, 1975.

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ УСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

§ 18-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Будем рассматривать движение грунтовых вод: ламинарное, подчиняющееся закону Дарси; установившееся; напорное; неравномерное резко изменяющееся, т. е. характеризуемое наличием криволинейных живых сечений.

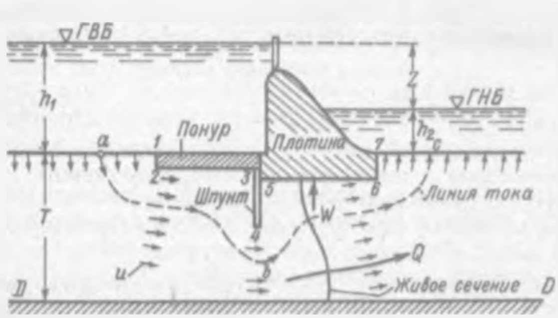


Рис. 18-1. Напорный фильтрационный поток в основании бетонной плотины

Такая фильтрация имеет место, например, в основании бетонных плотин, расположенных на нескальном грунте. Представим на рис. 18-1 поперечное сечение плотины. Поверхность водоупора здесь показана линией $D-D$. Линия $1-2-3-4-5-6-7$, ограничивающая снизу водонепроницаемые части сооружения, называется **подземным контуром** сооружения.

Для увеличения длины подземного контура под плотиной устраивают свайный шпунтовый ряд (шпунт)[1], а перед плотиной – так называемый

[1] На рис. 18-1 показан один шпунт. В практике встречаются случаи, когда под плотиной делают два шпунта (в точках 3 и 6) или три (в точках 2, 3 и 6).

понур, обычно представляющий собой относительно тонкий водонепроницаемый слой бетона и т. п.

Величина Z (см. чертеж) называется напором на сооружении; Z представляет собой разность отметок горизонтов воды верхнего и нижнего бьефов. При отсутствии воды в нижнем бьефе величина Z является превышением горизонта воды верхнего бьефа над дном нижнего бьефа.

Под действием напора на сооружении Z вода фильтрует через дно верхнего бьефа, движется под сооружением и выходит наружу через дно нижнего бьефа (см. стрелки на чертеже). В этом случае получаем напорный фильтрационный поток, ограниченный сверху водонепроницаемой поверхностью $1-2-\ldots-7$; свободной поверхности рассматриваемый поток не имеет. Линии тока (см. например, линию $a-b-c$) здесь криволинейны; ортогональные к ним живые сечения также криволинейны. В связи с этим и получается резко изменяющееся движение воды. Поэтому пользоваться здесь понятием средней скорости v нельзя.

Изучение такого фильтрационного потока необходимо в связи с проектированием подземного контура плотины. Вообще говоря, фильтрация воды под сооружением порождает следующие обстоятельства, которые должны учитываться при проектировании подземного контура:

1) вода, омывающая плотину снизу, оказывает давление W на ее подошву (см. чертеж); сила W давления воды, действующего на плотину снизу, называется противодавлением. Для статического расчета плотины необходимо знать величину W;

2) фильтрация обусловливает потери воды из верхнего бьефа; в связи с этим возникает вопрос о величине этих потерь, т. е. о величине фильтрационного расхода Q;

3) в основании плотины получаются некоторые скорости фильтрации u. Если эти скорости в том или другом месте основания оказываются большими, чем допускаемые, то при этом может возникнуть так называемая суффозия грунта (размыв грунта фильтрационным потоком). В связи со сказанным необходимо знать скорость u в разных точках основания;

4) фильтрационный поток, пронизывая грунт основания, стремится сдвинуть этот грунт в сторону нижнего бьефа. Очевидно, при статическом расчете основания плотины необходимо знать сдвигающую силу, развиваемую потоком. Эта сдвигающая сила зависит от величины пьезометрических уклонов J в разных точках основания.

Проектирование подземного контура с учетом перечисленных обстоятельств изучается в курсе «Гидротехнические сооружения». При этом задача гидравлического расчета ставится следующим образом:

даны: а) подземный контур сооружения, б) напор на сооружении Z, в) область фильтрации; ее размеры и коэффициент фильтрации k;

требуется найти величины: W, Q, а также u и J (для разных точек основания).

Поскольку в данном случае имеется резко изменяющееся движение воды, то решение указанного вопроса усложняется. Для полного решения его приходится отказываться от обычных гидравлических приемов и переходить к особым гидравлическим методам, основанным на использовании методов математической гидромеханики.

Решение задачи о напорной резко изменяющейся фильтрации на основе методов математической гидромеханики было впервые разработано (в 1920—1922 гг.) Н. Н. Павловским, показавшим, что область фильтрации в основании сооружения следует рассматривать как векторное поле скоростей фильтрации, имеющих некоторую потенциальную функцию (см. § 2-4). Ниже мы только в общих чертах поясним исходные позиции этого решения, которое явилось основополагающим в области развития так называемой математической **теории фильтрации**.

Следует сказать, что ввиду сложности математического решения Н. Н. Павловского оно в практике не применяется. В практике используют иногда только некоторые расчетные графики, построенные на основании указанного решения. Вместе с тем математическое решение Н. Н. Павловского представляет большой научный интерес, поскольку на его основе оказывается возможным разрабатывать широко используемые в практике отмеченные выше гидравлические, а также **экспериментальные** методы расчета, которые мы ниже кратко осветим.

Далее всюду будем иметь в виду случай **изотропного однородного** грунта основания плотины ($k = \text{const}$), причем будем рассматривать только **плоскую задачу**.

§ 18-2. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

Представим на рис. 18-2 некоторое напорное сооружение. Полагаем, что фильтрационный поток, возникающий в основании этого сооружения, может быть заменен сплошной «фильтрующей средой», причем мы имеем возможность пользоваться понятием скорости фильтрации u (см. § 17-2).

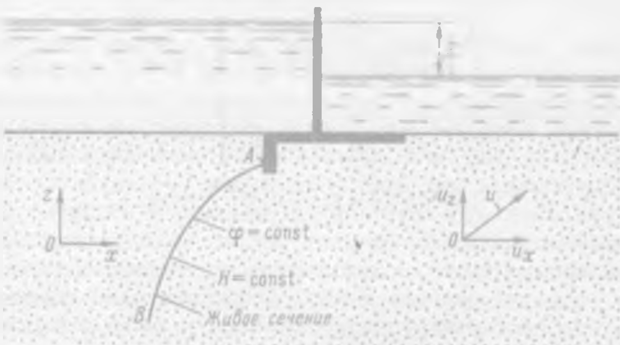


Рис. 18-2. К выводу уравнений (18-5)

Согласно Н. Н. Павловскому, считаем, что отмеченная модель «сплошного фильтрационного потока» может рассматриваться в предположении, что здесь мы имеем движение воды:

а) ламинарное, к которому приложима формула Дарси (7-13);

б) потенциальное (безвихревое), имеющее соответствующую потенциальную функцию.[1]

В разных точках основания скорость фильтрации u, вообще говоря, различна как по величине, так и по направлению. В связи с этим обстоятельством область основания можно рассматривать как **поле скоростей различной величины и направления**. Равным образом и гидромеханическое давление p в разных точках основания в общем случае **различно**.

[1] Обратим внимание на то, что рассматриваемый здесь случай ламинарного потенциального движения принципиально отличается от рассмотренного ранее случая ламинарного движения жидкости в напорной трубе (§ 4-4), где мы имеем ламинарное **вихревое** движение.

Таким образом, в случае **плоской задачи** имеем три неизвестные: u_x, u_z, p. Эти величины изменяются при переходе от одной точки основания к другой, т. е.

$$u_x = f_1(x, z);\; u_z = f_2(x, z);\; p = f_3(x, z). \tag{18-1}$$

Обозначим напор[1] в точке a через H.

Для данной точки a можно написать:

а) проекция пьезометрического градиента на ось x (пьезометрический уклон вдоль оси x)

$$J_x = -\frac{\partial H}{\partial x}; \tag{18-2}$$

б) проекция пьезометрического градиента на ось z (пьезометрический уклон вдоль оси z)

$$J_z = -\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{18-3}$$

Выше, согласно Дарси, имели

$$u = kJ. \tag{18-4}$$

Учитывая (18-2)–(18-4), можем для компонентов скорости фильтрации в произвольной точке a написать

$$u_x = kJ_x;\; u_z = kJ_z. \tag{18-5}$$

Подставляя в эти зависимости выражения (18-2) и (18-3), получаем два дифференциальных уравнения; в качестве третьего уравнения используем уравнение несжимаемости жидкости в дифференциальной форме (3-51). В результате для отыскания трех величин u_x, u_z и p получаем следующую систему трех уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & u_x = -k\dfrac{\partial H}{\partial x}; \\ \text{(II)} & u_z = -k\dfrac{\partial H}{\partial z}; \\ \text{(III)} & \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \end{array}\right| \tag{18-6}$$

Уравнения (18-6) и называются основными дифференциальными уравнениями установившегося движения грунтовых вод. Эти уравнения и кладутся в основу математического решения Н. Н. Павловского. Обратим внимание, что первые два уравнения системы (18-6) представляют собой, собственно, формулу Дарси, записанную в дифференциальной форме.

§ 18-3. НАПОРНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ. ЛИНИИ РАВНОГО ПОТЕНЦИАЛА

1°. **Напорная функция.** Известно [см. (17-3)], что в рассматриваемом случае напор H выражается зависимостью

$$\boxed{H = z + \frac{p}{\gamma}}. \tag{18-7}$$

---

[1] Напомним, что в случае грунтовых вод понятия полного и потенциального напоров совпадают [см. зависимость (17-3)].

Напор H в общем случае неодинаков в разных точках области фильтрации, т. е. H есть функция координат x и z:

$$H = H(x, z). \tag{18-8}$$

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, величину H называют **напорной функцией**.

2°. Потенциал скорости фильтрации. Выше получили основные дифференциальные уравнения движения грунтовых вод (§ 18-2). Для упрощения записи их введем новое обозначение:

$$\boxed{\varphi = -kH.} \tag{18-9}$$

Функция φ так же, как и функция H, зависит только от координат:

$$\varphi = \varphi(x, z). \tag{18-10}$$

Пользуясь обозначением (18-9), два первых дифференциальных уравнения системы (18-6) можно переписать в форме:

$$\boxed{u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};} \tag{18-11}$$

$$\boxed{u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.} \tag{18-12}$$

Из (18-11) и (18-12) видно, что компоненты скорости фильтрации (u_x, u_z) являются частными производными по соответствующим координатам функции φ, зависящей только от координат. Именно поэтому заключаем, что *ламинарное движение грунтовых вод является движением потенциальным (безвихревым), имеющим потенциал скорости φ (потенциальную функцию φ поля скоростей фильтрации)*, см. § 3-5.

3°. Линии равного потенциала скорости фильтрации. Выше была приведена зависимость (18-10). Рассматривая ее, можно видеть, что уравнение

$$\varphi(x, z) = \text{const} \tag{18-13}$$

дает некоторую кривую, во всех точках которой потенциал скорости одинаков: $\varphi = \text{const}$. Такая кривая называется **линией равного потенциала**, или **эквипотенциалью**.

В пределах области фильтрации можно наметить ряд эквипотенциалей: φ_1, φ_2, φ_3, ..., причем получим семейство эквипотенциальных линий.

Так как φ связана с H зависимостью (18-9), в которой $k = \text{const}$, то ясно, что линии равного значения φ (эквипотенциали) будут в то же самое время и **линиями равного напора** H.

Из (18-11), (18-12) и (18-6) видно, что по течению (по направлению скоростей) величина φ должна увеличиваться, а величина H должна уменьшаться. Поэтому величины φ, выражающие наименование линий $\varphi = \text{const}$, по течению должны увеличиваться ($\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \ldots$); величины же H, выражающие наименование линий $H = \text{const}$ (которые совпадают с линиями $\varphi = \text{const}$), по течению должны уменьшаться ($H_1 > H_2 > H_3 \ldots$).

Легко убедиться, что *эквипотенциали* $\varphi = \text{const}$, *представляющие собой линии равного напора* $H = \text{const}$, *являются в то же время и живыми сечениями* (см. например, линию AB на рис. 18-2).

Действительно, линии равного напора (линии равной удельной энергии) должны характеризоваться тем, что линии тока по отношению к ним, так же как и по отношению к живым сечениям, должны быть *ортогональными*.

Справедливость этого положения легко доказать от противного. Предполагаем, что скорость, которая является касательной к линии тока, не ортогональна к линии $H = \text{const}$. Эту скорость можем разложить на две составляющие: одну — нормальную к линии $H = \text{const}$ и другую — касательную к линии $H = \text{const}$. Очевидно, наличие касательной составляющей скорости показывает, что движение воды происходит частично вдоль линий $H = \text{const}$, что для реальной жидкости в случае установившегося движения невозможно (удельная энергия H потока вдоль течения должна уменьшаться).

§ 18-4. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Учитывая выражение (18-9), систему трех дифференциальных уравнений, полученную в § 18-2, можем переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} & u_x &= -k\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ &\text{(II)} & u_z &= -k\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ &\text{(III)} & &\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right| \qquad (18\text{-}14)$$

Задача о резко изменяющемся движении грунтовых вод заключается в совместном решении этих уравнений, выраженных в частных производных.

Данные три уравнения можно привести к одному дифференциальному уравнению второго порядка. С этой целью дифференцируем основные уравнения (I) и (II) системы (18-14), соответственно по x и z, при этом получаем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -k\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}; \qquad (18\text{-}15)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -k\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \qquad (18\text{-}16)$$

Далее подставляем (18-15) и (18-16) в уравнение (III) системы (18-14), в результате чего имеем (после сокращения величины k)

$$\underline{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0.} \qquad (18\text{-}17)$$

Это соотношение дает зависимость H от координат в дифференциальной форме.

Уравнение вида (18-17) называется уравнением Лапласа.

Как видно в случае движения грунтовых вод напорная функция $H(x, z)$ во всех точках области фильтрации должна удовлетворять уравнению Лапласа. Другими словами, во всех точках *области фильтрации сумма вторых частных производных от H по x и по z должна равняться нулю.* Функция, обладающая таким свойством, т. е. удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической функцией. Следовательно, напорная функция $H(x, z)$ должна быть гармонической функцией.

Так как H и φ связаны между собой зависимостью (18-9), то уравнение Лапласа (18-17) можно переписать в виде

$$\underline{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.} \qquad (18\text{-}18)$$

Отсюда ясно, что потенциал скорости φ также должен быть гармонической функцией.

Математическое решение задачи о резко изменяющейся фильтрации заключается в отыскании такой функции $H(x, z)$ или функции $\varphi(x, z)$, которая бы удовлетворяла уравнению Лапласа, а также особым граничным условиям.

§ 18-5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Наметим на уровне дна нижнего бьефа сооружения (рис. 18-3) плоскость сравнения OO. Через d обозначим превышение дна верхнего бьефа над плоскостью сравнения. Начало оси z расположим на уровне плоскости сравнения OO.

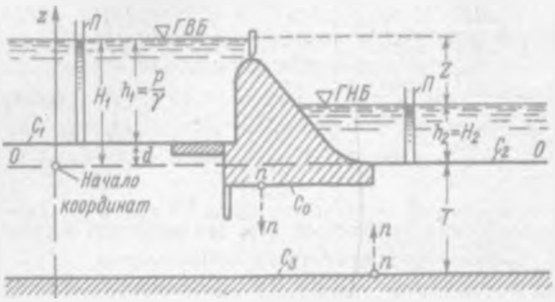


Рис. 18-3. Граничные условия
Границы потока: C_1, C_2, C_3, C_0

Выше было указано, что напорная функция H в каждой точке области фильтрации должна удовлетворять уравнению Лапласа. Выясним теперь, каким дополнительным условиям данная функция должна удовлетворять на границах области фильтрации.

Границы области фильтрации обозначим следующим образом:

C_1 — линия дна верхнего бьефа; C_2 — линия дна нижнего бьефа; C_3 — поверхность водоупора; иногда величина T, определяющая положение поверхности водоупора (см. чертеж), в расчетной схеме сооружения принимается $T = \infty$; при этом, естественно, граница C_3 исчезает (уходит в бесконечность); C_0 — подземный контур сооружения. Линии C_1, C_2, C_3 и C_0 ограничивают область фильтрации.

Рассмотрим каждую из указанных граничных линий в отдельности.

Линия C_1. Напор во всех точках линии C_1 одинаков и равен

$$H = H_1 = h_1 + d = \text{const}, \tag{18-19}$$

где h_1 — глубина воды в верхнем бьефе.[1]

Таким образом, линия C_1 является линией равного напора: $H_1 = \text{const}$ (H_1 — превышение горизонта воды в верхнем бьефе над плоскостью сравнения). Линия C_1 является также входным живым сечением фильтрационного потока.

Линия C_2. Напор во всех точках линии C_2 также одинаков и равен

$$H = H_2 = h_2 = \text{const}, \tag{18-20}$$

где h_2 — глубина воды в нижнем бьефе.

Линия C_2 — линия равного напора $H_2 = \text{const}$ (H_2 — превышение горизонта воды нижнего бьефа над плоскостью сравнения). Эта линия кроме того является выходным живым сечением фильтрационного потока.

Линия C_3. Наметим нормаль nn к линии C_3. Обозначим через u_n скорость движения воды вдоль этой нормали. С одной стороны, величину

---

[1] Напомним, что напор в данной точке (например, в точке C_1) представляет собой превышение горизонта воды в пьезометре $П$, приключенном к рассматриваемой точке над плоскостью сравнения.

скорости u_n можно выразить (согласно Дарси) так:

$$u_n = -k\frac{\partial H}{\partial n}; \tag{18-21}$$

с другой же стороны, учитывая, что линия C_3 является **линией тока** (см. ниже), можем написать, что

$$u_n = 0. \tag{18-22}$$

Сопоставляя (18-22) и (18-21), видим, что для всех точек границы C_3 напорная функция H (x, y) должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0. \tag{18-23}$$

Это условие показывает, что линии равного напора $H = \text{const}$ должны подходить к C_3 **нормально**; только при таком положении будет иметь место равенство (18-23).

Линия C_0. Она является **верхней граничной линией тока**. Проводя в любом месте этой линии нормаль к ней (nn) и рассуждая так же, как и выше, можно показать, что в любой точке линии C_0 должно удовлетворяться условие (18-23).

Следовательно, линии равного напора $H = \text{const}$ должны подходить нормально и к C_0 (к подземному контуру).

§ 18-6. ЛИНИИ ТОКА. ФУНКЦИЯ ТОКА. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТКА

1°. Дифференциальное уравнение линии тока. Как известно, при установившемся движении линии тока представляют собой траектории жидких частиц. При этом вектор скорости движения жидкой частицы в любой точке касателен к линии тока, проходящей через эту точку.

Изобразим (рис. 18-4) произвольную линию тока s. Наметим на ней точку 1, имеющую координаты x и z. Наметим далее на этой же линии точку 2, имеющую координаты $(x + dx)$ и $(z + dz)$.

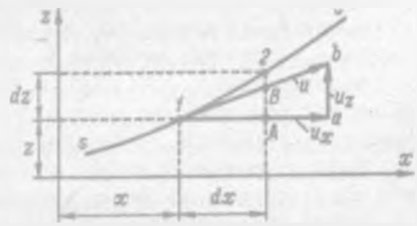


Рис. 18-4. К выводу дифференциального уравнения линии тока

С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка малости кривую $1-2$ можно заменить касательной прямой $1-B$. При этом получаем

$$\left.\begin{aligned} \overline{1-A} &= dx; \\ \overline{A-B} &= dz. \end{aligned}\right\} \tag{18-24}$$

Рассматривая треугольник $1-A-B$ и треугольник скоростей $1-a-b$, видим, что они подобны. В связи с этим можно написать, учтя дополнительно (18-24), что

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z} \tag{18-25}$$

или

$$u_x dz - u_z dx = 0. \tag{18-26}$$

Так как точки 1 и 2 взяты на линии тока произвольно, то (18-26) справедливо для любой точки этой линии тока. Следовательно, выражение (18-26) *можно рассматривать как дифференциальное уравнение линии тока.*

2°. **Функция тока ψ.** Уравнение (18-26) можно проинтегрировать следующим образом.

Положим, что существует некоторая функция координат $\psi(x, z)$, которая удовлетворяет условиям

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad u_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{18-27}$$

Подставляя равенства (18-27) в уравнение (18-26), получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz = 0. \tag{18-28}$$

Рис. 18-5. Физический смысл функций тока ψ

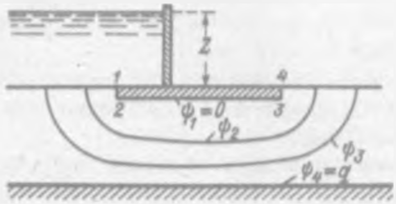


Рис. 18-6. Принимаемые наименования функций ψ

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, является полным дифференциалом функции $\psi(x, z)$. Поэтому (18-28) можно переписать в виде:

$$d\psi = 0, \tag{18-29}$$

что после интегрирования дает

$$\psi(x, z) = \text{const}. \tag{18-30}$$

Таким образом, оказывается, что существует некоторая функция $\psi(x, z)$, которая во всех точках данной линии тока приобретает одно и то же значение. Для разных линий тока будем получать различные значения ψ.

Можно сказать, что каждая линия тока характеризуется своим численным значением ψ и является линией равного значения функции ψ. Функция ψ называется функцией тока или функцией течения.

Если в уравнении (18-30) будем задавать разные ψ ($\psi_1 = \text{const}$, $\psi_2 = \text{const}$ и т. д.) и строить по этому уравнению соответствующие кривые, то в результате получим семейство линий тока.

3°. **Физический смысл функции ψ.** Представим себе две линии тока: ψ_1 и ψ_2 (рис. 18-5). Обозначим через Δq величину расхода воды, текущей между двумя названными линиями тока. Можно показать, что

$$\Delta q = \psi_2 - \psi_1, \tag{18-31}$$

т. е. *разность величин ψ, относящихся к двум соседним линиям тока равна расходу воды, протекающей между этими линиями тока.*

Изобразим на рис. 18-6 какое-либо сооружение, при помощи которого создается подпор Z. Как известно, первой (самой верхней) линией тока является линия подземного контура сооружения. Обозначим эту линию тока через ψ_1, причем припишем ψ_1 величину, равную нулю. При таком условии можем сказать, что наименование следующей линии тока ψ_2 выражает расход воды, протекающей между подземным контуром и данной линией тока.

Ясно, что при указанном условии (в отношении величины ψ_1) весь расход воды, протекающей под сооружением, будет выражать наименование последней линии тока, совпадающей с поверхностью водоупора (см. на рис. 18-6 линию тока ψ_4; $\psi_4 = q = \text{const}$).

Как видно, линии тока (линии $\psi = \text{const}$) могут рассматриваться как «линии равных расходов» ($q = \text{const}$), в указанном выше смысле.

4°. Связь между функцией тока ψ и потенциалом скорости φ. Сопоставляя уравнения (18-27) и (18-12), получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z};\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{18-32}$$

Именно эти соотношения и связывают функции φ и ψ.

Можно показать, что функция ψ так же, как и функция φ, должна удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0; \tag{18-33}$$

следовательно, ψ является гармонической функцией.

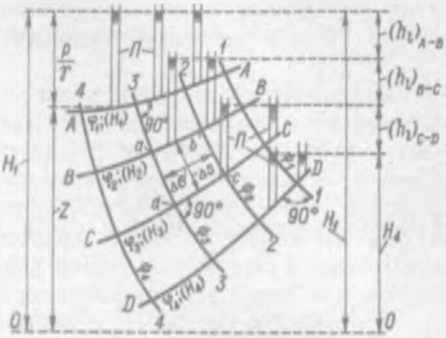


Рис. 18-7. Фрагмент гидродинамической сетки

$H_1 > H_2 > H_3 > H_4$; $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$

Функции φ и ψ есть сопряженные гармонические функции; зная φ, можно найти функцию ψ.

5°. Гидродинамическая сетка. Так как линии φ представляют собой живые сечения, то можно утверждать, что линии φ и ψ образуют *ортогональную сетку*, которая называется *гидродинамической*. Ее можно построить для заданной области фильтрации, решив уравнение Лапласа для этой области.

Представим на рис. 18-7 некоторый фрагмент такой сетки. Поскольку линии φ являются в то же время и линиями равного напора H, то горизонты воды в пьезометрах $П$, приключенных к разным точкам одной и той же линии φ, должны устанавливаться в одной горизонтальной плоскости; превышение этой плоскости над плоскостью сравнения OO будет давать величину H для данной линии φ.

Обозначим через $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ следующие величины

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_n - \varphi_{n-1};\\ \Delta\psi &= \psi_n - \psi_{n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{18-34}$$

Если линии $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ проведены так, что[1] $\Delta\varphi = \Delta\psi$, т. е. если указанные линии проведены через одинаковые интервалы $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$, то сетка должна получиться *квадратичной*: любая клетка такой сетки, например клетка $abcd$, будет представлять собою криволинейный квадрат, характеризуемый условием

$$\Delta s = \Delta\sigma, \tag{18-35}$$

где величины Δs и $\Delta\sigma$ ...

[1] Заметим, что φ и ψ имеют одинаковую размерность: $[L^2]/[T]$, например, см²/с или м²/с [см. зависимость (18-9) и (18-31)].

Если в одном случае линии AA, BB, CC и т. д. (см. чертеж) представляют собой линии φ, а линии $1-1$, $2-2$, $3-3$ и т. д.— линии ψ, то в другом возможном случае (однородного грунта) AA, BB, CC и т. д. будут представлять собой линии ψ, а $1-1$, $2-2$, $3-3$ и т. д.— линии φ.

Таким образом, данная сетка характеризует две кинематические схемы. Эти схемы называются **взаимными** (прямой и обратной).

§ 18-7. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ Н. Н. ПАВЛОВСКОГО. МЕТОДЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Как отмечалось выше, при решении вопросов резко изменяющейся фильтрации методами математической теории, нам приходится отыскивать такую функцию $H(x, z)$ или $\varphi(x, z)$, которая удовлетворяла бы уравнению Лапласа, а также соответствующим граничным условиям. Зная указанную функцию, легко найти $\psi(x, z)$, причем пользуясь зависимостями $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$, мы можем построить гидродинамическую сетку. Располагая же гидродинамической сеткой, полученной для данного конкретного случая, можно легко решать (см. ниже) все практические задачи, поясненные в § 18-1.

Основным и самым трудным вопросом здесь является решение уравнения Лапласа (отыскание функции φ или H). При решении этого уравнения для различных схем подземного контура приходится пользоваться специальными математическими методами: методами функции комплексного переменного, в частности, методом конформных отображений и т. п. Этот вопрос рассматривать не будем — он изучается в математической физике.

Надо отметить, что окончательные расчетные зависимости, полученные Н. Н. Павловским методом математической теории фильтрации, оказались настолько сложными, что пользоваться ими в практической обстановке, как правило, не представляется возможным (в эти зависимости входят различные специальные функции: эллиптические интегралы, эллиптические синусы и т. п.). Громадное большинство практически важных задач вообще не может быть решено до конца методами математической гидромеханики, в связи со слишком большими трудностями, встречающимися при таком решении.

Как отмечалось ранее, математическая теория фильтрации представляет главным образом научный интерес. На базе этой теории можно разрабатывать практические приближенные способы расчета. Кроме того, пользуясь данной теорией, можно для некоторых простейших частных случаев составлять расчетные графики, которые иногда могут находить применение в практике.

Учитывая такое положение, при построении гидродинамической сетки обычно приходится вовсе отказываться от указанного выше теоретического метода и пользоваться или особым экспериментальным методом — методом электрогидродинамических аналогий (предложенным Н. Н. Павловским; см. § 18-11), или графическим методом (предложенным Ф. Форхгеймером), согласно которому линии тока и равного напора проводятся сперва просто на глаз; затем положение их уточняется до тех пор, пока всюду (по всей области фильтрации) не получим квадратичную ортогональную сетку, образованную линиями φ и ψ. Для не очень сложных схем при известном опыте гидродинамическая сетка может быть построена графическим методом достаточно правильно.

В связи со сложностью построения гидродинамической сетки в литературе появились также различные инженерные (технические) методы, которые позволяют решать главнейшие практические задачи, не прибегая к построению гидродинамической сетки. В основу их разработки обычно кладется теория фильтрации Н. Н. Павловского. Это «метод фрагментов» Н. Н. Павловского, относящийся только к особому (частному) случаю плотины – плотины системы А. М. Сенкова при неглубоком расположении водоупора; методы виртуальных длин В. С. Козлова и асимптотических решений С. Н. Нумерова, относящиеся только к редко встречающемуся частному случаю обычных плотин при неглубоком расположении водоупора (когда водопроницаемое основание плотины можно рассчитывать, как горизонтальную трубу, имеющую далеко отстоящие друг от друга отдельные местные сопротивления; см. гл. 5); метод коэффициентов сопротивления Р. Р. Чугаева, относящийся к общему случаю обычной плотины, расположенной на однородном водопроницаемом основании любой мощности [18-10].

§ 18-8. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТКА В СЛУЧАЕ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ

Представим, для примера, на рис. 18-8 [redacted] двушпунтового флютбета. В отношении этого чертежа сделаем следующие

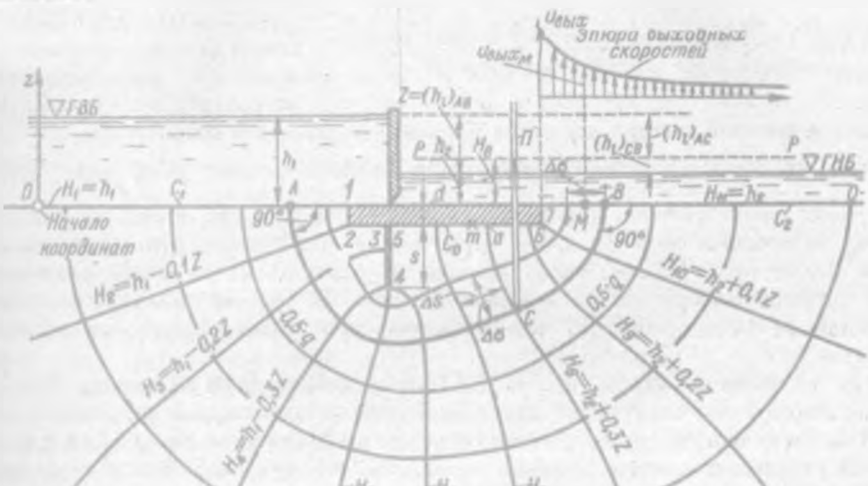


Рис. 18-8. Гидродинамическая сетка в случае гидротехнического сооружения

1) две линии тока всегда заранее известны: C_0 и C_3; равным образом заранее (до выполнения расчета) известны две линии равного напора: C_1 и C_2;

2) так как линии равного напора ортогональны линиям тока, то:

а) все линии равного напора должны быть ортогональны подземному контуру и поверхности водоупора;

б) все линии тока должны быть ортогональны дну верхнего и дну нижнего бьефов;

3) величина фильтрационного расхода воды, движущейся между двумя линиями тока, постоянна по длине потока.

Рассмотрим линию тока ACB. В ее точке A напор $H = h_1$, в точке B напор $H = h_2$. Очевидно, жидкая частица, двигаясь вдоль линии тока ACB от границы C_1 до границы C_2, теряет напор:

$$(h_l)_{AB} = h_1 - h_2 = Z. \tag{18-36}$$

Таким образом, можно сказать, что *«напор на сооружении» Z представляет собой потерю напора при фильтрации воды под сооружением.*

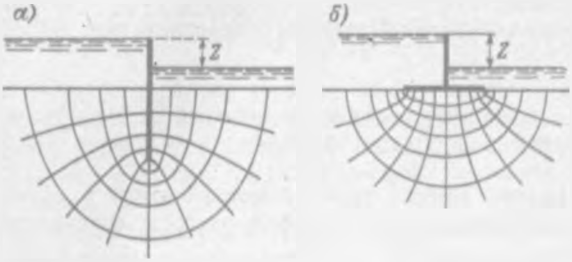


Рис. 18-9. Гидродинамические сетки в случаях чистого шпунта (*а*) и плоского флютбета (*б*)

Рассмотрим линию равного напора (живое сечение) *аб*, приключив к ее точке C пьезометр $П$. Горизонт воды в этом пьезометре будет стоять на уровне некоторой горизонтальной пьезометрической плоскости $P - P$, отвечающей данному живому сечению. Из чертежа видно, что величина $(h_l)_{AC}$ (отмеченная на чертеже) представляет собой потерю напора на длине AC рассматриваемой линии тока; величина же $(h_l)_{CB}$ является потерей напора на длине CB рассматриваемой линии тока:

$$(h_l)_{AC} + (h_l)_{CB} = Z. \tag{18-37}$$

Если линии равного напора условимся проводить так, чтобы их наименования отличались друг от друга на величину, равную $0{,}1Z$, то наименование этих линий будет таким, какое указано на чертеже. Само собой разумеется, что снижение напора вдоль любой линии тока, на участке ее между соседними линиями равного напора, должна составлять при указанном условии величину, равную $0{,}1Z$.[1]

В заключение укажем, что Н. Н. Павловским были, в частности, теоретически решены две следующие простейшие схемы сооружения, так называемые: а) ч и с т ы й ш п у н т (рис. 18-9, *а*); б) п л о с к и й ф л ю т б е т (рис. 18-9, *б*).

В результате такого решения оказалось, что в случае $T = \infty$ (т. е. когда водоупор находится на бесконечной глубине) линии тока для этих схем представляют собой эллипсы, а линии равного напора — гиперболы.

§ 18-9. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТКИ. ПРИВЕДЕННЫЙ НАПОР И ПРИВЕДЕННЫЙ РАСХОД

В теории фильтрации доказываются следующие четыре положения:

1) если две о д н о р о д н ы е области фильтрации геометрически подобны, то гидродинамические сетки для этих двух областей также геометрически подобны (здесь имееется в виду, что для указанных двух областей имеет место надлежащее соответствие и геометрическое подобие граничных живых сечений C_1 и C_2, а также граничных линий тока C_0 и C_3; см. рис. 18-8);

---

[1] Говоря о снижении напора по длине линий тока (или элементарных струек) ламинарного потока грунтовой воды, следует учитывать, что поясненная в § 4-13 «функция диссипации механической энергии», найденная для так называемой «жидкости Ньютона», не относится к рассматриваемому здесь случаю движения грунтовой воды (когда мы пользуемся другой моделью — так называемой «жидкостью Дарси»).

