



П. Г. Киселев

ГИДРАВЛИКА



П. Г. Киселев

ГИДРАВЛИКА ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Для студентов ВУЗов



П. Г. КИСЕЛЕВ

ГИДРАВЛИКА

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования в качестве учебного пособия для студентов гидротехнических специальностей высших учебных заведений



МОСКВА «ЭНЕРГИЯ» 1980

ББК 30.123

К 44

УДК 532.5(075.8)

Киселев П. Г.

К 44 Гидравлика: Основы механики жидкости. Учеб.
пособие для вузов. — М.: Энергия, 1980.—360 с., ил.

В пер.: 75 к.

В учебном пособии рассматриваются основные законы равновесия и движения жидкости, а также законы движения жидкости в некоторых частных случаях, имеющих прикладное значение.

Книга предназначена для студентов гидротехнических специальностей, а также может быть полезна специалистам, работающим в области гидротехнического строительства.

К 20303-268 — 42-80. 1703040000
051(01)-80

ББК 30.123

6С7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Гидравлика является основополагающей дисциплиной при подготовке инженера-гидротехника, которому в практической деятельности при проектировании и строительстве гидротехнических сооружений приходится решать вопросы, связанные с механикой жидкости.

Основой для составления данного учебного пособия послужил многолетний опыт чтения автором курса лекций на факультете гидротехнического строительства Московского инженерно-строительного института имени В. В. Куйбышева. Это определило содержание данной книги.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов гидротехнических специальностей: «Гидротехническое строительство» и «Водный транспорт и морские порты».

Учебное пособие состоит из 16 глав, в которых последовательно освещены все вопросы, включенные в программу курса гидравлики. Подробно освещены основные законы равновесия и движения жидкостей. Рассмотрены законы движения жидкостей в некоторых случаях, имеющих прикладное значение, а также вопросы теории ветровых волн и неустановившегося движения. Дополнительно рассмотрен вопрос об использовании ЭВМ при технических расчетах и экспериментальных исследованиях гидравлических явлений.

В книге основное внимание уделено изложению физических явлений. Справочные данные, как правило, опущены, поскольку при написании настоящей книги автор руководствовался тем, что студенты гидротехнического факультета широко пользуются Справочником по гидравлическим расчетам под ред. П. Г. Киселева, на который и приводятся ссылки в тексте.

При написании книги автор стремился к возможно большей простоте изложения с тем, чтобы книга могла быть полезной более широкому кругу читателей.

Большую помощь оказали сотрудники кафедры гидравлики Киевского автомобильно-дорожного института, возглавляемой доктором техн. наук проф. В. В. Большаковым, а также зав. кафедрой гидравлики Саратовского политехнического института доктор техн. наук, проф. Л. И. Высоцкий, внимательно прочитавшие рукопись и сделавшие полезные замечания и пожелания. Эти замечания с благодарностью приняты автором и учтены при подготовке учебного пособия к изданию.

Глава 16 «Понятие о моделировании гидравлических явлений. Использование ЭВМ при гидравлических расчетах» написана совместно с доктором техн. наук проф. Л. И. Высоцким.

Все замечания и пожелания просьба направлять по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10, изд-во «Энергия».

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Понятие «жидкость» можно определить различным образом в зависимости от назначения такого определения. Так, при необходимости дать наглядное представление о жидкости как физическом теле, отличном от твердого тела и газа, следует отметить свойство текучести жидкости при сохранении ее объема.

При изучении физических свойств различных тел жидкость определяется как характерная фаза состояния вещества и различие между жидкостью, твердым телом и газом устанавливается на основании различия в молекулярных связях и движениях молекул этих тел.

При изучении гидравлики, т. е. законов равновесия и движения жидкости (другими словами, законов механики жидкости), движение молекул не изучается и все тела рассматриваются в виде сплошной среды, способной деформироваться под воздействием внешних сил. Поэтому понятие о жидкости в нашем случае определяется в зависимости от механических свойств тел, от особенностей их сопротивления деформирующим усилиям.

Известно, что силы можно разделить на силы сжатия, растяжения и сдвига (скалывания). Жидкости сопротивляются сжатию, очень мало изменяясь в своем объеме (их часто считают несжимаемыми), разрыву (растяжению) почти вовсе не сопротивляются, но они сопротивляются сдвигу в прямой зависимости от скорости деформации сдвига. Такими же свойствами сопротивления обладают и газы. Основное различие между жидкостью и газом в этом отношении заключается в том, что газы при сжатии в значительной мере уменьшают свой объем, подчиняясь законам термодинамики. Твердые тела оказывают сопротивление всем трем видам усилий (сжатию, растяжению и скалыванию), чем явно отличаются от жидкости и газов.

В связи с этим все физические тела можно разделить на две группы: жидкие (включая и газы) и твердые.

В первой группе при этом следует различать жидкости обычные — капельные (часто именуемые «несжимаемыми» жидкостями) и газообразные (или «сжимаемые»).

Помимо сказанного, относительно понятия термина **жидкость** отметим следующее.

Свойство жидкостей (газов) сопротивляться сдвигу называется вязкостью. Все реальные жидкости являются вязкими.

При рассмотрении многих задач гидравлики полезным бывает пренебрегать тем или иным свойством жидкости, вводя в качестве теоретической модели понятие **идеальная жидкость** (или газ). Наиболее часто под идеальной жидкостью понимают жидкость абсолютно несжимаемую и лишенную вязкости.

Для ознакомления с физическими свойствами жидкости, а также с историей развития гидравлики, связью ее с другими дисциплинами и т. д. следует обратиться к соответствующим главам курса физики и другим специальным источникам.

Глава первая

РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ

1.1. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ. ДЕЙСТВУЮЩИЕ СИЛЫ

Равновесие жидкости будем рассматривать при действии на нее внешних сил.

Внешние силы могут быть поверхностными, т. е. действующими непосредственно на граничную поверхность данной жидкости, и массовыми, т. е. действующими на все частицы этой массы. Если данная масса жидкости однородна (плотность ρ одна и та же во всем объеме), то массовые силы можно называть и **объемными**.

Очевидно, поверхностные силы прямо пропорциональны площади, а массовые (объемные) — массе (объему) жидкости.

1.1.1. Условие для поверхностных сил при равновесии жидкости

Выберем массу жидкости, ограниченную некоторой поверхностью (рис. 1.1). Пусть во всех точках этой граничной поверхности, как, например, в точке M , действует сила R . Разложим ее на две составляющие — нормальную к граничной поверхности силу N и касательную T . Совместное действие сил N и T тождественно действию силы R .

Представляется очевидным, что сила N , направленная по внутренней нормали, как показано на рис. 1.1, будет силой сжатия, и если во всех точках граничной поверхности будут действовать такие силы сжа-

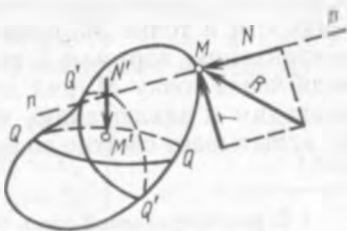


Рис. 1.1.

тия, то жидкость как среда, способная сопротивляться сжатию, может остаться в равновесии в результате возникающих в таком случае сил сопротивления сжатию (реакции жидкости). Если бы силы N были направлены по внешней нормали, а не по внутренней, то они были бы силами растяжения и равновесие не сохранилось бы.

Равным образом равновесие не сохраняется и при воздействии на частицы жидкости касательных сил T (сил сдвига), так как сопротивление сдвигу возникает только при движении¹.

Приведенное рассмотрение особенностей воздействия внешних сил на граничной поверхности позволяет сформулировать условия, при которых данная масса жидкости может находиться в равновесии: *жидкость может сохранять свое равновесное состояние в том случае, если внешние силы, действующие в точках граничной поверхности, направлены только по внутренним нормальям к этой поверхности.*

1.1.2. Взаимодействие между частицами при равновесии жидкости. Гидростатическое давление в точке

Для того чтобы выяснить силовое взаимодействие между частицами жидкости внутри некоторой ее массы, находящейся в равновесном состоянии, пересечем эту массу произвольной поверхностью Q на две части (рис. 1.1). Для каждой из частей поверхность сечения, очевидно, представляет собой часть граничной поверхности. Выберем на этой поверхности какую-либо точку M' , считая ее принадлежащей, например, нижней части тела. Силовое воздействие первой (верхней) части на нижнюю будет представлять собой действие внешних сил на граничной поверхности, а потому на основании сказанного ранее воздействие верхней части на частицу жидкости в точке M' приводится к сжимающей силе по направлению нормали к поверхности в этой точке. Проводя через точку M' ряд других поверхностей $Q_1, Q_2 \dots$, приходим к заключению, что частица жидкости в точке M' испытывает сжатие со всех сторон.

¹ В рассматриваемой здесь теоретической схеме принимаем жидкость как абсолютно неспособную сопротивляться разрыву и «начальному» сдвигу.

Гидростатическое давление в точке. Выделим внутри жидкости очень малую площадку $\Delta\omega$. Действующая на эту площадку сила нормальна к ней. Предел отношения $\Delta P/\Delta\omega$ представляет собой напряжение сжатия в точке M' :

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta P}{\Delta\omega} \right). \quad (1.1)$$

Это напряжение сжатия в гидравлике называется гидростатическим давлением в данной точке.

Итак, *любая частица жидкости внутри данного объема испытывает только сжимающие напряжения.*

Основная теорема гидростатики. Гидростатическое давление в данной точке не зависит от направления (т. е. остается одинаковым по всем направлениям).

Докажем, что

$$p_x = p_y = p_z = p_n,$$

где p_x , p_y , p_z и p_n представляют собой гидростатическое давление соответственно в направлении координатных осей Ox , Oy , Oz и в некотором произвольном направлении $N-N$.

Выделим внутри массы жидкости, находящейся в равновесии, малый объем в форме тетраэдра с ребрами dx , dy и dz , соответственно параллельными координатными осями, и с массой $\rho \frac{1}{6} dx dy dz$ (здесь ρ — плотность).

Допустим, что жидкость внутри выделенного объема отвердела, что не изменяет условий равновесия. Тогда, поскольку масса dm представляется как твердое тело и остается в равновесии, можно воспользоваться известными уравнениями статики твердого тела, а именно уравнениями проекций сил и уравнениями моментов:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x &= 0; & \Sigma M_x &= 0; \\ \Sigma F_y &= 0; & \Sigma M_y &= 0; \\ \Sigma F_z &= 0; & \Sigma M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Стягивая элементарный тетраэдр в точку, действующие на него силы сводим к системе сил, проходящих через одну и ту же точку, и потому уравнения моментов

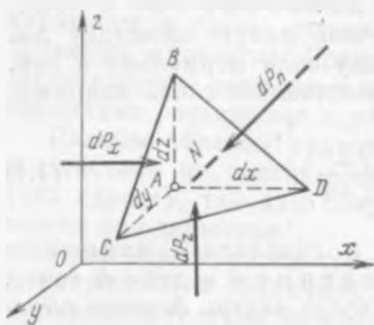


Рис. 1.2.

такой системы удовлетворяются тождественно. Таким образом, остаются только три уравнения проекций сил. Составим первое из них: $\Sigma F_x = 0$ (остальные два напишем по аналогии).

Действующими силами будут поверхностные и объемные.

Поверхностные силы — это силы давлений жидкости, окружающей элементарный тетра-

эдр, на его грани. Таких сил будет четыре по числу граней (рис. 1.2).

На грань ABC действует сила

$$dP_x = p_x \frac{1}{2} dy dz, \quad (1.3)$$

где p_x — среднее гидростатическое давление для треугольника ABC с площадью $\frac{1}{2} dy dz$. Сила dP_x парал-

лельна оси Ox , направлена в положительную сторону оси и, следовательно, войдет в уравнение со знаком плюс.

Силы dP_y и dP_z , т. е. силы давления на грани ABD и ACD , параллельны осям Oy и Oz , и их проекции на ось Ox равны нулю. Четвертая сила dP_n — сила давления на грань BCD , равна $dP_n = p_n d\omega$ (где p_n — среднее гидростатическое давление для грани BCD , а $d\omega$ — площадь этой грани). Проекция этой силы на ось Ox :

$$dP_n \cos(N, Ox) = p_n d\omega \cos(N, Ox)$$

и войдет в уравнение со знаком минус, так как направлена в отрицательную сторону оси Ox .

Произведение $d\omega \cos(N, Ox)$ представляет собой проекцию площади треугольника BCD на плоскость yOz и равно:

$$d\omega \cos(N, Ox) = \frac{1}{2} dy dz,$$

потому что угол между нормалью N и осью Ox равен линейному углу, измеряющему двугранный угол, образованный плоскостями граней ABC и BCD .

Итак, проекция силы dP_n на ось Ox численно равна:

$$dP_n \cos(\widehat{N, Ox}) = p_n d\omega \cos(\widehat{N, Ox}) = p_n \frac{1}{2} dy dz. \quad (1.4)$$

Объемные (массовые) силы, действующие на тетраэдр, приводятся к равнодействующей dR , образующей с координатными осями углы α , β и γ и равной:

$$dR = dmj,$$

где dm — масса тетраэдра, равная $\rho \frac{1}{6} dx dy dz$ (ρ — плотность жидкости, а $\frac{1}{6} dx dy dz$ — объем тетраэдра); j — ускорение объемной силы (в частном случае ускорение свободного падения).

Обозначим проекции ускорения j по координатным осям X , Y и Z , т. е. примем что

$$j \cos \alpha = X;$$

$$j \cos \beta = Y;$$

$$j \cos \gamma = Z.$$

Тогда проекции объемной силы dR

$$\left. \begin{aligned} dR_x &= dmj \cos \alpha = \rho \frac{1}{6} dx dy dz X; \\ dR_y &= dmj \cos \beta = \rho \frac{1}{6} dx dy dz Y; \\ dR_z &= dmj \cos \gamma = \rho \frac{1}{6} dx dy dz Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Из них в уравнение проекций сил на ось Ox войдет только dR_x .

Таким образом, уравнение $\Sigma F_x = 0$ выразится так:

$$\Sigma F_x = p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n \frac{1}{2} dy dz + \rho \frac{1}{6} dx dy dz X = 0 \quad (1.6)$$

или после сокращения на $\frac{1}{2} dy dz$

$$p_x - p_n + \rho \frac{1}{3} dx X = 0.$$

Пренебрегая $\rho \frac{1}{3} dx X$ как бесконечно малым относительно p_x и p_n , получаем $p_x - p_n = 0$ или

$$p_x = p_n.$$

Аналогично доказывается, что

$$p_y = p_n;$$

$$p_z = p_n.$$

Следовательно,

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (1.7)$$

Это равенство показывает, что гидростатическое давление в точке по любому направлению оказывается одинаковым, т. е. не зависит от направления, что и доказывает теорему.

Следствие. Так как давление p одинаково по всем направлениям в данной точке, а в различных точках данного объема жидкости в общем случае различно, то гидростатическое давление в точке будет функцией только координат

$$p = f(x, y, z). \quad (1.8)$$

В самом общем случае p является и функцией времени

$$p = f(x, y, z, t). \quad (1.8a)$$

Это возможно тогда, когда во времени изменяются внешние условия, например, при изменении атмосферного давления. Однако подобные случаи в дальнейшем рассматриваться не будут.

1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ [УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА]

Рассмотрим равновесие выделенного элементарного параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ (рис. 1.3). Полагая его твердым телом, составляем три уравнения проекций дей-

ствующих сил: $\Sigma F_x=0$; $\Sigma F_y=0$ и $\Sigma F_z=0$. Уравнения моментов исключаются.

Составим уравнение проекции сил на ось Ox , т. е. уравнение $\Sigma F_x=0$.

Проекция поверхностных сил. По числу граней параллелепипеда шесть проекций. В уравнение $\Sigma F_x=0$ войдут только две силы dP и dP' (рис. 1.3).

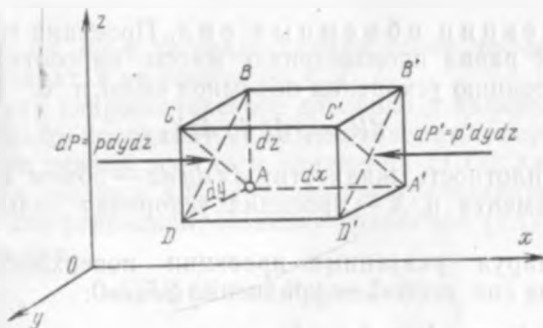


Рис. 1.3.

Сила dP давления на грань $ABCD$

$$dP = p \, dy \, dz,$$

где p — среднее гидростатическое давление на грани $ABCD$.

Сила dP' давления на грань $A'B'C'D'$

$$dP' = p' \, dy \, dz,$$

где p' — среднее гидростатическое давление на грани $A'B'C'D'$ ($p' \neq p$).

Определим p' . Так как $p = f(x, y, z)$, то при переходе от одной грани к другой давление должно изменяться в зависимости только от одной координаты. Действительно, при переходе от любой точки грани $ABCD$ к сходственной ей точке грани $A'B'C'D'$ (например, от точки A к точке A' , от B к B' и т. д.) для каждой такой пары сходственных точек изменится только одна координата x , а потому изменение среднего гидростатического давления p зависит только от изменения одного аргумента x .

Следовательно,

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx;$$

$$dP' = p' dy dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Сила dP' войдет в уравнение проекции со знаком минус.

Проекция объемных сил. Проекция объемной силы dR равна произведению массы на соответствующую проекцию ускорения объемной силы, т. е.

$$dR_x = \rho dx dy dz X,$$

где ρ — плотность жидкости; $dx dy dz$ — объем выделенного элемента и X — проекция ускорения силы dR на ось Ox .

Суммируя указанные проекции поверхностных и объемных сил, получаем уравнение $\Sigma F_x = 0$:

$$\Sigma F_x = p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz X = 0. \quad (1.9)$$

После приведения подобных членов и деления на произведение $dx dy dz$ (объем параллелепипеда dW) получим уравнение проекций сил, отнесенных к единице объема:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0. \quad (1.10)$$

Аналогично получим и два других уравнения $\Sigma F_y = 0$ и $\Sigma F_z = 0$. Итак, при равновесии жидкости имеем три дифференциальных уравнения

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Эта система называется системой дифференциальных уравнений равновесия жидкости Эйлера и относится как к несжимаемой, так и к сжимаемой жидкости.

Основное дифференциальное уравнение гидростатики. Умножая первое уравнение Эйлера на dx и последующие на dy и dz и складывая их, получаем:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) + \rho(X dx + Y dy + Z dz) = 0. \quad (1.12)$$

Здесь dx , dy и dz представляют собой дифференциалы координат, а не ускорений X , Y , Z .

Так как гидростатическое давление p является функцией только координат, т. е. независимых переменных x , y , z , то первый трехчлен уравнения (1.12) как сумма всех трех частных дифференциалов представляет собой полный дифференциал. Поэтому уравнение (1.12) можно записать так:

$$dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz). \quad (1.13)$$

Это уравнение является основным дифференциальным уравнением равновесия жидкости.

Так как dp есть полный дифференциал, то для однородной жидкости (при $\rho = \text{const}$) и трехчлен $(X dx + Y dy + Z dz)$ — тоже полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$. Следовательно,

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z). \quad (1.14)$$

Но в таком случае, как известно,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Рассматривая X , Y и Z не как проекции ускорения, а как проекции объемной силы, отнесенные к единице массы, видим, что поскольку частные производные функции $U(x, y, z)$ по координатам x , y , z определяют собой проекции объемной силы, постольку эта функция является так называемой силовой функцией. Силовая функция равна потенциалу сил¹, взятому с обратным знаком.

¹ Как известно, $U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z)$, см. курс теоретической механики.

Таким образом, жидкость может находиться в покое только под действием таких объемных сил, которые имеют потенциал.

Уравнение (1.13) содержит две неизвестные величины p и ρ . Связь плотности ρ с давлением p и температурой T может быть определено характеристическим уравнением.

Так, для газов

$$p = \frac{\rho}{gRT}, \quad (1.15)$$

где p — гидростатическое давление; g — ускорение свободного падения; R и T — соответственно газовая постоянная и абсолютная температура.

Для несжимаемой жидкости характеристическое уравнение имеет вид:

$$\rho = \text{const.}$$

В этом случае плотность ρ можно считать известной, и тогда дополнительного уравнения не требуется.

Поверхность уровня. Поверхность, точки которой имеют одинаковое значение данной функции, называется поверхностью уровня. Физическое значение функции может быть различным: поверхности равного давления, равной температуры (изотермическая поверхность), равной плотности и т. д. являются поверхностями уровня. В гидравлике наиболее интересной поверхностью уровня является поверхность равного давления. В дальнейшем, говоря о поверхности уровня, будем иметь в виду поверхность равного давления.



Рис. 1.4.

Составим уравнение поверхности уровня (равного давления). С этой целью обратимся к основному дифференциальному уравнению гидростатики (1.13). Для поверхности уровня $dp=0$. Тогда, поскольку плотность не равна нулю, получим:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad (1.16)$$

Это есть дифференциальное уравнение поверхности уровня (здесь X , Y и Z являются функциями координат).

Первое свойство поверхности уровня заключается в том, что две различные поверхности уровня не пересекаются между собой. Докажем это от обратного.

Допустим, что они пересекаются. В таком случае во всех точках линии пересечения этих поверхностей давление одновременно должно быть равно p_1 и p_2 , что невозможно, так как по основной теореме гидростатики гидростатическое давление p одинаково по всем направлениям. Следовательно, две различные поверхности уровня действительно не пересекаются.

Второе свойство — внешние объемные силы направлены по нормали к поверхности уровня (рис. 1.4).

Известно, что уравнение работы dA силы R на пути ds имеет вид:

$$dA = R_x dx + R_y dy + R_z dz,$$

где R_x , R_y и R_z — проекции силы по координатным осям Ox , Oy и Oz . Но $R_x = dmX$; $R_y = dmY$ и $R_z = dmZ$. Здесь dm — масса, а X , Y и Z — проекции ускорения силы R по тем же координатным осям.

Таким образом,

$$\begin{aligned} dA &= dmX dx + dmY dy + dmZ dz = \\ &= dm(X dx + Y dy + Z dz). \end{aligned}$$

Но для поверхности уровня

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Поэтому работа силы R (в данном случае внешней объемной силы) равна нулю.

Следовательно, для поверхности уровня

$$dA = R \cos \beta ds = 0,$$

где $\beta = \angle(R, s)$. Это возможно лишь при $\cos \beta = 0$, т. е. внешняя объемная сила нормальна к поверхности уровня.

1.3. РАВНОВЕСИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ

1.3.1. Поверхность уровня и основное уравнение равновесия

В данном случае объемной силой является сила тяжести, и полное ускорение объемных сил равно ускорению свободного падения $g=9,81 \text{ м/с}^2$ (будем считать $g=\text{const}$).

Направим координатную ось Oz вертикально вверх. Тогда получим значения проекций ускорения силы тяжести равными:

$$X=0; Y=0 \text{ и } Z=-g$$

(знак минус, поскольку ускорение силы тяжести направлено в отрицательную сторону оси Oz).

Поверхность уровня в общей форме

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Подставляя в него указанные выше значения X , Y и Z , получаем:

$$-gdz=0 \quad (1.17)$$

и, следовательно,

$$z=C=\text{const}, \quad (1.18)$$

где C — произвольная постоянная. Уравнение (1.18) является уравнением семейства горизонтальных плоскостей.

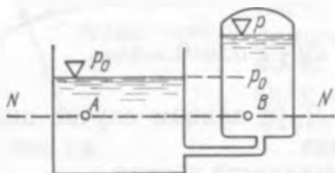


Рис. 1.5.

Таким образом, при равновесии жидкости в поле земного тяготения поверхности уровня представляют собой горизонтальные плоскости.

Так, давление в точке A равно давлению в точке B , так как обе точки лежат на одной и той же поверхности уровня (рис. 1.5).

Основное уравнение равновесия жидкости в поле земного тяготения. Из основного дифференциального уравнения гидростатики (1.13)

$$dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz)$$

после подстановки $X=0$, $Y=0$ и $Z=-g$ получим:

$$dp = -\rho g dz \quad (1.19)$$

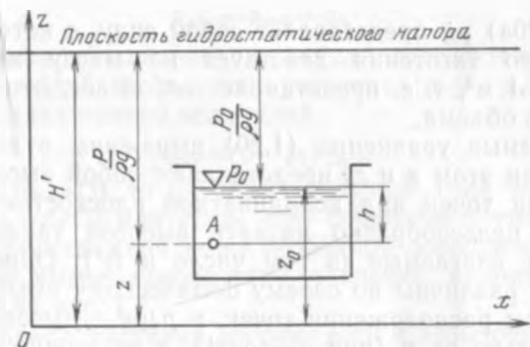


Рис. 1.6.

или

$$\frac{dp}{\rho g} = dz,$$

после интегрирования для несжимаемой жидкости

$$\frac{p}{\rho g} + z = C = \text{const.}$$

Постоянную интегрирования находим из граничных условий. Для свободной поверхности жидкости (рис. 1.6) имеем:

$$p = p_0 \text{ и } z = z_0$$

(p_0 — давление на свободной поверхности жидкости, обычно $p_0 = p_{\text{ат}}$). Следовательно,

$$C = \frac{p_0}{\rho g} + z_0.$$

Откуда

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = H' = \text{const.} \quad (1.20)$$

Это уравнение называется основным уравнением равновесия жидкости в поле тяготения. Это уравнение можно записать и так:

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \quad (1.20a)$$

За единицу давления в СИ принят паскаль: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2 = 10^{-5} \text{ бар} \approx 9,8 \cdot 10^{-6} \text{ ат} \approx 7,3 \times 10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$

В (1.20a) ρg представляет собой силу, с которой поле земного тяготения действует на массу жидкости в объеме 1 м^3 , т. е. представляет собой вес, отнесенный к единице объема.

Слагаемые уравнения (1.20) выражены в единицах длины, при этом z и z_0 представляют собой высоту расположения точек над координатной плоскостью (yOx). Поэтому целесообразно назвать высотой также и все остальные слагаемые (в том числе и H'). Однако эти величины различны по своему физическому смыслу: z и z_0 — высоты расположения точек, а $p/\rho g$ — высота, зависящая только от p (при $\rho = \text{const}$), и ее можно назвать высотой гидростатического давления. Что касается величины H' , то она как сумма двух высот ($p/\rho g + z$) будет также высотой, но постоянной (одинаковой для всех частиц жидкости), и поэтому H' явится координатой некоторой горизонтальной плоскости, параллельной координатной плоскости (xOy). Она расположена выше плоскости свободной поверхности жидкости на $\Delta h = (H' - z_0) = \frac{p_0}{\rho g}$ (рис. 1.6).

Из уравнения (1.20) получим:

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = z_0 - z = h. \quad (1.21)$$

Величина h , очевидно, представляет собой глубину погружения данной точки под уровень свободной поверхности жидкости (рис. 1.6). Очевидно также, что $p - p_0$ представляет собой то давление, которое имело бы место при отсутствии внешнего давления ($p_0 = 0$). Назовем его, как обычно принято, «избыточным давлением» и обозначим $p_{\text{изб}} = p - p_0$. Понятно, что избыточное давление обусловлено влиянием весомости самой жидкости, как находящейся под силовым воздействием поля тяготения.

С учетом (1.21) можем написать:

$$\frac{p_{изб}}{\rho g} = z_0 - z = h \quad (1.22)$$

или

$$p_{изб} = \rho g h.$$

Назовем действительное давление p «абсолютным». Тогда будем иметь

$$p_{абс} = p_{изб} + p_0.$$

Абсолютное давление $p_{абс}$ всегда положительная величина $p_{абс} \geq 0$, но $p_{изб}$ как разность $(p_{абс} - p_0)$ может быть и отрицательной величиной:

$$p_{изб} = (p - p_0) \geq 0.$$

Если $p_{изб} < 0$, то из (1.22) получим (при $p_{изб}/\rho g < 0$) $h = z_0 - z < 0$ или $z > z_0$. Это обозначает, что данная точка A расположена выше свободной поверхности жидкости, где имеем атмосферное давление, например, как показано на рис. 1.7.

Закон распределения абсолютного и избыточного давления выражается следующими формулами.

Для абсолютного давления (1.20)

$$p_{абс} = \rho g (H^* - z) = f(z),$$

а для избыточного давления из (1.22)

$$p_{изб} = \rho g (z_0 - z).$$

В обоих случаях имеем линейный закон, при этом как абсолютное, так и избыточное давление возрастают с уменьшением координаты z , т. е. с увеличением глубины расположения данной точки.

Графическое изображение абсолютного и избыточного давления представлено на рис. 1.8 в координатах z и $p/\rho g$.

Треугольник $OABO$ изображает закон изменения абсолютного давления, а два треугольника с общей вершиной в точке G изображают закон изменения избыточного давления. При этом нижний треугольник BGE изображает $p_{изб}/\rho g > 0$, а верхний $p_{изб}/\rho g < 0$.

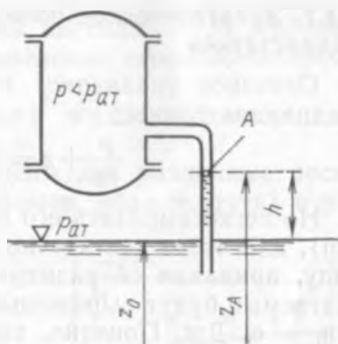


Рис. 1.7.

The diagram illustrates a hydraulic structure with a sloped wall and a vertical wall. The sloped wall is divided into two regions: a top region with negative pressure (indicated by a minus sign) and a bottom region with positive pressure (indicated by a plus sign). The vertical wall has a water level indicated by a dashed line. A manometer is connected to the vertical wall, showing a pressure difference. The diagram includes various labels: A, B, D, E, G, M, N, O, p, p₀, p/p₀, h, h', m, m', n, n', z, z', x, y, and a coordinate system.

В соответствии с этим можно сказать, что максимальное значение вакуума устанавливается для точек на высоте H' , там, где абсолютное давление равно нулю.

Основное уравнение гидростатики (1.20) записано в единицах длины:

$$\frac{p}{\rho g} + z = H' = \text{const.}$$

$\frac{P}{\rho g}$, Дж, — потенциальная энергия, определяемая гидростатическим давлением. Поэтому это слагаемое можно рассматривать как энергию давления¹;

22

2, Дж, — энергия положения (данная масса жидкости расположена на высоте z);

$H' = \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)$, Дж, — полный запас потенциальной энергии (отнесенной к той массе, вес которой равен 1 Н, т. е. к массе $m = \frac{1}{g} = \frac{1}{9.81}$ кг = 0,103 кг).

1.3.3. Закон Паскаля. Поверхность раздела

Из основного уравнения (1.20а)

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z)$$

можно видеть, что в случае изменения внешнего давления p_0 на $p'_0 = p_0 + \Delta p_0$ давление во всех точках данной жидкости, находящейся в равновесии, изменится на то же значение Δp_0 . Таким образом, жидкость обладает свойством передавать давление. В утверждении этого свойства и заключается закон Паскаля, который можно сформулировать так: *давление, которое возникает на граничной поверхности жидкости, находящейся в равновесии, передается всем частицам этой жидкости по всем направлениям без изменения передаваемого давления.*

Поверхность раздела несмешивающихся жидкостей (рис. 1.9).

Если в резервуаре помещены две различные несмешивающиеся жидкости (например, вода и ртуть) с различными плотностями ρ_1 и ρ_2 , то они разместятся слоями одна над другой.

Определим форму поверхности раздела $N-N$ (рис. 1.9). Переходя от точки M к точке M' вдоль этой поверхности, можем записать для верхней жидкости $dp = -\rho_1 g dz$, а для нижней $dp = -\rho_2 g dz$, и, следовательно, вычитая одно равенство из другого, будем иметь:

$$g(\rho_1 - \rho_2) dz = 0.$$

Здесь, если $\rho_1 \neq \rho_2$, то неизбежно $dz = 0$ и $z = \text{const}$,

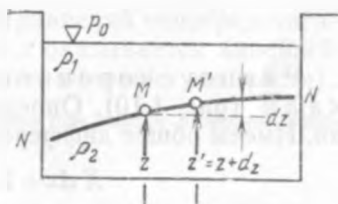


Рис. 1.9.

т. е. поверхность раздела будет горизонтальной плоскостью.

Расположение жидкостей по высоте определяется условием устойчивости материальной системы. Как известно, в устойчивом состоянии центр тяжести системы находится наиболее низко. Поэтому жидкость с большей плотностью расположится ниже жидкости с меньшей плотностью.

1.3.4. Относительное равновесие

Относительным равновесием жидкости называется такое ее движение, при котором не происходит смещения одних частиц относительно соседних и вся масса жидкости движется как твердое тело.

Рассмотрим некоторые частные случаи такого равновесия.

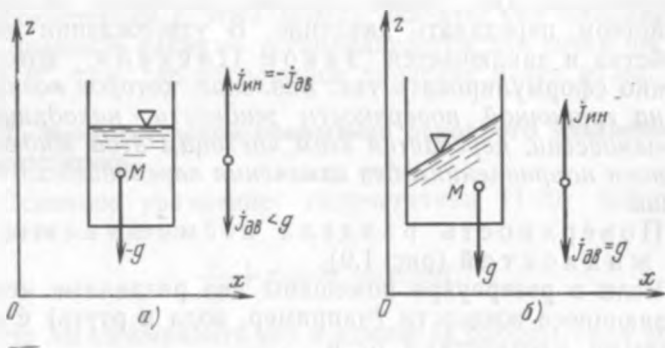


Рис. 1.10.

Равноускоренное движение по вертикали (рис. 1.10). Определим форму поверхности уровня. Имеем общее дифференциальное уравнение

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

При равноускоренном движении по вертикали внешними объемными силами будут силы тяжести и силы инерции (рис. 1.10, а). Их проекции или проекции их ускорений $X=0$; $Y=0$ и $Z=(-g \pm j)$ [при спуске $(+j)$ и при подъеме $(-j)$]. Таким образом, в обоих случаях уравнение поверхности уровня составляет:

$$(-g \pm j) dz = 0. \quad (1.23)$$

Отсюда следует, что если $g \neq j$, то $dz=0$, а потому

$$z=C=\text{const},$$

а это есть уравнение семейства горизонтальных плоскостей. Таким образом, как при спуске, так и при подъеме поверхности уровня (равных давлений) представляют собой горизонтальные плоскости, а гидростатическое давление изменяется только по высоте.

Интересно отметить, что если $g=j$, то в (1.23) $(-g+j)=0$, а потому dz может и не равняться нулю, $dz \neq 0$ и поверхность раздела может иметь любую форму (рис. 1.10,б):

$$z \neq \text{const}.$$

Закон распределения давления получим из основного дифференциального уравнения

$$dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz),$$

которое в данном случае [с учетом $X=0$, $Y=0$ и $Z = (-g \pm j)$] имеет вид:

$$dp = \rho(-g \pm j) dz. \quad (1.24)$$

При равноускоренном спуске $(-g+j)$ (1.24) можно записать следующим образом:

$$dp = -\rho g \left(1 - \frac{j}{g}\right) dz, \quad (1.24a)$$

а при равноускоренном подъеме $(-g-j)$

$$dp = -\rho g \left(1 + \frac{j}{g}\right) dz. \quad (1.24б)$$

Из этих дифференциальных уравнений непосредственно следует, что связь между p и z оказывается линейной (как и при обычном неподвижном состоянии жидкости).

Напишем дифференциальное уравнение при спуске в форме (обозначим $k = 1 \pm \frac{j}{g}$)

$$dp = -\rho g k dz.$$

ρg представляет собой вес жидкости, отнесенный к единице объема (для воды $9,8 \text{ кН/м}^3 \approx 10 \text{ кН/м}^3$); произведение $\rho g k$ (k — безразмерная величина) может рассматриваться как условный вес, отнесенный к единице объема той же жидкости. Обозначим его γ' , тогда при спуске и при $j < g$, $k < 1$ и $\gamma' < \rho g$ жидкость оказывается как бы более легкой, а при $j = g$ получим $k = 1 - \frac{j}{g} = 0$ и, следовательно,

а r — радиус вращения. Учитывая, что $u = \omega r$, имеем:

$$R = I = \frac{u^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r.$$

Итак, дифференциальное уравнение поверхности уровня в данном случае имеет вид:

$$\omega^2 r dr - g dz = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C'$$

или

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C. \quad (1.25)$$

Это есть уравнение параболы в плоскости rOz . Очевидно, что для всей массы жидкости поверхность уровня будет параболоидом вращения. Постоянная интегрирования C представляет собой координату вершины параболы. Так, при $r=0$ из (1.25) получаем:

$$C = z_0.$$

В соответствии с этим уравнение свободной поверхности имеет вид:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = h, \quad (1.26)$$

где h — глубина (рис. 1.11) на расстоянии r от оси вращения.

Таким образом, глубина увеличивается с увеличением расстояния от оси.

Закон распределения давления находим из уравнения

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz).$$

Учитывая сказанное выше относительно трехчлена правой части уравнения, можем написать:

$$dp = \rho (\omega^2 r dr - g dz) = + \rho g \left(\frac{\omega^2 r dr}{g} - dz \right)$$

или

$$\frac{dp}{\rho g} = + \omega^2 r dr - dz.$$

Интегрируя и изменяя порядок слагаемых, получаем:

$$\frac{p}{\rho g} = -z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C.$$

Примем $r=0$, $z=h_0$ и $p=p_0$, тогда

$$C = \frac{p_0}{\rho g} + h_0.$$

В результате интегрирования получим:

$$\frac{p - p_0}{\rho g} + z = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (1.27)$$

или

$$\frac{p_{\text{воб}}}{\rho g} + z = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2. \quad (1.27a)$$

Из (1.27a) легко усматривается, что для любого заданного $r = \text{const}$ (т. е. для любой вертикали на расстоянии r от оси вращения) закон распределения давления по высоте является линейным, т. е. таким же, как и без вращения (см. рис. 1.11):

$$h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = \text{const}$$

и

$$\frac{p_{\text{воб}}}{\rho g} + z = C.$$

1.4. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ СТЕНКИ

1.4.1. Сила давления жидкости на стенку

Пусть требуется определить силу P давления жидкости на площадь ω , лежащую в плоскости стенки, расположенной под углом α к горизонту (рис. 1.12,а).

Сила dP давления жидкости на элементарную площадку

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega.$$

Равнодействующая системы сил dP , параллельных между собой, равна их алгебраической сумме, т. е.

$$P = \int p d\omega = \int (p_0 + \rho gh) d\omega.$$

Расположим координатные оси в плоскости наклонной стенки так: ось Ox совместим с линией пересечения плоскости свободной поверхности с плоскостью стенки (перпендикулярно чертежу), а ось Oz' направим вдоль стенки вниз. Дополнительно для большей наглядности повернем плоскость стенки вместе с выбранной на ней площадкой вокруг оси Oz' до совмещения с плоскостью чертежа (т. е. на 90°). Тогда координатная ось Ox займет положение Ox' , ось Oz' останется на месте, а площадка ω изобразится на чертеже в натуральную величину.

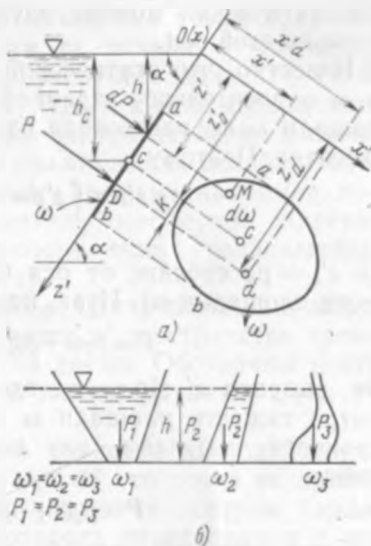


Рис. 1.12.

Обозначим координату точки M через z' , тогда $h = z' \sin \alpha$

$$P = \int (p_0 + \rho gh) d\omega = \int p_0 d\omega + \int \rho g z' \sin \alpha d\omega.$$

Первый интеграл

$$\int p_0 d\omega = p_0 \int d\omega = p_0 \omega,$$

второй

$$\int \rho g z' \sin \alpha d\omega = \rho g \sin \alpha \int z' d\omega.$$

Здесь $\int z' d\omega = S_{Ox}$ равен статическому моменту площади ω относительно координатной оси Ox' (или Ox), так как подынтегральное выражение представляет со-

бой статический момент элементарной площадки относительно этой оси.

Известно, что статический момент некоторой площади ω относительно заданной оси равен произведению площади ω на расстояние от ее центра тяжести до оси моментов. Поэтому

$$\rho g \sin \alpha \int z' d\omega = \rho g \sin \alpha z'_c \omega,$$

где z'_c — расстояние от оси Ox' до точки c (центра тяжести площадки ω). Итак, искомая сила

$$P = \rho_0 \omega + \rho g \sin \alpha z'_c \omega,$$

или, заменяя $z'_c \sin \alpha = h_c$, где h_c — глубина погружения центра тяжести площади ω под уровень свободной поверхности, получаем силу полного (абсолютного) давления

$$P = \rho_0 \omega + \rho g h_c \omega. \quad (1.28)$$

Сила давления самой жидкости (т. е. не считая внешнего давления)

$$P_{изб} = \rho g h_c \omega \quad (1.28a)$$

или (так как $\rho g h_c = p_c$)

$$P = p_c \omega, \quad (1.28б)$$

где p_c — гидростатическое давление в центре тяжести площади.

Рассматривая $h_c \omega$ как объем W , формулу (1.28a) можно прочесть следующим образом: сила давления жидкости на наклонную площадку равна весу цилиндрического столба этой жидкости с основанием, равным заданной площади ω , и высотой, равной глубине h_c погружения центра тяжести площади ω под уровень свободной поверхности.

Давление жидкости на горизонтальное дно представляет собой частный случай, избыточное давление на дно будет равно (рис. 1.12,б):

$$P_{изб} = \rho g h \omega, \quad (1.29)$$

где h — глубина воды в резервуаре.

Из формулы (1.28a) следует, что сила P не зависит ни от формы, ни от размеров самого резервуара (рис. 1.12,б).

1.4.2. Центр давления

Центром давления называется точка приложения силы давления жидкости на заданную площадку. Это относится как к силе абсолютного давления (т. е. включая и внешнее давление), так и к силе избыточного давления. Способ определения центра давления в обоих случаях один и тот же. Для практических целей интерес представляет сила избыточного давления (например, при расчете устойчивости сооружения атмосферное давление с противоположных сторон сооружения уравнивается и исключается из расчета).

Рассмотрим задачу для $P_{изб}$. Центр давления, как и всякая иная точка, определяется в пространстве тремя координатами, а на плоскости двумя. Обозначим центр давления точкой d и найдем его координаты z'_d и x'_d (см. рис. 1.12, а).

Так как сила P давления является равнодействующей системы параллельных сил dP , то точка ее приложения (т. е. центр давления) является центром параллельных сил, координаты которого определяются с помощью теоремы о моментах, согласно которой момент равнодействующей силы равен алгебраической сумме моментов сил составляющих.

Найдем координату z'_d . Для этого составим уравнение моментов относительно оси Ox' (или, что то же, Ox). Момент m элементарной силы dP равен:

$$m(dP)_{Ox} = dP z' \sin \alpha d\omega z',$$

поэтому

$$\Sigma m(dP)_{Ox} = \int \rho g \sin \alpha (z')^2 d\omega.$$

Момент равнодействующей, т. е. момент силы P ,

$$m(Pz'_d) = \rho g z'_c \sin \alpha \omega z'_d.$$

Итак, получим уравнение

$$\rho g z'_c \sin \alpha \omega z'_d = \int \rho g \sin \alpha (z')^2 d\omega,$$

откуда искомая координата z'_d после сокращения на $\rho g \sin \alpha$:

$$z'_d = \frac{\int (z')^2 d\omega}{z'_c \omega}.$$

Здесь $\int (z')^2 d\omega$ представляет собой момент инерции площади ω относительно оси Ox , поэтому

$$z'_d = \frac{I_{Ox}}{z'_c \omega}.$$

Но известно, что момент инерции некоторой площади ω относительно заданной оси равен моменту инерции этой площади относительно оси, проходящей через центр тяжести площади и параллельной данной оси, плюс произведение площади ω на квадрат расстояния между осями. В данном случае

$$I_{Ox} = I_0 + (z'_c)^2 \omega.$$

Таким образом,

$$z'_d = \frac{I_0}{z'_c \omega} + \frac{(z'_c)^2 \omega}{z'_c \omega} = k + z'_c, \quad (1-30)$$

где $k = I_0 / (z'_c \omega)$ представляет собой, как видно из рис. 1.12, расстояние между точкой d и горизонтальной осью, проходящей через центр тяжести площади ω (т. е. проходящей через точку c), которое называют иногда эксцентриситетом.

Величина $k = I_0 / (z'_c \omega)$ всегда положительна, и потому центр давления лежит всегда ниже (более глубоко), чем центр тяжести данной площади ω . Для данной площади величины I_0 и ω постоянны, поэтому расстояние k уменьшается с увеличением z'_c , т. е. центр давления (точка d) приближается к центру тяжести (к точке c) с увеличением глубины расположения площадки ω : $z'_d \rightarrow z'_c$ при $z'_c \rightarrow \infty$.

В пределе $k=0$ в двух случаях: а) когда $z'_c = \infty$; б) когда площадка расположена горизонтально.

Действительно, так как

$$z_c = \frac{h_c}{\sin \alpha}, \text{ то } k = \frac{I_0}{z'_c \omega} = \frac{I_0 \sin \alpha}{h_c \omega},$$

а поэтому, если площадь ω горизонтальна, то $\alpha=0$ и $\sin \alpha=0$ и, следовательно, $k=0$.

Определим координату x'_d . Аналогично предыдущему запишем:

$$m(P)_{Ox} = \Sigma m(dP)_{Ox};$$

момент равнодействующей силы

$$m(P)_{0z'} = \rho g z'_c \sin \alpha \omega x'_d;$$

момент элементарной силы

$$m(dP)_{0z'} = \rho g z' \sin \alpha d\omega x',$$

а их сумма

$$\Sigma m(dP)_{0z'} = \int \rho g z' x' \sin \alpha d\omega.$$

Отсюда

$$x'_d = \frac{\int z' x' d\omega}{z'_c \omega} \quad (1.31)$$

Заметим, что на практике обычно силу давления жидкости и центр давления приходится искать только для правильных фигур, имеющих по крайней мере одну ось симметрии, и, кроме того, расположенную так, что ось симметрии параллельна координатной оси $0z'$. В таком случае центр давления (т. е. точка d) лежит на этой оси симметрии, и искать координату x'_d не нужно. Достаточно определить только одну координату z'_d .

1.4.3. Графический способ определения силы давления на плоские стенки

На рис. 1.13,а показана стенка AB , наклоненная к горизонту на угол α , и изображен треугольник распределения давлений $p_{изб}/\rho g (\triangle ABC)$, у которого сторона $BC = H$. Выберем площадку ω и определим для нее силу давления P .

По формуле (1.28а) имеем:

$$P = \rho g h_c \omega = \rho g W,$$

где W — объем цилиндра с основанием ω и высотой h_c .

Обратим внимание на то, что заштрихованный на рис. 1.13,а объем $(nn'm'mn)$ изображает скошенный сверху цилиндр с тем же основанием ω и со средней высотой h_c [т. е. равновеликий по объему W , входящему в формулу (1.28а)].

Таким образом, силу давления жидкости на площадку ω можно определить как силу веса жидкости в объеме цилиндра, расположенного нормально к стенке и ограниченного с одной стороны площад-

кой ω , а с другой сечением цилиндра плоскостью, изображенной на рис. 1.13,б линией AC . Эта плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа, рисует закон распределения давления по поверхности всей стенки.

Для всей стенки AB при постоянной ее ширине B (перпендикулярно к плоскости чертежа) сила давления P будет равна силе веса жидкости в объеме трехгранной призмы с основанием, равным площади треугольника ABC (площади эпюры давления), и высотой, равной B (ширине самой стенки).

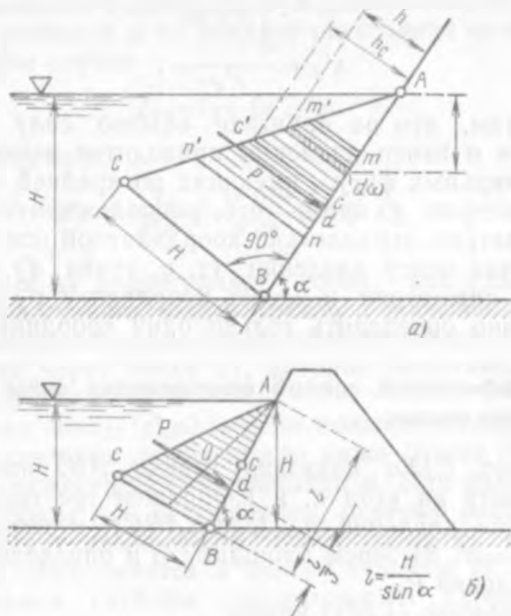


Рис. 1.13.

Тогда для искомой силы давления получим:

$$P = \rho g B \frac{H^2}{2 \sin \alpha} = \rho g W, \quad (1.32)$$

где $\frac{H^2}{2 \sin \alpha}$ представляет собой площадь $\triangle ABC$, а W —

объем призмы (иногда именуемой телом давления).

Центр давления (точку d) находим как проекцию точки O (центр тяжести треугольника ABC) на пло-

скость стенки AB (рис. 1.13,б) (как точки приложения силы P при сплошной нагрузке, распределенной по закону треугольника).

Этот способ широко распространен при решении различных задач в области гидросооружений.

1.5. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Расположим координатные оси Ox и Oy в плоскости свободной поверхности и направим ось Oz вертикально вниз (рис. 1.14). Допустим, что внутри неподвижной жидкости расположена твердая бесконечно тонкая поверхность произвольной формы. Очевидно, что у нее имеются две стороны: «верхняя» и «нижняя». Силы давления на них R и R' равны между собой, но направлены в прямо противоположные стороны и взаимно уравновешены.

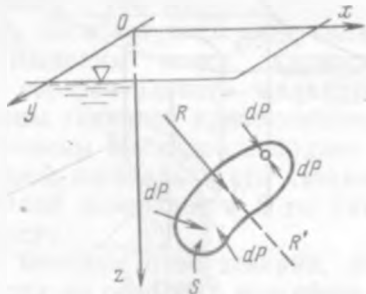


Рис. 1.14.

Найдем одну из них, например, действующую на верхнюю поверхность R . Эта сила является равнодействующей системы непараллельных элементарных сил dP . Поэтому силу R находим, определяя сначала ее проекции по координатным осям, а именно силы R_x , R_y и R_z .

Тогда искомая сила R найдется по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1.33)$$

Силы R_x , R_y и R_z определяются так:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int p d\omega \cos \alpha; \\ R_y &= \int p d\omega \cos \beta; \\ R_z &= \int p d\omega \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

где p — гидростатическое давление в точке.

Если силы R_x , R_y и R_z найдены, то сила R определяется по указанной выше формуле, а ее направление по соответствующим косинусам углов α , β , γ :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Прямое решение задачи описанным способом во многих случаях вызывает большие затруднения при определении сил R_x , R_y и R_z . Ниже рассматривается графо-

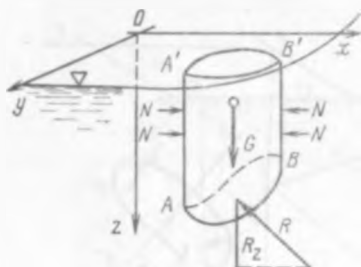


Рис. 1.15.

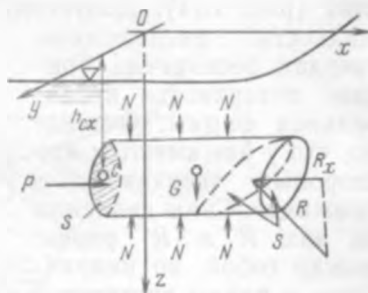


Рис. 1.16.

аналитический способ определения этих сил. Сила R_z — это вертикальная проекция, а силы R_x и R_y — горизонтальные проекции силы R полного давления.

Определим сначала силу R_z . Выделив массу жидкости в объеме вертикального цилиндра, построенного на данной поверхности S и ограниченного сверху плоскостью свободной поверхности (рис. 1.15), запишем уравнение проекций на ось Oz всех действующих на эту массу внешних сил, т. е.

$$\Sigma F_z = 0. \quad (1.35)$$

Два других уравнения проекций сил в данном случае бесполезны, так как искомая сила R_z входит только в уравнение (1.35).

Легко видеть, что если исключить силы атмосферного давления, то в уравнение (1.35) войдут только две силы: вес жидкости в объеме цилиндра (сила G) и проекция силы давления на нижнее основание цилиндра, т. е. искомая сила R_z .

Получим

$$\Sigma F_z = G - R_z = 0,$$

откуда искомая сила R_z

$$R_z = G = \rho g W, \quad (1.36)$$

где W — объем жидкости.

Итак, вертикальное давление жидкости на криволинейную поверхность равно весу жидкости в объеме цилиндра, опирающегося на заданную криволинейную поверхность, ограниченную заданным контуром, а сверху плоскостью свободной поверхности.

Определим силы R_x и R_y . Так как обе эти проекции силы R являются горизонтальными, то, очевидно, способ их определения будет одним и тем же.

Для определения силы R_x воспользуемся следующим построением (рис. 1.16). Выделим массу жидкости в объеме изображенного горизонтального цилиндра, ограниченного с одной стороны заданной криволинейной поверхностью, а с другой стороны цилиндра координатной плоскостью yOz . Очевидно, площадь этого сечения будет проекцией криволинейной поверхности S на указанную координатную плоскость.

Пользуясь, как обычно, методом отвердевания, напишем уравнение проекций сил на ось Ox (в это уравнение войдет искомая сила R_x).

Из числа действующих сил в это уравнение войдут также только две силы: сила P_x — давление на сечение в плоскости координат yOz со знаком плюс и искомая сила R_x со знаком минус. Остальные силы в проекции на ось Ox дают нуль и исключаются (это вес G и силы давления на боковую поверхность цилиндра).

Таким образом,

$$\Sigma F_x = P_x - R_x = 0,$$

откуда

$$R_x = P_x.$$

Сила P_x представляет собой силу давления на плоскую стенку и, следовательно,

$$P_x = \rho g h_{cx} \omega_x,$$

где ω_x — проекция заданной криволинейной поверхности S на плоскость yOz , а h_{cx} — глубина погружения центра тяжести этой площади ω_x под уровень свободной поверхности.

Таким образом,

$$R_x = \rho g h_{cx} \omega_x. \quad (1.37)$$

Аналогично найдем и силу $R_y = \rho g h_{cy} \omega_y$.

Отметим особое свойство сил R_x и R_y . Поскольку в правой части равенств множители ω_x и ω_y (т. е. плоские проекции криволинейной поверхности S) не зависят от формы поверхности S , а зависят только от контура, ограничивающего эту поверхность, постольку силы R_x и R_y (т. е. горизонтальные проекции силы R давления на криволинейные поверхности) не зависят от ее формы, а зависят только от очертания контура и его расположения в пространстве.

Таким образом, система уравнений для определения проекций силы R имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \rho g h_{cx} \omega_x; \\ R_y &= \rho g h_{cy} \omega_y; \\ R_z &= \rho g W. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Очевидно, как указано было выше, R найдется по (1.33).

1.6. ЗАКОН АРХИМЕДА И ПЛАВАНИЕ ТЕЛ

Закон Архимеда можно выразить в такой форме: *сила, с которой жидкость действует на погруженное в нее тело, равна весу жидкости в объеме тела, направлена снизу вверх и проходит через центр тяжести объема погруженного тела.*

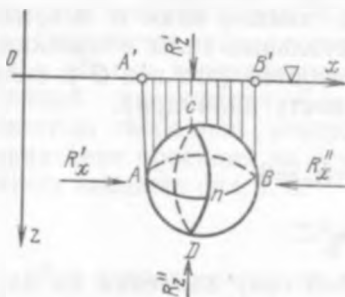


Рис. 1.17.

Пусть погруженное в жидкость твердое тело имеет произвольную форму (любого веса и даже неоднородное по плотности). Удержим это тело в равновесии с помощью жестких связей (например, с помощью трех неподвижных опор).

Силу полного давления жидкости на тело найдем как силу давления на криволинейную поверхность тела.

Тогда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Сила $R_x = 0$, так как

$$R_x = R'_x - R''_x = 0,$$

где R'_x — сила давления на тело давления (рис. 1.17) слева направо, а сила R''_x , наоборот, — справа налево. Но эти силы равны между собой, так как поверхности, на которые они действуют, опираются на один и тот же контур CD .

По тем же причинам и $R_y = 0$. Таким образом,

$$R = \sqrt{R_x^2} = R_z.$$

Для определения силы R_z проведем контурную линию AB и разделим поверхность тела на две части — верхнюю и нижнюю. На верхнюю часть поверхности жидкость давит с силой R'_z , а на нижнюю — с силой R''_z . Сила R_z равна:

$$R_z = R'_z - R''_z.$$

Но

$$R'_z = \rho g W'_{AA'B'BCA}, \text{ а } R''_z = -\rho g W''_{AA'B'BDA}$$

(знак минус у силы R''_z поставлен потому, что положительное направление оси Oz принято сверху вниз). Итак,

$$R_z = R'_z - R''_z = \rho g W' - \rho g W'' = -\rho g W, \quad (1.39)$$

где W — объем тела, а $\rho g W$ — вес жидкости в объеме тела.

Знак минус указывает на то, что сила R направлена снизу вверх.

Сила R проходит через центр тяжести объема тела (а не массы), так как если бы тело было однородно с плотностью, равной плотности жидкости, то, будучи свободным, оно находилось бы в равновесии (сила тяжести G и сила давления жидкости R_z не образуют момента, и, следовательно, эти силы проходят через центр тяжести объема).

Итак, сила давления жидкости на погруженное в нее тело равна весу жидкости в объеме тела, направлена снизу вверх и проходит через центр тяжести объема тела.

Силу R_z часто называют архимедовой подъемной силой.