2) в случае однородного грунта форма гидродинамической сетки и наименование линий равного напора вовсе не зависят от коэффициента фильтрации; от коэффициента фильтрации зависит только расход (см. ниже п. 4);

3) форма (начертание) гидродинамической сетки, полученной для сооружения (см., например, рис. 18-8) вовсе не зависит от величины напора на сооружении Z, а также от величин h_1 и h_2 (глубин воды в верхнем и нижнем бьефах); с изменением величин Z, h_1 и h_2 изменяется только наименование имеющихся линий равного напора и линий тока;

4) величина расхода q прямо пропорциональна напору на сооружении Z и прямо пропорциональна коэффициенту фильтрации k.

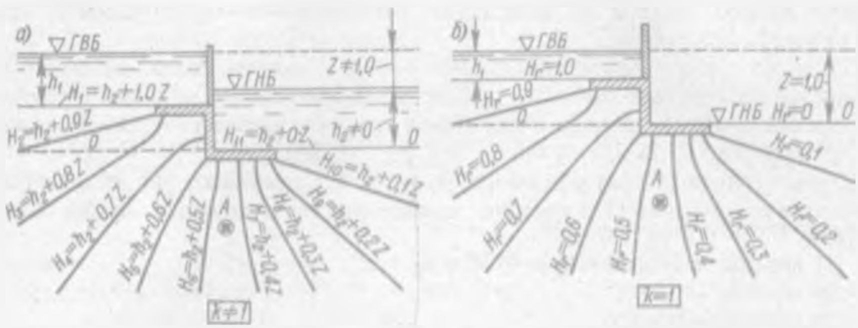


Рис. 18-10. Действительная (*а*) и приведенная (*б*) схемы сооружения

Учитывая эти положения, заключаем, что исходя из имеющегося решения какой-либо схемы (области фильтрации), легко можно получить решения для любой другой схемы, характеризуемой любым коэффициентом фильтрации, и любыми Z, h_1 и h_2, если только эта схема геометрически подобна решенной схеме.

Представим на рис. 18-10, *а* д е й с т в и т е л ь н у ю (заданную) схему сооружения. Изобразим далее на рис. 18-10, *б* схему, отличающуюся от действительной только величиной коэффициента фильтрации и глубинами воды в бьефах. Примем для схемы на рис. 18-10, *б*:[1]

$$k = 1;\ h_2 = 0;\ Z = 1. \tag{18-38}$$

Схема, характеризуемая условиями (18-38), называется п р и в е д е н н о й с х е м о й. Величины напора и удельного расхода для приведенной схемы принято обозначать соответственно через H_r и q_r. Эти величины связаны с H и q для действительной схемы (рис. 18-10, *а*) следующими зависимостями (плоскость сравнения считаем проведенной на уровне дна нижнего бьефа):

$$\boxed{H_A = h_2 + Z\,(H_r)_A,} \tag{18-39}$$

$$\boxed{q = kZq_r,} \tag{18-40}$$

где H_A – напор в некоторой произвольной точке A действительной схемы;
$(H_r)_A$ – напор в соответственной точке A приведенной схемы.

[1] Выписывая (условно) в соотношениях (18-38) $k = 1$ и $Z = 1$, имеем в виду, что обе эти именованные величины должны выражаться с использованием одного и того же линейного размера (м, см и т. п.).

Заметим, что H_r называется **приведенным напором**, а q_r — **приведенным расходом**. Выполняя расчет, решают часто не действительную, а приведенную схему, так как от нее легко перейти при помощи зависимостей (18-39) и (18-40) к действительной, которая: а) геометрически подобна приведенной и б) для которой

$$k \neq 1; \; h_2 \neq 0; \; Z \neq 1. \tag{18-41}$$

При таком переходе учитываем прежде всего, что начертание гидродинамической сетки при замене условий (18-38) условиями (18-41) не изменится. Далее, используя формулу (18-40), находим действительный удельный расход q. Наконец, используя формулу (18-39), определяем наименование действительных линий равного напора (исходя из известного наименования линий равного напора для приведенной схемы).

Если условимся проводить линии равного напора через интервал в их наименовании, равный $0{,}1Z$, то для приведенной схемы получим следующие наименования линий равного напора (при плоскости сравнения OO, показанной на чертеже): 1) 1,0; 2) 0,9; 3) 0,8;...; 10) 0,1; 11) 0,0.

Пересчитывая эти данные по формуле (18-39), получаем для действительной схемы соответственно следующие наименования отдельных линий равного напора:

1) $H_1 = h_2 + (H_r)_1 Z = h_2 + 1{,}0Z = h_2 + Z$;
2) $H_2 = h_2 + 0{,}9Z$;
3) $H_3 = h_2 + 0{,}8Z$;

. . . .

10) $H_{10} = h_2 + 0{,}1Z$;
11) $H_{11} = h_2 + 0{,}0Z = h_2$.

§ 18-10. РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОСТРОЕННОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТКИ

Будем пользоваться чертежом на рис. 18-8, причем будем как и выше рассматривать только плоскую задачу.

1°. Построение эпюры противодавления. Эпюра противодавления выражает величину давления, действующего снизу на сооружение со стороны фильтрационного потока.

Как отмечалось выше, напор в данной точке при направлении вертикальной оси z вверх выражается зависимостью (18-7). Введем обозначение:

$$a = -z,$$

где a — заглубление рассматриваемой точки под плоскостью сравнения $O-O$, которую будем намечать на уровне дна нижнего бьефа.

Необходимо запомнить правило: *пьезометрическая высота p/γ в данной точке фильтрационного потока равна напору H в этой точке плюс заглубление ее под плоскостью сравнения:*

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} = H + a.} \tag{18-42}$$

Имея в виду такое правило, можем наметить следующий ход построения эпюры противодавления:

1) разворачиваем подземный контур сооружения (рис. 18-8) в горизонтальную прямую $1-2-3-\ldots-7$ (рис. 18-11);

2) строим эпюру напоров вдоль развернутого подземного контура (см. фигуру 1-А-В-7-1 на рис. 18-11), если в точках подземного контура

(рис. 18-8) напор равен H_m, то при построении эпюры напоров величину H_m откладываем, как показано на рис. 18-11; саму величину H_m легко можно определить, руководствуясь имеющимися линиями равного напора (см. рис. 18-8);

3) откладываем вниз от прямой $1-7$ (рис. 18-11) заглубления точек подземного контура под плоскостью сравнения; при этом получаем эпюру заглублений $1-2'-3'-4'-\ldots-7-1$ точек подземного контура. Очевидно, полученная фигура $1-A-B-7-6'-4'-2'-1$ будет представлять собой искомую эпюру давлений вдоль подземного контура, так как каждая вертикальная ордината этой фигуры равна $H+a$.

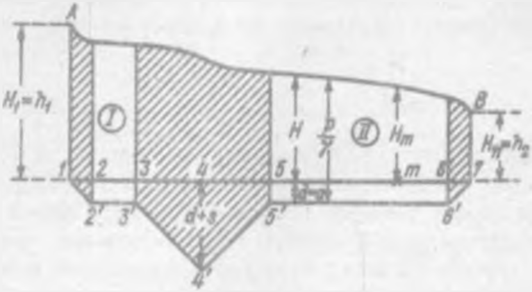


Рис. 18-11. Изменение напора и давления вдоль подземного контура

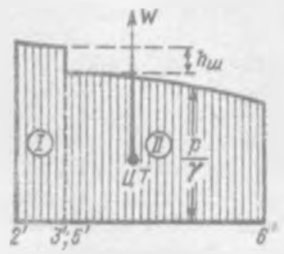


Рис. 18-12. Эпюра давления, действующего на горизонтальные элементы подземного контура.

Для статического расчета плотины обычно представляет интерес только давление, действующее на горизонтальные элементы подземного контура $2-3$ и $5-6$. Имея это в виду, остальные части найденной эпюры (см. площади, заштрихованные на рис. 18-11) отбрасываем; сдвинув фигуры I и II, окончательно получаем эпюру противодавления в виде, изображенном на рис. 18-12. Вертикальная сила противодавления W, выражаемая этой эпюрой, должна проходить через центр тяжести эпюры $ЦТ$ (рис. 18-12). Величина силы W, приходящейся на 1 ед. ширины фильтрационного потока (измеренную перпендикулярно к плоскости чертежа), равна площади построенной эпюры, умноженной на удельный вес воды.

Высота уступа $h_ш$, показанного на рис. 18-12, дает потерю напора на шпунте, т. е. разность напоров в точках 3 и 5 подземного контура (рис. 18-8).

2°. Определение J и u в любой точке области фильтрации. Положим, что необходимо найти пьезометрический уклон J в точке M (рис. 18-13). С этой целью через точку M проводим вспомогательную линию тока ab. При этом величина J выразится зависимостью

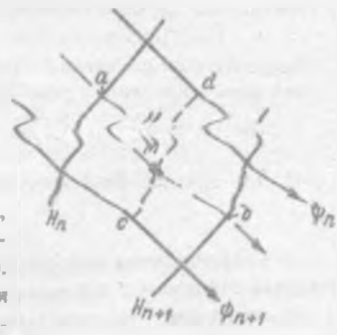


Рис. 18-13. Определение градиента J и скорости u в точке M (по гидродинамической сетке)

$$J=\frac{H_n-H_{n+1}}{\overline{ab}}, \qquad (18\text{-}43)$$

где H_n и H_{n+1} — наименование ближайших к точке M линий равного напора; $\overline{ab}$ — длина участка вспомогательной линии тока между указанными линиями равного напора; на длине $\overline{ab}$ теряется напор, равный H_n-H_{n+1}.

Зная величину J, определяем скорость фильтрации u в точке M по формуле

$$u = kJ = k\frac{H_n - H_{n+1}}{\overline{ab}};\tag{18-44}$$

само собой разумеется, что вектор скорости u должен быть касателен к линии ab и направлен в сторону падения напора.

Заметим, что в точках перелома подземного контура *2, 4, 6* (рис. 18-8) величина J согласно решению теоретической гидромеханики равна бесконечности.

3°. Определение фильтрационного расхода. Зная скорость u в точке M, можем найти расход Δq воды, текущей между соседними линиями тока ψ_n и ψ_{n+1} (рис. 18-13). Очевидно,

$$\Delta q = u\,\overline{cd},\tag{18-45}$$

где $\overline{cd}$ – длина линии, показанной на рис. 18-13 (расстояние между ψ_n и ψ_{n+1}).

Чтобы найти полный удельный расход q воды, фильтрующей под сооружением, выбираем какие-либо две линии равного напора (например, линии H_7 и H_8, показанные на рис. 18-8), причем рассматриваем отсек основания, заключенный между ними; вверху этот отсек должен упираться в подземный контур, внизу – в водоупор. Данный отсек основания разбивается линиями тока на несколько криволинейных квадратов, из которых каждый сходен с квадратом, изображенным на рис. 18-13. Найдя для каждого квадрата величину Δq по формуле (18-45), подсчитываем полный удельный расход q, суммируя величины Δq для всех квадратов.

Подставляя в (18-45) величину u по (18-44), получаем

$$\Delta q = \frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}(H_n - H_{n+1})\,k.$$

Так как $\Delta q = \text{const}$ (вдоль течения) для той части области фильтрации, которая ограничена двумя соседними линиями тока, то отношение $\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}$ для всех криволинейных прямоугольников сетки, образующих эту часть области фильтрации, должно быть одинаковым (если линии равного напора проведены через равные интервалы: $H_n - H_{n+1} = \text{const}$). Для квадратичной сетки указанное отношение $\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}} = 1{,}0$.

4°. Построение эпюры выходных скоростей. Практически важно знать выходные скорости u по линии дна нижнего бьефа (по линии C_2), так как именно здесь скорее всего может произойти размыв грунта фильтрационным потоком. Для построения эпюры выходных скоростей (см. график в верхней правой части рис. 18-8) помимо формулы (18-44) можно использовать также зависимость

$$u_{вых} = \frac{\Delta q}{\Delta\sigma},\tag{18-46}$$

где $u_{вых}$ – скорость в некоторой точке M, намеченной на линии C_2 (рис. 18-8); $\Delta\sigma$ – расстояние между соседними линиями тока (между которыми намечена точка M), измеренное вдоль линии C_2; Δq – элементарный расход, относящийся к элементарной струйке, ограниченной упомянутыми линиями тока, и найденный, как указано в п. 3°.

§ 18-11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ (МЕТОД ЭГДА)

Метод ЭГДА был предложен Н. Н. Павловским в 1921-1922 гг. По этому методу можно построить гидродинамическую сетку для области фильтрации сколь угодно сложной формы. Данный метод основан на математическом подобии, имеющемся между движением воды в грунте и постоянным электрическим током в проводнике.

Действительно:

а) в случае грунтовых вод

$$u = -k\frac{dH}{ds}; \qquad (18\text{-}47')$$

б) в случае электрического тока

$$\delta = -c\frac{dU}{ds}, \qquad (18\text{-}47'')$$

где δ — плотность тока (т. е. величина тока, приходящаяся на 1 кв. единицу площади поперечного сечения проводника), c — коэффициент электропроводности; U — электрический потенциал.

Как видно из (18-47′) и (18-47″) величинам u, k, H (в случае движения грунтовых вод) отвечают соответственно величины δ, c, U (в случае электрического тока). Известно, что функция U так же, как и функция H, должна удовлетворять уравнению Лапласа.

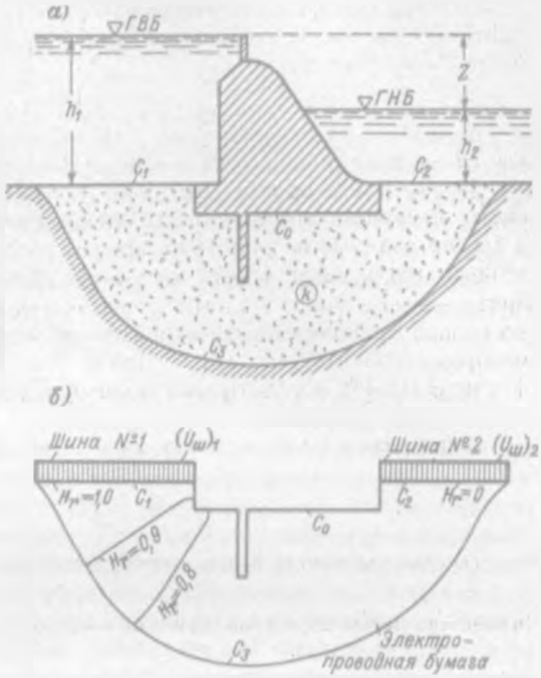


Рис. 18-14. К методу ЭГДА: *а* — действительное сооружение, *б* — модель основания, выполненного из электропроводной бумаги

При построении гидродинамической сетки по методу ЭГДА поступают следующим образом.

Положим имеется схема гидросооружения, показанная на рис. 18-14, *а*. Из какого-либо электропроводящего материала (станиоля, электропроводной бумаги и т. п.) вырезают модель основания, которая должна быть геометрически подобной действительному водопроницаемому основанию (рис. 18-14, *б*). После этого к границам модели C_1 и C_2 прилагают электрические шины, которым сообщают потенциалы $(U_ш)_1$ и $(U_ш)_2$. Под действием разности потенциалов $\Delta U = (U_ш)_1 - (U_ш)_2$ в модели основания возникает электрический ток (постоянный).

Разность потенциалов ΔU считают равной единице,

$$\Delta U = 1{,}0; \qquad (18\text{-}48)$$

линии равного потенциала на электропроводной модели нащупывают иглой при помощи особого устройства (основанного на принципе мостика Уитстона).

Полученные линии $U = \mathrm{const}$ ($U_1 = 1{,}0$; $U_2 = 0{,}9$; $U_3 = 0{,}8$; ...; $U_{10} = 0{,}1$; $U_{11} = 0$) принимают за линии равного напора (за живые сечения фильтрационного потока). Наименование их устанавливают по известной формуле (18-39):

$$H = h_2 + ZH_r,$$

где H_r считается равным U:

$$\begin{aligned}(H_r)_1 &= 1{,}0;\\ (H_r)_2 &= 0{,}9;\\ &\ldots\ldots;\\ (H_r)_{10} &= 0{,}1;\\ (H_r)_{11} &= 0.\end{aligned}$$

Линии тока обычно строят графически, проводя их ортогонально к найденным линиям $H = \mathrm{const}$. Для однородного грунта линии тока можно построить так же как и линии $H = \mathrm{const}$; при этом только электрические шины следует прикладывать к границам C_0 и C_3 модели и рассматривать схему, обратную заданной (см. § 18-6, п. 5).

Как видно, при работе по методу ЭГДА следует различать два разных устройства:

1) модель области фильтрации, выполненную из электропроводного материала;

2) электрическое приспособление, при помощи которого можно пропускать через модель постоянный электрический ток в нужном направлении и измерять величину электрического потенциала в различных точках модели.

Выше мы рассмотрели плоскую задачу о напорной фильтрации в однородной изотропной среде. Надо иметь в виду, что метод ЭГДА при использовании соответствующего электропроводящего материала позволяет построить гидродинамическую сетку и для неоднородной области фильтрации ($k \neq \mathrm{const}$), а также для случая анизотропного грунта. По методу ЭГДА можно решать задачи и о безнапорной фильтрации. Здесь только кривую депрессии приходится находить подбором, постепенно подрезая электропроводную бумагу и добиваясь при этом, чтобы для всех точек кривой депрессии было соблюдено известное условие $z = H$.

Создавая электропроводящие модели пространственного вида (с применением иногда электропроводных жидкостей), мы можем решать по методу ЭГДА и пространственные задачи; впрочем решение таких пространственных задач иногда оказывается сопряженным со значительными трудностями (чисто технического характера).

§ 18-12. МЕТОД КОЭФФИЦИЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ Р. Р. ЧУГАЕВА

Метод коэффициентов сопротивления был предложен Р. Р. Чугаевым в 1953—1956 гг. Этим методом следует пользоваться при фильтрационном расчете гидротехнических сооружений, расположенных на однородном нескальном основании, когда в таком основании возникает плоский напорный фильтрационный поток[1]. Как было отмечено в конце § 18-7, метод коэффициентов сопротивления, являясь чисто инженерным методом, позволяет решать

[1] Данный метод включен в Технические условия и нормы Министерства электростанций (ТУиН № 125—57), а также был утвержден в СНиП П-И. 12—67 для применения в практике плотиностроения [18-10, 18-7].

главнейшие практические задачи фильтрации, например, определять величину противодавления, находить максимальный выходной градиент напора на поверхности дна нижнего бьефа и т. п. Эти главнейшие задачи решаются без построения гидродинамической сетки. Впрочем, согласно методу коэффициентов сопротивления, с некоторым приближением в ряде случаев представляется возможным построить и гидродинамическую сетку [18-7].

1°. **Общая идея метода.** При фильтрации воды под плотиной в общем случае получаем резко изменяющееся движение (рис. 18-15, *а*); обозначим для такого случая плотины противодавление и максимальный выходной пьезометрический уклон соответственно через W_a и $(J_{вых})_a$.

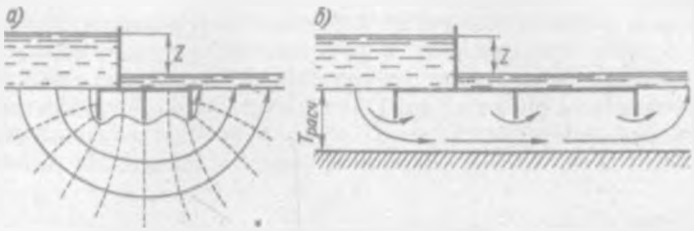


Рис. 18-15. К пояснению общей идеи метода коэффициентов сопротивления: *а* – плоская задача о резко изменяющемся движении воды под плотиной, *б* – линейная задача о фильтрации в горизонтальной трубе (фиктивная эквивалентная труба)

В частном случае, когда водоупор расположен близко к поверхности земли (величина T мала; см. рис. 18-15, *б*), задача значительно упрощается; в этом случае мы получаем по существу линейную задачу о ламинарной фильтрации воды в горизонтальной трубе, имеющей отдельные местные гидравлические сопротивления (на шпунтах и т. п.)[1]. Расчет такой трубы при турбулентном движении воды в ней изучался в гл. 5; величину потерь напора h_f в пределах отдельных фрагментов трубы мы вычисляли при турбулентном движении по формуле

$$h_f = \zeta \frac{v^2}{2g}, \tag{18-49'}$$

где ζ – коэффициент сопротивления, определяемый, как правило, на основании экспериментальных данных. Зная величины ζ для отдельных фрагментов трубы (ζ_1, ζ_2, ζ_3, ...), затем считали, что общая потеря напора Z распределяется между отдельными фрагментами (последовательно расположенными) прямо пропорционально их величинам ζ.

В случае ламинарной фильтрации в горизонтальной трубе (рис. 18-15, *б*) расчет должен несколько измениться (упроститься). При таком движении, как отмечалось выше, скоростным напором следует пренебрегать, вместо же фор-

[1] Этот частный случай является особенно простым, когда отдельные местные сопротивления располагаются достаточно далеко друг от друга (не влияют друг на друга). Как было отмечено в § 18-7, именно такой простейший случай (случай распластанной схемы подземного контура) рассматривался ранее (иногда не совсем удачно) рядом авторов (С. Н. Нумеровым и др.; об этом случае см. ниже п. 11°). Некоторые авторы для расчета указанной трубы пытались использовать метод фрагментов Н. Н. Павловского, предложенный им только для расчета плотины особого вида (плотины А. М. Сенкова). Однако эти попытки не имели успеха.

мулы (18-49′) для определения потерь напора в пределах отдельных фрагментов следует пользоваться зависимостью Павловского – Форхгеймера [18-7]:

$$h_f = \zeta \frac{q}{k}, \tag{18-49″}$$

причем здесь величина коэффициента сопротивления ζ может быть найдена теоретическим путем (см. ниже). Очевидно, и при ламинарном движении воды в трубе потеря напора Z должна распределяться между отдельными фрагментами трубы прямо пропорционально их коэффициентам сопротивления ζ. Обозначим величину противодавления и величину максимального выходного градиента в случае ламинарной фильтрации в трубе (рис. 18-15, *б*) соответственно через $W_б$ и $(J_{вых})_б$.

Имея в виду исключительную простоту расчета указанной трубы (по общепринятому хорошо проверенному в практике методу коэффициентов сопротивления) нами было предложено для расчета действительную схему сооружения (рис. 18-15, *а*) заменять ф и к т и в н о й э к в и в а л е н т н о й трубой (рис. 18-15, *б*), размеры которой подбираются таким образом, чтобы величины $W_б$ и $(J_{вых})_б$, найденные для этой трубы, оказались равными искомым величинам $W_а$ и $(J_{вых})_а$:

$$W_б = W_а; \ (J_{вых})_б = (J_{вых})_а. \tag{18-50}$$

Оказалось, что такая задача может быть решена. Несмотря на то, что фильтрационный поток на рис. 18-15, *б* не имеет никакого внешнего сходства с фильтрационным потоком на рис. 18-15, *а*, все же представляется возможным найти для трубы на рис. 18-15, *б*, имеющей верхнее очертание тождественное заданному подземному контуру, такой размер $T_{расч}$, при котором будет удовлетворяться условие (18-50) (см. [18-7]).

Из сказанного ясно, что расчет по методу коэффициентов сопротивления должен разбиваться на два этапа:

1-й э т а п (основной): замена действительного основания плотины фиктивной эквивалентной трубой, имеющей определенный размер $T_{расч}$ (и верхнее очертание тождественное заданному подземному контуру);

2-й э т а п: расчет полученной фиктивной трубы по методу коэффициентов сопротивления (см. гл. 5) с учетом формулы (18-49″). Здесь, разумеется, приходится определять коэффициенты сопротивления ζ для различных участков фиктивной трубы, выяснять взаимное влияние отдельных местных сопротивлений (в том случае, когда они расположены на небольшом расстоянии друг от друга), интересоваться величиной скоростей в отдельных точках рассматриваемой фиктивной трубы и т. п.

Дополнительно, используя поясненный метод, вводим особое допущение, касающееся формы пьезометрической линии $P-P$ для подземного контура сооружения (рис. 18-16). Как видно из рис. 18-16, такую пьезометрическую линию принимаем, как и для обычного трубопровода, в виде п р я м о л и н е й н о й л о м а н о й л и н и и $1'-2'-3'-4'-5'-6'$. Из рисунка видно, что потери напора h_I, h_{III}, h_V являются м е с т н ы м и потерями, отвечающими соответственно: входному шпунту $1-а-2$; внутреннему шпунту $3-б-4$; выходному шпунту $5-в-6$. Потери же напора h_{II} и h_{IV} являются потерями напора по длине горизонтальных элементов подземного контура $2-3$ и $4-5$.

2°. Задачи, решаемые по методу коэффициентов сопротивления. Основные принимаемые обозначения. Пользуясь рассматриваемым методом, можно решать следующие т р и основные задачи:

1) строить эпюру противодавления для горизонтальных элементов контура, определять напор на нижнем конце (на острие) низового (выходного) шпунта

или зуба и находить особый пьезометрический уклон $J_к$, контролирующий так называемую фильтрационную прочность грунта основания;

2) определять максимальный пьезометрический уклон $J_{вых}$ на поверхности дна нижнего бьефа (в точке 6; рис. 18-16);

3) определять фильтрационный расход.

При решении перечисленных задач следует задаваться совершенно определенным размером фиктивной эквивалентной трубы, т. е. размером $T_{расч}$ (рис. 18-15, *б*). Оказывается, что глубина $T_{расч}$, определяющая расчетное положение водоупора, должна быть в общем случае различной для указанных выше трех фильтрационных задач[1].

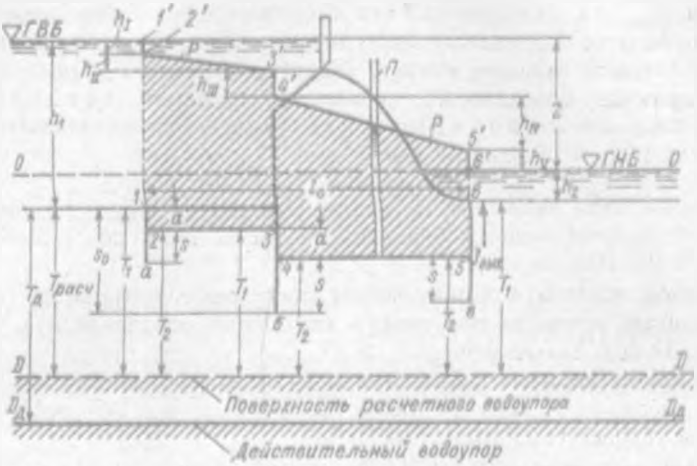


Рис. 18-16. К расчету фиктивной эквивалентной трубы по методу коэффициентов сопротивления Р. Р. Чугаева

Далее через $T'_{расч}$, $T''_{расч}$ и $T'''_{расч}$ будем обозначать заглубления расчетного водоупора, принимаемые соответственно при решении 1-й, 2-й и 3-й фильтрационной задачи. Через $T_д$ условимся обозначать заглубление действительного водоупора. Заметим, что $T_{расч}$ и $T_д$ всегда должны измеряться по вертикали от поверхности водоупора до той точки подземного контура, которая расположена наиболее высоко.

При решении той или иной задачи необходимо предварительно выполнить следующие операции:

1) установить положение поверхности расчетного водоупора, т. е. найти размер фиктивной эквивалентной трубы, подвергаемой непосредственному расчету по методу коэффициентов сопротивления;

2) исходя из найденных величин $T_{расч}$, определить численные значения коэффициентов сопротивления ζ для отдельных элементов подземного контура.

Решение первого отмеченного вопроса основывается на использовании введенного нами понятия активной зоны фильтрации.

3°. Понятие активной зоны фильтрации. Покажем на рис. 18-16 некоторое воображаемое положение водоупора $D-D$, определяемое размером T. Представим себе далее, что водоупор постепенно опускается и величина T постепенно растет. При таком опускании водоупора пьезометрическая линия $P-P$

---

[1] Обоснование этого положения здесь не приводим (см. [18-7]).

будет несколько деформироваться и фигура эпюры противодавления будет несколько изменяться. Интенсивность такого изменения вначале будет велика; по мере дальнейшего опускания $D-D$ интенсивность этого изменения будет постепенно уменьшаться, и, наконец, когда T достигнет некоторой величины

$$T = T'_{\text{ак}}, \tag{18-51}$$

фигура эпюры противодавления при увеличении T практически перестанет деформироваться. В связи с этим можем утверждать, что эпюры противодавления при $T=\infty$ и $T=T'_{\text{ак}}$ должны быть практически одинаковы. Величина $T'_{\text{ак}}$ называется глубиной активной зоны фильтрации по напору.

Если мы будем интересоваться не эпюрой противодавления, а выходным градиентом $J_{\text{вых}}$, то оказывается,* что с увеличением T (по мере опускания водоупора) величина $J_{\text{вых}}$ вначале будет интенсивно расти, затем рост $J_{\text{вых}}$ будет постепенно затухать, наконец, когда T сделается равным $T''_{\text{ак}}$, рост $J_{\text{вых}}$ практически прекратится. Величина $T''_{\text{ак}}$ называется глубиной активной зоны фильтрации по выходному градиенту. Можно показать, что

$$T''_{\text{ак}} \approx 2T'_{\text{ак}}. \tag{18-52}$$

Для определения величины $T'_{\text{ак}}$ даются следующие формулы, подобранные в результате количественного анализа некоторых схем подземного контура, решенных Н. Н. Павловским.

Обозначим через l_0 длину проекции подземного контура на горизонталь и через s_0 длину проекции подземного контура на вертикаль (см. рис. 18-16); тогда:

а) для распластанного подземного контура, когда

$$\frac{l_0}{s_0} \geqslant 5, \tag{18-53}$$

имеем

$$T'_{\text{ак}} = 0{,}5l_0; \tag{18-54}$$

б) для промежуточной схемы, когда

$$3{,}4 \leqslant \frac{l_0}{s_0} \leqslant 5, \tag{18-55}$$

имеем:

$$T'_{\text{ак}} = 2{,}5s_0; \tag{18-56}$$

в) для заглубленного подземного контура, когда

$$1 \leqslant \frac{l_0}{s_0} \leqslant 3{,}4, \tag{18-57}$$

имеем

$$T'_{\text{ак}} = 0{,}8s_0 + 0{,}5l_0; \tag{18-58}$$

г) для весьма заглубленного подземного контура, когда

$$0 \leqslant \frac{l_0}{s_0} \leqslant 1{,}0, \tag{18-59}$$

имеем

$$T'_{\text{ак}} = s_0 + 0{,}3l_0. \tag{18-60}$$

4°. Определение размера фиктивной эквивалентной трубы. При определении размеров фиктивной трубы нам достаточно установить для нее величину $T_{\text{расч}}$

(поскольку очертание трубы сверху принимается тождественным заданному подземному контуру). Здесь поступаем следующим образом.

1) При построении эпюры противодавления величину $T'_{расч}$ принимаем равной:

а) если действительное заглубление водоупора $T_д \leqslant T'_{ак}$,

$$T'_{расч} = T_д; \tag{18-61}$$

б) если $T_д > T'_{ак}$ (например, когда $T_д = \infty$),

$$T'_{расч} = T'_{ак}. \tag{18-62}$$

2. При определении максимального выходного градиента на поверхности дна нижнего бьефа:

а) если $T_д < T''_{ак}$,

$$T''_{расч} = T_д; \tag{18-63}$$

б) если $T_д \geqslant T''_{ак}$,

$$T''_{расч} = T''_{ак}. \tag{18-64}$$

3. При определении фильтрационного расхода величину $T'''_{расч}$ всегда следует принимать равной

$$T'''_{расч} = T_д, \tag{18-65}$$

т. е. следует исходить из действительного положения водоупора.

Надо заметить, что при больших значениях $T_д$ величину расхода по методу коэффициентов сопротивления можно найти только грубо приближенно.

5°. Общий ход расчета фиктивного основания (фиктивной горизонтальной трубы). Имеем заданный подземный контур, а также высотное положение горизонтов воды в бьефах; найдя расчетное положение водоупора $D-D$ (см. п. 4°), расчет, согласно методу коэффициентов сопротивления, выполняем следующим образом.

Разбиваем заданный контур на отдельные элементы (рис. 18-16):

1) входной и выходной элементы контура в виде, например, входного и выходного шпунтов (см. элементы $1-a-2$ и $5-в-6$);

2) внутренний шпунт (см. элемент $3-б-4$); таких внутренних шпунтов может быть несколько; если величина $s = 0$, то вместо внутреннего шпунта мы получаем промежуточный вертикальный уступ $3-4$;

3) горизонтальные элементы контура ($2-3$; $4-5$).

Как видно, получаем только три типовых элемента контура. Вдоль каждого из них теряется напор h_f. Потеря напора h_f в случае ламинарной фильтрации выражается формулой (18-49").

Обозначим:

$\zeta_{вх}$ и $\zeta_{вых}$ – коэффициенты сопротивления входного и выходного элементов подземного контура;

$\zeta_{ш}$ – коэффициенты сопротивления внутреннего шпунта (при $s = 0$ вместо $\zeta_{ш}$ имеем $\zeta_{ус}$);

$\zeta_{г}$ – коэффициент сопротивления горизонтального элемента контура;

$\sum\zeta$ – суммарный коэффициент сопротивления всего подземного контура.

Для рис. 18-16

$$\sum\zeta = \zeta_{вх} + \zeta'_{г} + \zeta_{ш} + \zeta''_{г} + \zeta_{вых}, \tag{18-66}$$

где $\zeta'_{г}$ и $\zeta''_{г}$ – коэффициенты сопротивления соответственно для первого ($2-3$) и второго ($4-5$) горизонтальных элементов.

Можно показать, что численные значения коэффициентов ζ не зависят от направления фильтрации. В связи с этим при одинаковых формах и размерах входного и выходного элементов контура и при одинаковых величинах T имеем:

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых}. \tag{18-67}$$

Зная численные значения коэффициентов ζ для всех выделенных элементов контура, можно легко решать любые фильтрационные задачи.

6°. Определение численных значений коэффициентов сопротивления. Для определения величин ζ даются следующие расчетные формулы (подробнее см. [18-10; 18-8; 18-7]).

а) Коэффициент сопротивления внутреннего шпунта или уступа $\left(\text{при } 0{,}5 \leqslant \frac{T_2}{T_1} \leqslant 1{,}0 \text{ и при } 0 < \frac{s}{T_2} \leqslant 0{,}8\right)$

$$\zeta_ш = \frac{a}{T_1} + 1{,}5\frac{s}{T_2} + \frac{0{,}5\frac{s}{T_2}}{1 - 0{,}75\frac{s}{T_2}}, \tag{18-68}$$

где a – высота вертикального уступа; s – глубина шпунта; T_1 и T_2 – заглубления расчетного водоупора под подошвой сооружения с одной и с другой стороны шпунта;[1] всегда $T_1 > T_2$, причем $T_1 = T_2 + a$.

В случае $s = 0$ получаем коэффициент сопротивления вертикального уступа

$$\zeta_{ус} = \frac{a}{T_1}; \tag{18-69}$$

когда $T_1 = T_2$, формула (18-68) также несколько упрощается.

б) Коэффициент сопротивления входного и выходного элементов контура.

В общем случае

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых} = \zeta_ш + \frac{\ln 4}{\pi} = \zeta_ш + 0{,}44, \tag{18-70}$$

где $\zeta_ш$ определяется, как указано выше (в п. «а»), в предположении, что данный входной или выходной шпунт является внутренним шпунтом.

В частных случаях:

когда $s = 0$,

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых} = \zeta_{ус} + 0{,}44 = \frac{a}{T_1} + 0{,}44; \tag{18-71}$$

когда $s = 0$ и $a = 0$, т.е. при так называемом плоском входе или выходе,

$$\zeta_{вх} = \zeta_{вых} = 0{,}44. \tag{18-72}$$

В последнем случае входной или выходной фрагмент обращается в точку, которой и отвечает указанное значение ζ. Эта величина ($\zeta = 0{,}44$) может быть названа коэффициентом сопротивления чистого поворота потока на 90°.

---

[1] На рис. 18-16 указаны три пары размеров T_1 и T_2; каждая такая пара относится соответственно к *1*, *2* и *3* шпунтам. Заметим, что чертеж на рис. 18-16 выполнен в несколько искаженном масштабе.

в) Коэффициент сопротивления горизонтальных элементов контура (например, элемента $2-3$ или $4-5$):

при

$$l \geqslant 0{,}5\,(s_1 + s_2) \qquad (18\text{-}73)$$

величина

$$\zeta_г = \frac{l - 0{,}5\,(s_1 + s_2)}{T} \qquad (18\text{-}74)$$

(обозначения указаны на рис. 18-17);

при

$$l \leqslant 0{,}5\,(s_1 + s_2) \qquad (18\text{-}75)$$

величина $\zeta_г$ для элемента $2-3$ принимается

$$\zeta_г = 0. \qquad (18\text{-}76)$$

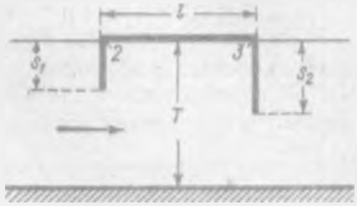


Рис. 18-17. К пояснению формулы (18-74)

7°. Построение эпюры противодавления, действующего на подошву плотины. Определив по найденной величине $T'_{расч}$ (см. выше п. 3°) положение расчетного водоупора и установив при таком его положении численные значения коэффициентов сопротивления для отдельных элементов контура (см. п. 6°), строим пьезометрическую линию $P-P$ для горизонтальных элементов контура, руководствуясь следующим правилом:

полный напор на сооружении Z [т. е. потеря напора вдоль всего подземного контура) должен распределяться между отдельными элементами контура прямо пропорционально численным значениям их коэффициентов сопротивления.

Согласно этому правилу, потеря напора $(h_f)_n$ на длине некоторого n-го элемента контура будет

$$(h_f)_n = \frac{Z}{\sum\zeta}\zeta_n, \qquad (18\text{-}77)$$

где ζ_n – коэффициент сопротивления рассматриваемого n-го элемента контура.

Вычислив по формуле (18-77) потерю напора на длине каждого элемента контура (h_{I}, h_{II}, h_{III}, h_{IV} и h_{V})[1], строим по этим потерям напора пьезометрическую линию $P-P$ и получаем искомую эпюру противодавления (см. площадь, заштрихованную на рис. 18-16).

8°. Определение максимального выходного пьезометрического уклона на поверхности дна нижнего бьефа. Максимальный выходной градиент $J_{вых}$ будет иметь место в точке 6 (см. рис. 18-16).

Определив по величине $T''_{расч}$ расчетное положение водоупора и установив при этом положении водоупора значения ζ, величину $J_{вых}$ находим по формуле, полученной исходя из решения С. Н. Нумерова, относящегося к схеме на рис. 18-15, *б*,

$$J_{вых} = \frac{Z}{T_1}\frac{1}{\alpha\sum\zeta}, \qquad (18\text{-}78)$$

где

$$\alpha \approx \sqrt{\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{s}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} + 1\right)\right]}; \qquad (18\text{-}79)$$

[1] Вместо $(h_f)_{\text{I}}$, $(h_f)_{\text{II}}$, $(h_f)_{\text{III}}$ и т. д. здесь пишем просто h_{I}, h_{II}, h_{III} и т. д.

здесь T_1 — заглубление водоупора под дном нижнего бьефа (см. рис. 18-16, где указаны также величины T_2 и s, относящиеся к выходному шпунту).

Более точное значение α можно определить по особому графику [18-10]. Для глубокого заложения водоупора, когда мы принимаем $T''_{расч} = T''_{к}$, формула (18-78) дает несколько заниженное значение $J_{вых}$. В связи с этим в правую часть формулы (18-78) следует вводить поправочный множитель, равный 1,1.

В случае так называемого чистого шпунта при действительном водоупоре, заложенном весьма глубоко, $J_{вых}$ согласно гидромеханическому решению Н. Н. Павловского,

$$J_{вых} = 0{,}318\frac{Z}{s}. \tag{18-80}$$

Умножая найденное $J_{вых}$ на коэффициент фильтрации k, находим наибольшую скорость фильтрации на поверхности дна нижнего бьефа (в точке $б$).

9°. Определение фильтрационного расхода. Определив при $T'''_{расч} = T_{д}$ коэффициенты ζ, величину удельного фильтрационного расхода находим по формуле

$$q = \frac{Z}{\sum\zeta}k. \tag{18-81}$$

Как отмечалось, эта формула при больших значениях $T_{д}$ дает только грубо приближенное значение q.

10°. Дополнительное замечание о построении эпюры противодавления. При построении эпюры противодавления надо различать особый случай, когда входной или выходной элемент контура характеризуется соотношением (см. рис. 18-16)

$$\frac{s}{T_1} < \frac{1}{4}\left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{1}{3}\right), \tag{18-82}$$

т. е. когда подземный контур имеет входной или выходной элемент, близкий или совпадающий с плоским входом или выходом.

При наличии соотношения (18-82) найденная выше потеря напора $h_{вх}$ или $h_{вых}$, обозначенная на чертеже через h_{I} или h_{V}, может иногда значительно отличаться от действительной потери напора на входном или выходном элементе. Обозначим эту действительную потерю через $(h_{вх})_{д}$ или $(h_{вых})_{д}$.

Расхождение в величинах $h_{вх}$ и $(h_{вх})_{д}$ или $h_{вых}$ и $(h_{вых})_{д}$ носит местный характер, в связи с чем этим расхождением часто можно пренебречь. Однако при желании указанную погрешность, возникающую при наличии соотношения (18-82), легко можно устранить. При этом поступаем следующим образом:

а) вычисляем действительные значения потерь напора $(h_{вх})_{д}$ и $(h_{вых})_{д}$ по формулам:

$$(h_{вх})_{д} = \delta h_{вх}; \quad (h_{вых})_{д} = \delta h_{вых}, \tag{18-83}$$

где при

$$0{,}7 \leqslant (T_2 : T_1) \leqslant 1{,}0$$

величина

$$\delta \approx \sqrt{\sin\left[\frac{3}{4}\pi\left(4\frac{s}{T_1} + 1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\right]}; \tag{18-84}$$

предельное максимальное значение: $\delta = 1$;

б) зная $(h_{вх})_{д}$ и $(h_{вых})_{д}$, обращаемся к рис. 18-18, где PNP есть та пьезометрическая линия, которая была построена выше (см. п. 6°).

Откладывая, как показано на чертеже, отрезок $(h_{вых})_д$, получаем точку N; далее на линии PNP намечаем точку M на расстоянии от конца флютбета, равном $0,1l$, где l – длина флютбета; затем соединяем точки N и M прямой. Искомая уточненная пьезометрическая линия будет иметь вид $PMNP$; участок $MN'N$ отбрасываем.

11°. Способ удлиненной контурной линии. Этот весьма простой способ представляет собой графическое оформление метода коэффициентов сопротивления, относящееся к распластанной схеме подземного контура [см. соотношение (18-53)], а также к некоторым случаям промежуточной схемы [см. соотношение (18-55)].

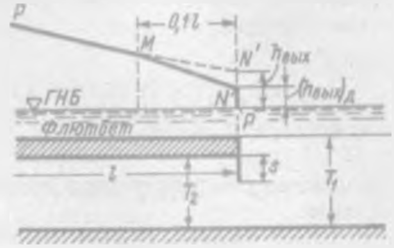


Рис. 18-18. Местное исправление полученной пьезометрической линии в случае выходного элемента близкого к «плоскому выходу»

Согласно данному способу при построении эпюры противодавления поступаем следующим образом.

Определяем, как указано в п. 4°, расчетное заглубление водоупора $T'_{расч}$. Далее, исходя из этого положения водоупора, устанавливаем величину $T_{ср}$, представляющую собой с р е д н е е заглубление водоупора под дном верхнего и нижнего бьефов, а также под отдельными горизонтальными участками подземного контура.

Затем разворачиваем заданный подземный контур (рис. 18-19, *а*) в горизонтальную прямую AB, показанную на рис. 18-19, *б*. Длина этой линии равна длине подземного контура L.

После этого от точек A и B полученной линии соответственно влево и вправо откладываем горизонтальные отрезки, равные

$$\lambda_0 = 0,44T_{ср}.$$

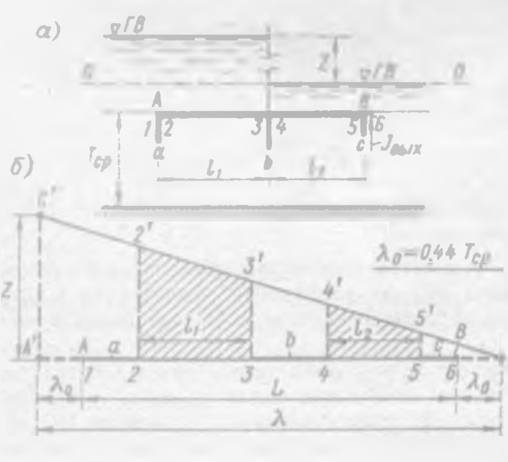


Рис. 18-19. Построение эпюры противодавления для распластанных схем по способу удлиненной контурной линии Р. Р. Чугаева

При этом получаем у д л и н е н н у ю   к о н т у р н у ю   л и н и ю $A'B'$, длина которой равна λ.

Откладываем далее от точки A' по вертикали вверх отрезок, равный напору на сооружении Z, получаем точку C'. Соединяя точку C' с точкой B прямой линией, получаем площади, показанные на рис. 18-19, *б* штриховкой. Эти площади представляют собой эпюры напоров для горизонтальных элементов контура $2-3$ и $4-5$. При таком построении имеем в виду, что плоскость сравнения OO, от которой отсчитываются напоры, проведена на уровне горизонта воды нижнего бьефа.

Получив указанные эпюры напоров, строим искомые эпюры противодавления. С этой целью к ординатам найденных эпюр напора прибавляем величины заглубления соответствующих точек подземного контура *под уровнем воды нижнего бьефа*.

Пользуясь данным способом, можно с некоторым приближением определить также величину $J_{вых}$ и величину напора на острие выходного шпунта [18-7].

Надо заметить, что введение в расчет двух поясненных выше отрезков λ_0 позволяет нам учесть дополнительные потери напора, возникающие в результате поворотов фильтрационного потока (на 90°), имеющих место в области входного и выходного элементов подземного контура. В остальном, согласно способу удлиненной контурной линии, напор вдоль линии подземного контура падает по линейному закону (что и имеет место для рассматриваемых схем контура).

§ 18-13. ПОСТРОЕНИЕ ГИДРОИЗОГИПС БЕЗНАПОРНОГО ПОТОКА НА ОСНОВЕ ЗАМЕНЫ ЕГО НАПОРНЫМ ПОТОКОМ (ПЛАНОВАЯ ЗАДАЧА)[1]

Рассмотрим два разных потока, имеющих одинаковое очертание (любого вида) в плане:

I поток (рис. 18-20, *а*): безнапорный, который назовем действительным, причем будем считать, что этот поток имеет вид, позволяющий заменить его уже знакомой нам «моделью Форхгеймера» (см. § 17-11);

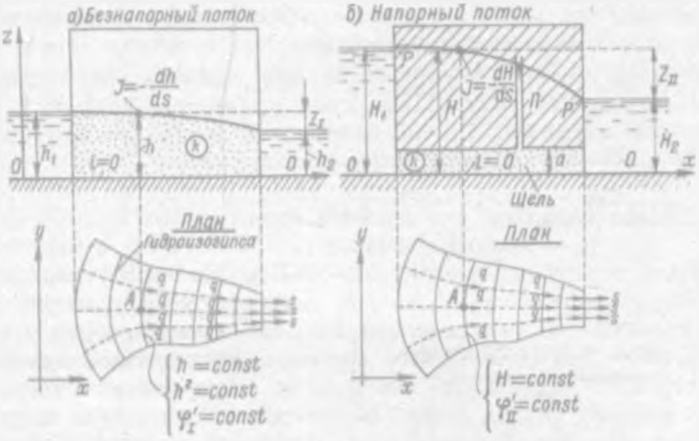


Рис. 18-20. К пояснению плановой задачи фильтрации

II поток (рис. 18-20, *б*): *напорный – в плоской горизонтальной «щели»* (высотой, равной *a*), заполненной грунтом, имеющим тот же коэффициент фильтрации *k*, что и грунт, образующий упомянутую модель Форхгеймера; этот напорный поток будем называть «воображаемым».

Наметим на планах двух рассматриваемых потоков ряд линий тока *s*. Обозначим: глубины первого потока в различных точках его плана через *h*; напоры второго потока в различных точках его плана через *H*, причем плоскость сравнения *OO* наметим, как указано на чертеже. Для любой точки плана первого и второго потоков (см., например, точку *A*) «расход в точке» *q* (см. § 15-1) может быть представлен в виде:

а) для первого потока

$$q = -kh\frac{dh}{ds}, \tag{18-85}$$

---

[1] Данный вопрос был решен Ф. Форхгеймером. Некоторое развитие этого вопроса дано в работах В. И. Аравина.

б) для второго потока

$$q = -ka\frac{dH}{ds}, \tag{18-86}$$

где h и H являются функциями координат x и y.

Из сказанного ясно, что план каждого из двух потоков на рис. 18-20 может рассматриваться как векторное поле «расходов в точке» q, выражаемых соответственно формулой (18-85) или (18-86).

Легко показать (см. § 18-4), что оба упомянутых векторных поля описываются уравнением Лапласа (18-18):

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} = 0, \tag{18-87}$$

где φ' — потенциальная функция векторного поля q, имеющая разные выражения для первого и второго потоков:

для первого потока

$$\varphi' = \varphi'_{\text{I}} = -\frac{kh^2}{2}; \tag{18-88}$$

для второго потока

$$\varphi' = \varphi'_{\text{II}} = -kaH. \tag{18-89}$$

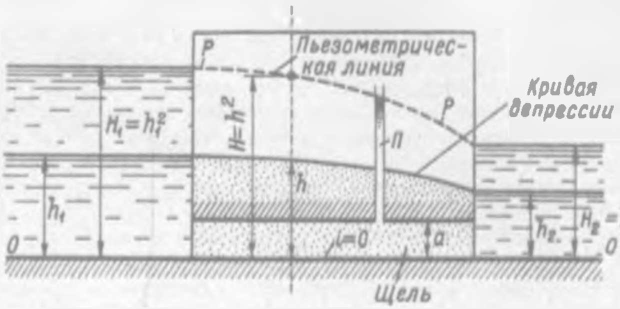


Рис. 18-21. К пояснению замены безнапорного потока «плановым» напорным потоком

Действительно, величины φ'_{I} и φ'_{II} являются функциями только координат x и y; частные же производные от функций (φ'_{I}) и (φ'_{II}) по координатам дают выражения, которые легко приводятся соответственно к зависимостям (18-85) и (18-86).

Подставляя (18-88) и (18-89) в (18-87), получаем, после сокращения постоянных, два разных дифференциальных уравнения второго порядка:

1-е уравнение, относящееся к первому (действительному) потоку:

$$\frac{\partial^2(h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(h^2)}{\partial y^2} = 0; \tag{18-90}$$

2-е уравнение, относящееся ко второму (воображаемому) потоку:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{18-91}$$

Очевидно, что функции $h(x, y)$ и $H(x, y)$, входящие в эти уравнения, должны удовлетворять существующим условиям на границах потоков.

Наложим друг на друга два рассматриваемых потока (рис. 18-21); пьезометрическая линия $P-P$ второго потока показана на этом чертеже штриховой линией. Дополнительно поставим условие, чтобы напоры H_1 и H_2 на границах второго (воображаемого) потока были равны:

$$H_1 = h_1^2 \text{ и } H_2 = h_2^2, \tag{18-92}$$

где h_1 и h_2 — глубины верхнего и нижнего бьефов *действительного* безнапорного потока (которые могут считаться заданными, как и очертание интересующего нас безнапорного потока в плане).

Сопоставляя при наличии пограничных условий (18-92) полученные выше уравнения (18-90) и (18-91), видим, что для всех точек области фильтрации (рассматриваемой в плане) должно иметь место равенство (полученное Форхгеймером):

$$h^2 = H, \tag{18-93}$$

т. е. при соблюдении равенств (18-92) и при наличии плоскости сравнения OO, проведенной по дну воображаемой щели, *квадрат глубины* h *безнапорного потока* (рис. 18-20, *а*) *в любой точке его плана равняется величине напора* H *в соответственной точке плана воображаемого напорного потока, получающегося в горизонтальной щели* (имеющей в плане то же очертание, что и действительный безнапорный поток).

Отсюда можно сделать следующий вывод: если наложить друг на друга планы действительного и воображаемого потоков (рис. 18-20), то линии $h^2 = \text{const}$, намеченные для действительного потока, будут в точности совпадать с линиями равного напора (линиями $H = \text{const}$), построенными для воображаемого напорного потока. Следовательно, линии $h = \text{const}$, т. е. гидроизогипсы безнапорного потока, должны в точности совпадать с линиями $H = \text{const}$, причем глубины h, отвечающие гидроизогипсам действительного безнапорного потока, будут определяться формулой:

$$h = \sqrt{H}, \tag{18-94}$$

где H – величина напора, соответствующая линии равного напора ($H = \text{const}$), совпадающей с данной гидроизогипсой и построенной в предположении, что соблюдаются равенства (18-92) и что плоскость сравнения намечена, как указано выше.

Таким образом, для построения гидроизогипс (т. е. в данном случае линий $h = \text{const}$) любого безнапорного потока, имеющего вид, близкий к «модели Форхгеймера» (рис. 18-20, *а*), необходимо найти (например, по методу ЭГДА) линии равного напора H для воображаемого напорного потока в горизонтальной щели (рис. 18-20, *б*) с соблюдением отмеченных выше условий в отношении H_1 и H_2 [см. рис. 18-21 и формулу (18-92)]; далее, приняв эти линии за гидроизогипсы, следует определить для них глубины h по формуле (18-94).

Пользуясь этим методом, легко можно строить гидроизогипсы безнапорных потоков, получающихся при фильтрации воды в берегах в обход устоев бетонных плотин, при фильтрации воды, поступающей в котлованы различной геометрической формы в плане и т. п. При решении таких задач исходную зависимость (18-93) иногда несколько преобразовывают: величину H выражают, например, через приведенный напор H_r (см. § 18-9) и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

18-1. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.; Гостехиздат, 1953.

18-2. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. – М.: Госстройиздат, 1955.

18-3. **Дружинин Н. И.** Метод электрогидродинамических аналогий и его приложение при исследовании фильтрации. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1956.

18-4. **Дружинин Н. И.** Изучение региональных потоков подземных вод методом электрогидродинамических аналогий. – М.: Недра, 1966.

18-5. **Павловский Н. Н.** Собрание сочинений, Т. II. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

18-6. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.

18-7. **Руководство** по проектированию и расчету подземного контура плотин на нескальном основании и их сопрягающих устоев (издание второе). – Л.: Энергия, 1978.

18-8. **Технические условия** и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Подземный контур плотин на нескальном основании. МЭС – 125 – 57. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1958.

18-9. **Фильчаков П. Ф.** Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, Т. I и Т. II. – Киев: Изд-во АН УССР, 1959 и 1960.

18-10. **Чугаев Р. Р.** Подземный контур гидротехнических сооружений/(проектирование подземных частей плотин на нескальном основании). – Л.: Энергия, 1974.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

§ 19-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Представим на рис. 19-1 не сильно натянутый горизонтальный шнур. Будем приводить левый конец этого шнура в движение рукой, как показано на рисунке стрелками. В этом случае можно добиться появления волн – изгибов шнура, гребень которых будет перемещаться со скоростью c в горизонтальном направлении. Скорость c здесь представляет собой скорость распространения возмущения, вызванного рукой на конце A шнура. В данном случае скорость распространения возмущения вовсе не вызывает переноса вещества (материала шнура): материал шнура не перемещается в горизонтальном направлении.

Рис. 19-1. Простейший частный случай возмущения состояния вещества (или формы тела)
c – скорость распространения возмущения

Как видно из рассмотренного примера, необходимо различать две разные скорости:

а) скорость c движения гребня волны, т.е. скорость распространения возмущений, другими словами, скорость распространения изменения состояния вещества или формы тела, и

б) скорость u перемещения самого вещества.

В приведенном примере имеем: $c \neq 0$, а $u = 0$.

Возьмем еще другой пример возмущения: камень, брошенный в покоящуюся воду, вызывает волны на свободной поверхности воды (рис. 19-2); гребни этих волн, постепенно затухающих, двигаются со скоростью c в радиальных (в плане) направлениях, причем в этом случае перенос вещества (воды) в горизонтальном направлении также почти не наблюдается.

Рассматривая в гл. 9 неустановившееся движение воды в открытых руслах, мы сталкивались с особыми волнами – «волнами перемещения», движение которых сопровождалось значительным переносом вещества (воды); при этом имели $c \neq 0$ и $u \neq 0$.

Можно сказать, что то или другое возмущение, вызванное в какой-либо среде и распространяющееся в ней волнами того или другого вида, движущимися со скоростью c, может иногда сопровождаться переносом вещества ($u \neq 0$); часто же этот перенос отсутствует или почти отсутствует ($u \approx 0$).

Существует много различного вида волн: сейсмические, звуковые, электромагнитные и т.п. Эти волны различной физической природы относятся к разным средам и могут носить различный характер. При изучении, например, гидравлического удара (см. гл. 9) мы сталкивались с волнами сжатия упругой среды (волнами повышенного или пониженного давления). Встречаются так называемые внутренние волны, т.е. волны, возникающие на поверхности

AB соприкасания двух жидкостей различного удельного веса γ, расположенных одна над другой (рис. 19-3) и движущихся с различными скоростями.

Ниже будем рассматривать только волны на свободной поверхности воды, вызванные ветром, т. е. так называемые ветровые волны. Помимо ветровых волн на свободной поверхности воды в результате, например, движения судна могут возникнуть так называемые корабельные волны, которых мы касаться не будем.

Теория ветровых волн показывает, что скорость их перемещения (скорость *c*) в общем случае зависит: а) от ускорения силы тяжести и б) от физических свойств жидкости (от так называемого поверхностного натяжения). При этом оказывается, что в частном случае достаточно больших ветровых волн зави-

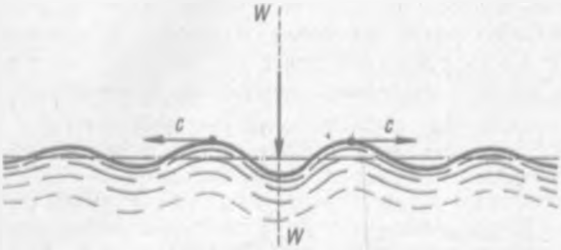


Рис. 19-2. Простейший частный случай возмущения свободной поверхности жидкости

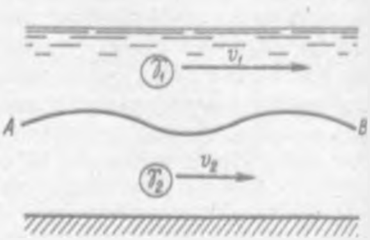


Рис. 19-3. Внутренние волны

симостью их параметров от физических свойств жидкости практически можно пренебречь; такие волны называются гравитационными. При относительно малых волнах представляется возможным практически пренебречь влиянием на их параметры силы тяжести и учитывать только физические свойства жидкости (поверхностное натяжение); такие волны называются капиллярными.

Далее будем рассматривать только гравитационные ветровые волны.

При изучении таких волн прежде всего необходимо выяснить причины их возникновения на поверхности воды. Решение этого вопроса основывается на сказанном выше о внутренних волнах: если имеем две разные жидкости (в данном случае – движущийся воздух и неподвижную или подвижную воду), то при относительном горизонтальном перемещении этих жидкостей граница *AB* между ними должна приобретать волнистый характер (рис. 19-3). Это можно пояснить и иначе: во время ветра к поверхности воды оказываются приложенными со стороны воздуха силы трения, которые порождают вначале возникновение небольших волн. После появления этих волн ветер начинает оказывать большее давление на надветренную сторону волны и меньшее давление на подветренную часть волны, причем волны постепенно растут по величине.

При достаточно большой глубине водоема ветровые волны характеризуются почти полным отсутствием переноса вещества (воды); в этом случае $c \neq 0$, а $u \approx 0$. При наличии же водоема с относительно небольшими глубинами скорость *u* может приобретать большую величину.

§ 19-2. ОСНОВНЫЕ КЛАССИФИКАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН. ТЕРМИНОЛОГИЯ

Различают следующие виды ветровых гравитационных волн:

1) вынужденные волны, т. е. волны, возникающие и находящиеся под воздействием ветра;

2) свободные волны или иначе зыбь, т.е. волны, имеющие место после прекращения ветра, или волны, вышедшие за зону действия ветра; на эти волны в рассматриваемый момент времени ветер не действует.

Иногда волны являются двухмерными (плоскими): гребни этих волн параллельны в плане.

Волны одинакового размера, следующие одна за другой, называются регулярными. Чередующиеся волны различного размера называются нерегулярными.

Представим на рис. 19-4 плоские (двухмерные) регулярные волны. На этом чертеже показано: $I-I$ – уровень покоя, т.е. свободная поверхность воды

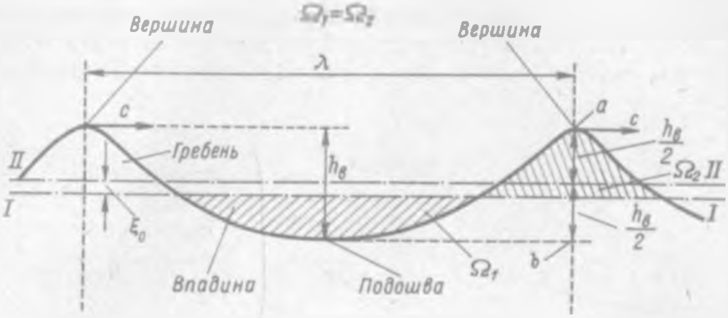


Рис. 19-4. Элементы ветровых волн

$I-I$ – уровень покоя; $II-II$ – средняя волновая линия

при отсутствии волнения; $II-II$ – так называемая средняя волновая линия; $h_в$ – высота волны; как видно из рисунка, размеры $\frac{h_в}{2}$ определяют высотное положение линии $II-II$; λ – длина волны; c – скорость распространения волны, т.е. скорость перемещения гребня волны по горизонтали (без учета скорости течения воды).

Крутизной волны называется отношение $h_в/\lambda$; фронтом волны – линия вершин гребня в плане (в случае «плоских волн» фронты отдельных волн в плане параллельны); разгоном ветровой волны D – протяженность водной поверхности, охваченной ветром, который вызывает образование и развитие волн; периодом волны τ – время, по истечении которого повторяется весь процесс колебания водной поверхности в данном вертикальном сечении. В случае $u=0$ частица воды, находящаяся в точке a, за время τ опускается в положение b и затем снова поднимается в начальное свое положение (т.е. в точку a). Для так называемых прогрессивных волн (см. § 19-4) за время τ вершина волны перемещается на расстояние λ.

§ 19-3. КЛАССИФИКАЦИЯ ВОДОЕМОВ И ИХ ПРИБРЕЖНЫХ ЗОН

Различают:

1) так называемые глубокие водоемы, глубиной

$$h \geqslant \frac{\lambda}{2}; \tag{19-1}$$

в этом случае дно водоема практически не оказывает влияния на волны; параметры волн не зависят от h;

2) так называемые мелкие водоемы, когда

$$h < \frac{\lambda}{2}; \tag{19-2}$$

в этом случае дно водоема ощутимо влияет на формирование волн, причем здесь скорость u уже оказывается не равной нулю.

Представим на рис. 19-5 прибрежную полосу какого-либо водоема, ограниченного пологим откосом ABC берега (наклонным к горизонту под углом менее 45°), причем линией $I-I$ покажем уровень покоя воды; точка B – урез воды.

В связи со сказанным выше, следует считать, что левее вертикали W_1-W_1, где выдерживается соотношение (19-1), имеем условия «глубокого водоема»;

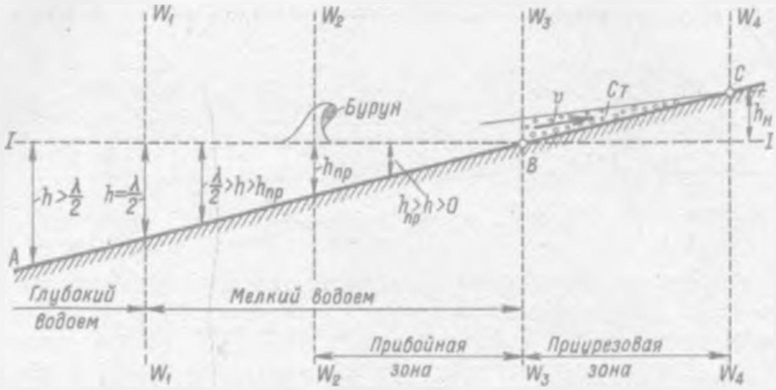


Рис. 19-5. Прибрежная зона водоема

$I-I$ – уровень покоя, $h_н$ – высота наката, $h_{пр}$ – «предельная глубина»

в пределах же между вертикалями W_1-W_1 и W_3-W_3, где имеет место соотношение (19-2), получаем условия «мелкого водоема».

Наблюдая развитие и деформацию волн в пределах «мелкого водоема», где волны под влиянием дна начинают переформировываться, можем заметить, что по мере приближения к берегу на участке между вертикалями W_1-W_1 и W_2-W_2 крутизна волн постепенно увеличивается. Наконец, когда глубина в водоеме оказывается равной некоторой предельной глубине $h_{пр}$ (см. вертикаль W_2-W_2), гребень волны, получающий все большую и большую крутизну, опрокидывается, причем образуется так называемый бурун, и волна несколько разрушается.

В пределах между вертикалями W_2-W_2 и W_3-W_3 волны, продолжая двигаться к берегу, периодически «забуруниваются»; при этом скорости u движения частиц воды все более и более возрастают. Участок мелководья, находящийся между вертикалями W_2-W_2 и W_3-W_3, называется прибойной зоной. Для определения предельной глубины $h_{пр}$, при которой волны начинают разрушаться, в литературе приводятся приближенные эмпирические формулы.

Помимо прибойной зоны, где волны начинают постепенно разрушаться, различают еще так называемую приурезовую зону, расположенную между вертикалями W_3-W_3 и W_4-W_4. В пределах этой зоны происходит окончательное разрушение волн и образование периодических накатов прибойного потока на откос берега в виде сильно аэрированной струи $C_т$

(см. рисунок). Кинетическая энергия струи C_T по мере ее поднятия по откосу постепенно уменьшается и затем вода, образующая данную струю, скатывается вниз. Высота наката $h_н$ в некоторых случаях представляет значительный практический интерес.

§ 19-4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Если в данную точку среды в один и тот же момент времени приходят две волны, то они соответствующим образом налагаются друг на друга, причем имеет место или увеличение их высоты, или снижение их высоты (волны гасят друг друга).

Рассмотрим частный случай этого явления, называемого интерференцией волн. Будем считать, что имеются регулярные плоские волны *1–2–3–4* на глубокой воде, движущиеся к берегу, который представляет собой вертикаль-

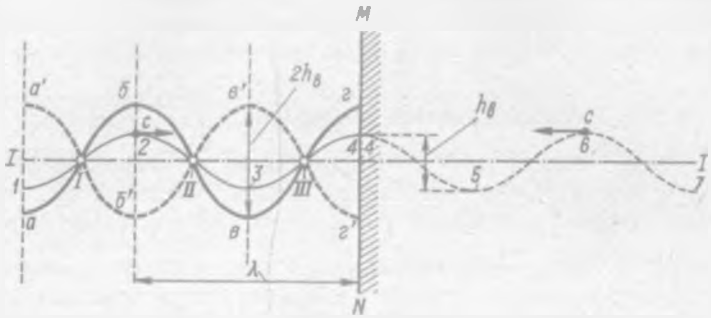


Рис. 19-6. Стоячие волны (сечение водной поверхности вертикальной плоскостью, ортогональной в плане к вертикальной стенке *MN*)

ную стенку *M–N* (рис. 19-6). Дополнительно будем считать, что фронты рассматриваемых волн *1–2–3–4* параллельны (в плане) береговой стенке *M–N*.