Плавание тел. Различают два вида плавания — в полностью погруженном состоянии и в частично погруженном состоянии. Условия плавания в обоих случаях одинаковы: если $G > P_w$, тело тонет; если $G < P_w$, тело всплывает; если $G = P_w$, то тело плавает (G — вес тела, а P_w — архимедова подъемная сила).

Различие заключается в условиях устойчивости плавания или, как принято говорить, в устойчивости плавающего тела.

Плавание в полностью погруженном состоянии. На плавающее тело действуют две силы: сила тяжести G , приложенная в центре тяжести тела в точке c (рис. 1.18), и равная ей по значению сила P_w — результирующая сил давления жидкости на пла-

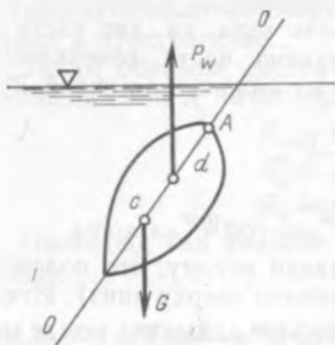


Рис. 1.18.

вающее тело, приложенная к центру тяжести его объема — в точке d . Объем плавающего тела в этом случае равен водоизмещению¹, а точка d будет центром водоизмещения. Линия, проходящая через точки c и d , называется осью плавания.

Допустим, что в нормальных условиях плавания точка A (рис. 1.18) должна быть верхней. Если в равновесном положении точка d лежит на оси плавания вы-

ше точки c , плавание будет устойчивым. В таком случае при любом отклонении оси плавания от вертикали силы G и P_w создают восстанавливающий момент. В противном случае (т. е. если точка d лежит ниже точки c) тело не вернется в свое начальное положение — тело опрокинется и точка A окажется внизу, а не вверх — плавание не устойчивое.

Итак, критерием устойчивости плавания тела под водой является взаимное расположение точек d и c .

Если точка d при равновесном положении лежит выше точки c , то плавание будет устойчивым, и наоборот. Устойчивость будет тем больше, чем выше лежит точка d .

При совпадении точек d и c плавание будет безразличным.

Плавание в не полностью погруженном состоянии. При плавании в не полностью погруженном состоянии (рис. 1.19) водоизмещением назы-

¹ При плавании на поверхности водоизмещением называют объем погруженной части тела.

ваются объем той части тела, которая погружена в воду.

Линия пересечения свободной поверхности воды с боковой поверхностью тела называется ватерлинией. Площадь, очерченная ватерлинией, называется площадью ватерлинии.

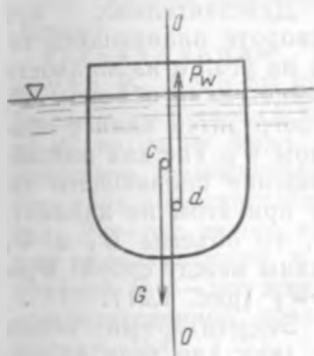


Рис. 1.19.

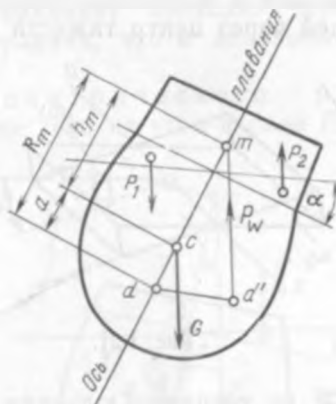


Рис. 1.20.

Архимедова подъемная сила равна весу жидкости в объеме водоизмещения W :

$$P_w = \rho g W.$$

Условия устойчивости (остойчивости) плавания в данном случае иные, чем при плавании в полностью погруженном состоянии. Плавание может быть устойчивым и в том случае, если при равновесном положении точка d лежит ниже точки c , как указано на рис. 1.19.

Критерием устойчивости при плавании тела в не полностью погруженном состоянии является местоположение не точки d , а точки m , называемой метacentром (метacentр представляет собой точку пересечения оси плавания и направления архимедовой силы P_w при крене на угол α) (рис. 1.20).

Степень устойчивости будет тем больше, чем выше расположен метacentр.

При малых углах крена ($\alpha < 12^\circ$) метacentр практически не изменяет своего положения на оси плавания, при этом центр водоизмещения, т. е. точка d , описывает дугу круга с радиусом R_m , равным расстоянию от метacentра (точки m) до точки d (на оси плавания).

Этот радиус R_m называется метацентрическим радиусом.

Теорема о центре качания плавающего тела. При малых углах крена качание плавающего тела происходит относительно горизонтальной оси, лежащей в плоскости свободной поверхности и проходящей через центр тяжести площади ватерлинии.

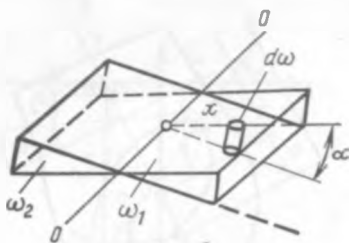


Рис. 1.21.

Действительно, при повороте плавающего тела на угол α из жидкости выйдет клин объемом W_1 и погрузится клин с объемом W_2 . Так как водоизмещение плавающего тела при этом не изменится, то объемы W_1 и W_2 равны между собой: $W_1 = W_2$ (рис. 1.21).

Элементарный объем dW по теореме Гюльдена равен (как для тела вращения):

$$dW = \alpha x d\omega.$$

Тогда объем левого клина

$$W_1 = \int_{\omega_1} \alpha x d\omega$$

и аналогично объем правого клина

$$W_2 = \int_{\omega_2} \alpha x d\omega.$$

По условию равенства объемов $W_1 = W_2$ имеем:

$$\int_{\omega_1} \alpha x d\omega = \int_{\omega_2} \alpha x d\omega \quad \text{или} \quad \int_{\omega_1} x d\omega = \int_{\omega_2} x d\omega.$$

Но интеграл $\int_{\omega_1} x d\omega = S_1$ представляет собой статический момент левой части площади ватерлинии относительно оси вращения OO (оси качания тела), а интеграл $\int_{\omega_2} x d\omega = S_2$ — статический момент правой части площади ватерлинии.

Итак, $S_1=S_2$, и тогда статический момент всей площади равен нулю:

$$S=S+(-S)=0.$$

Следовательно, ось вращения (она же ось статического момента площади ватерлинии) проходит через центр тяжести площади ватерлинии, что и доказывает теорему.

Определение метacentрического радиуса R_m . Если бы при крене тела на угол α сила P_W была бы закреплена в точке d , то надо было бы допустить возникновение еще двух дополнительных сил: P_1 — вес левого клина видоизмещения и P_2 (равной P_1) — вес жидкости, вытесненной правым клином (рис. 1.22).

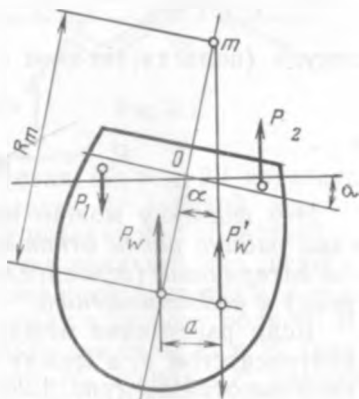


Рис. 1.22.

В действительности этих трех сил нет, их заменяет одна сила P'_W , приложенная в точке d' . Эта сила, следовательно, является равнодействующей трех сил P_W , P_1 и P_2 . Очевидно, сила P'_W , приложенная к точке d' , равная силе P''_W и направленная вниз, будет уравновешивающей силой.

Итак, система четырех сил P''_W , P_W , P_1 и P_2 уравновешена, и если бы такая система была приложена к некоторому свободному телу, то это тело было бы в равновесии, а потому сумма моментов этих сил относительно любой оси также равна нулю.

Момент сил P_W и P''_W равен:

$$m(P_W, P''_W) = P_W a = P_W R_m \sin \alpha.$$

Момент силы P_1 относительно оси вращения

$$m(P_1) = \int_0^{\omega} p g a x d\omega x = \int_0^{\omega} p g a x^2 d\omega,$$

а тогда момент пары P_1, P_2

$$m(P_1, P_2) = \int \rho g a x^2 d\omega,$$

где интеграл должен быть взят по всей площади ватерлинии ω , а не только по ее части ω_1 .

Итак,

$$m(P_w, P''_w) = m(P_1, P_2)$$

и, следовательно,

$$\rho g W R_m \sin \alpha = \int \rho g a x^2 d\omega,$$

откуда (полагая $\sin \alpha = \alpha$ и сокращая на ρg) получаем:

$$R_m = \frac{\int x^2 d\omega}{W} = \frac{I_0}{W}. \quad (1.40)$$

Эту формулу можно прочесть так: *метацентрический радиус равен отношению момента инерции площади ватерлинии (относительно оси качения плавающего тела) к водоизмещению.*

Если расстояние между точками c и d назвать эксцентриситетом a , а между точками c и m метацентрической высотой h_m (рис. 1.20), то

$$h_m = R_m - a \quad (1.41)$$

и условие остойчивости плавающего тела можно сформулировать так: плавание устойчиво, если $h_m > 0$.

Примечание. Для торгово-пассажирских пароходов метацентрическую высоту h_m принимают равной около 0,5 м.

Глава вторая

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

2.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Как уже отмечалось, жидкость рассматривается как сплошная легко деформируемая среда. Физический процесс такой деформации весьма сложен. Отдельные частицы жидкости движутся по различным траекториям и

по своим законам. Изучение этих законов и математическое их описание связаны с большими трудностями. Поэтому в рассмотрение вводится та или иная теоретическая модель реального движения и изучаются ее кинематические и динамические характеристики, для чего вводится понятие о элементарной струйке и понятие о потоке — совокупности элементарных струек.

Остановимся на условиях возникновения и направления течения. Известно, что движение тела обусловлено воздействием на него внешних сил. Рассмотрим это положение на примере движения

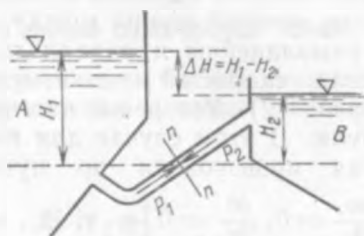


Рис. 2.1.

жидкости в поле земного тяготения. На рис. 2.1 показано соединение трубопроводом области А, занятой жидкостью, с областью В. Свободная поверхность области А — выше таковой в области В. Легко показать, что невесомый жесткий поршень, помещенный в сечении $n-n$, должен двигаться по трубопроводу в сторону области В, так как на него действуют только две силы P_1 и P_2 (рис. 2.1), причем $P_1 = \rho g \omega H_1 > P_2 = \rho g \omega H_2$ и сила ΔP , равная их разности:

$$\Delta P = \rho g \omega (H_1 - H_2), \quad (2.1)$$

направлена в сторону области В.

Обращая внимание на то, что H_1 и H_2 определяют собой энергетический уровень жидкой среды в указанных на рис. 2.1 двух областях и учитывая условие $H_1 > H_2$, можно сказать, что жидкость всегда движется при наличии разности энергетических уровней (или, как говорят, разности напоров, что одно и то же) и движется в сторону области с

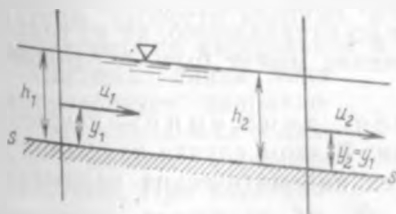


Рис. 2.2.

меньшим энергетическим уровнем.

Виды движения. Движение жидкости, как и всякого тела, может быть равномерным и неравномерным

(по пути движения). Кроме того, движение жидкости может быть постоянным и переменным во времени, т. е. установившимся и не установившимся. Эти определения следует уточнить.

Равномерным движением называется такое, при котором скорости в сходственных точках двух смежных сечений равны между собой, а траектории частиц прямолинейны и параллельны оси os . Следовательно, поле скоростей не изменяется вдоль по течению (рис. 2.2). Ускорение частиц жидкости при этом равно нулю. В этом случае для всех параметров потока частная производная по пути равна нулю, например

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = 0, \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \text{ и т. д., или в символической форме}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (f) = 0. \text{ Здесь } (f) \text{ означает тот или иной параметр,}$$

например скорость u , глубина h и т. д., а s — расстояние вдоль траектории. (Аналогичной условной записью бу-

дем пользоваться и далее, например, в форме $\frac{\partial}{\partial t} (f) \geq 0$

и т. д.).

Неравномерное движение — движение, не удовлетворяющее определению равномерного движения, в этом случае $\frac{\partial}{\partial s} (f) \neq 0$.

Установившимся движением называется такое, при котором в любой точке пространства скорость течения не изменяется ни по направлению, ни по величине. Установившееся движение может быть и равномерным и неравномерным.

Не установившееся движение — движение, изменяющееся во времени. В этом случае частные производные по времени всех кинематических параметров не равны нулю, например $\frac{\partial u_x}{\partial t} \neq 0$ и т. д. Иллюстрацией

неустановившегося движения может быть истечение из резервуара при его опорожнении.

Движение сплошное и прерывистое не требует особых разъяснений; если движение происходит

без образования пустот внутри занятого жидкостью пространства, то это движение сплошное, в противоположном случае прерывистое. Обычное течение в реках — сплошное, а на водопадах прерывистое.

При дальнейшем изложении будет предусматриваться движение только сплошное.

2.2. ТРАЕКТОРИЯ, ЛИНИЯ ТОКА И ЛИНИЯ ОТМЕЧЕННЫХ ТОЧЕК

Геометрическими характеристиками потока являются три линии — траектория, линия тока и линия отмеченных точек.

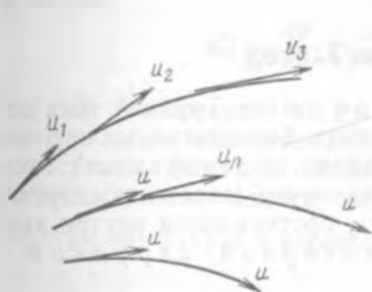


Рис. 2.3.



Рис. 2.4.

Траектория — линия, по которой движется некоторая частица жидкости.

Линия тока — кривая, проходящая через такие частицы, скорости которых в данный момент времени направлены по касательной к этой линии.

Система линий тока характеризует направление течения потока в данный момент времени (рис. 2.3). При неустановившемся движении линии тока изменяют свою форму и расположение, и вся картина движения изменяется во времени. При неустановившемся движе-

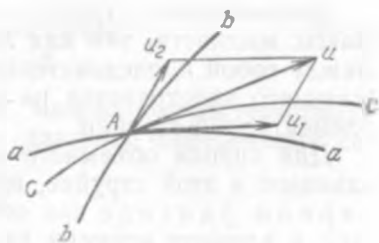


Рис. 2.5.

нии линия тока и траектория не совпадают друг с другом (рис. 2.4). Две различные линии тока во всех случаях не пересекаются между собой. Так, полная скорость в точке A , скорость u (рис. 2.5) направлена по касательной к линии $c-c$, а следовательно, линии $a-a$ и линия $b-b$ не являются линиями тока.

Линия отмеченных точек — линия, на которой в данный момент времени лежат частицы жидкости, прошедшие в свое время через одну и ту же начальную точку. Иллюстрацией такой линии может служить линия расположения поплавков, последовательно выпущенных из одной и той же точки.

При установившемся движении все эти три линии совпадают между собой.

2.3. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СТРУЙКА И ЕЕ РАСХОД

Введем понятие о трубке тока. Трубкой тока называется трубчатая поверхность бесконечно малого поперечного сечения, образованная системой линий тока, проходящих через точки бесконечно малого замкнутого контура (рис. 2.6). Жидкость, протекающая внутри этой трубки, называется элементарной струйкой.

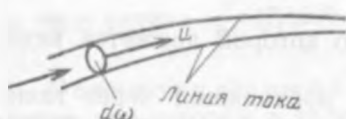


Рис. 2.6.

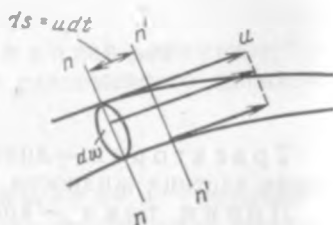


Рис. 2.7.

Элементарная струйка изолирована от окружающей массы жидкости, так как линии тока не пересекаются между собой и, следовательно, ни одна частица из окружающего пространства не может войти в пространство элементарной струйки.

Для оценки объемного количества жидкости, протекающего в этой струйке, введем понятие об элементарном расходе как об объеме жидкости, проходящем в единицу времени через данное поперечное сечение струйки.

Уравнение элементарного расхода составим следующим образом (рис. 2.7). За время dt все частицы из сечения $n-n$ переместятся на расстояние ds , равное:

$$ds = u dt,$$

где u — скорость их движения, и перейдут в сечение $n'-n'$. При этом пространство, равное по объему

$$dW = d\omega ds,$$

будет занято другими частицами.

Таким образом, за время dt через сечение $n-n$ проходит жидкость в объеме $dW = d\omega u dt$.

За единицу времени проходит количество жидкости в объеме

$$dQ = \frac{dW}{dt} = \frac{d\omega u dt}{dt} = u d\omega, \quad (2.2)$$

где dQ называется элементарным расходом, или расходом элементарной струйки, определяющим количество жидкости в объемных единицах ($\text{м}^3/\text{с}$). Аналогично можно ввести понятие о массовом расходе

$$dQ_p = \rho u d\omega \text{ (кг/с)} \text{ и о весовом расходе } dQ_g = \rho g u d\omega \left(\frac{\text{Н}}{\text{с}} \right).$$

2.4. РАСХОД И СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПОТОКА. УСЛОВИЕ СПЛОШНОСТИ

Поток представляет собой совокупность элементарных струек (рис. 2.8). Поскольку скорость течения в отдельных струйках в общем случае разная, постольку и скорость в разных точках поперечного сечения будет разной. Закон распределения скоростей характеризуется эпюрой скорости (рис. 2.8).

Расход потока Q равен сумме расходов элементарных струек, т. е.

$$Q = \int dQ = \int u d\omega. \quad (2.3)$$

Скорость течения потока можно охарактеризовать средней скоростью по данному поперечному сечению:

$$v = \frac{\int u d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega} \quad (2.4)$$

или

$$Q = \omega v. \quad (2.4a)$$

В такой форме это равенство называется уравнением расхода.

Условие неразрывности, или сплошности течения. Для двух сечений 1—1 и 2—2 элемен-

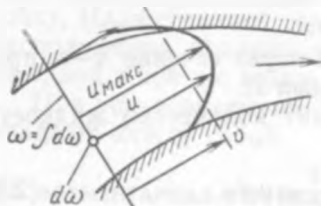


Рис. 2.8.

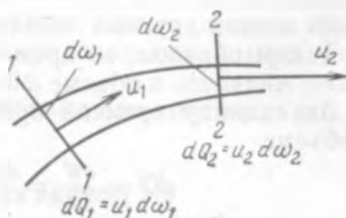


Рис. 2.9.

тарной струйки в установившемся движении (рис. 2.9) можно записать:

$$dQ_1 = u_1 d\omega_1 \text{ и } dQ_2 = u_2 d\omega_2.$$

Видно, что $dQ_1 \not> dQ_2$ по условию несжимаемости жидкости (иначе пространство между сечениями должно возрасти) и $dQ_1 \not< dQ_2$ по условию сплошности течения, иначе в указанном пространстве между сечениями образуется пустота — разрыв сплошности.

Следовательно, условие неразрывности течения должно быть записано так:

$$dQ_1 = dQ_2 \text{ или } u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2$$

или

$$dQ = u d\omega = |\text{const}|.$$

Очевидно, что для всего потока это условие будет записано в виде

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$$

или также в форме

$$Q = \omega v = |\text{const}|.$$

т. е. расход потока вдоль по течению один и тот же.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

3.1. ДВА МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ — МЕТОД ЛАГРАНЖА И МЕТОД ЭЙЛЕРА

Как было указано ранее, жидкость рассматривается как легкодеформируемая непрерывная среда. В качестве мельчайшего элемента жидкости принимается «частица» бесконечно малых размеров.

По методу Лагранжа предусматривается изучение законов движения каждой индивидуальной частицы.

По методу Эйлера задача заключается в изучении поля скоростей, ускорений и других параметров движения и оставляет в стороне вопрос о том, как движется та или иная индивидуальная частица.

Оба метода математически связаны друг с другом, и возможен переход от уравнений, составленных по одному методу, к уравнениям, составленным по другому.

3.1.1. Метод Лагранжа

Движение одной какой-либо частицы жидкости определяется системой трех уравнений:

$$x=f_1(t); y=f_2(t) \text{ и } z=f_3(t),$$

где x, y, z — координаты данной частицы, а t — время (x, y, z являются функциями времени).

Для описания движения всех частиц данного потока потребовалось бы иметь бесконечное множество таких уравнений, что невозможно.

Это затруднение можно устранить. Заметим, что в начальный момент времени t_0 (принятый за начало отсчета) каждая частица находится в определенной точке пространства, положение которой определяется координатами x_0, y_0 и z_0 . Для удобства записей примем такие обозначения: $x_0=a$; $y_0=b$ и $z_0=c$, где, следовательно, a, b, c будут начальными координатами. Понятно, что, выбирая числовые значения для a, b и c , тем самым выбираем в потоке некоторую конкретную частицу. Ее текущие координаты x, y и z будут другими, нежели текущие координаты частицы с другими начальными

координатами. Поэтому для потока в целом текущие координаты зависят не только от времени, но и от начальных координат a, b и c .

Таким образом, движение всей массы жидкости будет известным, если известна следующая система:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t); \\ y &= f_2(a, b, c, t); \\ z &= f_3(a, b, c, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

В этой системе начальные координаты a, b и c могут рассматриваться как независимые переменные. Следовательно, координаты x, y и z являются функциями четырех независимых переменных a, b, c и t . Эти переменные называют координатами Лагранжа.

Если система (3.1) известна (задана или найдена), то движение жидкости определяется в полной мере. Действительно, составляющие скорости любой частицы определяются как первые производные по времени от x, y и z и записанные в виде частных производных в соответствии с (3.1):

$$u_x = \frac{\partial f_1(a, b, c, t)}{\partial t}; \quad u_y = \frac{\partial f_2(a, b, c, t)}{\partial t};$$

$$u_z = \frac{\partial f_3(a, b, c, t)}{\partial t},$$

а составляющие ускорения определяются как вторые производные

$$j_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}; \quad j_y = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}; \quad j_z = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}.$$

Тогда полная скорость и ускорение будут найдены по формулам

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}; \quad j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}.$$

Направление u будет определено по косинусам углов α, β, γ :

$$\cos \alpha = \frac{u_x}{u}; \quad \cos \beta = \frac{u_y}{u}; \quad \cos \gamma = \frac{u_z}{u}.$$

При исследовании движения жидкости по методу Лагранжа геометрическими характеристиками движения являются траектории и линии отмеченных точек.

Траектория выбранной частицы N (по выбранным a_N, b_N, c_N) определяется или непосредственно системой

(3.1), путем вычисления x , y и z для ряда моментов времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, или путем исключения из системы (3.1) времени t , что приводит к двум уравнениям:

$$\Phi_1(a, b, c, x, y, z) = 0;$$

$$\Phi_2(a, b, c, x, y, z) = 0.$$

Совместное решение этих уравнений дает искомую траекторию.

Покажем на примере, как рассматривается то или иное движение жидкости в координатах Лагранжа.

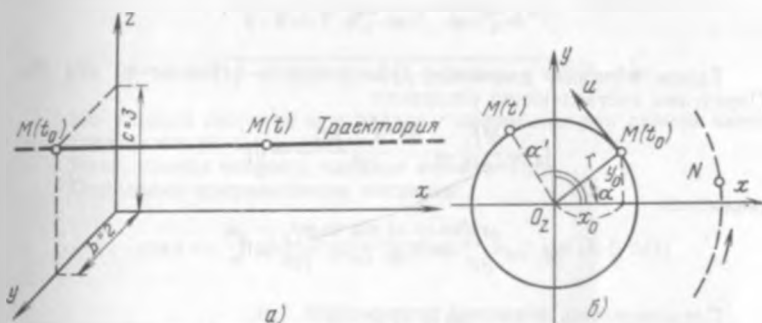


Рис. 3.1.

Пример 3.1. Пусть задана основная система уравнений движения некоторого потока (рис. 3.1,а):

$$\left. \begin{aligned} x &= a + ut; \\ y &= b; \\ z &= c. \end{aligned} \right\} \quad (3.1a)$$

Определить характер движения и кинематические его параметры.

Из заданной системы (3.1a) видно, что координаты y и z любой частицы (т. е. при любых значениях a , b и c) не зависят от времени t и, следовательно, данное движение будет параллельным оси Ox , т. е. траектории любой частицы, например частицы M ($a=0$; $b=2$; $c=3$), представляют собой прямые, параллельные оси Ox .

Определим для частицы M размер и направление скорости и ускорения.

Проекции полной скорости

$$u_x = \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial (a + ut)}{\partial t} = u;$$

$$u_y = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial (b)}{\partial t} = 0;$$

$$u_z = \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{\partial (c)}{\partial t} = 0.$$

Полная скорость

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = u.$$

Направление движения определится по косинусам углов α, β, γ :

$$\cos \alpha = \frac{u_x}{u} = \frac{u}{u} = 1,0 \text{ и } \alpha = 0;$$

$$\cos \beta = \frac{u_y}{u} = \frac{0}{u} = 0 \text{ и } \beta = \frac{\pi}{2};$$

$$\cos \gamma = \frac{u_z}{u} = \frac{0}{u} = 0 \text{ и } \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, движение действительно параллельно оси Ox . Определим составляющие ускорения

$$I_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (a + ut)}{\partial t^2} = 0;$$

аналогично

$$I_y = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = 0 \text{ и } I_z = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = 0.$$

Следовательно, движение равномерное.

Примечание. Понятно, в данном примере простейшего движения все указанные вычисления являются излишними, так как все выводы очевидны из системы (3.1а). Эти вычисления даны лишь для иллюстрации последовательности решения задачи.

Пример 3.2. Составить общие уравнения движения и определить скорости и ускорения для случая вращения жидкости с постоянной угловой скоростью ω относительно оси Oz , одинаковой для всех отдельных частиц.

Выберем произвольную точку $M(t_0)$ с координатами $a=x_0$, $b=y_0$ и $c=z_0$, так что ее радиус-вектор, равный $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, направлен под углом α к оси Ox (рис. 3.1б). За время t точка M переместится в положение $M(t)$ и радиус-вектор повернется на угол $\alpha' = \omega t$. Тогда координаты рассматриваемой точки определяются так:

$$x = r \cos(\alpha + \alpha') = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha + \omega t);$$

$$y = r \sin(\alpha + \alpha') = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \omega t);$$

$$z = c,$$

что соответствует

$$x = f_1(a, b, c, t);$$

$$y = f_2(a, b, c, t);$$

$$z = f_3(a, b, c, t).$$

Полученная система трех уравнений и будет основной системой уравнений движения в форме Лагранжа для данного случая.

Найдем теперь скорости и ускорения:

$$u_x = \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [V a^2 + b^2 \cos(\alpha + \omega t)] = -\omega r \sin(\alpha + \omega t);$$

$$u_y = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [V a^2 + b^2 \sin(\alpha + \omega t)] = \omega r \cos(\alpha + \omega t);$$

$$u_z = \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{\partial(c)}{\partial t} = 0.$$

Полная скорость

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \\ = \omega r \sqrt{[-\sin(\alpha + \omega t)]^2 + [\cos(\alpha + \omega t)]^2} = \omega r.$$

Но угловая скорость ω и радиус r неизменны для данной частицы, следовательно, $\omega r = \text{const}$.

Итак, полная скорость частицы $u = \omega r = f(r)$.

Определим направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{u_x}{u} = \frac{-\omega r \sin(\alpha + \omega t)}{\omega r} = -\sin(\alpha + \omega t);$$

$$\cos \beta = \frac{u_y}{u} = \frac{\omega r \cos(\alpha + \omega t)}{\omega r} = \cos(\alpha + \omega t);$$

$$\cos \gamma = \frac{u_z}{u} = 0.$$

Для данной частицы они являются переменными и зависят от угловой скорости ω и времени t .

И, наконец, определяем ускорения:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2},$$

но

$$j_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [-\omega r \sin(\alpha + \omega t)] = -\omega^2 r \cos(\alpha + \omega t);$$

$$j_y = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\omega r \cos(\alpha + \omega t)] = -\omega^2 r \sin(\alpha + \omega t).$$

Следовательно,

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{[-\omega^2 r \cos(\alpha + \omega t)]^2 + [-\omega^2 r \sin(\alpha + \omega t)]^2} = \\ = \omega^2 r = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \frac{u^2}{r}.$$

А это, как известно, представляет собой центростремительное ускорение.

Направление находим по соответствующему косинусу

$$\cos \alpha = \frac{j_x}{j} = \frac{-\omega^2 r \cos(\alpha + \omega t)}{\omega^2 r} = -\cos(\alpha + \omega t).$$

Таким образом, полное ускорение j направлено по радиусу к центру, т. е. является центростремительным ускорением.

3.1.2. Метод Эйлера

Рассмотрим движение жидкости в некоторой обла-

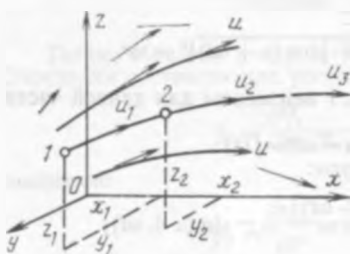


Рис. 3.2.

сти. В каждой точке этой области в данный момент частицы жидкости имеют скорость u . Вся совокупность векторов, изображающих соответствующие скорости, составляет так называемое векторное поле скоростей (рис. 3.2).

В общем случае, т. е. при неустановившемся движении, все поле изменяется во времени и, следовательно, компоненты скорости являются функциями не только координат, но и времени:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= F_1(x, y, z, t); \\ u_y &= F_2(x, y, z, t); \\ u_z &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Для установившегося движения поле скоростей остается во времени неизменным, и поэтому для установившегося движения взамен системы (3.2) получим систему:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= F_1(x, y, z); \\ u_y &= F_2(x, y, z); \\ u_z &= F_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (3.2a)$$

Аналитическим условием того обстоятельства, что движение является установившимся, будет:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что равенство нулю частной производной полной скорости u по времени, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.4)$$

еще недостаточно для того, чтобы движение было установившимся, так как частная производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ определяет лишь изменение скорости во времени, и если $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, то

это обозначает лишь, что u не изменяется по величине. Однако при этом направление скорости u может и изменяться, т. е. движение может быть и неустановившимся. Для того, чтобы полная скорость оставалась одной и той же как по направлению, так и по значению, надо, чтобы соблюдалось условие (3.3).

Если основная система уравнений движения (3.2) известна, то можно определить полную скорость и по направлению, и по его значению, а также можно определить и ускорение.

Полное ускорение определится по формуле

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2},$$

где проекции ускорения по координатным осям будут соответственно равны:

$$j_x = j \cos \alpha = \frac{du_x}{dt};$$

$$j_y = j \cos \beta = \frac{du_y}{dt};$$

$$j_z = j \cos \gamma = \frac{du_z}{dt}.$$

Составим выражение полных производных $\frac{du_x}{dt}$; $\frac{du_y}{dt}$; $\frac{du_z}{dt}$.

Так как проекции полной скорости u_x , u_y и u_z являются в общем случае функциями координат и времени [по системе (3.2)], то полный дифференциал, например скорости u_x , равен сумме четырех частных дифференциалов:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz.$$

Разделив на dt , получим выражение для полной производной по времени

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Это выражение полной производной можно записать иначе. Заметим, что дифференциалы координат dx , dy и dz в общем случае произвольны, но можно ввести ограничение. Будем считать, что dx , dy и dz представляют собой не что иное, как проекции элементарного перемещения частицы ds на осях координат Ox , Oy и Oz :

$$dx = ds \cos \alpha;$$

$$dy = ds \cos \beta \text{ и } dz = ds \cos \gamma. \quad (3.5)$$

В таком случае производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ представляют собой соответственно проекции скорости u_x , u_y и u_z :

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y \text{ и } \frac{dz}{dt} = u_z, \quad (3.6)$$

где ds — элементарное перемещение данной частицы жидкости.

Тогда после подстановки получим следующую форму записи для ускорения $J_x = \frac{du_x}{dt}$:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Здесь полная производная $\frac{du_x}{dt}$ представляет собой полное ускорение движения данной частицы (в направлении оси Ox), она называется иногда субстанциональной производной.

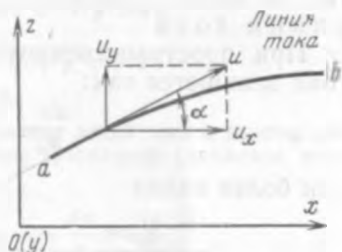
Частная производная $\frac{\partial u_x}{\partial t}$, представляющая собой ускорение в данной точке, обусловленное неустановившимся движением жидкости, называется локальной производной, а сумма $\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$, представляющая собой ускорение, связанное с неравномерностью движения при перемещении частицы жидко-

сти в пространстве, называется конвективной производной.

Таким образом, полная, т. е. субстанциональная, производная равна сумме локальной и конвективной.

При установившемся движении локальная производная $\frac{du_x}{dt} = 0$, но конвективная при этом может и не быть равной нулю (случай неравномерного установившегося движения).

Рис. 3.3.



Аналогичные выражения можно составить и для производных $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$.

При исследовании движения жидкости по методу Эйлера геометрическими характеристиками движения являются линии тока, а не траектории, как то имеет место в методе Лагранжа.

Уравнение линии тока легко составить, пользуясь такими рассуждениями. Допустим, что в данный момент времени имеем плоскую линию тока ab (рис. 3.3).

Уравнение этой линии можно записать так:

$$y = f(x),$$

где y и x — координаты точек данной линии.

Непосредственно из рисунка имеем:

$$\frac{u_y}{u_x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Здесь угол α равен углу, который образует касательная к линии тока с осью Ox .

Но, дифференцируя уравнение линии тока, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть также угол, образуемый направлением касательной к линии тока с направлением оси Ox .

Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{dy}{dx}$$

или

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{F_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z, t)}, \quad (3.8)$$

это и есть дифференциальное уравнение линии тока.

При пространственном движении уравнение линии тока запишется так:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (3.9)$$

или более полно

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z, t)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z, t)}. \quad (3.9a)$$

Чтобы получить уравнение линии тока в конечной форме, надо это уравнение интегрировать.

Принимая время t как параметр и интегрируя, получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y, z, t) &= C_1; \\ \Phi_2(x, y, z, t) &= C_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Совместное решение этих уравнений и даст уравнение линии тока в конечной форме.

Заметим, что для установившегося движения линия тока совпадает с траекторией, а потому полученные уравнения будут одновременно и уравнениями траекторий.

Пример 3.3. Рассмотрим вращательное движение жидкости относительно оси Oz с постоянной угловой скоростью ω , одинаковой для всех частиц.

Движение будет установившимся ($\omega = \text{const}$), т. е. не зависящим от t (по условию вращения).

Запишем основную систему уравнений в координатах Эйлера (3.2a):

$$\begin{aligned} u_x &= F_1(x, y, z); \\ u_y &= F_2(x, y, z); \\ u_z &= F_3(x, y, z). \end{aligned}$$

Учитывая отмеченные особенности данного движения и полагая $u_z=0$, будем иметь:

$$u_x = F_1(x, y);$$

$$u_y = F_2(x, y);$$

$$u_z = 0.$$

Определим скорости u_x и u_y .

Полная скорость любой частицы

$$u = \omega r = \omega \sqrt{x^2 + y^2},$$

тогда основная система будет иметь вид:

$$u_x = -u \sin \alpha = -\omega \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha;$$

$$u_y = u \cos \alpha = \omega \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha;$$

$$u_z = 0.$$

Определим вид траектории. Уравнение линий тока в данном случае будет одновременно и уравнением траектории (движение установившееся). Итак, из уравнений

$$\frac{dx}{F_1(x, y)} = \frac{dy}{F_2(x, y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y},$$

делая подстановку, получаем

$$\frac{dx}{-\omega \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha} = \frac{dy}{\omega \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha}.$$

Далее сокращаем на $\omega \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\cos \alpha dx + \sin \alpha dy = 0.$$

Но $\sin \alpha = y/r$, а $\cos \alpha = x/r$, поэтому можно записать

$$x dx + y dy = 0$$

или после интегрирования

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

а это — уравнение окружности.

3.1.3. Переход от координат Лагранжа к координатам Эйлера и обратно

Переход от координат Лагранжа к координатам Эйлера. По методу Лагранжа движение жидкости определяется системой (3.1):

$$x = f_1(a, b, c, t);$$

$$y = f_2(a, b, c, t);$$

$$z = f_3(a, b, c, t).$$

Определяем скорости u_x , u_y и u_z , дифференцируя систему (3.1) по времени t , а именно:

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [f_1(a, b, c, t)] = \Phi_1(a, b, c, t);$$

$$u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [f_2(a, b, c, t)] = \Phi_2(a, b, c, t);$$

$$u_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [f_3(a, b, c, t)] = \Phi_3(a, b, c, t).$$

Исключаем начальные координаты, решая систему (3.1) относительно a , b и c :

$$a = \varphi_1(x, y, z, t);$$

$$b = \varphi_2(x, y, z, t);$$

$$c = \varphi_3(x, y, z, t).$$

Далее находим:

$$u_x = \Phi_1(a, b, c, t) = \Phi_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t);$$

$$u_y = \Phi_2(a, b, c, t) = \Phi_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t);$$

$$u_z = \Phi_3(a, b, c, t) = \Phi_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t).$$

Но φ_1 , φ_2 и φ_3 являются функциями координат x , y и z , а поэтому

$$\Phi_1 = F_1(x, y, z, t);$$

$$\Phi_2 = F_2(x, y, z, t);$$

$$\Phi_3 = F_3(x, y, z, t),$$

и тогда получим:

$$u_x = F_1(x, y, z, t);$$

$$u_y = F_2(x, y, z, t);$$

$$u_z = F_3(x, y, z, t),$$

что и представляет собой уравнения движения в координатах Эйлера (3.2).

Итак, переход от координат Лагранжа к координатам Эйлера производится путем дифференцирования, что всегда возможно.

Переход от координат Эйлера к координатам Лагранжа. Обратный переход должен осуществляться путем интегрирования, что всегда сложнее, а иногда и невозможно.

Проекции элементарного перемещения dx , dy и dz в координатах Эйлера (3.2) получим следующим образом:

$$dx = u_x dt = F_1(x, y, z, t) dt;$$

$$dy = u_y dt = F_2(x, y, z, t) dt;$$

$$dz = u_z dt = F_3(x, y, z, t) dt.$$

Интегрируя эту систему (если возможно), получаем:

$$\Phi_1(x, y, z, t) = C_1;$$

$$\Phi_2(x, y, z, t) = C_2;$$

$$\Phi_3(x, y, z, t) = C_3.$$

И, наконец, решая эту систему, найдем:

$$x = f_1(C_1, C_2, C_3, t);$$

$$y = f_2(C_1, C_2, C_3, t);$$

$$z = f_3(C_1, C_2, C_3, t).$$

Но C_1 , C_2 и C_3 — произвольные постоянные, которые, понятно, можно рассматривать как начальные координаты $C_1 = a$; $C_2 = b$ и $C_3 = c$, а тогда эта система может быть написана и в такой форме:

$$x = f_1(a, b, c, t);$$

$$y = f_2(a, b, c, t);$$

$$z = f_3(a, b, c, t),$$

что и дает окончательную систему уравнений движения в координатах Лагранжа.

3.2. Движение жидкой частицы

Движение жидкой частицы отличается от движения твердой частицы (абсолютно твердой). Твердая частица может двигаться или поступательно (хотя бы и не прямолинейно), или вращательно, или поступательно с вращением (рис. 3.4,а), но ее форма сохраняется не-

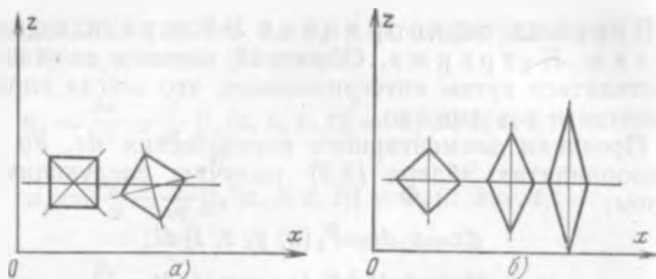


Рис. 3.4.

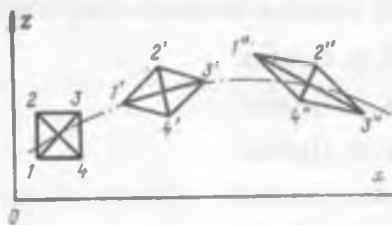


Рис. 3.5.

изменной. Жидкая частица, сохраняя свой объем (если жидкость несжимаемая), может в своем движении, кроме того, и деформироваться (рис. 3.4, б). Эти возможные виды движения жидкой частицы зависят от характера данного поля

скоростей. В общем случае жидкая частица осуществляет все указанные три вида движения (рис. 3.5), а потому движение жидкой частицы можно разложить на движение поступательное, вращательное и деформационное — теорема Коши — Гельмгольца [12].

В частном случае, если в пространстве, в котором находится данная частица, скорости во всех точках равны между собой и параллельны друг другу, частица движется только поступательно.

В теоретическом отношении большое значение имеет деление движений жидкости на две группы: движения с вращением, которые обычно именуются вихревыми, и движения без вращения — безвихревые.

3.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИХРЕВЫХ И БЕЗВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ

3.3.1. Уравнения компонентов вихря

Основной кинематической характеристикой вихревого движения является вектор угловой скорости ω , определяемый его проекциями по координатным осям:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega_x = \omega \cos \alpha; \\ \eta &= \omega_y = \omega \cos \beta; \\ \zeta &= \omega_z = \omega \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Эти проекции ξ , η и ζ именуются компонентами вихря. Обычно вихрем называют удвоенную угловую скорость, т. е. 2ω , но не исключается возможность и другой терминологии, т. е. можно вихрем назвать просто угловую скорость, что принято в данной книге и в некоторых других изданиях [15].

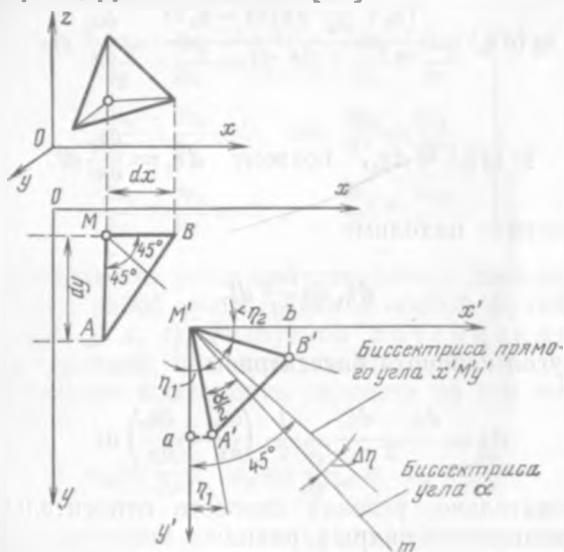


Рис. 3.6.

Выделим частицу в форме тетраэдра с ребрами, параллельными координатным осям Ox , Oy и Oz . В проекции на плоскость yOx он проектируется в треугольник AMB (рис. 3.6). За время Δt частица переходит в новую позицию (на рис. 3.6 $A'M'B'$). При этом биссектриса угла с вершиной M смещается и переходит в положение $M't$, поворачиваясь на угол $\Delta\eta$. Очевидно, скорость поворота относительно вертикальной оси Oz , т. е. угловая скорость $\zeta = \omega_z$, будет равна:

$$\zeta = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}. \quad (3.12)$$

Угол $\Delta\eta = 45^\circ - \eta_1 - \frac{\alpha}{2}$, а угол $\alpha = 90^\circ - \Delta\eta_1 - \Delta\eta_2$.

Следовательно,

$$\Delta\eta = 45^\circ - \Delta\eta_1 - \frac{90^\circ - \Delta\eta_1 - \Delta\eta_2}{2} = \frac{\Delta\eta_2 - \Delta\eta_1}{2}.$$

В дифференциальной форме тангенс угла $d\eta_2$

$$\operatorname{tg}(d\eta_2) = \frac{\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right) dt - u_y dt}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt.$$

Но

$$\operatorname{tg}(d\eta_2) \approx d\eta_2, \text{ поэтому } d\eta_2 = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt.$$

Аналогично находим:

$$d\eta_1 = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt,$$

и тогда угол поворота биссектрисы

$$d\eta = \frac{d\eta_2 - d\eta_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dt.$$

Следовательно, угловая скорость относительно оси Oz , т. е. компонента вихря ζ , равна:

$$\zeta = \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (3.13)$$

Таким же путем находим η и ξ , и результирующе уравнения компонентов вихря выражаются следующей системой:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

3.3.2. Аналитические условия безвихревого движения и потенциал скорости

Безвихревым движением будет, очевидно, такое, при котором вихрь равен нулю, т. е. угловая скорость $\omega=0$.

Это требует равенства нулю всех трех компонентов вихря

$$\xi=\eta=\zeta=0$$

или, если иметь в виду систему (3.14), требует следующих аналитических условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} &= 0 \text{ или } \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Аналитические условия безвихревого движения (3.15) определяют собой существование особой функции координат $\varphi(x, y, z, t)$, именуемой потенциалом скорости, частные производные которой определяют соответствующие компоненты скорости по тем же координатам, т. е.

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \text{и} \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.16)$$

Такая функция действительно существует и удовлетворяет условиям (3.15), в чем легко убедиться простой подстановкой значений u_x , u_y и u_z по (3.16) в (3.15).

Наименование для функции $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости — обязано аналогичному условию известной функции потенциала сил $\Pi(x, y, z)$, равной $-U(x, y, z)$, для которой проекции силы данного поля определяются также соответствующими частными производными

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \text{и} \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

В соответствии с введенным наименованием рассмотренной функции φ — потенциалом скорости — безвихревое движение называется потенциальным.

Итак, имеем две основные группы движения жидкости: вихревое и потенциальное.

Среди вихревых движений имеет место частный случай — винтовое движение, при котором вектор угловой скорости совпадает с направлением вектора линейной скорости в данной точке¹.

3.4. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

3.4.1. Уравнения Эйлера

Воспользуемся основным законом механики, а именно: *равнодействующая всех внешних сил, действующих на данное тело, равна массе тела, умноженной на ускорение, с которым движется это тело:*

$$R = mj. \quad (3.17)$$

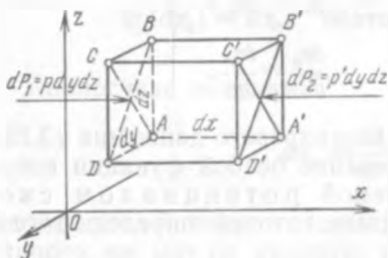


Рис. 3.7.

Выделим в потоке идеальной жидкости элементарную массу в форме параллелепипеда (рис. 3.7) и запишем основное уравнение (3.17) в проекциях по осям:

$$\left. \begin{aligned} dR_x &= dmj \cos \alpha = dmj_x; \\ dR_y &= dmj \cos \beta = dmj_y; \\ dR_z &= dmj \cos \gamma = dmj_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.17a)$$

Рассмотрим первую строчку

$$dR_x = dmj_x. \quad (3.176)$$

Масса тела

$$dm = \rho \, dx \, dy \, dz.$$

¹ См., например Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М. — Л.: Госэнергиздат, 1958.

Ускорение вдоль оси Ox равно первой производной скорости по времени t , т. е. $j_x = \frac{du_x}{dt}$, и так как

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

то правая часть уравнения (3.176)

$$dm j_x = \rho dx dy dz j_x = \rho dx dy dz \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right).$$

Перейдем к определению силы dR_x .

Внешними силами являются поверхностные силы (силы давления жидкости, окружающей выделенную элементарную массу, на ее боковые грани) и силы объемные (или массовые). В соответствии с расположением выделенного объема получим (рис. 3.7):

проекция силы давления на боковую грань $ABCD$ равна dP_1 , а на грань $A'B'C'D'$ равна dP_2 и

$$dP_1 = p dy dz, \text{ а } dP_2 = p' dy dz,$$

здесь p и p' — среднее гидродинамическое давление для указанных граней:

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Таким образом,

$$dP_2 = p' dy dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Сила dP_2 войдет в уравнение со знаком минус.

Итак, сумма проекций сил давления на боковые грани будет равна:

$$dP_1 - dP_2 = p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Проекцию объемной силы dF_x определим так:

$$dF_x = dF \cos \alpha = \rho dx dy dz X,$$

где X — проекция ускорения объемной силы; ρ — плотность; $dx dy dz = dW$ — объем.

Так как иных сил нет, то проекция равнодействующей

$$dR_x = dP_x - dP_s + dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho dx dy dz X.$$

Таким образом, уравнение (3.176) получим в таком виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho dx dy dz X = \\ & = \rho dx dy dz \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

или после сокращения на $\rho dx dy dz$, т. е. относя уравнение к единице массы, в таком виде:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Аналогично составим выражения для сил dR_y и dR_z и для величин dmj_y и dmj_z .

Тогда результирующе получим три уравнения Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Или в краткой записи

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19a)$$

Эта система уравнений относится к движению как капельной, так и газообразной жидкости. Здесь в систему трех уравнений входят пять неизвестных: составляющие скорости u_x , u_y , u_z , давление p и плотность ρ . По-

этому требуются дополнительно еще два уравнения. Таковыми будут уравнение неразрывности и характеристическое уравнение.

3.4.2. Уравнение неразрывности

Определим расход жидкости, проходящий через элементарную площадку $d\omega$ некоторой криволинейной поверхности. За единицу времени через эту площадку проходит объем, равный объему dW цилиндра (рис. 3.8), с площадью основания $d\omega$ и высотой u_n , а это и будет искомый расход.

В действительности $dQ = dW$. Но объем

$$dW = h d\omega,$$

где h — высота цилиндра. Из рис. 3.8 видно, что $h = u \cos \alpha$, где $u \cos \alpha$ представляет собой проекцию скорости u на нормаль, проведенную к поверхности S в точке, принадлежащей площадке $d\omega$. Поэтому

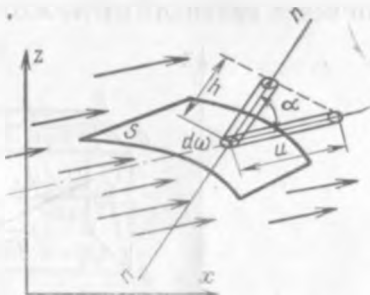


Рис. 3.8

$$dQ = dW = u \cos \alpha d\omega = u_n d\omega. \quad (3.20)$$

Итак, расход, проходящий через элементарную площадку $d\omega$, равен произведению ее площади $d\omega$ на проекцию скорости на нормаль к площадке.

Чтобы получить полный расход через некоторую ограниченную замкнутым контуром часть поверхности S , надо просуммировать все элементарные расходы

$$Q = \int u_n d\omega.$$

Здесь скорости u_n различны по направлению, так как нормали к криволинейной поверхности в разных точках этой поверхности не параллельны друг другу.

Этот результат можно использовать в частном случае для определения расхода, проходящего через боковые грани $ABCD$, $ABB'A'A$ и $AA'D'DA$ параллелепипеда, изображенного на рис. 3.9. Допустим, что поток имеет направление, как показано на рисунке. Тогда он, прони-

зывая пространство параллелепипеда, входит внутрь параллелепипеда через указанные выше три его грани и выходит через три остальные, т. е. через грань $CC'D'DC$, грань $A'B'C'D'A'$ и $BB'C'CB$.

Искомый общий расход, проходящий через параллелепипед, по изложенному выше, будет равен сумме трех расходов, проходящих через каждую грань, т. е.

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z,$$

где dQ_x , dQ_y и dQ_z — расходы, проходящие соответственно через грани $ABCD$, $ABB'A'A$ и $AA'D'DA$.

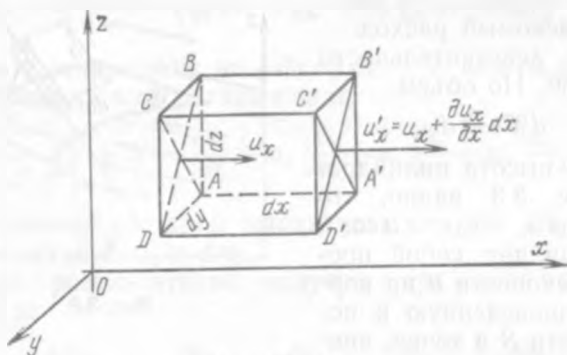


Рис. 3.9.

Вывод уравнения неразрывности. Внутри потока построим параллелепипед $ABCD D'C'B'A'$ (рис. 3.9) и будем рассматривать его как некоторое пространство, через которое протекает данная жидкость.

Если жидкость движется так, что внутри ее не образуется пустот, т. е. жидкость не претерпевает разрыва, то для несжимаемой жидкости количества массы жидкости, входящей в данный объем и выходящей из нее, равны между собой, а их разность равна нулю, а для сжимаемой жидкости эта разность равна изменению массы, обусловленному изменением плотности. Чтобы записать это условие неразрывности течения в математической форме, составим уравнение изменения массы жидкости внутри выделенного параллелепипеда.

За время dt через грань $ABCD$ внутрь параллелепипеда войдет масса $\delta M'_x$, очевидно, бесконечно малая:

$$\delta M'_x = \rho u_x dt \, dy \, dz, \quad (3.21)$$

а выйдет через грань $A'B'C'D'A'$ масса

$$\delta M''_x = \rho' u'_x dt dy dz. \quad (3.22)$$

Здесь плотность ρ и скорость u_x на входе (в плоскости грани $ABCD$) в общем случае не равны плотности ρ' и скорости u'_x на выходе (в плоскости грани $A'B'C'D'A'$). При этом изменение ρ и u обуславливается изменением только координаты x , так как втекание и вытекание происходят одновременно. Поэтому обе функции (ρ и u_x) изменяются только на значение частного дифференциала $dx = \frac{\partial(\quad)}{\partial x} dx$:

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx;$$

$$u'_x = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx,$$

и, следовательно, выходящая масса

$$\begin{aligned} \delta M'_x &= \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt dy dz = \\ &= \left[\rho u_x + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} (dx)^2 \right] dt dy dz. \end{aligned}$$

Но

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx,$$

а $\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} (dx)^2$ есть бесконечно малая величина высшего порядка, и ею можно пренебречь.

Поэтому получим:

$$\delta M''_x = \left(\rho u_x + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx \right) dt dy dz. \quad (3.23)$$

Если за время dt масса жидкости внутри параллелепипеда увеличилась за счет притока на $\delta M'_x$, а уменьшилась за счет вытекания на $\delta M''_x$, то приращение массы вследствие движения вдоль координатной оси Ox будет:

$$\begin{aligned} \delta M_x &= \delta M'_x - \delta M''_x = \rho u_x dt dy dz - \\ &- \left(\rho u_x + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx \right) dt dy dz = - \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dt dx dy dz. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Аналогично найдем, что в результате движения жидкости вдоль осей Oy и Oz приращение массы за время dt составит:

$$\delta M_y = - \frac{\partial_s(\rho u_y)}{\partial y} dt dx dy dz; \quad (3.24a)$$

$$\delta M_z = - \frac{\partial_s(\rho u_z)}{\partial z} dt dx dy dz.$$

А следовательно, общее приращение массы за время dt

$$\begin{aligned} \delta M &= \delta M_x + \delta M_y + \delta M_z = \\ &= - \left(\frac{\partial_s(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial_s(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial_s(\rho u_z)}{\partial z} \right) dt dx dy dz. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Это изменение массы при условии неразрывности движения должно равняться изменению массы, обусловленному изменением плотности.

В начальный момент t масса внутри параллелепипеда будет равна:

$$\delta m_t = \rho dx dy dz. \quad (3.26)$$

В конечный момент $t+dt$ средняя для объема плотность ρ изменится и будет равна ρ' . Это изменение плотности происходит независимо от координат (так как пространство параллелепипеда неподвижно). Поэтому

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (3.27)$$

Следовательно, в конечный момент $t+dt$ масса жидкости в объеме параллелепипеда составит:

$$\delta m_{t+dt} = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz. \quad (3.28)$$

Таким образом, приращение массы за время dt

$$\delta m = \delta m_{t+dt} - \delta m_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

В условиях неразрывности

$$\delta M = \delta m, \quad (3.29)$$

т. е.

$$-\left[\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} \right] dt dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

После сокращения на $dt dx dy dz$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.30)$$

Это и есть искомое уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности является четвертым, добавочным к уравнениям Эйлера.

В частном случае при установившемся движении плотность ρ , как и все остальные параметры движения, от времени не зависит и $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Поэтому уравнение неразрывности получит вид:

$$\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.31)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ (как при установившемся, так и при неустановившемся движении), и уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.32)$$

Рассмотрим физический смысл производных $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial z}$. Пусть в момент времени t некоторый объем жидко-

сти занимает положение $OacbO$, и размеры его сторон будут dx и dy . За промежуток времени dt , т. е. к моменту $t+dt$, он переместится и займет положение $O'a'c'b'O'$ (рис. 3.10).

Определим изменение длины отрезка Oa при его перемещении за время dt в положение $O'a'$, определяя это изменение в проекции на ось Ox .

Легко видеть, что искомое изменение длины указанного отрезка равно разности расстояний, пройденных точками O и a за

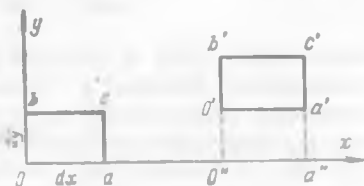


Рис. 3.10.

время dt в направлении оси Ox .

Очевидно, что расстояние, проходимое точкой O за время dt , равно $u_x dt$, а расстояние, проходимое точкой a , равно $\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dt$.

Следовательно, разность этих расстояний dl будет равна:

$$dl = \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dt - u_x dt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt.$$

Это будет абсолютное изменение длины отрезка Oa , т. е. деформация за время dt . То же за единицу времени будет в dt раз меньше, т. е. $\frac{dl}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$. Тогда относительное изменение длины отрезка (на единицу длины вдоль оси Ox)

$$\frac{\left(\frac{dl}{dt}\right)}{dx} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Итак, производная $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ представляет собой скорость

относительного удлинения (или укорочения) отрезка Oa , т. е. скорость относительной линейной деформации ребра Oa выделенного жидкого элемента вдоль оси Ox .

Не повторяя рассуждений, видим, что производные $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ представляют собой соответствующие скорости относительных линейных деформаций в направлении осей Oy и Oz .

Таким образом, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

показывает, что в условиях сплошности движения несжимаемой жидкости сумма скоростей относительных линейных деформаций ребер параллелепипеда равна нулю (коэффициент объемного расширения равен нулю). Другими словами, это уравнение указывает, что движение жидкости осуществляется так, что данная масса все время занимает один и тот же объем.

3.4.3. Характеристическое уравнение

Пятым уравнением, добавляемым к уравнениям Эйлера, является характеристическое уравнение, которое определяет физическое свойство жидкости

$$\rho = \varphi(p, T),$$

где плотность ρ является функцией давления p и температуры T .

Таким образом, для решения задачи о движении идеальной жидкости мы располагаем пятью уравнениями, что позволяет считать составление общей системы уравнений Эйлера законченным.

3.4.4. Уравнения движения невязкой жидкости в координатах Лагранжа

В системе уравнений Эйлера (3.19) правые части уравнений представляют собой полные производные компонентов скорости, а именно $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$, поэтому можно, изменив порядок слагаемых, эту систему записать в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{du_x}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ Y - \frac{du_y}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ Z - \frac{du_z}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Далее, так как $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$ и $u_z = \frac{dz}{dt}$, то те

же уравнения могут быть записаны и так:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

В системе (3.34) ускорения выражены производными $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Но в методе Лагранжа, где x, y, z являются функциями независимых переменных (a, b, c, t) , скорости и ускорения определяются как частные производные $u_x = \frac{\partial x}{\partial t}$, $j_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ и т. д. Поэтому (3.30) [перепишется так:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Чтобы записать эту систему в функциях независимых переменных Лагранжа, поступим так. Умножив первую строчку этой системы на $\frac{\partial x}{\partial a}$, вторую на $\frac{\partial y}{\partial a}$ и третью на $\frac{\partial z}{\partial a}$ и сложив, получим:

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a} = \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}. \end{aligned}$$

Производя аналогичные операции с производными $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ и $\frac{\partial z}{\partial b}$, а также с производными $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$ и $\frac{\partial z}{\partial c}$, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}; \\ \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b}; \\ \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

3.4.5. Уравнение неразрывности в координатах Лагранжа

В некоторый момент времени t_0 выделим массу жидкости, заключенную в объеме $\delta W = da db dc$, и плотностью ρ_0 :

$$\delta M = \rho_0 da db dc.$$

В другой момент времени t масса остается той же, но изменяются объем и плотность и, следовательно,

$$\frac{\partial \delta M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 da db dc) = 0. \quad (3.37)$$

С учетом зависимости координат x, y и z от начальных координат (a, b, c, t) можно записать:

$$dW = dx dy dz = D da db dc.$$

Так как масса в новом положении равна начальной, то

$$\delta M = \rho_0 da db dc = \rho D da db dc, \quad (3.38)$$

где D — функциональный определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

По условию

$$\frac{\partial \delta M}{\partial t} = 0.$$

Поскольку объем $dW = da db dc$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho D) = 0$$

или

$$\frac{\partial (\rho D)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.39)$$

Для плоского движения (например, в плоскости zOx) получим более простое выражение

$$\frac{\partial (pD)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \rho \left[\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial c} \right] = 0$$

или, что то же,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a} \right) \right] = 0. \quad (3.40)$$

3.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

3.5.1. Предварительные замечания

Интегрирование системы Эйлера (1.15), (3.19), (3.30) позволяет получить значения скоростей и давлений в потоке невязкой жидкости

$$\left. \begin{aligned} u_x' &= F_1(x, y, z, t); \\ u_y' &= F_2(x, y, z, t); \\ u_z &= F_3(x, y, z, t); \\ p &= F_4(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Для получения траекторий частиц жидкости надо от координат Эйлера перейти к координатам Лагранжа, т. е. получить выражения

$$x = f_1(a, b, c, t);$$

$$y = f_2(a, b, c, t);$$

$$z = f_3(a, b, c, t).$$

Однако для практических целей такие детали часто не представляют интереса, и вполне достаточным оказывается знание поля скоростей. Решения эйлеровой системы уравнений содержат произвольные постоянные и произвольные функции, поэтому для их определенности необходимы дополнительные условия. Таковыми являются граничные и начальные условия.

Граничные условия могут быть двух родов: динамические (например, давление на свободной поверхности $p=p_0$) и кинематические (например, условие — проекция полной скорости u на направление нормали к граничной поверхности должна быть равна нулю, если граница неподвижна).

Начальными условиями являются заданные значения искомых функций в начальный момент.

Интегрирование системы (3.19) в общем виде осуществлено для двух случаев: для случая потенциального движения жидкости и для случая установившегося (хотя бы и вихревого) движения.

3.5.2. Интегрирование уравнения для потенциального потока

Уравнения Эйлера являются общими. Преобразуем их так, чтобы можно было бы исключить из них вихревые движения, т. е. исключить компоненты вихря.

Всегда имеем:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2, \quad (3.42)$$

где u — полная скорость, а u_x , u_y , u_z — ее проекции по координатным осям. Эти скорости являются функциями x , y , z и t .

Определим частные производные функции $u(x, y, z, t)$ по x , y и z и запишем их после деления на 2 в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial z} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial z} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Далее из первого уравнения эйлеровой системы (3.19)

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

вычтем соответственно из левой и правой частей написанное выше выражение частной производной по x

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} +$$

$$+u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} - u_y \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \\ + u_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (3.44)$$

Сопоставляя выражения, стоящие в скобках правой части уравнения (3.44), с уравнениями компонентов вихря (3.14), видим

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\zeta; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\eta,$$

т. е. выражения, стоящие в скобках, равны удвоенным компонентам вихря соответственно по осям Oz и Oy .

Поэтому для первой строки уравнений Эйлера получим:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2(u_z \eta - u_y \zeta), \quad (3.45)$$

а произведя аналогичные операции со второй и третьей строчкой, получим соответственно:

$$\left. \begin{aligned} Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2(u_x \zeta - u_z \xi); \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + 2(u_y \xi - u_x \eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.45a)$$

Записанные в такой форме уравнения Эйлера позволяют отделить вихревые движения от безвихревых (т. е. потенциальных).

Действительно, для потенциальных движений компоненты вихря равны нулю, т. е. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$, потому вторые слагаемые правых частей уравнений (3.45) и (3.45a) также равны нулю, и, следовательно, для потенциальных движений система уравнений Эйлера получит вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_x}{\partial t}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_y}{\partial t}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Эта система и подлежит интегрированию. Рассмотрим слагаемые, входящие в систему (3.46).

Ранее (§ 3.3.2) было указано, что при движении жидкости в условиях, когда внешние силы имеют потенциал $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$, проекции ускорения внешних объемных сил X , Y и Z определяются как частные производные по координатам функции $U(x, y, z)$. Поэтому имеем:

$$X = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

Далее слагаемые $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ также могут рассматриваться как частные производные некоторой функции $P(x, y, z)$

$$P = \int \frac{dp}{\rho}. \quad (3.47)$$

Действительно, частная производная от этой функции по x будет равна:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Следовательно, функция $P(x, y, z)$, которая удовлетворяет равенству (3.47), действительно существует, если существует интеграл $\int \frac{dp}{\rho}$. Такой интеграл имеет место, если или $\rho = \text{const}$ или $\rho = f(p)$.

Примечание. Условие $\rho = f(p)$ относится к сжимаемой жидкости (например, к воздуху). Такую непрерывную среду часто называют баротропной жидкостью.

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dp}{\rho}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dp}{\rho}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{dp}{\rho}. \end{aligned}$$

Рассмотрим также производные $\frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial t}$.

Так как движение потенциальное, то, как известно, существует функция $\varphi(x, y, z, t)$, для которой

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

и аналогично

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right);$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Воспользовавшись приведенными зависимостями, можем записать первую строку уравнения Эйлера в такой форме:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dp}{\rho} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

В результате, меняя знак, получаем следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Отсюда следует, что $\left(-U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$ представляет

собой некоторую функцию времени. Следовательно, получим такой интеграл:

$$-U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial z}{\partial t} = F(t). \quad (3.49)$$

Это есть интеграл Лагранжа.

Если объемной силой является сила тяжести, то при вертикальном расположении координатной оси Oz

$$X=0; Y=0 \text{ и } Z=-g$$

и, следовательно

$$dU = X dx + Y dy + Z dz = -g dz,$$

откуда

$$U = -gz + C; P = gz + C$$

(произвольную постоянную C можно принять равной нулю).

Тогда интеграл Лагранжа можно записать так:

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial z}{\partial t} = F(t) + C. \quad (3.49a)$$

Для установившегося потенциального движения несжимаемой жидкости под действием силы тяжести имеем: $-U = gz$; $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$, так как $\rho = \text{const}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, поскольку движение установившееся.

Подставляя значения этих величин в уравнение (3.49), получаем:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C$$

или

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C = \text{const}. \quad (3.49b)$$

3.5.3. Интегрирование уравнения для установившегося движения

В этом случае движение может быть и вихревым, но так как оно установившееся, то частные производные по времени равны нулю и, следовательно,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0.$$

Тогда уравнения Эйлера будут записаны так:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Умножим эти уравнения: первое на dx , второе на dy и третье на dz , понимая под dx , dy и dz соответствующие проекции элементарного перемещения ds .

Для первой строки (аналогично и для других) запишем:

$$X dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} dx.$$

Преобразуем теперь правую часть этого уравнения. Поскольку

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{и} \quad u_z = \frac{dz}{dt},$$

то можно записать:

$$\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} dx &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \\ + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial z} dx &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \\ + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u_x}{\partial z} dz &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \\ + u_x \frac{\partial u_x}{\partial z} dz &= u_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right) = \\ &= u_x du_x = \frac{du_x^2}{2}. \end{aligned}$$

Итак, первое уравнение получит вид:

$$X dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{du_x^2}{2}.$$

Второе и третье уравнения по аналогии:

$$Y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy = \frac{du_y^2}{2};$$

$$Z dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz = \frac{du_z^2}{2}.$$

Сложим полученные уравнения, сгруппировав слагаемые соответственным образом:

$$(X dx + Y dy + Z dz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x^2 + du_y^2 + du_z^2}{2} =$$

$$= \frac{d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{2} = \frac{du^2}{2}. \quad (3.51)$$

Здесь u представляет полную скорость в данной точке.

В левой части уравнения можно записать:

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z),$$

где $U(x, y, z)$ — силовая функция.

Трехчлен во второй скобке представляет собой полный дифференциал dp , поэтому

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{dp}{\rho}.$$

Итак,

$$dU(x, y, z) - \frac{dp}{\rho} - \frac{du^2}{2} = 0$$

или

$$-dU(x, y, z) + \frac{dp}{\rho} + \frac{du^2}{2} = 0. \quad (3.52)$$

Так как это уравнение (3.52) дано в полных дифференциалах, то, интегрируя, получаем:

$$-U(x, y, z) + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (3.53)$$

Это выражение называют интегралом Бернулли — Эйлера.

Если движение происходит под действием только сил тяжести и жидкость несжимаема (плотность $\rho = \text{const}$), то

$$U(x, y, z) = -gz \text{ и } \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho},$$

и тогда, разделив на g , получим

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{const}, \quad (3.54)$$

т. е. получим известное уравнение Бернулли в его обычной форме.

3.6. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Отметим, что уравнение Бернулли в виде (3.54) было получено выше как один частный вывод из интеграла Лагранжа (3.496). Однако между уравнениями Бернулли (3.496) и (3.54) имеет место существенное различие. Интеграл Лагранжа в частном виде [как уравнение

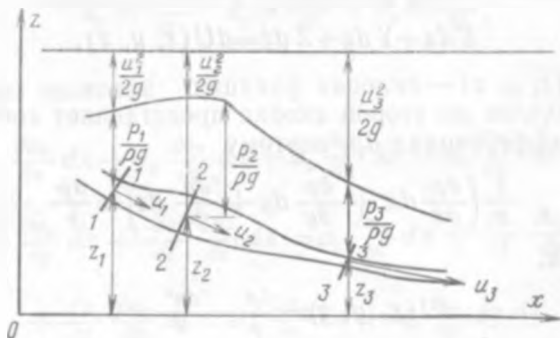


Рис. 3.11.

Бернулли (3.496)] относится ко всему пространству данного потенциального потока, т. е. величина H остается одной и той же во всем пространстве. Тогда как для установившегося вихревого движения H постоянно только вдоль одной линии тока или траектории (для элементарной струйки). Это заключение следует из условий интегрирования для потенциальных течений (существования потенциала скорости).

Уравнение Бернулли имеет большое практическое и теоретическое значение.

Прежде всего обратим внимание на то, что все слагаемые уравнения Бернулли записаны в линейной размерности: z — геометрическая высота данной точки, $p/\rho g$ — высота, определяемая величиной гидродинамического давления, и $u^2/2g$ — высота, определяемая скоростью движения данной частицы, величину $u^2/2g$ в гидравлике принято называть скоростной высотой, или скоростным напором. Согласно уравнению Бернулли сумма этих трех высот остается неизменной вдоль данной элементарной струйки, что иллюстрируется рис. 3.11.

3.6.1. Энергетический характер уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли можно рассматривать и в энергетическом смысле, подобно тому как рассматривалось основное уравнение гидростатики (§ 1. 2)

$$z + \frac{p}{\rho g} = H = \text{const.}$$

Сопоставляя основное уравнение гидростатики с уравнением Бернулли (3.54), легко видеть, что первые два слагаемых уравнения Бернулли по написанию и по энергетическому смыслу совпадают с левой частью основного уравнения гидростатики и представляют собой потенциальную энергию положения и давления, отнесенную к единице веса жидкости¹. По совокупности потенциальная энергия здесь равна:

$$\mathcal{E}_{\text{пот}} = z + \frac{p}{\rho g}.$$

Но в уравнение Бернулли входит третье слагаемое, связанное со скоростью движения этой массы. Очевидно, $u^2/2g$ можно рассматривать как ее кинетическую энергию, также отнесенную к единице веса жидкости

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{u^2}{2g}.$$

Тогда правая часть уравнения

$$H = \mathcal{E}_{\text{пот}} + \mathcal{E}_{\text{кин}}$$

¹ См. прим. на 22 с.

и выражает полный запас энергии элементарной струйки, отнесенный к весу жидкости.

В связи с этим уравнение Бернулли часто называют уравнением энергии.

Использование уравнения Бернулли основано на написании этого уравнения для двух выбранных поперечных сечений 1—1 и 2—2 (рис. 3.11):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}, \quad (3.55)$$

для одного из которых все три слагаемых известны. Тогда во втором сечении по двум заданным или независимо определенным слагаемым находится третье.

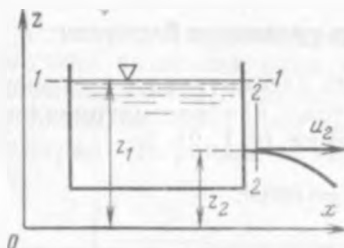


Рис. 3.12.

Покажем это на простейшем примере. Требуется определить скорость истечения из резервуара (рис. 3.12). Заданы z_1 и z_2 . Давление $p_1 = p_2 = p_{\text{ат}}$. Тогда из уравнения (3.55) находим

$$u_1 = \sqrt{2g \left(z_1 - z_2 + \frac{u_1^2}{2g} \right)}$$

или, пренебрегая малой величиной u_1 ,

$$u_1 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}.$$

3.6.2. Уравнение Бернулли для потока с поперечным сечением конечных размеров

Прежде всего рассмотрим закон распределения давления в поперечном сечении потока для двух случаев—при свободном движении и плавноизменяющемся движении.

Свободным движением потока называют такое, при котором движение каждой частицы происходит только под действием внешних объемных сил (например, в свободном полете струи), и, следовательно,

$$X = \frac{du_x}{dt}; \quad Y = \frac{du_y}{dt} \quad \text{и} \quad Z = \frac{du_z}{dt}. \quad (3.56)$$

Обращаясь к системе уравнений Эйлера

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt};$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt};$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt},$$

видим, что в таком случае производные $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ каждая в отдельности равны нулю:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (3.57)$$

что означает, что гидродинамическое давление p не зависит от координат x , y и z . Другими словами, при свободном движении давление во всех точках потока одно и то же. Так, на водопаде (рис. 3.13) давления в точках 1, 2 и 3 равны между собой:

$$p_1 = p_2 = p_3.$$

Но в точке 3 давление атмосферное $p_3 = p_{\text{ат}}$, следовательно, и во всем потоке давление равно атмосферному.

Плавнo изменяющимся движением называют такое, при котором угол расхождения линий токов настолько мал, что проекциями скоростей и ускорений на плоскость, нормальную общему направлению потока, можно пренебречь, а также можно пренебречь и кривизной этих линий.

Так, если общее направление потока параллельно оси Ox , то $u_y \approx u_z \approx 0$, а также $\frac{du_y}{dt} \approx \frac{du_z}{dt} = 0$, тогда система уравнений Эйлера примет вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Легко видеть, что в плоскости zOy (нормальной к направлению потока) распределение давления p определяется двумя последними уравнениями Эйлера, которые

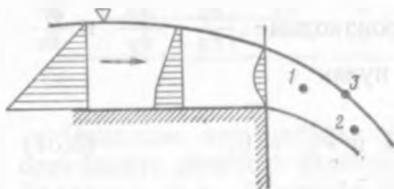


Рис. 3.13.

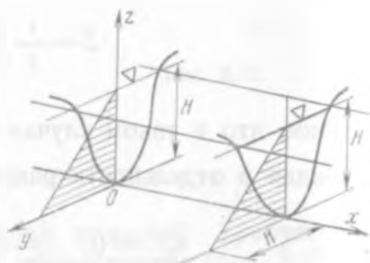


Рис. 3.14.

совпадают с соответствующими уравнениями равновесия жидкости. Итак, при плавноизменяющемся движении распределение давления в поперечном сечении потока происходит по закону гидростатики (рис. 3.14).

Определим теперь удельную энергию потока, т. е. подсчитанную в среднем для единицы веса жидкости.

Удельная энергия элементарной струйки

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}, \quad (3.59)$$

а полная энергия элементарной струйки при ее весовом расходе

$$dQ_G = \rho g dQ = \rho g u d\omega$$

будет

$$de = \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega.$$

Полный запас энергии потока равен сумме энергии элементарных струек

$$e_n = \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega,$$

удельная энергия потока

$$E = \frac{e_n}{\rho g Q} = \frac{\int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega}{\rho g Q}, \quad (3.60)$$

где $\rho g Q = Q_G$.

Вычислим числитель

$$\begin{aligned} e_n &= \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega = \\ &= \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g u d\omega + \int_{\omega} \frac{u^3}{2g} \rho g d\omega. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Первый интервал в правой части

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g u d\omega &= \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g \int_{\omega} u d\omega = \\ &= \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q, \end{aligned} \quad (3.62)$$

так как по гидростатическому закону $\left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \text{const}$;
второй интеграл

$$\int_{\omega} \frac{u^3}{2g} \rho g d\omega = \frac{\rho g}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega.$$

Для распределения скорости в поперечном сечении можно записать:

$$u = v + e,$$

где v — средняя скорость по сечению, а $e = u - v \geq 0$.
Сделав подстановку, получим:

$$\begin{aligned}\int_{\omega} u^2 d\omega &= \int_{\omega} (v^2 + 3v^2 s + 3v s^2 + s^3) d\omega = \\ &= v^2 \omega + 3v \int_{\omega} s^2 d\omega,\end{aligned}$$

так как

$$\int_{\omega} 3v^2 s dv = 3v^2 \int_{\omega} s d\omega = 0, \text{ а } s^3 \approx 0.$$

Второй интеграл уравнения (3.61)

$$\begin{aligned}\frac{\rho g}{2g} \int_{\omega} u^2 d\omega &= \frac{\rho g}{2g} \left(v^2 \omega + 3v \int_{\omega} s^2 d\omega \right) = \\ &= \frac{\rho g}{2g} v^2 \omega \left(1 + 3 \frac{\int_{\omega} s^2 d\omega}{v^2 \omega} \right).\end{aligned}$$

Обычно выражения в скобках обозначают

$$\alpha^2 = 1 + 3 \frac{\int_{\omega} s^2 d\omega}{v^2 \omega}$$

и называют коэффициентом Корнолиса. Тогда

$$\frac{\rho g}{2g} \int_{\omega} u^2 d\omega = \rho g \frac{v^2 \omega}{2g} \alpha^2 = \frac{\alpha v^2}{2g} \rho g Q. \quad (3.63)$$

Подставляя (3.62) и (3.63) в (3.61), получаем полный запас энергии потока

$$e_n = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q + \frac{\alpha v^2}{2g} \rho g Q$$

или

$$e_n = \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) \rho g Q. \quad (3.64)$$

Тогда удельная энергия потока, т. е. отнесенная к единице веса, составит:

$$E = \frac{e_n}{\rho g Q} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (3.65)$$

Итак, уравнение Бернулли для потока (3.65) отличается от уравнения Бернулли для элементарной струйки (3.59) только введением коэффициента Кориолиса α и применимостью лишь к сечениям с плавноизменяющимся движением.

3.7. ДВИЖЕНИЕ вязкой жидкости

3.7.1. Уравнение Навье—Стокса

Известно, что реальные жидкости сопротивляются сдвигу одних частиц относительно соседних или одних слоев жидкости относительно других. Ньютон установил, что сила сопротивления сдвигу у жидких тел в проти-

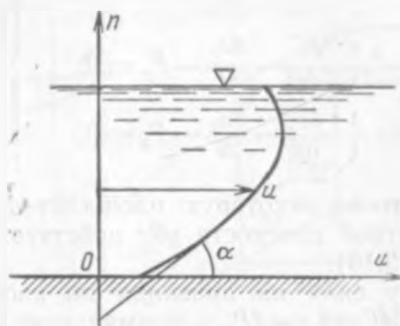


Рис. 3.15.

воположность закону Кулона для твердых тел не зависит от давления, но зависит от площади, по которой происходит сдвиг, а также от скорости сдвига.

В математической записи эти законы выражены формулой

$$F = \mu S \frac{du}{dn}, \quad (3.66)$$

именуемой законом Ньютона. Здесь F —сила сопротивления; S —площадь сдвига (расчетная), а $\frac{du}{dn}$ —градиент скорости по нормали к направлению потока (рис. 3.15).

Из (3.66) получим касательное напряжение

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}. \quad (3.66a)$$

Законы Ньютона позволяют составить общие дифференциальные уравнения с учетом сил сопротивления, которые будем называть силами вязкости.

Силы вязкости можно условно свести к объемным силам и ускорение этих сил определять отношением

$$F = \frac{R}{V}.$$

Обозначим проекции ускорения сил вязкости соответственно через F_x , F_y и F_z и введем их в уравнения Эйлера. Тогда

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} - F_x &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{du_y}{dt} - F_y &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{du_z}{dt} - F_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Допустим, что на некоторую площадку $dydz$ в пределах координатной плоскости yOz действует сила вязкости dF (рис. 3.16).

Разлагая эту силу на проекции по координатным осям, получим $dF \cos \alpha = dP_x$ — нормальную к площади $dydz$; dT_y — касательную к площади $dydz$ в направлении оси Oy ; dT_z — касательную силу в направлении оси Oz .

Отнеся эти проекции силы вязкости к единице площади, т. е. разделив на $dydz$, получим три напряжения:

нормальное $p_x = \frac{dP_x}{dydz}$ — в направлении оси Ox ;

касательное $\tau_y = \frac{dT_y}{dydz}$ — в направлении оси Oy ;

касательное $\tau_z = \frac{dT_z}{dydz}$ — в направлении оси Oz .

Итак, сила вязкости определила собой три напряжения в пределах выделенной площадки — нормальное (напряжение сжатия или растяжения) и два касательных. Эти напряжения действуют по разным направлениям, каждое по своему. Таким образом, при проектировании напряжений (и сил, ими определяемых) на ка-

кую-либо координатную ось в число действующих напряжений войдет только одно из трех напряжений (два других проектируются в точку).

Рассмотрим теперь напряжения, действующие по граням прямоугольного параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ (рис. 3.17). Здесь из шести граней параллелепипеда три принадлежат трехгранному углу с вершиной A и три трехгранному углу с вершиной C' .

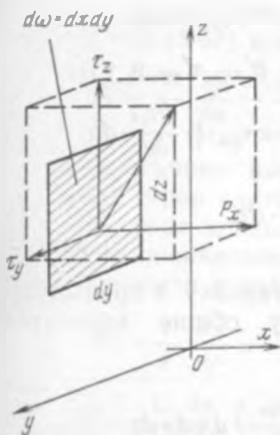


Рис. 3.16

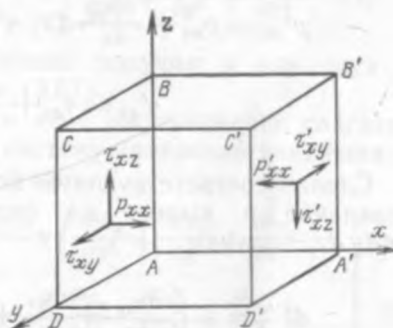


Рис. 3.17.

Будем считать, что течение имеет направление от угла A к углу C' , и определим сначала проекции на ось Ox всех напряжений трех граней угла A .

Для удобства записей введем двойную индексацию напряжений, например, для напряжений грани $ABCD$: нормальное напряжение p_{xx} ; касательное напряжение τ_{xy} ; касательное напряжение τ_{xz} .

Здесь первый индекс x обозначает, что напряжение принадлежит к грани, нормальной к оси Ox , а второй индекс указывает, в направлении какой оси действует данное напряжение. Например: напряжение p_{xx} действует параллельно оси Ox , а напряжение τ_{xz} действует в направлении оси Oz и т. д. Аналогично будут записываться напряжения и для двух других граней угла A .

С учетом таких обозначений составим сумму проекций на ось Ox сил вязкости, действующих на грани угла A :

$$p_{xx} dy dz + \tau_{yx} dx dz + \tau_{zx} dx dy.$$

Составим теперь аналогичную сумму сил вязкости для граней угла C' :

$$p'_{xx}dy\,dz + \tau'_{yx}dx\,dz + \tau'_{zx}dx\,dy.$$

Эти силы будут действовать в противоположном направлении, и тогда общая сила в направлении оси x

$$dF'_x = (p_{xx} - p'_{xx})dy\,dz + (\tau_{yx} - \tau'_{yx})dx\,dz + (\tau_{zx} - \tau'_{zx})dx\,dy.$$

Определим теперь напряжения p'_{xx} , τ'_{yx} и τ'_{zx} :

$$p'_{xx} = p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx; \quad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy;$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz.$$

Сделав соответствующую подстановку в предыдущее уравнение и вынеся за скобку общие множители $dx\,dy\,dz$, получим:

$$dF'_x = - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz,$$

а отнеся эту сумму проекций сил к единице массы, т. е. разделив на $\rho\,dx\,dy\,dz$, получим проекции ускорения сил вязкости на ось Ox [т. е. то ускорение, которое введено в уравнение Эйлера (3.67)]:

$$F_x = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right). \quad (3.68)$$

Определим теперь касательные напряжения, пользуясь законом Ньютона:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \text{и} \quad \tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Аналогично можно принять нормальные напряжения p_{xx} определяемыми по закону Ньютона, т. е. принять

$$p_{xx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

при этом если $\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0$, то p_{xx} — напряжение растяжения, а при $\frac{\partial u_x}{\partial x} < 0$ — сжатия. Сделав подстановки в уравнение (3.68), получим:

$$F_x = -\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right). \quad (3.69)$$

Но $\mu/\rho = \nu$, поэтому можно записать первую строчку уравнений (3.67) в виде

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Аналогичные выражения получим и для двух следующих строк системы (3.67).

Принимая несколько иное расположение слагаемых, запишем окончательно систему уравнений движения вязкой жидкости в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье — Стокса.

3.7.2. Уравнение Бернулли

Уравнение энергии (Бернулли) для реальной жидкости может быть написано как для элементарной струйки, так и для потока с поперечным сечением конечных размеров. В обоих случаях это уравнение отличается от уравнения для идеальной (т. е. невязкой) жидкости дополнительным слагаемым, учитывающим работу сил сопротивления.

Для элементарной струйки реальной жидкости будем иметь

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + h_{\text{пот}}. \quad (3.71)$$

а для потока

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{w, 0-n} \quad (3.71a)$$

В обоих случаях левая часть уравнения определяет собой полный запас удельной энергии в некотором поперечном сечении, принятом за начальное.



Рис. 3.18.

В обоих случаях в правой части вводится четвертое слагаемое $h_{w, 0-n}$, определяющее собой ту часть начального запаса удельной энергии, которая расходуется потоком на преодоление гидравлических сопротивлений на протяжении потока жидкости от начального сечения $0-0$ до данного $n-n$. Графически это иллюстрируется на рис. 3.18. Сопоставим его с рис. 3.11: вдоль по течению h_w непрерывно возрастает.

Линия энергии непрерывно опускается, так как

$$\frac{dh_w}{ds} > 0, \text{ а } \frac{dE}{ds} < 0; \quad (3.72)$$

пьезометрическая линия может и повышаться и понижаться, т. е. может быть

$$\frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)}{ds} \geq 0. \quad (3.73)$$

Отметим, что величину h_w в курсе гидравлики называют потеряннм напором, а величину dh_w/ds — гидравлическим уклоном и определяют его равенством

$$i_l = \frac{dh_w}{ds} \quad (3.74)$$

Отметим, что линию $a-b$ на рис. 3.18 называют линией энергии, а линию $c-d$ — пьезометрической.

3.8. УРАВНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ

Для решения многих вопросов механики жидкости оказывается необходимым использование уравнения импульсов или (что то же) уравнения изменения количества движения.

Известно, что для материальной точки это уравнение может быть записано в проекции на данную ось так:

$$(mu)_{t+dt} - (mu)_t = \Sigma R \cos \alpha dt,$$

где m и u — масса и скорость материальной точки; R — действующая сила.

Для системы материальных точек это уравнение получит вид

$$\Sigma \Delta(mu) = \Sigma \Sigma R \cos \alpha dt \quad (3.75)$$

и может быть прочитано так: приращение количества движения данной системы равно сумме импульсов сил, действующих на массу этой системы за тот же промежуток времени dt .

Жидкость представляет собой материальную систему, сплошь занимающую пространство своего движения, поэтому уравнение импульсов должно записываться в интегральной форме в проекциях по координатным осям, например, в проекции на ось Ox :

$$\int_V d[(m\bar{u})_{t+dt}] - \int_V d(m\bar{u})_t = \int_0^t R_x dt. \quad (3.76)$$

Аналогичные выражения получим и в проекции на оси Oy и Oz .

В целях краткости изложения ограничимся рассмотрением использования уравнения импульсов на примере решения одной из многих возможных задач.

Допустим, что в условиях установившегося движения требуется определить реакцию стенок напорного водовода (рис. 3.19) для участка от сечения 1—1 до сечения 2—2. Для решения этой задачи составим уравнение импульсов для массы жидкости, заключенной в водоводе между указанными двумя сечениями (масса m).

За время dt эта масса переместится и займет новое положение между сечениями 1'—1' и 2'—2'. В пространстве от сечения 1—1 до 2'—2' можно выделить три области a , b и c .

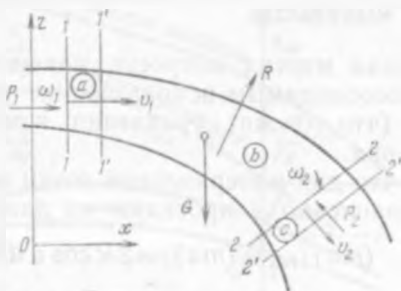


Рис. 3.19.

Количество движения массы m в начальный момент равно (в условной записи):

$$(mu)_t = \kappa.л(a)_t + \kappa.л(b)_t,$$

а в момент $t + dt$

$$(mu)_{t+dt} = \kappa.л(b)_{t+dt} + \kappa.л(c)_{t+dt},$$

тогда приращение количества движения будет:

$$d(mu) = [\kappa.л(b) + \kappa.л(c)]_{t+dt} - [\kappa.л(a) + \kappa.л(b)]_t.$$

Но при установившемся движении

$$\kappa.л(b)_{t+dt} = \kappa.л(b)_t,$$

поэтому для $d(mu)$ получим:

$$d(mu) = \kappa.л(c) - \kappa.л(a).$$

Определим $\kappa.л(c) = ?$

В общем случае распределение скоростей в полученном сечении неравномерное, поэтому $\kappa. л(c)$ определим как

$$\kappa. л(c) = \int_{\omega} d(mu) = \int_{\omega} \rho dWu = \int_{\omega} \rho d\omega u dt = \rho dt \int_{\omega} u^2 d\omega. \quad (3.77)$$

Вычислим $\int_{\omega} u^2 d\omega$, полагая $u = v_1 + \varepsilon$, где v_1 — средняя скорость по сечению, а $\varepsilon = u - v_1 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} u^2 d\omega &= \int_{\omega} (v_1 + \varepsilon)^2 d\omega = \int_{\omega} (v_1^2 + 2v_1\varepsilon + \varepsilon^2) d\omega = \\ &= v_1^2 v_1 + \int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega. \end{aligned}$$

Как известно,

$$\int_{\omega} 2v_1\varepsilon d\omega = 2v_1 \int_{\omega} \varepsilon d\omega = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \kappa. л(c) &= \rho dt \left(v_1^2 v_1 + \int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega \right) = \\ &= \rho dt v_1^3 v_1 \left(1 + \frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v_1^2 v_1} \right). \end{aligned}$$

Обозначив

$$1 + \frac{\int_{\omega} \varepsilon^2 d\omega}{v_1^2 v_1} = \alpha_0, \quad (3.78)$$

(α_0 — коэффициент Буссинеска), получим:

$$\kappa. л(c) = \rho \alpha_{02} Q dt v_2.$$

Аналогично получим $\kappa. л(a) = \rho \alpha_{02} Q dt v_1$.

Приращение количества движения $d(mu)$ для выделенной массы жидкости между сечениями 1—1 и 2—2, если полагать $\alpha_{02} \approx \alpha_{01} \approx \alpha_0$, будет равно:

$$(mu) = \rho \alpha_0 Q dt (\bar{v}_2 - \bar{v}_1). \quad (3.79)$$

Сумма импульсов сил

$$\Sigma \vec{R} dt = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{G} + \vec{R}) dt,$$

и тогда все уравнение в векторной форме получит вид

$$\rho Q \alpha_0 dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{G} + \vec{R}) dt, \quad (3.80)$$

откуда и находим силу $\vec{R}$ построением многоугольника сил.

Примечание. При сопоставлении коэффициента Буссинеска α_0 с коэффициентом Кориолиса

$$\alpha = 1 + 3 \frac{\int \epsilon^2 d\omega}{\sigma^2 \omega}$$

видим, что $\alpha > \alpha_0$.

Заметим, что в тех условиях, когда возможно $\alpha = 1,10$, получим $\alpha_0 \approx 1,033 \approx 1,00$.

Глава четвертая

ПЛОСКОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

4.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Плоским движением называется такое, при котором траектории всех частиц являются плоскими кривыми, лежащими в параллельных между собой плоскостях. Очевидно, что все движение в разных параллельных плоскостях в общем случае может быть и различным.

Как известно, если траектории частиц представляют собой пространственные кривые, то поле скорости определяется системой

$$\left. \begin{aligned} u_x &= F_1(x, y, z, t); \\ u_y &= F_2(x, y, z, t); \\ u_z &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Для плоского движения, параллельного осям Ox и Oy (рис. 4.1), поле скоростей определяется системой

$$\left. \begin{aligned} u_x &= F_1(x, y, z, t); \\ u_y &= F_2(x, y, z, t); \\ u_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

В частном случае, когда в каждой из параллельных плоскостей движение тождественно, поле скоростей не зависит от координаты z и определяется системой

$$\left. \begin{aligned} u_x &= F_1(x, y, t); \\ u_y &= F_2(x, y, t); \\ u_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

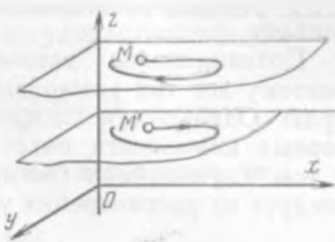


Рис. 4.1.

Такое движение, называемое плоскопараллельным, и будем рассматривать ниже.

4.2. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.2.1. Общие уравнения

Пусть движение совершается параллельно плоскости xOy (рис. 4.1), тогда скорость $u_z=0$, также будут равны нулю и частные производные $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$, а уравнения Эйлера примут сокращенную форму:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Уравнение неразрывности примет также более краткую форму:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (4.5)$$

Характеристическое уравнение останется без изменения

$$\rho = \varphi(p, T). \quad (4.6)$$

4.2.2. Условие потенциальности движения

Потенциальное движение — движение безвихревое, поэтому все три компонента вихря должны быть равны нулю. Однако для плоского параллельного потока два первых компонента вихря ξ и η равны нулю даже и в том случае, если бы движение было вихревым, что следует из рассмотрения уравнений

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right);$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Здесь, как указано выше, $u_z = 0$ и $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$. Таким образом, аналитическим условием потенциальности будет равенство

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.7)$$

или

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (4.7a)$$

4.3. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ

Ранее было указано, что проекции скорости по координатным осям при потенциальном движении определяются по формулам

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где φ — потенциал скорости.

Для установившегося движения или для данного момента времени потенциал скорости выражается функцией координат x и y

$$\varphi = \varphi(x, y).$$

Линии $\varphi(x, y) = \text{const}$ называются эквипотенциалами, или линиями равного потенциала (рис. 4.2).

Потенциал скорости $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Действительно, имеем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0;$$

так как $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, то

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

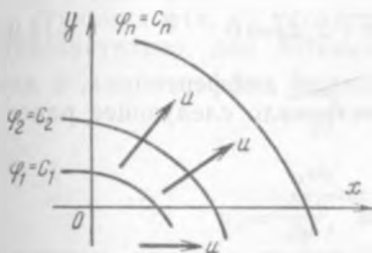


Рис. 4.2

После подстановки в уравнение неразрывности получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Введение в анализ уравнения Лапласа формально упрощает задачу исследования потока жидкости, так как приводит к задаче по определению одной только функции φ (вместо двух u_x и u_y). По φ находим скорости u_x и u_y как производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Однако решение уравнения Лапласа очень часто представляет собой более сложную задачу, нежели прямое определение функций u_x , u_y .

4.4. ФУНКЦИЯ ТОКА $\psi(x, y)$

Кроме потенциала скорости $\varphi(x, y)$, существует еще одна важная функция $\psi(x, y) = C$, которая характеризуется тем, что компоненты скорости u_x и u_y опреде-

ляются так же, как частные производные функции ψ по x и y , но следующим образом:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Напишем выражение полного дифференциала для непрерывной функции $\psi(x, y) = C$

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (4.8)$$

Условия $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ имеют место только в том случае, если выражение

$$d\psi = -u_y dx + u_x dy = 0 \quad (4.9)$$

представляет собой также полный дифференциал, а для этого требуется, чтобы существовало следующее равенство:

$$\frac{\partial(-u_y)}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

А оно действительно существует, так как, перенося слагаемые в одну сторону, получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,$$

что представляет собой уравнение неразрывности.

Итак, функция $\psi(x, y)$, для которой

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

действительно существует.

Рассмотрим теперь, что выражает собой уравнение $\psi(x, y) = C$.

Из уравнения линий тока

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

получим

$$-u_y dx + u_x dy = 0.$$

Сравнивая эти уравнения линий тока с уравнением полного дифференциала $d\psi$ (4.9), видим, что они тождественны. Следовательно, при графическом изображении линий $\psi(x, y) = C$ (для ряда $C_1, C_2, \dots, C_n$) они тождественно совпадают с линиями тока. По этой причине функция $\psi(x, y)$ и именуется функцией тока. Уравнение $\psi(x, y) = C$ представляет собой семейство линий тока (рис. 4.3).

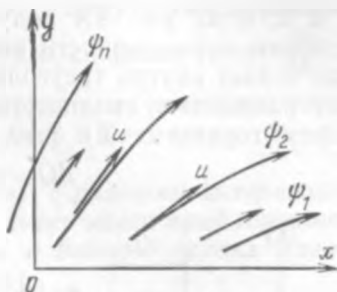


Рис. 4.3.

Функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, для потенциального движения имеем:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

но

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

После подстановки получим

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

что и представляет собой уравнение Лапласа.

4.4.1. Физический смысл функции тока

Пусть имеем систему линий тока (линии ψ) (рис. 4.4). Очевидно, между двумя соседними линиями тока проходит некоторый расход. Пусть между линиями ψ и $\psi + d\psi$ проходит расход dQ . Проведем произвольную линию AB . Она пересечет указанные линии тока в точках

1 и 2, и на рис. 4.4 получим треугольник 1, 2, 3. По условию неразрывности все количество жидкости, которое войдет внутрь треугольника¹ через сторону 1—2, будет равно тому количеству жидкости, которое выйдет через стороны 1—3 и 2—3, поэтому

$$dQ = dQ_x + dQ_y.$$

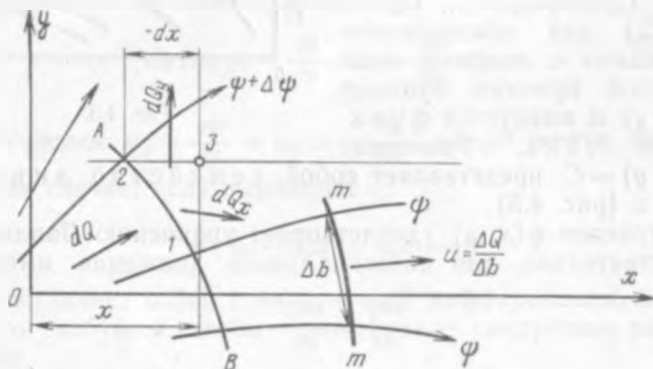


Рис. 4.4.

Определим dQ_x и dQ_y :

$$dQ_x = u_x dy \cdot l = u_x dy,$$

где $dy \cdot l = d\omega_x$, и аналогично $dQ_y = -u_y dx$.

Тогда расход, проходящий между двумя соседними линиями тока — линией со значением функции тока, равным ψ , и линией со значением функции тока, равным $\psi + d\psi$, равен:

$$dQ = -u_y dx + u_x dy. \quad (4.10)$$

Но правая часть равна $d\psi$, следовательно, $dQ = d\psi$. Поэтому, интегрируя, получаем:

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} dQ = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1. \quad (4.11)$$

Таким образом, расход Q , проходящий между двумя данными линиями тока, равен разности значений функций тока ψ , отвечающих этим линиям.

¹ Точнее — треугольной призмы с основанием, равным площади треугольника 1, 2, 3, и высотой, равной единице (перпендикулярно плоскости чертежа).

Заметим, что, зная расход ΔQ между двумя данными линиями тока, можно определить скорости $u = \frac{\Delta Q}{\Delta b}$, где Δb — расстояние между указанными линиями тока в выбранном сечении, например в сечении $m-m$ (рис. 4.4).

Так, имея систему линий тока с равными интервалами приращения функции тока, очень легко приближенно определить все поле скоростей в данном потоке (тем точнее, чем меньше интервал $\Delta\psi$).

Это свойство линий тока, очевидно, имеет большое практическое значение.

4.4.2. Связь между функциями φ и ψ

Аналитическая связь. Как было указано выше, скорости u_x и u_y могут быть определены как по φ , так и по ψ . По потенциалу скорости φ находим:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Аналогично по функциям тока ψ находим:

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Сопоставляя между собой эти уравнения, получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Эти равенства и дают необходимую аналитическую связь между функциями φ и ψ . Следовательно, если известна одна из них, то по ней может быть найдена и другая.

Например, известна φ , тогда

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{или} \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad \text{Но} \quad d\psi = -u_y dx + u_x dy,$$

а потому

$$\psi = \int -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy.$$

Геометрическая связь. Построим семейство линий тока ψ и семейство линий равного потенциала φ (рис. 4.5).

Из уравнения потенциала скорости (4.9) находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$$

Но производная $\frac{dy}{dx}$ геометрически представляет собой тангенс угла α , который образует касательная к кривой с осью абсцисс, в данном случае касательная к линии равного потенциала скорости $\varphi(x, y)$ с осью Ox . Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{u_x}{u_y}.$$

Аналогично из уравнения функции тока

$$d\psi = -u_y dx + u_x dy = 0$$

находим

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta = \frac{u_y}{u_x}.$$

Тогда, умножая $\operatorname{tg} \alpha$ на $\operatorname{tg} \beta$, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{u_x}{u_y} \frac{u_y}{u_x} = -1$$

или

$$1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0,$$

а это уравнение, как известно, выражает собой условие перпендикулярности двух прямых, в данном случае — перпендикулярности касательной к линии ψ в точках пересечения этих линий

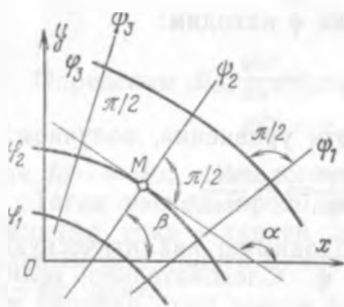


Рис. 4.5.

касательной к линии ψ в точках пересечения этих линий (точка M на рис. 4.5).

Таким образом, семейство линий тока и семейство линий равного потенциала образуют ортогональную сетку.

В общем случае эта сетка представляет собой систему криволинейных прямоугольников (рис. 4.6, а), а в частном случае, если линии φ и ψ построены с одинаковыми интервалами $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ ($\Delta\varphi = \Delta\psi$), — сетку криволинейных квадратов. Сетка линий тока и экви-

тенциалей называется гидродинамической сеткой, или сеткой движения (рис. 4.6, б).

Гидродинамическая сетка имеет большое практическое значение, ее можно построить приближенно, не зная аналитического выражения функций φ и ψ , а зная только границы потока, т. е. расположение жестких неподвижных стенок канала, в пределах которого происходит движение данной жидкости.

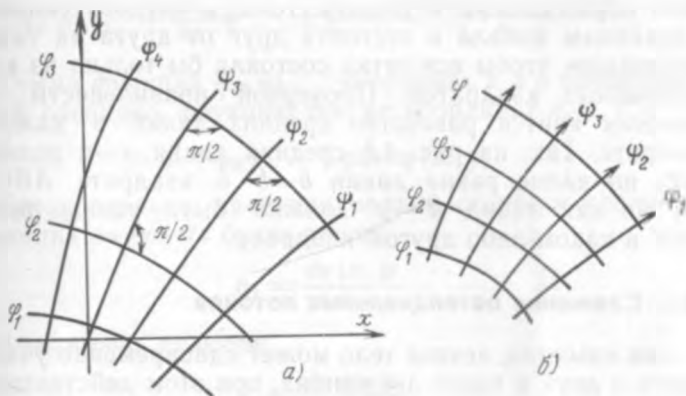


Рис. 4.6.

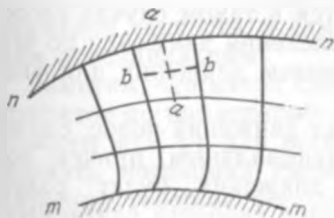


Рис. 4.7.

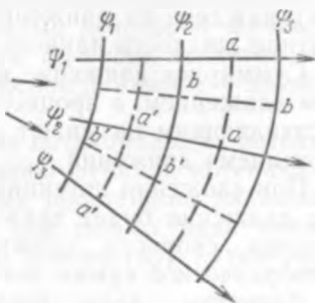


Рис. 4.8.

Если сетка будет построена, то можно считать всю задачу о движении данного потока разрешенной. Действительно, как указано выше, можно для любой точки определить не только размер скорости (как указано вы-

ше, $u = \frac{\Delta Q}{\Delta b}$), но и ее направление (касательная к линиям ψ), т. е. все поле скоростей.

При построении гидродинамической сетки следует иметь в виду, что жесткие стенки канала являются крайними линиями тока ψ (рис. 4.7), линии $n-n$ и $m-m$ являются соответственно линиями тока ψ_0 и ψ_n , и между ними проходят промежуточные линии $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$. Линии равного потенциала ($\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$) должны быть нормальными к линиям тока, а следовательно, и к границам канала и отстоять друг от друга на таком расстоянии, чтобы вся сетка состояла бы только из криволинейных квадратов. Проверкой правильности построения явится равенство средних линий в каждом квадрате. Так, на рис. 4.8 средняя линия $a-a$ должна быть по длине равна линии $b-b$ в квадрате $ABCD$, так же как линия $a'-a'$ должна быть равна линии $b'-b'$ в каком-либо другом квадрате.

4.4.3. Сложение потенциальных потоков

Как известно, всякое тело может одновременно участвовать в двух и более движениях, при этом действительная скорость и ускорение этого тела определяются как соответствующая сумма векторов скорости (или ускорения) каждого из движений. Это относится и к каждой частице жидкости данного потока.

Суммарное движение является в таком случае сложным движением, а процесс определения движения по его составляющим называют сложением движений или «наложением» движений.

При сложении потенциальных движений новое, сложное движение будет также потенциальным, причем потенциал скорости сложного движения будет равен алгебраической сумме потенциалов скорости слагаемых.

Допустим, даны потенциалы скорости слагаемых движений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Тогда соответствующие компоненты скоростей будут найдены как соответствующие частные производные от φ ..., а именно:

$$u_{x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad u_{x_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}; \quad \dots; \quad u_{x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x};$$

$$u_{y_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \quad u_{y_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}; \quad \dots; \quad u_{y_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}.$$

Но проекция полной скорости сложного движения на данную ось равна сумме проекций скоростей слагаемых движений на ту же ось, поэтому

$$u_x = u_{x_1} + u_{x_2} + \dots + u_{x_n};$$

$$u_y = u_{y_1} + u_{y_2} + \dots + u_{y_n}.$$

Следовательно,

$$u_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}{\partial x}.$$

Сумма функций $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ координат x и y представит собой, очевидно, функцию тех же координат x, y , т. е.

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \varphi(x, y).$$

Следовательно, проекция полной скорости сложного движения на ось Ox будет равна:

$$u_x = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}.$$

Аналогично получим:

$$u_y = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

Итак, компоненты скорости сложного движения определяются как частные производные некоторой функции координат x и y , а поэтому эта функция является потенциалом скорости, а само сложное движение — движением потенциальным.

Заметим, что метод сложения потенциальных потоков позволяет по найденному значению функции потенциала скорости $\varphi(x, y)$ для нескольких простейших движений находить потенциал скорости для целого ряда новых движений (вообще бесконечное множество) путем простого их суммирования.

4.5. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ПЛОСКОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.5.1. Плоскопараллельный поток

Пусть жидкость движется параллельно оси Ox , и каждая ее частица имеет скорость $u_0 = \text{const}$.

Определим для этого движения потенциал скорости $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$.

Известно, что $d\varphi = u_x dx + u_y dy$. По условию задачи для данного движения проекции полной скорости u на координатные оси Ox и Oy будут:

$$u_x = u_0 \text{ и } u_y = 0.$$

Следовательно,

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = u_0 dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi = \int d\varphi = \int u_x dx + \int u_y dy = \int u_0 dx = u_0 x + C.$$

Полагая произвольную интеграции $C=0$, имеем:

$$\varphi(x, y) = u_0 x. \quad (4.12)$$

Геометрически это будет семейство прямых, параллельных оси Oy (рис. 4.9).

Так как потенциал скорости должен удовлетворять уравнению Лапласа, то, найдя $\varphi(x, y)$, требуется проверить, будет ли эта функция действительно потенциалом скорости.

Для рассматриваемого движения $\varphi = u_0 x$. Определим вторые производные этой функции по x и по y и сложим. Их сумма по уравнению Лапласа должна быть равна нулю.

Находим значение второй производной функции φ по x :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_0 x) \right] = \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0,$$

потому что $u_0 = \text{const}$.

Далее находим вторую производную по y :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 x) = 0,$$

потому что $u_0 x$ не зависит от y . Итак,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 x) = 0,$$

т. е. функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа и является действительно потенциалом скорости,

Найдем теперь функцию теча $\psi(x, y)$. Как указано выше, $u_x = u_0 x$ и $u_y = 0$. Следовательно,

$$d\psi = -u_y dx + u_x dy = u_x dy = u_0 dy$$

и

$$\psi = \int d\psi = \int u_x dy = u_0 y + C. \quad (4.13)$$

Функция $\psi(x, y)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа, что аналогично предыдущему легко проверяется прямым вычислением. Линии ψ параллельны оси Ox (рис. 4.9).

Таким образом, для плоскопараллельного движения найдены обе функции: φ и ψ .

4.5.2. Источники и стоки

Источником называется точка, из которой радиально равномерно во все стороны вытекает жидкость (рис. 4.10,а), а стоком — такая точка, в которую также радиально втекает жидкость (рис. 4.10,б). В рамках плоской задачи источник-точка превращается в источник-прямую (перпендикулярную плоскости движения). Очевидно, физически такие точки не существуют, но они характеризуют поле скоростей, которое создается ими. Такое поле в ограниченной области может существовать реально.

Определим функции φ и ψ для источника.

Имеем общую запись

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy.$$

Определим компоненты скорости u_x и u_y .

Полагая распределение скорости по окружности равномерным, можем записать:

$$Q = 2\pi r u_0, \quad (4.14)$$

где Q — расход источника на единицу длины (перпендикулярно плоскости xOy); u_0 — радиальная, т. е. полая, скорость на расстоянии r от источника.

Тогда

$$u_x = u_0 \cos \alpha = \frac{Q}{2\pi r} \cos \alpha; \quad (4.15)$$

$$u_y = u_0 \sin \alpha = \frac{Q}{2\pi r} \sin \alpha. \quad (4.16)$$

Но $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, а $\sin \alpha = \frac{y}{r}$.

Итак,

$$u_x = \frac{Q}{2\pi r} \frac{x}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} x.$$

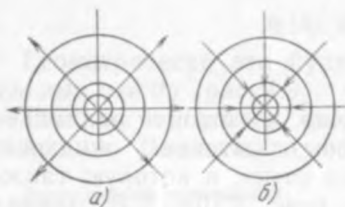


Рис. 4.10.

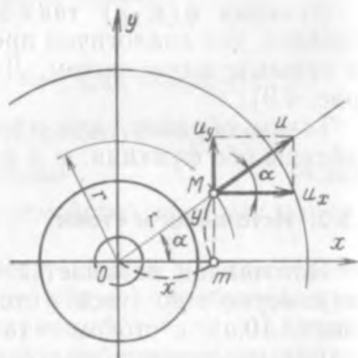


Рис. 4.11.

Аналогично

$$u_y = \frac{Q}{2\pi r^2} y.$$

Следовательно,

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = \frac{Q}{2\pi r^2} x dx + \frac{Q}{2\pi r^2} y dy$$

или

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} (x dx + y dy) = 0. \quad (4.17)$$

Очевидно, $x dx + y dy = 0$.

Левая часть этого уравнения равна $r dr$, где r — радиус.

Действительно, из треугольника OMT (рис. 4.11) имеем:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Дифференцируя, получаем (сокращая на 2):

$$x dx + y dy = r dr,$$

Итак, можем записать:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} (x dx + y dy) = \frac{Q}{2\pi r^2} r dr \quad (4.18)$$

или после сокращения на r

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}. \quad (4.19)$$

Интегрируя, получаем выражение для потенциала скорости

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C.$$

Полагая $C=0$, окончательно находим:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r. \quad (4.20)$$

Найдем теперь функцию тока ψ .

$$d\psi = -u_y dx + u_x dy.$$

Подставляя найденные выше выражения для u_x и u_y , получаем:

$$d\psi = -\frac{Q}{2\pi r} \frac{x}{r} dx + \frac{Q}{2\pi r} \frac{y}{r} dy = 0,$$

откуда после сокращения на $\frac{Q}{2\pi r^2}$ найдем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

или

$$\ln y = \ln x + C$$

или

$$\ln \frac{y}{x} = C$$

или

$$y = Cx. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) представляет собой семейство прямых, проходящих через начало координат. Таким образом, линии тока, а следовательно, и линии функции тока $\psi(x, y) = C$ есть радиальные прямые.

Очевидно, что функция $\psi(x, y) = C$ может изменяться только в зависимости от координатного угла α (рис. 4.11)

и находится в линейной от него зависимости. Следовательно, для ψ можем написать:

$$\psi = C'\alpha = C' \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Определим C' . Ввиду того, что $\psi_2 - \psi_1 = Q$, т. е. равняется расходу жидкости, можно записать:

$$\psi_1 = \psi_{\alpha=0} = C' \cdot 0 = 0;$$

$$\psi_2 = \psi_{\alpha=2\pi} = C' \cdot 2\pi.$$

Следовательно, разность значений функции ψ

$$\psi_2 - \psi_1 = C'\alpha_2 - C'\alpha_1 = C'2\pi - C' \cdot 0 = C'2\pi.$$

Эта же разность равна расходу источника:

$$\psi_2 - \psi_1 = Q.$$

Поэтому

$$Q = C'2\pi,$$

откуда

$$C' = \frac{Q}{2\pi}.$$

Таким образом, окончательно для функции тока ψ получим выражение зависимости от x и y :

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (4.22)$$

4.5.3. Плоское вращательное движение жидкости

Рассмотрим движение жидкости, при котором ее частицы движутся по concentрическим окружностям (рис. 4.12). Очевидно, они представляют собой линии тока, а радиальные прямые — линии равного потенциала скорости $\varphi = C$.