Для простоты пояснения примем, что рассматриваемые волны обладают небольшой крутизной. Используя для решения задачи о таких волнах теорию волн малой амплитуды (см. стр. 373), можем получить расчетную линию свободной поверхности воды в виде синусоиды, причем уровень покоя *I–I* и средняя волновая линия *II–II* будут в этом случае совпадать (см. линию *I–I* на рис. 19-6).

Набегая на стенку берега *M–N*, волны *1–2–3–4* будут отражаться от этой стенки (как отражается, например, от твердой стенки волна гидравлического удара; см. гл. 9, где отмечалось, что от твердой стенки отражается волна того же знака, что и подошедшая к стенке).

В связи со сказанным, можем себе представить, что навстречу волнам *1–2–3–4* движутся волны *4–5–6–7* (выходящие как бы из стенки), причем волны *4–5–6–7* налагаются на волны *1–2–3–4*.

Легко убедиться, что в результате такого наложения волн *4–5–6–7* на волны *1–2–3–4*, мы получим волны *абвг*, которые по истечении времени $\tau/2$ должны обращаться в волны *а'б'в'г'*.

Волны *абвг* (или *а'б'в'г'*) называются стоячими волнами (или сейшами). Эти волны характеризуются следующим:

а) высота их в два раза больше волн, движущихся к стенке (волн *1–2–3–4*);

б) в результате интерференции волн по линиям *а'–а*, *б'–б*, *в'–в*, *г'–г* образуются пучности;

в) длина стоячих волн остается той же, что и волн, движущихся к стенке (волн $1-2-3-4$);

г) узлы *I*, *II*, *III* стоячих синусоидальных волн являются неподвижными;

д) скорость c движения вершин гребней стоячих волн равна нулю ($c=0$), т. е. вершины и подошвы этих волн не перемещаются по горизонтали. Поверхностные частицы воды *а*, *б*, *в*, *г* (см. рис. 19-6) в рассматриваемом случае движутся только по вертикали: то вниз, то вверх. Именно поэтому данные волны называются стоячими.

Необходимо, однако, учитывать, что в общем случае линия свободной поверхности воды при наличии волн оказывается отличной от синусоиды (см. ниже). В связи с этим в общем случае уровень покоя не совпадает со средней волновой линией, причем узлы, показанные на рис. 19-6, отсутствуют; точки же пересечения профиля волн с уровнем покоя перемещаются то вправо, то влево; при этом линии $a'-a$, $б'-б$, $в'-в$, $г'-г$, проведенные через вершины к подошвам волны, по-прежнему *остаются неподвижными*.

В отличие от стоячих волн, волны, характеризуемые величиной скорости $c \neq 0$, называются прогрессивными.

§ 19-5. ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

При наличии условия (19-1) дно практически не влияет на формирование волн. Будем рассматривать двухмерные волны. Исследуя их, сталкиваемся со следующими тремя основными задачами, которые приходится решать:

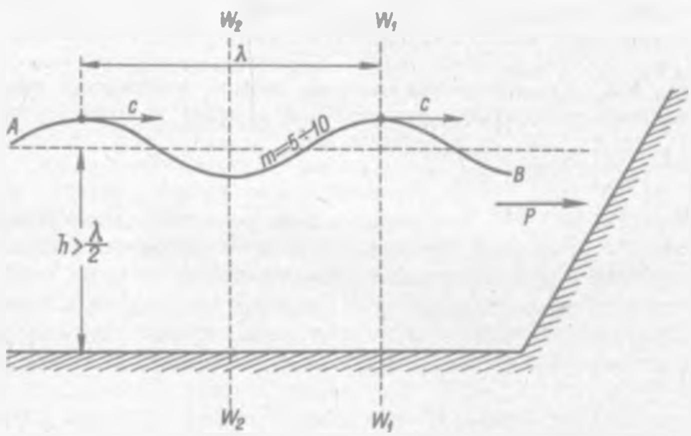


Рис. 19-7. Волны на глубокой воде (общая схема)

1) определение высоты $h_в$ и длины λ волн;

2) построение свободной поверхности AB воды (рис. 19-7) и определение скорости c перемещения гребня волн, а также периода волны τ;

3) выявление распределения гидромеханического давления по вертикалям W_1-W_1 и W_2-W_2 (см. рисунок). Последний вопрос (о распределении давления по вертикалям W_1-W_1 и W_2-W_2) необходимо решать в связи с определением силы давления воды P на то или другое сооружение, находящееся под воздействием волн.

1°. Определение высоты $h_в$ и длины λ волны. Величины $h_в$ и λ представляют наибольший практический интерес. Вместе с тем эти основные параметры волн приходится устанавливать при помощи относительно грубых эмпирических зависимостей. Например, в действующем в настоящее время нормативном документе СН-57—75, посвященном волновому воздействию на сооружения и берега, величины $h_в$ и λ предлагается устанавливать по особым, приводимым в этих нормах, приближенным графикам, носящим эмпирический характер.

Как видно из этих графиков, величины $h_в$ и λ зависят от следующих факторов:

1) от скорости ветра, которая на различных высотах бывает различной; при использовании упомянутых графиков принято учитывать скорость ветра на высоте 10,0 м над водной поверхностью;

2) от продолжительности действия ветра; впрочем, иногда этот фактор не учитывается;

3) от величины разгона D волны.

Дополнительно в указанных нормах приводятся приближенные величины «крутизны волн». Считают, что:

а) для морей: $\dfrac{h_в}{\lambda} = \dfrac{1}{10} \div \dfrac{1}{20}$;

б) для больших водохранилищ: $\dfrac{h_в}{\lambda} = \dfrac{1}{10} \div \dfrac{1}{15}$.

Как видно, коэффициент откоса боковых поверхностей волн, согласно этим зависимостям, получается равным $m = 5 \div 10$.

Зная высоту $h_в$, при помощи приведенных соотношений можно найти величину λ. Для определения величин $h_в$, помимо упомянутых графиков, в литературе приводятся различные эмпирические формулы (например, формула Стивенсона, формула Андрианова и др.).

2°. Построение профиля волн и определение величин c и τ. Схема решения Герстнера. Существует много различных попыток решить вопрос о построении профиля волн для различных условий их образования и развития. Ограничимся здесь кратким пояснением так называемой т е о р и и т р о х о и д а л ь н ы х в о л н, предложенной еще в 1802 г. Герстнером. Исходя из предварительно найденных величин $h_в$ и λ (см. п. 1°), данная теория позволяет (для случая глубокой воды, когда $h > \lambda/2$) построить профиль волны, а также определить величины c и τ и приближенно установить распределение гидромеханического давления p по вертикали (по глубине водоема).

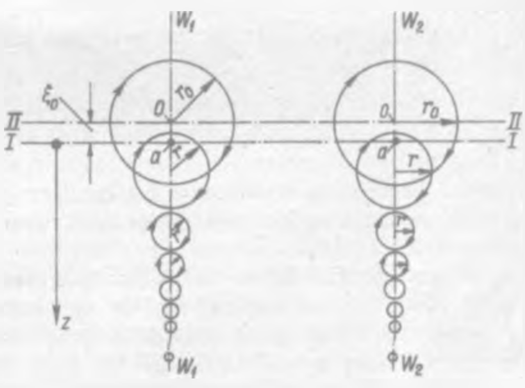


Рис. 19-8. Движение частиц воды по круговым орбитам, согласно Герстнеру

В основу своей теории Герстнер положил особую кинематическую модель (упрощенную расчетную схему), которая, однако, достаточно хорошо описывает действительность. Согласно этой модели, частицы воды при наличии волн движутся с постоянной угловой скоростью по к р у г о в ы м о р б и т а м (рис. 19-8), причем радиус r этих орбит с глубиной уменьшается и на некоторой глубине практически доходит до нуля. Герстнер принял, что величина радиуса орбиты: а) для любой поверхностной частицы

$$r = r_0 = \frac{h_в}{2}; \tag{19-3}$$

б) для любой же частицы, заглубленной под уровнем покоя $I-I$ на величину z,

$$r = r_0 e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}}. \quad (19\text{-}4)$$

Исходя из такой кинематической модели и дополнительно используя закон изменения кинетической энергии и теорему количества движения, Герстнер и решил поставленную задачу. Он нашел:

а) скорость перемещения гребня волны c и период волны τ. Эти величины оказались выраженными через λ:

$$c = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda}; \quad \tau = \sqrt{\frac{2\pi}{g}\lambda}; \quad (19\text{-}5)$$

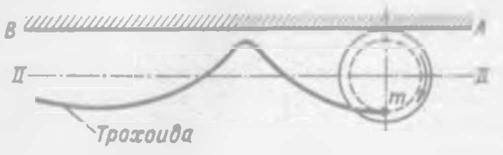


Рис. 19-9. Трохоида

б) уравнение свободной поверхности воды при наличии волн (этого уравнения здесь не приводим).

Оказалось, что кривая свободной поверхности имеет вид трохоиды. Напомним, что трохоидой (укороченной циклоидой) называется кривая, описанная некоторой точкой m, лежащей внутри окружности, которая катится без скольжения по горизонтальной прямой линии $A-B$ (рис. 19-9).

Из решения Герстнера вытекает, что любая частица воды при отсутствии волнения (находясь в покое) лежит всегда ниже центра орбиты, по которой она вращается во время волнения, на величину

$$\xi = \frac{\pi r^2}{\lambda}. \quad (19\text{-}6)$$

Для поверхностных частиц величина ξ, согласно зависимостям (19-3) и (19-6), оказывается

$$\xi = \xi_0 = \frac{\pi r_0^2}{\lambda} = \frac{\pi h_в^2}{4\lambda} \approx (0{,}04 \div 0{,}08)\, h_в, \quad (19\text{-}7)$$

причем здесь под величиной ξ_0 следует понимать также превышение линии $II-II$ центров орбит поверхностных частиц над линией $I-I$, т.е. уровнем покоя (рис. 19-8).

С тем, чтобы более наглядно представить кинематическую модель Герстнера, обратимся к рис. 19-10, на котором изображены две схемы: схема *а*, отвечающая некоторому моменту времени $t = t_1$, и схема *б* – некоторому моменту времени $t = t_2 = t_1 + \Delta t$. На этих схемах показаны средние волновые линии $II-II$ (т.е. линии центров орбит поверхностных частиц), а также круговые орбиты, по которым вращаются поверхностные частицы m (m_1, m_2, m_3 ...).

Предположим, что в момент времени t_1 поверхностные частицы m расположены так, как то указано на схеме *а*. Ясно, что при этом свободная поверхность воды изобразится линией $A_1 - B_1$, проведенной через частицы m_1, m_2, m_3, ..., вершина же волны в данный момент времени будет лежать на вертикали $W_2 - W_2$.

Далее будем считать, что за время Δt все рассматриваемые поверхностные частицы m, вращаясь по своим орбитам, повернулись на один и тот же угол θ (см. схему *б*). Очевидно, что после этого свободная поверхность воды примет вид кривой $A_2 - B_2$, показанной на схеме *б*, причем вершина волны переместится и окажется расположенной на вертикали $W_3 - W_3$.

Из сказанного ясно, что скорость перемещения гребня волны может быть представлена в виде

$$c = \frac{l}{\Delta t}, \tag{19-8}$$

где l – горизонтальное расстояние между вертикалями $W_2 - W_2$ и $W_3 - W_3$.

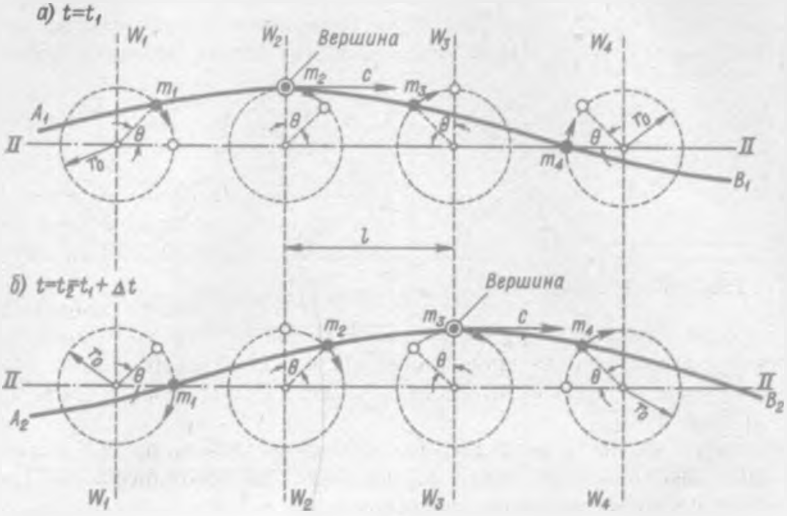


Рис. 19-10. Кинематическая схема деформации свободной поверхности, согласно Герстнеру

За следующий отрезок времени Δt вершина волны переместится от вертикали $W_3 - W_3$ до вертикали $W_4 - W_4$ и т. д.

Как видно, согласно теории Герстнера, частицы воды движутся по з а м к н у т ы м орбитам, в связи с чем скорости u (переноса вещества – воды) оказываются равными нулю (если пренебречь горизонтальными перемещениями частиц жидкости в пределах диаметра их орбит). Необходимо, однако, отметить, что более точные теоретические исследования в дальнейшем показали, что в действительности орбиты, по которым вращаются частицы жидкости, являются н е з а м к н у т ы м и кривыми, в связи с чем скорость u приобретает некоторую величину (хотя и небольшую, но не равную нулю).

3°. Эпюры волнового давления. Представим на рис. 19-11 свободную поверхность воды и две вертикали $W' - W'$ и $W'' - W''$. По-прежнему уровень покоя и среднюю волновую линию представим соответственно линиями $I - I$ и $II - II$.

Как известно, при отсутствии волнения эпюры распределения гидромеханического давления по вертикали $W' - W'$ и $W'' - W''$ будут иметь вид «гидростатических треугольников» $a_1 b_1 c_1$ и $a_2 b_2 c_2$.

При наличии волн вид этих эпюр изменится:

а) для вертикали $W' - W'$ (проведенной через вершину волны) вместо треугольника $a_1 b_1 c_1$ получим фигуру $a_1' b_1' c_1$; здесь кривая $a_1' b_1'$ должна асимптотически приближаться к прямой $a_1 b_1$;

б) для вертикали $W'' - W''$ (проведенной через подошву волны) вместо треугольника $a_2 b_2 c_2$ получим фигуру $a_2'' b_2'' c_2$; здесь кривая $a_2'' b_2''$ должна асимптотически приближаться к прямой $a_2 b_2$.

Как видно, волнение воды на поверхности практически не влияет на величину гидромеханического давления в точках, расположенных достаточно глубоко под уровнем покоя (например, на глубине $h > \lambda/2$).

Заштрихованные на рис. 19-11 фигуры называются **эпюрами волнового давления**. Эпюра волнового давления $a_1'b_1'a_1$, показывающая, насколько увеличиваются гидромеханические давления для данной вертикали $W'-W'$ при прохождении через нее вершины волны, является положительной; аналогичная эпюра $a_2''b_2''a_2$, показывающая уменьшение гидромеханических давлений для вертикали, проведенной через подошву волны, является отрицательной.

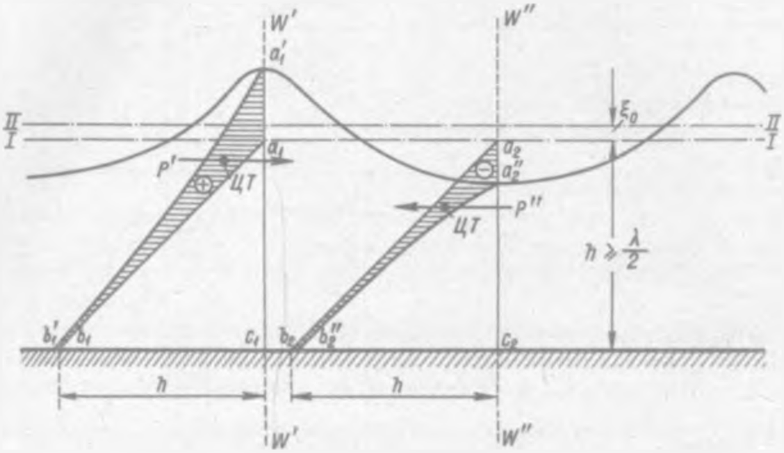


Рис. 19-11. Эпюры положительного и отрицательного волнового давления (случай глубокой воды)

Сопоставляя эпюры $a_1'b_1'a_1$ и $a_2''b_2''a_2$, видим, как в данной точке водного пространства колеблется гидромеханическое давление при прохождении гребней волн через вертикаль, отвечающую рассматриваемой точке.

Интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений, составленных Герстнером, дает возможность построить линии $a_1'b_1'$ и $a_2''b_2''$, т. е. построить эпюры волнового давления.

Считают, что на глубине $h = \lambda/2$ кривые $a_1'b_1'$ и $a_2''b_2''$ практически сливаются со своими асимптотами a_1b_1 и a_2b_2.

§ 19-6. ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

Эти волны получаются, когда $h < \lambda/2$. Буссинеск, теоретически исследуя случай ограниченной глубины водоема (случай «мелкого водоема»), получил для него не круговые орбиты, по которым движутся во время волнения частицы жидкости, а эллиптические орбиты (большая ось которых горизонтальна). Используя, в частности, некоторые данные теории так называемых потенциальных волн малой высоты, Буссинеск получил соответствующие расчетные зависимости. Ему удалось построить кривую свободной поверхности, которая получилась в виде эллиптической трохоиды. Буссинеск также нашел распределение давлений p по вертикалям при наличии мелкой воды. Эпюра положительного волнового давления, согласно Буссинеску, получила вид, изображенный на рис. 19-12. Величина f, указанная на чертеже, в этом случае оказалась равной:

$$f = \frac{h_{\text{в}}/2}{\operatorname{ch}\frac{2\pi h}{\lambda}}. \tag{19-9}$$

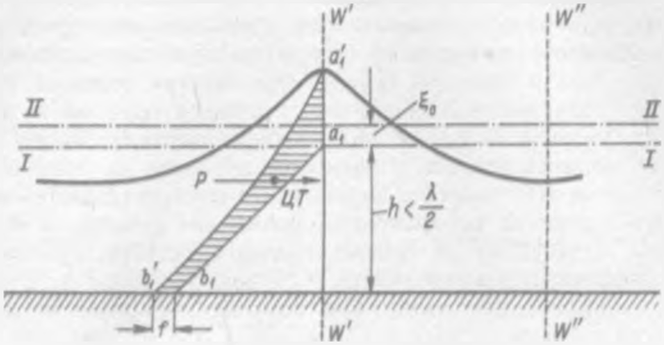


Рис. 19-12. Эпюра положительного волнового давления в случае мелкой воды

При относительно больших h величиной f здесь можно пренебречь. Разумеется, для вертикали $W'' - W''$, проведенной через подошву волны, будет иметь место отрицательная эпюра волнового давления.

§ 19-7. ВОЛНЫ НА ПОЛОГОМ ОТКОСЕ. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При рассмотрении пологого откоса берега (см. рис. 19-5) приходится, в частности, интересоваться следующими вопросами:

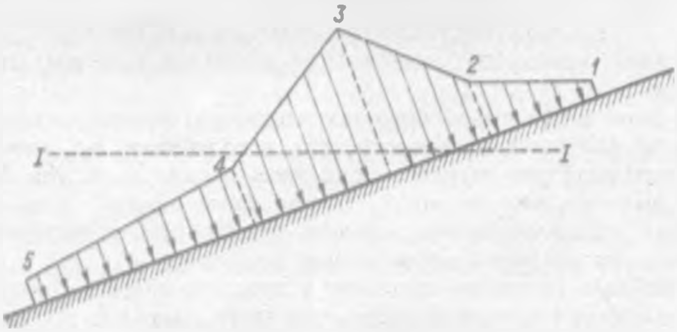


Рис. 19-13. Эпюра нормального давления воды на поверхность пологого откоса при волнении
($I - I$) – уровень воды при отсутствии волн («уровень покоя»)

1) высотой наката волны на откос $h_{\text{н}}$ (рис. 19-5). Для определения величины $h_{\text{н}}$ в литературе приводятся чисто эмпирические формулы. Из этих формул видно, что величина $h_{\text{н}}$, в частности, зависит от шероховатости откоса;

2) средней скоростью v движения воды по откосу; здесь также имеются соответствующие эмпирические формулы;

3) давлением, действующим со стороны потока на поверхность откоса. Это давление выражается эпюрой, схема которой представлена на рис. 19-13.

Ординаты этой эпюры могут быть установлены на основании соответствующих эмпирических данных (см. например, СН-57–75).

В заключение необходимо отметить, что дальнейшее развитие, а также соответствующие указания о практическом применении теории волн освещаются в ряде специальных курсов (в курсе «Гидротехнические сооружения», курсе «Порты и портовые сооружения» и др.).

Существенными вопросами, которых мы выше вовсе не касались, являются, во-первых, вопрос о распространении волн в пределах акваторий, защищаемых со стороны моря соответствующими оградительными сооружениями, и, во-вторых, вопрос о так называемой переработке берегов волнами (в результате которой берег, образованный, например, песчаным грунтом и не покрытый каким-либо креплением, получает определенное очертание после размыва его волнами). Что касается вопроса о волновом давлении на различные сооружения, то практически этот вопрос в большинстве случаев решается на основании различных приближенных соображений, основанных отчасти на чисто эмпирических данных, отчасти же на данных теории Герстнера, причем исходными расчетными параметрами здесь являются только величины $h_в$ и λ (устанавливаемые, как было отмечено выше, при помощи эмпирических зависимостей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

19-1. **Богомолов А. И., Михайлов К. А.** Гидравлика.– М.: Стройиздат, 1972.

19-2. **Нагрузки** и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов)/Нормы проектирования. СН-57-75.– М.: Стройиздат, 1975.

19-3. **Порты** и портовые сооружения/Н. Н. Джунковский, А. А. Каспарсон, Г. Н. Смирнов и др.– М.: Стройиздат, ч. I, 1964; ч. II, 1967.

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ [1]

ДВУХФАЗНЫЕ ПОТОКИ ЖИДКОСТИ

§ 20-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ. ЗАМЕЧАНИЯ О НЕНЬЮТОНОВСКИХ И АНОМАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Двухфазными (бифазными) потоками жидкости обычно называют потоки, содержащие: а) или частицы твердого тела, находящиеся во взвешенном состоянии; удельный вес твердого тела здесь может быть как больше, так и меньше удельного веса жидкости; б) или капли другой более легкой или более тяжелой жидкости; в) или, наконец, пузыри газа, в частности, пузыри, заполненные воздухом или парами данной жидкости.

С двухфазными потоками жидкости в практике гидротехнического строительства приходится встречаться достаточно часто, например при рассмотрении потоков воды, содержащих взвешенные частицы грунта (так называемые взвешенные наносы) или кристаллы льда, шугу, или при рассмотрении потоков воды, содержащих пузыри воздуха (аэрированных потоков), и т. п. Двухфазные потоки получаются в случае гидротранспорта, когда транспорт, например, грунта осуществляется методами гидромеханизации.

Иногда двухфазные, так же как и некоторые однофазные (см. § 1-2) и многофазные потоки, могут представлять собой потоки:

1) или так называемой неньютоновской жидкости, для которой продольные касательные напряжения трения τ выражаются (для прямолиней-

[1] Данная глава составлена при участии М. Я. Крупника.

ного потока) не зависимостью Ньютона (4-24), а зависимостью вида:

$$\tau = \eta \left(\frac{du}{dn} \right)^k, \tag{20-1}$$

где k – число, отличное от единицы, остальные обозначения см. в § 4-3;

2) или так называемой аномальной жидкости,[1] для которой τ выражается:

а) или зависимостью Бингама:

$$\tau = \tau' + \eta \frac{du}{dn}, \tag{20-2}$$

б) или более общей зависимостью Шведова:

$$\tau = \tau' + \eta \left(\frac{du}{dn} \right)^k. \tag{20-3}$$

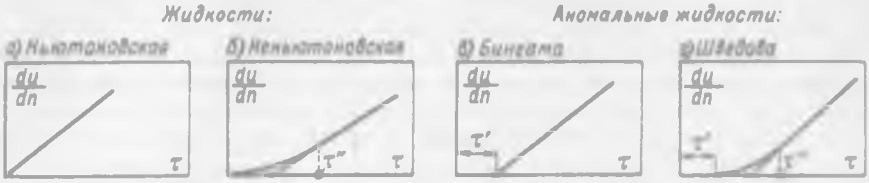


Рис. 20-1. Характеристики неполных воображаемых моделей «жидких тел»

Как видно из зависимостей (20-2) и (20-3), относящихся к движущейся жидкости, аномальные жидкости в отличие от обычных жидкостей (см. § 1-2) в состоянии покоя могут иметь касательные напряжения τ меньшие или равные некоторой величине τ'.

На рис. 20-1, *а – г* представлены зависимости

$$\tau = f \left(\frac{du}{dn} \right) \tag{20-4}$$

для ньютоновской жидкости (см. схему *а*), которую мы имели в виду выше при рассмотрении ламинарного режима [см. формулу (4-24)]; для неньютоновской жидкости (см. схему *б*); для аномальной жидкости Бингама (см. схему *в*); для аномальной жидкости Шведова (см. схему *г*).

Далее не будем касаться аномальных жидкостей, для расчета движения которых разработаны специальные теории, основанные на использовании зависимостей (20-2) и (20-3). Рассмотрим только потоки воды, подчиняющиеся зависимости Ньютона (4-24), причем будем иметь в виду только такие потоки воды, которые содержат во взвешенном состоянии тяжелые твердые частицы, например, частицы грунта.

Важно здесь еще подчеркнуть следующее обстоятельство. Все приведенные выше рассуждения, а также графики на рис. 20-1 относятся только к жидкостям, которые могут рассматриваться с «позиций Ньютона» т. е. с позиций модели, описываемой зависимостью (4-24). Вместе с тем, как мы видели, при рассмотрении грунтовых вод (см. гл. 17 и 18) используется другая модель – «модель Дарси». Естественно, что к «*жидкости Дарси*» приведенные выше рассуждения не могут быть отнесены. Жидкость Дарси (с учетом, в частности, так называемого начального градиента) должна описываться графиками иного вида, здесь не приводимыми.

[1] Примером потоков аномальной жидкости могут являться так называемые селевые потоки.

Зависимость Ньютона (4-24) была дана нами в § 4-3 только для ламинарного режима. Вообще говоря, обобщенный закон Ньютона (упомянутый в сноске на стр. 136) справедлив и для турбулентного движения воды, если мы будем иметь в виду поле актуальных скоростей. Что касается модели осредненных скоростей (модели Рейнольдса – Буссинеска), которой для расчета заменяют действительный турбулентный поток, то здесь, как видно из формул (4-55) и (4-56), мы, после такой замены, получаем модель неньютоновской жидкости, характеризуемой показателем степени $k = 2{,}0$ [см. формулу (20-1)].

Надо подчеркнуть следующее важное обстоятельство, которое всегда необходимо иметь в виду. Как правило, действительные явления настолько сложны, что они непосредственно не поддаются соответствующей математической обработке. Поэтому и приходится, как то отмечалось в гл. 16, пользоваться «воображаемыми моделями» (или иначе «идеальными телами» или «идеальными процессами»),[1] которыми мы предварительно заменяем действительное явление или действительное тело. Именно такими воображаемыми моделями (или идеальными телами) и являлись: идеальная жидкость, поясненная в § 1-3; упомянутая модель Буссинеска; модель Бернадского (см. гл. 15) и модель Форхгеймера (см. гл. 17); ньютоновская и неньютоновская жидкости; жидкости Бингама и Шведова и т. п.

При исследовании того или иного явления всегда необходимо себе представлять ту воображаемую модель, непосредственно подвергаемую математической обработке, которой мы предварительно заменили действительное явление (или тело).

Механическую смесь частиц грунта с водой часто называют гидросмесью; потоки такой смеси называют взвесенесущими потоками; при весьма большом содержании частиц грунта в воде получаем гидросмесь, иногда называемую пульпой.

При изучении взвесенесущих потоков приходится различать:

а) русла, поддающиеся размыву, т.е. русла, которые при определенных скоростях воды могут размываться, и могут насыщать поток взвешенными частицами грунта;[2]

б) русла, вовсе неподдающиеся размыву, например, русла, покрытые бетонной одеждой; в таких руслах вначале может происходить только осаждение (выпадение) наносов из воды, причем эти русла могут только заиливаться.

Грунты, образующие русло, вообще говоря, могут быть:

а) или связными, когда между отдельными частицами грунта имеется сцепление (частицы грунта как бы склеены одна с другой); примером таких грунтов является глина;

б) или несвязными (сыпучими), т.е. лишенными сил сцепления; примером таких грунтов является песок, гравий и т. п.

Далее будем иметь в виду только несвязные (песчаные) грунты.

Песчаный грунт всегда является разнозернистым. Гранулометрический состав фракций разнозернистого песка представляют соответствующей кривой (рис. 17-9), которая строится на основании специально проведенных опытов с данным грунтом.

Скорость равномерного падения одной тяжелой твердой частицы в достаточно большом объеме покоящейся воды называется гидравлической крупностью данной частицы. Эта скорость, обозначаемая далее через w_0, зависит от геометрической формы и размеров частицы и удельного веса образующего ее вещества, а также от вязкости воды. Величину w_0 определяют

---

[1] Идеальными в том смысле, что такие тела или процессы в природе не существуют.

[2] Можно различать еще и русла, поддающиеся размыву, за счет которого поток чистой воды не насыщается взвешенными частицами грунта и, следовательно, остается невзвесенесущим; деформация русла в этом случае происходит за счет движения только так называемых донных наносов (см. конец § 20-3).

экспериментально. Практически часто считают, что относительная скорость перемещения (падения) тяжелой твердой частицы по отношению к движущейся воде, т.е. вертикальная проекция относительной (по отношению к воде) скорости движения частицы, также равна w_0.

Рассматривая взвесенесущие потоки, приходится решать следующие задачи, имеющие большое практическое значение:

1) определять величину потерь напора при движении гидросмеси, имеющей различную степень насыщения ее наносами (тяжелыми твердыми частицами);

2) оценивать размывающую способность потока, т.е. выяснять возможность размыва русла, а также устанавливать скорость и предельную величину этого размыва;

3) решать различные вопросы, связанные с гидротранспортом грунта; устанавливать количество грунта, которое может транспортировать данный поток; отыскивать предельную («незаиливающую») скорость, при уменьшении которой начинается интенсивное заиливание русла, так как транспорт всего взвешенного грунта делается невозможным.

4) оценивать заиливающую способность потока, т.е. выяснить возможность и скорость заиливания данного русла за счет выпадения частиц грунта из взвесенесущего потока.

С отмеченными выше задачами 2) и 3), в частности, встречаемся:

а) при проектировании так называемых отстойников, т.е. специальных бассейнов, устраиваемых для отстоя воды в них (с целью очистки воды от взвешенных наносов);

б) при проектировании плотин, мостовых опор и т.п., за которыми могут возникать так называемые местные размывы русла реки (а иногда и местные заиливания его);

в) при анализе переформирования (деформаций) русла рек, когда приходится сталкиваться с «общим» их размывом или заиливанием (простирающимся на большую длину потока);

г) при анализе заиливания искусственно созданных водоемов (водохранилищ) и т.п.

§ 20-2. МЕХАНИЧЕСКОЕ (СИЛОВОЕ) ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОТОКА НА НЕПОДВИЖНЫЕ ЧАСТИЦЫ ГРУНТА, ЛЕЖАЩИЕ НА ДНЕ РУСЛА И ОБТЕКАЕМЫЕ ВОДОЙ

Представим на рис. 20-2, *а* некоторую неподвижную твердую частицу A, лежащую на дне русла. Данную частицу будут «опоясывать» соответствующие линии тока движущейся воды, причем ясно, что, в частности, за счет потерь напора на пути abc гидродинамическое давление p с верховой стороны частицы будет больше, чем с ее низовой стороны (см. на рисунке воображаемые пьезометры $П$, показывающие разность высоты давлений Δh). Ясно, что в общем случае поверхность частицы A будет подвержена действию неравномерно распределенного гидродинамического давления p (рис. 20-2, *б*), в связи с чем мы можем представить геометрическую сумму элементарных сил нормального давления воды на поверхность частицы A в виде одного наклонного вектора $P_д$.

Помимо нормальных давлений p, на поверхность частицы будут действовать еще касательные силы трения интенсивностью τ (рис. 20-2, *в*). Эти силы можно заменить одним вектором $P_{тр}$. Складывая два вектора $P_д$ и $P_{тр}$, физическая природа которых ясна из сказанного выше, получим одну силу P (рис. 20-2, *г*). Эта сила P и является силой механического воздействия потока воды на данную твердую неподвижную частицу. Очевидно, величина и направление силы P зависят от формы и размеров данной частицы, а также от условий движения воды в ее районе в рассматриваемый момент времени.

Наблюдая множество частиц грунта (песка), лежащих на дне русла и имеющих различную форму и размеры, а также разные условия обтекания их водой, можем видеть, что каждая частица будет подвергаться воздействию своей силы P. Для некоторых частиц сила P в данный момент времени будет иметь вертикальную составляющую $P_в$, направленную вниз, причем такие частицы в рассматриваемый момент времени будут прижиматься потоком к дну.