Пользуясь обратимостью функций φ и ψ для потенциала скорости, имеем $\varphi = C \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Определим скорость движения частиц по окружности

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}.$$

Находим

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = -C \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \frac{y}{x^2} =$$

$$= -C \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \frac{1}{x} = C \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

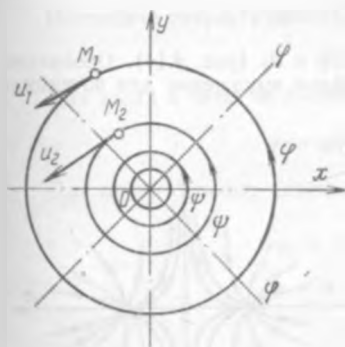


Рис. 4.12.

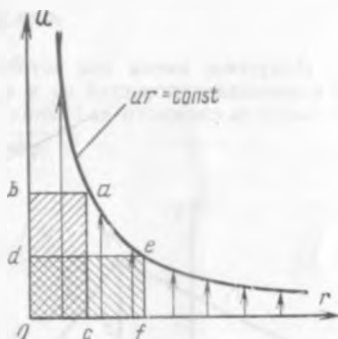


Рис. 4.13

Поэтому

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = C \sqrt{\left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2},$$

откуда

$$u = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Но $x^2 + y^2 = r^2$, где r — радиус окружности, а поэтому окончательно получим

$$u = \frac{C}{r}$$

или

$$ur = C = \text{const}, \quad (4.23)$$

а это — известный закон площадей (рис. 4.13).
В предельных условиях

$$r \rightarrow 0; \quad u \rightarrow \infty;$$

$$r \rightarrow \infty; \quad u \rightarrow 0.$$

4.6. ПРИМЕРЫ СЛОЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

4.6.1. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Определим движение при сложении двух источников (при равных их напряжениях). Известно, что потенциал скорости для источника точки при плоском движении

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r.$$

Допустим, имеем два источника O_1 и O_2 (рис. 4.14). Обозначив их потенциалы скоростей φ_1 и φ_2 , найдем выражение для потенциала скорости сложного движения:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

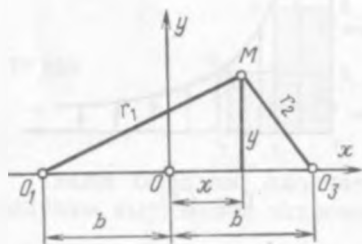


Рис. 4.14.

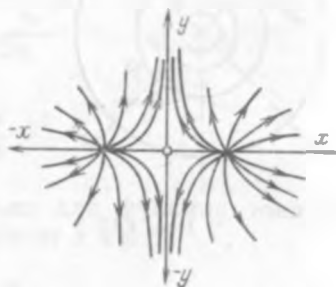


Рис. 4.15.

В системе координатных осей yOx , например для точки M ,

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln r_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(b+x)^2 + y^2};$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln r_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(b-x)^2 + y^2}.$$

Тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 + \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln r_1 r_2$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{[(b+x)^2 + y^2][(b-x)^2 + y^2]}. \quad (4.23)$$

Далее, имея $\varphi = \varphi(x, y)$, находим поле скоростей

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1(x, y) \text{ и } u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2(x, y)$$

и уравнение линий тока

$$\frac{dx}{F_1(x, y)} = \frac{dy}{F_2(x, y)}.$$

Не приводя самих вычислений, укажем на рис. 4.15.

4.6.2. Сложение вращательного движения и движения при наличии стока

Потенциал результирующего движения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Для стока в точке M имеем (рис. 4.16):

$$\varphi_1 = C \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для вращательного движения

$$\varphi_2 = C \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

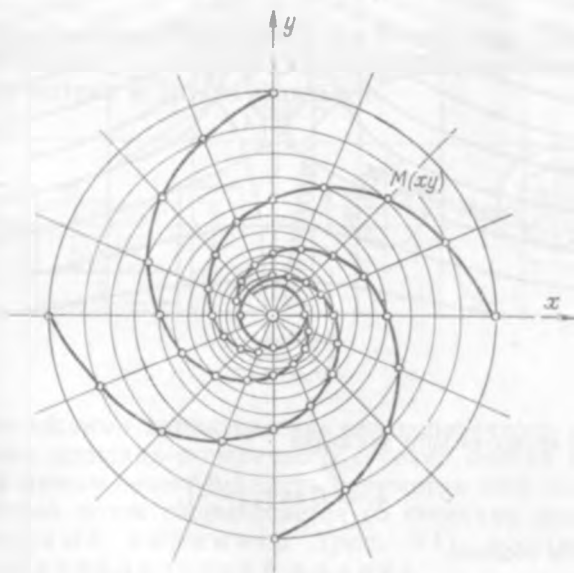


Рис. 4.16.

Таким образом, потенциал сложного движения

$$\varphi(x, y) = C_1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (4.25)$$

Дальнейшее решение задачи осуществляется по схеме, указанной в предыдущем примере.

Линии тока в этом случае представляются семейством спиралей Архимеда (рис. 4.16).

4.6.3. Сложение поступательного движения с вращательным

Для поступательного движения

$$\varphi_1 = u_0 x + C.$$

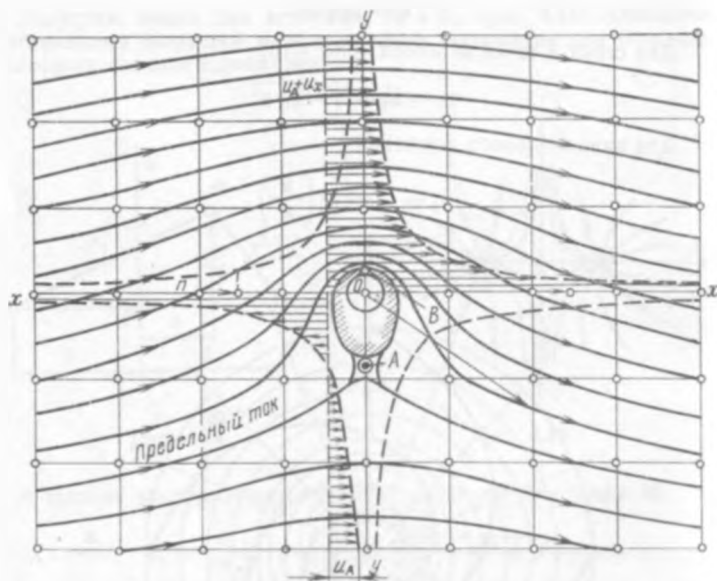


Рис. 4.17.

Для вращательного движения

$$\varphi_2 = C \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Таким образом,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = u_0 x + C \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (4.26)$$

Возникающее при этом течение жидкости схематично изображено на рис. 4.17. В заштрихованной зоне имеем замкнутую циркуляцию

В точке A скорости $u_{xA} = u_0 - u_0 = 0$, а в точке B $u_{xB} = u_0 + u_x$, поэтому давление p_A больше p_B , что определяет собой силу, действующую на массу заштрихованной области, под влиянием которой эта масса перемещается (на чертеже вверх), — эффект Магнуса.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

5.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Гидравлические сопротивления делят на две группы: сопротивления по длине и сопротивления местные, т. е. такие, которые зависят от каких-либо препятствий движению потока, сосредоточенных на коротком участке (например, задвижки, клапаны, решетки и т. д.).

Источником сопротивлений в обоих случаях является вязкость.

Сопротивления зависят от различных факторов: скорости течения, геометрических параметров поперечного сечения потока и других факторов.

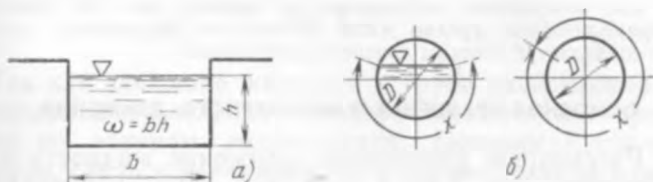


Рис. 5.1.

Важнейшими характеристиками поперечного сечения являются площадь поперечного сечения потока ω , именуемая живым сечением, часть периметра этой площади, по которой поток соприкасается со стенками русла χ — смоченный периметр (рис. 5.1) и отношение ω/χ — гидравлический радиус:

$$R = \omega/\chi.$$

Гидравлический радиус для прямоугольного русла (рис. 5.1,а)

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh}{b + 2h},$$

для трубопровода круглого поперечного сечения (рис. 5.1,б)

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4}.$$

Заметим, что гидравлический радиус R не определяет ни форму, ни размеры поперечного сечения потока. а определяет размеры только геометрически подобных площадей и характеризует отношение ω/χ . Например, каналы прямоугольного сечения глубиной $h_1=3$ м и $h_2=2$ м и шириной соответственно $b=3$ и 4 м, а также труба диаметром $D=4$ м имеют один и тот же гидравлический радиус $R=1$ м. При этом площадь поперечного сечения соответственно равна $\omega_1=9$ м², $\omega_2=8$ м² и $\omega_3=12,6$ м².

Замечание. Для отличия площади поперечного сечения открытого потока от площади поперечного сечения его русла был введен термин *живое сечение*, получивший широкое распространение и используемый в настоящее время. Однако в этом нет необходимости, так как в инженерной практике живое сечение отождествляется с поперечным сечением. Живое сечение определяется как поверхность, нормальная к линиям тока. В приложениях к прямолинейным руслам живое сечение по Павловскому практически совпадает с плоским поперечным сечением.

5.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим равномерное движение жидкости в трубопроводе (рис. 5.2). С помощью двух сечений 1—1 и 2—2 выделим массу жидкости, заключенную между этими сечениями, и для нее, пользуясь принципом Д'Аламбера, напишем уравнение динамического равновесия.

Так как движение равномерное, то ускорение равно нулю и, следовательно, силы инерции также равны нулю. Поэтому в проекции на ось s

$$[\Sigma F_{\text{акт}}]_s = [\Sigma F_{\text{сопр}}]_s. \quad (5.1)$$

Составим выражение левой части этого равенства — активные силы $F_{\text{акт}}$:

1) сила земного притяжения $G = \rho g \omega l$; ее проекция на ось $s-s$

$$G \sin \alpha = \rho g \omega l \sin \alpha = \rho g \omega (z_1 - z_2),$$

так как

$$l \sin \alpha = (z_1 - z_2);$$

2) давление жидкости на торцевые сечения, т. е. силы P_1 и P_2 (воздействие жидкости, расположенной до сечения 1—1 и за сечением 2—2).

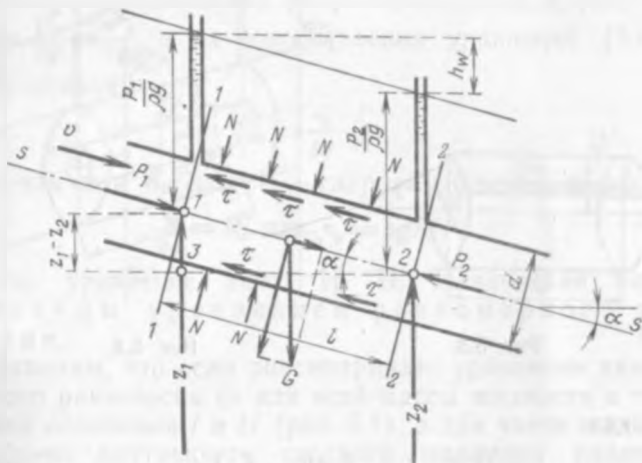


Рис. 5.2.

Так как движение жидкости в трубе равномерное, то распределение давления в поперечных сечениях происходит по законам гидростатики. Поэтому $P_1 = p_1 \omega$ и $P_2 = p_2 \omega$, где p_1 и p_2 — гидростатические давления в центре тяжести площадей ω в точках 1 и 2 на оси трубы (рис. 5.2).

Сумма проекции сил P_1 и P_2 на ось $s-s$

$$[\Sigma P]_s = P_1 - P_2 = \omega (p_1 - p_2);$$

3) проекции сил $N, N \dots$ (сил давления стенок трубы на боковую поверхность выделенной массы) на ось $s-s$ будут равны нулю, так как они перпендикулярны оси проекции.

Левая часть уравнения (5.1) будет выражена так:

$$[\Sigma F_{\text{акт}}]_s = \rho g \omega (z_1 - z_2) + \omega (p_1 - p_2). \quad (5.2)$$

Составим выражение правой части уравнения (5.1). Заметим, что сопротивление движению возникает вследствие тормозящего действия неподвижных стенок трубы. Поэтому силы сопротивления $F_{\text{сопр}}$ можно определить по касательным напряжениям на стенке (рис. 5.2).

Обозначим через dF силу сопротивления, приходящуюся на элементарную полоску шириной $d\chi$ и длиной l (рис. 5.3): $dF = \tau l d\chi$.

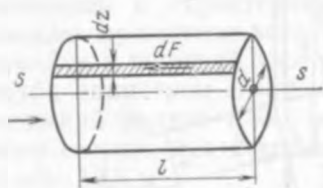


Рис. 5.3.

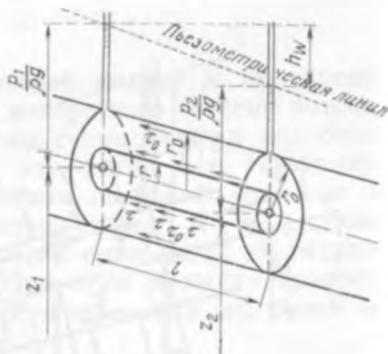


Рис. 5.4.

Тогда

$$[\Sigma F_{\text{сопр}}]_s = \int_{\chi} dF = \int_{\chi} \tau l d\chi. \quad (5.2a)$$

Касательное напряжение τ считаем величиной постоянной вдоль этой площадки, но оно может изменяться по смоченному периметру.

Интегрируя (5.2a) и пользуясь при этом понятием о среднем, получаем (заменяя τ величиной τ_0):

$$[\Sigma F_{\text{сопр}}]_s = \int_{\chi} \tau l d\chi = \tau_0 l \int_{\chi} d\chi = \tau_0 l \chi, \quad (5.3)$$

где τ_0 — среднее значение касательного напряжения на стенке.

С учетом (5.2) и (5.3) можно записать уравнение динамического равновесия (5.1)

$$\rho g \omega (z_1 - z_2) + \omega (p_1 - p_2) = \tau_0 l \chi$$

или, разделив на $\rho g \omega$, в таком виде:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{\tau_0}{\rho g} \frac{l}{\omega/\chi} = \frac{\tau_0}{\rho g} \frac{l}{R}, \quad (5.4)$$

где $\omega/\chi = R$ — гидравлический радиус.

Запишем теперь уравнение Бернулли для тех же двух сечений 1—1 и 2—2 (рис. 5.2):

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}\right) = h_w. \quad (5.5)$$

Поскольку движение равномерное, т. е. $v_1 = v_2$, опускаем $\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$ и из сопоставления уравнений (5.4) и (5.5) находим:

$$h_w = \frac{\tau_0}{\rho g} \frac{l}{R}, \quad (5.6)$$

или, так как $h_w/l = i$ (i — гидравлический уклон), то

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = Ri \quad \text{или} \quad \tau_0 = \rho g Ri. \quad (5.7)$$

Это уравнение акад. Н. Н. Павловский назвал основным уравнением равномерного движения.

Заметим, что если рассматривать уравнение динамического равновесия не для всей массы жидкости в трубе между сечениями I и II (рис. 5.2), а для части жидкости в объеме внутреннего соосного цилиндра радиуса r (рис. 5.4), то, повторив все приведенные выше рассуждения, неизбежно получим аналогичный результат, а именно $\tau = \rho g R' i$ вместо $\tau_0 = \rho g Ri$ и

$$h_w = \frac{\tau}{\rho g} \frac{l}{R'} \quad (5.7a)$$

вместо (5.6), в котором в отличие от уравнения (5.7) вместо τ_0 (касательного напряжения на стенке трубы) было бы τ — касательное напряжение на боковой поверхности внутреннего (малого) цилиндра, и вместо R стояло бы R' — гидравлический радиус для внутреннего цилиндра радиуса r .

Обращаясь к формуле (5.6), заметим, что всегда можно записать равенство

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

полагая при этом, что безразмерный коэффициент ζ величина переменная.

После подстановки в уравнение (5.6) получим

$$h_w = \zeta \frac{l}{R} \frac{v^2}{2g}.$$

Это формула Вейсбаха, а заменив гидравлический радиус диаметром по условию $R = \frac{d}{4}$, получим:

$$h_w = 4\zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

или, обозначив $4\zeta = \lambda$,

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

где λ и ζ — безразмерные коэффициенты.

Эта формула именуется формулой Дарси — Вейсбаха. Она используется для расчета трубопроводов.

По формуле (5.7)

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = Ri$$

с учетом

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \zeta \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{4} \frac{v^2}{2g}$$

после подстановки найдем

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{Ri}.$$

Обозначив $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, получим формулу

$$v = C \sqrt{Ri}. \quad (5.8)$$

C — есть коэффициент Шези, а формула именуется формулой Шези, она получила широкое применение в расчетах открытых потоков.

5.3. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ньютоном была предложена гипотеза о том, что законы сопротивления жидких тел противоположны законам Кулона трения твердых тел и что сила сопротивления между смежными слоями жидкости, движущимися с разными скоростями, пропорциональна площади этих

слоев, не зависит от давления, но зависит от относительной скорости и природы самой жидкости. В работах Н. П. Петрова¹ эта гипотеза была развита и закон вязкостного сопротивления записывается в следующей форме:

$$F = \mu S \frac{du}{dn}.$$

Здесь F — сила сопротивления; S — площадь двух соприкасающихся слоев жидкости; du/dn — градиент скорости; μ — динамическая вязкость, различная для различных жидкостей.

Градиент скорости измеряется вдоль по нормали к направлению течения потока. Очевидно (рис. 5.5),

$$\frac{du}{dn} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (5.9)$$

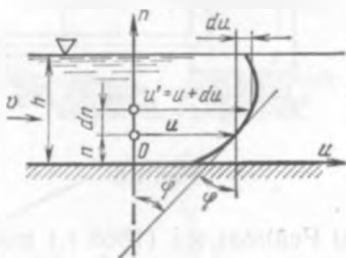


Рис. 5.5.

Вязкость можно понимать как касательное напряжение при градиенте скорости, равном единице. Как видно из рис. 5.5, градиент скорости du/dn может быть ≥ 0 . Он равен нулю в том месте, где мы имеем максимальную скорость.

Пользуясь условием однородности всякого физического уравнения, находим динамическую вязкость μ :

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{du}{dn} \text{ и } [\mu] = [\tau] : \left[\frac{du}{dn} \right].$$

В системе СИ

$$[\mu] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right] = [\text{Па} \cdot \text{с}].$$

Оценка вязкости возможна и через отношение μ/ρ , которое обозначают ν и называют кинематической вязкостью:

$$[\nu] = [\mu/\rho] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right].$$

¹ Петров Н. П. Гидромеханическая теория смазки. М.: Изд-во АН СССР, 1948.

5.4. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Экспериментами установлено, что движение жидкости наблюдается в двух существенно различных формах. При малых скоростях наблюдается слоистое течение, а при больших скоростях в форме сплошной массы мельчайших вихреватых (вихревых) образований



Рис. 5.6.

с перемешиванием всей жидкости. Первая форма движения называется ламинарным движением, вторая турбулентным. Существование ламинарного и турбулентного течений было известно еще на рубеже XVIII и XIX в.

Классические опыты Рейнольдса (1868 г.) показали, что переход ламинарного течения в турбулентное происходит при определенной характерной скорости, которую Рейнольдс назвал критической. Она равна (в современной записи)

$$v_{кр} = \frac{Re_{кр} \nu}{d}, \quad (5.10)$$

где $Re_{кр}$ — безразмерное число и по Рейнольдсу $Re_{кр} = 2000$ (по более поздним исследованиям $Re_{кр} = 2350$); d — диаметр трубопровода, а ν — кинематическая вязкость. Примем $Re_{кр} = 2300$. Схема экспериментальной установки Рейнольдса показана на рис. 5.6. При ламинарном течении $v < v_{кр}$ краска, выходящая из отверстия вспомогательной трубки, вытягивается в виде тонкой нити, а при турбулентном движении ($v > v_{кр}$) краска расплывается и равномерно окрашивает всю массу жидкости.

Определить, будет ли течение ламинарным или турбулентным, можно не только по условию $v \geq v_{кр}$, но и по условию $Re \geq Re_{кр}$.

Действительно, запишем формулу (5.10) так:

$$Re = \frac{vd}{\nu}.$$

Очевидно, что при $v_{кр}$ число Re будет равно $Re = Re_{кр} = 2300$, а при $v \geq v_{кр}$ соответственно будет $Re \geq Re_{кр}$.

Условие

$$Re \geq Re_{кр} (Re_{кр} = 2300) \quad (5.11)$$

называется критерием Рейнольдса. Этот критерий широко используется как в теоретических исследованиях, так и в практических расчетах.

Если движение жидкости происходит в открытом канале или трубах некруглого сечения, то, замечая, что диаметр трубы равен $d=4R$ (R — гидравлический радиус), формулу для Re пишут так:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{v4R}{\nu} \quad (5.12)$$

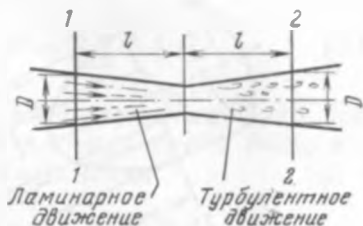


Рис. 5.7.

или

$$Re' = \frac{Re}{4} = \frac{vR}{\nu},$$

где R — гидравлический радиус.

По опытам А. П. Зегжда¹, для открытых русел $Re_{кр} = 800 \div 900$.

Следует иметь в виду, что приведенные числовые значения Re относятся к равномерному движению. При неравномерном движении условия резко изменяются, а при сужении канала течение является более устойчивым (рис. 5.7). Сходящиеся твердые стенки канала (трубы) оказывают стабилизирующее действие, и ламинарный режим может сохраниться и при числах Рейнольдса, больших 2320. Некоторым исследователям удалось сохранить ламинарный поток при $Re = 40\,000$.

5.5. ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Основными характеристиками ламинарного движения являются его струйчатый характер и отсутствие перемешивания масс жидкости.

Рассмотрим кинематическую структуру ламинарного потока и возникающие при этом гидравлические сопро-

¹ Зегжда А. П. Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей. М.: Госстройиздат, 1938.

тивления. Движение предусматривается установившимся и равномерным в трубах цилиндрической формы с неизменным диаметром вдоль по течению.

Распределение скоростей в поперечном сечении. Воспользуемся схемой, изображенной

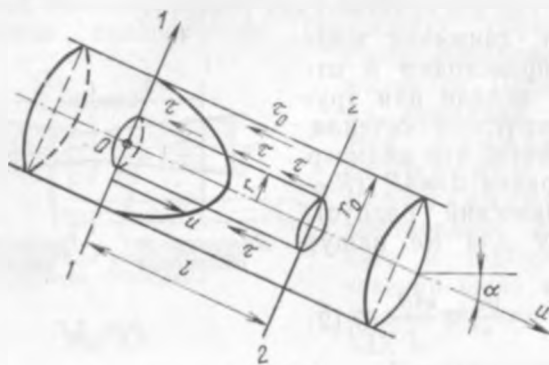


Рис. 5.8.

на рис. 5.8, и напомним основное уравнение равномерного движения для внутреннего цилиндра радиусом r .

По уравнению (5.7) имеем:

$$\frac{\tau}{\rho g} = R'i = \frac{r}{2} \frac{h_w}{l}. \quad (5.13)$$

Касательное напряжение τ на боковой поверхности выделенного цилиндра определим в соответствии с законом Ньютона о силе сопротивления в жидкости, а именно

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}. \quad (5.14)$$

При направлении координатных осей u и n , указанном на рис. 5.8, — ось скорости u вдоль оси трубы, ось нормали к направлению скорости — вдоль радиуса r — можем записать:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (5.15)$$

Знак минус потому, что здесь при $dr > 0$ имеем $du < 0$.

После подстановки в (5.13) получим дифференциальное уравнение распределения скорости в таком виде:

$$-\mu \frac{du}{dr} = \rho g \frac{r}{2} \frac{h_w}{l}$$

или

$$-du = \frac{\rho g h_w}{2\mu l} r dr. \quad (5.16)$$

Принтегрировав, найдем

$$-u = \frac{\rho g h_w}{2\mu l} \int r dr = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} r^2 + C. \quad (5.17)$$

Определим постоянную интегрирования C по условиям на границе. В точке у стенки трубы $r=r_0$, т. е. радиусу трубы, а скорость $u=0$. Тогда

$$0 = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} r_0^2 + C \text{ и } C = -\frac{\rho g h_w}{4\mu l} r_0^2.$$

Следовательно, уравнение (5.17) получит вид:

$$-u = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r^2 - r_0^2)$$

или окончательно (после умножения на -1)

$$u = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r_0^2 - r^2). \quad (5.18)$$

Очевидно, что на оси трубы скорость будет максимальной ($r=0$), и тогда

$$u_{\max} = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} r_0^2.$$

Итак, распределение скорости по сечению трубы подчиняется параболическому закону. Изотакхи будут представлять собой концентрические окружности.

Среднюю скорость v определяем по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int u d\omega}{\omega}. \quad (5.19)$$

Элементарную площадку $d\omega$ выберем в форме кольца радиусом r и толщиной dr (рис. 5.9), в пределах которого скорость одна и та же:

$$u = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r_0^2 - r^2).$$

Площадь кольца $d\omega = 2\pi r dr$ (с точностью до малых второго порядка).

Тогда расход потока в трубе

$$Q = \int_0^{r_0} u \, d\omega = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} 2\pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r \, dr =$$

$$= \frac{\rho g h_w}{4\mu l} 2\pi \left(\frac{r_0^3}{2} - \frac{r^3}{4} \right) = \frac{\rho g h_w}{8\mu l} \pi r_0^4. \quad (5.20)$$

Разделив (5.20) на πr_0^4 , найдем среднюю скорость

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi r_0^4} = \frac{\rho g h_w}{8\mu l} r_0^2. \quad (5.21)$$



Рис. 5.9.

Следовательно, средняя скорость равна половине максимальной.

Потерянный напор найдем из (5.21) (заметим, что $\mu/\rho = \nu$):

$$h_w = \frac{8\mu l \bar{v}}{\rho g r_0^2} = \frac{8\nu l \bar{v}}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 g}.$$

Умножив и разделив правую часть на $2\bar{v}$ и затем преобразовав, получим:

$$h_w = \frac{8\nu l \bar{v}}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 g} \frac{2\bar{v}}{2\bar{v}} = \frac{64}{\bar{v} l} \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}.$$

Но $\frac{\bar{v} l}{\nu} = \text{Re}$, поэтому окончательно получим

$$h_w = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (5.22)$$

или, обозначив $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$,

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^3}{2g}. \quad (5.23)$$

Формула (5.23), как известно, называется формулой Дарси — Вейсбаха. Здесь λ — коэффициент гидравлического сопротивления в трубах. Как видно, при ламинарном движении коэффициент λ является функцией числа Рейнольдса

$$\lambda = 64/\text{Re}. \quad (5.24)$$

Ламинарное движение в трубопроводе — движение вихревое. Действительно, компоненты вихря определяются такими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Чтобы движение было безвихревым (потенциальным), необходимо соблюдение условия

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

Проверим это условие. При ламинарном движении в трубах скорость в любой точке поперечного сечения

$$u = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r_0^2 - r^2). \quad (5.26)$$

Запишем выражения для скорости u в функции координат x, y, z . Учитывая, что $r^2 = y^2 + z^2$ (при расположении оси Ox вдоль оси трубопровода) и что $u_y = u_z = 0$, получаем:

$$u_x = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r_0^2 - y^2 - z^2). \quad (5.26a)$$

Заметим, что производные $\frac{\partial u_z}{\partial y}$, $\frac{\partial u_y}{\partial z}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ равны нулю (так как $u_z = u_y = 0$), поэтому

$$\xi = 0;$$

$$\eta = -\frac{\rho g h_w}{2\mu l} z \neq 0;$$

$$\zeta = \frac{\rho g h_w}{2\mu l} y \neq 0.$$

Таким образом, два компонента вихря, а именно ζ и ξ , не равны нулю и вихрь ω (или 2ω) не равен нулю, а потому рассматриваемое ламинарное движение называется вихревым.

5.6. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В развитии теории турбулентного движения большое значение имеют работы Прандтля. Дальнейшее изложение основано преимущественно на работе Прандтля.

5.6.1. Основы теории переноса количества движения

Турбулентное состояние потока характеризуется непрерывным перемешиванием множества мельчайших водоворотных образований, возникающих у твердых границ и перемещающихся внутрь потока.

Зарождение водоворотных образований обязано вязкости жидкости. На поверхности контакта жидкости и твердых стенок молекулы жидкости и молекулы твердых стенок находятся на расстоянии силового их взаимодействия. В связи с этим частицы жидкости непосредственно у стенок задерживаются, и скорость их равна нулю. Соседние с ними частицы приходят в движение, и их скорость возрастает с удалением от стенок. При этом возникает вращательное движение

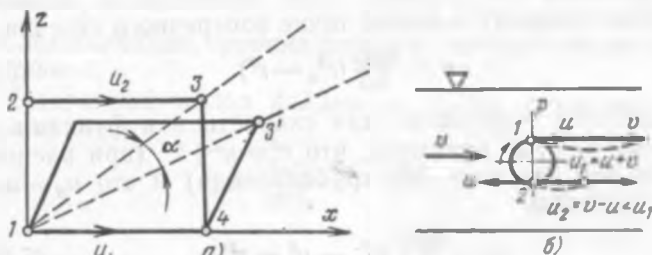


Рис 5.10.

отдельных малых масс жидкости. Диагональ $1-3$ частицы $1, 2, 3$ переходит в положение $1-3'$, т. е. поворачивается относительно координатных осей на угол α (рис. 5.10,а). Аналогично возникают вращательные движения и других частиц внутри потока (по часовой стрелке на рис. 5.10,б). Сложение двух движений — поступа-

тельного и вращательного — возбуждает силу, приложенную к массе частицы и направленную нормально к продольной скорости потока (эффект Магнуса), на рис. 5.10 сила направлена в сторону от стенки. Под действием этой силы частицы жидкости перемещаются в центральную область потока, образуя процесс перемешивания. Наличие шероховатости стенок содействует такому перемешиванию и в некоторых случаях может оказаться даже главной причиной явления. Этот про-

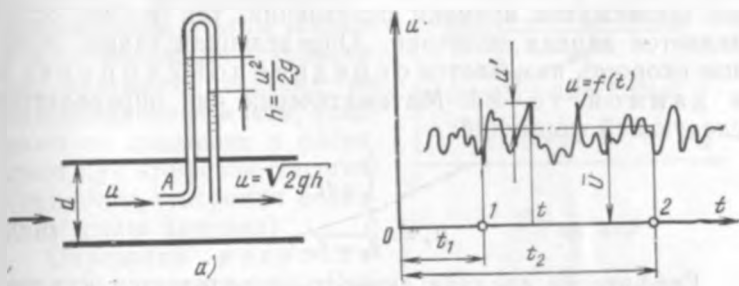


Рис. 5.11.

цесс, очевидно, возможен при достаточно больших скоростях течения, при которых стабилизирующее воздействие вязкости не может воспрепятствовать такому перемешиванию. Известно, что турбулентное движение возникает при скоростях больше $u_{кр}$ (когда число Re больше $Re_{кр} = 2300$).

Процесс перемешивания обуславливает возникновение пульсации скорости, т. е. такое изменение ее величины в данной точке, при котором отклонения от некоторой средней происходят в обе стороны. Объясняется это тем, что через данную точку пространства последовательно проходят разные частицы жидкости с разными скоростями как по величине, так и по направлению.

Обычно наибольшее внимание уделяется явлению пульсации продольной скорости u_x , измеряемой в точке поперечного сечения с помощью различных гидрометрических приборов, например трубки Пито. Продольная скорость является проекцией полной скорости u на направление движения данного потока $u_x = u \cos \alpha$. Схема установки трубки Пито при измерении скорости показана

на на рис. 5.11,а. Таким образом, в данной точке скорость является функцией времени $u_x=f(t)$, рис. 5.11,б. Следует иметь в виду, что эта скорость есть скорость разных частиц, проходящих через данную точку.

В связи с явлением пульсации турбулентное движение оказывается неустановившимся, и в любой момент времени имеет место мгновенное поле скоростей (и других кинематических параметров потока). При этом возможно говорить о средних значениях скорости за тот или иной промежуток времени. Чем больше промежуток времени осреднения, тем точнее определяется данная величина. Определенная таким образом скорость называется осредненной скоростью в данной точке. Математически она определяется следующей формулой:

$$u_x = \frac{\int_{t_1}^{t_2} u dt}{t_2 - t_1} \quad (5.27)$$

Графически средняя скорость определяется как высота прямоугольника, равновеликого площади, ограниченной кривой $u_x=f(t)$, осью абсцисс и ординатами в моменты времени t_1 и t_2 (рис. 5.11,б).

Связь между мгновенной и осредненной скоростью определяется так:

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x,$$

где u_x , $\bar{u}_x$ и u'_x — соответственно мгновенная, осредненная и пульсационная составляющие скорости.

Осредненное значение пульсационной скорости u'_x , очевидно, равно нулю, так как

$$\begin{aligned} \bar{u}'_x &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} (u_x - \bar{u}_x) dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} u_x dt}{t_2 - t_1} - \frac{\int_{t_1}^{t_2} \bar{u}_x dt}{t_2 - t_1} = \\ &= \bar{u}_x - \bar{u}_x \frac{\int_{t_1}^{t_2} dt}{t_2 - t_1} = \bar{u}_x - \bar{u}_x = 0, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} dt}{t_2 - t_1} = 1,0$$

5.6.2. Касательное напряжение

Процесс перемешивания вызывает перенос количества движения из области малых скоростей потока в область больших скоростей и обратно. Очевидно, массы с малыми скоростями при входе в область течений с большими скоростями будут тормозить движение в этой области, т. е. оказывать силовое противодействие движению. Это будут силы инерции, и, следовательно, физическая природа турбулентных сопротивлений — инерционная. Массы жидкости с большими скоростями, оказывая давление на присоединенные массы, ускоряют их движение и расходуют при этом свою энергию (при этом ускорении возникают силы инерции).

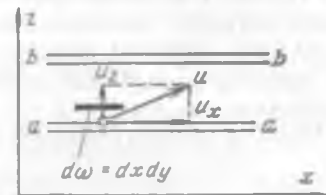


Рис. 5.12.

Определим касательные напряжения. Рассмотрим два слоя: слой $a-a$ и слой $b-b$ (рис. 5.12). Пусть слой $a-a$ движется со скоростью u_x , равной проекции полной скорости частицы u на ось Ox ($u_x = u \cos \alpha$), а слой $b-b$ движется со скоростью $u_x + du_x$. При этом за время dt из слоя $a-a$ в слой $b-b$ через площадку $d\omega = dx dy$, параллельную координатной плоскости xOy , проходит масса $dm = \rho dx dy u_x dt$ и внедряется в слой $b-b$, приобретая там скорость $u_x + du_x$.

Составим уравнение изменения количества движения для массы dm :

$$dm[(u_x + du_x) - u_x] = dF dt. \quad (5.28)$$

Здесь dF — сила, действующая на массу dm в течение времени dt , представляющая собой воздействие жидкости за пределами слоя $a-a$ на массу dm в процессе ее перемещения в слой $b-b$.

С учетом равенства $dm = \rho dx dy u_x dt$ получим

$$\rho dx dy u_x dt du_x = dF dt.$$

Сила F направлена параллельно оси Ox и приходится на площадь $d\omega = dx dy$, поэтому касательное напряжение τ для площадки $d\omega$ равно:

$$\tau = \frac{dF}{dx dy}. \quad (5.29)$$

После подстановки и сокращения на dt получим

$$\rho dx dy u_z du_x = \tau dx dy, \quad (5.30)$$

откуда

$$\tau = \rho u_z du_x.$$

Здесь скорость $u_z = \bar{u}_z + u'_z$, но осредненная скорость $\bar{u}_z = 0$, так как расход потока $Q = \omega v$ направлен вдоль оси трубы, т. е. вдоль оси Ox , а вдоль оси Oz равен нулю (препятствуют жесткие стенки самой трубы). Поэтому $u_z = 0 + u'_z$. Примем далее условие $du_x \approx u'_x$, что возможно допустить, выбирая соответственно расстояние между слоями $a - a$ и $b - b$.

Итак, для касательного напряжения можно записать:

$$\tau = \rho u'_x u'_z. \quad (5.31)$$

Это будет мгновенное касательное напряжение, а осредненное касательное напряжение $\bar{\tau}$ определится по известной формуле осреднения

$$\bar{\tau} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \rho u'_x u'_z dt}{t_2 - t_1} = \rho \frac{\int_{t_1}^{t_2} u'_x u'_z dt}{t_2 - t_1}. \quad (5.32)$$

Здесь, очевидно, осредняется значение подынтегральной функции $u'_x u'_z$, и таким образом будем иметь выражение осредненного касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \overline{\rho u'_x u'_z}. \quad (5.33)$$

5.6.3. Закон распределения скоростей

Прандтль при установлении закона распределения скоростей принял следующую схему течений в трубопроводе.

У стенок трубы скорости принимаются нулевыми, к центру (оси трубы) они постепенно увеличиваются, т. е. у стенок трубы создается ламинарный слой небольшой толщины, за пределами которого располагается центральная основная часть потока — турбулентное ядро. В связи с малыми скоростями тече-

ния в ламинарном (пристенном) слое скорости быстро нарастают, градиент скорости здесь велик, и его можно приближенно считать величиной постоянной. В пределах центрального ядра турбулентное течение и изменение скоростей происходят не так интенсивно. Иллюстрация такой схемы показана на рис. 5-13.

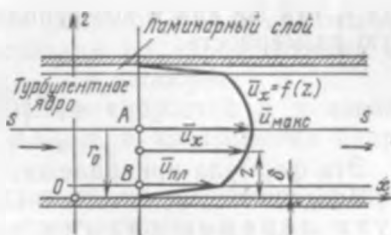


Рис. 5.13.

Будем рассматривать закон распределения осредненных скоростей в центральном турбулентном ядре.

Для установления этого закона надо иметь зависимость касательного напряжения τ от градиента скорости (так же как и при решении этого вопроса при ламинарном движении), т. е. $\tau = f\left(\frac{du_x}{dz}\right)$. Тогда, интегрируя та-

кое дифференциальное уравнение, получаем искомую зависимость $\bar{u}_x = f(z)$.

Воспользуемся формулой (5.33). Входящие в нее пульсационные компоненты u'_x и u'_z по физической природе зависят от градиента скорости du_x/dz , но такая зависимость неизвестна. Поэтому введем гипотезу

$$u'_x = k_1 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \text{ и } u'_z = k_2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right),$$

где коэффициенты k_1 и k_2 должны иметь линейную размерность.

Тогда из (5.33) после подстановки получим:

$$\tau = \rho k_1 k_2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2.$$

Произведение двух коэффициентов k_1, k_2 можно заменить одним множителем и написать:

$$k_1 k_2 = l^2,$$

где l , так же как и коэффициенты k_1 и k_2 , имеет линейную размерность:

$$\bar{\tau} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2. \quad (5.34)$$

Эта формула принадлежит Прандтлю.

Введенный множитель l Прандтль назвал длиной пути перемешивания, понимая этот путь как расстояние, проходимое частицей с начальной скоростью u_x для приобретения скорости $u_x^{(*)}$ того слоя с координатой z , в который внедряется эта частица.

Касательное напряжение $\bar{\tau}$, определяемое (5.34), не зависит от вязкости, но в реальных условиях при неравномерном распределении скоростей в поперечном сечении (т. е. при наличии градиентов скорости) возникает и вязкостное касательное напряжение (как и при ламинарном движении) и, следовательно, результирующее полное касательное напряжение

$$\bar{\tau} = \tau_{\text{вязк}} + \tau_{\text{турб}} = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dz} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2.$$

Эту формулу можно записать иначе:

$$\bar{\tau} = \left[\mu + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \right] \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right). \quad (5.35)$$

Легко видеть, что выражение $\left[\mu + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) \right]$ играет роль вязкости турбулентного потока (подобно вязкости μ для ламинарных потоков), тогда, обозначив

$$\rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right) = \mu_{\text{турб}},$$

можно записать:

$$\bar{\tau} = (\mu_{\text{вязк}} + \mu_{\text{турб}}) \frac{d\bar{u}_x}{dz} = \mu' \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right). \quad (5.36)$$

Уравнение (5.36) (μ' — вязкость при турбулентном движении) было предложено Буссинеском в 70-х годах прошлого века без теоретического обоснования, а по аналогии с законом Ньютона $\tau = \mu \frac{du}{dn}$.

При больших числах Re вдали от стенок касательное напряжение зависит в основном от турбулентного состояния потока ($\mu_{турб} \gg \mu_{вязк}$) и наоборот.

Рассмотрим распределение скоростей в условиях, когда можно пренебречь $\mu_{вязк}$, т. е. касательным напряжением вязкости.

Извлекая квадратный корень из уравнения (5.34) и решая относительно $d\bar{u}_x$, получаем:

$$d\bar{u}_x = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{1}{l} dz.$$

Для интегрирования этого уравнения Прандтль ограничивает пределы интегрирования пространством от ламинарного пристенного слоя внутрь турбулентного ядра, принимая $\tau = \tau_0$ и линейную зависимость l от координаты z в виде

$$l = \kappa z, \quad (5.37)$$

где коэффициент $\kappa = \text{const}$ и называется по Прандтлю универсальной постоянной, а τ_0 — касательное напряжение на стенке, определяемое по (5.7). По опытам Никурадзе $\kappa \approx 0,40$.

После подстановки получим дифференциальное уравнение

$$d\bar{u}_x = \sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)} \frac{1}{\kappa z} dz, \quad (5.38)$$

где

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)}}{\kappa} = \text{const},$$

Интегрируя (5.38), находим:

$$\bar{u}_x = \sqrt{\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)} \frac{1}{\kappa} \ln z + C. \quad (5.39)$$

Итак, распределение скорости $\bar{u}_x$ по нормали к стенке трубы подчиняется логарифмическому закону.

Поскольку величина $\sqrt{\tau_0/\rho}$ выражается в м/с, т. е. единицей скорости¹, Прандтль ввел понятие скорость

¹ В СИ единица напряжения τ_0 Па: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$; единица плотности ρ кг/м³, тогда единица величины $\sqrt{\tau_0/\rho}$ м/с, т. е. единица скорости.

касательного напряжения, обозначив ее u_* :

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* \quad (5.10)$$

Эту скорость в отечественной литературе обычно именуют динамической скоростью (по М. Н. Велikanову).

Пользуясь основным уравнением равномерного движения (5.7), можем определять u_* , м/с, иначе:

$$u_* = \sqrt{gRi}. \quad (5.40a)$$

Используя понятие динамической скорости, (5.39) запишем проще:

$$\bar{u}_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + C. \quad (5.41)$$

Определим значение постоянной C .

Значение постоянной интегрирования C находим по граничным условиям. Для турбулентного ядра имеем две границы: первая — наружная поверхность перехода ламинарного течения у стенки в турбулентный, отстоящая от оси трубы на расстоянии $r - \Delta r$, и вторая — внутренняя, также цилиндрическая, вырождающаяся с приближением к центру в осевую линию трубопровода. На оси имеет место максимальная скорость $\bar{u}_{\max}$, а на границе ламинарного слоя $\bar{u}_{\text{д.с.}}$.

В соответствии с этим получим на оси $\bar{u}_x = \bar{u}_{\max}$ и $z = r_0$, и тогда

$$\bar{u}_{\max} = \frac{u_*}{\kappa} \ln r_0 + C.$$

Определив отсюда C , получим (5.41) в таком виде:

$$\bar{u}_x = \bar{u}_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (5.42)$$

Для построения эпюры скоростей по этому уравнению надо иметь в виду, что координата z лежит в пределах

$$\delta \leq z \leq r_0,$$

где δ — толщина пристенного ламинарного слоя (ламинарной пленки).

Определим толщину ламинарной пленки δ .

Известно, что $\tau = \rho \nu \frac{du}{dn}$ или $\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}_x}{dz}$, но $\frac{d\bar{u}_x}{dz} \approx \frac{u_{л.с}}{\delta}$ и $\frac{\tau}{\rho} = u_*^2$.

Поэтому

$$u_*^2 = \nu \frac{u_{л.с}}{\delta} \text{ или } \frac{u_* \delta}{\nu} = \frac{u_{л.с}}{u_*}.$$

По опытным данным $u_* \delta / \nu$, сходная по структуре с числом Re, равна 11,6. Обозначив $u_* \delta / \nu = N = 11,6$, найдем толщину пленки

$$\delta = \frac{11,6 \nu}{u_*} = \frac{11,6 \nu}{\sqrt{g R l}}. \quad (5.43)$$

Очевидно тогда, что $u_{л.с} / u_* = 11,6$.

Из (5.43) видно, что толщина ламинарного слоя уменьшается с увеличением гидравлического уклона, а так как число $Re = \nu d / \nu$ при этом возрастает, то толщина δ убывает с увеличением Re.

Среднюю скорость определим по формуле $v = Q / \omega$.

Расход

$$Q = \int \bar{u}_x d\omega.$$

Скорость $\bar{u}_x$ можно определить по (5.42), так как $z = r_0 - r$, то

$$\bar{u}_x = \bar{u}_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{r_0}{(r_0 - r)}.$$

Элементарная площадка сечения трубы

$$d\omega = d(\pi r^2) = 2\pi r dr.$$

Итак, расход

$$Q = \int \bar{u}_x d\omega = \int_0^r \left(\bar{u}_{\max} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{r_0}{r_0 - r} \right) 2\pi r dr.$$

Интегрируя, получаем:

$$Q = \left(\bar{u}_{\max} - \frac{3}{2} \frac{u_*}{\kappa} \right) \pi r^2.$$

Тогда средняя скорость

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = u_{\max} - \frac{3}{2} \frac{u_*}{\kappa} \quad (5.44)$$

Обозначив $3/(2\kappa) = D$, получим из (5.44)

$$v = \bar{u}_{\max} - u_* D \quad (5.44a)$$

или

$$D = \frac{\bar{u}_{\max} - v}{u_*} \quad (5.45)$$

По своему физическому смыслу D представляет недостачу средней скорости до максимальной (определенной в безразмерной форме), поэтому эта величина и получила название дефицит скорости. Опыты показывают, что дефицит скорости оказывается малоизменяемой величиной, и ее можно считать постоянной, что и надо было ожидать, так как D зависит только от универсальной постоянной Прандтля κ . Если принять $\kappa = 0,40$, то для дефицита скорости D получим:

$$D = \frac{3}{2\kappa} = \frac{3}{2 \cdot 0,4} \approx 3,75.$$

Примечание. Многочисленные опыты показали, что универсальная постоянная Прандтля κ колеблется приблизительно в пределах

$$0,3 < \kappa < 0,45,$$

а дефицит скорости в пределах

$$3,3 < D < 4.$$

Потерянный напор в трубах определяется по формуле Дарси — Вейсбаха

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Входящий в эту формулу коэффициент сопротивления λ при ламинарном движении (5.24) равен $64/Re$, т. е. зависит только от числа Рейнольдса.

При турбулентном движении он зависит от многих факторов, при этом зависимость от числа Рейнольдса оказывается более сложной.

Вводя в формулу Дарси — Вейсбаха взамен диаметра d гидравлический радиус R (равный $R = d/4$) и учитывая известное соотношение $h_w/l = i$, можем записать:

$$\lambda = \frac{8gRi}{v^2},$$

а так как $gRi=u_*^2$, то

$$\lambda = 8 \left(\frac{u_*}{v} \right)^2$$

или после извлечения квадратного корня

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{v}{u_*} \right).$$

С учетом формулы (5.44а) можно записать и так:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{\bar{u}_{\max}}{u_*} - D \right). \quad (5.46)$$

Но поскольку неизвестно отношение $\bar{u}_{\max}/u_*$ для вычисления λ по этой формуле, произведем некоторые преобразования. Из формулы (5.42) имеем:

$$\bar{u}_{\max} = \bar{u}_x + \frac{u_*}{\pi} \ln \frac{r_0}{z}.$$

При $z=\delta$ имеем $\bar{u}_x = \bar{u}_{x,c}$ (обозначения известны). После подстановки и деления на u_* получим:

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_*} = \frac{\bar{u}_{x,c}}{u_*} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{r_0}{\delta}. \quad (5.47)$$

Здесь, как известно, $\bar{u}_{x,c}/u_* = 11,6$.
Определим отношение r_0/δ :

$$\frac{r_0}{\delta} = \frac{d}{2} \frac{u_*}{11,6v},$$

но так как $u_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$, то

$$\frac{r_0}{\delta} = \frac{d}{2} \frac{v \sqrt{\lambda}}{11,6v\sqrt{8}} = \left(\frac{vd}{v} \right) \frac{\sqrt{\lambda}}{2 \cdot 11,6\sqrt{8}} = \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{65,5}.$$

Тогда (5.47) можно записать так:

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u_*} = 11,6 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{65,5}. \quad (5.48)$$

С учетом (5.48) перепишем формулу (5.46) в таком виде (переходя к десятичным логарифмам):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(11,6 + \frac{2,3}{\kappa} \lg \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{65,5} - D \right) \quad (5.49)$$

или в самой общей форме (формула Прандтля)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \lg \text{Re} \sqrt{\lambda} - B. \quad (5.49a)$$

Здесь числовые значения A и B зависят от принятого значения κ , при $\kappa=0,4$ получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \text{Re} \sqrt{\lambda} - 0,9.$$

На основе экспериментальных исследований Никурадзе формула Прандтля получила окончательный вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \text{Re} \sqrt{\lambda} - 0,8 = -2 \lg \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}. \quad (5.50)$$

При $\kappa=0,45$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \text{Re} \sqrt{\lambda} - 0,4.$$

На основании опытных данных получена более удобная формула (формула Конакова):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \text{Re} - 1,5. \quad (5.51)$$

Формула Прандтля (5.50) получена теоретическим путем в предположении, что толщина пристенного ламинарного слоя δ больше высоты выступов шероховатости e (рис. 5.14), благодаря чему пристенный слой как бы устраняет влияние этих выступов на развитие водоворотных образований турбулентного потока. Однако во многих случаях это условие

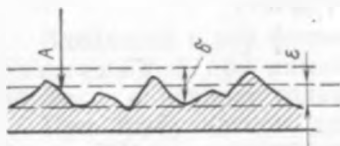


Рис. 5.14.

не соблюдается. Толщина пристенного слоя δ уменьшается с увеличением числа Re , поэтому в одной и той же трубе с данной неизменной шероховатостью, но с увеличением расхода Q , а следовательно, с увеличением Re наступает нарушение

пристенного слоя δ уменьшается с увеличением числа Re , поэтому в одной и той же трубе с данной неизменной шероховатостью, но с увеличением расхода Q , а следовательно, с увеличением Re наступает нарушение

условия $\delta > \epsilon$ и шероховатость начинает оказывать свое влияние. При очень больших числах Re шероховатость играет большую и даже решающую роль.

5.6.4. Способы определения потерь напора при равномерном турбулентном движении

Основной формулой при расчетах напорных трубопроводов является формула Дарси—Вейсбаха

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

а при расчете течений в открытых руслах формула Шези

$$v = C \sqrt{Ri}.$$

Для использования этих формул требуется знать числовые значения коэффициентов λ и C .

При ламинарном течении коэффициент λ для труб определяется по формуле (5.24): $\lambda = 64/Re$. При турбулентном течении в условиях прямого влияния шероховатости стенок на формирования турбулентного состояния потока широко используются результаты опытов. Большое теоретическое и практическое значение имеют исследования Никурадзе, представленные в графической зависимости (рис. 5.15). График Никурадзе составлен в логарифмических координатах ($\lg 100\lambda$ и $\lg Re$). Исследования проводились на различных трубах с искусственно созданной однородной шероховатостью путем нанесения (наклейки) на внутреннюю поверхность труб песчинок одинаковой крупности.

На графике Никурадзе нанесены две прямые линии: линия для λ при ламинарном движении 1 и линия для λ по формуле Блязиуса¹ для турбулентного потока в трубах с гладкими стенками 2 (рис. 5.15)

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (5.52)$$

Кроме этих прямых, на графике показаны опытные точки и линии для труб с искусственной шероховатостью, о которых было сказано выше.

¹ Формула Блязиуса была предложена в 1913 г. до опубликования работ Прандтля и Никурадзе.

Рассмотрение графика позволяет установить три характерные зоны: зону сопротивления ламинарного потока при $Re \leq 2300$, когда $\lambda = f(Re)$, промежуточную зону при Re от 2300 до примерно $Re \approx 10^5$, когда коэффициент сопротивления λ является функцией и числа Re , и относительной шероховатости $k = (e/r_0)$, т. е. когда

$$\lambda = f(Re, k), \quad (5.53)$$

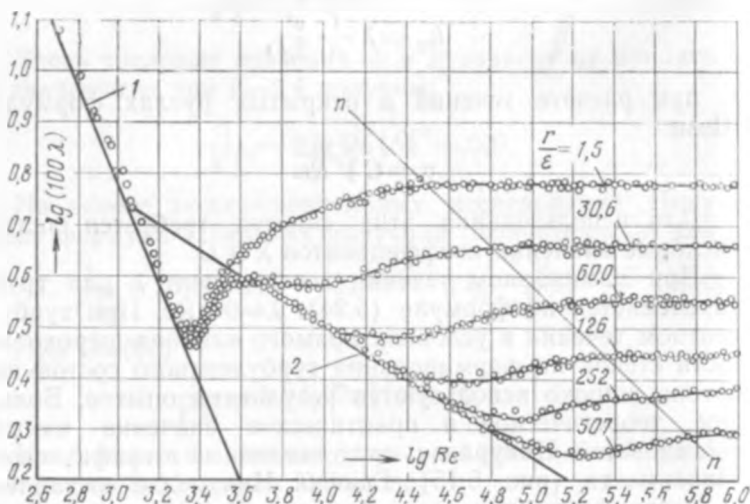


Рис. 5.15.

и третью зону — зону квадратичного сопротивления, когда коэффициент λ является функцией только относительной шероховатости k и практически не зависит от Re :

$$\lambda = f(k). \quad (5.54)$$

Для квадратичной и промежуточной зон существуют многочисленные эмпирические формулы (см. справочную и специальную литературу), ниже приводятся наиболее распространенные из них.

Для квадратичной зоны (при $Re \geq 10^5$) предложена формула Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left(\frac{r_0}{e} \right) + 1.74 = -2 \lg 0.27 \frac{e}{d} \quad (5.55)$$

и формула Б. А. Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_s}{d} \right)^{0,25}, \quad (5.55a)$$

где k_s — так называемая эквивалентная шероховатость. Под эквивалентной шероховатостью понимается такая высота выступов равнозернистой шероховатости, которая при введении ее в формулы для λ (содержащие k_s) приводит к вычислению коэффициента сопротивления λ для данной категории русл в реальных условиях. Числовые значения k_s приводятся в справочной литературе.

Существуют формулы Ф. А. Шевелева, Н. З. Френкеля, Л. А. Тепакса и других ученых.

Для промежуточной зоны, когда $\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon/d)$, отметим формулу Колбрука и формулу А. Д. Альтшуля. Обе эти формулы представляют собой сочетание одной из формул для гладких труб с формулой для шероховатых труб.

Колбрук, используя формулу Прандтля для гладких труб (5.50) и формулу Никурадзе (5.55) для шероховатых труб (представив их в другом виде), вывел для промежуточной зоны формулу

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + 0,27 \frac{\varepsilon}{d} \right).$$

А. Д. Альтшуль, используя формулу Блязиуса (5.52) для гладких труб и формулу Б. Л. Шифринсона (5.55a) для шероховатых, предложил формулу

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{k_s}{d} \right)^{0,25}. \quad (5.56)$$

При очень больших числах Re , когда можно пренебречь величиной $\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}$, а также величиной $68/\text{Re}$,

формулы Колбрука и Альтшуля превращаются в формулы для шероховатых труб — первая в формулу Никурадзе, а вторая в формулу Шифринсона. Аналогично, когда можно пренебречь для гладких труб величинами ε/d и k_s/d , формула Колбрука переходит в формулу Прандтля для гладких труб, а формула Альтшуля в формулу Блязиуса.

При равных исходных условиях рассмотренные формулы дают примерно одинаковые результаты.

Формула Шези имеет большое теоретическое и практическое значение при расчетах движения жидкости в открытых руслах (каналах, реках и т. п.). За время ее существования (в течение двух столетий) было предложено множество эмпирических формул для определения коэффициента C . Ниже приводятся лишь формулы, получившие самое широкое распространение для квадратичной зоны сопротивления.

Формула Маннинга (1890 г.).

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \text{ м}^{0.5}/\text{с}. \quad (5.57)$$

Формула Форхгеймера (1923 г.)

$$C = \frac{1}{n} R^{1/5}, \text{ м}^{0.5}/\text{с}. \quad (5.58)$$

Формула акад. Н. Н. Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y, \text{ м}^{0.5}/\text{с}. \quad (5.59)$$

Здесь R и n — соответственно гидравлический радиус и коэффициент шероховатости, $\text{с}/\text{м}^{0.5-y}$; числовые значения n приводятся по шкале Гангиле — Куттера в справочных руководствах.

В формуле (5.59) показатель степени y является функцией n и R , т. е. $y=f(n, R)$.

Для облегчения вычисления коэффициента C в справочной литературе приводятся специальные таблицы.

Замечание. Наличие равенства $C = \sqrt{8g/\lambda}$ не определяет собой возможности автоматического использования данных значений λ для труб в целях вычислений коэффициента C для каналов.

5.7. МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Потери на местные сопротивления оцениваются общей формулой

$$h_{\text{м}} = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

где ζ — коэффициент местных сопротивлений, зависит не только от вязкости и скорости течения основного потока, но главным образом от геометрической формы и размеров препятствий на пути потока.

Теоретические решения известны только для некоторых частных случаев: внезапное расширение трубы (теорема Борда—Карно), плавный поворот потока (работы А. Я. Миловича) и др.