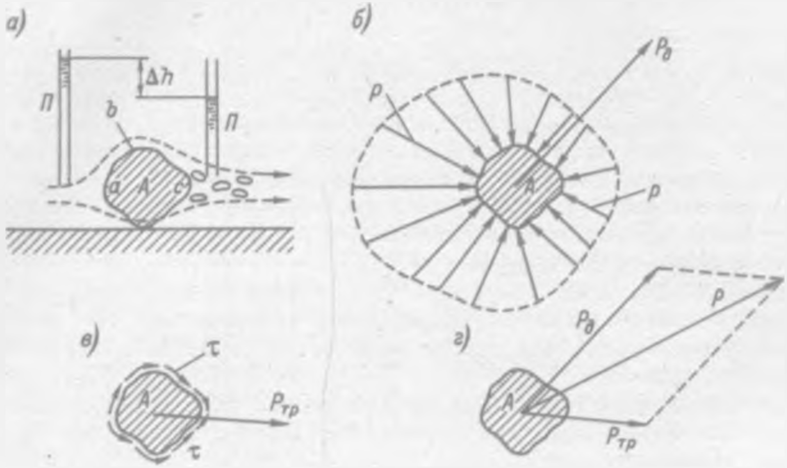


Рис. 20-2. Схема механического воздействия потока на неподвижное обтекаемое твердое тело

Для других же частиц вертикальная составляющая $P_в$ силы P в данный момент времени будет направлена вверх и представлять собой так называемую подъемную силу. Очевидно, когда для той или другой частицы грунта подъемная сила $P_в$ окажется большей ее собственного веса G [1]

$$P_в > G, \tag{20-5}$$

и если продолжительность действия указанной вертикальной составляющей будет достаточно велика, то эта частица может оторваться от дна и попасть в придонный слой потока.

§ 20-3. МЕХАНИЗМ НАСЫЩЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ТЯЖЕЛЫМИ ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ (ЧАСТИЦАМИ ГРУНТА, ПЕСЧИНКАМИ)

Выше было отмечено, что песчинки, лежащие на дне русла, в результате воздействия на них движущейся воды, могут попасть в нижний (придонный) слой потока.

В случае ламинарного движения воды твердая частица с гидравлической крупностью w_0 (см. § 20-1), попав в поток, выпадет на дно несколько

[1] Силу сцепления между частицами грунта не учитываем, так как имеем в виду только песчаный грунт.

ниже по течению; она будет переноситься потоком со скоростью, равной его продольной скорости, и оседать под действием силы тяжести со скоростью w_0. Как видно, при ламинарном движении насыщение потока тяжелыми[1] твердыми частицами (песчинками), поднимающимися со дна, невозможно;[2] однако некоторое перемещение таких частиц по дну (вниз по течению) может наблюдаться.

Иная картина получается при турбулентном движении. Как известно (см. § 4-6), турбулентный поток отличается от ламинарного, в частности, наличием поперечных пульсационных скоростей u'_z. Эти пульсационные скорости обусловливают следующую картину перемещения в толще потока песчинок, оторвавшихся от дна русла.

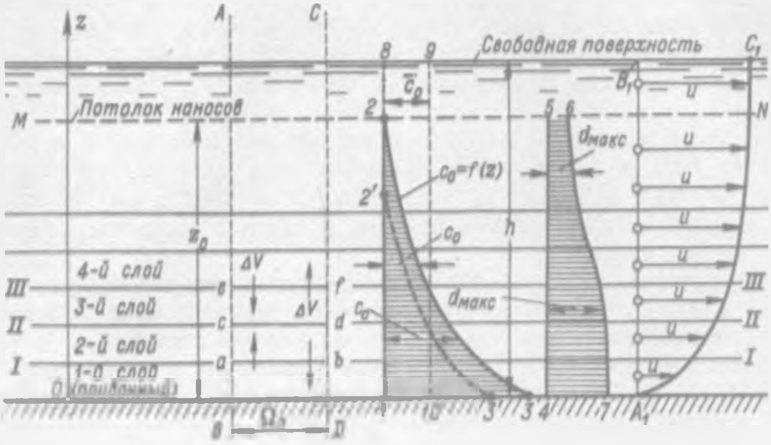


Рис. 20-3. Механизм насыщения потока тяжелыми твердыми частицами

$A_1 - B_1 - C_1$ – эпюра осредненных продольных скоростей; $1-2-3-1$ и $1-2'-3'-1$ – эпюры местной предельной (предельно возможной) концентрации c_0 твердой фазы; $4-5-6-7$ – эпюра зависимости максимального диаметра взвешенных частиц $d_{макс}$ от координаты z

Представим на рис. 20-3 продольный разрез вертикальной плоскостью турбулентного потока чистой воды. Разобьем этот поток сечениями $I-I$, $II-II$, $III-III$, ... на ряд элементарных слоев, параллельных дну (см. на рисунке слои: *1*, *2*, *3*, ...). Будем считать, что рассматриваемое русло образовано песчаным грунтом, а следовательно, оно является руслом, поддающимся размыву.

Предположим, что с некоторой площади дна величиной Ω_0 (ограниченной вертикальными сечениями $A-B$ и $C-D$) за определенный отрезок времени Δt в область 1-го (придонного) слоя поступило (в силу причин, описанных в § 20-2) некоторое количество песчинок (например, 1000 штук).

Далее для удобства пояснений представим себе, что продольные скорости движения воды отсутствуют (причем движение наносов, называемых донными, также отсутствует); имеют место только поперечные пульсационные скорости

[1] Т. е. образованными материалом, имеющим удельный вес, больший удельного веса воды.

[2] Как здесь, так и ниже мы не имеем в виду явления диффузии, обусловленного броуновским движением, за счет которого мельчайшие твердые тяжелые частицы (размером менее нескольких микронов) могут перемещаться в движущейся и покоящейся жидкости.

u_z'. Рассматривая такую условную схему, выделим на поверхности $I-I$, отделяющей 1-й слой потока от 2-го, площадь ab, равную площади дна Ω_0. Очевидно, по истечении некоторого небольшого отрезка времени одна часть отмеченных выше 1000 песчинок со скоростью [1]

$$u\downarrow = u_z'\downarrow + w_0 \tag{20-6}$$

упадет обратно на дно; другая же часть (меньшая) со скоростью

$$u\uparrow = u_z'\uparrow - w_0 \tag{20-7}$$

пройдет через сечение $a-b$ и попадет во 2-й слой потока; разумеется, такое перемещение вверх могут иметь только мелкие песчинки, для которых направленная вверх пульсационная скорость $u_z'\uparrow$ окажется (в данный момент времени) большей, чем величина гидравлической крупности w_0, относящейся к этим частицам. [2]

После этого мы можем аналогично рассмотреть площадь cd, отделяющую 2-й слой от 3-го, и в результате убедиться, что некоторое (вообще говоря, малое) количество песчинок (из указанных выше 1000 штук) должно будет в последующий момент времени попасть, в связи с наличием скорости $u_z'\uparrow$, из 2-го слоя в 3-й слой и т. д. [3]

Таким образом видим, что, благодаря действию поперечных пульсационных скоростей u_z', турбулентный поток с течением времени (при наличии русла, поддающегося размыву) будет постепенно насыщаться песчинками на все большую и большую высоту z. Этот процесс насыщения турбулентного потока песчинками должен продолжаться до определенного предела, после которого степень насыщения потока песчинками, поднимающимися со дна русла, стабилизируется.

В течение рассмотренного периода насыщения потока песчинками до указанного предела стабилизации степени насыщения потока будем иметь следующее:

а) для произвольно взятого сечения, например сечения $a-b$ (рис. 20-3), объем фазы, проходящей через это сечение вверх (в течение некоторого времени Δt), будет больше объема твердой фазы, проходящей (за то же время Δt) через это сечение вниз; объемы же гидросмеси ΔV, проходящие за время Δt вверх и вниз через сечение $a-b$, разумеется, будут одинаковы: $\Delta V\uparrow = \Delta V\downarrow$ (в противном случае было бы нарушено известное уравнение неразрывности); как видно, в течение периода насыщения объемы $\Delta V\uparrow$ внутри себя должны нести большие объемы твердой фазы, чем соответствующие объемы гидросмеси $\Delta V\downarrow$;

б) объемы твердой фазы $Тв\uparrow$, отрывающейся от дна русла и поступающей в поток, будут больше объемов твердой фазы $Тв\downarrow$, которая под действием скоростей $u_z'\downarrow$ [см. формулу (20-6)] будет выпадать из потока и ложиться снова на дно русла ($Тв\uparrow > Тв\downarrow$); в связи с этим поверхность дна в период насы-

[1] С тем чтобы не усложнять описание рассматриваемой качественной картины, пренебрегаем здесь (и ниже) инерцией песчинок и полагаем, что время воздействия скоростей u_z' на данные песчинки достаточно продолжительно (в связи с чем в течение этого времени рассматриваемые песчинки успевают пройти путь, равный толщине выделенных элементарных слоев).

[2] См. предыдущую сноску.

[3] При рассмотрении поясняемого вопроса надо учитывать, что в данный момент времени в одних точках, например, площади ab (рис. 20-3) пульсационные поперечные скорости u_z' направлены вниз, в других же точках этой же площади ab (в тот же момент времени) скорости u_z' направлены вверх.

щения потока песчинками должна опускаться: в этот период будет происходить размыв русла.

После того, как степень насыщения потока стабилизировалась, получаем иные условия: в течение времени Δt объемы гидросмеси ΔV, а также *объемы твердой фазы* ($Тв$), *проходящие вверх и вниз через произвольно взятое горизонтальное сечение* $a-b$ (или $c-d$ и т. п.; рис. 20-3), *оказываются одинаковыми* ($Тв\uparrow = Тв\downarrow$); *объем твердой фазы, поднимаемой потоком со дна, получается равным объему твердой фазы, выпадающей из потока на дно*; при этом размыв песчаного русла должен прекратиться (хотя бы средняя скорость потока v была весьма велика): поверхность дна русла должна принять стабильное положение.

После стабилизации степени насыщения потока песчинками концентрация c_0 песчинок, находящихся в потоке, всегда должна уменьшаться по направлению от дна к свободной поверхности (см. эпюру $1-2-3$ изменения концентрации песчинок с изменением z).[1]

Положение о том, что при одинаковых объемах твердой фазы, проходящих вверх и вниз через некоторое горизонтальное сечение $a-b$ (т. е. при условии, что $Тв\uparrow = Тв\downarrow$), мы будем иметь разные концентрации в верхнем и нижнем слоях потока, можно доказать, исходя из следующих соображений (самого доказательства здесь не приводим).

Все тяжелые песчинки, находящиеся в толще потока, все время движутся по отношению к воде вертикально вниз с относительной скоростью w_0, поэтому:

а) объемы гидросмеси $\Delta V\uparrow$, попадая за время Δt из нижнего слоя (более насыщенного песчинками) в верхний слой (менее насыщенный песчинками), приносят с собой в верхний слой несколько меньшее число песчинок, чем то, которое они имели в нижнем слое (поскольку часть песчинок, движущихся с относительной скоростью $w_0\downarrow$, выйдет за время Δt из этих объемов и останется в нижнем слое);

б) объемы же гидросмеси $\Delta V\downarrow$, попадая за то же время из верхнего слоя в нижний, будут приносить с собой несколько большее число песчинок, чем то, которое они содержали в верхнем слое (поскольку к этим объемам за время Δt добавится из верхнего слоя некоторое количество песчинок, движущихся вниз с относительной скоростью $w_0\downarrow$).

Только в случае $w_0 = 0$ равные по объему величины $\Delta V\uparrow$ и $\Delta V\downarrow$ будут переносить в соседние слои тот объем твердой фазы, который они содержали соответственно в нижнем и верхнем слоях, причем в этом случае концентрация песчинок после стабилизации степени насыщения должна оказаться одинаковой по глубине потока.

Как показывают опыты, интенсивность пульсации скоростей в случае безнапорных потоков уменьшается при удалении от дна потока. Следует считать, что на свободной поверхности спокойных потоков поперечная пульсационная скорость u'_z практически равна нулю. В связи с указанным снижением u'_z иногда получаем следующее: на некоторой высоте z_0 над дном, меньшей глубины потока h (рис. 20-3), пульсационная скорость u'_z оказывается равной гидравлической крупности w_0, отвечающей наиболее мелким песчинкам, поднявшимся со дна русла; очевидно, дальнейший подъем песчинок будет невозможен (так как при $z > z_0$ получаем $u'_z < w_0$).[2] Линию $M-N$ (рис. 20-3), высотное положение которой определяется координатой z_0, иногда называют потолком наносов. В некоторых случаях граница $M-N$ бывает выражена весьма резко, выше этой границы имеем чистую воду обычного удельного веса, ниже ее — гидросмесь, характеризуемую относительно большим удельным

[1] Под концентрацией понимаем объем взвешенных песчинок, выраженный в долях объема гидросмеси (см. § 20-4).

[2] Такого рода рассуждения являются полностью справедливыми только в случае допущения, отмеченного в сноске [3] на стр. 628.

весом. В этом случае получаем движение как бы двух разных жидкостей: имеет место резко выраженное «слоистое» строение потока, т. е., как говорят, стратификация потока.

Надо еще сказать, что в связи с уменьшением интенсивности пульсации скоростей u'_z при удалении от дна потока величина наибольшего размера $d_{\text{макс}}$ песчинок, находящихся на определенном расстоянии z от дна, должна уменьшаться с увеличением z (см. эпюру $4-5-6-7$ на рис. 20-3). Заметим также, что по мере роста концентрации твердой фазы (в процессе насыщения потока твердыми частицами) эпюра скоростей $A_1B_1C_1$ должна деформироваться — делаться более неравномерной.

Выяснив отмеченные выше обстоятельства, представим теперь, что после того, как степень насыщения потока песчинками стабилизировалась, в некоторый момент времени в силу тех или других причин величины поперечных

Рис. 20-4. Траектории (1 и 2), описываемые взвешенными твердыми частицами A и $Б$ (при влечении их турбулентным потоком)

пульсационных скоростей в данном потоке снизились. Очевидно, в этом случае получим картину, обратную той, которая имелась при насыщении потока песчинками: объем твердой фазы, выпадающей из потока на дно, будет превышать объем твердой фазы, поднимаемой потоком со дна. В результате (вне зависимости от величины средней скорости v движения воды) поверхность дна потока будет подниматься, причем мы получим заиливание русла. Оно будет продолжаться до тех пор, пока в потоке не останется то стабильное количество песчинок, которое отвечает новому (стабилизировавшемуся) уровню пульсации скоростей; при этом распределение концентрации песчинок по глубине потока примет вид, например, фигуры $1-2'-3'-1$ (рис. 20-3).

Рассматривая равномерное установившееся движение воды в призматическом русле в условиях стабилизировавшейся степени насыщения потока песчинками, отметим, что траектории, например, песчинок A и $Б$ имеют вид кривых 1 и 2, показанных на рис. 20-4; сперва данная песчинка A поднимается кверху, а затем постепенно падает на дно, с тем чтобы снова подняться и т. д. Можно сказать, что при перемещении песчинок турбулентным потоком часть этих песчинок постоянно выпадает из толщи потока, другая же их часть постоянно поднимается потоком со дна.

Как видно, мы получаем «грунтообмен» между потоком и дном русла. При этом в случае стабилизировавшейся степени насыщения потока песчинками (и при отсутствии движения донных наносов) такой грунтообмен не вызывает деформации поверхности русла (русло не размывается и не заиливается).

Разумеется, чем крупнее песчинки, тем меньше будет для них размер z, показанный на рис. 20-4. Для достаточно крупных частиц размер z приближается к нулю. Именно такие частицы, а также весьма крупные частицы, которые вовсе не отрываются от дна, а катятся или скользят (сдвигаются) по нему иногда целыми слоями (под воздействием силы, поясненной в § 20-2), и называются донными наносами, в отличие от наносов, рассмотренных выше, называемых взвешенными.

Выше мы имели в виду русло, поддающееся размыву (песчаное русло). Если русло покрыто, например, бетонной одеждой (т. е. является не поддающимся размыву), то в случае, когда в такое русло поступает вода, уже содержащая в себе взвешенные наносы (а иногда и донные), приходится вначале анализировать только выпадение на дно русла принесенной взвеси, а затем и размыв ее (а также поведение донных наносов, если таковые имеются).

§ 20-4. ТЕРМИНОЛОГИЯ. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗУЧЕНИЕМ ВЗВЕСЕНЕСУЩИХ ПОТОКОВ

Будем рассматривать только взвешенные наносы (донных наносов касаться не будем).

Расходом гидросмеси $Q_{гс}$ называется ее *объем*, проходящий в единицу времени через данное живое сечение. Если концентрация взвешенных песчинок в воде мала, то практически расход гидросмеси можно считать равным расходу воды.

Расход твердой фазы или иначе «*твердый расход*» $Q'_т$ – *объем* твердой фазы (мысленно обращенный в монолит, лишенный пор), проносимой потоком в единицу времени через данное живое сечение.

«*Твердый весовой расход*» $Q_т$ – вес твердой фазы, проносимой в единицу времени через данное живое сечение; размерность этого расхода, например, кН/с (или кгс/с); очевидно $Q_т = (Q_{гс} - Q)\gamma_т = Q'_т\gamma_т$, где Q – расход жидкой фазы (воды) и $\gamma_т$ – вес материала, образующего твердую фазу, отнесенный к единице объема материала.

Мутность воды (или иначе весовая мутность воды) a – вес взвешенных песчинок в единице объема гидросмеси; размерность a, например, кН/м³ (или кгс/м³).

Концентрация твердой фазы (или иначе *относительная объемная мутность*) c – отношение *объема* твердой фазы (мысленно обращенной в монолит, лишенный пор) к *объему гидросмеси*, внутри которой находится данная твердая фаза; величина c – безразмерная; очевидно, что

$$c = \frac{Q_{гс} - Q}{Q_{гс}} = \frac{Q'_т}{Q_{гс}}; \quad a = c\gamma_т = \frac{Q_{гс} - Q}{Q_{гс}}\gamma_т = \frac{Q'_т}{Q_{гс}}\gamma_т. \qquad (20\text{-}8)$$

Положим, что нам задано цилиндрическое русло (определенного поперечного сечения, с определенным уклоном и шероховатостью), а также расход воды Q. Положим, что в данном русле имеет место безнапорное, равномерное, установившееся движение. *Транспортирующей способностью* такого *безнапорного*[1] потока называется *твердый весовой расход*, который получится, если мы представим себе, что этот поток насытился песчинками *до предела* (за счет размыва русла или за счет поступающей в него твердой фазы со стороны), причем степень насыщения потока наносами *стабилизировалась*. Размерность транспортирующей способности потока – например, кН/с (или кгс/с). В случае *однозернистых* песчинок величина транспортирующей способности зависит как от параметров потока, так и от крупности песчинок, поэтому величину ее следует связывать с крупностью перемещаемых однозернистых песчинок. В случае *разнозернистых* песчинок данная величина оказывается не вполне определенной: при наличии песчаного русла, поддающегося размыву, поток, вообще говоря, может «отби-

[1] Понятие транспортирующей способности используется, главным образом, при рассмотрении безнапорных потоков.

рать» из числа имеющихся фракций песка (образующего русло) различные сочетания этих фракций и обогащаться ими, при этом мы можем получать и различные величины его транспортирующей способности. Впрочем, здесь существует точка зрения, согласно которой поток должен отбирать вполне определенный гранулометрический состав наносов, в связи с чем он будет (при этом условии) иметь определенную (единственно возможную) транспортирующую способность, отвечающую заданному гранулометрическому составу разнозернистого песка, образующего русло потока.

Условимся потоки, несущие количество песчинок, отвечающее его транспортирующей способности, называть потоками, полностью насыщенными наносами (в отличие от потоков недонасыщенных или перенасыщенных).

Местной предельной (предельно возможной) мутностью воды a_0 называется мутность воды, имеющая место в той или другой точке «полностью насыщенного потока».

Местной предельной (предельно возможной) концентрацией твердой фазы c_0 называется концентрация твердой фазы в той или другой точке «полностью насыщенного потока».

Выполняя различные расчеты, мы обычно оперируем средней скоростью v; в связи с этим переменную по глубине предельную концентрацию c_0 приходится заменять средней предельной концентрацией (средней по глубине) $\bar{c}_0$. Величина $\bar{c}_0$ должна определяться из условия, чтобы удельный твердый весовой расход $q_т$, получающийся (для плоской задачи) при использовании величин v и $\bar{c}_0$:

$$q_т = \frac{Q_т}{b} = \bar{c}_0 \gamma_т v h = \bar{a}_0 v h, \tag{20-9}$$

равнялся бы действительному удельному твердому расходу

$$q_т = \frac{Q_т}{b} = \int_0^{z_0} c_0 \gamma_т u \, dz, \tag{20-10}$$

где b – ширина рассматриваемого прямоугольного русла, u – местная продольная скорость (см. на рис. 20-3 эпюру скоростей u гидросмеси); $\bar{a}_0$ – средняя по глубине мутность.

Как видно, величина средней предельной концентрации твердой фазы равна (для плоской задачи):

$$\bar{c}_0 = \frac{\int_0^{z_0} c_0 u \, dz}{vh}; \tag{20-11}$$

величину $\bar{c}_0$ на рис. 20-3 можно представить эпюрой *1–8–9–10*, имеющей вид прямоугольника.

Если твердый весовой расход взвесенесущего потока в каком-либо русле оказывается меньше расхода $Q_т$, вычисленного в соответствии с формулой (20-9), то следует считать, что данный поток является недонасыщенным наносами. Если имеем обратное соотношение в величинах отмеченных расходов, то должны считать, что данный поток является перенасыщенным, в связи с чем русло будет заиляться.

При решении подобного рода задач необходимо знать для заданного потока величину $\bar{a}_0$ (или $\bar{c}_0$). В литературе приводится много разных эмпирических формул для этой величины. Большинство этих формул относится к равномерному, установившемуся безнапорному потоку для условий, когда величина $\bar{a}_0$ (или $\bar{c}_0$) является не слишком большой; эти эмпирические формулы, разумеется, имеют определенные границы применимости. Эмпирические формулы, предлагаемые для песчаных русел разными авторами, можно привести к виду:

$$\bar{a}_0\left(\text{в } \frac{\text{кгс}}{\text{м}^3}\right) = k_{вз}\frac{v^3}{\bar{w}_0 R^{n_0}} \quad \text{или} \quad \bar{a}_0\left(\text{в } \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}\right) = 10k_{вз}\frac{v^3}{\bar{w}_0 R^{n_0}}, \tag{20-12}$$

где v – средняя скорость, м/с; R – гидравлический радиус, м; $\bar{w}_0$ – средняя гидравлическая крупность взвешенных частиц грунта, м/с; практически $\bar{w}_0$ назначают как средневзвешенную гидравлическую крупность тех песчинок, которые слагают русло; $k_{вз}$ – коэффициент (имеющий размерность), лежащий в пределах:

$$k_{вз} = 0{,}017 \div 0{,}034; \tag{20-13}$$

n_0 – показатель степени, изменяющийся в пределах

$$n_0 = \frac{3}{4} \div \frac{4}{3}. \tag{20-14}$$

Пользуясь формулой (20-12), представляется возможным решать, в частности, соответствующие вопросы безнапорного гидротранспорта грунта, т. е. транспорта грунта по безнапорным каналам (лоткам, желобам и т. п.).

В литературе имеется ряд попыток построить кривую $c_0 = f(z)$ (см. кривую $2-3$ на рис. 20-3) теоретическим путем, с тем, чтобы далее, исходя из этой кривой, определить, в соответствии с формулой (20-11), величину $\bar{c}_0$. Такие исследования относятся главным образом к однозернистым наносам (однозернистым пескам). В области этих исследований можно отметить две разные теории: а) диффузионную теорию взвесенесущих потоков, разработанную применительно к водным потокам В. М. Маккавеевым, и б) гравитационную теорию, предложенную М. А. Великановым.

В основу диффузионной теории заложено допущение о возможности использования особого «диффузионного закона» (аналогичного законам Фика). При таком допущении распределение предельной концентрации c_0 твердой фазы по вертикали описывается в соответствии с законом теории диффузии (для равномерного установившегося движения гидросмеси) следующим дифференциальным уравнением:

$$-w_0\frac{\partial c_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} D_0 \frac{\partial c_0}{\partial z}, \tag{20-15}$$

где D_0 – так называемый коэффициент турбулентной диффузии, зависящий от динамического коэффициента турбулентной вязкости $\eta_т$ (см. стр. 150):

$$D_0 = \frac{g}{\gamma}\eta_т; \tag{20-16}$$

w_0 – гидравлическая крупность рассматриваемых однозернистых наносов.

Если предположить, согласно В. М. Маккавееву, что величина $\eta_т$ постоянна (не зависит от координаты z)[1], то в соответствии с исследованиями *А. Д. Грешаева* можно показать, что

[1] Такое положение может иметь место при определенном («параболическом») распределении скоростей u по вертикали.

формул. Из рассмотрения этих формул видно, что в общем случае потеря напора для гидросмеси получается большей, чем для чистой воды. Однако при не слишком большой концентрации твердой фазы и при наличии мелких фракций грунта потери напора в случае гидросмеси практически получаются такими же, как и в случае чистой воды. Разумеется, рассчитывая потери напора h_l по формулам, относящимся к чистой воде, мы должны принимать во внимание, что потеря h_l должна здесь выражаться высотой столба жидкости, имеющей объемный вес, равный объемному весу транспортируемой гидросмеси.

В заключение необходимо обратить внимание на следующее.

Как отмечалось, в случае $v < v_{мин}$ происходит выпадение взвешенных частиц грунта на дно трубопровода. При этом живое сечение трубопровода должно уменьшаться, а скорости v соответственно увеличиваться (при неизменном расходе гидросмеси, подаваемом насосами). В связи с этим после некоторого заиления трубопровода дальнейший рост этого заиления должен прекратиться. Как видно, в случае напорного движения получаем как бы *саморегулирование* движения гидросмеси.

Дополнительно о расчете напорного гидротранспорта см. [20-3; 20-8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

20-1. **Великанов М. А.** Русловой процесс. – М.: Физматгиз, 1958.

20-2. **Ибад-Заде Ю. А. и Нуриев Ч. Г.** Расчет отстойников. – М.: Стройиздат, 1972.

20-3. **Инструкция** по гидравлическому расчету систем напорного гидротранспорта грунтов/II – 59 – 72. – Л.: Энергия, 1972.

20-4. **Леви И. И.** Инженерная гидрология. – М.: Высшая школа, 1968.

20-5. **Маккавеев В. М., Коновалов И. М.** Гидравлика. – Л. – М.: Речиздат, 1940.

20-6. **Рауз X.** Механика жидкости для инженеров-гидротехников. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1958.

20-7. **Рейнер М.** Деформация и течение. – М.: Гостоптехиздат, 1963.

20-8. **Технические указания** по расчету напорного гидравлического транспорта грунтов/ВСН-02 – 66 МЭиЭ СССР. – Л.: Энергия, 1967.

20-9. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964.

20-10. **Хачатрян Л. Г.** Отстойники на оросительных системах. – М.: Сельхозгиз, 1957.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П-1

Соотношения для перевода единиц измерения из системы МКГСС в систему СИ:

1 кгс = 9,80 ньютонов (Н) ≈ 10 Н
1 тс = 9,80 килоньютонов (кН) ≈ 10 кН

В системе СИ:

1 техническая атмосфера = 100 кН/м^2 = 100 кПа.
Удельный вес чистой пресной воды $\gamma \approx 10$ кН/м^3.

Таблица П-2

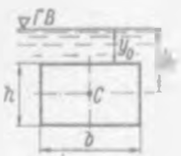
Буквы греческого алфавита

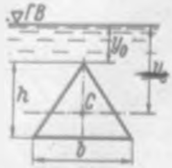
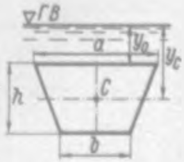
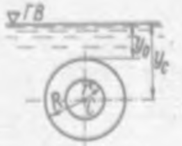
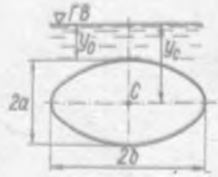
Наиболее часто применяемые для обозначений буквы греческого алфавита и их названия:

α — альфа	ϑ, θ — тэта	ρ — ро	Γ — гамма
β — бэта	ϰ — каппа	σ — сигма	Δ — дельта
γ — гамма	λ — ламбда	τ — тау	Θ — тэта
δ — дельта	μ — мю (ми)	φ — фи	Λ — ламбда
ε — эпсилон	ν — ню (ни)	χ — хи	Σ — сигма
ζ — дзета	ξ — кси	ψ — пси	Φ — фи
η — эта	π — пи	ω — омега	Ψ — пси
			Ω — омега

Таблица П-3

Моменты инерции I_c (относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C), координаты центра тяжести y_c и площади ω плоских фигур

Вид фигуры, обозначения	I_c	y_c	ω
	$\frac{bh^3}{12}$	$y_0 + \frac{h}{2}$	bh

Вид фигуры, обозначения	I_c	y_c	ω
	$\frac{bh^3}{36}$	$y_0 + \frac{2}{3}h$	$\frac{bh}{2}$
	$\frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}$	$y_0 + \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$	$\frac{h(a+b)}{2}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$y_0 + \frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$
	$\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4$	$y_0 + \frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
	$\frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$	$y_0 + R$	$\pi(R^2 - r^2)$
	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$y_0 + a$	πab

Значения функции $\varphi(\eta)$ для прямого уклона дна водотока ($i > 0$) при различных значениях гидравлического показателя x

η	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
0,10	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,15	0,151	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
0,20	0,202	0,201	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,25	0,255	0,252	0,251	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,30	0,309	0,304	0,302	0,301	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
0,35	0,365	0,357	0,354	0,352	0,351	0,351	0,351	0,350	0,350	0,350
0,40	0,423	0,411	0,407	0,404	0,403	0,403	0,402	0,401	0,400	0,400
0,45	0,484	0,468	0,461	0,458	0,456	0,455	0,454	0,452	0,451	0,450
0,50	0,549	0,527	0,517	0,513	0,510	0,508	0,507	0,504	0,502	0,501
0,55	0,619	0,590	0,575	0,570	0,566	0,564	0,561	0,556	0,554	0,552
0,60	0,693	0,657	0,637	0,630	0,624	0,621	0,617	0,610	0,607	0,605
0,61	0,709	0,671	0,650	0,642	0,636	0,632	0,628	0,621	0,618	0,615
0,62	0,725	0,685	0,663	0,654	0,648	0,644	0,640	0,632	0,629	0,626
0,63	0,741	0,699	0,676	0,667	0,660	0,656	0,652	0,644	0,640	0,637
0,64	0,758	0,714	0,689	0,680	0,673	0,668	0,664	0,656	0,651	0,648
0,65	0,775	0,729	0,703	0,693	0,686	0,681	0,676	0,668	0,662	0,659
0,66	0,792	0,744	0,717	0,706	0,699	0,694	0,688	0,680	0,674	0,670
0,67	0,810	0,760	0,731	0,720	0,712	0,707	0,700	0,692	0,686	0,681
0,68	0,829	0,776	0,746	0,734	0,725	0,720	0,713	0,704	0,698	0,692
0,69	0,848	0,792	0,761	0,748	0,739	0,733	0,726	0,716	0,710	0,704
0,70	0,867	0,809	0,776	0,763	0,753	0,746	0,739	0,728	0,722	0,716
0,71	0,887	0,826	0,791	0,778	0,767	0,760	0,752	0,741	0,734	0,728
0,72	0,907	0,843	0,807	0,793	0,781	0,774	0,766	0,754	0,747	0,740
0,73	0,928	0,861	0,823	0,808	0,796	0,788	0,780	0,767	0,760	0,752
0,74	0,950	0,880	0,840	0,823	0,811	0,802	0,794	0,780	0,773	0,764
0,75	0,972	0,899	0,857	0,839	0,827	0,816	0,808	0,794	0,786	0,776
0,76	0,996	0,919	0,874	0,855	0,843	0,832	0,823	0,808	0,799	0,788
0,77	1,020	0,939	0,892	0,872	0,860	0,848	0,838	0,822	0,812	0,801
0,78	1,045	0,960	0,911	0,890	0,877	0,865	0,854	0,837	0,826	0,814
0,79	1,071	0,982	0,930	0,908	0,895	0,882	0,870	0,852	0,840	0,828
0,80	1,098	1,006	0,950	0,927	0,913	0,900	0,887	0,867	0,854	0,842
0,81	1,127	1,031	0,971	0,947	0,932	0,918	0,904	0,882	0,869	0,857
0,82	1,156	1,056	0,993	0,968	0,951	0,937	0,922	0,898	0,884	0,872
0,83	1,188	1,082	1,016	0,990	0,971	0,956	0,940	0,915	0,900	0,888
0,84	1,221	1,110	1,040	1,013	0,992	0,976	0,960	0,933	0,917	0,904
0,85	1,256	1,139	1,065	1,037	1,015	0,997	0,980	0,952	0,935	0,921
0,86	1,293	1,170	1,092	1,062	1,039	1,019	1,002	0,972	0,953	0,938
0,87	1,333	1,203	1,120	1,088	1,065	1,043	1,025	0,993	0,972	0,956
0,88	1,375	1,238	1,151	1,116	1,092	1,069	1,049	1,015	0,992	0,975
0,89	1,421	1,276	1,183	1,146	1,121	1,097	1,075	1,039	1,014	0,995
0,90	1,472	1,316	1,218	1,179	1,152	1,127	1,103	1,065	1,038	1,017
0,905	1,499	1,338	1,237	1,197	1,169	1,143	1,117	1,079	1,050	1,028
0,910	1,527	1,361	1,257	1,216	1,186	1,159	1,132	1,093	1,063	1,040
0,915	1,557	1,385	1,278	1,236	1,204	1,176	1,148	1,108	1,077	1,053
0,920	1,589	1,411	1,300	1,257	1,223	1,194	1,165	1,124	1,091	1,066
0,925	1,622	1,439	1,323	1,279	1,243	1,214	1,184	1,141	1,106	1,080
0,930	1,658	1,469	1,348	1,302	1,265	1,235	1,204	1,159	1,122	1,095
0,935	1,696	1,501	1,374	1,326	1,288	1,257	1,225	1,178	1,139	1,111
0,940	1,738	1,535	1,403	1,352	1,312	1,280	1,247	1,198	1,157	1,128

η	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	
0,945	1,782	1,571	1,434	1,380	1,338	1,305	1,271	1,219	1,176	1,
0,950	1,831	1,610	1,467	1,411	1,367	1,332	1,297	1,241	1,197	1,
0,955	1,885	1,653	1,504	1,445	1,399	1,362	1,325	1,265	1,220	1,
0,960	1,945	1,701	1,545	1,483	1,435	1,395	1,356	1,292	1,246	1,
0,965	2,013	1,756	1,591	1,526	1,475	1,432	1,391	1,324	1,275	1,
0,970	2,092	1,820	1,644	1,575	1,521	1,475	1,431	1,362	1,308	1,
0,975	2,184	1,895	1,707	1,632	1,575	1,525	1,479	1,407	1,347	1,
0,980	2,297	1,985	1,783	1,703	1,640	1,587	1,537	1,460	1,394	1,
0,985	2,442	2,100	1,881	1,795	1,727	1,666	1,611	1,525	1,455	1,4
0,990	2,646	2,264	2,018	1,921	1,844	1,777	1,714	1,614	1,538	1,4
0,995	3,000	2,544	2,250	2,137	2,043	1,965	1,889	1,770	1,680	1,6
1,000	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	[illegible]
1,005	2,997	2,139	1,647	1,477	1,329	1,218	1,107	0,954	0,826	0,7
1,010	2,652	2,863	1,419	1,265	1,138	1,031	0,936	0,790	0,680	0,5
1,015	2,450	1,704	1,291	1,140	1,022	0,922	0,836	0,702	0,603	0,5
1,020	2,307	1,591	1,193	1,053	0,940	0,847	0,766	0,641	0,546	0,4
1,025	2,197	1,504	1,119	0,986	0,879	0,789	0,712	0,594	0,503	0,4
1,030	2,107	1,432	1,061	0,931	0,827	0,742	0,668	0,555	0,468	0,4
1,035	2,031	1,372	1,010	0,885	0,784	0,702	0,632	0,522	0,439	0,3
1,040	1,966	1,320	0,967	0,845	0,747	0,668	0,600	0,494	0,415	0,3
1,045	1,908	1,274	0,929	0,810	0,716	0,638	0,572	0,469	0,394	0,3
1,05	1,857	1,234	0,896	0,779	0,687	0,612	0,548	0,447	0,375	0,31
1,06	1,768	1,164	0,838	0,726	0,640	0,566	0,506	0,411	0,343	0,29
1,07	1,693	1,105	0,790	0,682	0,600	0,529	0,471	0,381	0,316	0,26
1,08	1,629	1,053	0,749	0,645	0,565	0,497	0,441	0,355	0,292	0,24
1,09	1,573	1,009	0,713	0,612	0,534	0,469	0,415	0,332	0,271	0,22
1,10	1,522	0,969	0,680	0,583	0,506	0,444	0,392	0,312	0,253	0,21
1,11	1,477	0,933	0,652	0,557	0,482	0,422	0,372	0,293	0,237	0,19
1,12	1,436	0,901	0,626	0,533	0,461	0,402	0,354	0,277	0,223	0,18
1,13	1,398	0,872	0,602	0,512	0,442	0,384	0,337	0,263	0,211	0,17
1,14	1,363	0,846	0,581	0,493	0,424	0,368	0,322	0,250	0,200	0,16
1,15	1,331	0,821	0,561	0,475	0,407	0,353	0,308	0,238	0,190	0,15
1,16	1,301	0,797	0,542	0,458	0,391	0,339	0,295	0,227	0,181	0,14
1,17	1,273	0,775	0,525	0,442	0,377	0,326	0,283	0,217	0,173	0,13
1,18	1,247	0,755	0,510	0,427	0,364	0,314	0,272	0,208	0,165	0,13
1,19	1,222	0,736	0,495	0,413	0,352	0,302	0,262	0,200	0,158	0,124
1,20	1,199	0,718	0,480	0,400	0,341	0,292	0,252	0,192	0,151	0,118
1,21	1,177	0,701	0,467	0,388	0,330	0,282	0,243	0,184	0,144	0,113
1,22	1,156	0,685	0,454	0,377	0,320	0,272	0,235	0,177	0,138	0,108
1,23	1,136	0,670	0,442	0,366	0,310	0,263	0,227	0,170	0,132	0,103
1,24	1,117	0,656	0,431	0,356	0,301	0,255	0,219	0,164	0,126	0,098
1,25	1,098	0,643	0,420	0,346	0,292	0,247	0,212	0,158	0,121	0,094
1,26	1,081	0,630	0,410	0,337	0,284	0,240	0,205	0,152	0,116	0,090
1,27	1,065	0,618	0,400	0,328	0,276	0,233	0,199	0,147	0,111	0,086
1,28	1,049	0,606	0,391	0,320	0,268	0,226	0,193	0,142	0,107	0,082
1,29	1,033	0,594	0,382	0,312	0,261	0,220	0,187	0,137	0,103	0,079
1,30	1,018	0,582	0,373	0,304	0,254	0,214	0,181	0,133	0,099	0,076
1,31	1,004	0,571	0,365	0,297	0,247	0,208	0,176	0,129	0,095	0,073
1,32	0,990	0,561	0,357	0,290	0,241	0,202	0,171	0,125	0,092	0,070
1,33	0,977	0,551	0,349	0,283	0,235	0,197	0,166	0,121	0,089	0,067
1,34	0,964	0,542	0,341	0,277	0,229	0,192	0,161	0,117	0,086	0,064
1,35	0,952	0,533	0,334	0,271	0,224	0,187	0,157	0,113	0,083	0,061
1,36	0,940	0,524	0,328	0,265	0,219	0,182	0,153	0,109	0,080	0,058

Продолжение табл. П-4

η	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,37	0,928	0,516	0,322	0,259	0,214	0,177	0,149	0,106	0,077	0,056
1,38	0,917	0,508	0,316	0,253	0,209	0,173	0,145	0,103	0,074	0,054
1,39	0,906	0,500	0,310	0,248	0,204	0,169	0,141	0,100	0,072	0,052
1,40	0,896	0,492	0,304	0,243	0,199	0,165	0,137	0,097	0,070	0,050
1,41	0,886	0,484	0,298	0,238	0,195	0,161	0,134	0,094	0,068	0,048
1,42	0,876	0,477	0,293	0,233	0,191	0,157	0,131	0,091	0,066	0,046
1,43	0,866	0,470	0,288	0,229	0,187	0,153	0,128	0,088	0,064	0,045
1,44	0,856	0,463	0,283	0,225	0,183	0,150	0,125	0,085	0,062	0,044
1,45	0,847	0,456	0,278	0,221	0,179	0,147	0,122	0,083	0,060	0,043
1,46	0,838	0,450	0,273	0,217	0,175	0,144	0,119	0,081	0,058	0,042
1,47	0,829	0,444	0,268	0,213	0,171	0,141	0,116	0,079	0,056	0,041
1,48	0,821	0,438	0,263	0,209	0,168	0,138	0,113	0,077	0,054	0,040
1,49	0,813	0,432	0,259	0,205	0,165	0,135	0,110	0,075	0,053	0,039
1,50	0,805	0,426	0,255	0,201	0,162	0,132	0,108	0,073	0,052	0,038
1,55	0,767	0,399	0,235	0,184	0,147	0,119	0,097	0,065	0,045	0,032
1,60	0,733	0,376	0,218	0,170	0,134	0,108	0,087	0,058	0,039	0,027
1,65	0,703	0,355	0,203	0,157	0,123	0,098	0,079	0,052	0,034	0,023
1,70	0,675	0,336	0,189	0,145	0,113	0,090	0,072	0,046	0,030	0,020
1,75	0,650	0,318	0,177	0,134	0,104	0,083	0,065	0,041	0,026	0,017
1,80	0,626	0,303	0,166	0,124	0,096	0,077	0,060	0,037	0,023	0,015
1,85	0,605	0,289	0,156	0,115	0,089	0,071	0,055	0,033	0,020	0,013
1,90	0,585	0,276	0,147	0,108	0,083	0,066	0,050	0,030	0,018	0,011
1,95	0,567	0,264	0,139	0,102	0,078	0,061	0,046	0,027	0,012	0,009
2,0	0,550	0,253	0,132	0,097	0,073	0,057	0,043	0,025	0,015	0,008
2,1	0,518	0,233	0,119	0,086	0,064	0,049	0,037	0,021	0,012	0,007
2,2	0,490	0,216	0,108	0,077	0,057	0,043	0,032	0,018	0,010	0,006
2,3	0,466	0,201	0,098	0,069	0,051	0,038	0,028	0,015	0,008	0,005
2,4	0,444	0,188	0,090	0,063	0,046	0,034	0,024	0,013	0,007	0,004
2,5	0,424	0,176	0,082	0,057	0,041	0,031	0,021	0,011	0,006	0,003
2,6	0,405	0,165	0,076	0,052	0,037	0,028	0,019	0,0095	0,0050	0,0025
2,7	0,389	0,155	0,070	0,048	0,033	0,025	0,017	0,0084	0,0045	0,0020
2,8	0,374	0,146	0,065	0,044	0,030	0,022	0,015	0,0075	0,0040	0,0015
2,9	0,360	0,138	0,060	0,040	0,027	0,020	0,013	0,0067	0,0035	0,0010
3,0	0,346	0,131	0,056	0,037	0,025	0,0185	0,0125	0,0060	0,0030	0,00075
3,5	0,294	0,104	0,041	0,026	0,017	0,0125	0,0075	0,0035	0,0020	0,00050
4,0	0,255	0,084	0,031	0,019	0,012	0,0085	0,0050	0,0020	0,0010	0,00025
4,5	0,226	0,070	0,025	0,014	0,009	0,0065	0,0035	0,0015	0,0005	0
5,0	0,203	0,059	0,020	0,010	0,007	0,0050	0,0025	0,0010	0	0
6,0	0,168	0,047	0,014	0,007	0,004	0,0030	0,0015	0,0005	0	0
8,0	0,126	0,029	0,009	0,004	0,002	0,0015	0,0010	0,0002	0	0
10,0	0,100	0,021	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0005	0	0	0

Таблица П-5

Значение функции $\varphi(\xi)$ при горизонтальном дне водотока ($i = 0$) и различных значениях гидравлического показателя x

ξ	x = 2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,9501	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500
0,10	0,9003	0,9001	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000
0,15	0,8511	0,8504	0,8501	0,8501	0,8500	0,8500	0,8500	0,8500	0,8500	0,8500
0,20	0,8027	0,8010	0,8004	0,8003	0,8002	0,8001	0,8001	0,8000	0,8000	0,8000
0,25	0,7552	0,7522	0,7509	0,7507	0,7504	0,7503	0,7502	0,7501	0,7500	0,7500
0,30	0,7090	0,7042	0,7020	0,7014	0,7010	0,7007	0,7005	0,7002	0,7001	0,7001
0,35	0,6643	0,6573	0,6537	0,6527	0,6520	0,6514	0,6511	0,6506	0,6503	0,6502
0,40	0,6213	0,6116	0,6064	0,6048	0,6036	0,6027	0,6021	0,6012	0,6007	0,6004
0,45	0,5804	0,5675	0,5602	0,5579	0,5561	0,5547	0,5537	0,5523	0,5514	0,5509
0,50	0,5417	0,5252	0,5156	0,5124	0,5098	0,5078	0,5063	0,5040	0,5026	0,5017
0,55	0,5054	0,4852	0,4729	0,4685	0,4651	0,4623	0,4601	0,4568	0,4546	0,4532
0,60	0,4720	0,4478	0,4324	0,4268	0,4223	0,4186	0,4156	0,4109	0,4078	0,4056
0,61	0,4656	0,4406	0,4246	0,4188	0,4140	0,4101	0,4069	0,4020	0,3986	0,3962
0,62	0,4594	0,4336	0,4169	0,4108	0,4059	0,4017	0,3983	0,3931	0,3894	0,3869
0,63	0,4533	0,4267	0,4094	0,4030	0,3978	0,3935	0,3898	0,3843	0,3804	0,3776
0,64	0,4474	0,4199	0,4019	0,3953	0,3898	0,3853	0,3815	0,3756	0,3714	0,3685
0,65	0,4415	0,4132	0,3946	0,3877	0,3820	0,3772	0,3732	0,3670	0,3626	0,3594
0,66	0,4358	0,4067	0,3874	0,3802	0,3743	0,3692	0,3650	0,3585	0,3538	0,3503
0,67	0,4303	0,4003	0,3804	0,3729	0,3667	0,3614	0,3570	0,3501	0,3451	0,3414
0,68	0,4248	0,3940	0,3735	0,3657	0,3592	0,3537	0,3491	0,3418	0,3365	0,3325
0,69	0,4195	0,3879	0,3667	0,3586	0,3518	0,3461	0,3413	0,3336	0,3280	0,3238
0,70	0,4143	0,3820	0,3600	0,3517	0,3446	0,3387	0,3336	0,3256	0,3196	0,3151
0,71	0,4093	0,3762	0,3535	0,3449	0,3376	0,3314	0,3261	0,3176	0,3113	0,3066
0,72	0,4044	0,3705	0,3472	0,3382	0,3307	0,3242	0,3187	0,3098	0,3032	0,2982
0,73	0,3997	0,3650	0,3410	0,3318	0,3239	0,3172	0,3115	0,3022	0,2952	0,2899
0,74	0,3951	0,3596	0,3350	0,3254	0,3173	0,3104	0,3044	0,2947	0,2874	0,2817
0,75	0,3906	0,3544	0,3291	0,3193	0,3109	0,3037	0,2975	0,2874	0,2797	0,2737
0,76	0,3863	0,3493	0,3234	0,3133	0,3046	0,2972	0,2907	0,2802	0,2721	0,2658
0,77	0,3822	0,3444	0,3179	0,3075	0,2985	0,2908	0,2841	0,2732	0,2647	0,2581
0,78	0,3782	0,3397	0,3125	0,3018	0,2926	0,2847	0,2777	0,2664	0,2575	0,2506

ξ	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0,79	0,3743	0,3352	0,3074	0,2964	0,2869	0,2787	0,2715	0,2597	0,2505	0,2432
0,80	0,3707	0,3308	0,3024	0,2911	0,2814	0,2729	0,2655	0,2533	0,2437	0,2361
0,81	0,3672	0,3267	0,2975	0,2861	0,2761	0,2674	0,2597	0,2471	0,2371	0,2291
0,82	0,3638	0,3226	0,2930	0,2812	0,2710	0,2620	0,2541	0,2410	0,2307	0,2223
0,83	0,3606	0,3188	0,2886	0,2766	0,2661	0,2569	0,2488	0,2352	0,2245	0,2158
0,84	0,3576	0,3152	0,2845	0,2722	0,2614	0,2520	0,2436	0,2297	0,2185	0,2095
0,85	0,3547	0,3118	0,2805	0,2679	0,2570	0,2473	0,2387	0,2244	0,2129	0,2035
0,86	0,3520	0,3085	0,2768	0,2639	0,2528	0,2428	0,2341	0,2193	0,2074	0,1977
0,87	0,3495	0,3055	0,2732	0,2602	0,2488	0,2387	0,2297	0,2145	0,2023	0,1922
0,88	0,3472	0,3026	0,2699	0,2567	0,2450	0,2347	0,2256	0,2100	0,1974	0,1870
0,89	0,3450	0,3000	0,2669	0,2534	0,2415	0,2310	0,2217	0,2058	0,1928	0,1821
0,90	0,3430	0,2976	0,2640	0,2504	0,2383	0,2276	0,2181	0,2018	0,1886	0,1776
0,905	0,3421	0,2965	0,2626	0,2489	0,2368	0,2260	0,2164	0,2000	0,1866	0,1754
0,910	0,3412	0,2954	0,2614	0,2476	0,2354	0,2245	0,2148	0,1982	0,1846	0,1733
0,915	0,3404	0,2944	0,2602	0,2463	0,2340	0,2231	0,2133	0,1965	0,1828	0,1714
0,920	0,3396	0,2934	0,2591	0,2451	0,2327	0,2217	0,2118	0,1949	0,1811	0,1695
0,925	0,3388	0,2925	0,2580	0,2439	0,2315	0,2204	0,2104	0,1934	0,1794	0,1677
0,930	0,3381	0,2916	0,2570	0,2429	0,2303	0,2191	0,2091	0,1920	0,1778	0,1660
0,935	0,3375	0,2908	0,2561	0,2418	0,2292	0,2180	0,2079	0,1906	0,1764	0,1644
0,940	0,3369	0,2901	0,2552	0,2409	0,2282	0,2169	0,2068	0,1894	0,1750	0,1629
0,945	0,3363	0,2894	0,2544	0,2400	0,2273	0,2159	0,2057	0,1882	0,1737	0,1615
0,950	0,3358	0,2888	0,2536	0,2392	0,2264	0,2150	0,2048	0,1871	0,1725	0,1602
0,955	0,3353	0,2882	0,2529	0,2385	0,2256	0,2142	0,2039	0,1861	0,1714	0,1591
0,960	0,3349	0,2877	0,2523	0,2378	0,2249	0,2134	0,2031	0,1853	0,1705	0,1580
0,965	0,3345	0,2872	0,2518	0,2372	0,2243	0,2128	0,2024	0,1845	0,1696	0,1570
0,970	0,3342	0,2868	0,2513	0,2367	0,2238	0,2122	0,2017	0,1838	0,1688	0,1562
0,975	0,3339	0,2865	0,2509	0,2363	0,2233	0,2117	0,2012	0,1832	0,1682	0,1555
0,980	0,3337	0,2862	0,2506	0,2359	0,2229	0,2113	0,2008	0,1827	0,1677	0,1549
0,985	0,3336	0,2860	0,2503	0,2357	0,2226	0,2110	0,2005	0,1823	0,1672	0,1545
0,990	0,3334	0,2858	0,2502	0,2355	0,2224	0,2107	0,2002	0,1821	0,1669	0,1541
0,995	0,3334	0,2857	0,2500	0,2353	0,2223	0,2106	0,2000	0,1819	0,1667	0,1539
1,000	0,3333	0,2857	0,2500	0,2353	0,2222	0,2105	0,2000	0,1818	0,1667	0,1539

Продолжение табл. П-5

ξ	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,005	0,3334	0,2857	0,2500	0,2353	0,2223	0,2106	0,2001	0,1819	0,1667	0,1539
1,010	0,3334	0,2858	0,2501	0,2355	0,2224	0,2107	0,2002	0,1821	0,1669	0,1541
1,015	0,3336	0,2860	0,2504	0,2357	0,2226	0,2110	0,2005	0,1823	0,1673	0,1545
1,020	0,3337	0,2862	0,2506	0,2360	0,2229	0,2113	0,2008	0,1827	0,1677	0,1550
1,025	0,3340	0,2865	0,2509	0,2363	0,2233	0,2117	0,2013	0,1833	0,1683	0,1556
1,030	0,3343	0,2869	0,2514	0,2368	0,2238	0,2123	0,2019	0,1839	0,1690	0,1564
1,035	0,3346	0,2873	0,2519	0,2373	0,2244	0,2129	0,2025	0,1847	0,1699	0,1574
1,040	0,3349	0,2877	0,2525	0,2380	0,2251	0,2136	0,2033	0,1856	0,1709	0,1585
1,045	0,3354	0,2883	0,2531	0,2387	0,2259	0,2145	0,2042	0,1866	0,1721	0,1598
1,05	0,3359	0,2889	0,2539	0,2395	0,2268	0,2154	0,2053	0,1878	0,1734	0,1613
1,06	0,3370	0,2904	0,2556	0,2414	0,2289	0,2177	0,2077	0,1905	0,1764	0,1647
1,07	0,3384	0,2921	0,2577	0,2437	0,2313	0,2203	0,2105	0,1938	0,1801	0,1688
1,08	0,3399	0,2940	0,2601	0,2463	0,2342	0,2234	0,2138	0,1976	0,1845	0,1737
1,09	0,3417	0,2963	0,2629	0,2494	0,2375	0,2270	0,2177	0,2021	0,1895	0,1794
1,10	0,3437	0,2988	0,2660	0,2528	0,2412	0,2311	0,2221	0,2071	0,1953	0,1858
1,11	0,3459	0,3017	0,2695	0,2566	0,2454	0,2356	0,2270	0,2128	0,2017	0,1932
1,12	0,3483	0,3048	0,2734	0,2609	0,2501	0,2407	0,2325	0,2191	0,2090	0,2014
1,13	0,3510	0,3082	0,2776	0,2655	0,2552	0,2462	0,2385	0,2261	0,2170	0,2105
1,14	0,3539	0,3119	0,2822	0,2706	0,2607	0,2523	0,2451	0,2338	0,2258	0,2205
1,15	0,3570	0,3160	0,2873	0,2762	0,2668	0,2589	0,2523	0,2422	0,2355	0,2316
1,16	0,3603	0,3203	0,2927	0,2822	0,2734	0,2661	0,2601	0,2513	0,2461	0,2437
1,17	0,3639	0,3250	0,2985	0,2886	0,2804	0,2738	0,2685	0,2612	0,2575	0,2569
1,18	0,3677	0,3299	0,3047	0,2954	0,2880	0,2821	0,2775	0,2718	0,2699	0,2711
1,19	0,3717	0,3352	0,3114	0,3028	0,2961	0,2910	0,2873	0,2833	0,2833	0,2866
1,20	0,3760	0,3408	0,3184	0,3106	0,3048	0,3005	0,2977	0,2956	0,2977	0,3032
1,21	0,3805	0,3468	0,3259	0,3190	0,3140	0,3107	0,3088	0,3088	0,3131	0,3212
1,22	0,3853	0,3531	0,3338	0,3278	0,3238	0,3214	0,3205	0,3228	0,3296	0,3403
1,23	0,3903	0,3597	0,3422	0,3372	0,3341	0,3328	0,3331	0,3377	0,3472	0,3609
1,24	0,3955	0,3666	0,3510	0,3470	0,3450	0,3449	0,3463	0,3535	0,3659	0,3828
1,25	0,4010	0,3739	0,3604	0,3574	0,3566	0,3576	0,3604	0,3704	0,3858	0,4062
1,26	0,4068	0,3815	0,3701	0,3683	0,3687	0,3711	0,3752	0,3881	0,4069	0,4310
1,27	0,4128	0,3895	0,3803	0,3798	0,3815	0,3852	0,3908	0,4069	0,4293	0,4574

Продолжение табл. П-5

ξ	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,28	0,4191	0,3979	0,3911	0,3918	0,3949	0,4001	0,4072	0,4268	0,4530	0,4855
1,29	0,4256	0,4066	0,4023	0,4044	0,4089	0,4157	0,4245	0,4477	0,4781	0,5152
1,30	0,4323	0,4157	0,4140	0,4175	0,4236	0,4320	0,4426	0,4697	0,5044	0,5466
1,31	0,4394	0,4251	0,4262	0,4313	0,4390	0,4492	0,4616	0,4928	0,5323	0,5799
1,32	0,4467	0,4350	0,4390	0,4457	0,4551	0,4671	0,4815	0,5171	0,5616	0,6149
1,33	0,4542	0,4452	0,4522	0,4606	0,4719	0,4858	0,5023	0,5426	0,5925	0,652
1,34	0,4620	0,4558	0,4660	0,4762	0,4894	0,5053	0,5240	0,5693	0,6248	0,691
1,35	0,4701	0,4667	0,4803	0,4924	0,5076	0,5257	0,5468	0,5972	0,659	0,732
1,36	0,4785	0,4781	0,4953	0,5093	0,5266	0,5470	0,5705	0,6265	0,695	0,775
1,37	0,4871	0,4899	0,5107	0,5267	0,5463	0,5691	0,5952	0,657	0,732	0,821
1,38	0,4960	0,5021	0,5267	0,5449	0,5668	0,5922	0,621	0,689	0,771	0,868
1,39	0,5052	0,5146	0,5432	0,5637	0,5880	0,616	0,648	0,722	0,812	0,918
1,40	0,5147	0,5276	0,5604	0,5832	0,610	0,641	0,676	0,757	0,855	0,971
1,41	0,5244	0,5410	0,5781	0,603	0,633	0,667	0,705	0,793	0,900	1,026
1,42	0,5344	0,5548	0,597	0,624	0,657	0,694	0,735	0,831	0,946	1,083
1,43	0,5447	0,5691	0,615	0,646	0,681	0,721	0,766	0,870	0,995	1,143
1,44	0,5553	0,584	0,635	0,668	0,707	0,750	0,798	0,911	1,046	1,206
1,45	0,5660	0,599	0,655	0,691	0,733	0,780	0,832	0,953	1,099	1,272
1,46	0,577	0,614	0,676	0,715	0,760	0,810	0,867	0,997	1,154	1,341
1,47	0,589	0,630	0,697	0,740	0,788	0,842	0,903	1,043	1,212	1,412
1,48	0,601	0,647	0,719	0,765	0,817	0,875	0,940	1,091	1,272	1,487
1,49	0,613	0,664	0,742	0,791	0,847	0,909	0,979	1,140	1,334	1,565
1,50	0,625	0,681	0,766	0,818	0,878	0,945	1,019	1,191	1,398	1,646
1,55	0,691	0,775	0,893	0,965	1,047	1,138	1,239	1,475	1,761	2,106
1,60	0,765	0,881	1,038	1,134	1,243	1,363	1,497	1,812	2,196	2,665
1,65	0,847	0,999	1,203	1,327	1,466	1,622	1,796	2,206	2,713	3,338
1,70	0,938	1,130	1,388	1,544	1,720	1,918	2,140	2,666	3,323	4,142
1,75	1,037	1,276	1,595	1,788	2,007	2,254	2,533	3,198	4,037	5,096

Продолжение табл. П-5

ξ	x									
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,80	1,144	1,435	1,824	2,061	2,330	2,634	2,979	3,809	4,869	6,220
1,85	1,260	1,611	2,078	2,364	2,690	3,062	3,484	4,509	5,831	7,539
1,90	1,386	1,801	2,358	2,700	3,092	3,540	4,052	5,305	6,941	9,076
1,95	1,521	2,008	2,665	3,070	3,537	4,073	4,689	6,208	8,213	10,86
2,0	1,667	2,232	3,000	3,477	4,028	4,665	5,400	7,228	9,670	12,93
2,1	1,987	2,734	3,762	4,408	5,163	6,043	7,068	9,66	13,19	18,02
2,2	2,349	3,312	4,656	5,512	6,521	7,709	9,11	12,70	17,70	24,67
2,3	2,756	3,972	5,696	6,809	8,131	9,70	11,57	16,45	23,37	33,24
2,4	3,208	4,719	6,894	8,316	10,02	12,07	14,53	21,03	30,45	44,15
2,5	3,708	5,559	8,266	10,06	12,23	14,85	18,03	26,58	39,19	57,89
2,6	4,259	6,497	9,82	12,05	14,77	18,10	22,16	33,23	49,88	75,03
2,7	4,861	7,540	11,58	14,33	17,70	21,87	27,00	41,17	62,87	96,23
2,8	5,517	8,70	13,57	16,91	21,06	26,21	32,62	50.56	78,52	122,3
2,9	6,23	9,97	15,78	19,82	24,87	31,19	38,19	61,61	97,24	153,9
3,0	7,00	11,36	18,25	23,08	29,18	36,87	46,60	74,53	119,5	192,3
3,5	11,79	20,42	35,02	45,80	59,89	78,34	102,6	176,2	303,9	526,6
4,0	18,33	33,57	61,00	82,18	110,8	149,4	197,1	369,4	679,7	1 257,0
4,5	26,88	51,73	99,0	137,0	189,8	263,2	365,5	708,2	1 380,0	2 706,0
5,0	37,67	75,86	152,0	215,9	306,6	436,0	621,0	1 267,0	2 600,0	5 371,0
6,0	67,0	146,2	319,0	472,2	700,4	1 041,0	1 550,0	3 458,0	7 771,0	17 575,0
7,0	108,3	253,3	594,0	912,9	1406,0	2 169,0	3 355,0	8 079,0	19 604,0	47 884,0
8,0	163,7	406,7	1017,0	1614,0	2567,0	4 095,0	6 547,0	16 843,0	43 683,0	114 093,0
9,0	234,0	617,0	1632,0	2666,0	4366,0	7 169,0	11 802,0	32 202,0	88 561,0	245 291,0
10,0	324,3	894,0	2491,0	4175,0	7018,0	11 831,0	19 991,0	57 491,0	166 691,0	486 491,0

Таблица П-6

Значения $\sigma_п$, входящего в формулу (11-16) для коэффициента расхода в случае подтопленного водослива с тонкой стенкой без бокового сжатия

$\frac{Z}{c}$	$\frac{h_п}{c}$																
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,05	—	—	0,74	0,68	0,64	0,58	0,54	0,52	0,50	0,48	0,47	0,46	0,45	0,45	0,44	0,44	0,44	0,43
0,10	—	0,93	0,85	0,80	0,76	0,70	0,66	0,64	0,61	0,60	0,58	0,57	0,57	0,56	0,55	0,55	0,54	0,54
0,15	1,05	0,96	0,90	0,86	0,82	0,77	0,74	0,71	0,69	0,67	0,66	0,65	0,64	0,63	0,63	0,62	0,62	0,61
0,20	1,05	0,98	0,94	0,90	0,87	0,82	0,79	0,76	0,74	0,72	0,71	0,70	0,69	0,69	0,68	0,68	0,67	0,67
0,25	1,05	1,00	0,96	0,92	0,90	0,86	0,82	0,80	0,78	0,77	0,75	0,75	0,74	0,73	0,72	0,72	0,72	0,71
0,30	1,05	1,01	0,97	0,94	0,92	0,88	0,85	0,83	0,81	0,80	0,79	0,78	0,77	0,77	0,76	0,76	0,75	0,75
0,35	1,05	1,01	0,98	0,96	0,94	0,90	0,88	0,86	0,84	0,83	0,82	0,81	0,80	0,80	0,79	0,79	0,79	0,78
0,40	1,05	1,02	0,99	0,97	0,95	0,92	0,90	0,88	0,87	0,85	0,84	0,84	0,83	0,82	0,82	0,82	0,81	0,81
0,45	1,05	1,02	1,00	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,89	0,87	0,87	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84	0,84	—
0,50	1,05	1,03	1,01	0,99	0,98	0,95	0,93	0,92	0,90	0,89	0,89	0,88	0,87	0,87	0,87	0,86	0,68	—
0,55	1,05	1,03	1,01	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,90	0,89	0,89	0,88	0,88	—	—
0,60	1,05	1,03	1,02	1,00	0,99	0,98	0,96	0,94	0,93	0,92	0,92	0,91	0,91	0,90	0,90	—	—	—
0,65	1,05	1,04	1,02	1,01	1,00	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,93	0,92	0,92	0,92	—	—	—
0,70	1,05	1,04	1,02	1,01	1,00	0,99	0,98	0,96	0,96	0,95	0,94	0,94	0,94	0,93	0,93	—	—	—

Таблица П-7

Принятые буквенные обозначения основных величин и понятий

№ пункта	Наименование величин и соответствующих понятий	Буквенное обозначение	№ пункта этой таблицы, где повторяется данное буквенное обозначение
1	Вес некоторого объема жидкости	G	
2	Время	t	
3	Высота вакуума	$h_{вак}$	
4	Высота ветровой волны	$h_в$	21
5	Высота водобойной стенки (в нижнем и верхнем бьефах)	$c_н$, $c_в$	
6	Высота водобойной стенки (практическая)	c	45, 149, 152
7	Высота водобойной стенки (теоретическая)	c_0	73
8	Высота гидравлического прыжка	$a_п$	
9	Высота капиллярного поднятия	$h_{кп}$	
10	Высота метацентрическая	$h_м$	
11	Высота подтопления водослива	$h_п$	
12	Высота пьезометрическая, отвечающая абсолютному давлению в точке	h_A	
13	Высота пьезометрическая, отвечающая избыточному давлению в точке	h	25, 43
14	Гидравлическая крупность частицы грунта	w_0	
15	«Гидравлический диаметр»	$D_г = 4R$	44
16	Гидравлический показатель русла	x	
17	Гидравлический радиус	R	
18	Гидравлический удар (величина удара)	$h_{уд}$	
19	Глубина водобойного колодца теоретическая	d_0	
20	Глубина водобойного колодца практическая	d	38
21	Глубина воды в верхнем бьефе	$h_в$	4
22	Глубина воды в нижнем бьефе	$h_н$	
23	Глубина критическая	$h_к$	
24	Глубина нормальная	h_0	
25	Глубина потока	h	13, 43
26	Глубина потока относительная	η, ξ	47, 54, 55
27	Глубина сжатая	h_c	
28	Глубины сопряженные (для прыжка)	h', h''	
29	Градиент скорости	$\frac{du}{dn}$	
30	Давление атмосферное	p_a	
31	Давление (в точке) абсолютное (гидростатическое или гидродинамическое)	p_A	
32	Давление (в точке) внешнее поверхностное	p_0	
33	Давление (в точке) гидростатическое, гидродинамическое и гидромеханическое	p	35
34	Давление (в точке) гидродинамическое осредненное	$\bar{p}$	
35	Давление (в точке) избыточное (сверхатмосферное)	p	33
36	Давление насыщенных паров	$p_{н.п}$	
37	Диаметр трубы	D	42

№ пункта	Наименование величин и соответствующих понятий	Буквенное обозначение	№№ пунктов этой таблицы, где повторяется данное буквенное обозначение
38	«Диаметр» частиц грунта или наносов	d	20
39	Длина ветровой волны	λ	49
40	Длина гидравлического прыжка	$l_п$	
41	Длина послепрыжкового участка	$l_{пп}$	
42	Длина разгона ветровой волны	D	37
43	Заглубление точки (покоящейся жидкости)	h	13, 25
44	Координаты прямоугольные декартовы (ось x направлена вправо; ось z — вертикально вверх; ось y — перпендикулярно плоскости чертежа)	x, y, z	16, 102, 116
45	Концентрация твердой фазы	c	6, 149, 152
46	Коэффициент бокового сжатия струи (в случае водослива)	ε	59
47	Коэффициент вязкости (динамический)	η	28, 54, 55
48	Коэффициент вязкости (кинематический)	ν	
49	Коэффициент гидравлического трения	λ	39
50	Коэффициент (корректив) кинетической энергии (коэффициент Буссинеска)	α	
51	Коэффициент (корректив) количества движения (коэффициент Кориолиса)	α_0	
52	Коэффициент откоса (трапецеидального канала)	m	56
53	Коэффициент подтопления водослива	$\sigma_п$	
54	Коэффициент полезного действия (КПД)	η	26, 47, 55
55	[illegible]	[illegible]	[illegible]
56	[illegible]	[illegible]	
57	[illegible]	[illegible]	
58	Коэффициент [illegible] турбулентности	[illegible]	[illegible]
59	Коэффициент сжатия струи (при истечении из отверстия)	φ	113
60	Коэффициент скорости		
61	Коэффициент сопротивления или коэффициент потерь напора (полный — $\zeta_{с}$, по длине — $\zeta_{дл}$, [illegible] грунтовых вод — $\zeta_{вн}$, местный $\zeta_{м}$, в случае [illegible] $\zeta_{вых}$, ζ_i и др.)	ζ	
62	Коэффициент турбулентной вязкости — динамический	$\eta_т$	
63	Коэффициент турбулентной вязкости — кинематический	$\nu_т$	
64	Коэффициент фильтрации	k	
65	Коэффициент Шези	C	
66	Коэффициент шероховатости	n	99, 112
67	Линия критических глубин	$K - K$	
68	Линия напорная	$E - E$	
69	Линия нормальных глубин	$N - N$	
70	Линия пьезометрическая	$P - P$	
71	Масса некоторого объема жидкости	$M\ (\delta M)$	75
72	Масштабы сил F, скоростей u, скоростей v	$a_F,\ a_u,\ a_v$	
73	Местная предельная концентрация	c_0	7
74	Местная предельная мутность	a_0	
75	Метацентр	M	71
76	Модуль расхода или расходная характеристика	K	