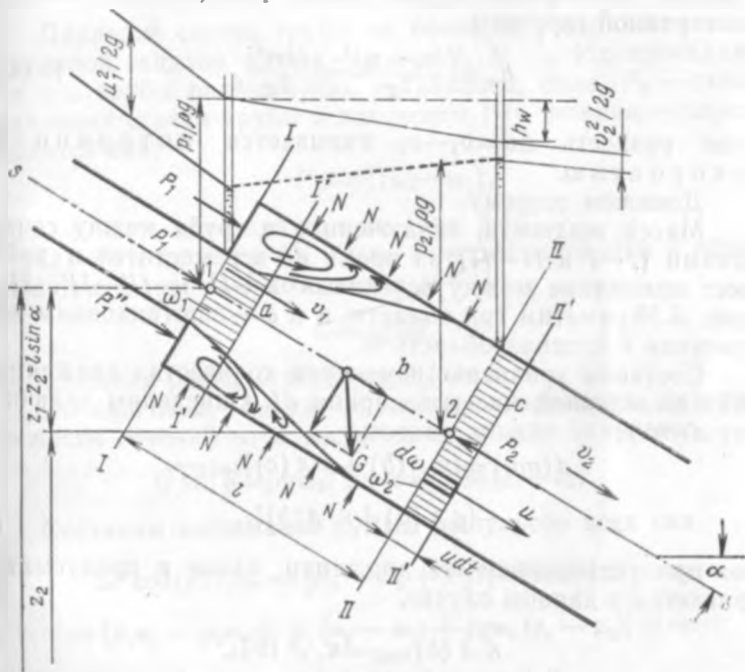


Рис. 5.16.

Здесь рассмотрим только вопрос о потере напора при внезапном расширении трубопровода.

Пусть имеем трубопровод с внезапным изменением его диаметра (площади поперечного сечения) (рис. 5.16). Поток жидкости, выходя из трубы с меньшим диаметром сечения в трубу с большим диаметром, постепенно расширяется и затем занимает все сечение трубы большего диаметра (предусматривается турбулентный поток). В кольцевом пространстве между стенками трубы и струей жидкость находится в сложном циркуляцион-

ном движении с обменом масс. Частицы жидкости основного потока (на участке его расширения) заходят в это пространство Δ , совершив там петлеобразные движения, снова входят в основной поток. На поддержание этого процесса главным образом и расходуется энергия основного потока.

Теорема Борда—Карно. Потерянный напор при внезапном расширении трубы равен скоростному напору потерянной скорости

$$h_w = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{(\Delta v)^2}{2g}, \quad (5.60)$$

где разность $\Delta v = v_1 - v_2$ называется потерянной скоростью.

Докажем теорему.

Масса жидкости, заключенная в трубе между сечениями ($I—I$ и $II—II$) за время dt переместится и займет положение между сечениями $I'—I'$ и $II'—II'$. На рис. 5.16 отметим три области: a и c — заштрихованы на рисунке и средняя область b .

Составим уравнение изменения количества движения для выделенной массы за время dt . Определим величину $d(mv)$:

$$d(mv) = \{ \kappa.л(b) + \kappa.л(c) \}_{t+dt} - \\ - \{ \kappa.л(a) + \kappa.л(b) \}_t,$$

но при установившемся движении, какое и предусматривается в данном случае,

$$\kappa.л(b)_{t+dt} = \kappa.л(b)_t.$$

Поэтому, опуская индексы t и $t+dt$ и полагая коэффициент Буссинеска $\alpha_0 = 1,0$, получаем:

$$d(mv) = \kappa.л(c) - \kappa.л(a), \quad (5.61)$$

где

$$\kappa.л(c) = \rho dW_c v_2 = \rho \omega_2 v_2 dt v_2 = \rho dt \omega_2 v_2^2$$

и

$$\kappa.л(a) = \rho dt \omega_1 v_1^2.$$

Таким образом, равенство (5.61) надо записать так:

$$d(mv) = \rho dt (\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2). \quad (5.62)$$

Составим выражение импульсов действующих сил в проекциях на ось движения

$$\Sigma P \cos(P, l) dt.$$

Поверхностные силы — силы давления жидкости на торцевые сечения ω_1 и ω_2 , т. е. силы P_1 и P_2 :

$$P_1 = p_1 \omega_1 \text{ и } P_2 = p_2 \omega_2.$$

Давление стенок трубы на боковую поверхность выделенной жидкой массы — силы $N, N \dots$ Их проекции на ось трубы равны нулю, и, наконец, сила P_3 — сила давления стенки трубы в плоскости 1-го сечения — определится так:

$$P_3 = p_1 (\omega_2 - \omega_1),$$

где $\omega_2 - \omega_1$ — площадь кольца (рис. 5.16).

Объемная сила. Сила тяжести жидкости в объеме от сечения $I-I$ до сечения $II-II$

$$G = \rho g \omega_2 l,$$

ее проекция равна $G \sin \alpha = \rho g \omega_2 l \sin \alpha$.

Но $l \sin \alpha = z_1 - z_2$, где z_1 и z_2 — координаты центра тяжести сечений ω_1 и ω_2 , поэтому можно записать:

$$G \sin \alpha = \rho g \omega_2 l \sin \alpha = \rho g \omega_2 (z_1 - z_2).$$

Составим выражение суммы импульсов всех сил

$$\begin{aligned} \Sigma P \cos(P, l) dt &= [P_1 - P_2 + P_3 + G \sin \alpha] dt = \\ &= [p_1 \omega_1 - p_2 \omega_2 + p_1 (\omega_2 - \omega_1) + \rho g \omega_2 (z_1 - z_2)] dt = \\ &= [\omega_1 (p_1 - p_2) + \rho g \omega_2 (z_1 - z_2)] dt = \\ &= \rho g \omega_2 dt \left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) \right]. \end{aligned}$$

Тогда уравнение изменения количества движения получит вид:

$$\rho \cdot dt (\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2) = \rho g \omega_2 dt \left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) \right]. \quad (5.63)$$

Сокращая на $\rho g \omega_2 dt$, получаем:

$$\frac{\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2}{g \omega_2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2). \quad (5.63a)$$

Поскольку $\omega_1/\omega_2=v_2/v_1$, то запишем:

$$\frac{\omega_2 v_2^3 - \omega_1 v_1^3}{g \omega_2} = \frac{v_1^3 - \frac{\omega_1}{\omega_2} v_1^3}{g} = \frac{v_1^3 - v_2 v_1^2}{g}$$

Умножая затем числитель и знаменатель на 2 и преобразовывая далее, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2v_2^3 - 2v_1 v_2}{2g} &= \frac{v_1^3 - 2v_1 v_2 + v_1^3 - v_1^3 + v_1^3}{2g} = \\ &= \frac{(v_1 - v_2)^3}{2g} - \frac{v_1^3 - v_2^3}{2g}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Заменяя теперь левую часть уравнения (5.63а) выражением (5.64), получаем:

$$\frac{(v_1 - v_2)^3}{2g} - \frac{v_1^3 - v_2^3}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2)$$

или, группируя слагаемые несколько иначе,

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^3}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^3}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^3}{2g}. \quad (5.65)$$

При сопоставлении этого уравнения с уравнением Бернулли легко видеть, что четвертое слагаемое правой части представляет собой потерянный напор h_w на участке от первого до второго сечения, т. е. потерянный напор при внезапном изменении площади поперечного сечения потока.

Итак, окончательно получим:

$$h_w = \frac{(v_1 - v_2)^3}{2g}, \quad (5.66)$$

что и доказывает теорему Борда — Карно.

Потеря напора при слиянии двух потоков. Допустим, что в трубопроводе с площадью поперечного сечения ω в плоскости $n-n$ (рис. 5.17) одновременно входят два параллельных друг другу потока.

Первый поток с расходом $Q_1=\omega_1 v_1$, второй — с расходом $Q_2=\omega_2 v_2$. В плоскости $n-n$ начинается их слияние, и на некотором расстоянии (в сечении $m-m$) они образуют единый поток с расходом

$$Q = \omega v_m, \text{ где } \omega = \omega_1 + \omega_2, \text{ а } v_m = \frac{Q_1 + Q_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

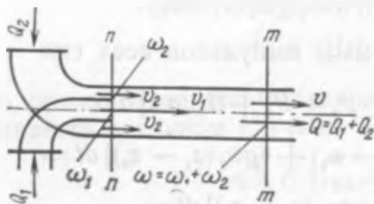


Рис. 5.17.

Пусть в плоскости $n-n$ давление для обоих потоков общее и равно p , тогда, если удельная энергия первого потока E_1 , а второго E_2 , то их разность $\Delta E = E_1 - E_2 =$
 $= \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \leq 0$.

Удельная энергия объединенного потока в сечении $m-m$

$$E = \frac{E_1 Q_1 + E_2 Q_2 - h_w (Q_1 + Q_2)}{Q_1 + Q_2} = \frac{E_1 Q_1 + E_2 Q_2}{Q} - h_w =$$

$$= \frac{p_m}{\rho g} + \frac{v_m^2}{2g}.$$

Если один из двух этих потоков, например второй поток, имеет удельную энергию в начальном сечении $n-n$, равную $E_2 = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} < E = \frac{p_m}{\rho g} + \frac{v_m^2}{2g}$, и, следовательно, при смешении его удельная энергия возрастает, то первый имеет больший начальный запас энергии ($E_1 > E_2$), и он расходует свою энергию $E_1 \rho g Q_1$ как на преодоление всех гидравлических сопротивлений при смешении, так и на увеличение энергии второго потока. Потерянный напор по отношению к первому потоку равен¹:

$$h_{w1} = \frac{(v_1 - v_m)^2}{2g} + \frac{Q_2}{Q_1} \frac{(v_2 - v_m)^2}{2g}.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

6.1. ПОНЯТИЕ О КОРОТКИХ И ДЛИННЫХ, ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Физический процесс движения жидкости в трубах был рассмотрен в гл. 5, здесь рассмотрим только методику технического их расчета.

Обычно различают трубопроводы простые и сложные, короткие и длинные.

Простыми трубопроводами называют такие, у которых диаметр трубы, а также и расход жидкости на всем протяжении остаются неизменными, а сложными

¹ Подробнее см. [10, с. 207—210].

ми — все остальные, включая различные разомкнутые и замкнутые сети труб с устройством регулирующих резервуаров или без таковых.

Наряду с этим делят трубопроводы на короткие и длинные. Короткими трубопроводы называют в том случае, когда по техническим условиям гидравлические расчеты проводятся подробно с учетом скоростного напора и всех сопротивлений, т. е. сопротивлений и по длине, и местных. Длинные трубопроводами называют такие, у которых доминируют потери напора по длине, а местными сопротивлениями и скоростным напором можно пренебречь.

При инженерном расчете трубопроводов используются следующие закономерности и формулы.

Уравнение Бернулли

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + \Sigma h_w.$$

Уравнение расхода

$$Q = \omega v = |\text{const}|_A.$$

Формула Дарси для определения потерь напора по длине трубопровода

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Формула Шези

$$v = C \sqrt{Ri} \text{ или } Q = \omega C \sqrt{Ri}.$$

Формула для определения гидравлического уклона

$$i = \frac{h_w}{l} \text{ или } i = \frac{v^2}{C^2 R} \text{ или } i = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}.$$

Все обозначения здесь общеизвестны.

Наряду с этим широко используется понятие о расходной характеристике. Формула Шези может быть записана в таком виде:

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} \text{ или } Q = K \sqrt{i},$$

где $K = \omega C \sqrt{R}$ и называется расходной характеристикой.

Единица расходной характеристики соответствует единице расхода, $\text{м}^3/\text{с}$, что легко усматривается из этого равенства (гидравлический уклон i является безразмерной величиной). Очевидно, что если уклон равен единице, то расход Q будет равен расходной характеристике K .

Можно сказать, что *расходная характеристика K представляет собой расход при гидравлическом уклоне, равном единице.*

6.2. ПРОСТОЙ ТРУБОПРОВОД. ИСТЕЧЕНИЕ В АТМОСФЕРУ И ПОД УРОВЕНЬ

При расчете простого трубопровода следует иметь в виду две основные расчетные схемы: истечение в атмосферу и истечение под уровень

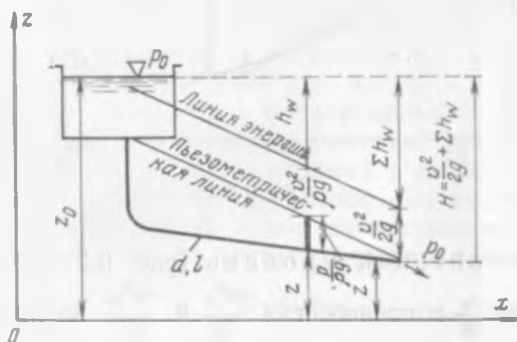


Рис. 6.1.

Схема истечения в атмосферу показана на рис. 6.1, на котором изображены линия начального напора, линия энергии и пьезометрическая линия. Эти линии, как известно, иллюстрируют последовательное изменение слагаемых уравнения Бернулли вдоль по течению.

Схема истечения под уровень показана на рис. 6.2, на котором показаны такие же три линии, но уже для случая истечения из резервуара A в резервуар B .

Напишем уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2 для каждой схемы.

Истечение в атмосферу (рис. 6.1)

$$\frac{p_0}{\rho g} + z_0 + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + z + \frac{\alpha v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \frac{v^2}{2g}. \quad (6.1)$$

Сокращая $p_0/\rho g$, пренебрегая по малости величиной $\alpha v_0^2/2g$ и обозначая $z_0 - z = H$, получаем:

$$H = \frac{\alpha v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \Sigma \frac{v^2}{2g}$$

или, полагая коэффициент Кориолиса $\alpha=1$,

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \right). \quad (6.2)$$

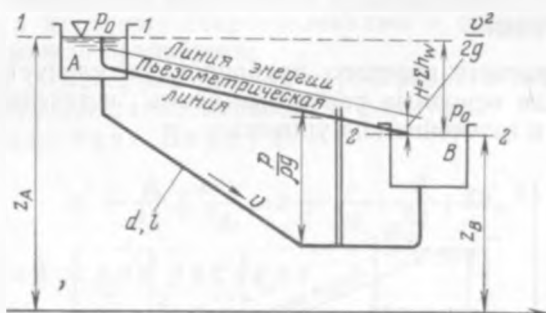


Рис. 6.2.

Истечение под уровень (рис. 6.2)

Опуская $\frac{p_0}{\rho g}$ и пренебрегая $\frac{\alpha v_A^2}{2g}$ и $\frac{\alpha v_B^2}{2g}$ по их малости, можем записать:

$$z_A = z_B + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \Sigma \frac{v^2}{2g} + \frac{(v - v_B)^2}{2g} \quad (6.3)$$

В этом уравнении два последних слагаемых представляют собой потери на местные сопротивления, причем последнее слагаемое определяет потерю напора при выходе из трубопровода в резервуаре B (по теореме Борда)

$$h_w = \frac{(v - v_B)^2}{2g}.$$

Здесь скорость v_B очень мала ($v_B \ll v$), и ею можно пренебречь в сравнении со скоростью в трубопроводе v . Имея это в виду и обозначая $z_A - z_B = H$, можно уравне-

ние (6.3) записать в виде $H = \sum h_w$ или в подробной записи окончательно

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta + 1 \right). \quad (6.4)$$

Сопоставляя уравнение (6.2) для случая истечения в атмосферу с уравнением (6.4) для случая истечения под уровень, можно видеть, что они по форме написания совершенно тождественны между собой, и отсюда легко можно сделать правильный вывод, что методика и порядок решения расчетных задач в обоих случаях будут также тождественны.

Различие же по физическому смыслу между уравнением (6.2) и уравнением (6.4) заключается лишь в том, что единица, стоящая в скобках правой части уравнения (6.2), относится к скоростному напору на выходе потока из трубы в атмосферу и, следовательно, определяет собой ту кинетическую энергию, которую поток уносит с собой и которая может быть в дальнейшем использована, например, с помощью ковшовой турбины.

Что касается единицы, стоящей в скобках уравнения (6.4), то при истечении под уровень эта единица определяет собой потерянный напор на внезапное расширение при выходе потока из трубы в резервуар B , поэтому

$$H = \sum h_w.$$

Таким образом, *при истечении под уровень действующий напор H равен сумме всех потерянных напоров вдоль трубопровода*, т. е. вся энергия, которой располагает поток, переходя с уровня z_A на уровень z_B , расходуется только на преодоление сопротивлений.

6.3. ТРИ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА

Воспользуемся уравнением Бернулли в форме (6.2)

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right)$$

и уравнением расхода $Q = \omega v$, откуда

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Подставляя выражение скорости в уравнение Бернулли, получаем основную расчетную формулу

$$H = \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^5} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right). \quad (6.5)$$

Поскольку длина трубопровода определяется производственными условиями, т. е. всегда является известной (заданной), при расчете трубопровода возникают три основные задачи: определение или расхода Q , или напора H , или диаметра трубы d , т. е. три задачи по числу трех указанных параметров, связанных уравнением (6.5).

Рассмотрим решение этих задач.

Задача первая. Требуется определить необходимый действующий напор H для трубопровода длиной l , м, диаметром d , м, для пропуска расхода Q .

Решение. Очевидно, решение сводится к прямому вычислению напора H по (6.5). При этом, понятно, потребуется определять коэффициенты сопротивления λ и $\Sigma \zeta$, что не вызывает затруднений, хотя эти коэффициенты, как известно, могут быть связаны с числом Рейнольдса $Re = vd/\nu$. Однако это число при заданных d и Q определяют без затруднений.

Задача вторая. Требуется определить расход Q при заданных H , l и d .

Решение. Расход Q вычисляется по формуле, которую можно получить из (6.5):

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta}}. \quad (6.6)$$

Однако вычисление по формуле (6.6) встречает некоторое затруднение, связанное с тем, что коэффициенты сопротивления λ и $\Sigma \zeta$, как было только что отмечено, могут зависеть от числа Re , а для определения числа Re необходимо знать скорость v или искомый расход Q ($Re = vd/\nu = Qd/\omega\nu$). Поэтому вычисление расхода Q по (6.6) возможно или методом попыток или графоаналитически, путем использования формулы (6.5) и построения графика $H = f(Q)$.

Построение кривой $H = f(Q)$ производится достаточно просто (рис. 6.3). Задаваясь рядом значений $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, по формуле (6.5) вычисляют ряд значений $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Задача третья. Требуется определить диаметр трубопровода d по заданным H , Q и l .

Решение. Легко видеть, что определить диаметр трубопровода d наиболее просто графоаналитическим путем. Строя кривую $d=f(H)$, аналогично решению второй задачи, т. е. задаваясь рядом $d_1, d_2, \dots, d_n$, вычисляются $H_1, H_2, \dots, H_n$ (рис. 6.4). При этом для каждой точ-

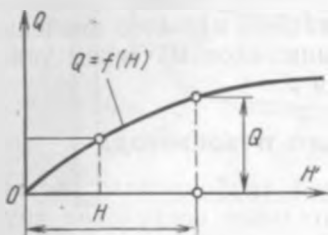


Рис. 6.3.

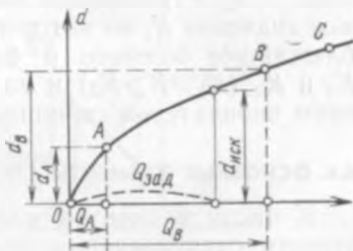


Рис. 6.4.

ки графика вычисление $H_1, H_2, \dots, H_n$ проводится без подбора, так как при каждом $d_1, d_2, \dots, d_n$ число Рейнольдса вычисляется непосредственно по формуле $Re = Qd/\omega\nu$.

Замечание 1. Для длинных водоводов, когда потерями на местные сопротивления можно пренебречь, все три основные задачи решаются на основе использования формулы

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{8Q^2 l}{g\pi^2 d^5}. \quad (6.7)$$

Следовательно, методика расчета сохраняется, но вычисления оказываются проще.

Замечание 2. Особенно просто решаются эти задачи, если при расчете принимается допущение о том, что течение в водоводе проходит в условиях квадратичного закона сопротивления, т. е. когда λ , а также коэффициент Шези C не зависят от Re .

В этом случае, пользуясь понятием о расходной характеристике, запишем формулу Шези для расчета в таком виде:

$$H = \frac{Q^2}{K^2} l. \quad (6.8)$$

Легко видеть, что определение H и Q (т. е. решение первых двух задач) сводится к простому вычислению их по формуле (6.8), причем значение расходной характеристики K находят для заданного диаметра по заранее составленным таблицам для K в зависимости от диаметра d [18].

Для решения третьей задачи (определить d по данным H , Q и l) сначала вычисляется по (6.8) необходимое значение K , по которому затем из таблиц находятся ближайшее большее и ближайшее меньшее значения K_1 и K_2 ($K_1 > K > K_2$) и по технико-экономическим условиям окончательно принимается d .

6.4. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СЛОЖНОГО ТРУБОПРОВОДА

К числу элементов сложного трубопровода можно отнести следующие: последовательное соединение труб разного диаметра; параллельное соединение; трубопровод с переменным по пути расходом; кольцевой трубопровод; разомкнутая сеть.

Последовательное соединение — трубопровод, уложенный в одну линию из труб различного диаметра. Схема такого трубопровода показана на рис. 6.5*.

Допустим, что трубопровод состоит из n участков труб разного диаметра. Очевидно, имеем такое равенство:

$$H = h_{w_1} + h_{w_2} + \dots + h_{w_n}, \quad (6.9)$$

где h_{w_1} , h_{w_2} , ..., h_{w_n} представляют собой потерянные напоры для труб с диаметрами d_1 , d_2 , ..., d_n .

Потери напора можно определить по (6.8):

$$h_{w_i} = \frac{Q^2}{K_i^2} l_i.$$

Расход здесь одинаков, но расходные характеристики K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_n и длины участков l_1 , l_2 , ..., l_n разные. После подстановки в (6.9) получим:

$$H = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \dots + \frac{l_n}{K_n^2} \right). \quad (6.10)$$

* Для упрощения изложения здесь и далее будем пренебрегать местными сопротивлениями и оценивать потерянный напор, пользуясь (6.8).

Из рассмотрения (6.10) видно, что первые две задачи (определение H и Q) решаются путем прямого вычисления, так как все величины, кроме искомой (или H , или Q), являются известными.

Третья задача (определение диаметра труб), если заданы расход Q , действующий напор H и длины отдельных участков $l_1, l_2, \dots, l_n$, а требуется определить d_1 ,

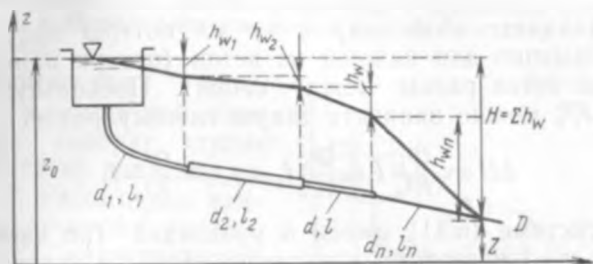


Рис. 6.5.

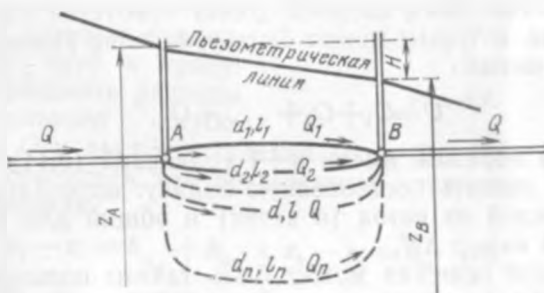


Рис. 6.6.

$d_2, \dots, d_n$, будет неопределенной (имеющей множество решений), так как имеется одно уравнение (6.10) и n неизвестных: $K_1, K_2, \dots, K_n$. Необходимо, помимо одного диаметра, задать диаметры всех отдельных участков.

Параллельное соединение. Схема параллельного соединения труб показана на рис. 6.6. Допустим, что магистральный трубопровод с расходом Q делится в точке A на n веток (различной длины $l_1, l_2, \dots, l_n$ и различного диаметра $d_1, d_2, \dots, d_n$), которые объединяются в точке B, образуя далее продолжение магистрального трубопровода.

Основной задачей является определение расхода каждой ветки $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ и потеряннго напора h_w на пути от точки A до точки B .

Решение этой задачи основано на том, что напоры H_A и H_B в узлах магистрали в точках A и B являются общими для каждой из веток, а их разность

$$\Delta H = H_A - H_B$$

представляет собой одну и ту же потерю напора h_w одновременно для каждой из веток (потери напора на каждой ветке равны между собой). Поскольку $\Delta H = Q^2 l / K^2$, можно записать такую систему равенств:

$$\Delta H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 = \dots = \frac{Q_n^2}{K_n^2} l_n. \quad (6.11)$$

В системе (6.11) имеем n уравнений (по числу веток) и $n+1$ неизвестных величин, из них n неизвестных расходов $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ и один неизвестный потеряннй напор ΔH .

Для замыкания системы (6.11) требуется еще одно уравнение, которым может быть уравнение узловых расходов, а именно

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n. \quad (6.12)$$

Таким образом, имеем $n+1$ уравнений (6.11), (6.12) и можем решить поставленную задачу: определить расходы каждой из веток (n веток) и общий для них потеряннй напор ΔH .

Порядок решения может быть таким: пользуясь системой (6.11), все расходы выразим через один из них, например через Q_1 :

$$Q_2 = Q_1 \frac{K_1}{K_2} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; \quad Q_3 = Q_1 \frac{K_1}{K_3} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}}, \dots \\ \dots, Q_n = Q_1 \frac{K_1}{K_n} \sqrt{\frac{l_1}{l_n}}, \quad (6.13)$$

после чего из (6.12) получим

$$Q = Q_1 \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} + \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}} + \dots + \frac{K_n}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_n}} \right), \quad (6.14)$$

и, наконец, из (6.14) находим расход Q_1 первой ветки. Зная теперь значение Q_1 , найдем $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ из равенств (6.13).

Потерянный напор ΔH находится по одному из равенств (6.11), например

$$\Delta H = \frac{Q^3}{K^3_1} l_1.$$

Замечание. Если при заданных диаметрах $d_1, d_2, \dots, d_n$ и длинах $l_1, l_2, \dots, l_n$ задать, кроме того, и потерянный напор ΔH , то задача о параллельном соединении перейдет в задачу о простом водопроводе.

Разомкнутая сеть.

Схема разомкнутой сети (иногда говорят «тупиковой» сети) показана на рис. 6.7. Рассмотрим наиболее простой случай, когда магистральный трубопровод (водовод) делится на две ветки. Известны отметки z_0, z_1 и z_2 , а также длины и диаметры всех труб и требуется определить расходы магистрального трубопровода Q и двух ответвлений Q_1 и Q_2 . Для решения задачи требуются три независимых уравнения. Первые два уравнения

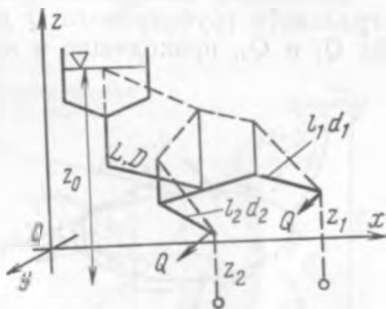


Рис. 6.7.

где h_m, h_{m1}, h_{m2} — потерянный напор соответственно на магистральной и на ответвлениях,

$$\Delta z = \frac{Q^3}{K^3} L + \frac{Q^3_1}{K^3_1} l_1, \text{ и } \Delta z_2 = \frac{Q^3}{K^3} L + \frac{Q^3_2}{K^3_2} l_2 \quad (6.15)$$

и третье уравнение

$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (6.16)$$

Из уравнения (6.15) получим:

$$\frac{Q^3}{K^3} L = \Delta z_1 - \frac{Q^3_1}{K^3_1} l_1 = \Delta z_2 - \frac{Q^3_2}{K^3_2} l_2,$$

откуда Q_2 определим через Q_1 :

$$Q_2 = \sqrt{\frac{K_2}{l_2}} \sqrt{\Delta z_1 - \Delta z_2 + \frac{Q^3_1}{K^3_1} l_1} = f_2(Q_1) \quad (6.17)$$

$$\left(\text{при } \Delta z_1 = \Delta z_2 \text{ получим } Q_2 = \frac{Q_1 K_1 \sqrt{l_1}}{K_2 \sqrt{l_2}} \right).$$

После этого с учетом (6.15) получим уравнение

$$\Delta z_1 = \frac{|Q_1 + f(Q_1)|^2}{K^2} L + \frac{Q_1^5}{K^2} l_1, \quad (6.18)$$

из которого найдем расход Q_1 . Расход Q_2 находится по (6.17), а суммарный расход $Q = Q_1 + Q_2$.

Кольцевой водопровод (рис. 6.8 и 6.9). Расход магистрального трубопровода Q делится в узле A на расходы Q_1 и Q_2 , проходящие в кольце по двум противоположным направлениям при сбросе по пути в узлах $1, 2, 3, \dots, n$ расходов $q_1, q_2, \dots, q_n$.

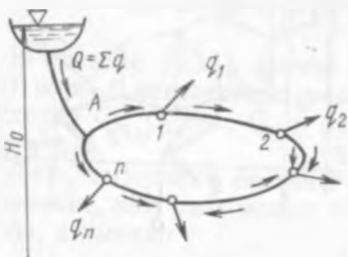


Рис. 6.8.

Среди этих узлов должен быть один узел, к которому вода поступает по кольцу с двух сторон. Такой узел (2 на рис. 6.9) называется точкой схода. В точке схода гидростатический напор будет минимальным, а потерян-

ный напор по кольцу от точки A до точки схода будет один и тот же по обоим направлениям кольца ($h_{A,1,2,\dots,сх} = h_{A,n,(n-1),\dots,сх}$). Какой из узлов на кольце окажется точкой схода, заранее неизвестно.

Заданными величинами являются магистральный расход Q , узловые расходы $q_1, q_2, \dots, q_n$ (очевидно, $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$) и все геометрические элементы водопроводной сети (диаметры $d_1, d_2, \dots, d_n$ и длины $l_1, l_2, \dots, l_n$ кольца, а также D и L — для магистрали). Основной задачей является определение расходов по участкам кольца и общего потеряннного напора от начала магистрального водовода до точки схода.

Рассмотрим эту задачу для простейшего случая (рис. 6.9), когда на кольце имеются только два выпуска, т. е. два узловых расхода q_1 (узел 1) и q_2 (узел 2).

Определим точку схода — это может быть узел 1 или узел 2. Допустим, что точкой схода будет узел 2, тогда потеряннный напор h_{A-1-2} будет равен потерянному напору h_{A-2} :

$$h_{A-1-2} = h_{A-2}, \quad (6.19)$$

причем на участке l_3 расход Q_3 будет направлен от узла 1 к узлу 2. Поэтому равенство (6.19) можно записать так:

$$\frac{(q_1 + Q_3)^2}{K^2_1} l_1 + \frac{Q_3^2}{K^2_2} l_2 = \frac{(q_2 - Q_3)^2}{K^2_3} l_3. \quad (6.20)$$

Отсюда видно, что если точкой схода является узел 2, то

$$\frac{(q_1 + Q_3)^2}{K^2_1} l_1 < \frac{(q_2 - Q_3)^2}{K^2_3} l_3$$



Рис. 6.9.

и тем более (опуская Q_3)

$$\frac{q_1^2 l_1}{K^2_1} < \frac{q_2^2 l_2}{K^2_2}.$$

Таким образом, это неравенство является критерием того, что точкой схода будет узел 2 и, наоборот, если окажется, что

$$\frac{q_1^2 l_1}{K^2_1} > \frac{q_2^2 l_2}{K^2_2},$$

то точкой схода будет узел 1.

Определив точку схода (пусть это будет узел 2), найдем расход Q_3 из уравнения (6.20), после чего определим расходы Q_1 и Q_2 узла A:

$$Q_1 = q_1 + Q_3 \text{ и } Q_2 = q_2 - Q_3,$$

а затем искомый общий потерь напор $\Sigma h_{\text{в}}$:

$$\Sigma h_{\text{в}} = \frac{Q_1^2 l_1}{K_1^3} + \frac{Q_2^2 l_2}{K_2^3} + \frac{(Q_1 + Q_2)^2 L}{K^3}$$

или, что одно и то же,

$$\Sigma h_{\text{в}} = \frac{Q_2^2 l_2}{K_2^3} + \frac{(Q_1 + Q_2)^2 L}{K^3}$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ

Движение жидкости при истечении из отверстий представляет собой значительный интерес в инженерной практике. Так, расчеты отверстий гидротехнических со-

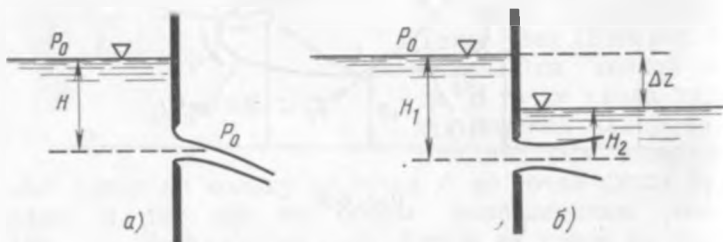


Рис. 7.1.

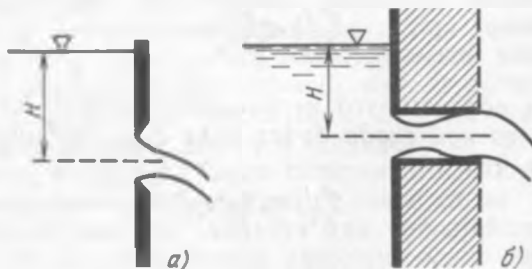


Рис. 7.2.

оружий, расчеты наполнения и опорожнения шлюзовых судоходных камер и т. д. опираются на сведения об этом движении.

Изучение явления истечения жидкости имеет большую давность. Еще ученики Галилея Торичелли и Каstellи занимались определением скорости истечения, и формула $v = \sqrt{2gH}$ широко известна как формула Торичелли. Условия истечения могут быть весьма разнообразны: оно может происходить при постоянном или переменном напоре, в атмосферное пространство (рис. 7.1,а) или в пространство, занятое той же жидкостью (рис. 7.1,б), через малые и большие отверстия, через отверстие в «тонкой» (рис. 7.2,а) и «толстой» стенках, через «насадки» (рис. 7.2,б) и т. д.

Условия истечения оказывают влияние как на скорость истечения, так и на расход.

7.1. ИСТЕЧЕНИЕ В АТМОСФЕРУ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ ЧЕРЕЗ МАЛЫЕ ОТВЕРСТИЯ В ТОНКОЙ СТЕНКЕ

Уточним понятие тонкая стенка и малое отверстие. Будем считать стенку тонкой тогда, когда отверстие имеет острую кромку и стенка не влияет на форму струи (не соприкасается с ней) (рис. 7.2,а). В противном случае будем называть стенку толстой (рис. 7.2,б). Через отверстие в толстой стенке жидкость течет как бы в короткой трубе.

Введем понятия малое и большое отверстие.

Отверстие будем считать малым тогда, когда в поперечном сечении струи после выхода из отверстия (в сжатом сечении) (рис. 7.3) можно считать скорости во всех точках сечения равными между собой (при этом коэффициент Кориолиса $\alpha = 1,0$); $u_1 = u_2 = \dots = v$. В противном случае отверстие будем считать большим.

Малому отверстию круглой формы отвечает условие $d \leq 0,1H$.

Рассмотрим истечение жидкости из резервуара большой емкости через круглое малое отверстие с острой кромкой при постоянном напоре H (рис. 7.3). На выходе струи из отверстия форма поперечного сечения струи изменяется, а площадь сечения уменьшается. В результате подтекания жидкости к отверстию со всех его сторон происходит уменьшение площади поперечного сечения. Это явление называется сжатием струи, а площадь поперечного сечения в плоскости $л-л$ (рис. 7.3) — площадью сжатого сечения ω_c . Оно располо-

жено (для круглого отверстия) на расстоянии около $0,5d$. Отношение $\varepsilon = \omega_c / \omega$ называется коэффициентом сжатия.

По данным опыта, диаметр струи в сжатом сечении $d_c \approx 0,8d$, поэтому коэффициент сжатия

$$\varepsilon \approx \frac{\omega_c}{\omega} \approx \left(\frac{d_c}{d}\right)^2 \approx \left(\frac{0,8d}{d}\right)^2 \approx 0,64.$$

Кроме сжатия струи, наблюдается явление инверсии струи. Оно заключается в том, что форма поперечного сечения струи изменяется по ее длине. Например,

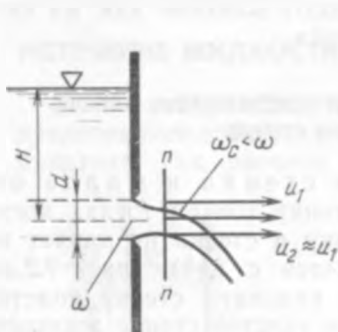


Рис. 7.3.

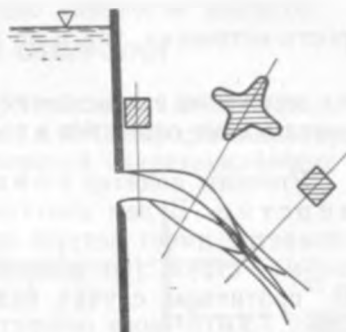


Рис. 7.4.

квадратное сечение переходит в крестообразное и т. д. (рис. 7.4). Это явление обусловлено влиянием непараллельности скоростей отдельных частиц жидкости при выходе из резервуара и действием сил поверхностного натяжения.

Скорость истечения из резервуара определяется как скорость в сжатом сечении (рис. 7.3). Запишем уравнение Бернулли для двух сечений: для плоскости свободной поверхности в резервуаре и плоскости сжатого сечения

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = z + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w. \quad (7.1)$$

Отметим, что давление в сжатом сечении равно атмосферному p_0 (так как струя находится в свободном движении) и коэффициент Кориолиса равен единице (в сжатом сечении скорости течения во всех точках сечения можно считать равными и параллельными между собой).

Тогда, определяя потерянный напор по формуле $h_w = \zeta v^2 / 2g$ и опуская $\alpha v^2 / 2g$ ввиду малости, получаем:

$$z_0 = z + \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}$$

или

$$z_0 - z = H = (1 + \zeta) \frac{v^2}{2g}, \quad (7.1a)$$

где H — напор над центром тяжести отверстия.

Итак, скорость истечения

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gH}. \quad (7.2)$$

Обозначая

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}, \quad (7.3)$$

окончательно получим

$$v = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (7.4)$$

Коэффициент φ называется коэффициентом скорости.

Для малых круглых отверстий при больших числах Re по опытным данным (для воды) $\varphi = 0,97$, т. е. близок к единице.

По коэффициенту скорости φ легко определить и коэффициент сопротивления из (7.3)

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Для круглого отверстия при $\varphi = 0,97$ получим $\zeta \approx 0,06$.

Коэффициенты φ и ζ зависят от напора H (и, следовательно, от скорости истечения), вязкости жидкости, формы и размеров отверстия, а поэтому и от числа Рейнольдса.

Обычно принимают $\varphi = f(Re)$.

Расход определяется по формуле

$$Q = \omega v.$$

В данном случае целесообразно воспользоваться сжатым сечением, для которого $Q = \omega_c v_c$. Площадь

$$\omega_c = \varepsilon \omega,$$

где ω — площадь отверстия, а средняя скорость определяется по формуле

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Тогда расход

$$Q = \omega_c v_c = \varepsilon \omega \varphi \sqrt{2gH} = \mu \omega \sqrt{2gH}.$$

Объединив коэффициенты ε и φ произведением, равным $\mu = \varepsilon \varphi$, расход определим по формуле

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}. \quad (7.5)$$

Коэффициент μ называется коэффициентом расхода. При $\varepsilon = 0,64$ и $\varphi = 0,97$

$$\mu = \varepsilon \varphi = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62. \quad (7.6)$$

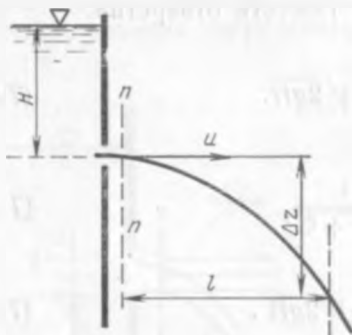


Рис. 7.5.

Значения коэффициентов ε , φ и μ приводятся в справочной литературе.

Дальность полета струи при истечении (рис. 7.5) при небольших скоростях u и небольших высотах падения Δz , когда можно пренебречь сопротивлением окружающего струю воздуха и принять форму струи параболической (в случае горизонтального направления скорости при выходе из отверстия), получим

$$l = v \Delta t = \varphi \sqrt{2gH} \sqrt{\frac{2\Delta z}{g}}$$

или

$$l = 2\varphi \sqrt{H\Delta z}. \quad (7.7)$$

Этой формулой часто пользуются при экспериментальном определении коэффициента скорости

$$\varphi = \frac{l}{2\sqrt{H\Delta z}}, \quad (7.8)$$

предварительно измеряя дальность полета l , напор H и снижение струи Δz .

7.2. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ БОЛЬШИЕ ОТВЕРСТИЯ В АТМОСФЕРУ

Основной задачей при истечении через большие отверстия в атмосферу является определение расхода. Решить эту задачу так, как она была решена для малого отверстия, оказывается затруднительным, так как скорости в сжатом сечении не равны друг другу и распределение скоростей происходит по некоторому сложному закону (рис. 7.6).

Наиболее просто задача решается следующим образом.

Всегда можно записать, что расход, проходящий через данное отверстие любой формы и размера, определяется по формуле

$$Q = \omega_c v_c,$$

где ω_c — площадь сжатого сечения, а v_c — средняя скорость в этом сечении. При этом всегда $\omega_c = \varepsilon \omega$, а $v_c = \varphi \sqrt{2gH}$ (здесь H — напор в центре тяжести площади отверстия).

Тогда

$$Q = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH},$$

или, обозначив $\varepsilon \varphi$ буквой m , расход через любое отверстие можно определить по формуле

$$Q = m \omega \sqrt{2gH}. \quad (7.9)$$

Здесь m — коэффициент расхода, его значения заключены в широких пределах, в зависимости от условий входа $m \approx 0,6$ до $0,95$.

Можно, конечно, определить расход и по уравнению

$$Q = \int u d\omega.$$

Если отверстие прямоугольное и расположено в вертикальной стенке, то для элементарной площадки $d\omega = b dH$ расход можно определять по формуле расхода для малых отверстий

$$dQ = \mu b \sqrt{2gH} dH = \mu b \sqrt{2gH} dH.$$

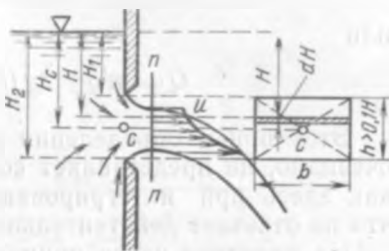


Рис. 7.6.

Тогда для всего отверстия расход определим путем интегрирования

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b \sqrt{2g} H^{1/2} dH = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2})$$

или

$$Q = m' b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}). \quad (7.9a)$$

Этот прием определения расхода возможен, но он, очевидно, не представляет собой строгого решения, так как здесь при интегрировании принимается $\mu = \text{const}$, что не отвечает действительности.

На практике часто принимают $\mu = 0,62$ (как для малых круглых отверстий). Тогда $m' \approx 0,41$.

7.3. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ЗАТОПЛЕННОЕ БОЛЬШОЕ ОТВЕРСТИЕ

Опыт показывает, что при малом заглублении отверстия свободная поверхность снижается как перед отверстием, так и непосредственно за ним (рис. 7.7). В результате возникает прорыв воздуха через отверстие («захлебывание» отверстия) и нарушается стационарность движения.

Здесь будем рассматривать истечение только при достаточно большом заглублении, когда указанным явлением можно пренебречь.

Определим скорость в сжатом сечении. Выбрав сечение 1—1 и сечение n—n (рис. 7.7), напомним (для точек 1 и 2):

$$H_1 + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = H_2 + \frac{\alpha v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

Здесь v_0 — скорость подхода, определенная как $v_0 = Q/\Omega$; v — скорость в избранной точке сжатого сечения; α — коэффициент Кориолиса; ζ — коэффициент сопротивления; Ω — площадь сечения 1—1.

Из этого уравнения, обозначив $H_1 - H_2 = \Delta z$ и приняв $\alpha = 1,0$, найдем скорость истечения

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(\Delta z - \frac{\alpha v_0^2}{2g} \right)}$$

или, обозначив, как обычно, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$, получим

$$v = \varphi \sqrt{2g \left(\Delta z + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)}. \quad (7.10)$$

Нетрудно видеть, что полученная формула аналогична формуле (7.4) при истечении в атмосферу.

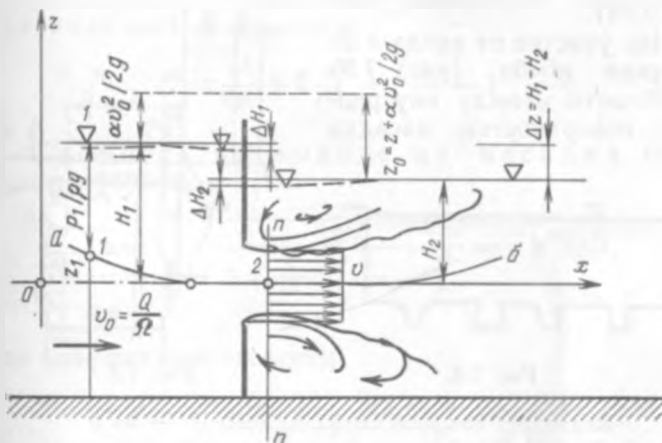


Рис. 7.7.

Расход, проходящий через затопленное отверстие, получим по формуле

$$Q = m \omega \sqrt{2g \left(\Delta z + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)}.$$

7.4. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ НАСАДКИ

Насадком называется короткая труба, присоединенная к отверстию, через которую происходит истечение. Насадки могут быть внешними и внутренними, а также различной формы (рис. 7.8).

Характер течения жидкости в различных насадках имеет много общего. Рассмотрим это явление на примере внешнего цилиндрического насадка, именуемого насадком Вентури (рис. 7.9).

При наличии острой входной кромки возникает сжатие струи и площадь сжатого сечения $\omega_c = \epsilon \omega$. Числовое значение коэффициента сжатия зависит от условий вхо-

да, и в данном случае (круглое отверстие с острой входной кромкой) приблизительно можно принять $\epsilon=0,64$. Далее струя расширяется, заполняя поперечное сечение полностью. Отметим, что поскольку струя на выходе заполняет все сечение, постольку коэффициент сжатия на выходе равен единице: $\epsilon=1,0$ (тогда как на входе $\epsilon=0,64$).

На участке от входа и до сечения $m-m$ (рис. 7.9) в области между внутренней поверхностью насадка



Рис. 7.8.

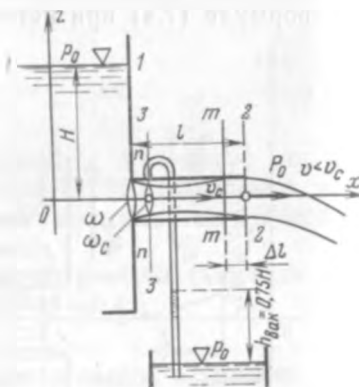


Рис. 7.9.

(трубы) и боковой поверхностью струи жидкость находится в сложном циркуляционном движении, аналогичном описанному ранее при рассмотрении задачи о внезапном расширении. На этом участке гидродинамическое давление p оказывается меньше атмосферного (вакуум), так как скорости течения здесь больше выходной скорости, где давление равно атмосферному.

Определим среднюю скорость на выходе и в сжатом сечении. Запишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 (опуская атмосферное давление)

$$H + \frac{\omega v_c^2}{2g} = \frac{\omega v^2}{2g} + \lambda \frac{\Delta l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \frac{v^2}{2g}. \quad (7.11)$$

В этом уравнении можно пренебречь величиной $\frac{\omega v_c^2}{2g}$

и потерями напора $\lambda \frac{\Delta l}{d} \frac{v^2}{2g}$ на участке от сечения $n-n$ до выхода (по их малости). Тогда потери напора в насадке будут состоять только из потерь на вход (до сжатого сечения $n-n$) $h_{вх} = \zeta \frac{v_c^2}{2g}$ и потерь на расширение

струи $h_{расш} = \frac{(v_c - v)^2}{2g}$ (по теореме Борда). Тогда уравнение Бернулли получим в таком виде:

$$H = \frac{\omega v^2}{2g} + \zeta_{вх} \frac{v_c^2}{2g} + \frac{(v_c - v)^2}{2g}.$$

Исключая v_c (пользуясь равенством $\omega_c v_c = \omega v$) и принимая $\alpha=1,0$, получаем:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g} + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}. \quad (7.11a)$$

Скорость на выходе из насадка определим по формуле

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2}} = \varphi \sqrt{2gH}, \quad (7.12)$$

где коэффициент скорости

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{нас}}}.$$

При $\zeta=0,06$ и $\epsilon=0,64$ получим $\varphi=0,82$, а общий коэффициент сопротивления для насадка

$$\zeta_{нас} = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,82^2} - 1 \approx 0,5. \quad (7.13)$$

Расход определим по формуле

$$Q = \omega v = \omega \varphi \sqrt{2gH}. \quad (7.14)$$

Здесь φ — коэффициент скорости; ω — площадь сечения насадка (коэффициент сжатия на выходе $\epsilon=1,0$). Коэффициент расхода $\mu = \epsilon \varphi = 1,0 \cdot 0,82 = 0,82$.

Перейдем к определению вакуума в сжатом сечении.

Известно, что

$$h_{вак} = \frac{p_0 - p}{\rho g}, \quad (7.15)$$

где p_0 и p — соответственно атмосферное давление и абсолютное давление в данной точке.

Запишем уравнение Бернулли для сечения 1—1 и сжатого сечения $n-n$

$$\frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g}. \quad (7.16)$$

Отсюда

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_0 - p}{\rho g} = (1 + \zeta) \frac{v_c^2}{2g} - H,$$

но $v_c = v/\varepsilon$, а $v = \varphi \sqrt{2gH}$. После подстановки

$$h_{\text{вак}} = \left[\frac{\varphi^2}{\varepsilon^2} (1 + \zeta) - 1 \right] H. \quad (7.17)$$

Если принять $\zeta = 0,06$, $\varphi = 0,82$ и $\varepsilon = 0,64$, то

$$h_{\text{вак}} \approx 0,75H. \quad (7.18)$$

Из этой формулы можно определить предельное значение для напора H . Максимум $h_{\text{вак}}$ равен $p_0/\rho g$, поэтому предельный напор

$$H_{\text{пр}} \approx 1,3 \frac{p_0}{\rho g}.$$

При напоре выше предельного нарушаются сплошность и стационарность истечения.

Сопоставление коэффициентов φ , μ , ζ и ε для круглого отверстия в тонкой стенке и для насадка Вентури:

	φ	μ	ζ	ε
Круглое отверстие	0,97	0,62	0,06	0,64
Насадок Вентури	0,82	0,82	0,5	1,00

Коэффициент расхода μ , а следовательно, и расход Q для насадка больше, чем при истечении через отверстие без насадка. Создается противоречивое положение — несмотря на увеличение сопротивлений, расход через насадок увеличивается. Кажущееся противоречие объясняется тем, что благодаря возникновению вакуума в сжатом сечении насадка скорость в этом сечении оказывается большей скорости в сжатом сечении при истечении в атмосферу.

Числовые значения указанных коэффициентов для других насадков приводятся в справочной литературе.

7.5. ИСТЕЧЕНИЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

Если в резервуар поступает расход Q , неравный расходу q , выходящему из него, например, при истечении через отверстие (рис. 7.10), то резервуар будет или наполняться (при $Q > q$) или опорожняться (при $Q < q$). В этом случае будет изменяться напор H над отверстием. С увеличением напора H увеличивается расход q , который в пределе стремится к расходу Q , когда напор H достигает своего предела $H_{\text{пр}}$. В этом пределе будем иметь

$$q = Q = \mu \omega \sqrt{2gH_{\text{пр}}}, \quad (7.19)$$

откуда

$$H_{\text{пр}} = \frac{Q^2}{(\mu \omega)^2 \cdot 2g}. \quad (7.19a)$$

Основной задачей является установление зависимости

$$H = f(t) \text{ или } q = F(t).$$

Условия истечения могут быть весьма разнообразными. Внешний приток Q может быть постоянным или переменным, форма резервуара может быть простой (например, призматической) или геометрически сложной. Истечение возможно в атмосферу или под уровень (постоянный или переменный). И, наконец, площадь отверстия, через которую происходит истечение, может быть неизменной или может изменяться во времени в связи с техническими условиями его открытия (или закрытия).

Составим дифференциальное уравнение изменения напора во времени при истечении жидкости в атмосферу (или под неизменный уровень).

За время dt в резервуар поступает жидкость в объеме

$$dW_1 = Q dt.$$

За это же время из него выходит объем $dW_2 = q dt = \mu \omega \sqrt{2gH} dt$.

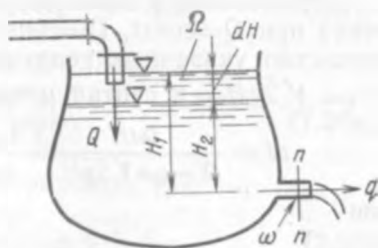


Рис. 7.10.

Таким образом, изменение объема жидкости в резервуаре

$$dW = dW_1 - dW_2 = (Q - \mu \omega \sqrt{2gH}) dt. \quad (7.20)$$

Поскольку

$$dW = \Omega dH$$

(Ω — площадь свободной поверхности в резервуаре, а dH — приращение напора), то можно уравнение (7.20) записать так:

$$(Q - \mu \omega \sqrt{2gH}) dt = \Omega dH. \quad (7.20a)$$

Это равенство и представит собой дифференциальное уравнение изменения напора во времени. Решая (7.20a) относительно dt , получаем:

$$dt = \frac{\Omega dH}{Q - \mu \omega \sqrt{2gH}}. \quad (7.21)$$

Рассмотрим некоторые, наиболее характерные, частные случаи. При решении этих задач будем считать, что емкость резервуара велика и изменение отметок свободной поверхности происходит настолько медленно, что нестационарностью процесса истечения можно пренебречь и определять расход при истечении по формуле

$$q = \mu \omega \sqrt{2gH}.$$

1. Истечение в атмосферу (или под постоянный уровень) при $Q = \text{const}$, $\Omega = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$. Учитывая постоянство указанных величин, а также равенство $Q = \mu \omega \sqrt{2gH_{\text{np}}}$ и считая $\mu = \mu_{\text{ср}} = \text{const}$, записываем:

$$dt = \frac{\Omega dH}{Q - \mu \omega \sqrt{2gH}} = \frac{\Omega dH}{\mu \omega \sqrt{2gH_{\text{np}}} - \mu \omega \sqrt{2gH}}$$

или

$$dt = \frac{\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H_{\text{np}}} - \sqrt{H}}. \quad (7.22)$$

Введем новую переменную $z = \sqrt{H_{\text{np}}} - \sqrt{H}$, тогда

$$dz = -\frac{dH}{2\sqrt{H}} \quad \text{и} \quad dH = -2\sqrt{H} dz.$$

Но так как $-\sqrt{H} = z - \sqrt{H_{\text{np}}}$, то

$$dH = 2(z - \sqrt{H_{\text{np}}}) dz.$$

После подстановки в (7.22) получим:

$$dt_1^t = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{2(z - \sqrt{H_{np}})dz}{z} = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(dz - \sqrt{H_{np}} \frac{dz}{z} \right).$$

Интегрируя в пределах от t_1 до t_2 и от z_1 до z_2 , находим:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(z_2 - z_1 - \sqrt{H_{np}} \ln \frac{z_2}{z_1} \right).$$

Но $z = \sqrt{H_{np}} - \sqrt{H}$, поэтому

$$\Delta t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_{np}} \ln \frac{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_2}} \right). \quad (7.23)$$

Из рассмотрения формулы (7.23) видно, что для того, чтобы напор H от начального значения H_1 достиг своего предельного H_{np} , необходимо время $\Delta t = \infty$, так как при $H_2 = H_{np}$ будем иметь

$$\ln \frac{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_2}} = \ln \frac{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_{np}}} = \infty.$$

2. Опорожнение резервуара при $Q=0$ (остальные условия те же). Пользуясь формулой (7.23) и замечая, что при отсутствии внешнего притока ($Q=0$) предельный напор $H_{np}=0$, получаем:

$$\Delta t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}), \quad (7.24)$$

а время полного опорожнения при $H_2=0$

$$\Delta t = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}. \quad (7.24a)$$

Эту формулу можно преобразовать так:

$$\Delta t = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2g}H_1}. \quad (7.25)$$

Легко видеть, что $\Omega H_1 = W_0$ (W_0 — начальный объем жидкости в резервуаре), а $\mu\omega\sqrt{2gH_1}$ представляет собой начальный расход q_0 (в момент открытия отверстия), поэтому

$$\Delta t = \frac{2W_0}{q_0}. \quad (7.25a)$$

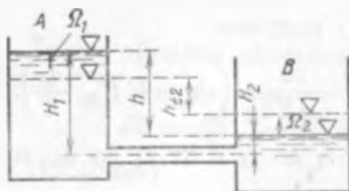


Рис. 7.11.

Эта простая, легко запоминающаяся формула показывает, что время опорожнения резервуаров цилиндрической (призматической) формы равно времени протекания через отверстие двойного начального объема жидкости при постоянном расходе q_0 .

3. Опорожнение резервуара сложной геометрической формы при $Q=0$. В этом случае площадь свободной поверхности резервуара (например, водохранилища) изменяется с изменением ее отметки, т. е. $\Omega=f(H)$.

В таких условиях уравнение (7.21) получит вид:

$$dt = - \frac{\Omega dH}{\mu \omega \sqrt{2gH}} = \frac{f(H) dH}{\mu \omega \sqrt{2gH}},$$

после интегрирования

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \int_{H_1}^{H_2} - \frac{f(H) dH}{\mu \omega \sqrt{2gH}} = \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} f(H) H^{-1/2} dH.$$

Решение зависит от характера $f(H)$ и часто не может быть получено в конечном виде. Тогда решение находят методом конечных разностей.

4. Истечение под переменный уровень. Пусть в отсутствие внешнего притока происходит истечение из резервуара А в резервуар В (рис. 7.11). При этом напор H_1 будет убывать, а H_2 возрастет. Определим время, в течение которого разность напоров ($h=H_1-H_2$) уменьшится до нуля, т. е. произойдет выравнивание уровней свободной поверхности в данных резервуарах.

Допустим, что в некоторый промежуточный момент разность уровней равна h (рис. 7.11). За время dt из резервуара А перейдет в резервуар В объем жидкости dW , равный:

$$dW = \mu \omega \sqrt{2gh} dt,$$

и объем резервуара В возрастет на объем dW , равный:

$$dW = \Omega_2 dH_2.$$

Тогда

$$\mu \omega \sqrt{2gh} dt = \Omega_2 dH_2,$$

откуда

$$dt = \frac{\Omega_2 dH_2}{\mu \omega \sqrt{2gh}}. \quad (7.26)$$

Преобразуем это равенство.

Очевидно, $h = H_1 - H_2$. Находим дифференциал h и получаем $dh = dH_1 - dH_2$.

Но

$$-\Omega_1 dH_1 = \Omega_2 dH_2 \text{ и } dH_1 = -\frac{\Omega_2}{\Omega_1} dH_2.$$

После подстановки

$$dh = -\frac{\Omega_2}{\Omega_1} dH_2 - dH_2 = -\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_1} dH_2.$$

и

$$dH_2 = -\frac{\Omega_1 dh}{\Omega_1 + \Omega_2}.$$

Подставляем dH_2 в (7.26):

$$dt = -\frac{\Omega_1 \Omega_2 dh}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu \omega \sqrt{2gh}}. \quad (7.27)$$

Интегрируя (7.27), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_1 &= -\int_{h_1}^{h_2} \frac{\Omega_1 \Omega_2 dh}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu \omega \sqrt{2gh}} = \\ &= \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Время полного выравнивания уровней в данных резервуарах определится по формуле

$$\Delta t = \frac{2\Omega_1 \Omega_2 \sqrt{H_1}}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu \omega \sqrt{2g}} = \frac{2\Omega_1 \Omega_2 H_1}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu \omega \sqrt{2gH_1}}, \quad (7.29)$$

а при $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$

$$\Delta t = \frac{\Omega H_1}{\mu \omega \sqrt{2gH_1}} = \frac{W_{\text{нач}}}{q_{\text{нач}}} = \frac{\text{Начальный объем}}{\text{Начальный расход}}, \quad (7.29a)$$

т. е. это время равно времени выхода из верхнего резервуара объема ΩH_1 при неизменном начальном расходе $q_{\text{нач}} = \mu \omega \sqrt{2gH_1}$.

Выше были рассмотрены случаи истечения при неизменной площади отверстия, из которого происходит истечение. В практических условиях, особенно в период эксплуатации судоходных шлюзов, открытие отверстий происходит медленно, что существенно отражается на всем процессе истечения. Остановимся на важнейших задачах.

5. Опорожнение резервуара при линейном законе открытия отверстия $\omega = \omega_0 t$, где ω_0 — площадь отверстия при полном открытии; T — период открытия; t — время от начала открытия до данного момента.

При $Q=0$ уравнение (7.21) примет вид:

$$dt = - \frac{\Omega dH}{\mu \omega \sqrt{2gH}} = - \frac{T \Omega dH}{\mu \omega_0 t \sqrt{2gH}}. \quad (7.30)$$

После разделения переменных перепишем (7.30):

$$t dt = - \frac{T \Omega}{\mu \omega_0 \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - t_1^2}{2} &= - \int_{H_1}^{H_2} \frac{T \Omega dH}{\mu \omega_0 \sqrt{2gH}} = \\ &= \int_{H_2}^{H_1} \frac{\Omega T}{\mu \omega_0 \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2T \Omega}{\mu \omega_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Если $t_1=0$ (момент начала открытия затворов), а $t_2=T$, т. е. времени полного открытия, то из (7.31) можно определить H_2 :

$$\sqrt{H_2} = \sqrt{H_1} - \frac{T \mu \omega_0 \sqrt{2g}}{4 \Omega}. \quad (7.31a)$$

В дальнейшем истечение происходит при полном открытии отверстия $\omega = \omega_0$.

Для опорожнения резервуара при $\omega = \text{const}$ требуется время, равное по (7.24a)

$$\Delta t = \frac{2 \Omega H}{\mu \omega \sqrt{2gH}}. \quad (7.32)$$

В данном случае

$$H = H_0 = \left(\sqrt{H_1} - \frac{T\mu\omega_0 \sqrt{2gH_1}}{4\Omega} \right)^2$$

и определяемое время

$$\Delta t = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega_0 \sqrt{2gH_1}}.$$

Итак, время полного опорожнения резервуара составит:

$$t_{\text{полн}} = T + \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega_0 \sqrt{2gH_1}}. \quad (7.33)$$

Указанным здесь способом решаются и другие задачи¹.

Заметим, что во всех приведенных здесь расчетах коэффициент расхода μ был принят постоянным [средним из его крайних значений $\mu_c = (\mu_1 + \mu_2)/2$].

Для уточнения расчеты ведутся по этим формулам по выбранным интервалам ΔH .

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ВОДОСЛИВЫ

8.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Водосливом называется любая преграда, через которую переливается вода (рис. 8.1). По своей конструкции водосливы могут быть весьма разнообразными.

Основные элементы водослива.

Высота водосливной стенки:

со стороны нижнего бьефа p ;

со стороны верхнего бьефа p' .

Длина порога водослива или ширина водослива l , b .

Напор на водосливе (разность отметок свободной поверхности верхнего бьефа и порога водослива) H .

Перепад на водосливе (разность отметок свободной поверхности верхнего и нижнего бьефа) z .

¹ Подробнее см. Михайлов А. В. Судовые шлюзы. М.: Транспорт, 1966.

По очертанию поперечного профиля водосливной стенки водосливы делятся на три группы.

1. Водослив с тонкой стенкой или с острым порогом (рис. 8.2, а).

2. Водослив с широким порогом: горизонтальный порог (уклон $i=0$) с большой протяженностью по направлению течения.

Обычно считают, что длина порога l (рис. 8.2, б) должна находиться в следующих пределах:

$$(1,5-2,0)H < l < (10-12)H.$$

Если $l < (1,5+2)H$, водослив считают водосливом практического профиля, а если $l > (10+12)H$, то течение на пороге водослива рассматривается как течение в канале с нулевым уклоном.

Заметим, что если $l < < 2H/3$, то струя, отрываясь от входного ребра порога водослива, переходит в свободный полет. В таком случае водослив рассматривается как водослив с острым порогом.

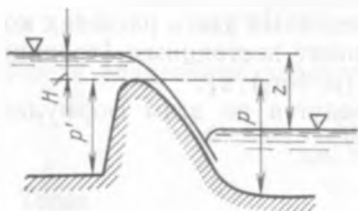


Рис. 8.1.

3. Водослив практического профиля. К этому типу относятся все иные водосливы (см., например, рис. 8.1).

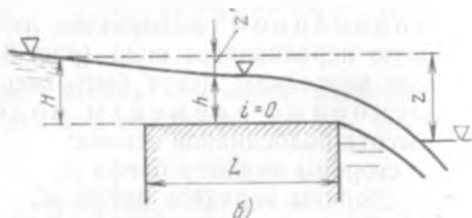
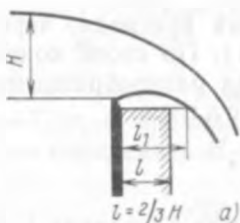


Рис. 8.2.

По условиям высотного расположения свободной поверхности нижнего бьефа водосливы могут быть подтопленными или свободными.

Водослив называется подтопленным в том случае, если свободная поверхность в нижнем бьефе расположена так высоко (обычно выше порога водослива).

ва), что поток нижнего бьефа оказывает влияние на величину расхода, идущего через водослив, в противном случае водослив будет неподтопленным.

По своему расположению в плане водосливы делятся на прямые (линия порога водослива перпендикулярна направлению потока), косые и боковые



Рис. 8.3.

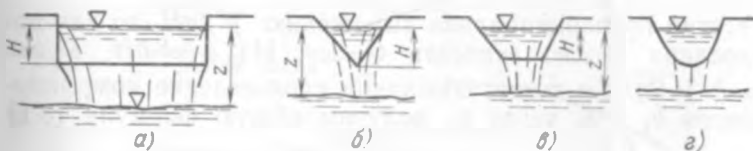


Рис. 8.4.

(рис. 8.3). Кроме того, водосливы могут иметь в плане криволинейные очертания, в частности круговые (кольцевые). Наконец, по форме выреза в стенке водосливы делятся на прямоугольные (а), треугольные (б), трапециевидальные (в) и криволинейные (г) (рис. 8.4).

8.2. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА РАСХОДА ВОДОСЛИВА

Если водослив рассматривать как частный случай истечения через большое отверстие, для которого расход можно определять по формуле (7.9а)

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}),$$

то, полагая $H_1 = 0$ и $H_2 = H$ (рис. 8.5), получаем:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

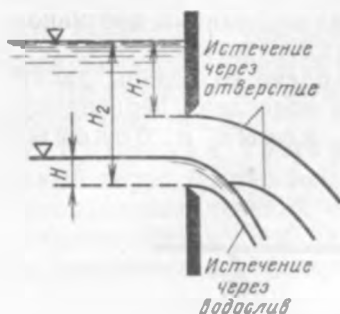


Рис. 8.5.

Обозначив $m = 2\mu/3$ (μ называется коэффициентом расхода водослива), получим общую основную формулу расхода (пропускной способности) водослива

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}. \quad (8.1)$$

Эту формулу можно получить и иначе. Всегда

$$[Q] = [\omega][v];$$

так как площадь поперечного сечения потока ω всегда пропорциональна произведению bH (произведению длины порога b водослива на напор H), а скорость потока v всегда пропорциональна выражению $\sqrt{2gH}$, то для водослива можно записать $Q = \omega v$. Но $\omega = k_1 bH$, а $v = k_2 \sqrt{2gH}$, и тогда, обозначив произведение коэффициентов k_1 и k_2 через m , получим общую формулу (8.1)

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}.$$

Эта формула применима ко всем водосливам. Очевидно, что для различных водосливов при одной и той же длине порога b и одном и том же напоре H расходы будут различны и коэффициент расхода m также будет различным (по опытным данным $0,3 < m < 0,6$).

8.3. ВОДОСЛИВ С ОСТРЫМ ПОРОГОМ

8.3.1. Формы струй

Свободная струя образуется в условиях, когда в пространстве под ней имеется атмосферное давление. Такая струя является весьма устойчивой (рис. 8.6,а).

Отжатая струя образуется в условиях, когда под струей возникает вакуум и струя отжимается в обратном направлении, т. е. в сторону водосливной стенки (рис. 8.6,б). Эта форма струи менее устойчива. Вакуум изменяется (пульсирует). Изменение давления под струей создает непрерывное изменение расхода.

Струя, подтопленная снизу, образуется в условиях, когда вакуум под струей достигает такого значе-

ния, что все пространство занято водой (предельное положение предыдущей формы) (рис. 8.6,в).

Прилипшая струя образуется при малых удельных расходах в условиях постепенного медленного нарастания напора на водосливе (рис. 8.6,з). В таком «прилипшем» состоянии струю удерживает поверхностное натяжение. Такая струя характеризуется наимень-

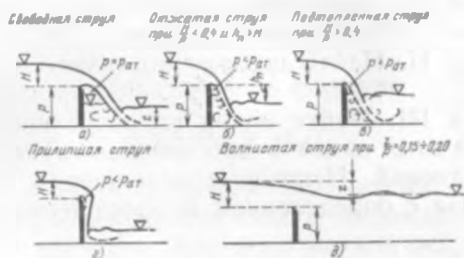


Рис. 8.6.

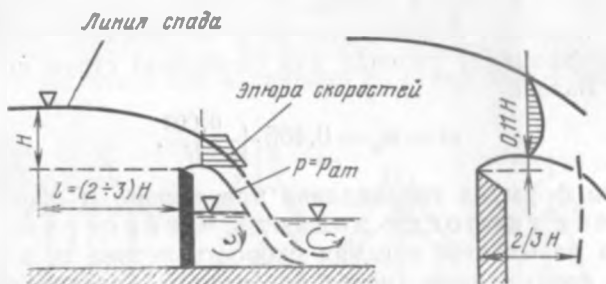


Рис. 8.7.

шей устойчивостью. Если под струю подать воздух, то она оторвется и уже более не возвратится в свое исходное положение. Струя перейдет во вторую или третью форму, или в первую, если будет обеспечен доступ воздуха под струю.

Волнистая струя образуется при затопленном водосливе (рис. 8.6,д).

По опытам французского ученого Базена свободная поверхность воды начинает снижаться на расстоянии $l \approx 3H$ от порога водослива. Эпюра скоростей и давлений приобретает вид, указанный на рис. 8.7.

8.3.2. Основные задачи гидравлического расчета

При расчете водосливов любого типа можно поставить три основные задачи, что непосредственно следует из основной общей формулы расхода (8.1)

$$Q = mb \sqrt{2g} H^{3/2},$$

содержащей три переменные величины Q , b и H .

Задача I. Найти расход данного водослива Q .

Задача II. Найти ширину водослива (т. е. длину порога) b .

Задача III. Найти напор на водосливе H .

Решение этих задач в простейшем случае не вызывает затруднений. Некоторые осложнения появляются лишь в связи с определением коэффициента расхода.

8.3.3. Определение коэффициента расхода

При определении коэффициента расхода основными факторами, которые должны быть учтены, являются скорость подхода, боковое сжатие и затопление.

Коэффициент расхода для свободной струи по формуле Базена

$$m = m_0 = 0,405 + \frac{0,003}{H}. \quad (8.2)$$

Эта формула справедлива при напоре $H \geq 0,05$ м.

Учет скорости подхода. Скоростью подхода называется средняя скорость потока v_0 в русле перед сооружением (перед водосливом), следовательно,

$$v_0 = \frac{Q}{\Omega}. \quad (8.3)$$

Здесь Q — расход, а Ω — площадь поперечного сечения потока перед сооружением.

Скорость подхода v_0 при прочих равных условиях повышает расходы водослива. Поэтому можно написать:

$$m = m_0 m_1,$$

где m_0 определяется по (8.2), как для свободной струи, а $m_1 > 1,0$ и определяется по различным эмпирическим формулам, например по формуле Базена:

$$m_1 = \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{H + p} \right)^2 \right]. \quad (8.4)$$

Тогда расчетный коэффициент расхода

$$m = m_0 \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{\pi + p} \right)^2 \right]. \quad (8.5)$$

Можно поступить иначе. Сохраняя коэффициент расхода m отвечающим свободной струе, напор H в формуле (8.1) заменить напором H_0 , равным:

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g},$$

и тогда расход определить по формуле

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H_0^{3/2}. \quad (8.6)$$

Формула (8.6) используется главным образом при расчете водослива практического профиля и водослива с широким порогом. Для водослива с острым порогом обычно применяется формула (8.5).

Учет бокового сжатия. Явление сжатия при истечении через водослив сводится к уменьшению ширины водосливного потока в сравнении с шириной водосливного отверстия. Физические причины этого явления те же, что и при истечении из отверстий, — непарал-

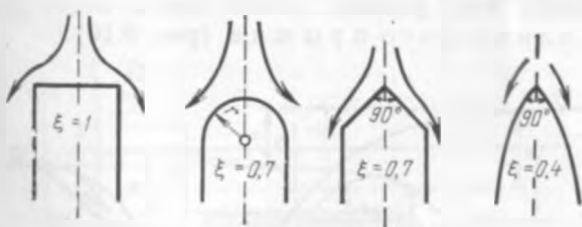


Рис. 8.8.

лельность элементарных струй перед входом потока на водослив. Таким образом, можно записать:

$$b_c = \epsilon b, \quad (8.7)$$

где b_c , ϵ и b соответственно — ширина струи, коэффициент сжатия и ширина отверстия водослива.

При этом формулу расхода можно представить в таком виде:

$$Q = m \epsilon b \sqrt{2g} H_0^{3/2} \quad (8.8)$$

или, если обозначать $b_0 = \epsilon b$ (b_0 — эффективная ширина водослива),

$$Q = mb_0 \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

Если водосливное сооружение состоит из нескольких пролетов, разделенных промежуточными опорами (например, мостовыми), то эффективная ширина водослива может определяться по формуле Френсиса

$$b_0 = b - 0,1n\xi H \quad (8.9)$$

или с учетом скорости подхода

$$b_0 = b - 0,1n\xi H_0. \quad (8.9a)$$

В этих формулах n — число боковых сжатий; коэффициент ξ — коэффициент

обтекаемости (рис. 8.8).

Учет затопляемости и его критерий. Водослив становится затопленным, если перепад $z < H$ или глубина подтопления $h > 0$ (рис. 8.9). Однако при соблюдении этих условий может иметь место отгон гидравлического прыжка (рис. 8.10).

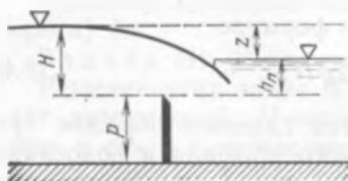


Рис. 8.9

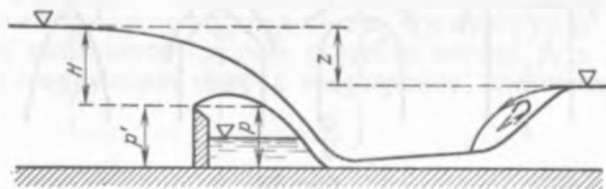


Рис. 8.10.

Второе условие (отсутствие отгона прыжка) определяется по исследованиям Базена так: водослив затоплен, если

$$\left(\frac{z}{P}\right) < \left(\frac{z}{P}\right)_{кр}$$

(критическое значение относительного перепада $(z/P)_{кр} = 0,75$).

Позднейшие исследования показали, что критическое отношение не есть константа, равная 0,75, а зависит от отношения $(H/\rho) : (z/\rho)_{кр} = f(H/\rho)$.

Значения функции $f(H/\rho)$ приводятся в справочной литературе.

Для затопленного водослива будем иметь

$$Q = m \sigma h \sqrt{2g} H_0^{3/2}. \quad (8.10)$$

Числовые значения коэффициента затопления σ_n приводятся в справочной литературе.

8.4. ВОДОСЛИВ С ШИРОКИМ ПОРОГОМ

Согласно основной схеме водослива с широким порогом течение на его пороге устанавливается почти с неизменной глубиной $h < H$ и, таким образом, возникают два перепада: z — разность отметок свободной поверхности верхнего и нижнего бьефов и z' — разность отметок свободной поверхности верхнего бьефа и свободной поверхности на пороге водослива (рис. 8.11).

Здесь следует рассмотреть две основные задачи: определение глубины воды на пороге h и коэффициента расхода.

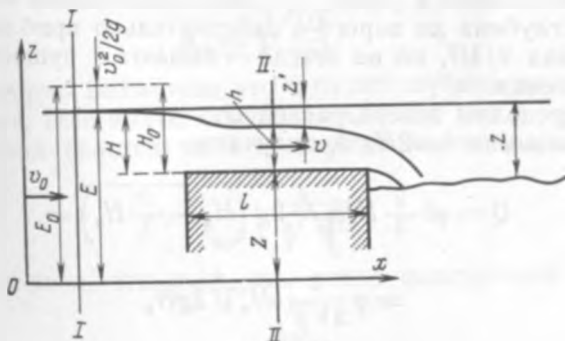


Рис. 8.11.

Теория водослива с широким порогом впервые была изложена Беланже в первой половине XIX столетия. Он исходил из гипотезы о наибольшем расходе (принцип Беланже), состоящей в том, что глубина на пороге водослива h (при любом напоре H перед водосливом) устанавливается такая, при которой через во-

дрослив проходит наибольший расход. Эта гипотеза не должна бы вызывать возражений и позволяет задачу о глубине воды на пороге водослива решить просто.

Имея $Q=f(h)$, решение находим из уравнения $\frac{dQ}{dh}=0$.

Итак, запишем (рис. 8.11):

$$Q = \varphi b h \sqrt{2g(H_0 - h)} = f(h). \quad (8.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dh} &= \frac{d}{dh} (\varphi b h \sqrt{2g(H - h)}) = \\ &= \varphi b \sqrt{2g} \left[\sqrt{H - h} - \frac{h}{2\sqrt{H - h}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.12)$$

откуда

$$\sqrt{H - h} = \frac{h}{2\sqrt{H - h}}$$

и

$$h = 2/3 H. \quad (8.13)$$

Следует отметить, что по теории Беланже отношение h/H_0 постоянно и равно $2/3$. Опыт показывает, что очень часто глубина на пороге h действительно приблизительно равна $2/3 H$, но не всегда — бывают и существенные отклонения.

Определим теперь расход Q .

Принимая $h=2H_0/3$, получаем:

$$\begin{aligned} Q &= \varphi b \frac{2}{3} H_0 \sqrt{2g \left(H_0 - \frac{2}{3} H_0 \right)} = \\ &= \varphi \frac{2}{3\sqrt{3}} b H_0 \sqrt{2g H_0}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

или

$$Q = m b \sqrt{2g} H_0^{3/2}, \quad (8.15)$$

где

$$m = \varphi \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,385\varphi. \quad (8.16)$$

Это решение является приближенным.

Уточнения вносит теория Бахметева, построенная на гипотезе о наименьшей удельной энергии. Этот принцип заключается в следующем: так как всякая система в поле тяготения стремится занять положение, при котором запас ее энергии имеет минимальное значение, то и поток как некоторая материальная система движется по порогу водослива таким образом, что в конце своего движения (т. е. на пороге водослива, за которым начинается новый вид движения — свободное движение) энергия потока приобретает наименьшее значение.

Если исходить из этого принципа, то глубина на пороге водослива h соответствует такой глубине, при которой удельная энергия потока приобретает наименьшее значение. Такую глубину называют критической глубиной.

Напишем выражение удельной энергии потока, проходящего по порогу водослива:

$$E = z + h + \frac{\alpha v^2}{2g} = z + h + \frac{\alpha Q^2}{2gb^3h^4} \quad (8.17)$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^3h^4} = 0, \quad (8.18)$$

откуда критическая глубина

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^3}} \quad (8.19)$$

По теории Бахметева это и будет глубина на пороге водослива. Или иначе, обозначая $Q/b = q$, где q — удельный расход (расход на 1 м ширины водослива), найдем:

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}$$

или, учитывая, что $q = h_{кр} v_{кр}$, после подстановки получаем:

$$h_{кр} = \frac{\alpha v_{кр}^2}{g} \quad (8.20)$$

Установим связь критической глубины $h_{кр}$ с напором H_0 . Из уравнения Бернулли для двух сечений I и II (рис. 8.11) получим:

$$H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h_{кр} + \frac{v_{кр}^2}{2g} + \zeta \frac{v_{кр}^2}{2g}, \quad (8.21)$$

С учетом равенства (8.20) и известного соотношения $\zeta = \frac{1}{\varphi^3} - 1$ уравнение Бернулли можно переписать в таком виде:

$$H + \frac{av^2_0}{2g} = \frac{1 + 2\varphi^2}{2\varphi^2} h_{кр}.$$

Отсюда (обозначив $H + \frac{av^2_0}{2g} = H_0$) получим:

$$h_{кр} = \frac{2\varphi^2}{1 + 2\varphi^2} H_0. \quad (8.22)$$

Если бы сопротивлений не существовало (т. е. $\varphi = 1,0$), то $h_{кр} = 2H_0/3$ и результаты теории Беланже и Бахметева совпали бы.

Однако решение Бахметева более точное, так как учитывает реальные условия течения.

Составим теперь уравнение расхода.

Введя обозначение (по Бахметеву)

$$h_{кр} = kH_0,$$

где $k = \frac{2\varphi^2}{1 + 2\varphi^2}$, запишем уравнение расхода

$$Q = av = bh_{кр}\varphi \sqrt{2g(H_0 - h_{кр})} \quad (8.23)$$

или

$$Q = bkH_0\varphi \sqrt{2g(H_0 - kH_0)} = \varphi k \sqrt{1 - k} b \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

Сопоставив эту формулу с общей формулой расхода через водослив

$$Q = mb \sqrt{2g} H_0^{3/2},$$

получим

$$m = \varphi k \sqrt{1 - k}. \quad (8.24)$$

Если $\varphi = 1,0$, то $m = 0,385$, что является наибольшим значением для коэффициента расхода водослива с широким порогом. Обычно $m = 0,32 + 0,35$.

Современные теоретические построения (проф. М. Д. Чертоусов, В. В. Смыслов и др.) привели к уточнениям коэффициента расхода. Ограничиваясь сказанным, заметим, что для практических целей теория Бах-

метева во многих случаях дает допустимое по точности решение и поэтому не потеряла своего значения и в наше время.

Затопленный водослив с широким порогом. По Бахметеву водослив с широким порогом становится затопленным, как только уровень нижнего бьефа достигнет высоты свободной поверхности на пороге водослива, т. е. когда глубина подтопления h_n станет равной критической глубине $h_{кр}$ (рис. 8.12), т. е. когда $h_n \geq h_{кр}$.

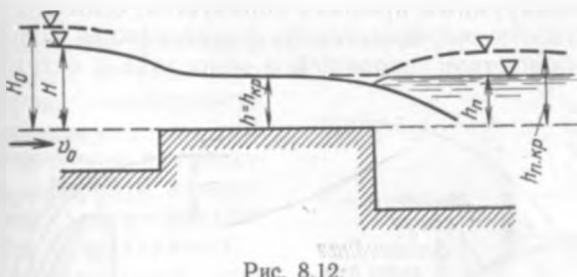


Рис. 8.12.

Однако этот критерий не точен. Опыты показывают, что затопление начинается лишь при условии

$$h_n > nH_0, \quad (8.25)$$

где коэффициент n достигает значения 0,8 и более.

Нами предложена формула для определения критического значения глубины затопления

$$h_n = 1,25h_{кр}. \quad (8.26)$$

Если $h_n > 1,25h_{кр}$, то водослив затоплен (эта формула получена теоретическим путем в условиях плоской задачи¹).

Скорость течения и расход в этом случае определяются по следующим формулам:

$$v = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_n)}; \quad (8.27)$$

$$Q = \varphi b h_n \sqrt{2g(H_0 - h_n)}. \quad (8.28)$$

¹ Киселев П. Г. Критерий затопляемости водослива с широким порогом — Сб. трудов, 1976, № 148/МИСИ.

8.3. ВОДОСЛИВ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Водосливы практического профиля могут иметь любую форму поперечного профиля водосливной стенки и соответственно могут быть полигонального, криволинейного или комбинированного очертания.

Среди большого числа возможных вариантов формы водосливной стенки особое значение в практическом отношении имеют водосливы криволинейного очертания, так называемые вакуумного и безвакуумного профиля.

Безвакуумный профиль образуется, если его сливная поверхность очерчивается по форме нижней поверхности свободной струи, сходящей с водослива с острым поро-

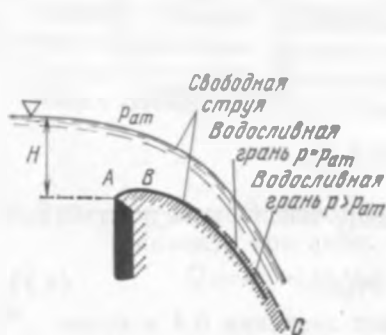


Рис. 8.13.

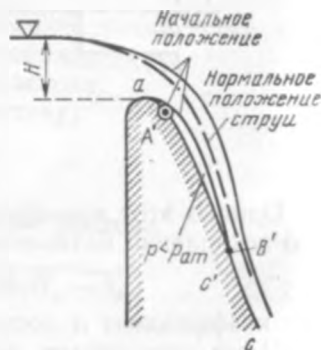


Рис. 8.14.

гом (линия ABC на рис. 8.13). Практически водосливную стенку делают в запас несколько полнее (пунктирная линия ABC).

Для безвакуумного профиля по опытным данным коэффициент расхода $m=0,49$. Координаты профиля ABC по Офицерову приводятся в справочной литературе.

Вакуумный профиль образуется, если его водосливная грань очерчивается не по форме свободной струи (линия ABC на рис. 8.13), а в сокращенной форме (по линии $A'B'C'$ на рис. 8.14). В этом случае под струей (между струей и водосливной гранью) воздух постепенно отсасывается и возникает вакуум. Струя ложится на сливную грань водослива, и под ней вдоль сливной грани, следовательно, давление $p < p_{ат}$.

Такой профиль по сравнению с безвакуумным имеет больший коэффициент расхода $m_{\text{вак}} > m_{\text{безвак}}$, что представляется физически совершенно понятным, так как скорости течения (например, в точке M) вследствие вакуума больше соответствующих скоростей для безвакуумного профиля. Как показывают опыты, коэффициент расхода достигает большого значения ($m_{\text{вак}} = 0,55$ и более).

Общая формула расхода остается в силе и для водослива практического профиля. При расчетах обычно приходится учитывать скорость подхода, боковое сжатие и затопление.

Первые два фактора учитываются так же, как и для водослива с острым порогом. Но учет затопления имеет некоторую особенность, заключающуюся в том, что затопление для вакуумных профилей начинается несколько раньше, чем для безвакуумных.

Для вакуумных профилей затопление начинается в тот момент, когда свободная поверхность нижнего бьефа окажется расположенной около или выше некоторой точки A (рис. 8.15) и вакуум уменьшится или будет устранен полностью. В таких условиях скорости течения уменьшатся и уменьшится расход.

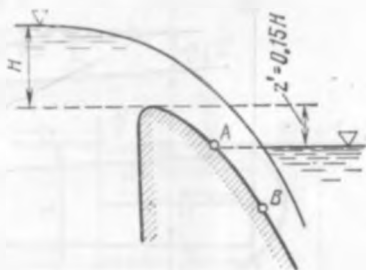


Рис. 8.15.

По исследованиям Н. П. Розанова, затопление начинает сказываться, как только

$$z' \leq 0,15H_0. \quad (8.29)$$

Практически считают, что при $z' > 0,15H_0$ водослив не затоплен; при $z' < 0,15H_0$ водослив затоплен (рис. 8.15).

З а м е ч а н и е. Коэффициент расхода m всецело зависит от формы водосливной стенки и напора H . Чем меньше напор и чем более водослив приближается к типу водослива с широким порогом, тем коэффициент расхода становится меньше.

Следует отметить, что с увеличением напора любой водослив практического профиля, в том числе и водослив криволинейного безвакуумного профиля, может перейти в вакуумный водослив.

9.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ В ПОТОКЕ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

Распределение скоростей в открытом потоке значительно сложнее, чем в замкнутом напорном трубопроводе (см. § 5.6.3). Форма поперечного сечения русла (твердая неподвижная граница потока) и наличие свободной поверхности оказывают влияние на распределе-

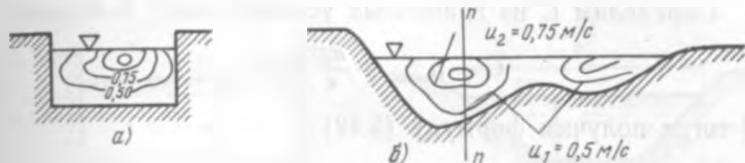


Рис. 9.2.

ние скоростей. В качестве иллюстрации рассмотрим распределение изотех (линий равных скоростей) для канала прямоугольного сечения (рис. 9.2,а) и профиля речного потока (рис. 9.2,б). Для многих вертикалей поперечного профиля максимальная скорость располагается не на свободной поверхности, а на некоторой глубине. Это видно на рис. 9.3, на котором приведено распределение осредненных скоростей по вертикали $n-n$ (рис. 9.2). Для других вертикалей распределение иное.

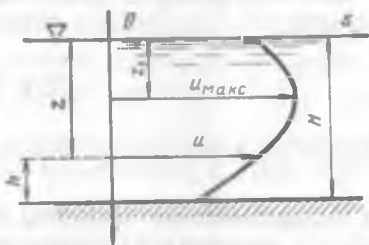


Рис. 9.3.

Теоретических решений, подобных решениям Прандтля для цилиндрических труб (см. § 5.6.3), для открытых каналов со сложной геометрической формой еще нет.

Приводим предложенную Базеном формулу

$$u_x = u_{\max} - \frac{k}{R} \sqrt{Ri} (z - z_1)^2, \quad (9.2)$$

где z_1 и z — координаты точек со скоростями $u_{\max}$ и u (рис. 9.3).

Для русл прямоугольного сечения с шириной $B > h$ распределение осредненных скоростей можно оценить в соответствии с логарифмическим законом Прандтля следующим образом.

Имеем по (5.41)

$$u_x = u_* \frac{1}{\kappa} \ln z + C.$$

Определим C из граничных условий $z=H$, $\bar{u}_x = u_{\text{макс}}$:

$$C = u_{\text{макс}} - \frac{u_*}{\kappa} \ln H$$

и тогда получим формулу (5.42)

$$\bar{u}_x = \bar{u}_{\text{макс}} - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{H}{z}.$$

Для практических расчетов (при $u_{\text{пов}} \geq 20 \sqrt{Ri}$) часто рекомендуют следующую формулу:

$$u = u_{\text{пов}} - 20 \sqrt{Ri} \left(\frac{H-h}{H} \right)^{1/4}, \quad (9.3)$$

где u — скорость на глубине h .

9.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КАНАЛА. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Наиболее распространенными являются каналы прямоугольного и трапецидального сечения, а также с сечением криволинейного очертания.

Важнейшими геометрическими элементами для расчета являются площадь поперечного сечения (живого сечения ω), смоченный периметр χ и гидравлический радиус R .

Для каналов прямоугольного сечения (рис. 9.4) геометрические элементы определяются по следующим формулам:

площадь поперечного сечения $\omega = bh$;

смоченный периметр $\chi = b + 2h$;

гидравлический радиус $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh}{b + 2h}$.

Для очень широких русел $b \gg h$ можно принимать $R \approx h$.

Действительно,

$$R = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{bh}{b + 2h} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{h}{1 + 2h/b} = h,$$

т. е.

$$R \approx h. \quad (9.4)$$

Для каналов трапецидального сечения (рис. 9.5) геометрические элементы определяются по следующим формулам:

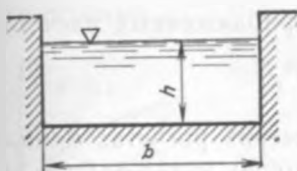


Рис. 9.4.

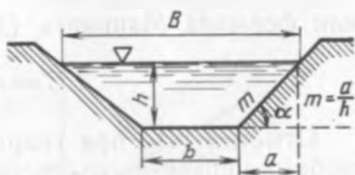


Рис. 9.5.

площадь поперечного сечения (площадь трапеции)

$$\omega = (b + mh)h, \quad (9.5)$$

где m — коэффициент откоса, равный отношению заложения откоса к высоте, $m = a/h = \operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 9.5); смоченный периметр

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}; \quad (9.6)$$

гидравлический радиус

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}} = \frac{(1 + mh/b)h}{1 + 2h\sqrt{1 + m^2}/b}.$$

Для очень широких русел $b \gg h$, очевидно,

$$\frac{mh}{b} \rightarrow 0 \text{ и } 2h\sqrt{1 + m^2}/b \rightarrow 0$$

и тогда

$$R_{b \rightarrow \infty} \approx h. \quad (9.7)$$

Заметим, что для каналов любой формы при условии $b \gg h$ смоченный периметр равен приблизительно ширине канала по верху (по свободной поверхности) $\chi \approx B$

$$R = \frac{\omega}{\chi} \approx \frac{\omega}{B} \approx h_{\text{ср}}. \quad (9.8)$$

Расчетные формулы

Уравнение расхода $Q = \omega v$.

Формула Шези для скорости $v = C \sqrt{Ri}$.

Формула Шези для расхода $Q = \omega C \sqrt{Ri}$.

Формула Н. Н. Павловского (для коэффициента Шези)

$$C = \frac{1}{n} R^x$$

или формула Маннинга (для приближенных расчетов)

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}.$$

Отметим, что при гидравлических расчетах каналов любого поперечного сечения удобно пользоваться расходной характеристикой K :

$$K = \omega C \sqrt{R}. \quad (9.9)$$

Тогда

$$Q = K \sqrt{i}.$$

9.4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Методика решения задач для каналов любых форм сечений аналогична. Рассмотрим эту методику применительно к наиболее характерному случаю — расчету канала трапецидального сечения.

Основными задачами гидравлического расчета открытых каналов являются следующие.

Задача I. Определение расхода Q .

Задача II. Определение необходимого уклона i .

Задача III. Определение размеров канала — глубины h или ширины канала b .

Первые две задачи решаются прямым вычислением из формулы Шези:

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} \text{ и } i = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}.$$

Все остальные параметры потока, кроме искомых, должны быть заданы или известны. Для трапецидального русла должны быть заданы b , h и i в первой задаче (или b , h и Q во второй). Коэффициент заложения откоса m и коэффициент шероховатости n устанавли-

ваются в связи с конструктивными и строительными условиями, и поэтому они могут рассматриваться (в гидравлических расчетах) как известные величины.

Решение третьей задачи сложнее. Третья задача заключается в определении размеров канала (для трапециевидного русла h и b) при заданных Q и i , поэтому одного уравнения Шези недостаточно. Очевидно,

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} = F(b, h, i), \quad (9.10)$$

и при заданных Q и i получим одно уравнение с двумя неизвестными.

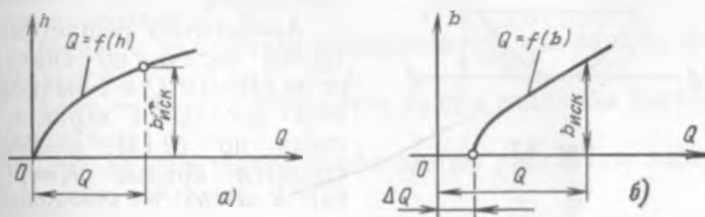


Рис. 9.6.

Требуется дополнительное условие. Надо задать или ширину канала по дну b , тогда искомой будет глубина h (или наоборот), или задать соотношение $\beta = b/h$. В последнем случае будем иметь два уравнения, из которых находим одновременно и глубину и ширину канала.

Решение этих задач не вызывает затруднений, но в первых двух случаях (когда задается b и надо найти h , или наоборот) удобнее решать задачи графоаналитическим построением: в первом случае — функции $Q = f(h)$ (рис. 9.6, а), во втором — $Q = f(b)$ (рис. 9.6, б).

Заметим, что кривая $Q = f(h)$ проходит через начало координат (рис. 9.6), а кривая $Q = f(b)$ при $b=0$ пересекает ось $O-Q$ (ось абсцисс) в точке A , когда при уменьшении ширины канала до нуля трапеция превращается в треугольник. Отрезок $O-A$ на оси $O-Q$ определяет собой расход канала Q с треугольным профилем при глубине h .

В третьем случае, когда дополнительно задано отношение $\beta = b/h$, задача приводится к логарифмическому виду

$$Q = Ah^{2.5-\nu}, \quad (9.11)$$

откуда находим h , а затем и b ($b = \beta h$).

9.5. НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КАНАЛОВ

Метод расходной характеристики основан на использовании уравнения Шези в такой форме:

$$Q = K \sqrt{i}, \quad (9.12)$$

где K — расходная характеристика, по (9.9) $K = C \sqrt{R}$.

Решение первых двух основных задач (определения

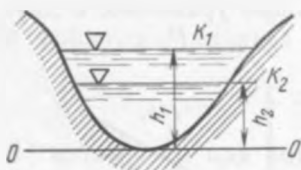


Рис. 9.7.

Q или i) указано в § 9.4. Здесь по h , b , m и n вычисляем сначала K , а затем или Q или i .

Аналогично решается и третья задача, но сначала по заданным Q и i вычисляется расходная характеристика по (9.12), а затем строятся кривые $K=f(h)$ или $K=f(b)$, по которым и определяют h или b .

Метод гидравлического показателя русла. Для любого поперечного сечения канала можно для выбранных двух произвольных глубин h_1 и h_2 (рис. 9.7) написать такое равенство:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \left(\frac{K_1 \sqrt{i}}{K_2 \sqrt{i}}\right)^2 = \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2. \quad (9.13)$$

Б. А. Бахметев указал, что для открытого канала, для которого расходная характеристика K является монотонно возрастающей функцией глубины, можно написать:

$$K=f(h)=ah^p. \quad (9.14)$$

Тогда равенство (9.13) получит вид:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{2p},$$

или, обозначив $2p=x$, получим:

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^x. \quad (9.15)$$

Бахметев предложил считать показатель степени x (по предложению Н. Н. Павловского гидравлический показатель русла) приближенно постоянной величиной для данного поперечного сечения.

Числовое значение этого показателя вычисляется из (9.15):

$$x = \frac{2 \lg (K_1/K_2)}{\lg (h_1/h_2)}, \quad (9.16)$$

при этом для конкретного русла (например, приведенного на рис. 9.7) вычисляем K_1 и K_2 для выбранных глубин h_1 и h_2 .

Зависимость (9.15) служит для определения глубины воды в канале при равномерном движении и известна как показательный закон Бахметева. В дальнейшем такую глубину будем называть нормальной и обозначать h_0 .

Покажем на примере определение h_0 для канала произвольной формы (рис. 9.7).

Пусть требуется определить h_0 при заданном расходе и заданном уклоне i .

Сначала определяем необходимую расходную характеристику канала по (9.12)

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}}.$$

Тогда, определив предварительно по (9.16)

$$x = \frac{2 \lg (K_1/K_2)}{\lg (h_1/h_2)},$$

получим по (9.15)

$$\left(\frac{K_0}{K_1}\right)^2 = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^x.$$

Следовательно, искомая нормальная глубина определится по формуле

$$h_0 = h_1 \left(\frac{K_0}{K_1}\right)^{2/x} = h_1 \sqrt[x]{\left(\frac{K_0}{K_1}\right)^2},$$

в правой части которой все величины известны.

Для некоторых форм сечений русла значения гидравлического показателя русла известны:

для прямоугольного сечения при $b \gg h$ $x=3,0$;

для параболического русла $x=4,0$;

для треугольного русла $x=5,5$.

Существуют и другие методы расчета каналов, например метод абстрактной модели (И. И. Агроскина), графические методы (Н. Н. Павловского, В. Д. Журина, П. Г. Киселева).

9.6. КАНАЛЫ С ГИДРАВЛИЧЕСКИ НАИВЫГОДНЕЙШИМ СЕЧЕНИЕМ

Каналы, обладающие наибольшей пропускной способностью при одной и той же площади поперечного сечения, уклоне и коэффициенте шероховатости, называются каналами с гидравлически наивыгоднейшими сечениями (но они могут быть экономически нецелесообразны).

Обратившись к формуле Шези

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} = \omega \frac{V_i}{n} R^{0.49} = AR^{0.49},$$

можно видеть, что $Q_{\text{макс}}$ имеет место при $R_{\text{макс}}$. Но гидравлический радиус R равен $R = \omega / \chi$, а потому для достижения $Q_{\text{макс}}$ при заданной площади ω требуется наименьший смоченный периметр.

Известно, что для трапецеидального поперечного сечения смоченный периметр по (9.6)

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$$

и, следовательно,

$$\chi = \frac{\omega}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2}.$$

Таким образом, при $\omega = \text{const}$ смоченный периметр является функцией глубины канала

$$\chi = f(h).$$

Эта функция имеет минимум, так как всегда $\chi > 0$, а глубина h может изменяться в пределах $0 < h < \infty$, причем в обоих этих предельных условиях $f(h) \rightarrow \infty$. Глубину h для $\chi_{\text{мин}}$ находим из уравнения

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{\omega}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0,$$

или, так как $\omega = (b + mh)h$ и $\frac{\omega}{h^2} = \frac{b}{h} + m$, то после подстановки

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{b}{h} - 2m + 2\sqrt{1+m^2} = 0.$$

Обозначив $\beta = b/h$, запишем

$$\beta_{г.н} = 2(\sqrt{1+m^2} - m).$$

Очевидно, что для канала прямоугольного сечения $m=0$, $\beta=2$ или $b=2h$.

Гидравлический радиус в обоих случаях $R=h/2$.

9.7. КАНАЛЫ СО СЛОЖНЫМ ОЧЕРТАНИЕМ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Методика гидравлического расчета каналов со сложным очертанием поперечного сечения имеет свои особенности. Каналы могут быть разнообразной формы и часто имеют замкнутый профиль (рис. 9.8). В последнем

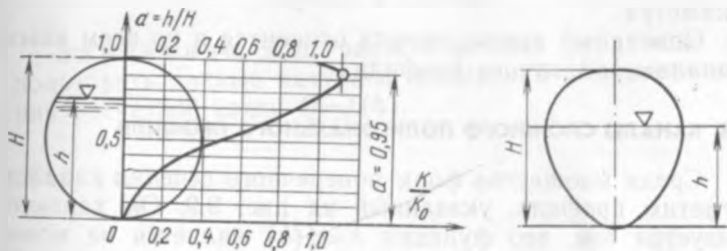


Рис. 9.8.

случае они имеют ограничение в глубине воды. Максимальная глубина равна строительной высоте профиля канала ($h_{\text{макс}}=H$). С увеличением расхода и увеличением глубины при достижении $h=H$ наступает переход к течению в напорных водоводах.

Рассмотрим методику расчета на примере каналов с круговым сечением (рис. 9.8).

Имеем очевидное соотношение

$$\frac{K}{K_0} = f\left(\frac{h}{H}\right), \quad (9.17)$$

где K и K_0 — расходные характеристики при глубине $h < D$ и $H = D$.

Так как каналы с круговым сечением геометрически подобны друг другу, то соотношение (9.17) оказывается инвариантным относительно диаметра D (если в формуле $C = \frac{1}{n} R^y$ показатель $y = \text{const}$).

В связи с этим можно построить универсальный расчетный график в координатах $a=h/H$ и K/K_0 (рис. 9.8), с помощью которого можно решать упомянутые ранее основные задачи. График $K/K_0 = f(h/H)$ имеет макси-

мум при $h \approx 0,95H$, т. е. максимальный расход проходит при глубине, равной $h = 0,95H$, а не при полном заполнении сечения. Это объясняется тем, что для каналов криволинейного замкнутого профиля максимум расходной характеристики K имеет место при глубине $h < h_{\text{макс}}$ (для круглого сечения при $h \approx 0,95D$), когда производная $\frac{dK}{dh}$ становится равной нулю.

На практике часто используют таблицы значений расходной характеристики $K=f(D)$ для труб разного диаметра.

Описанный прием расчета относится и ко всем иным каналам замкнутого профиля.

9.8. КАНАЛЫ СЛОЖНОГО ПОЛИГОНАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Среди множества форм поперечного сечения каналов отметим профиль, указанный на рис. 9.9. Он характеризуется тем, что функция $K=f(h)$ является не монотонно возрастающей, а при глубине, близкой к h_n

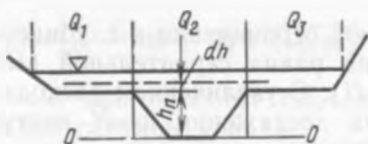


Рис. 9.9.

($h \geq h_n$) (рис. 9.9), претерпевает разрыв. Определение расхода по формуле Шези без учета этой особенности может привести к недопустимой погрешности¹.

Действительно, запишем выражение для отношения расходов Q_1/Q_2 и, вычислив их, для глубин $h_1 = h_n$ и $h_2 = h_n + \Delta h$ получим (сокращая на $\sqrt{i}$ и n):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{0,5+y} = \frac{\omega_1^{1,5+y}}{(\omega_1 + \Delta\omega)^{1,5+y}} \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right)^{0,5+y}.$$

Опуская $\Delta\omega$, получаем при $\chi_2 > \chi_1$:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2} \right) \approx \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right)^{0,5+y}, \text{ т. е. } Q_1 > Q_2.$$

¹ В уравнении Шези предусматривается непрерывность возрастания функции $K=f(h)$.

что не отвечает реальности, так как с увеличением глубины расход в открытом канале указанного профиля (рис. 9.9) всегда возрастает.

Для получения хотя бы и приближенного, но физически правильного результата надо разделить поперечное сечение канала на части, для которых условие непрерывности возрастания функции $K=f(h)$ соблюдается (рис. 9.9).

Тогда расход определится по формуле

$$Q \approx Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Замечание. Для расчета речных русел надо использовать данные натурных измерений для установления расчетной связи $Q=f(h)$.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

НЕРАВНОМЕРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

10.1. ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

При неравномерном движении средняя скорость v , глубина h и уклон I свободной поверхности изменяются вдоль по течению. Гидравлический уклон, уклон свободной поверхности и уклон дна не равны между собой и определяются по следующим формулам:

$$\text{гидравлический уклон (как обычно) } i_f = \frac{dh_f}{ds};$$

$$\text{уклон дна } i = -\frac{dz}{ds};$$

$$\text{уклон свободной поверхности } I = -\frac{dH}{ds},$$

где $H = z + h$.

Если глубина h возрастает вниз по течению ($dh/ds > 0$), то линия свободной поверхности представляет собой кривую подпора (рис. 10.1,а) и движение ока-

зывается замедленным. Если глубина уменьшается ($dh/ds < 0$), то линия свободной поверхности представляет собой кривую спада и движение становится ускоренным (рис. 10.1, б). Определение очертаний свободной поверхности является важнейшей задачей при

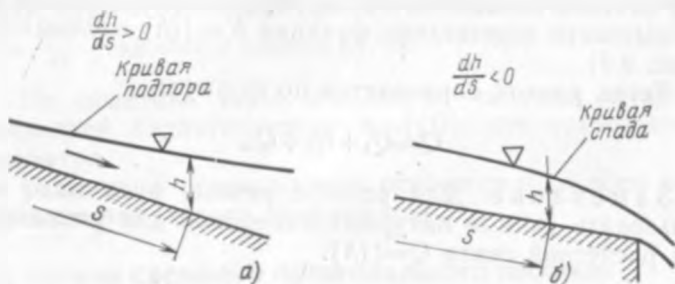


Рис. 10.1.



Рис 10.2.

расчете неравномерного движения потока. Решение ее позволяет получить и все необходимые геометрические и кинематические параметры потока.

Общее решение такой задачи крайне затруднено вследствие сложности геометрической формы русла естественных водотоков. Поэтому здесь будем рассматривать более простые русла, для которых расходная характеристика $K = \omega C \sqrt{R}$ является непрерывной функ-

цией глубины $K = f(h)$ при условии

$$\frac{\partial K}{\partial h} > 0.$$

При этом будем различать призматические (или цилиндрические) и непризматические русла.

Форма и ширина поперечного сечения призматического русла одни и те же на всем их протяжении, а ось

s — прямая. Следовательно, для таких русл ω является функцией только глубины:

$$\omega = f(h).$$

Форма поперечного сечения непризматического русла изменяется вдоль русла, и, следовательно, ω является функцией двух независимых переменных h и s :

$$\omega = f(h, s),$$

где s — расстояние от начала отсчета¹.

Запишем уравнение Бернулли для сечений $m-m$ и $n-n$, приняв первое из них за начальное (рис. 10.2). Движение здесь и далее считаем плавноизменяющимся:

$$z_m + h_m + \frac{\alpha_m v_m^2}{2g} = z + h + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w = \text{const.}$$

Обозначим $z + h = H$. После дифференцирования уравнения Бернулли получим следующее выражение:

$$dH + d \frac{\alpha v^2}{2g} + dh_w = 0. \quad (10.1)$$

Разделив на ds , получим:

$$\frac{dH}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{dh_w}{ds} = 0$$

или

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{dh_w}{ds}. \quad (10.2)$$

Здесь $-\frac{dH}{ds} = I$ — уклон свободной поверхности, а $\frac{dh_w}{ds} = i_f$ — гидравлический уклон (в сечении $n-n$), который приближенно можно определить по формуле Шези $i_f = \frac{v^2}{C^2 R}$. При неравномерном движении уклон i_f изменяется вдоль по течению.

После необходимых подстановок в уравнение (10.2) получим:

$$I = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{C^2 R}. \quad (10.3)$$

¹ Здесь и далее будем считать положительным направлением оси расстояний s вниз по течению, а глубину h вверх от дна, т. е. $ds > 0$ вниз по течению, а $dh > 0$ вверх от дна.

Это уравнение и является первой формой основного уравнения неравномерного движения. Обратим внимание на то, что здесь v , S и R соответствуют действительной глубине потока h в данном сечении, а не глубине равномерного движения h_0 .

Преобразуем левую часть (10.2). Так как $H=z+h$, то $dH=dz+dh$. Разделив на $-ds$, получим:

$$-\frac{dH}{ds} = -\frac{dz}{ds} - \frac{dh}{ds}.$$

Но $-\frac{dH}{ds}=i$ — уклон свободной поверхности, а $-\frac{dz}{ds}=i$ — уклон дна. Поэтому после подстановки получим:

$$I = i - \frac{dh}{ds}. \quad (10.4)$$

Преобразуем правую часть того же уравнения (10.2). Первое слагаемое

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha Q^2}{2g \omega^3} \right) = \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^3} \right) +$$

Так как в общем случае

$$\omega = f(h, s),$$

то полный дифференциал функции ω

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial s} ds + \frac{\partial \omega}{\partial h} dh.$$

Поэтому можем записать:

$$d \left(\frac{1}{\omega^3} \right) = -\frac{2}{\omega^3} d\omega = -\frac{2}{\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} ds + \frac{\partial \omega}{\partial h} dh \right).$$

В таком случае производная $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^3} \right)$ будет равна:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^3} \right) = -\frac{2}{\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{dh}{ds} \right).$$

Поскольку производная $\frac{\partial \omega}{\partial h}$ равна ширине русла по верху B (рис. 10.3), можно записать:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right). \quad (10.5)$$

Второе слагаемое правой части (10.3) запишем так:

$$\frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}. \quad (10.6)$$

Сделав необходимые подстановки в уравнение (10.3), получим:

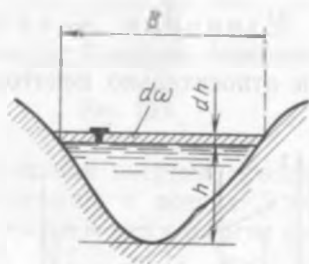
$$i - \frac{dh}{ds} = - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}.$$

Решив уравнение относительно производной $\frac{dh}{ds}$, найдем:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i + \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B}. \quad (10.7)$$

Это уравнение является второй формой основного уравнения неравномерного движения.

Рис. 10.3.



Поскольку для призматических русл $\omega = f(h)$ и частная производная $\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0$, основное уравнение (10.7) получит вид:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B}. \quad (10.8)$$

Для русла с нулевым уклоном ($i=0$)

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B - 1} \quad (10.8a)$$

Для русла с отрицательным уклоном ($i < 0$) введем понятие обратного уклона и, обозначив $i = -i'$ (где $i' > 0$), получим:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i' + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B - 1} \quad (10.8b)$$

Основная задача теории неравномерного движения заключается в построении линии свободной поверхности потока для любого конкретного русла и в любых условиях, т. е. сводится к нахождению функциональной зависимости

$$h = f(s). \quad (10.9)$$

10.2. УДЕЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПОТОКА И СЕЧЕНИЯ. КРИТИЧЕСКАЯ ГЛУБИНА

Удельная энергия потока — полный запас удельной энергии, определяемый по уравнению Бернулли относительно некоторой произвольно выбранной горизонтальной плоскости yOx (рис. 10.4). Эта плоскость одна и та же на всем протяжении потока. Применительно к сечениям 1—1 и 2—2 имеем:

$$E_1 = E_2 + h_w, \quad (10.10)$$

где h_w нарастает вниз по течению и, следовательно, E_2 — удельная энергия потока, всегда непрерывно убывает.

Удельная энергия сечения определяется также по уравнению Бернулли, но в отли-

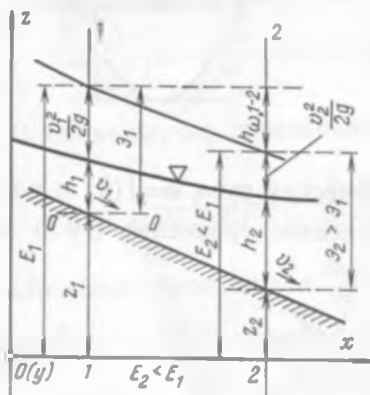


Рис. 10.4.

ние от удельной энергии потока определяется не относительно одной и той же для всех сечений горизонтальной плоскости yOx , а относительно горизонтальной плоскости $0-0$, проходящей через самую низкую точку дна для каждого сечения в отдельности. Следовательно, при переходе от одного сечения к другому поток будет изменять свое положение. Удельная энергия сечения без учета внешнего давления p_0 (обычно равного атмосферному) определяется так:

$$\mathcal{E} = h + \frac{v^2}{2g}. \quad (10.11)$$

Удельная энергия сечения может и убывать и возрастать вдоль потока (рис. 10.4). При равномерном движении она остается неизменной, так как $h_1 = h_2$ и $v_1 = v_2$.

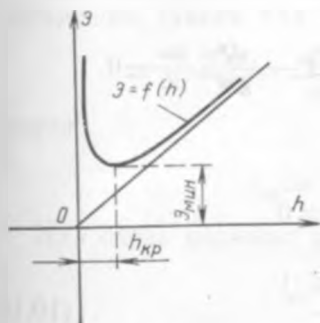


Рис. 10.5.

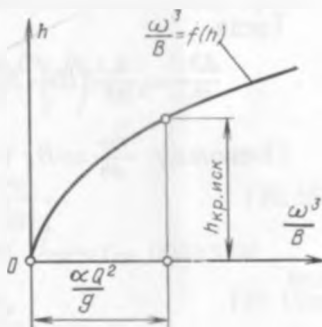


Рис. 10.6.