Продолжение табл. П-7

№ пункта	Наименование величин и соответствующих понятий	Буквенное обозначение	№№ пунктов этой таблицы, где повторяется данное буквенное обозначение
77	Модуль расхода (относительный)	$\varkappa$	
78	Модуль скорости или скоростная характеристика	W	122
79	Модуль сопротивления данного участка естественного русла	F	
80	Мутность воды	a	
81	Напор инерционный	h_l	
82	Напор на водосливе геометрический	H	84, 85, 89
83	Напор на водосливе профилирующий	$H_{\text{проф}}$	
84	Напор на малом отверстии или насадке при истечении жидкости в атмосферу	H	82, 85, 89
85	Напор на трубопроводе при истечении в атмосферу	H	82, 84, 89
86	Напор полный для целого потока	H_e	
87	Напор полный для элементарной струйки	H'_e	
88	Напор полный на водосливе (с учетом скорости подхода)	H_0	
89	Напор потенциальный	H	82, 84, 85
90	Напор скоростной, отвечающий скорости u	$h_e = \frac{u^2}{2g}$	
91	Напор скоростной, отвечающий скорости v	$h_e = \frac{\alpha v^2}{2g}$	
92	Напряжение внешнего трения	τ_0	
93	Напряжение внутреннего трения	τ	96, 105
94	Напряжение в точке	σ	
95	Напряжения в точке главные (нормальные)	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	
96	Напряжение в точке касательное «к площадке действия»	τ	93, 105
97	Напряжение в точке нормальное «площадке действия»	σ_n	
98	Напряжения турбулентные касательные	$\tau_{\text{т}}$	
99	Нормаль к площадке	n	66, 112
100	Объем жидкости	$V(\delta V)$	
101	Ось; координата, намеченная вдоль оси струйки (потолка) – по течению	s	
102	Отметка	z	44, 116
103	Параметр кинетичности	Пк	
104	Перепад свободной поверхности потока	Z	
105	Период ветровой волны	τ	93, 96
106	Плоскость сравнения	$O - O$	
107	Плотность жидкости (плотность распределения массы жидкости)	ρ	
108	«Площадка действия» элементарная	δS	
109	Площадь живого сечения	ω	
110	Площадь, на которую действует сила	S	
111	Площадь эпюры гидростатического давления	Ω	142
112	Пористость грунта	n	66, 99
113	Потенциал скорости фильтрации	φ	60
114	Потенциальная функция	U	

№ пункта	Наименование величин и соответствующих понятий	Буквенное обозначение	№№ пунктов этой таблицы, где повторяется данное буквенное обозначение
115	Потенциальная функция (приведенная) поля градиентов давления (поля архимедовых сил)	p/γ	
116	Потенциальная функция (приведенная) поля сил тяжести	z	44, 102
117	Потеря напора местная	h_j	
118	Потеря напора по длине	h_l	
119	Потеря напора полная	h_f	
120	Потеря напора полная для струйки	h'_f	
121	Промежуток высачивания	Δ	180
122	Противодавление	W	78
123	Прыжковая функция	$\Theta(h)$	
124	Радиус метацентрический	$r_м$	
125	Расход гидросмеси	$Q_{г\,с}$	
126	«Расход в точке» плана потока	q	128
127	Расход жидкости	Q	
128	Расход жидкости удельный	$q = \frac{Q}{b}$	126
129	Расход твердой фазы	$Q_т$	
130	Расход фильтрационный удельный (приведенный) при безнапорной фильтрации	$q_r = \frac{q}{k}$	131
131	Расход фильтрационный удельный (приведенный) при напорной фильтрации	$q_r = \frac{q}{kZ}$	130
132	Сила абсолютного гидростатического давления	P_A	
133	Сила атмосферного давления	P_a	
134	Сила внешнего трения	T_0	
135	Сила внутреннего трения	T	
136	Сила давления (гидростатического, гидродинамического, гидромеханического)	P	
137	Сила инерции жидкости (отнесенная к единице массы)	$I = -\frac{du}{dt}$	
138	Сила удельная (отнесенная к единице веса жидкости)	ϕ_0	
139	Сила удельная (отнесенная к единице массы жидкости)	ϕ	
140	Скорость актуальная или местная мгновенная	u_a	
141	Скорость актуальная:		
	а) продольная	$(u_a)_x$	
	б) поперечная	$(u_a)_z$	
142	Скорость вращения угловая	Ω	111
143	Скорость движения воды в порах грунта	u'	151
144	Скорость динамическая	v_*	
145	Скорость критическая верхняя и критическая нижняя	$v'_к$ $v_к$	
146	Скорость максимальная допускаемая	$v_{макс}$	

№ пункта	Наименование величин и соответствующих понятий	Буквенное обозначение	№№ пунктов этой таблицы, где повторяется данное буквенное обозначение
147	Скорость минимальная допускаемая	$v_{мин}$	
148	Скорость местная в данной точке пространства (ее проекции на оси u_x, u_y, u_z)	u	154
149	Скорость перемещения гребня ветровой волны	c	6, 45, 152
150	Скорость подхода (к сооружению или отверстию)	v_0	
151	Скорость пульсационная	u'	143
152	Скорость распространения возмущения (гидравлического удара или волн перемещения)	c	6, 45, 149
153	Скорость средняя	v	
154	Скорость фильтрации в точке (ее проекции на оси u_x, u_y, u_z)	u	148
155	Смоченный периметр	χ	
156	Степень затопления прыжка	A	
157	Температура (в градусах Цельсия)	$t°$	
158	Удельный вес жидкости	γ	
159	Удельная энергия сечения	Э	
160	Уклон гидравлический (для струйки)	J'_e	
161	Уклон гидравлический (для целого потока)	J_e	
162	Уклон дна русла	i	
163	Уклон дна русла критический	$i_к$	
164	Уклон пьезометрический (для струйки)	J'	
165	Уклон пьезометрический (для целого потока)	J	
166	Уклон свободной поверхности потока	$i_{пов}$	
167	Уклон трения	i_f	
168	Ускорение, обусловленное массовой (объемной) силой	w	
169	Функция тока	ψ	
170	Число Рейнольдса верхнее критическое	$\mathrm{Re}'_к$	
171	Число Рейнольдса, выраженное через гидравлический радиус	Re_R	
172	Число Рейнольдса для круглой трубы, выраженное через ее диаметр	Re_D	
173	Число Рейнольдса нижнее критическое	$\mathrm{Re}_к$	
174	Число Фруда	Fr	
175	Ширина водосливного отверстия	b	
176	Ширина водосливного фронта	$B = \Sigma b$	
177	Ширина относительная трапецеидального русла по дну	$\beta = \frac{b}{h}$	
178	Ширина относительная трапецеидального русла по дну (гидравлически наивыгоднейшая)	$\beta_{г.н}$	
179	Ширина трапецеидального канала по дну	b	175
180	Шероховатость стенок русла абсолютная (высота выступов шероховатости)	Δ	121
181	Шероховатость стенок русла относительная	Δ_r	
182	Шероховатость стенок русла относительная осредненная	$\bar{\Delta}_r$	

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютное давление 42
Абсорбирующий колодец 559
Автомодельная область 534, 535
Актуальная скорость 143
Анизотропный грунт 574
Аномальные жидкости 12, 623
Артезианский колодец 559
Архимедова сила 65
Атмосферное давление 42
Аэрация жидкости 19, 227, 452, 505

Безвихревое движение 77, 79, 94
Безнапорное движение 91, 93
Боковое сжатие (для водосливов) 408, 410, 420, 434
Боковые водосливы 441
Большое отверстие 386, 388
Бурное движение 285, 377, 511, 516
Быстро изменяющееся движение 83

Вакуум 45, 118, 229, 394, 395
– допустимый 120, 229
– максимальный 229
– мгновенный 222
– осредненный 222
– предельный 119, 229, 395
– пульсационный 229
Вакуумметр 45, 118
Вакуумные водосливы 431
Вертикальная труба 227
Верхний бьеф (ВБ) 406
Верхняя критическая скорость 128
Весовое давление 42
Ветровые волны 611
Взвешенные наносы 630
Виражи 573
Виртуальные способы 574
Вихревое движение 77, 79, 94
Внешние силы 21
Внешняя задача 71
Внутреннее трение 135
Внутренние силы 21
Внутренняя задача 72

Водобойная стенка 465, 471, 472, 477
Водобойный колодец 465, 466, 469
– уступ 471, 477
Водоворотная область 181, 511
Водослив безвакуумный 432
– боковой 408, 441
– вакуумный 431
– косой 408, 441
– ломаный в плане, полигональный 408, 442
– неподтопленный 408
– подтопленный 408
– прямой (лобовой) 408, 409, 415, 431
– прямоугольный 406
– с несвободным истечением 410
– со свободным истечением 409
– со стенкой практического профиля 407, 431
– с тонкой стенкой 406, 409
– с уширенным гребнем 432
– с широким порогом 407, 415
– трапецеидальный 406, 415
– треугольный 406, 414
– щелевой 492
Водосборная галерея 552
Водосливная стенка 406
– – Кригера – Офицерова 437
Водосливной фронт 432
Водосливные формулы 409, 410, 412, 420, 426, 432
Водосливы 405
Водоупор 536
Воздушная воронка 388
Волна возмущения 515
– восходящая 368
– нисходящая 365, 369
– отрицательная 361, 369
– положительная 366
Волновая граница 370
Волновой расход 370
– угол 517
Волны вынужденные 612
– давления 358

Волны нерегулярные 613
— отраженные 361, 377
— перемещения 369
— прогрессивные 616
— [illegible]
— [illegible]
— стоячие 615
— трохоидальные 617
Воображаемая модель 151, 521
Воронка размыва 483, 484
Восходящая волна 368
Всасывающая труба насоса 223
Всасывающий клапан 200
Вторичные течения 204
Вход в трубопровод 190
Высота волны 613
— наката волн 615
— подтопления водослива 411
— прыжка 324
Выход из трубы 183
Вязкий подслой 153
Вязкость 12, 134

Гасители энергии 465
Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли 99, 111, 112, 350
Геометрический напор на водосливе 406
— перепад на водосливе 406
Геометрическое подобие 523
Гидравлика (определение) 9
Гидравлическая крупность 624
— толщина стенки 389
Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала 248
Гидравлические машины (простейшие) 64
— элементы живого сечения 93
— — — — потока в канале 246
Гидравлический диаметр 167
Гидравлический показатель русла x 297
— прыжок 324
— — затопленный 332, 458, 479
— — свободный и несвободный 332, 478
— радиус 93
— таран 365
— удар 356
— — неполный 364
— — полный 364
— — отраженный 361
— — прямой 361
— уклон 111
Гидродинамика 9, 24, 69
Гидродинамическая сетка 589, 591, 592
Гидродинамическое давление 69
— подобие 524
Гидромеханика 9
Гидросмесь 624
Гидростатика 9, 24, 32
Гидростатическое давление 32
Гидростатическое давление в точке 32
Гидротранспорт 622
Главные оси деформации 80
[illegible] трубы [illegible]
Глубина водобойного колодца 466
Гравитационные волны 612
Градиент скорости 135
Граничные условия (фильтрации) 586
График маневрирования затворами 453
— прыжковой функции 328
— пульсации скоростей 142
— удельной энергии сечения 279
Графики расчетные (оглавление их) 675
Греческие буквы 637
Грузовая ватерлиния 66
Грунтовые воды 536
Группа колодцев 560

Давление абсолютное 42
— атмосферное 42
— весовое 42
— воды на щит 486
— в колене трубы [illegible]
— в круглой трубе 62
— в точке 32
— гидродинамическое 69
— гидромеханическое 69
— гидростатическое 32
— избыточное 42
— манометрическое 42
— молекулярное 16
— на плоские фигуры 53
— на прямоугольные фигуры 57
— насыщенных паров 19
— на цилиндрические поверхности 59
— осредненное 146
— поверхностное 42
— струи на стенку 122
Дальность полета струи 385, 495
Движение жидкости безвихревое 77, 79, 94
— — безнапорное 93
— — бурное 94, 285, 377, 511, 516
— — быстро изменяющееся 83
— — вихревое 77, 79, 94
— — вращательное 78
— — деформационное 78
— — ламинарное 125, 134
— — линейное 95
— — медленно изменяющееся 83
— — напорное 93
— — неравномерное 91, 94
— — неустановившееся 84
— — осесимметричное 95
— — параллельноструйное 85
— — плавно изменяющееся 85
— — плоско-параллельное (плоское) 95
— — поступательное 78
— — потенциальное 80
— — пространственное 94, 95

Движение жидкости равномерное 92, 94
— — резко изменяющееся 85
— — спокойное 94, 285, 337, 511, 516
— — турбулентное 125, 141, 159
— — установившееся 83
Двухфазный поток 622
Дебит колодца 556
Действительная ширина водослива 433
Деление потока 205
Депрессионная воронка 556
Деформационное движение 78
Диаметр гидравлический 167
Диафрагма 194
Динамика жидкости 9
Динамическая скорость 154
Динамический коэффициент вязкости η 125, 135, 138
— — турбулентной вязкости, турбулентного обмена $\eta_т$ 150
Динамическое подобие 524
Дисковый (дроссельный) затвор 200, 295
Дифференциальное уравнение неравномерного движения 272
— — плавно изменяющегося движения грунтовых вод 547
— — движения идеальной (невязкой) жидкости 74
— — неустановившегося движения воды 370
— — покоя жидкости 37
— — резко изменяющегося движения грунтовых вод 583
«Диффузия» (поперечная) механической энергии 103
Диффузор 188
Длина влияния водосборной галереи 553
— водобойного колодца 477, 478
— волны 613
— затопленного прыжка 463
— насадка 389
— прыжка 324
Длинные трубы 215, 229
Длинный канал 497, 506
Донное отверстие 484
Донный режим 414, 479
Донные наносы 630
Дренажные трубы 261

Единичный расход 278, 537
Естественные русла 312

Живое сечение 86
Жидкость 11
— Бингама 623
— идеальная 12
— Шведова 623

Зависимость Форхгеймера для безнапорного движения грунтовых вод 561
Задача о трех резервуарах 233
Задвижка Лудло 198, 200
Задвижки 198, 200
Закон ламинарной фильтрации 539
— Паскаля 35
Законы Ньютона (внутреннего трения) 135
Замкнутый поперечный профиль 247, 259
Затопленная свободная турбулентная струя 401
Затопленный гидравлический прыжок 332, 458, 479
Затопляющая глубина 479
Земляная плотина 565, 572, 573
Зона ламинарного режима 161
— неустойчивого режима 162
— турбулентного режима 162

Идеальная жидкость 6, 12
Избыточное давление 42
Изотропный грунт 574
Инверсия струи 384
Инерционный напор 342, 343, 349
Инфильтрация 576
Искусственная шероховатость 504
Истечение из-под щита 484
История гидравлики 26

Кавитация 20
Кавитационная эрозия 21
Канализационные трубы 259
Каналы (расчет на равномерное движение) 245
Капиллярность 17
Касательные напряжения 22, 23, 133, 134, 148
Кинематика жидкого тела 9
Кинематический коэффициент вязкости ν 138
— — турбулентной вязкости, турбулентного обмена $\nu_т$ 151
Кинематическое подобие 523
Кипение 19
Классификация водосливов 405, 409, 431
— движений жидкости 93, 94
Колодцы одиночные (совершенные, несовершенные, артезианские, поглощающие) 559
Комбинированный водобойный колодец 465
Конвективная сила инерции 343
Конические насадки 389, 397
Коноидальный насадок 389
Концентрация твердой фазы (в воде) 631, 632
Короткие каналы (лотки) 497, 498
— трубы 215

Корректив кинетической энергии α 108
— количества движения α_0 108
Косая волна 517, 518–520
Косой гидравлический прыжок 333, 506, 512
Косые водосливы 408, 441
— (поперечные) частные производные от u_x, u_y, u_z 75
Коэффициент бокового сжатия (для водослива) ε 420, 434
— Буссинеска α_0 108
— вертикального сжатия струи ε_0 225, 484
— гидравлического трения λ 141
— Кориолиса 108
— объемной пористости грунта 541
— откоса m 93
— подтопления водослива $\sigma_п$ 412, 433
— полноты напора водослива $\sigma_н$ 436, 438
— разнозернистости грунта 543
— расхода водослива m 409, 435, 437–439
— — отверстия μ_o и насадка $\mu_н$ 382
— — трубопровода $\mu_т$ 218
— сжатия струи ε 191, 380, 382
— скорости φ 381
— сопротивления ξ 153, 191–203, 380, 598
— — ζ_j часто встречающиеся 203
— — входа 190
— — выхода 187
— — по длине 213, 214
— — полный ζ 214
— — резкого расширения 187
— — сужения 192
— фильтрации k 540, 542, 544
— формы водослива $\sigma_ф$ 436, 438
— Шези C 172
— шероховатости n 175
— — для грунтовых вод 598
Кривая гранулометрического (зернового) состава грунта 543
— депрессии 536
— подпора 289
— свободной поверхности 287
— спада 289
Критерий динамического подобия 526, 530
Критическая глубина 279
— скорость 125
Критический уклон 284
Критическое число Рейнольдса 125–127

Лабораторное проектирование 522
Ламинарный режим 125
Лесосплавной лоток 497
Лимитные коэффициенты шероховатости 265
Линии возмущения 517
— критических глубин 282, 284
— нормальных глубин 282, 284
— равного напора 584
Линии возмущения потенциала скорости фильтрации 584
— тока 83, 587
Лоб волны 369
Логарифмическая анаморфоза для модуля расхода 299
Локальная сила инерции 343
Лотки (короткие каналы) 497, 498

Максимальная допускаемая скорость 255
Малое отверстие 386
Манометрическое давление 42
Массовые силы 22
Масштаб времени 524
— плотности 525
— расхода 534
— скорости 524
Математическая гидромеханика 4, 9
Математическое моделирование 521
Материальная модель 521, 522
Мгновенная местная скорость 141
Медленно изменяющееся движение 83
Мертвая зона 181
Местная потеря напора 129, 181
Местоположение прыжка в лотке (в канале) 502
Метацентр 66
Метацентрическая высота 67
Метацентрический радиус 67
Метод влекущей силы 266
— коэффициентов сопротивления Чугаева 598
— Лагранжа 72
— размерностей 126
— ЭГДА 597
— Эйлера 72
Механика жидкого тела 9
— жидкости 9
Механическое подобие 523
Минимальная допускаемая скорость 255
Многоступенчатый перепад 488, 494, 495
Моделирование 520
— физическое и математическое 521
Модель Бернадского 509
— воображаемая 521
— математическая 522
— материальная 522
— Рейнольдса – Буссинеска 145
— Форхгеймера 561, 608
Модуль объемной упругости жидкости 14
— расхода K 173
— скорости W 173
— сопротивления русла 319
Молекулярное давление 16
Моменты инерции плоских фигур 637
Мосты 427
Мощность водоносного слоя 556
Мультипликатор 64
Мутность воды 631, 632

Напор геометрический (z) 47
— давления $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$ 47
— инерционный 342, 349, 443
— на водосливе 406, 407
— на сооружении 581, 592
— полный 100, 109
— потенциальный 47
— приведенный 381, 593, 594
— скоростной 98
Напорная линия 100
— функция 583
Напорное движение 94
Напряжение 23, 24, 32
— касательное 23
— нормальное 23, 32
Напряжения главные 24
Насадки 388
Насадок Борда 396
— Вентури 388
Начальный градиент 541
— участок струи 402
— — трубы 157
Незаиляющая скорость 255
Незатопленная струя 401
Неньютоновская жидкость 623
Неподтопленный волослив 408
Непокрытая струя 414
Неполная воображаемая модель 521
Неполный гидравлический удар 364
Неравномерное движение 91, 94
Неразмывающая скорость 255
Несвободное истечение через водослив 412
Несовершенный колодец (грунтовый) 559
Неустановившееся движение 84
Нижний бьеф (НБ) 406
Нижняя критическая скорость 128
Нисходящая волна перемещения 365, 369
Нормальная глубина 283
Нормальные напряжения 22, 23, 32
Носок плотины 479
Ньютоновская жидкость 624

Область гладких русел 162
— доквадратичного сопротивления шероховатых русел 164
— квадратичного сопротивления шероховатых русел 164
Объемные силы 22
Объемный вес 13
Обратный клапан 200
Овоидальное сечение трубы 259
Одноступенчатый перепад 491
Околокритическая область 333
Осесимметричная задача 95, 122, 556
Основной участок струи 402
Осредненная скорость 144
Осредненное гидродинамическое давление 146
Осредненный поток 145
Остановившаяся волна перемещения 377
Остойчивость судна 67
Ось плавания 66
Отверстие водосливное 405
— большое 386
— донное 484
— затопленное 385
— малое 386
Относительная глубина 301, 304
— — нижнего бьефа 460
— — фиктивного прыжка 460
— шероховатость Δ, 161
Относительный модуль расхода 304
— покой 51
Отогнанный гидравлический прыжок 411, 458, 487
Отраженная волна 361, 377
Отрицательная волна 361, 369

Параллельное соединение труб 231
Параллельноструйное движение 85
Параметр кинетичности 531
Перемежающаяся турбулентность 162
Перемычки 427
Перепад восстановления 226, 424, 426, 486
Перепады 257, 488
Переходной (послеводоворотный) участок 187
Плавание 65
Плавно изменяющееся движение 85
Плавный поворот трубы 195
Плановая задача 509, 560
Плоская задача 16, 95, 453
Плоский флютбет 592
Плоское движение (плоская задача) 95
Плоскость сравнения 98
Плотина с высоким уступом 483
— с низким уступом 479
— с экраном 573
— с ядром 572
Плотность 13
Площадь живого сечения 93
Поверхностное давление 42
Поверхностно-донный режим 483
Поверхностное натяжение 18
Поверхностные силы 22
Поверхностный режим 414, 480
Поверхность раздела 401
Поворот трубы 195, 203, 204
Поглощающий колодец 559
Пограничные условия (фильтрация) 565
Пограничный слой пристенный и струйный 156
Поджатая струя 414
Подземный контур плотины 580
Подтопленный водослив 408

Подъемная сила 626
Показательная зависимость для отношения модулей расхода 297
Покрытая струя 414
Полигональные водосливы 408, 442
Полная потеря напора 130, 214
— удельная энергия 101
Полный гидравлический удар 364
— напор 100, 109
— — на водосливе 406
— перепад на водосливе 406
Положительная волна перемещения 366, 368
Полюс струи 402
Пониженное крепление за плотиной 462
Понур 581
Поперечные (косые) производные от u_x, u_y, u_z 75
Послепрыжковый участок 325
Постулат инвариантности модуля сопротивления русла 319
Потенциал 39
— скорости 40
— — фильтрации 384
Потенциальная функция 8, 39
Потенциальное движение 80
Потенциальный напор 47
Потери напора 111, 129
— — местные 129, 181
— — на вход 193
— — на выход 187
— напора на переходном участке 187
— — на постепенное расширение 140
— — на резкое расширение 183
— — на сужение 192
— — на удар 184
— — по длине 129
— — при ламинарном режиме 134
Потерянная скорость 186
Потолок наносов 629
Предельные глубины 480, 614
Пресс 54
Прибойная зона 614
Прибор Дарси 542
Приведенный напор 381, 593, 594
— — (фильтрация) 592, 594
— расход (фильтрация) 592, 594
Прием прямолинейных струек 568
Призматические русла 272
Прилипшая струя 414
Принцип максимума расхода 417
Приурезовая зона 614
Промежуток высачивания 551, 558, 566, 572
Простой трубопровод 229
Противодавление 581
Профилирующий напор 435
Прыжковая функция 328
Прыжок в виде периодических волн 333
Прыжок волнистый 332
— затопленный 332, 458, 479
— косой 333, 506, 512
— несовершенный 332
— свободный и несвободный 332
— совершенный 332
Прямая волна давления 361
Прямой гидравлический удар 361
Прямые (продольные) частные производные от u_x, u_y и u_z 75
Пульпа 624
Пульсационная добавка 144
— скорость 144
Пульсация давления 145
— скорости 144, 627
Путь смешения (перемешивания) 150
Пьезометр 45
Пьезометрическая высота 43
— линия 48, 100
Пьезометрический уклон 100

Работа сил трения 129, 131
Равномерное движение 92, 94
Радиус влияния колодца 557, 558
Разгон ветровой волны 613
Разделение потоков 205
Рассеивающие трамплины 513
Растягивающие усилия (в жидкости) 14
Расход 86
— волновой 370
— в точке плана 510, 562, 609
— единичный 278, 537
— переменный по длине 234
— приведенный 592
— удельный 278, 537
Реактивные силы 22
Реальная жидкость 12
Режимы движения реальной жидкости 124
Резкий поворот трубы 195
Резко изменяющееся движение 85
Резкое расширение трубы 183
Решетка 200

Сбойность 506
Свободная фильтрация из канала 577
Свободное истечение через водослив 410, 411
Свободные струи 93, 401, 402
Свойства гидростатического давления 32
Сжатая глубина 451, 453, 484
Сжатие струи (совершенное, несовершенное, полное, неполное) 382, 383
Сжатое сечение 379
Сжимаемость жидкости 14
Сила гидростатического давления 53
— лобового сопротивления 124
Силы трения внешние 132
— — внутренние 132, 135
— — на стенке 132

Сифон 220
Скоростной напор 98
Скорость актуальная 141
– «действительная» (грунтовых вод) 539
– динамическая 154
– местная мгновенная 141
– осредненная 144
– объемного расширения газа 91
– подхода 387, 406, 420, 433
– пульсационная 144
– распространения возмущения 357
– – упругой деформации 357
– средняя 87
– трения 154
– фильтрации 539
Сложение потерь напора 213
Сложный замкнутый (кольцевой) трубопровод 236, 240
– незамкнутый трубопровод 236
Смоченный периметр 93
Совершенный колодец 555
Соединение потоков 204
Сопряжение бьефов 450
Сопряжение глубины 324, 328
Составной профиль канала 258
Сплошная среда 6, 21
Спокойное движение 285, 377, 511, 516
Способ Бахметева (водосливы) 419
– – (неравномерное движение) 301
– Беланже 417
– Павловского (естественные русла) 321
– Рахманова (естественные русла) 319
– Тольмана 315
– удлиненной контурной линии Чугаева 607
– Чарномского 310
– Чугаева – Рахманова (неравномерное движение) 308
Средняя волновая линия 613
Статика жидкости 9, 32
Степень затопления прыжка 458
– наполнения трубы 259
Стратификация потока 630
Струйка тока 85
Сужение трубы 190
Суммарное гидростатическое давление 59
Суффозия 581
Сходственные точки 523

Таблицы расчетные (оглавление их) 673
Твердая вода 18
Твердый весовой расход 631
Текучесть жидкости 11
Тело волны перемещения 370
– давления 60
Техническая атмосфера 44
– гидромеханика 4, 9
– механика жидкости 4, 9
Типы сопряжения бьефов 458
Толстая стенка 389
Тонкая стенка 389
Точка водораздела 241
Траектория струи 384, 490
Транзитная струя 181
Транзитный расход 234, 577
Транспортирующая способность потока 631
Трапецеидальный водослив 406, 415
Трение внешнее 132
– внутреннее 132, 135
– на стенке 132
– турбулентное 150, 151
Треугольный водослив 406, 414
Тройники 195–198
Трубка Пито 98
Трубопроводы длинные 215, 229
– короткие 215
Турбулентная фильтрация 541, 578
Турбулентные касательные напряжения 148, 152
– нормальные напряжения 152
– струи 401, 402
Турбулентный режим 125

Удельная объемная сила 22
– энергия кинетическая 101
– – давления 47, 101
– – полная 101
– – положения 47, 101
– – потенциальная 47, 101
– – сечения 278
Удельный вес 13
– расход 278, 537
– – в точке плана 510, 562, 609
Уклон гидравлический 111, 115, 272
– дна канала 245
– критический 284
– пьезометрический 100–112
– свободной поверхности 115
– трения 273, 311
Уравнение баланса расхода 370, 513
– Бахметева ($i \leq 0$) 302, 304, 305
– Бернулли для неустановившегося движения 340, 344
– – (уравнение баланса удельной энергии) для установившегося движения 95, 111
– гидравлического прыжка 326, 327
– динамического равновесия 513
– Дюпюи – Рюльмана 316
– количества движения 120
– Лапласа 585
– неравномерного движения ($i > 0$) 301, 308
– – – ($i = 0$) 303
– – – ($i < 0$) 304
– – – грунтовых вод 547
– неразрывности 89

Уравнение несжимаемости (в дифференциальной форме) 89–91
– равномерного движения 131
– Роте 577
– Толькмита 316
Уравнения Навье – Стокса 74, 75
– Рейнольдса 152
– Эйлера 74
Уравнительный резервуар гидростанции 355
Ускорение силы тяжести 13
Условия подтопления водосливов 408, 411, 423
– применимости уравнения Бернулли 113, 423
Установившееся движение 83

Фаза гидравлического удара 365
Физическое моделирование 520–521
Фиктивное цилиндрическое русло 313–314
Фиктивный гидравлический прыжок 336, 458
Фильтрация 535
Формула Альтшуля для C 177
– – для λ 166
– Астафичевой (для плотины с уступом) 481, 483
– Бахметева – Матцке 331
– Бахметева – Федорова для C 177
– Блазиуса для λ 160
– Борда 183, 186
– Вейсбаха для h_j 193
– Вейсбаха – Дарси для h_l 159
– Гангилье – Куттера для C 175
– Дарси (грунтовые воды) 539, 540
– Дюпюи 546, 550
– Зихарда для R 558
– Избаша для $k_т$ 379
– Киршмера (решетки) 201
– Кольбрука 165
– Косяковой 333
– Лагранжа для c_0 375
– Маннинга для C 176
– Можевитинова для $n_{ср}$ 266
– Павловского для C 176
– – для m (водосливы) 435
– – (прыжок) 331
– Павчича для $k_т$ 543
– Прандля для λ 160
Формула Пуазейля 140, 141
– Сафранеца 331
– Торичелли 381
– Чугаева для x 298
– Шевелева для λ 168
– Шези для v 172
– Шифринсона для λ 167
Формы кривой депрессии 548
– напорных и пьезометрических линий 116–120
– свободных поверхностей 289–294
– струй (водосливы) 413
Фронт волны 370, 516, 613
Функция диссипации 179
– тока (течения) 587, 588

Хорда водоворота 429

Центр водоизмещения 65
– давления 55
– тяжести плоских фигур 637, 638
Цилиндрические русла 269

Числа Рейнольдса предельные 167
Число Рейнольдса 127, 530, 531
– Фруда 529, 531
Чистый шпунт 592, 606

Шаровой тензор 33
Ширина водослива 406
– канала по дну (относительная) 247
Шероховатость труб и каналов Δ 166
Шероховатые трубы 152, 153

Щелевой водослив 492

Эквивалентная шероховатость 165
Экономические скорости 237, 238
Электрогидродинамическая аналогия 597
Элементарная площадка 23
– струйка 84, 88
Элементарный объем 23, 35, 37, 77
Эллипс Ляме 24
– напряжения 23, 24, 69
Эллипсоид напряжения 24
Эпюры волнового давления 619
Эпюра гидростатического давления 57, 58
– скоростей 87
Эффективная ширина водослива 408, 433

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава первая. **Введение в гидравлику** 9

§ 1-1. Определение науки «Гидравлика» 9
§ 1-2. Жидкость 11
§ 1-3. Понятия реальной и идеальной жидкости. Вязкость 12
§ 1-4. Основные физические свойства реальных жидкостей 13
§ 1-5. Особые состояния жидкости 19
§ 1-6. Модель сплошной среды, используемая при решении вопросов механики (в частности, механики жидкости). Силы, действующие на жидкость. Напряженное состояние жидкости 21
§ 1-7. Состав курса гидравлики. Примеры практического приложения гидравлики 24
§ 1-8. Краткие сведения из истории гидравлики и об ее основоположниках 26
Список литературы 32

Глава вторая. **Гидростатика** 32

§ 2-1. Гидростатическое давление. Сила гидростатического давления («суммарное гидростатическое давление»). Свойства гидростатического давления 32
§ 2-2. О независимости гидростатического давления *p* от ориентировки площадки, намеченной в данной точке пространства (в условиях, когда в жидкости отсутствуют касательные напряжения) 35
§ 2-3. Дифференциальные уравнения покоя (равновесия) жидкости 37
§ 2-4. Интегрирование дифференциальных уравнений покоя (равновесия) жидкости 38
§ 2-5. Величина гидростатического давления в случае жидкости, находящейся под действием только одной объемной силы – силы тяжести 41
§ 2-6. Пьезометрическая высота 43
§ 2-7. Вакуум 45
§ 2-8. Потенциальная энергия жидкости. Потенциальный напор 46
§ 2-9. Равновесие жидкости во вращающемся сосуде (относительный покой жидкости) 51
§ 2-10. Сила гидростатического давления, действующая на плоскую фигуру любой формы 53
§ 2-11. Сила гидростатического давления, действующая на плоские прямоугольные фигуры 57
§ 2-12. Сила гидростатического давления, действующая на цилиндрические поверхности 59
§ 2-13. Круглая труба, подверженная внутреннему гидростатическому давлению 62
§ 2-14. Простейшие гидравлические машины 64
§ 2-15. Равновесие плавающих тел 65
Материалы практических занятий по гидростатике 67
Список литературы 69