При заданном расходе Q удельная энергия сечения $\mathcal{E}$ является функцией только глубины и всегда $\mathcal{E} > 0$. График функции удельной энергии сечения. Так как

$$\mathcal{E} = h + \frac{Q^2}{2g\omega^3} = \mathcal{E}(h), \quad (10.11a)$$

то возможно следующее:

1) если $h \rightarrow 0$, то $\frac{Q^2}{2g\omega^3} \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\mathcal{E} \rightarrow \infty$;

2) если $h \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\omega \rightarrow \infty$, то $\mathcal{E} \rightarrow \infty$.

Изобразим функцию $\mathcal{E}(h)$ в координатах $\mathcal{E}$ и h (рис. 10.5). Очевидно, что при $h \rightarrow 0$ линия, изображающая функцию $\mathcal{E}(h)$, асимптотически стремится к оси ординат (оси $\mathcal{E}$), а при $h \rightarrow \infty$ стремится к биссектрисе

координатного угла. Действительно, вследствие того, что при $h \rightarrow \infty$ $\omega \rightarrow \infty$ и $\frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \rightarrow 0$, уравнение (10.11а)

в своем пределе превращается в уравнение $h = \mathcal{E}$, а это есть уравнение биссектрисы координатного угла.

Таким образом, функция $\mathcal{E}(h)$ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, проходя конечные значения. Такая функция имеет минимум.

Глубина h , при которой функция $\mathcal{E}(h)$ имеет минимум, называется критической глубиной $h_{кр}$. Чтобы найти $h_{кр}$, определим производную, приравняв ее нулю:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = f(h) = 0. \quad (10.12)$$

Тогда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{d\omega}{dh} = 0.$$

Поскольку $\frac{d\omega}{dh} = B$, то

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B = 0$$

или

$$\frac{\omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}. \quad (10.13)$$

Решение этого уравнения и дает ответ.

Очень просто решать (10.13) построением графика функции $\omega^3/B = f(h)$ (рис. 10.6).

Для прямоугольного русла $\omega = bh$ и критическую глубину можно легко вычислить. Подставив вместо ω в (10.13) произведение $bh_{кр}$, получим:

$$\frac{b^3 h_{кр}^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}.$$

Отсюда найдем (при $b = B$):

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g B^2}} \text{ или } h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}. \quad (10.14)$$

Здесь q — удельный расход, $q = Q/B$, т. е. расход, приходящийся в среднем на 1 м ширины русла, м³/с на 1 м ширины.

Критическая глубина позволяет делить потоки жидкости на две группы. Потоки с глубинами больше критической называются спокойными, а с глубинами меньше критической — бурными. Бурный поток обтекает донные препятствия с образованием неустойчивой волновой поверхности.

Критическим уклоном $i_{кр}$ называется такой уклон русла, при котором глубина потока при равномерном движении равна критической.

Таким образом, если обозначим при критической глубине соответственно $\omega_{кр}$, $C_{кр}$ и $R_{кр}$, то критический уклон найдем из формулы Шези

$$i_{кр} = \frac{Q^2}{\omega_{кр}^2 C_{кр}^2 R_{кр}}. \quad (10.15)$$

Для критического уклона можно составить и другие выражения. Имеем для $i_{кр}$

$$\frac{\omega_{кр}^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\alpha \omega_{кр}^2 C_{кр}^2 R_{кр} i_{кр}}{g},$$

откуда

$$i_{кр} = \frac{g}{\alpha C_{кр}^2} \frac{\chi_{кр}}{B_{кр}}. \quad (10.16)$$

Для очень широких русел при $B_{кр} \approx \chi_{кр}$ получим

$$i_{кр} = \frac{g}{\alpha C_{кр}^2}. \quad (10.16a)$$

10.3. ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Воспользуемся уравнением (10.8) и запишем его в таком виде:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{(\omega C \sqrt{R})^3}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}}. \quad (10.17)$$

Преобразуем его в более удобную для дальнейшего анализа форму.

Известно, что $Q = K_0 \sqrt{i}$, где K_0 — расходная характеристика при нормальной глубине h_0 , и, следовательно, $Q^2 = K_0^2 i$, а выражение $\omega C \sqrt{R} = K$, где K — расходная

характеристика при действительной глубине h в данном поперечном сечении потока.

Поэтому числитель правой части можем записать так:

$$i - \frac{Q^2}{(\omega C \sqrt{R})^2} = i \left[1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 \right].$$

Второе слагаемое знаменателя запишем так:

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3} = \frac{\alpha Q^2 / g}{\omega^3 / B},$$

или, обозначив $\alpha Q^2 / g = N_{кр}$ и $\omega^3 / B = N$, где N — контрольное число (по В. Д. Журину), а $N_{кр}$ — его критическое значение, получим:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B}{\omega^3} = \frac{N_{кр}}{N},$$

тогда знаменатель примет вид¹:

$$1 - \frac{N_{кр}}{N}. \quad (10.176)$$

Преобразовав таким образом числитель и знаменатель, можем уравнение (10.17) записать в такой форме:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - N_{кр}/N}. \quad (10.18)$$

Пользуясь этим уравнением, можем проследить, какой вид приобретает свободная поверхность в различных условиях.

Построим вспомогательные графики (рис. 10.7) зависимостей $N = \omega^3 / B = f_1(h)$ и $K = \omega C \sqrt{R} = f_2(h)$ и перейдем к рассмотрению форм свободной поверхности.

Русло с прямым уклоном дна ($i > 0$). Здесь могут быть три случая: 1) $i < i_{кр}$; 2) $i = i_{кр}$; 3) $i > i_{кр}$.

¹ Различные авторы записывают этот знаменатель в различном виде, например, в учебнике И. И. Агроскина, Г. Т. Дмитриева, Ф. И. Пикалова «Гидравлика» он записан так:

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B = 1 - Fr$$

1-й случай: $i < i_{кр}$. Очевидно, что при этом нормальная глубина h_0 больше критической $h_{кр}$. Изобразим на продольном профиле две вспомогательные линии: линию нормальных глубин h_0 (линию $n-n$) и линию критических глубин $h_{кр}$ (линию $k-k$). Это будут прямые линии, параллельные линии дна русла (рис. 10.8).

Все пространство выше линии дна русла делится указанными прямыми на три области или на три зоны: зону A — выше линии $n-n$, зону B — между линиями $n-n$ и $k-k$ и зону C — между линиями $k-k$ и линией дна.

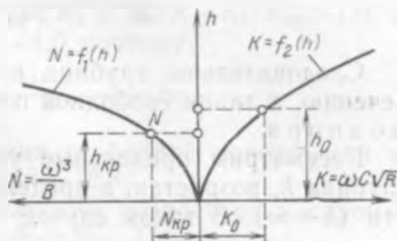


Рис. 10.7.

Действительная свободная поверхность может находиться в каждой из этих зон.

Зона А. Здесь действительная глубина больше нормальной $h > h_0$. Поэтому расходная характеристика K больше расходной характеристики K_0 ($K > K_0$) (рис. 10.7) и контрольное число N больше $N_{кр}$ ($N > N_{кр}$).



Рис. 10.8.

Определим знак производной $\frac{dh}{ds}$, пользуясь уравнением

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - N_{кр}/N} \quad (10.18a)$$

Так как $K > K_0$, то числитель $1 - (K_0/K)^2 > 0$, а так как $N > N_{кр}$, то и знаменатель $1 - N_{кр}/N > 0$.

Для установления знака производной $\frac{dh}{ds}$ запишем

(10.18а) условно, показывая лишь знаки числителя и знаменателя. В данном случае имеем:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{(+)}{(+)} > 0.$$

Следовательно, глубина потока возрастает вниз по течению, а линия свободной поверхности будет кривой подпора.

Рассмотрим предельные условия. Вниз по течению глубина h , возрастая, в пределе стремится к бесконечности ($h \rightarrow \infty$). В таком случае $K \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$, а поэтому

$$\frac{dh}{ds} \rightarrow i \text{ и } dh = i ds.$$

Это равенство показывает, что свободная поверхность стремится стать горизонтальной, так как увеличение глубины на dh равно падению дна русла на $i ds$. Следовательно, кривая подпора вниз по течению асимптотически стремится к горизонтальной прямой.

Вверх по течению глубина потока уменьшается и, оставаясь в зоне А, стремится стать равной h_0 . Но в таком случае $K \rightarrow K_0$, а $N \rightarrow N_0$. Следовательно, применяя условную запись, получаем:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - N_{кр}/N_0} = i \frac{(0)}{(+)} = 0.$$

Но если отношение $\frac{dh}{ds}$, уменьшаясь в пределе, стремится к нулю, то это значит, что вверх по течению кривая подпора асимптотически стремится к линии нормальных глубин.

Зона В (рис. 10.8). Здесь действительная глубина $h < h_0$, но $h > h_{кр}$ и, следовательно, $K < K_0$, а $N_0 > N > N_{кр}$. Поэтому $K_0/K > 1,0$, а $N_{кр}/N < 1,0$ и $dh/ds = i \frac{(-)}{(+)} < 0$.

Следовательно, если свободная поверхность потока будет располагаться в зоне В (между линиями нормальной и критической глубин), то $\frac{dh}{ds} < 0$ и глубина по-

тока h убывает вниз по течению и, конечно, возрастает вверх по течению. Это будет кривая спада (рис. 10.8).

Проследим аналогично предыдущему за этой кривой в ее пределах. В зоне B глубина потока h , будучи больше $h_{кр}$ и уменьшаясь вниз по течению, стремится стать равной $h_{кр}$, тогда $K \rightarrow K_{кр} < K_0$ и $K_0/K \rightarrow K_0/K_{кр} > 1,0$, $N \rightarrow N_{кр}$ и $N_{кр}/N \rightarrow N_{кр}/N_{кр} \rightarrow 1,0$, поэтому

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{(-)}{0} \rightarrow -\infty,$$

т. е. касательная к линии свободной поверхности становится вертикальной (рис. 10.8).

Вверх по течению глубина возрастает и стремится к h_0 , тогда $K \rightarrow K_0$ и $N \rightarrow N_0 > N_{кр}$. Поэтому

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - N_{кр}/N} = i \frac{(0)}{(+)} \rightarrow 0,$$

и, следовательно, кривая спада вверх по течению асимптотически стремится к линии нормальных глубин.

Зона С. Глубина потока $h < h_{кр}$, поэтому $K < K_{кр} < K_0$ и $N < N_{кр}$. В соответствии с этим

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{(1 - (K_0/K)^2)}{1 - N_{кр}/N} = i \frac{(-)}{(-)} > 0,$$

т. е. глубина потока возрастает вниз по течению и свободная поверхность приобретает вид кривой подпора.

В пределе вниз по течению $h \rightarrow h_{кр}$ и, следовательно,

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{(-)}{(-0)} \rightarrow +\infty.$$

Линия свободной поверхности круто поднимается вверх и стремится стать касательной к вертикали. В пределе вверх по течению h может стремиться к нулю, что, впрочем, не имеет физического смысла (при $h=0$ и $Q=0$).

Итак, для русла с уклоном $i > 0$ возможны только три формы свободной поверхности, схематично показанные на рис. 10.8.

Возможные формы

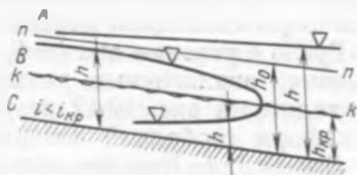


Рис. 10.9.

свободной поверхности для случая $i > 0$ приведены на рис. 10.9. Условия возникновения этих видов свободной поверхности могут быть различны. Так, на рис. 10.10,а показана кривая подпора при преграждении плотиной, на рис. 10.10,б — при истечении из-под затвора.

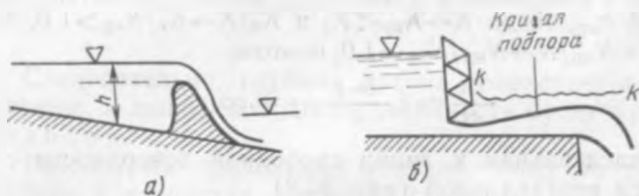


Рис. 10.10.

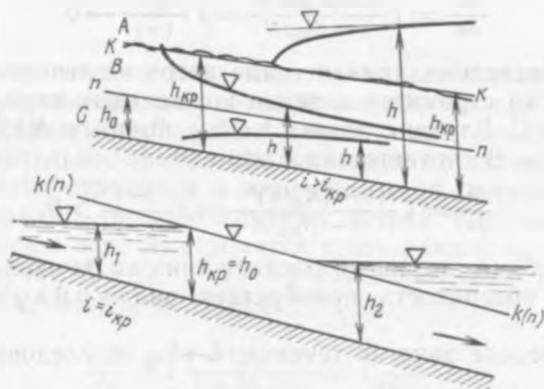


Рис. 10.11.

2-й и 3-й случай ($i > i_{кр}$ и $i = i_{кр}$). Опуская разъяснения, аналогичные разъяснениям для 1-го случая, приводим на рис. 10.11 резульативные схемы возможных форм свободной поверхности.

Русло с уклоном дна $i = 0$ и $i < 0$. Также опуская разъяснения, аналогичные разъяснениям для 1-го случая, приводим на рис. 10.12 резульативные схемы возможных форм свободной поверхности.

Вывод. 1. Как показывает анализ, иных форм свободной поверхности, кроме указанных на приведенных здесь схемах, физически существовать не может.

2. При неизменном уклоне русла ни одна кривая свободной поверхности (из числа указанных выше) не пересекает ни линии нормальной глубины, ни линии критической и, следовательно, не может перейти из одной зоны в другую.

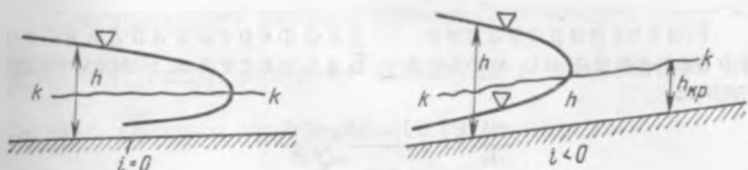


Рис. 10.12.

3. Точность описания уравнением (10.18) линии свободной поверхности в области глубин, близких к критической глубине, понижается, так как в этой области нарушается условие плавноизменяющегося движения потока.

10.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Интегрирование дифференциального уравнения имеет свою многолетнюю историю. Широкое распространение в прошлом получили методы Дюпюи (1848 г.) — Рюльмана (1880 г.) и особенно метод Бресса (1879 г.), относящиеся к руслам прямоугольного профиля большой ширины, а также метод Толкмита (1892 г.) для параболического профиля. В XX в. широкое распространение получил метод, предложенный проф. Б. А. Бахметевым (1914 г.). Метод Б. А. Бахметева отличается от указанных выше наибольшей общностью, благодаря чему сохраняет свое значение и в настоящее время. Позднее был предложен ряд новых решений: метод проф. Н. Н. Павловского, проф. И. И. Агроскина и других ученых.

Здесь отметим, что дифференциальное уравнение (10.7) для непризматических русел решения не имеет, так как в общем случае неизвестна функция $\omega = f(s)$, а сле-

довательно, и производная $\frac{d\omega}{ds}$. Поэтому решение Бахметева (как равным образом решения и других авторов) относится к призматическим руслам.

10.4.1. Интегрирование уравнения при $i > 0$

Интегрирование дифференциального уравнения по методу Бахметева. Имеем уравнение

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}}. \quad (10.19)$$

Здесь величины K , B и ω являются функциями глубины h , а остальные величины постоянные, поэтому правая часть представляет собой некоторую функцию $F(h)$, и, следовательно, (10.19) есть обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Для интегрирования преобразуем правую его часть

Пользуясь показательным законом Б. А. Бахметева (9.16), запишем:

$$\left(\frac{K_0}{K}\right)^2 = \left(\frac{h_0}{h}\right)^x,$$

где x — гидравлический показатель русла. Напишем числитель в виде

$$1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2 = 1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^x.$$

Второе слагаемое знаменателя преобразуем последовательно (с учетом $Q^2 = iK_0^2$):

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3} = \frac{\alpha i K_0^2 B}{g \omega^2 \omega} = \frac{\alpha i K_0^2 B}{g \omega^2 \omega} \frac{C^2}{C^2} \frac{\chi}{\chi} = \frac{\alpha C^2 i}{g} \frac{B}{\chi} \frac{K_0^2}{\omega^2 C^2 (\omega/\chi)}.$$

Но отношение $(\omega/\chi) = R$, где R — гидравлический радиус.

Поскольку $\omega^2 C^2 R = K^2$, знаменатель (10.19) запишем так:

$$1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3} = 1 - \frac{\alpha C^2 i}{g} \frac{B}{\chi} \left(\frac{K_0}{K}\right)^2.$$

а учитывая равенство (9.16), можем уравнение (10.19) переписать в виде

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{\kappa \omega^2}} = i \frac{1 - (h_0/h)^x}{1 - \frac{\alpha C^2 i}{g} \frac{B}{\chi} (h_0/h)^x}.$$

Для упрощения записей примем обозначение $\frac{\alpha C^2 i}{g} \times \frac{B}{\chi} = j$. Тогда, разделив числитель и знаменатель на $(h_0/h)^x$, получим уравнение (10.19) в виде

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{(h/h_0)^x - 1}{(h/h_0)^x - j}. \quad (10.20)$$

Вводя в уравнение (10.20) новую переменную $\eta = h/h_0$ и учитывая равенство $d\eta = dh/h_0$, откуда $dh = h_0 d\eta$, получаем:

$$\frac{h_0 d\eta}{ds} = i \frac{\eta^x - 1}{\eta^x - j} \quad (10.21)$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{i ds}{h_0} = \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} d\eta = d\eta + (1 - j) \frac{d\eta}{\eta^x - 1}.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{i(s_2 - s_1)}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} (1 - j) \frac{d\eta}{1 - \eta^x}.$$

Вводя j_{cp} и обозначая $\int \frac{d\eta}{1 - \eta^x} = \varphi(\eta) + C$, получаем окончательно:

$$\frac{i(s_2 - s_1)}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - j_{cp}) \{ \varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1) \}. \quad (10.22)$$

Здесь $s_2 - s_1 = l$ — длина участка русла между двумя его сечениями (рис. 10.13); η_2 и η_1 — соответственно h_2/h_0 и h_1/h_0 ; $j_{cp} = \frac{\alpha C^2 i}{g} \frac{B}{\chi}$ — для данного участка; $\varphi(\eta_2)$ и $\varphi(\eta_1)$ соответствуют $\eta_2 = h_2/h_0$ и $\eta_1 = h_1/h_0$ для концевых сечений участка.

Числовые значения функций $\varphi(\eta) = \int \frac{d\eta}{1-\eta^2} + C$ определяют на практике не прямым вычислением интеграла, а по заранее составленным таблицам для различных значений гидравлического показателя русла x .

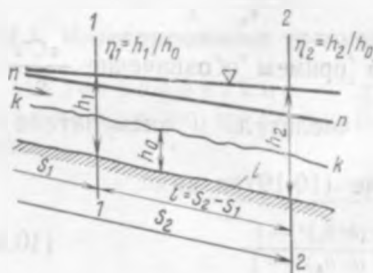


Рис. 10.13.

В проектной практике Советского Союза используются таблицы Н. Н. Павловского, составленные для значений от $x=2,0$ до $x=5,5$ с интервалом $\Delta x=0,25$ [18].

Уравнение (10.22) позволяет решить две основные задачи.

Задача 1. Определение расстояния $l=s_2-s_1$ между двумя створами потока, когда известны (или заданы) глубины h_1 и h_2 (створ с глубиной h_2 расположен ниже по течению). При этом предполагается, что все параметры потока Q , h_0 , i , n и форма русла известны.

В таком случае искомое расстояние находится путем прямого вычисления по уравнению

$$l = \frac{h_2}{i} \left\{ \frac{h_2}{h_0} - \frac{h_1}{h_0} - (1 - j_{cp}) \left[\varphi \left(\frac{h_2}{h_0} \right) - \varphi \left(\frac{h_1}{h_0} \right) \right] \right\}, \quad (10.23)$$

при этом здесь j_{cp} может вычисляться как

$$j_{cp} = \frac{j_1 + j_2}{2}$$

или

$$j_{cp} = \frac{\alpha C_{cp}^2 i}{g} \frac{B_{cp}}{\chi_{cp}},$$

где C_{cp} , B_{cp} и χ_{cp} соответствуют средней глубине $h_{cp} = \frac{h_1 + h_2}{2}$, а функции $\varphi(\eta_2)$ и $\varphi(\eta_1)$ определяются по соответствующим таблицам для предварительно подсчитанного гидравлического показателя русла

$$x = \frac{2 \lg(K_2/K_1)}{\lg(h_2/h_1)}.$$

Все остальные величины расчетного уравнения заданы

Задача 2. Определение глубины h_1 в створе на заданном расстоянии l от створа, в котором известна глубина h_2 . Все остальные параметры потока и русла известны (как и в первой задаче).

Решение этой задачи более сложно, так как глубину h_1 находим из условия

$$h_1 = h_0 \eta_1,$$

а определение величины η_1 по уравнению (10.20) возможно или методом последовательного приближения (задавая рядом $h_1, h'_1, h''_1 \dots$, определяем $l_1, l'_1 \dots$) или путем построения графика $l = f(h_1)$.

Замечание. Так как решение первой задачи менее трудоемко, чем второй, то в практических расчетах (например, при построении кривых подпора или спада) следует пользоваться первой задачей. Так, применительно к рис. 10.14 для построения кривой подпора следует по глубине h_2 у плотины определить расстояние $l_1, l'_1 \dots$, задавая глубины h_1 и $h'_1 = h_1 + \Delta h_1$ и т. д.

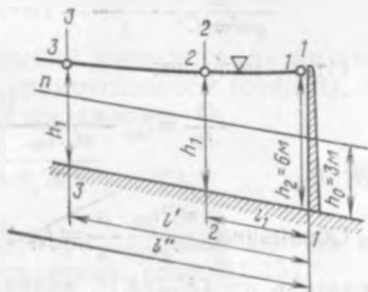


Рис. 10.14

10.4.2. Интегрирование уравнения при $i=0$

Основное уравнение при $i=0$ имеет вид:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3} - 1}.$$

Чтобы исключить из уравнения расход Q , можно воспользоваться условием

$$Q = K_1 \sqrt{i_1} = K_2 \sqrt{i_2} = \dots = K_{кр} \sqrt{i_{кр}}.$$

Примем

$$Q = K_{кр} \sqrt{i_{кр}}.$$

Тогда получим:

$$\frac{dh}{ds} = i_{кр} \frac{(K_{кр}/K)^2}{\frac{\alpha i_{кр} K^2_{кр} B}{g \omega^3} - 1}$$

Преобразуем первое слагаемое знаменателя подобно тому, как это было проведено в предыдущем случае (при $i > 0$). Будем иметь для знаменателя

$$\frac{\alpha C^2 i_{кр} B}{g \omega^2 \omega C^2} \frac{\chi K^2_{кр}}{\chi} - 1 = \frac{\alpha C^2 i_{кр} B}{g} \frac{K^2_{кр}}{\chi K^2} - 1$$

Так, получим:

$$\frac{dh}{ds} = i_{кр} \frac{(K_{кр}/K)^2}{\frac{\alpha C^2 i_{кр} B}{g} \left(\frac{K_{кр}}{K} \right)^2 - 1} \quad (10.24)$$

Обозначив $\frac{\alpha C^2 i_{кр} B}{g} \frac{K_{кр}}{\chi} = j_{кр}$ и разделив числитель и знаменатель на $(K_{кр}/K)^2$, получим:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i_{кр}}{j_{кр} - (K/K_{кр})^2} = \frac{i_{кр}}{j_{кр} - (h/h_{кр})^2}$$

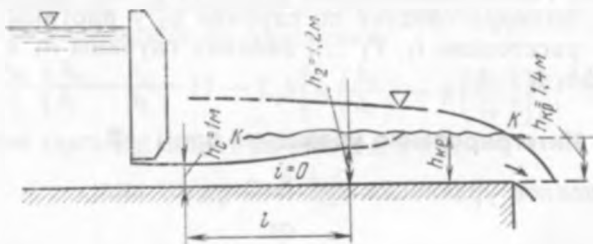


Рис. 10.15.

а затем, введя новую переменную $\xi = h/h_{кр}$ (при этом $dh = h_{кр} d\xi$), найдем окончательно

$$\frac{h_{кр} d\xi}{ds} = \frac{i_{кр}}{j_{кр} - \xi^2}$$

или

$$\frac{ds}{h_{кр}} = (j_{кр} - \xi^2) d\xi \quad (10.25)$$

Интегрируя, находим

$$\frac{i_{кр}(s_2 - s_1)}{h_{кр}} = j_{кр}(\xi_2 - \xi_1) - \frac{\xi_2^{x+1} - \xi_1^{x+1}}{x+1}.$$

Во многих случаях можно принять $j_{кр} \approx 1,0$, а тогда получим очень простую и удобную формулу для практических расчетов

$$\frac{i_{кр}l}{h_{кр}} = \xi_2 - \xi_1 - \frac{\xi_2^{x+1} - \xi_1^{x+1}}{x+1}. \quad (10.26)$$

Если принять гидравлический показатель русла $x=3$ (как для широкого русла прямоугольного сечения), то получим еще более простое выражение

$$\frac{i_{кр}l}{h_{кр}} = \xi_2 - \xi_1 - 0,25(\xi_2^4 - \xi_1^4). \quad (10.26a)$$

Определение l или $\xi_1(\xi_2)$ при заданных прочих величинах не вызывает затруднений (рис. 10.15).

10.4.3. Интегрирование уравнения при $i < 0$

Опуская вычисления и разъяснения, приводим результативное уравнение

$$\frac{l'l}{h'^2_0} = -\zeta_2 + \zeta_1 + (1 + j_{кр})[\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)], \quad (10.27)$$

где $\zeta_1 = h_1/h'_0$ и $\zeta_2 = h_2/h'_0$;

$$j_{кр} = \frac{\alpha C^2 i_{кр}}{g} \frac{B}{\chi}$$

$$\varphi(\xi) = \int \frac{d\xi}{1 + \xi^x} + C.$$

Этот интеграл табулирован так же, как табулирован аналогичный интеграл к уравнению (10.22).

На практике часто используют различные приближенные методы, основанные на методе конечных разностей.

Учитывая, что правая часть основного уравнения (10.8) представляет собой $F(h)$, можно написать $\frac{dh}{ds} = F(h)$ или в конечных разностях

$$\Delta s = \Phi(h) \Delta h.$$

Вычисления могут производиться методом Эйлера, методом трапеций и другими методами.

Интересным является метод¹, заключающийся в том, что $\Phi(h)$ определяется при $h=h_{cp}=\frac{h_1+h_2}{2}$ и вычисления производятся по формуле

$$l=\Sigma\Phi(h)\Delta h.$$

10.5. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

Естественные русла характеризуются сложной, изменяемой на пути геометрической формой неоднородной поверхности и сменой уклона и направления течения.

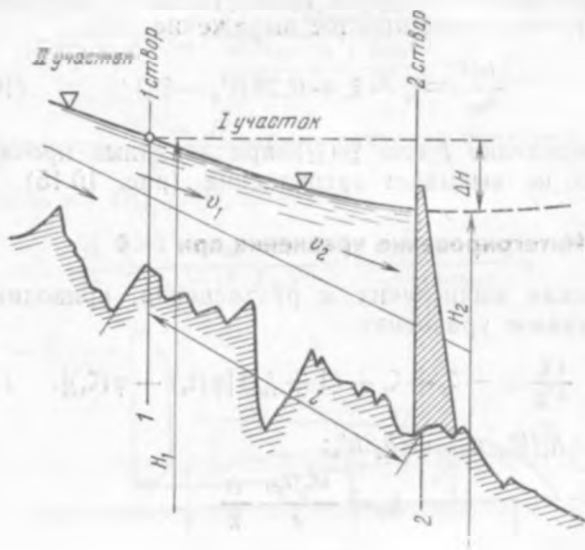


Рис. 10.16.

Поэтому установленные выше функциональные связи между параметрами потока могут применяться здесь с учетом некоторого приближения.

Для построения кривых подпора и спада существуют различные методы. Рассмотрим один из них — метод использования уравнения Бернулли.

¹ Зубов Л. Б., Ромадин В. А., Цветков А. А. О построении кривых свободной поверхности потока в открытых призматических руслах. — Гидротехническое строительство, 1977, № 9.

Русло реки делят на ряд расчетных участков с более или менее однообразными характеристиками (преимущественно по уклону свободной поверхности). Протяженность этих участков для одной и той же реки может быть приблизительно от 0,5 км до нескольких десятков километров. Затем на базе полевых изысканий для каждого из расчетных створов определяются $\omega = f_1(H)$ и $R = f_2(H)$, где H — отметка свободной поверхности ($H = z + h$) по рис. 10.16.

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений 1—1 и 2—2. Второе сечение для упрощения берем у проектируемой плотины, благодаря чему отметка H_2 известна. Итак,

$$H_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w. \quad (10.28)$$

Потерянный напор на участке от первого до второго створа определим по формуле Шези

$$h_{w1-2} = il = \frac{Q^2}{(\omega C V R)^2_{cp}} l = \frac{Q^2}{K^2_{cp}} l,$$

где значение K_{cp} можно определить, например, как среднеарифметическое значение расходной характеристики K_1 на первом створе (верхнем по течению) при отметке H_1 (рис. 10.16) и K_2 на втором (при H_2):

$$K_{cp} = \frac{K_1 + K_2}{2}.$$

После подстановки уравнение (10.28) для участка 1 запишем так:

$$\Delta H_1 = H_1 - H_2 = \frac{\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{Q^2}{(K_1 + K_2)^2} l. \quad (10.29)$$

Из этого уравнения методом последовательного приближения и определяется ΔH_1 (или H_1).

На практике величиной $\frac{\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2}{2g}$ можно пренебречь по малости в сравнении с h_{w1-2} и уравнение (10.29) написать проще:

$$\Delta H_1 = \frac{4Q^2}{(K_1 + K_2)^2} l. \quad (10.29a)$$

Закончив вычисление ΔH_1 , т. е. определив отметку свободной поверхности H_1 , переходят к расчету второго участка (вышележащего), пользуясь теми же уравнениями (10.29) или (10.29а). И далее, произведя расчеты по участкам и переходя от нижнего к соседнему верхнему, находят отметки свободной поверхности для всего ряда промежуточных створов реки, что и позволяет построить искомую кривую подпора.

З а м е ч а н и е. При определении кинематических и других параметров открытых потоков при неравномерном движении (также и при равномерном) точность результатов в значительной мере зависит от знания точных значений различных факторов, определяющих гидравлические сопротивления (шероховатость, геометрическая форма русла). Поэтому необходимо накопление данных исследований для установления точных исходных расчетных величин.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК

11.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Гидравлическим прыжком называется резкий переход от глубины потока меньше критической к глубине больше критической (рис. 11.1). Гидравлический прыжок может быть или с образованием поверхностного вальца, как показано на рис. 11.1, или



Рис. 11.1.

без вальца в форме затухающей волновой поверхности — прыжок-волна (рис. 11.2). В первом случае гидравлический прыжок называют совершенным.

Основные геометрические элементы совершенного гидравлического прыжка:

глубины h_1 и h_2 — глубины до и за прыжком, их называют сопряженными;

высота прыжка $\Delta h = h_2 - h_1$ — разность сопряженных глубин;

длина прыжка l_p — длина горизон-



Рис. 11.2.

тальной проекции поверхностного вальца (рис. 11.1).

Точку M называют точкой раздела.

Длиной прыжка иногда называют не длину l_p , а длину $l'_p > l_p$ (рис. 11.1), т. е. расстояние от начала прыжка до того створа $n-n$, где заканчивается изменение эпюры распределения скоростей по высоте и устанавливается существующее их распределение в нижнем бьефе.

Возникновение гидравлического прыжка объясняется тем, что плавный переход от глубины $h_1 < h_{кр}$ к глубине $h_2 > h_{кр}$, т. е. с образованием кривой подпора ($h_2 > h_1$), физически невозможен. Известно, что кривая подпора (так же как и кривая спада) не может пересекать ни линию критической $k-k$, ни нормальной $n-n$ глубины, оставаясь всегда в пределах только одной зоны (или зоны A , или зоны B , или зоны C), см. рис. 10.8.

В связи с этим переход от $h_1 < h_{кр}$ к $h_2 > h_{кр}$ происходит в форме гидравлического прыжка, особой формы движения жидкости, удовлетворяющей основному условию движения реальной жидкости — движения с непрерывным уменьшением энергии данной ее массы.

11.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЫЖКА В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Основным вопросом теории гидравлического прыжка является установление связи между сопряженными глубинами.

Воспользуемся уравнением импульсов. Как обычно, двумя сечениями 1—1 и 2—2 выделим массу жидкости, для которой и составим уравнение импульсов.

За время dt масса займет новую позицию от сечения $1'-1'$ до сечения $2'-2'$ (рис. 11.3).

Приращение количества движения выделенной массы равно:

$$\Delta(m\bar{u}) = [\kappa. \text{ л}(b) + \kappa. \text{ л}(c)]_{t+\Delta t} - [\kappa. \text{ л}(a) + \kappa. \text{ л}(b)]_t.$$

Для установившегося движения

$$\kappa. \text{ л}(b)_{t+\Delta t} = \kappa. \text{ л}(b)_t,$$

и приращение количества движения выделенной массы определится как разность

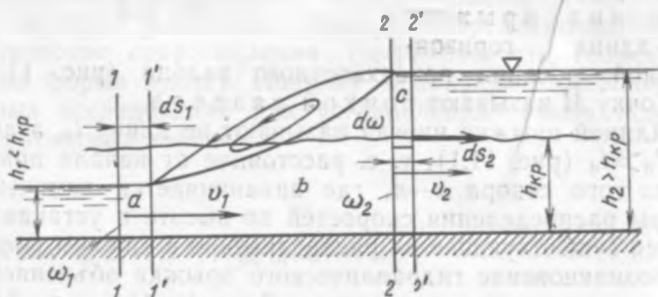


Рис. 11.3.

$$\Delta(m\bar{u}) = \kappa. \text{ л}(c) - \kappa. \text{ л}(a).$$

Определим $\kappa. \text{ л}$ области c , т. е. $\kappa. \text{ л}(c)$:

$$\kappa. \text{ л}(c) = \rho a_0 \omega_2 v_2 dt v_2 = \rho a_0 dt \omega_2 v_2^2.$$

Аналогично запишем $\kappa. \text{ л}(a)$, и тогда приращение количества движения массы m составит:

$$\Delta(mu) = \rho a_0 dt (\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2). \quad (11.1)$$

Здесь принято $a_{01} \approx a_{02} \approx a_0$.

Действующими силами являются силы P_1 и P_2 — силы давления на торцевые сечения $1-1$ и $2-2$; сила веса G данной массы и F — сила сопротивления — реакция неподвижного русла. Итак, в проекциях на ось движения или, пренебрегая уклоном русла (т. е. считая его горизонтальным) в проекциях на горизонтальную ось, получаем сумму импульсов в таком виде:

$$\Sigma P \cos \alpha dt = (P_1 - P_2 - F) dt. \quad (11.2)$$

Обычно пренебрегают и силой сопротивления русла F по малости в сравнении с силами P_1 и P_2 , и тогда уравнение импульсов получаем в виде

$$\rho \alpha_0 dt (\omega_2 u_2^2 - \omega_1 u_1^2) = (P_1 - P_2) dt. \quad (11.3)$$

Если принять во внимание, что

$$\omega_2 v_2 = \omega_1 v_1 = Q,$$

а по законам гидростатики $P_1 = \rho g \omega_1 y_1$; $P_2 = \rho g \omega_2 y_2$ (y_1, y_2 — соответственно глубины погружения центра тяжести площади ω_1 и ω_2), то уравнение (11.3) (после сокращения на dt) примет вид:

$$\rho \alpha_0 Q^2 \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1} \right) = \rho g (\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2).$$

Затем деля на ρg и распределяя слагаемые по их индексам, окончательно получаем:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_1} + y_1 \omega_1 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_2} + y_2 \omega_2. \quad (11.4)$$

Это есть основное уравнение гидравлического прыжка.

Поскольку ω и y являются функциями глубины $\omega = \omega(h)$ и $y = y(h)$, а остальные величины постоянны, можно записать:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega} + y \omega = \Pi(h). \quad (11.5)$$

Функцию $\Pi(h)$ называют прыжковой функцией, и тогда основное уравнение можно записать в краткой форме

$$\Pi(h_1) = \Pi(h_2), \quad (11.6)$$

что можно прочесть так: прыжковые функции сопряженных глубин равны между собой.

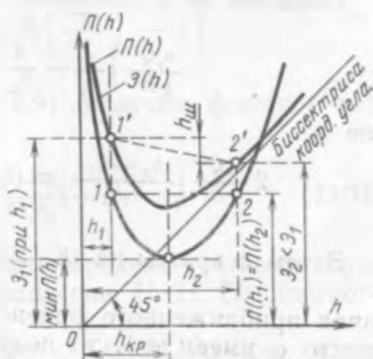


Рис. 11.4.

Определение второй сопряженной глубины h_2 при заданной глубине h_1 производится непосредственно по уравнению (11.4). Так, вычислив $\Pi(h_1)$, получим:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_2} + y_2 \omega_2 = \Pi(h_1),$$

откуда и находим h_2 , например, графическим путем — путем построения графика прыжковой функции $\Pi(h)$ (рис. 11.4).

Прыжковая функция $\Pi(h) = (\alpha_0 Q^2) / (g \omega) + y \omega$ имеет минимум, так как, оставаясь большей нуля, изменяется от $+\infty$ при $h \rightarrow 0$ до $+\infty$ при $h \rightarrow \infty$ (рис. 11.4).

Определяя производную $\frac{d\Pi}{dh}$ и приравнявая ее нулю $\frac{d\Pi}{dh} = 0$, находим, что минимальное значение $\Pi(h)_{\min}$ имеет место (если принять $\alpha \approx \alpha_0$) при $h \approx h_{кр}$, так же как и для кривой удельной энергии сечения $\mathcal{E}(h) = h + \frac{\alpha u^2}{2g}$ (рис. 11.4).

Для прямоугольных русл сопряженную глубину h_2 можно определить, зная h_1 , по формуле, которую найдем из (11.4). Поскольку $\omega = Bh$, а $y = h/2$, то после соответствующих подстановок получим:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g B h_1} + \frac{h_1}{2} B h_1 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g B h_2} + \frac{h_2}{2} B h_2.$$

Разделив на B , запишем:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g B^2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}$$

или

$$2 \frac{\alpha_0 Q^2}{g B^2} \left(\frac{h_2 - h_1}{h_2 h_1} \right) = (h_2 - h_1) (h_2 + h_1).$$

Затем сократим на $(h_2 - h_1)$, а поскольку $\frac{\alpha_0 Q^2}{g B^2} \approx h_{кр}^2$

(знак приближенного равенства поставлен потому, что вместо α имеем α_0), то получим квадратное уравнение

$$h_1 h_2^2 - h_2^2 h_2 - 2 h_{кр}^3 = 0 \quad (11.7)$$

Решим уравнение (11.7) и найдем

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{кр}}{h_1} \right)^3} - 1 \right], \quad (11.8)$$

или (квадратное уравнение является симметричным)

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{кр}}{h_2} \right)^3} - 1 \right]. \quad (11.8a)$$

11.3. ПОТЕРИ НАПОРА. ДЛИНА ПРЫЖКА

Потери напора в гидравлическом прыжке для прямоугольного русла можно найти, воспользовавшись уравнением Бернулли и уравнением прыжка. Преобразовывая уравнение Бернулли, можем написать:

$$h_1 + \frac{\alpha Q^2}{g B^2 2 h_1^2} = h_2 + \frac{\alpha Q^2}{g B^2 2 h_2^2} + h_w, \quad (11.9)$$

так как $(\alpha Q^2)/(g B^2) = h_{кр}^3$, то из уравнения (11.9) найдем

$$h_w = \frac{h_{кр}^3}{2 h_1^2} - \frac{h_{кр}^3}{2 h_2^2} - (h_2 - h_1).$$

Определив затем $h_{кр}^3$ из уравнения (11.8)

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{кр}}{h_1} \right)^3} - 1 \right]$$

и подставив в уравнение (11.9), получим формулу для определения потерь напора:

$$h_w = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}. \quad (11.10)$$

Длина прыжка обычно определяется по эмпирическим формулам М. Д. Чертоусова, Н. Н. Павловского и других ученых [18, 22].

Можно рекомендовать формулу О. М. Айвазяна, полученную теоретическим путем на основе гипотезы о том, что длина прыжка должна быть такой, на протяжении

которой потери напора достигают значения, определяемого по формуле (11.10):

$$l = k \frac{(h_2 - h_1)^2}{4h_1 h_2}, \quad (11.11)$$

где

$$k = 8 \frac{10 + \sqrt{Fr}}{Fr}.$$

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ

Подпорное сооружение на реке делит ее на два участка: верхний и нижний бьеф. Течение потока при переходе из верхнего в нижний бьеф называют сопряжением бьефов. Иногда под сопряжением бьефов понимают совокупность технических мероприятий, связанных с переводом потока из верхнего в нижний бьеф.

На практике различают два вида сопряжения — сопряжение при смене уклона и сопряжение при подпорном сооружении.

12.1. СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ ПРИ СМЕНЕ УКЛОНА

Известно, что при разных уклонах дна нормальная глубина h_0 будет различной, и чем меньше уклон, тем больше нормальная глубина. Поэтому если уклон в нижнем бьефе меньше, чем в верхнем, то возникнет кривая подпора, в противном случае — кривая спада (рис. 12.1, случаи 1 и 2).

Сопряжение бьефов при смене уклона $i < i_{кр}$ в верхнем бьефе на уклон $i > i_{кр}$ в нижнем бьефе показано на рис. 12.1, случай 3.

Рассмотрим более сложный случай сопряжения переход от уклона $i > i_{кр}$ к уклону $i < i_{кр}$ (переход от бурного потока к спокойному). В таких условиях образуется гидравлический прыжок. На рис. 12.1, случай 4 приведены различные формы гидравлического прыжка: I — прыжок отогнан; II — прыжок в критическом положении; III — прыжок надвинут.

Определим местоположение и высоту прыжка. Допустим, что прыжок образовался непосредственно у раздельного створа. В таком случае бытовая глубина нижнего бьефа будет сопряженной с глубиной верхнего бьефа, которую можно считать равной глубине сжатого сечения.

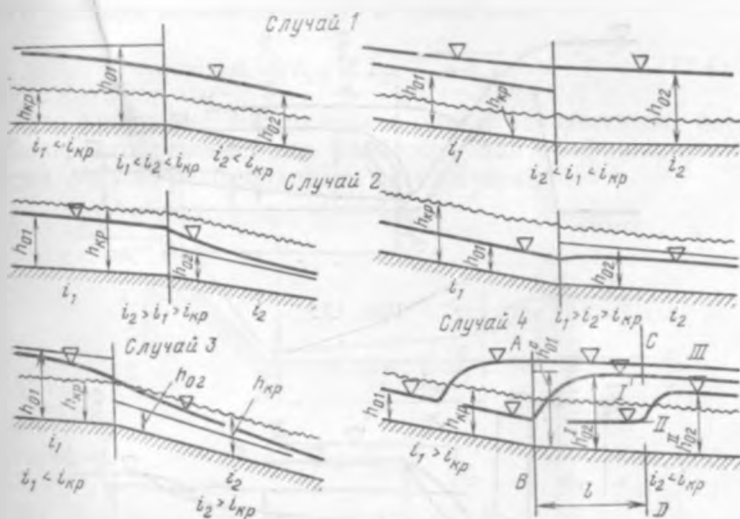


Рис. 12.1.

Назовем глубину, сопряженную с глубиной сжатого сечения, раздельной глубиной, тогда она определится по формуле

$$h_{\text{раз}} = \frac{h_c}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{\text{кр}}}{h_c} \right)^3} - 1 \right]. \quad (12.1)$$

Итак, бытовая глубина равна глубине раздельной.

Очевидно, что если бы глубина нижнего бьефа была меньше $h_{\text{раз}}$, то прыжок переместился бы вниз по течению и наблюдался бы отгон прыжка и, наоборот, прыжок переместился бы в верхний бьеф, если $h_{02} > h_{\text{раз}}$.

Таким образом, для определения местоположения прыжка имеем критерий

$$h_{\text{раз}} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} h_0; \quad (12.2)$$

если $h_{\text{раз}} > h_0$ — прыжок сместится вниз по течению,
если $h_{\text{раз}} < h_0$ — прыжок переместится вверх по течению.

12.2. СОПРЯЖЕНИЕ БЬЕФОВ ПРИ ПЕРЕГОРАЖИВАЮЩЕМ СООРУЖЕНИИ¹

Рассмотрим сопряжение за водосливной плотиной. Возможны три случая сопряжения (рис. 12.2): I — прыжок отогнан; II — прыжок находится в критическом положении (надвинут); III — прыжок затоплен.

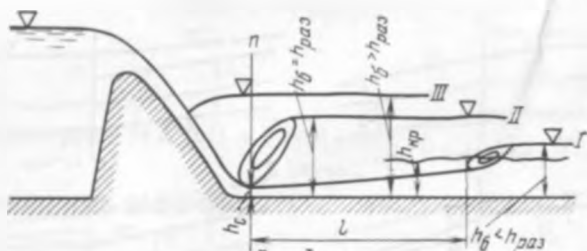


Рис. 12.2.

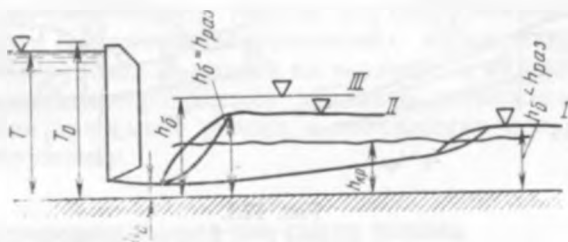


Рис. 12.3.

Критерием того, какая из этих трех форм будет иметь место, служит неравенство

$$h_б \gtrless h_{раз}. \quad (12.3)$$

Очевидно, что и в данном случае, если $h_б < h_{раз}$, то прыжок отогнан, если $h_б = h_{раз}$, то прыжок в критическом состоянии, т. е. возникает непосредственно у подошвы плотины, если $h_б > h_{раз}$ — прыжок затоплен.

Заметим, что этот критерий остается в силе и в том случае, если истечение происходит из-под затвора (рис. 12.3).

¹ Рассмотрение данного вопроса ведется в рамках плоской задачи.

В обоих случаях расчеты сводятся к вычислениям глубины сжатого сечения и раздельной глубины. Определим глубину сжатого сечения при переливе воды через плотину.

Пусть заданы: удельный расход q , напор $T_0 = T + \alpha v_0^2/2g$, где v_0 — скорость подхода.

Для сжатого сечения h_c (рис. 12.2) уравнение удельного расхода можно записать в таком виде:

$$q = h_c v_c = h_c \varphi \sqrt{2g(T_0 - h_c)}. \quad (12.4)$$

Это уравнение 3-й степени с одним неизвестным h_c . Обычно его решают или подбором, или графоаналитически. Можно рекомендовать метод итераций.

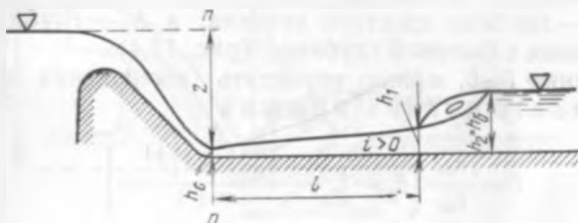


Рис. 12.4.

Из уравнения (12.4) имеем:

$$h_c = \frac{q}{\varphi \sqrt{2g(T_0 - h_c)}}. \quad (12.5)$$

Так как глубина h_c мала по сравнению с T_0 , то, приняв ее в знаменателе правой части за нуль, найдем h_c в первом приближении по формуле (12.5):

$$h'_c = \frac{q}{\varphi \sqrt{2gT_0}}. \quad (12.6)$$

Далее, во втором приближении учтем найденное значение первого приближения и тогда получим формулу для определения глубины сжатого сечения

$$h''_c = \frac{q}{\varphi \sqrt{2g(T_0 - h'_c)}}. \quad (12.7)$$

Обычно при более или менее высоких плотинах третье приближение не требуется.

После того как глубина сжатого сечения определена, раздельная глубина находится как ей сопряженная по формуле

$$h_{\text{раз}} = \frac{h_c}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{\text{кр}}}{h_c} \right)^3} - 1 \right].$$

Если $h_6 < h_{\text{раз}}$, то прыжок отогнан. Дальность отгона прыжка найдем по общей формуле

$$\frac{l}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - j_c) [\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)].$$

При использовании этой формулы надо иметь в виду, что $\eta_2 = h_2/h_0$; $\eta_1 = h_1/h_0$, где h_0 — нормальная глубина; $h_1 = h_c$ — глубина сжатого сечения, а h_2 — глубина, сопряженная с бытовой глубиной (рис. 12.4).

Приняв $i \approx 0$, можно упростить вычисления, и тогда дальность отгона прыжка

$$l = \frac{h_{\text{кр}}}{i_{\text{кр}}} \left[\xi_2 - \xi_1 - \frac{\xi_2^{x+1} - \xi_1^{x+1}}{x+1} \right]. \quad (12.8)$$

Если поток переходит из верхнего бьефа в нижний путем истечения из-под затвора, то вопрос о сопряжении бьефов решается так же, как и в предыдущем случае.

12.3. ВОДОБОЙНЫЙ КОЛОДЕЦ И ВОДОБОЙНАЯ СТЕНКА

В обычных случаях отгон прыжка вызывает опасение размыва русла. Для устранения отгона прыжка устраивают водобойные колодцы, водобойные стенки и другие устройства — гасители энергии.

Если водобойный колодец (рис. 12.5) устроен достаточной глубины и длины, то схема течений устанавливается такой, как показана на рис. 12.5. В этом случае гидравлический прыжок размещается в колодце, и из него поток выходит с глубиной, равной бытовой глубине нижнего бьефа. При недостаточной глубине или длине колодца бурный поток вылетает из колодца, и он не отвечает своему назначению.

Расчет водобойного колодца, очевидно, заключается в определении необходимой его глубины d и длины l .

В нормальных условиях работы водобойного колодца глубина воды в нем должна быть не меньше глубины

раздельной, т. е. не меньше сопряженной с глубиной h_c у дна колодца:

$$h_{\text{кол}} \geq \frac{h_c}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{\text{вх}}}{h_c} \right)^3} - 1 \right].$$

Вместе с тем эта глубина равна:

$$h_{\text{кол}} = d + h_6 + \Delta z. \quad (12.9)$$

Или, иначе, вводя по Чертоусову коэффициент запаса σ ($\sigma = 1,05 - 1,10$), получаем:

$$h_{\text{кол}} \approx \sigma h_{\text{раз}} = d + h_6 + \Delta z.$$

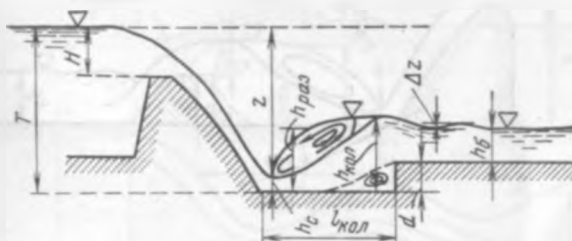


Рис. 12.5.

Итак, для определения необходимой глубины колодца d имеем уравнение

$$d = \sigma \left\{ \frac{h_c}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{\text{вх}}}{h_c} \right)^3} - 1 \right] - h_6 - \Delta z \right\}. \quad (12.10)$$

Здесь h_c определяется в соответствии с (12.5):

$$h_c = \frac{q}{\varphi \sqrt{2g(T_0 + d - h_c)}},$$

а Δz определяется как перепад при входе в канал:

$$\Delta z = \frac{v_6^2}{\varphi^2 2g} - \frac{v_{\text{кол}}^2}{2g} = \frac{q^2}{\varphi^2 2g h_6^3} - \frac{q^2}{2g h_{\text{кол}}^3}.$$

Числовое определение величины d производится методом последовательного приближения (или графоаналитически), на чем останавливаться здесь не будем.

Длина колодца $l_{\text{кол}}$ для рассматриваемой схемы определяется по условию размещения гидравлического прыжка в колодце:

$$l_{\text{кол}} = l_{\text{пр}} + l_{\text{зап.}}$$

Но практика строительства показала, что колодец может быть и меньшей длины. По рекомендации Н. Н. Павловского длину колодца можно принять

$$l_{\text{кол}} = 0,8 l_{\text{пр}}. \quad (12.11)$$

Гидравлический расчет водобойной стенки (рис. 12.6), как и водобойного колодца, ограничивается определением высоты стенки и расстоянием, на котором надлежит установить стенку.

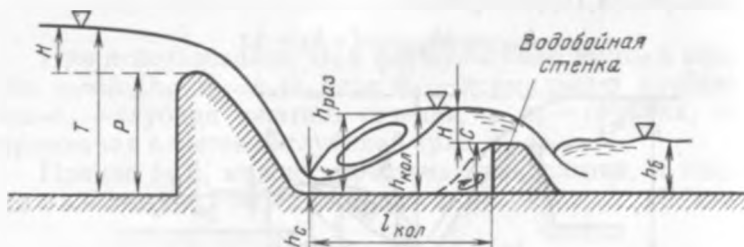


Рис. 12.6.

Расчеты здесь несколько проще, так как определение глубины воды в образуемом стенкой водоеме $h_{\text{кол}}$ производится просто, как раздельной глубины:

$$h_{\text{кол}} = h_{\text{раз}} = \frac{h_c}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_{\text{кр}}}{h_c} \right)^3} - 1 \right],$$

причем глубина сжатого сечения находится по известной формуле

$$h_c = \frac{q}{\sqrt[3]{2g(T_s - h_c)}}.$$

Поскольку $h_{\text{кол}} = \sigma h_{\text{раз}}$, высоту стенки s находим из условий пропуска заданного расхода q через стенку как через водослив:

$$\sigma h_{\text{раз}} = H + s$$

и

$$s = \sigma h_{\text{раз}} - H,$$

где напор H водослива определяется из известной формулы

$$q = m \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

12.4. ВОДОСЛИВНАЯ ПЛОТИНА С НОСКОМ НА СЛИВНОЙ ГРАНИ

В зависимости от сбросного расхода Q , глубины верхнего бьефа T , бытовой глубины h_b , высоты носка p и угла α (рис. 12.7) течение потока в нижнем бьефе (непосредственно за плотиной) может осуществляться по двум схемам.

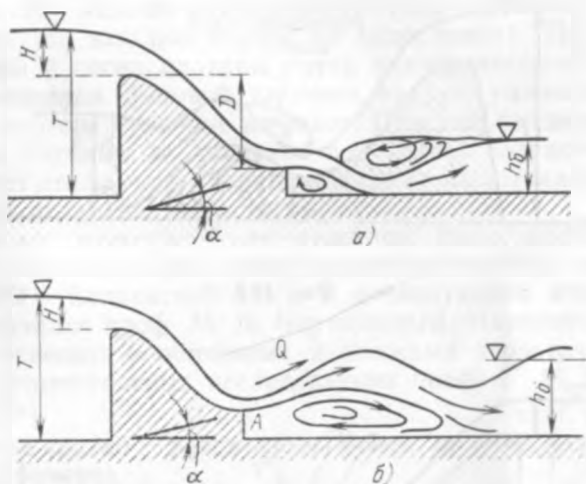


Рис. 12.7.

Схема I. Основное течение с расходом Q сосредоточено у дна и покрыто вальцом (затопленный прыжок), как указано на рис. 12.7,а.

Схема II. Основное течение сосредоточено у поверхности, а под ним у плотины образуется донный валец (рис. 12.7,б).

Эти два характерных течения в нижнем бьефе очень часто именуют донным и поверхностным режимом.

В реальных условиях наблюдаются дополнительные сопутствующие явления, например при поверхностном режиме может образоваться ниже по течению поверхностный валец и др.

Последовательность этих режимов такова.

Допустим, что при данном расходе Q и глубине нижнего бьефа h_b имеем затопленный гидравлический прыжок, т. е. донный режим (рис. 12.7,а). При увеличении глубины h_b донный режим сохраняется до тех пор, пока

эта глубина не достигнет некоторого значения, при котором донный режим переходит в поверхностный. Состояние потока при этой глубине называют первым критическим режимом, а глубину — первой критической глубиной, обозначим ее $h_{\text{кр}}^*$.



Рис. 12.8.

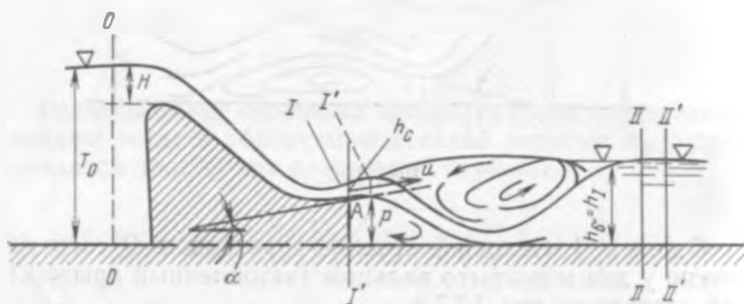


Рис. 12.9.

При дальнейшем увеличении глубины нижнего бьефа поверхностный режим сохраняется, пока глубина не достигнет второй критической глубины (обозначим $h_{\text{IIкр}}$), при которой волна не свободной поверхности приобретает наибольшую высоту и, как бы опрокидываясь в сторону против течения, образует у водосливной грани плотины поверхностный валец (рис. 12.8). Состояние потока при этой глубине $h_{\text{IIкр}}$ называют вторым критическим режимом.

* Не смешивать с $h_{\text{кр}}$, отвечающей минимуму удельной энергии сечения $\mathcal{E}_{\text{мин}}$.

Итак, поверхностный режим сохраняется в пределах от первого критического состояния до второго, от первой и до второй критической глубины.

Рассмотрим кратко, почему донный режим переходит в поверхностный.