Глава третья. Основы технической гидродинамики 69

§ 3-1. Гидродинамическое и гидромеханическое давления. Общая постановка задачи технической гидродинамики 69
§ 3-2. Основные аналитические методы исследования движения жидкости 72
§ 3-3. Дифференциальные уравнения движения идеальной (невязкой) жидкости (уравнения Эйлера) 74
§ 3-4. Три основных вида движения жидкости. Понятие вихревого и безвихревого движений 77
§ 3-5. Потенциал скорости. Потенциальное движение жидкости 80
§ 3-6. Установившееся и неустановившееся движения жидкости 82
§ 3-7. Линия тока и элементарная струйка 83
§ 3-8. Параллельноструйное, плавно изменяющееся и резко изменяющееся движения жидкости. Живое сечение, расход и средняя скорость. Эпюра скоростей 85
§ 3-9. Уравнение неразрывности (или сплошности) движущейся жидкости в случае установившегося движения 88
§ 3-10. Уравнение несжимаемости движущейся жидкости в дифференциальной форме 89
§ 3-11. Неравномерное и равномерное движения. Напорное и безнапорное движения, свободные струи. Гидравлические элементы живого сечения. Сводка классификаций движений жидкости 91
§ 3-12. Гидравлическое уравнение кинетической энергии. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости при установившемся движении 95
§ 3-13. Значения трех слагаемых, входящих в уравнение Бернулли 98
§ 3-14. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости при установившемся движении. Полный напор для элементарной струйки 99
§ 3-15. Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости при установившемся движении . . . 101
§ 3-16. Гидравлическое уравнение кинетической энергии («уравнение Бернулли») для элементарной струйки реальной жидкости при установившемся движении. Диффузия механической энергии через боковую поверхность элементарной струйки 102
§ 3-17. О распределении давления в живых сечениях потока при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях жидкости (первое вспомогательное положение) 104
§ 3-18. Влияние неравномерности распределения скоростей по плоскому живому сечению на величину количества движения и величину кинетической энергии некоторой массы жидкости, протекающей через данное живое сечение (второе вспомогательное положение) 105
§ 3-19. Полный напор для целого потока 109
§ 3-20. Гидравлическое уравнение кинетической энергии («уравнение Бернулли») для целого потока реальной (вязкой) жидкости при установившемся движении 110
§ 3-21. Общие указания о форме напорной и пьезометрической линий при установившемся движении 114

Материалы практических занятий по вопросам, связанным с использованием уравнения Бернулли 115

§ 3-22. Гидравлическое уравнение количества движения для установившегося потока 120
§ 3-23. Сила «лобового сопротивления» твердого тела, частично или полностью погруженного в движущуюся жидкость 123
§ 3-24. Два режима движения реальной жидкости 124
Список литературы 128

Глава четвертая. **Потери напора при установившемся движении жидкости. Гидравлические сопротивления. Расчетная схема турбулентного потока** . . . 129

§ 4-1. Общие указания о потерях напора. Гидравлические сопротивления 129

§ 4-2. Основное уравнение установившегося равномерного движения жидкости. Работа сил внутреннего трения 131

А. Потеря напора по длине и распределение скоростей в потоке при ламинарном установившемся равномерном движении жидкости 134

§ 4-3. Законы внутреннего трения в жидкости. Величина касательных напряжений трения при ламинарном движении жидкости 134

§ 4-4. Распределение скоростей u по живому сечению при ламинарном равномерном установившемся движении жидкости 138

§ 4-5. Формула Пуазейля для расхода Q в круглоцилиндрической трубе. Потеря напора по длине при ламинарном равномерном установившемся движении жидкости 140

Б. Расчетная модель турбулентного потока. Распределение осредненных скоростей в потоке при турбулентном движении жидкости 141

§ 4-6. Основные понятия, связанные с изучением турбулентного потока 141

§ 4-7. Турбулентные касательные напряжения в осредненном потоке . . . 148

§ 4-8. Распределение осредненных скоростей по живому сечению потока при турбулентном равномерном установившемся движении. Вязкий подслой. Гладкие и шероховатые трубы. Пограничный слой . . . 152

В. Потеря напора по длине при турбулентном установившемся равномерном движении жидкости 159

§ 4-9. Формула Вейсбаха–Дарси. Коэффициент гидравлического трения λ 159

§ 4-10. Исследования И. Никурадзе. Обобщение вопроса о потерях напора 160

§ 4-11. Практические способы определения коэффициента гидравлического трения λ для напорных труб (круглых и некоторых прямоугольных) 165

§ 4-12. Потеря напора по длине при турбулентном установившемся равномерном движении жидкости для квадратичной области сопротивления. Формула Шези. Модуль расхода и модуль скорости 171

§ 4-13. Дополнительные замечания о диффузии механической энергии через боковую поверхность элементарных струек, составляющих поток реальной жидкости. Функция диссипации механической энергии . . 179

Г. Местные потери напора при турбулентном напорном установившемся движении жидкости. Соединение и разделение потоков. Уравнение Бернулли для установившегося движения «легкой» и невесомой жидкости 181

§ 4-14. Явление отрыва транзитной струи (или пограничного слоя) от стенок русла. Физические причины, обусловливающие такого рода отрыв. Общий характер местных потерь напора 181

§ 4-15. Потери напора при резком расширении напорного трубопровода (формула Борда). Выход из трубопровода в бассейн 183

§ 4-16. Постепенное расширение трубопровода (диффузор) 188

§ 4-17. Сужение трубопровода. Вход в трубопровод 190

§ 4-18. Остальные случаи местных потерь напора. Общая формула Вейсбаха 193

Сокращенные справочные данные о величине коэффициента местного сопротивления ζ_{J} (в случае установившегося напорного турбулентного движения жидкости) 194

§ 4-19. Поворот потока. Соединение и разделение потоков 204

§ 4-20. Три вида уравнения Бернулли 206

Список литературы 209

Глава пятая. **Установившееся движение жидкости в напорных трубопроводах** . . . 210

§ 5-1. Предварительные указания 210

§ 5-2. Расчетные зависимости для определения потерь напора . . . 210

§ 5-3. Сложение потерь напора. Полный коэффициент сопротивления. Понятие длинных и коротких трубопроводов 213
А. Короткие трубопроводы 215
§ 5-4. Простой трубопровод постоянного диаметра 215
§ 5-5. Особые случаи простого трубопровода: сифон и всасывающая труба насоса 220
§ 5-6. Особые случаи простого трубопровода (продолжение): горизонтальная и вертикальная водоспускные трубы. Различные виды вакуума . . . 224
Б. Длинные трубопроводы 229
§ 5-7. Простой трубопровод 229
§ 5-8. Последовательное и параллельное соединение труб 231
§ 5-9. Задача о трех резервуарах 233
§ 5-10. Потери напора в случае расхода, переменного по длине трубы . . . 234
§ 5-11. Расчет сложного (разветвленного) незамкнутого трубопровода (трубопроводной сети) 236
§ 5-12. Замечания о расчете сложного замкнутого трубопровода 240
Материалы практических занятий по расчетам напорных трубопроводов 241
Список литературы 245

Глава шестая. **Равномерное безнапорное установившееся движение воды в каналах** 245

§ 6-1. Предварительные замечания 245
§ 6-2. Гидравлические элементы живого сечения потока в канале 246
§ 6-3. Гидравлически наивыгоднейший поперечный профиль трапецеидального канала 248
§ 6-4. Основные задачи при расчете трапецеидальных каналов на равномерное движение воды 251
§ 6-5. Ограничение скоростей движения воды при расчете каналов. Перепады 255
§ 6-6. Расчет каналов, имеющих составной поперечный профиль 258
§ 6-7. Расчет каналов, имеющих замкнутый поперечный профиль 259
§ 6-8. Расчет естественных русел на равномерное движение воды 264
§ 6-9. Дополнительные замечания о расчете каналов 264
§ 6-10. Замечания о проектировании земляных каналов 267
Список литературы 268

Глава седьмая. **Неравномерное безнапорное установившееся движение воды в каналах и естественных руслах** 268

§ 7-1. Предварительные указания 268
§ 7-2. Основное дифференциальное уравнение неравномерного движения воды (первый вид дифференциального уравнения) 272
§ 7-3. Второй вид дифференциального уравнения неравномерного движения воды 274
А. Неравномерное движение воды в цилиндрических руслах 276
§ 7-4. Второй вид дифференциального уравнения неравномерного движения для случая цилиндрических русел 276
§ 7-5. Четыре вспомогательных понятия: удельная энергия сечения, критическая глубина, нормальная глубина, критический уклон 278
§ 7-6. Спокойное, бурное и критическое состояния потока 285
§ 7-7. Исследование форм (видов) кривой свободной поверхности потока в случае неравномерного плавно изменяющегося движения воды в цилиндрическом русле 287
§ 7-8. Приведение дифференциального уравнения неравномерного движения воды к виду, удобному для интегрирования в случае прямого уклона русла ($i > 0$) 294
§ 7-9. Вид дифференциального уравнения неравномерного движения воды, удобный для интегрирования в случае горизонтального русла ($i = 0$) 295
§ 7-10. Вид дифференциального уравнения неравномерного движения воды, удобный для интегрирования в случае русла с обратным уклоном дна ($i < 0$) 296

§ 7-11. Общие указания об интегрировании дифференциального уравнения неравномерного движения воды 296
§ 7-12. Показательная зависимость для отношения модулей расхода. Гидравлический показатель русла 297
§ 7-13. Интегрирование дифференциального уравнения неравномерного движения воды в случае русел с прямым уклоном дна ($i > 0$) по способу Бахметева 301
§ 7-14. Интегрирование дифференциального уравнения неравномерного движения воды в случае горизонтального русла ($i = 0$) по способу Бахметева 303
§ 7-15. Интегрирование дифференциального уравнения неравномерного движения воды в случае русла с обратным уклоном дна ($i < 0$) по способу Бахметева 304
Материалы практических занятий по построению кривой свободной поверхности для потока в цилиндрическом русле 305
Дополнительные краткие указания о существующих способах интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения (7-133) (случай $i > 0$) 308
Б. Неравномерное плавно изменяющееся движение воды в нецилиндрических искусственных руслах (каналах) 310
§ 7-16. Построение кривой свободной поверхности потока по уравнению Бернулли методом конечных разностей (способ Чарномского) . . . 310
В. Движение воды в естественных руслах 312
§ 7-17. Общие указания 312
1-й метод построения кривой свободной поверхности потока в естественных руслах 314
§ 7-18. Построение кривой свободной поверхности потока в естественном русле путем замены его фиктивным цилиндрическим руслом 314
2-й метод построения кривой свободной поверхности потока в естественных руслах 316
§ 7-19. Основные расчетные зависимости 316
§ 7-20. Определение численного значения $\frac{l}{K^2}$. Вспомогательные графики 318
§ 7-21. Общий метод построения кривой свободной поверхности 319
§ 7-22. Постулат инвариантности модуля сопротивления. Построение свободной поверхности по способу Рахманова 319
§ 7-23. Построение свободной поверхности по способу Павловского 321
Список литературы 323

Глава восьмая. **Гидравлический прыжок и послепрыжковый участок. Формы свободной поверхности потока в цилиндрических руслах, имеющих резкое изменение уклона дна** 324
§ 8-1. Общие указания. Послепрыжковый участок 324
§ 8-2. Основное уравнение гидравлического прыжка 326
§ 8-3. Прыжковая функция. Определение одной из сопряженных глубин по заданной другой сопряженной глубине 328
§ 8-4. Основное уравнение прыжка в прямоугольном цилиндрическом русле 329
§ 8-5. Длина свободного прыжка в прямоугольном горизонтальном русле. Потери энергии в прыжке 331
§ 8-6. Особые виды гидравлического прыжка. Дополнительные замечания 331
§ 8-7. Формы свободной поверхности потока при резком изменении уклона дна цилиндрического канала 334
Материалы практических занятий по построению схем свободных поверхностей в цилиндрических руслах 337
Список литературы 338

Глава девятая. **Неустановившееся напорное и безнапорное движения жидкости** 338
§ 9-1. **Предварительные указания** 338

А. Неустановившееся напорное движение жидкости в случае, когда не учитываем ее сжимаемость, причем стенки трубопровода считаем абсолютно жесткими – недеформирующимися (простейший случай неустановившегося напорного движения жидкости) 340
§ 9-2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки в случае неустановившегося движения (уравнение Бернулли, учитывающее локальные силы инерции жидкости) 340
§ 9-3. Уравнение Бернулли для целого потока реальной жидкости, учитывающее локальные силы инерции жидкости (уравнение баланса удельной энергии при неустановившемся движении) 344
§ 9-4. Общая расчетная зависимость для движения жидкости в цилиндрической трубе 347
§ 9-5. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для неустановившегося движения несжимаемой жидкости в трубопроводе с абсолютно жесткими (недеформирующимися) стенками. Энергетический смысл инерционного напора 347
§ 9-6. Истечение жидкости из цилиндрической трубы в атмосферу 353
§ 9-7. Общие указания о колебании горизонта воды в уравнительном резервуаре гидростанций 355
Б. Неустановившееся напорное движение жидкости в случае, когда учитывается ее сжимаемость, причем стенки трубопровода считаются не абсолютно жесткими (упругими, деформирующимися). Гидравлический удар
§ 9-8. Предварительные указания 356
§ 9-9. Описание явления гидравлического удара 356
§ 9-10. [illegible] 357
§ 9-10. Расчетные зависимости для величины гидравлического удара и скорости его распространения 359
§ 9-11. Прямой (начальный) и отраженный гидравлические удары. Колебание гидромеханического давления в неподвижном поперечном сечении трубы при гидравлическом ударе 361
§ 9-12. Случай постепенного закрытия крана. Полный и неполный гидравлические удары 362
В. Неустановившееся безнапорное движение воды 366
§ 9-13. Основные случаи безнапорного неустановившегося движения воды. Терминология 366
§ 9-14. Дифференциальные уравнения неустановившегося плавно изменяющегося движения и общие указания об их решении 370
§ 9-15. Результаты решения дифференциальных уравнений неустановившегося движения, относящегося к простейшему случаю русла. Отражение волн перемещения 373
§ 9-16. Дополнительное уточнение понятий спокойного и бурного движений жидкости. Гидравлический прыжок как остановившаяся волна перемещения 377
Список литературы 378

Глава десятая. **Истечение жидкости из отверстий и насадков. Свободные струи** 379

А. Истечение жидкости из отверстия в тонкой плоской стенке при постоянном напоре 379
§ 10-1. Истечение из малого отверстия в атмосферу 379
§ 10-2. Типы сжатия струи. Величины коэффициентов ε, ζ, φ и μ_0 для малого отверстия при истечении в атмосферу. Инверсия струи . . . 382
§ 10-3. Траектория струи 384
§ 10-4. Истечение из малого отверстия под уровень (случай затопленного отверстия) 385
§ 10-5. Движение жидкости в сосуде. Понятие малого и большого отверстий. Указания о расчете больших отверстий 386

Б. Истечение жидкости из насадков при постоянном напоре 388
§ 10-6. Типы насадков. Общие указания 388
§ 10-7. Внешний круглоцилиндрический насадок (насадок Вентури) 389
§ 10-8. Внутренний круглоцилиндрический насадок (насадок Борда) 396
§ 10-9. Насадки прочих типов 396
В. Истечение жидкости из отверстий и насадков при переменном напоре 398
§ 10-10. Истечение в атмосферу или под постоянный уровень жидкости 398
§ 10-11. Истечение под переменный уровень при постоянном уровне жидкости в сосуде. Дополнительные замечания 400
Г. Свободные струи 401
§ 10-12. Общие сведения о свободных струях 401
Материалы практических занятий по расчету отверстий и насадков 404
Список литературы 405

Глава одиннадцатая. **Водосливы** 405

§ 11-1. Терминология и классификация водосливов 405
§ 11-2. Основная расчетная формула для прямоугольного водослива . . 408
А. Прямые (лобовые) водосливы с тонкой стенкой 409
§ 11-3. Дополнительные классификации водосливов с тонкой стенкой . . . 409
§ 11-4. Свободное истечение через неподтопленный прямоугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой 410
§ 11-5. Свободное истечение через подтопленный прямоугольный водослив с вертикальной тонкой стенкой 411
§ 11-6. Несвободное истечение через водослив с вертикальной тонкой стенкой 412
§ 11-7. Водосливы с тонкой стенкой, отличные от прямоугольных 414
Б. Прямые прямоугольные водосливы с широким порогом 415
§ 11-8. Неподтопленный водослив с широким порогом 415
§ 11-9. Критерий подтопления водослива с широким порогом 423
§ 11-10. Подтопленный водослив с широким порогом 425
§ 11-11. Расчет водослива без порога по заданной скорости в водосливном отверстии. Стеснение русла перемычками 427
В. Прямые прямоугольные водосливы со стенкой практического профиля 431
§ 11-12. Дополнительная классификация водосливов со стенкой практического профиля 431
§ 11-13. Основная расчетная формула для водосливов со стенкой практического профиля 432
§ 11-14. Коэффициент подтопления водослива со стенкой практического профиля 433
§ 11-15. Коэффициент бокового сжатия для водослива со стенкой практического профиля 434
§ 11-16. Коэффициент расхода водослива со стенкой практического профиля 435
Г. Особые случаи водосливов. Заключительные замечания 441
§ 11-17. Косые прямоугольные водосливы 441
§ 11-18. Боковые водосливы 441
§ 11-19. Полигональные в плане водосливы 442
§ 11-20. Заключительные замечания 442
Материалы практических занятий по расчету водосливов 443
Список литературы 450

Глава двенадцатая. **Сопряжение бьефов при устройстве плотин** 450

§ 12-1. Предварительные указания 450
§ 12-2. Определение глубины в сжатом сечении потока 453
§ 12-3. Сопряжение струи, ниспадающей с плотины, с нижним бьефом 457

§ 12-4. Основные указания по проектированию и расчету устройств нижнего бьефа плотин . . . 462
§ 12-5. Общие замечания о гашении кинетической энергии потока в нижнем бьефе сооружения . . . 464
§ 12-6. Аналитический способ расчета глубины водобойного колодца и отметки пониженного крепления за плотиной . . . 466
§ 12-7. Расчет глубины водобойного колодца и отметки пониженного крепления за плотиной при помощи графиков . . . 469
§ 12-8. Аналитический способ расчета высоты водобойной стенки . . . 471
§ 12-9. Расчет высоты водобойной стенки при помощи графиков . . . 474
§ 12-10. Расчет длины водобойных колодцев, образованных водобойным уступом и водобойной стенкой . . . 477
§ 12-11. Расчет плотины с низким уступом . . . 479
§ 12-12. Общие указания о расчете плотины с высоким уступом . . . 483
§ 12-13. Сопряжение бьефов при истечении воды из донного напорного отверстия (из-под щита) . . . 484
Список литературы . . . 488

Глава тринадцатая. **Перепады** . . . 488

§ 13-1. Общие указания . . . 488
§ 13-2. Определение дальности полета (дальности боя) струи при переливе через водослив . . . 489
§ 13-3. Замечания о расчете одноступенчатого перепада . . . 491
§ 13-4. Расчет щелевого водослива . . . 492
§ 13-5. Расчет многоступенчатого колодезного перепада . . . 494
§ 13-6. Расчет многоступенчатого бесколодезного перепада . . . 495
Список литературы . . . 496

Глава четырнадцатая. **Сопряжение бьефов каналами** . . . 497

§ 14-1. Предварительные указания . . . 497
§ 14-2. Расчет короткого канала, имеющего уклон дна меньше критического ($i < i_к$) . . . 498
§ 14-3. Расчет короткого канала, имеющего уклон дна больше критического ($i > i_к$) . . . 500
§ 14-4. Продолжение: установление местоположения прыжка в коротком канале при подтопленном его конце . . . 502
§ 14-5. Указания о расчете лотков, составленных из ряда участков разного уклона. Заключительные замечания . . . 503
§ 14-6. Сопряжение двух водоемов при помощи длинного канала . . . 506
Список литературы . . . 508

Глава пятнадцатая. **Плановая задача об установившемся безнапорном движении воды** 509

§ 15-1. Общие указания . . . 509
§ 15-2. Дифференциальные уравнения установившегося резко изменяющегося (в плане) безнапорного движения воды и общие замечания об их решении . . . 513
§ 15-3. Некоторые особенности плановых потоков . . . 515
§ 15-4. Обтекание потоком боковой стенки русла, имеющего поворот в плане 518
Список литературы . . . 520

Глава шестнадцатая. **Основы теории физического моделирования гидравлических явлений** . . . 520

§ 16-1. Общие указания о моделировании . . . 520
§ 16-2. Понятие о подобии гидравлических явлений . . . 523
§ 16-3. Критерии динамического подобия . . . 526
§ 16-4. Основные указания о моделировании гидравлических явлений . . . 532
Список литературы . . . 535

Глава семнадцатая. **Плавно изменяющееся установившееся безнапорное движение грунтовой воды** . . . 535

§ 17-1. Предварительные указания . . . 535
§ 17-2. Скорость фильтрации. Основной закон ламинарной фильтрации (формула Дарси). Замечания о зависимостях, отличных от формулы Дарси . . . 539
§ 17-3. Методы определения коэффициента фильтрации . . . 542
§ 17-4. Равномерное движение грунтовой воды . . . 544
§ 17-5. Основное уравнение плавно изменяющегося безнапорного движения грунтовой воды (формула Дюпюи) . . . 545
§ 17-6. Дифференциальное уравнение неравномерного плавно изменяющегося движения грунтовой воды в цилиндрическом русле . . . 547
§ 17-7. Формы свободной поверхности (кривой депрессии) при плавно изменяющемся движении грунтовой воды в цилиндрическом русле . . . 548
§ 17-8. Интегрирование дифференциального уравнения плавно изменяющегося движения грунтовой воды (для плоской задачи) . . . 549
§ 17-9. Приток грунтовой воды к волосборной галерее или дрене . . . 552
§ 17-10. Приток грунтовой воды к круглым одиночным колодцам . . . 555
§ 17-11. Плановая задача о притоке воды к группе круглых совершенных колодцев («водопонижение»). «Сложение» простейших безнапорных фильтрационных потоков . . . 560
§ 17-12. Фильтрация воды через однородную земляную плотину . . . 565
§ 17-13. Земляная плотина с ядром, расположенная на водонепроницаемом основании . . . 572
§ 17-14. Земляная плотина с экраном, расположенная на водонепроницаемом основании . . . 573
§ 17-15. Фильтрация через неоднородный изотропный грунт. Два «виртуальных способа» расчета (способа использования «виртуальных длин») . . . 574
§ 17-16. Просачивание воды с поверхности земли (инфильтрация); переменный фильтрационный поток по длине потока . . . 576
§ 17-17. Замечания о фильтрации воды из каналов . . . 577
§ 17-18. Замечания о турбулентной фильтрации (отвечающей квадратичной области сопротивления) . . . 578
Список литературы . . . 580

Глава восемнадцатая. **Резко изменяющееся установившееся напорное движение грунтовой воды** . . . 580

§ 18-1. Общие указания . . . 580
§ 18-2. Основные дифференциальные уравнения установившегося движения грунтовой воды . . . 582
§ 18-3. Напорная функция. Потенциал скорости. Линии равного потенциала 583
§ 18-4. Уравнение Лапласа . . . 585
§ 18-5. Граничные условия . . . 586
§ 18-6. Линии тока. Функция тока. Гидродинамическая сетка . . . 587
§ 18-7. Общие указания о математическом решении Н. Н. Павловского. Методы технической гидромеханики . . . 590
§ 18-8. Гидродинамическая сетка в случае гидротехнического сооружения 591
§ 18-9. Некоторые особые свойства гидродинамической сетки. Приведенный напор и приведенный расход . . . 592
§ 18-10. Решение практических задач при помощи предварительно построенной гидродинамической сетки . . . 594
§ 18-11. Экспериментальный метод электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА) . . . 597
§ 18-12. Метод коэффициентов сопротивления Р. Р. Чугаева . . . 598
§ 18-13. Построение гидроизогипс безнапорного потока на основе замены его напорным потоком (плановая задача) . . . 608
Список литературы . . . 610

Глава девятнадцатая. **Основные сведения о ветровых волнах** 611

§ 19-1. Предварительные замечания 611
§ 19-2. Основные классификации гравитационных ветровых волн. Терминология 612
§ 19-3. Классификация водоемов и их прибрежных зон 613
§ 19-4. Интерференция волн. Стоячие волны 615
§ 19-5. Прогрессивные волны на глубокой воде 616
§ 19-6. Волны на мелкой воде 620
§ 19-7. Волны на пологом откосе. Заключительные замечания 621
Список литературы 622

Глава двадцатая. **Двухфазные потоки жидкости** 622

§ 20-1. Предварительные указания. Замечания о неньютоновских и аномальных жидкостях 622
§ 20-2. Механическое (силовое) воздействие потока на неподвижные частицы грунта, лежащие на дне русла и обтекаемые водой 625
§ 20-3. Механизм насыщения турбулентного потока тяжелыми твердыми частицами (частицами грунта, песчинками) 626
§ 20-4. Терминология. Некоторые понятия и представления, связанные с изучением взвесенесущих потоков 631
§ 20-5. Напорный гидротранспорт 634
Список литературы 636

Приложение: 637

Таблица П-1. Соотношения для перевода единиц измерения из системы МКГСС в систему СИ 637
Таблица П-2. Буквы греческого алфавита 637
Таблица П-3. Моменты инерции I_C (относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C), координаты центра тяжести y_c и площади ω плоских фигур 637
Таблица П-4. Значения функции $\varphi(\eta)$ для прямого уклона дна водотока ($i > 0$) при различных значениях гидравлического показателя x . . . 639
Таблица П-5. Значение функции $\varphi(\xi)$ при горизонтальном дне водотока ($i = 0$) и различных значениях гидравлического показателя x . . . 642
Таблица П-6. Значения $\sigma_п$, входящего в формулу (11-16) для коэффициента расхода в случае подтопленного водослива с тонкой стенкой без бокового сжатия 647
Таблица П-7. Принятые буквенные обозначения основных величин и понятий . . . 648

Предметный указатель 653

Таблицы численных значений различных параметров, помещенные в книге:

Таблица 1-1. Плотность ρ и вес, отнесенный к единице объема жидкости («удельный вес»), γ некоторых жидкостей 14
Таблица 4-1. Коэффициенты вязкости η (в пуазах) и ν (в стоксах) для некоторых жидкостей 138
Таблица 4-2. Шероховатость Δ труб и каналов 166
Таблица 4-3. Коэффициент шероховатости n для различных водотоков (для размеров в метрах и секундах) 174
Таблица 4-4. Значения коэффициента C по формуле Маннинга $C = \frac{1}{n}R^{1/6}$ (метры и секунды) 176
Таблица 4-5. Значения коэффициента сопротивления $\zeta_д$ диафрагмы с острыми краями 196

Таблица 4-6. Значения коэффициента A к формуле (4-156) 196
Таблица 4-7. Значения коэффициента B к формуле (4-156) 196
Таблица 4-8. Значения коэффициента ζ' к формуле (4-157) 196
Таблица 4-9. Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{2\text{-}3}$ для вытяжного тройника (рис. 4-39) 196
Таблица 4-10. Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{1\text{-}3}$ для вытяжного тройника (рис. 4-39) 197
Таблица 4-11. Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{1\text{-}2}$ для приточного тройника (рис. 4-40) 197
Таблица 4-12. Значения коэффициента сопротивления $\zeta_{1\text{-}3}$ для приточного тройника (рис. 4-40) 197
Таблица 4-13. Значения $\zeta_з$ для простой задвижки, перекрывающей круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-41) 197
Таблица 4-14. Значения $\zeta_з$ для простой задвижки, перекрывающей трубу прямоугольного сечения (рис. 4-42) 197
Таблица 4-15. Значения $\zeta_з$ для задвижки Лудло, перекрывающей круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-43) 199
Таблица 4-16. Значения $\zeta_з$ для задвижки (при полном открытии) с симметричным сужением на круглоцилиндрической трубе (рис. 4-44) 199
Таблица 4-17. Значения $\zeta_з$ для дискового (дроссельного) затвора, перекрывающего круглоцилиндрическую трубу (рис. 4-45) 199
Таблица 4-18. Значения $\zeta_з$ для дискового (дроссельного) затвора, перекрывающего трубу прямоугольного поперечного сечения (рис. 4-45) 199
Таблица 4-19. Значения $\zeta_{кл}$ для захлопки клапана (рис. 4-46) 199
Таблица 4-20. Значения $\zeta_{кл}$ для обратного клапана (рис. 4-47) 202
Таблица 4-21. Значения $\zeta_{кл}$ для всасывающего клапана с сеткой (рис. 4-48) 202
Таблица 4-22. Значения коэффициента β_1 к формуле (4-159) 202
Таблица 4-23. Значения коэффициента β_2 к формуле (4-160) 202
Таблица 4-24. Значения коэффициента ζ' к формуле (4-160) 202
Таблица 4-25. Часто встречающиеся значения коэффициентов местного сопротивления ζ_j 203
Таблица 5-1. Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для новых битумизированных чугунных труб при $\Delta = (0{,}10 \div 0{,}15)$ мм *(квадратичная область сопротивления)* *211*
Таблица 5-2. Значения модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для новых небитумизированных чугунных труб при $\Delta = (0{,}25 \div 1{,}00)$ мм (квадратичная область сопротивления) 211
Таблица 5-3. Значение модуля расхода K и коэффициента гидравлического трения λ для бывших в эксплуатации чугунных труб при $\Delta = (1{,}0 \div 1{,}5)$ мм (квадратичная область сопротивления) . . 212
Таблица 6-1. Максимальные допустимые скорости при равномерном движении воды 256
Таблица 6-2. Значения $K_п$ и $W'_п$ для круглых труб при $n = 0{,}013$ по Гангилье-Куттеру 260
Таблица 10-1. Формулы для определения параметров свободной струи . . . 403
Таблица 11-1. Коэффициенты расхода m для водослива с широким порогом без бокового сжатия (плоская задача; $b = B$; $\varepsilon = 1{,}0$). Случай водосливной стенки (порога) с *вертикальной или наклонной* верховой гранью 421
Таблица 11-2. Коэффициент расхода m для водослива с широким порогом без бокового сжатия (плоская задача; $b = B_0$; $\varepsilon = 1{,}0$). Случай водосливной стенки (порога) с вертикальной верховой гранью и скругленным или притупленным входным ребром 421
Таблица 11-3. Коэффициенты формы $\sigma_ф$ для безвакуумной водосливной стенки Кригера-Офицерова 438
Таблица 11-4. Коэффициенты полноты напора $\sigma_н$ для безвакуумной водосливной стенки Кригера-Офицерова 438

Таблица 11-5. Коэффициенты расхода m для высоких трапецеидаль профилей ($c_в \geqslant 3H$) при свободном доступе воздуха струю (рис. 11-40) . . . .
Таблица 11-6. Коэффициенты расхода m для трапецеидальных профи средней высоты и низких (см. рис. 11-35) . . . . . .
Таблица 11-7. Коэффициент расхода m для треугольных профилей с вер кальной верховой гранью при $c_в > 3H$ (см. рис. 11-36) . .
Таблица 16-1. Требуемое для достижения динамического подобия отноше характеристики модели (м) к характеристике натуры (н) .
Таблица 17-1. Округленные значения коэффициента фильтрации k разных грунтов . . . .

Расчетные графики, помещенные в книге:

Рис. 4-25. График Кольбрука для определения коэффициента λ гидравл ческого трения (для круглых и некоторых прямоугольн напорных труб) . . . .
Рис. 4.26. График для определения коэффициента Шези C по форму Павловского . . . .
Рис. 4-31. График для определения коэффициента $\varphi_у$ полноты удара . .
Рис. 4-34. График для определения «коэффициента ξ смягчения сужения представленного на рис. 4-32,*б* . . . .
Рис. 4-35. График для определения «коэффициента ξ смягчения сужения представленного на рис. 4-32,*в* . . . .
Рис. 6-13. К расчету круглых канализационных труб . . . .
Рис. 6-16. График для определения гидравлических элементов безнапорног потока в цилиндрическом канале круглого поперечного сечени
Рис. 7-16. График для определения критической глубины в случае канало симметричного трапецеидального поперечного сечения . . .
Рис. 11-12. Кривая $\left(\frac{Z}{c_н}\right)_{кр} = f\left(\frac{H}{c_н}\right)$ . . . .
Рис. 11-23. Кривые: $\varphi = f_1(\varepsilon m)$; $\Phi = f_2(\varepsilon m)$; $k = f_3(\varepsilon m)$ для расчета водослив с широким порогом . . . .
Рис. 11-27. График Чугаева для определения перепада восстановления . .
Рис. 11-32. График для определения коэффициента подтопления $\sigma_п$ водослив вакуумного, безвакуумного нормального очертания, безвакуум ного с уширенным гребнем . . . .
Рис. 11-42. График для расчета косых водосливов . . . .
Рис. 12-5. График для определения глубины h_c в сжатом сечении и глубинь h_c'', сопряженной со сжатой, в зависимости от величины E_0 (случай прямоугольного русла нижнего бьефа – плоская задача)
Рис. 12-13. График для определения критических значений $(Z/c_н)_{кр}$ (плоская задача, водосливная стенка без затворов) . . . .
Рис. 12-25. График для расчета глубины водобойного колодца и отметки пониженного крепления за плотиной (плоская задача) . . . . .
Рис. 12-29 График для определения высоты неподтопленной водобойной стенки (плоская задача) . . . .
Рис. 12-30. График для определения высоты подтопленной водобойной стенки (плоская задача) . . . .
Рис. 17-18. График П. Я. Полубариновой-Кочиной для определения величины промежутка высачивания Δ в случае фильтрационного потока на рис. 17-17 . . . .
Рис. 17-21. График Р. Р. Чугаева для определения фильтрационного расхода $q_д$, поступающего через дно галереи (дренажной траншеи) . . .