При донном режиме давление в точке A (рис. 12.9) оказывается меньше атмосферного (под струей образуется вакуум, как под струей за водосливом). Поэтому сходящий с носка плотины поток прижимается ко дну. С увеличением бытовой глубины вакуум уменьшается и при некоторой глубине исчезает. При дальнейшем увеличении глубины h_b давление под струей возрастает и вызывает отклонение сходящего с плотины потока вверх, создавая поверхностный режим.

Впервые изучение этих режимов было проведено А. А. Сабаневым при проектировании первенца плана ГОЭЛРО — Волховской ГЭС. В последующем этот вопрос изучался проф. М. Д. Чертоусовым. Наиболее полно он освещен в обширных и сложных теоретических и экспериментальных исследованиях проф. С. М. Слесского [19].

Здесь кратко рассмотрим более простое решение А. А. Сабанеева.

При заданном расходе Q , глубине верхнего бьефа T и соответствующей глубине нижнего бьефа h_b переход от донного режима к поверхностному зависит от высоты уступа p и угла α (рис. 12.9). Бытовая глубина при этом является первой критической глубиной $h_b = h_{кр}$. Требуется определить p и α .

Воспользуемся уравнением об изменении количества движения (уравнением импульсов)

$$\Delta(mv) = \Sigma R \cos \beta \Delta t. \quad (12.12)$$

Двумя сечениями $I—I$ и $II—II$ выделим массу жидкости (рис. 12.9), по отношению к которой запишем уравнение (12.12).

По истечении времени Δt выделенная масса жидкости переместится и займет положение между сечениями $I'—I'$ и $II'—II'$. Тогда при установившемся движении изменение количества движения выделенной массы

$$\Delta(mv) = \rho h v \Delta t v - \rho h_c u \Delta t u \cos \alpha,$$

или поскольку $h v = h_c u = q$, где q — удельный расход (расход на единицу ширины русла), то

$$\Delta(mv) = \rho \Delta t q (v - u \cos \alpha). \quad (12.13)$$

Сумма импульсов внешних сил за это же время Δt равна:

$$\begin{aligned} \Sigma R \cos \beta \Delta t &= (P_1 - P_2) \Delta t = \left[\rho g \frac{(h_c \cos \alpha + p)^2}{2} - \rho g \frac{h^2}{2} \right] \Delta t = \\ &= \frac{\rho g \Delta t}{2} [(h_c \cos \alpha + p)^2 - h^2]. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Теперь можем написать все уравнение (12.12) в целом

$$\rho \Delta t q (v - u \cos \alpha) = \frac{\rho g \Delta t}{2} [(h_c \cos \alpha + p)^2 - h^2]$$

или, разделив на $\rho g \Delta t / 2$ и с учетом $v = q/h$, а $u = q/h_c$, написать так:

$$\frac{2q^2}{g} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h_c} \cos \alpha \right] = (h_c \cos \alpha + p)^2 - h^2. \quad (12.15)$$

Если угол α рассматривать как параметр, то имеем два неизвестных p и h_c . Очевидно, требуется еще одно уравнение (независимое от первого). Таковым будет уравнение Бернулли для сечения 0—0 и 1—1 (рис. 12.9):

$$T_0 = p + h_c \cos \alpha + \frac{u^2}{2g} + \zeta \frac{u^2}{2g}$$

или, так как $u = q/h_c$, то же уравнение в таком виде:

$$p = T_0 - h_c \cos \alpha - (1 + \zeta) \frac{q^2}{2gh_c^2}. \quad (12.16)$$

Итак, для определения p и h_c имеем два уравнения

$$F_1(p, h_c) = 0;$$

$$F_2(p, h_c) = 0.$$

Первое уравнение (12.15) квадратное относительно p . По предложению М. Д. Чертоусова проще всего эта система решается графоаналитически. Это видно из рис. 12.10.

Определение второй критической глубины $h_{\text{кр}}$ представляет сложную задачу. Не останавливаясь на ее решении, здесь приведем одну из самых простых эмпирических формул — формулу Т. Ч. Астафьевой, которую можно использовать для предварительных ориентировочных расчетов:

$$h_{\text{кр}} \approx 1,22p + 2,5 \frac{D-p}{D} h_{\text{кр}},$$

где $D = T_0 - H - p$ (см. рис. 12.7).

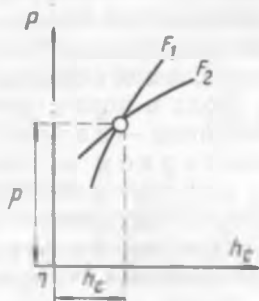


Рис. 12.10

Ограничиваясь этими краткими сведениями относительно вопросов сопряжения бьефов, отметим, что в практике гидротехнического строительства встречается множество иных схем сопрягающих сооружений, простые и многоступенчатые перепады, различные быстротоки и др. Расчеты таких случаев приводятся в специальной литературе [18, 19, 21, 22]

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД (ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ)

13.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В естественных условиях грунт представляет собой сложную неоднородную пористую среду, структура которой изменяется во времени (хотя и медленно) под воздействием геофизических факторов. Характеризовать грунт будем по крупности отдельных зерен, оценивая их по размеру условного диаметра. Так, условный диаметр глинистого грунта 0,005 мм; песка от 0,01 до 2 мм; гравийного грунта от 2 до 20 мм.

Пористость грунта характеризуется коэффициентом пористости

$$p = \frac{W_{\text{пор}}}{W},$$

где $W_{\text{пор}}$ — объем пор, а W — общий объем грунта с учетом пор. Чем мельче зерна грунта, тем коэффициент пористости больше. Например, для песка диаметром 1,0 мм $p \approx 0,3$, а для глины $p \approx 0,5$.

Вода в порах грунта может находиться в различном состоянии — парообразном, пленочном, капиллярном и гравитационном. Под термином гравитационная вода понимают ту ее массу, которая находится вне молекулярного взаимодействия твердых частиц грунта и жидких и может перемещаться под влиянием земного тяготения.

Ввиду сложности физического процесса движения жидкости в порах грунта процесс движения рассматривается как теоретическая модель реального потока, представляющая собой поток, занимающий все пространство грунта, включая пространство пор и пространство твердых частиц самого грунта, другими словами, эта модель представляет собой сплошную деформируемую среду, имеющую плотность ρ и динамическую вязкость μ данной жидкости.

Скорость фильтрации — это средняя скорость модельного потока. Следовательно, если площадь поперечного сечения грунта ω ($\omega = \omega_{\text{пор}} + \omega_{\text{зер}}$), то скорость фильтрации

$$v = \frac{Q}{\omega}, \quad (13.1)$$

где Q — действительный расход грунтового потока.

Истинная средняя скорость жидкости, проходящей через площадь $\omega_{\text{пор}}$, больше расчетной скорости фильтрации

$$v_{\text{ист}} = \frac{Q}{\omega_{\text{пор}}}. \quad (13.2)$$

Если коэффициент пористости $p = W_{\text{пор}}/W \approx \omega_{\text{пор}}/\omega$, то $\omega_{\text{пор}} = p\omega$ и тогда

$$v_{\text{ист}} = \frac{Q}{\omega_{\text{пор}}} = \frac{Q}{p\omega} = \frac{v}{p}$$

или скорость фильтрации $v = pv_{\text{ист}}$ ($p < 1,0$).

Фильтрационный расход Q определится по формуле, как и обычно,

$$Q = \omega v. \quad (13.3)$$

13.2. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ — ЗАКОН ДАРСИ

Скорость фильтрации и истинная скорость течения в порах весьма малы, поэтому течение в порах будет ламинарным¹ и скорость фильтрации будет пропорциональна гидравлическому уклону в первой степени, т. е.

$$v = k_{\varphi} I \quad (13.4)$$

Формула (13.4) именуется законом Дарси.

Здесь коэффициент k_{φ} — коэффициент фильтрации. Гидравлический уклон I — величина безразмерная, и, следовательно, коэффициент фильтрации имеет единицу измерения метр в секунду.

Формула Дарси позволяет записать формулу для фильтрационного расхода в виде равенства

$$Q = k_{\varphi} \omega I. \quad (13.5)$$

Эту формулу также называют формулой Дарси.

Коэффициент фильтрации k_{φ} определить теоретическим путем крайне сложно, поэтому его определяют или по эмпирическим формулам, или в лабораторных условиях на образцах грунта, или специальными исследованиями в полевых условиях.

Определение k_{φ} на образцах грунта в лаборатории производится по следующей схеме (рис. 13.1). Образец грунта помещается в цилиндр, через который пропускается некоторый расход Q . Измерив перепад $\Delta H = H_1 - H_2$ и расход Q , коэффициент фильтрации определяют по формуле

$$k_{\varphi} = \frac{Ql}{\omega(H_1 - H_2)},$$

где l — толщина слоя данного грунта в цилиндре.

Так как образцы грунта при доставке могут терять свою структуру, то точность результата может оказаться недостаточной. Более надежных результатов можно достигнуть в полевых исследованиях.

¹ Если предположить, что диаметр пор (условный) в среднем $d = 0,1$ см, а скорость течения $v = 0,1$ см/с, то $Re = 0,1 \cdot 0,1 / 0,01 = 1,0$ ($Re \ll 2300$).

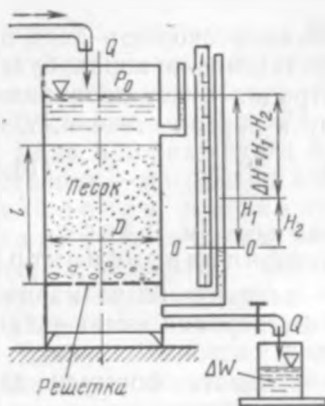


Рис. 13.1.

Для определения коэффициента фильтрации по эмпирической формуле может быть рекомендована формула Хазена

$$k_{\phi} = 0,75d(0,70 + 0,03\varphi). \quad (13.6)$$

В практике гидротехнического строительства встречаются случаи, когда фильтрующей средой является не грунт, а искусственные насыпные преграды с крупными порами, и тогда течение в них перестает быть ламинарным и закон Дарси неприменим. Н. Н. Павловским

предложен критерий допустимости использования закона Дарси в виде формулы для критической скорости

$$v_{кр} = \frac{(0,75\rho + 0,25) \text{ Rev}}{d}, \quad (13.7)$$

где ρ , ν и d — соответственно пористость грунта, кинематическая вязкость и диаметр зерен.

Движение грунтовых вод, так же как и движение других потоков жидкости, может быть напорным и безнапорным, равномерным и неравномерным, установившимся и не установившимся.

13.3. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Все вопросы о равномерном движении (рис. 13.2) решаются с помощью формулы Дарси (13.5)

$$Q = k_{\phi} \omega l.$$

Обычно это уравнение записывают иначе, вводя вместо Q удельный расход $q = Q/B$, тогда

$$q = k_{\phi} h. l. \quad (13.8)$$

Здесь возможны четыре задачи (по числу величин, входящих в уравнение), решение которых не требует пояснений.

13.4. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Основное дифференциальное уравнение движения. В соответствии с рис. 13.3 запишем для сечения $n-n$

$$z + h + \frac{v^2}{2g} = H \quad (13.9)$$

Кинетическая энергия грунтового потока $v^2/2g$ весьма мала. Так, при $k_v=0,05$ см/с и $l=0,5$ скорость $v=$

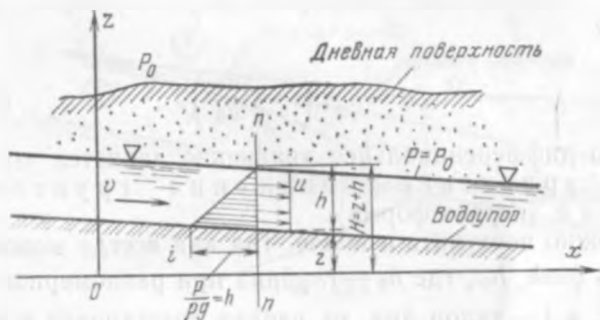


Рис. 13.2.

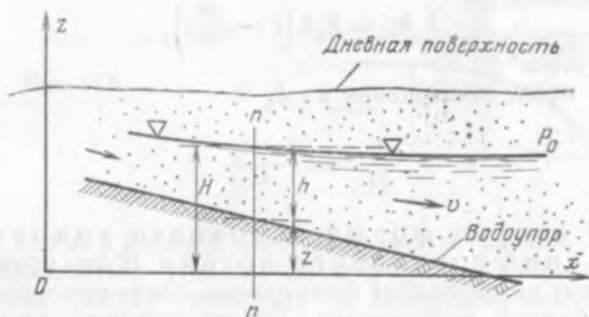


Рис. 13.3.

$=k_v l=0,025$ см/с, т. е. $v^2/2g$ в миллионы раз меньше $z+h$. Поэтому можно опускать величину $v^2/2g$, и тогда полный запас удельной энергии H в сечении $n-n$

$$H=z+h.$$

Продифференцировав и разделив на $-ds$, получим:

$$-\frac{dH}{ds} = -\frac{dz}{ds} - \frac{dh}{ds},$$

а так как $-dH/ds = i$ есть уклон свободной поверхности и $-dz/ds$ — уклон дна, то запишем:

$$I = i - \frac{dh}{ds}.$$

Подставив это выражение в уравнение расхода, получим:

$$Q = k_{\varphi} \omega \left(i - \frac{dh}{ds} \right)$$

или

$$q = k_{\varphi} h \left(i - \frac{dh}{ds} \right). \quad (13.10)$$

Это дифференциальное уравнение является основным уравнением движения грунтового потока (первая форма).

Можно поступить и иначе. Так как всегда можно написать $q = k_{\varphi} h_0 i$, где h_0 — глубина при равномерном движении, а i — уклон дна, то, сделав подстановку в левую часть (13.10), получим:

$$k_{\varphi} h_0 i = k_{\varphi} h \left(i - \frac{dh}{ds} \right),$$

откуда после сокращения на k_{φ}

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h - h_0}{h}. \quad (13.11)$$

Это вторая форма основного уравнения движения грунтового потока. В это уравнение не входит коэффициент фильтрации, следовательно, форма свободной поверхности (иначе говоря, депрессионной кривой) зависит только от граничных условий.

Форма свободной поверхности. Рассмотрим три случая: $i > 0$; $i = 0$ и $i < 0$.

1. При уклоне $i > 0$ (прямой уклон дна). На рис. 13.4 показана вспомогательная линия — линия нормальной глубины $n-n$. Здесь будут только две зоны: зона А и зона В. Зона С для грунтового потока исчезает, так как линия критической глубины сливается с линией дна. Критическая глубина $h_{кр} = v^2/g$, так же как и $v^2/2g$, весьма мала.

В зоне *A* глубина *h* больше нормальной ($h > h_0$), тогда по уравнению (13.11) получим $dh/ds > 0$, т. е. кривую подпора.

В зоне *B* глубина *h* меньше нормальной ($h < h_0$), тогда получим кривую спада. Предельные условия обеих линий аналогичны таковым для открытого потока, что видно на рис. 13.4.

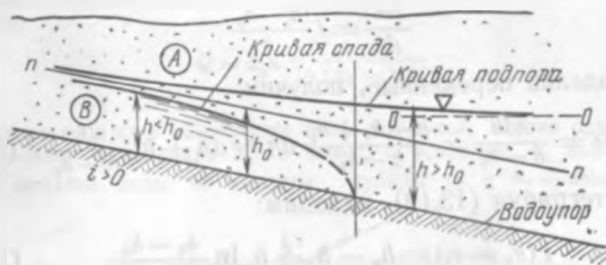
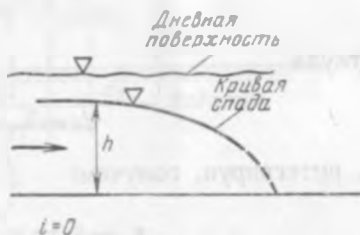


Рис. 13.4.

Рис. 13.5.



2. При уклоне $i=0$. Для этого случая следует воспользоваться уравнением в форме (13.10), так как формула (13.11) приводит к неопределенности типа $[0 \times \infty]$

$$q_* = k_* h_*^3 \left(i - \frac{dh}{ds} \right).$$

Из этого уравнения следует:

$$q = -k_* h \frac{dh}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dh}{ds} < 0,$$

т. е. получим только кривую спада (рис. 13.5,а). Повторно заметим, что при $i=0$ нормальная глубина $h_0 \rightarrow \infty$, и здесь будем иметь одну зону *B*, а зона *A* уходит в бесконечность.

3. При уклоне $i < 0$. Тогда

$$\frac{dh}{ds} = i - \frac{q}{k_{\varphi} h} < 0,$$

и получим также кривую спада (рис. 13.5).

Интегрирование основного дифференциального уравнения.

При уклоне $i > 0$. Имеем по (13.11)

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h_2^2 - h_0^2}{h^3}.$$

Разделив переменные, получим:

$$i ds = \frac{h dh}{h^3 - h_0^2} = \frac{h - h_0 + h_0}{h^3 - h_0^2} dh = d\bar{h} + h_0 \frac{dh}{h^3 - h_0^2}. \quad (13.12)$$

Интегрируя (13.12), находим:

$$i(s_2 - s_1) = h_2 - h_1 + h_0 \ln \frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0}. \quad (13.13)$$

При уклоне $i = 0$ имеем:

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{q}{k_{\varphi} h},$$

откуда

$$ds = -\frac{k_{\varphi}}{q} h dh,$$

и, интегрируя, получим:

$$s_2 - s_1 = -\frac{k_{\varphi}}{q} \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}. \quad (13.14)$$

Случай при уклоне $i < 0$ оставляем без рассмотрения.

Пример. Приток воды к грунтовому колодцу. Рассмотрим простейший случай — дно колодца в плоскости водоупора. Допустим, что в результате непрерывной откачки воды из колодца (рис. 13.6) достигнуто стационарное состояние притока при глубине воды в колодце h_0 и глубине H на большом расстоянии R от ося колодца. Определить приток Q . Пусть течение происходит только радиально к центру колодца, тогда поперечное сечение потока ω представляет собой площадь боковой поверхности кругового цилиндра с осью, совпадающей с осью колодца и радиусом $r = x$. Тогда

$$\omega = 2\pi r h,$$

расхо-

$$Q = \omega k_{\varphi} l = 2\pi x h k_{\varphi} \frac{dh}{dx}.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k_{\varphi}}{Q} h dh,$$

и после интегрирования

$$\ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{\pi k_{\varphi}}{Q} (h_2^2 - h_1^2).$$

Таким образом, расход, т. е. приток к колодезю, определится по формуле

$$Q = k_{\varphi} \pi \frac{h_2^2 - h_1^2}{\ln(x_2 - x_1)}.$$

Примечание. Пользуясь этой формулой, можно определить коэффициент фильтрации k_{φ} в полевых условиях; Q определяем путем откачки воды из колодезя, глубины h_2 и h_1 — измерением

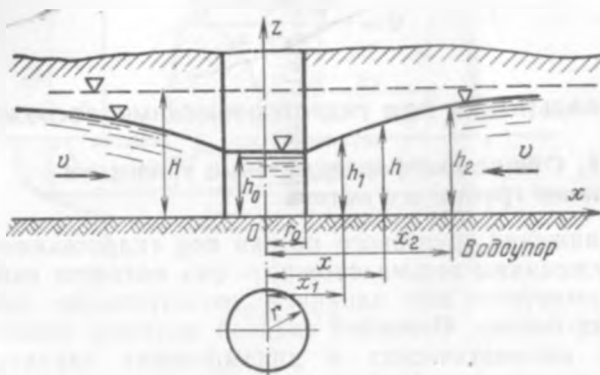


Рис. 13.6.

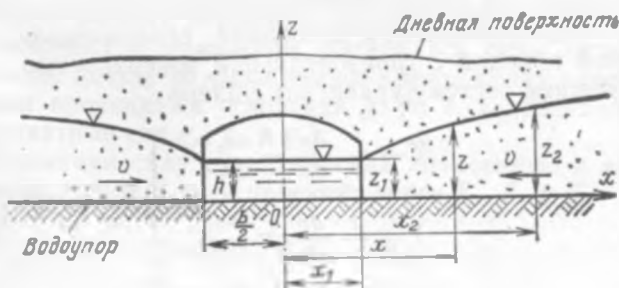


Рис. 13.7.

в специально заложенных буровых скважинах на расстоянии x_2 и x_1 от колодца, тогда

$$k_p = \frac{Q \ln \frac{x_2}{x_1}}{\pi (h_2^2 - h_1^2)}.$$

Пример. Приток к водосборной галерее. Расход, поступающий из области водонасыщенного грунта в водосборную галерею, определяется так же, как и приток к водосборному колодцу. Если поступление фильтрационного расхода в галерею предусматривать как двустороннее (рис. 13.7), то расход можно определить по формуле

$$Q = 2lk_p h \frac{dh}{dx},$$

откуда после интегрирования получим:

$$Q = \frac{k_p l (h_2^2 - h_1^2)}{x_2 - x_1}.$$

13.5. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

13.5.1. Общие дифференциальные уравнения движения грунтового потока

Движение грунтового потока под гидротехническими сооружениями весьма сложно — оно является напорным и формируется под влиянием геометрически сложных границ потока. Основной задачей является определение поля кинематических и динамических характеристик фильтрационного потока.

Рассмотрим задачу применительно к схеме, изображенной на рис. 13.8, где в качестве гидротехнического сооружения представлена водосливная бетонная плотина на водопроницаемом основании, ограниченном водопорной породой с горизонтальной поверхностью.

Запишем систему уравнения Эйлера

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Проекции ускорения фильтрационного потока малы, и ими можно пренебречь, т. е. можно принять $\frac{du_x}{dt} = \frac{du_y}{dt} = \frac{du_z}{dt} = 0$, и тогда уравнение Эйлера записать так:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (13.16)$$

Определим выражение для ускорений объемных сил X , Y и Z .

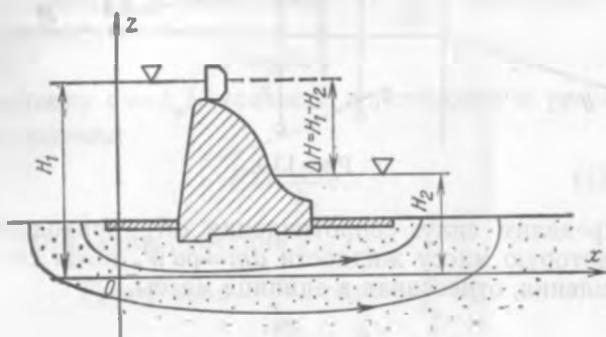


Рис. 13.8

К числу объемных сил в данном случае отнесем силы земного притяжения, а также (условно) силы сопротивления, которые являются непрерывными функциями координат в области движения фильтрационного потока.

Поскольку в уравнении Эйлера все силы отнесены к единице массы, то силы земного притяжения здесь выражены проекциями ускорения g (т. е. в проекциях на координатные оси g_x , g_y и g_z).

Обозначим силу сопротивления, отнесенную к единице массы, через F , а ее проекции через F_x , F_y и F_z . Тогда

$$\left. \begin{aligned} X &= g_x - F_x = -F_x; \\ Y &= g_y - F_y = -F_y; \\ Z &= g_z - F_z = -g - F_z. \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

В этих уравнениях g_x и g_y приняты равными нулю, а $g_z = -g$, так как предусматривается вертикальное расположение координатной оси Oz и горизонтальное для осей Ox и Oy .

Проекции F_x , F_y и F_z найдем следующим образом.

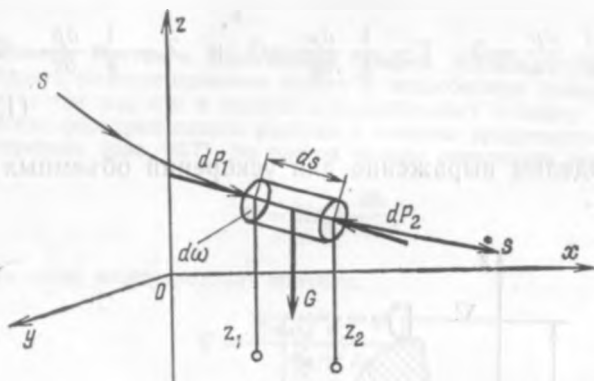


Рис. 13.9.

Определим силу сопротивления dR , приходящуюся на некоторую массу жидкости $dm = \rho dW$, тогда сила сопротивления, отнесенная к единице массы,

$$F = \frac{dR}{\rho dW},$$

а ее проекции на координатные оси соответственно

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta \quad \text{и} \quad F_z = F \cos \gamma.$$

Итак, надо определить силу dR . Рассмотрим динамическое равновесие сил, действующих на элемент жидкости (рис. 13.9). Элемент выделен в форме цилиндра с осью, совпадающей с направлением линии тока, которая будет и траекторией (движение установившееся). Силу сопротивления dR будем считать направленной по линии движения. Поэтому уравнение динамического равновесия запишем в проекции на ось движения (на направление линии тока).

Имеем:

$$-dR + dP_1 - dP_2 + \rho g d\omega ds \sin \alpha = 0.$$

Но $dP_1 = p_1 d\omega$, $dP_2 = p_2 d\omega$, а $ds \sin \alpha = (z_1 - z_2)$.

После подстановки получим:

$$dR = (p_1 - p_2) d\omega + \rho g d\omega (z_1 - z_2).$$

Отнесем уравнение к единице массы, т. е. разделим на $\rho dW = \rho d\omega ds$, тогда

$$\frac{dR}{\rho dW} = \frac{p_1 - p_2}{\rho ds} + \frac{g}{ds} (z_1 - z_2),$$

или поскольку $\frac{dR}{\rho dW} = F$, то

$$F = \frac{g}{ds} \left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) \right] = g \frac{dh_w}{ds} = gI.$$

Здесь $\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) \right]$ представляют собой потерю на участке ds , равную dh_w . Итак, сила сопротивления, отнесенная к единице массы (ускорение силы сопротивления),

$$F = gI. \quad (13.18)$$

Поскольку $v = kI$, то после подстановки в уравнение (13.18) получим:

$$F = \frac{g}{k} v. \quad (13.18a)$$

Затем находим проекции F_x , F_y и F_z :

$$F_x = F \cos \alpha = \frac{g}{k} v \cos \alpha = \frac{g}{k} u_x;$$

$$F_y = F \cos \beta = \frac{g}{k} v \cos \beta = \frac{g}{k} u_y;$$

$$F_z = F \cos \gamma = \frac{g}{k} v \cos \gamma = \frac{g}{k} u_z.$$

Итак, выражение ускорений объемных сил в уравнении Эйлера можем записать так:

$$X = -\frac{g}{k} u_x; \quad Y = -\frac{g}{k} u_y; \quad \text{и} \quad Z = -g - \frac{g}{k} u_z.$$

Рассмотрим далее частные производные $\frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$.

Из рис. 13.10 видно: $H = z + \frac{p}{\rho g}$ и $p = \rho g (H - z)$.

Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial z} - 1 \right).$$

После соответствующих подстановок в уравнение Эйлера (13.16) получим:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{g}{k_\varphi} u_x - g \frac{\partial H}{\partial x} = 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{g}{k_\varphi} u_y - g \frac{\partial H}{\partial y} = 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -g - \frac{g}{k_\varphi} u_z - g \left(\frac{\partial H}{\partial z} - 1 \right) = \\ &= -\frac{g}{k_\varphi} u_z - g \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} (13.19)$$

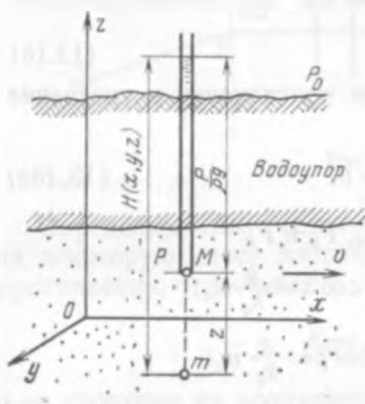


Рис. 13.10.

Решая эту систему относительно компонентов скорости, находим:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial (k_\varphi H)}{\partial x} = \frac{\partial (-k_\varphi H)}{\partial x}; \\ u_y &= -\frac{\partial (k_\varphi H)}{\partial y} = \frac{\partial (-k_\varphi H)}{\partial y}; \\ u_z &= -\frac{\partial (k_\varphi H)}{\partial z} = \frac{\partial (-k_\varphi H)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (13.20)$$

Это уравнение Жуковского.

Из уравнений (13.20) видно, что проекции скорости по координатным осям определяются частными производными некоторой функции $[-k_\varphi H(x, y, z)]$ по соответ-

ствующим координатам. Сопоставляя (13.20) с известными равенствами

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где φ — потенциал скорости, видим, что $(-k_\varphi H) = \varphi(x, y, z)$, т. е. выражение $(-k_\varphi H)$ является потенциалом скорости и, следовательно, течение грунтового потока под гидротехническим сооружением является потенциальным.

Очевидно, поскольку потенциал скорости $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то и функция $(-k_\varphi H)$ также отвечает этому уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (13.21)$$

Таким образом, задача о движении потока грунтовых вод сводится к решению уравнения Лапласа в соответствии с заданными граничными условиями. Прямое решение его крайне затруднено, поэтому на практике используют различные методы, рассматриваемые ниже.

13.5.2. Метод гидродинамической сетки

Поскольку движение грунтового потока рассматриваем как потенциальное, постольку полное решение задачи о грунтовом потоке находим построением гидродинамической сетки. По гидродинамической сетке (рис. 13.11) для любой точки можем найти скорость фильтрации v и гидродинамическое давление p . Понятно, решение будет приближенным.

Скорость фильтрации в точке M (рис. 13.11) определим по формуле Дарси $v = k_\varphi I$. Коэффициент фильтрации k_φ считаем известным, поэтому надо определить только гидравлический уклон I .

Известно

$$I = \frac{\Delta h_{\text{гр}}}{\Delta s}. \quad (13.22)$$

Потерянный напор $\Delta h_{\text{гр}}$ определим как разность ΔH значений H для двух соседних линий равного напора следующим образом.

Разность напоров у сооружения, равная $\Delta H = H_1 - H_2$ (рис. 13.11), известна по заданию; число фильтрационных полос n определяется по построенной гидродинамической сетке (на рис. 13.11 число $n=12$), тогда

$$\Delta H_w^m = \frac{\Delta H}{n} = \frac{H_1 - H_2}{n}.$$

Итак,

$$\Delta h_w = \frac{\Delta H}{n} = \frac{H_1 - H_2}{n}.$$

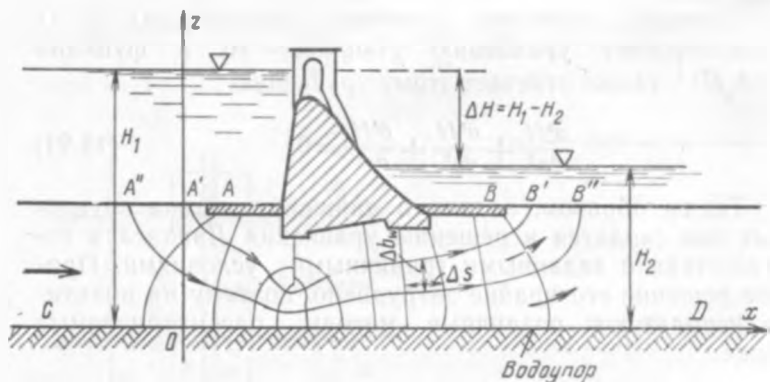


Рис. 13.11.

Определив Δs (измерением по чертежу), найдем гидравлический уклон

$$I = \frac{\Delta h_w}{\Delta s} = \frac{H_1 - H_2}{n \Delta s}$$

и, следовательно, скорость фильтрации

$$v = k_v \frac{H_1 - H_2}{n \Delta s}. \quad (13.23)$$

Гидродинамическое давление в точке M . Пользуясь известной зависимостью для избыточного давления, находим

$$p = \rho g (H - z).$$

Напорную функцию H для точки M определим по начальному значению H_1 , для чего вычтем потери до точки M . Таким образом,

$$H = H_1 - \frac{\Delta H}{n} \left(n' + \frac{1}{2} \right),$$

где n — общее число фильтрационных полос (на рис. 13.11 $n=12$), а n' — число полос до точки M (на рис. 13.11 $n'=8$). Итак,

$$p_M = \rho g \left[H_1 - \frac{\Delta H}{n} \left(n' + \frac{1}{2} \right) - z \right].$$

Удельный фильтрационный расход под сооружением. Линии тока делят пространство фильтрации на m поясов (на рис. 13.11 $m=3$). Обозначив расход одного пояса через ΔQ , найдем общий расход

$$Q = \Sigma \Delta Q = m \Delta Q$$

(по условиям построения гидродинамической сетки все расходы отдельных поясов равны между собой).

Вычислим расход одного пояса

$$\Delta Q = \Delta w = \Delta b \cdot l \cdot k_v \frac{H_1 - H_2}{n \Delta s} = k_v \frac{H_1 - H_2}{n}$$

(поскольку $\Delta b = \Delta s$ по построению гидродинамической сетки).

Общий расход

$$Q = m \Delta Q = k_v (H_1 - H_2) \frac{m}{n}. \quad (13.24)$$

13.5.3. Метод ЭГДА

Метод ЭГДА — метод электрогидродинамических аналогий — впервые был предложен акад. Н. Н. Павловским и получил всемирное распространение.

Теоретическим обоснованием является аналогия дифференциальных уравнений электрического поля уравнениям гидромеханики. Потенциал скорости соответствует напряжению электрического поля, а функция тока — силе тока.

Следовательно, если (применительно к плоской задаче) границы распространения тока геометрически подобны границам плоского потенциального потока жидкости, то линии равного напряжения, а также линии токов будут геометрически подобны соответственно линиям равного потенциала скорости и линиям тока. Поэтому оказывается возможным, определяя на электропроводящей пластинке точки с одинаковым напряжением, тем самым определять линии равного потенциала скорости, пользуясь которыми можно построить и линии тока.

Исследования проводятся на приборе ЭГДА. Схема установки показана на рис. 13.12. С помощью источника питания на станинелевую пластинку подается напряжение W_1 и W_2 ($W_1 > W_2$), и таким образом создается на ней электрический поток. Определение точек равного напряжения производится с помощью подвижной поисковой иглы, гальванометра и специального резистора, смонтированных по схеме Уитстона.

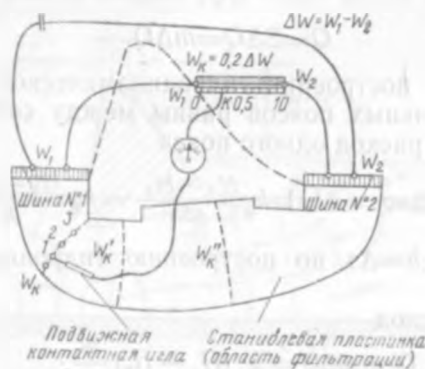


Рис. 13.12.

Таким образом, с помощью прибора ЭГДА можно с большей точностью получить изображение гидродинамической сетки и, следовательно, более точно решить все вопросы фильтрационного потока под сооружением [21].

13.5.4. Метод конформных отображений

Метод конформных отображений основан на теории функций комплексного переменного. Известно, что комплексная величина $z = x + iy$ в плоскости координат (x , y) определяется, например, точкой M (рис. 13.13). Проведем через точку M линию $y = f(x)$, тогда эта линия изобразит собой соответствующую закономерность изменения комплексного числа z . Плоскость переменного $z = x + iy$ будем называть плоскостью z .

Возьмем произвольную функцию

$$\omega = f(z).$$

Очевидно, что ω также комплексная величина:

$$\omega = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (13.25)$$

и выражена точкой в плоскости координат P и Q . Назовем плоскость комплексного переменного ω плоскостью ω (рис. 13.14). Легко видеть, что любой точке M в плоскости z соответствует единственная точка M' плоскости ω , любой линии $m-n$ соответствует линия $m'-n'$ и, сле-

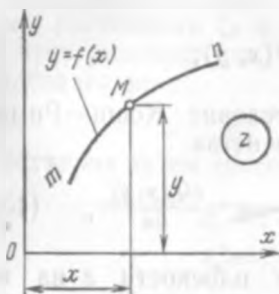


Рис. 13.13.

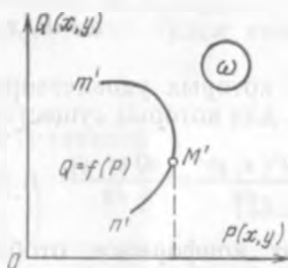


Рис. 13.14.

довательно, линия $m'-n'$ отображает на плоскости ω линию $m-n$ плоскости z . Функция $\omega = f(z)$ является отображающей функцией. Геометрическая форма отображенной фигуры зависит от характера отображающей функции и, следовательно, может быть различной и не похожей на исходную фигуру.

Среди множества возможных отображений большое значение имеет конформное отображение — такое отображение, которое в пределах малых площадей $\Delta\omega$ имеет геометрически подобные фигуры относительно исходной.

В этом случае две линии, выходящие из одной точки в плоскости z и образующие угол α , отображаются в плоскости ω так, что соответственные линии, выходящие из соответственной точки на плоскости ω , образуют такой же угол α , причем имеет место пропорциональность между соответственными отрезками.

Этим свойством конформных отображений можно воспользоваться для построения гидродинамической сет-

ки в плоскости ω по заданной гидродинамической сетке в плоскости z .

Однако для осуществления такого построения необходимо прежде всего, чтобы отображающая функция ω была бы не произвольной, а такой, которая дает конформное отображение, так как только тогда, отобразив ортогональную сетку с одной плоскости на другую, получим и на ней также ортогональную сетку.

Следовательно, надо знать, что выбранная функция удовлетворяет такому требованию.

Теория функций комплексного переменного показывает, что все те функции

$$\omega = P(x, y) + iQ(x, y),$$

для которых удовлетворяется условие Коши—Римана, т. е. для которых существуют равенства

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (13.26)$$

дают конформное отображение плоскости z на плоскость ω . Тем не менее задача еще не решена.

Следует иметь в виду, что таких функций может быть множество, а необходимой отображающей функцией $\omega = \omega(z)$ будет лишь та, которая удовлетворяет данным конкретным граничным условиям.

Полезным в этом случае является использование интеграла Кристоффеля—Шварца. В своей работе эти авторы показали, что любая область, ограниченная замкнутым контуром многоугольника, в плоскости z может быть конформно ото-

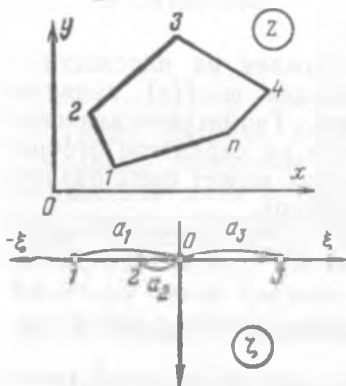


Рис. 13.15.

бражена в положительной полуплоскости ζ , если для всех вершин многоугольника известны координаты $a_1, a_2, \dots$ (рис. 13.15) на вещественной оси $O\xi$ полуплоскости ζ , соответственно вершинам указанного многоугольника 1, 2, 3, 4, n.

Интеграл Кристоффеля—Шварца имеет вид:

$$z = f(\zeta) = A \int (\zeta - a_1)^{\alpha_1-1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + B. \quad (13.27)$$

Здесь z — комплексная величина (плоскости z), для которой задано (известно) поле внутри замкнутого многоугольника; $a_1, a_2, \dots$ — коэффициенты, определяющие углы при вершинах многоугольника, выраженные в долях π , затем $a_1, a_2, \dots, a_n$ — координаты на вещественной оси ξ плоскости ζ и, наконец, постоянные величины A и B , которые должны быть определены заранее известными значениями ζ_1 и ζ_2 и значениями z_1 и z_2 .

В этих условиях после интегрирования будем иметь последовательно

$$z = f(\zeta, A, B).$$

Составляя затем систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= f(\zeta_1, A, B); \\ z_2 &= f(\zeta_2, A, B) \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

и решая ее, находим постоянные величины A и B . Тогда окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} z &= f(\zeta) \\ \zeta &= \Phi(z) \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

или

Дальнейшие разъяснения опускаем, но отметим, что в связи с известной трудоемкостью вычислений на практике решение производят несколько иначе.

Пусть требуется построить гидродинамическую сетку для фильтрационного потока при напорной функции $H = H_1 - H_2$ (рис. 13.16).

Выбираем вспомогательную плоскость ω , полагая

$$\omega = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (13.30)$$

где φ — потенциал скорости, а ψ — функция тока.

В этой плоскости построим прямоугольник, уходящий вдоль оси $O\psi$ в бесконечность, который можно рассматривать как треугольник с высотой $h \approx \infty$. Таким образом, третья точка замкнутого контура уходит в бесконечность (рис. 13.17). Отобразим этот прямоугольник на полуплоскость z , охватывающую область фильтрации под плотной (см. рис. 13.10). Тогда

$$\omega = f(z) = C \int (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} dz + C_1. \quad (13.31)$$

В подынтегральном выражении остаются только два множителя, третий отсутствует, так как вершина треугольника лежит в бесконечности.

Обращаясь к граничным условиям, видим, что:

для точки $1'$ (рис. 13.16) $a_1 = -b/2$, причем потенциал скорости $\varphi = k_\varphi H$ или в приведенных единицах при $k_\varphi = 1$ и $H = 1$ значение $\varphi = -1$, и тогда соответственная точка в плоскости ω имеет значение $\varphi = -1$;

для точки $2'$ $a_2 = b/2$ и $\varphi = 0$, поэтому точка $2'$ совпадает с началом координат.

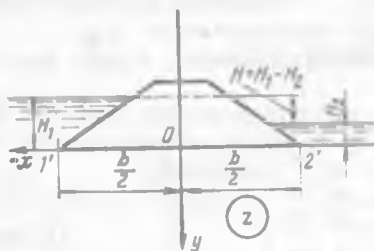


Рис. 13.16.

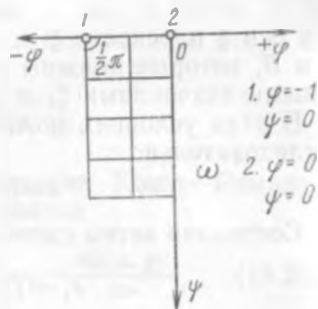


Рис. 13.17.

Углы при вершинах прямоугольника (рис. 13.17) равны $\pi/2$, а коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = -1/2$.

Таким образом, интеграл Кристоффеля — Шварца принимает вид:

$$\omega = f(z) = C \int \left(z + \frac{b}{2}\right)^{-0.5} \left(z - \frac{b}{2}\right)^{-0.5} dz + C_1. \quad (13.32)$$

В результате интегрирования находим

$$\omega = f(z, C, C_1). \quad (13.33)$$

Определяем постоянные C и C_1 :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f(z_1, C, C_1); \\ \omega_2 &= f(z_2, C, C_1); \end{aligned} \quad (13.34)$$

и тогда получим расчетную связь $\omega = f(z)$ или $z = \Phi(\omega)$. Но $z = x + iy$, а $\omega = \varphi + i\psi$, следовательно,

$$x + iy = \Phi(\omega) = F[(\varphi + i\psi)] = \Phi_1(\varphi, \psi) + i\Phi_2(\varphi, \psi).$$

Поэтому можем принять

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\varphi, \psi); \\ y &= \Phi_2(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (13.35)$$

Исключая ψ , получаем

$$y = \Phi(x, \varphi), \quad (13.36)$$

что позволяет построить линии равного потенциала $\varphi_1 = C_1$; $\varphi_2 = C_2$ и т. д.

Аналогично решается задача и по определению функции тока ψ

13.5.5. Метод коэффициентов сопротивления

Метод коэффициентов сопротивления предложен проф. Р. Р. Чугаевым.

Основными задачами при расчетах движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями являются следующие: 1) определение фильтрационного расхода Q ; 2) определение скорости фильтрации v в различных точках потока; 3) определение вертикального давления P на подземный контур сооружения.

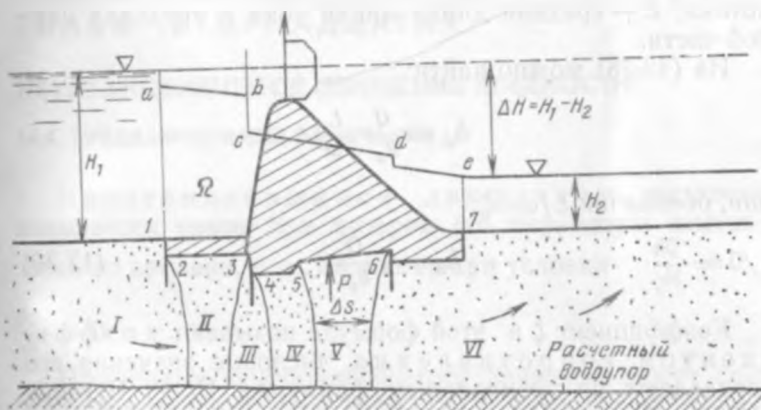


Рис. 13.18.

Допустим, требуется решить указанные задачи применительно к схеме, приведенной на рис. 13.18.

Разделим подземный контур точками 1, 2, 3 ... на ряд участков (на рис. 13.18 — на шесть частей) и из этих точек проведем линии, пересекающие поток, предполагая, что они являются линиями равного потенциала (и, следовательно, линиями равных напоров $H_1, H_2, \dots, H_n$). Выбор точек 1, 2, 3 ... производится так, чтобы линии, выходящие из этих точек, делили всю область фильтрации на характерные в геометрическом отноше-

нии фрагменты. На рис. 13.18 показано шесть таких фрагментов I, II, III, IV, V, VI.

Из такого построения ясно, что общая потеря напора $\Delta H = H_1 - H_2$ разделится на части $h_{w_1}, h_{w_2}, \dots$ (на рис. 13.18 на шесть частей) и

$$\Delta H = h_{w_1} + h_{w_2} + \dots + h_{w_n} = \Sigma h_w. \quad (13.37)$$

Для любой части расход можно определить по формуле Дарси

$$Q = k_\varphi \omega \frac{h_w}{L}. \quad (13.38)$$

Здесь k_φ и h_w не требуют пояснений; ω — некоторая средняя площадь поперечного сечения фильтрационного потока; L — средняя длина линий тока в пределах данной части.

Из (13.38) можно найти:

$$h_w = \frac{Q}{k_\varphi} \frac{L}{\omega}$$

или, обозначив $L/\omega = \zeta$,

$$h_w = \zeta \frac{Q}{k_\varphi}. \quad (13.39)$$

Коэффициент ζ в этой формуле называют коэффициентом сопротивления, числовые значения его определяют по специальным формулам Р. Р. Чугаева (18.22). В дальнейших наших рассуждениях будем считать этот коэффициент известным. Тогда основные задачи фильтрации под гидротехническими сооружениями можно решить по следующим формулам.

1. Общий фильтрационный расход Q (удельный, т. е. на единицу длины плотинного преграждения):

из (13.37) и (13.39) имеем

$$\Delta H = \Sigma h_w = \Sigma \zeta \frac{Q}{k_\varphi} = \frac{Q}{k_\varphi} \Sigma \zeta,$$

а потому

$$Q = \frac{k_\varphi \Delta H}{\Sigma \zeta}. \quad (13.40)$$

2. Скорость фильтрации в заданной точке

$$v = k_{\phi} \frac{h_w}{\Delta s},$$

где h_w определяется по формуле (13.39), а Δs измеряется по схеме (рис. 13.18).

3. Сила вертикального давления P фильтрационного потока на сооружение.

Определяем h_w для каждой части и строим пьезометрическую линию ($a, b, c \dots$), тогда

$$P = \rho g \Omega,$$

где площадь Ω легко находится по схеме (рис. 13.18).

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

14.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Неустановившимся движением жидкости называется такое, при котором его параметры изменяются во времени, т. е., например при условии $\frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0$,

$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$ и т. д.

Примерами неустановившегося движения могут служить неустановившееся движение в напорных трубопроводах и в открытых руслах, наполнение и опорожнение резервуаров (судоходных камер и т. д.), гидравлический удар в трубах.

Здесь остановимся на рассмотрении неустановившегося движения в трубах и открытых руслах, а также на явлении гидравлического удара.

14.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ

Напишем уравнение динамического равновесия для элемента элементарной струйки, выделенного двумя сечениями 1—1 и 2—2 (рис. 14.1). На этот элемент действуют следующие силы:

- 1) давление на торцевые сечения элемента

$$dP_1 = p_1 d\omega \quad \text{и} \quad dP_2 = \left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) d\omega;$$

- 2) вес выделенного элемента жидкости

$$dG = \rho g d\omega ds;$$

- 3) сила сопротивления со стороны окружающей элементарную струю массы жидкости

$$dF = \tau dx ds,$$

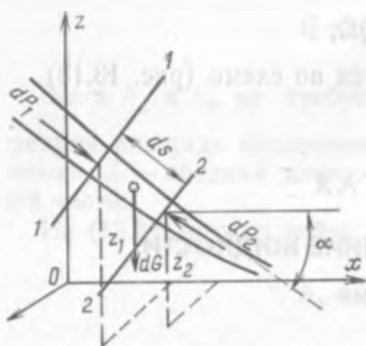


Рис. 14.1.

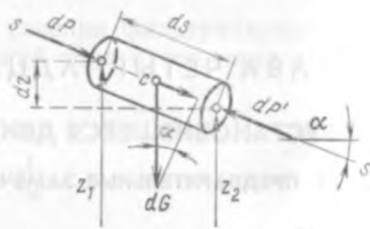


Рис. 14.2.

где τ , dx и ds — соответственно касательные напряжения на боковой поверхности, периметр поперечного сечения и длина элемента (произведение $dx ds$ представляет собой площадь боковой поверхности выделенного элемента);

- 4) сила инерции массы данного элемента, проявляющаяся в связи с изменением во времени скорости течения:

$$dF_{\text{ин}} = dm \frac{du}{dt} = \rho d\omega ds \frac{du}{dt}.$$

Здесь dm — масса элемента: $dm = \rho d\omega ds$, а $\frac{du}{dt}$ — пол-

ное ускорение

Проектируем все силы на направление движения (на линию $s-s$ рис. 14.2) и запишем уравнение динамического равновесия в таком виде:

$$dP_1 - dP_2 + dG \sin \alpha - \tau dx ds - \rho d\omega ds \frac{du}{dt} = 0. \quad (14.1)$$

Введем некоторые преобразования (14.1). Третье слагаемое уравнения запишем так: если учитывать, что проекция силы тяжести на ось движения $s-s$ равна $dG \sin \alpha = \rho g d\omega ds \sin \alpha$, где $ds \sin \alpha = z_1 - z_2$ (рис. 14.2),

$$dG \sin \alpha = \rho g d\omega (z_1 - z_2).$$

Поскольку скорость движения частиц u в общем случае является функцией двух независимых переменных t и s , т. е. $u = f(s, t)$, можно записать:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial s} ds,$$

тогда ускорение определится таким равенством:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{2\partial s}.$$

После необходимых подстановок в уравнение (14.1) получим:

$$\begin{aligned} \rho d\omega - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) d\omega + \rho g d\omega (z_1 - z_2) - \\ - \tau d\chi ds - \rho d\omega ds \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.1a)$$

или, разделив на $\rho g d\omega ds$ с учетом $z_1 - z_2 = z - (z + dz) = -dz$, получим уравнение в таком виде:

$$-\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{dz}{ds} - \frac{\tau}{\rho g} \frac{d\chi}{d\omega} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = 0. \quad (14.2)$$

Уравнение (14.2) называют основным дифференциальным уравнением неустановившегося движения несжимаемой вязкой жидкости.

Его можно написать и несколько иначе (группируя слагаемые в удобной форме):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g} \right) + \frac{\tau}{\rho g} \frac{d\chi}{d\omega} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Умножив на ds и проинтегрировав в пределах от s_1 до s_2 , получим в конечной форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} \right) + \\ + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\tau}{\rho g} \frac{d\chi}{d\omega} ds + \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} ds = 0 \end{aligned} \quad (14.3)$$

или, что то же самое,

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\tau}{\rho g} \frac{dL}{ds} ds + \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{g} \frac{du}{dt} ds. \quad (14.4)$$

Уравнение (14.4) называют также основным уравнением неустановившегося движения жидкости в конечном виде. Легко видеть,

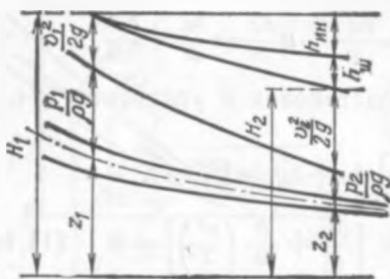


Рис. 14.3.

что уравнение (14.4) представляет собой уравнение Бернулли при неустановившемся движении. Здесь два последних члена (имеющих линейную размерность, как и другие слагаемые) представляют собой соответственно на участке от первого сечения до второго потери на трение

$$h_w = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\tau}{\rho g} \frac{dL}{ds} ds$$

и так называемый инерционный напор

$$h_m = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{g} \frac{du}{dt} ds.$$

Если ввести обозначение

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g},$$

то уравнение (14.4) можно записать очень кратко

$$H_1 = H_2 + h_w + h_m \quad (14.4a)$$

и его можно иллюстрировать графически. На рис. 14.3 показана графическая интерпретация этого уравнения для некоторого момента времени. Расположение изображенных линий изменяется во времени.

14.3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Будем рассматривать течение в трубопроводе, внутренний диаметр которого остается неизменным на всем протяжении. В таком случае имеем всегда

$$v_1 = v_2 \quad \text{и} \quad \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}. \quad (14.5)$$

Потерянный напор определим по обычной формуле Дарси

$$h_m = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (14.6)$$

Определим теперь инерционный напор

$$h_{\text{ин}} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} ds.$$

Здесь скорость u заменяем обозначением средней скорости, т. е. буквой v .

При неизменном диаметре скорость v , как уже отмечено, не зависит от расстояния s , следовательно, частная производная $\frac{\partial v}{\partial t}$ равна полной производной

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt},$$

и тогда для инерционного напора будем иметь

$$h_{\text{ин}} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} ds = \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} \int_{s_1}^{s_2} ds = \frac{s_2 - s_1}{g} \frac{dv}{dt} = \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}$$

или, обозначив $s_2 - s_1 = l$ (длина участка трубопровода), получим

$$h_{\text{ин}} = \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (14.7)$$

С учетом уравнений (14.5)—(14.7) основное уравнение для потока в цилиндрической трубе можно записать так:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g} \frac{dv}{dt} \quad (14.8)$$

или, обозначив гидростатический бином через H , а $H_1 - H_2 = \Delta H$, можем записать в краткой форме

$$\Delta H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (14.8a)$$

14.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Переходными процессами называется не установившееся движение жидкости при переходе из одного стационарного движения в другое. Это явление в гидроэнергетических установках наблюдается во многих случаях¹.

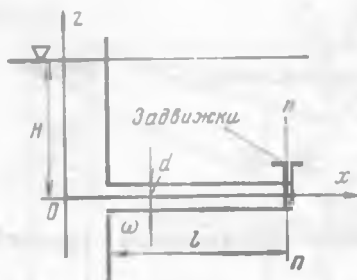


Рис. 14.4.

Рассмотрим случай переходного процесса, связанный с истечением жидкости из резервуара большой емкости, когда можно принять истечение происходящим при постоянном напоре (рис. 14.4).

Предположим, что в начальный момент t_0 труба заполнена жидкостью, находящейся в неподвижном состоянии при закрытой задвижке (в конце трубы). Откроем задвижку мгновенно в момент t_0 . Очевидно, начнется истечение, и скорость истечения (равная средней скорости в поперечном сечении) начнет изменяться от нуля до максимального значения, равного скорости истечения в стационарных условиях, т. е. скорости, равной

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta}} = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (14.9)$$

Это будет максимальной (предельной) скоростью.

Время Δt , в течение которого скорость истечения, изменяясь от нуля до указанного максимального своего значения, будет определять собой длительность переходного процесса.

¹ Гидромеханические переходные процессы в гидроэнергетических установках/ Под ред. Г. И. Кривченко. М.: Энергия, 1975.

Это время определяем, пользуясь основным уравнением (14.4)

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}.$$

Запишем это уравнение для сечения 0—0 в резервуаре перед входом в трубу и для конечного сечения, тогда, пренебрегая $v^2/2g$ в резервуаре и учитывая, что $p_1 = p_2 = p_{\text{ат}}$, получаем:

$$z_1 - z_2 = \Delta H = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \zeta_{\text{сст}} \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}$$

или

$$\Delta H = \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta\right) \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}.$$

Перепишем это уравнение в другой форме:

$$\frac{2g\Delta H}{v^2} = (1 + \zeta_{\text{сст}}) \frac{v^2}{2l} = \frac{dv}{dt}.$$

откуда

$$dt = \frac{2ldv}{2g\Delta H - (1 + \zeta_{\text{сст}}) v^2} \quad (14.10)$$

или

$$dt = \frac{2l}{1 + \zeta_{\text{сст}}} \frac{dv}{\frac{2g\Delta H}{1 + \zeta_{\text{сст}}} - v^2}. \quad (14.10a)$$

По

$$\frac{2g\Delta H}{1 + \zeta_{\text{сст}}} = v_{\text{ст}}^2$$

где $v_{\text{ст}}$ — скорость истечения из трубопровода в установившемся режиме, т. е. предельная (максимальная) скорость. Обозначим далее для краткости

$$\frac{2l}{1 + \zeta_{\text{сст}}} = a.$$

Тогда уравнение (14.10) получим в наиболее простой форме

$$dt = a \frac{dv}{v_{\text{ст}}^2 - v^2}. \quad (14.11)$$

Уравнение, описывающее переходный процесс в нашей задаче, получим интегрированием (14.11):

$$\Delta t = \frac{a}{2v_{\text{ст}}} \ln \frac{v_{\text{ст}} + v}{v_{\text{ст}} - v}. \quad (14.12)$$

Скорость v в переходном процессе непрерывно возрастает от нуля до $v_{\text{ст}}$ ($v \rightarrow v_{\text{ст}}$), и в пределе $v = v_{\text{ст}}$. Уравнение (14.12) показывает, что в этом случае $\Delta t \rightarrow \infty$, следовательно, установившегося движения быть не может.

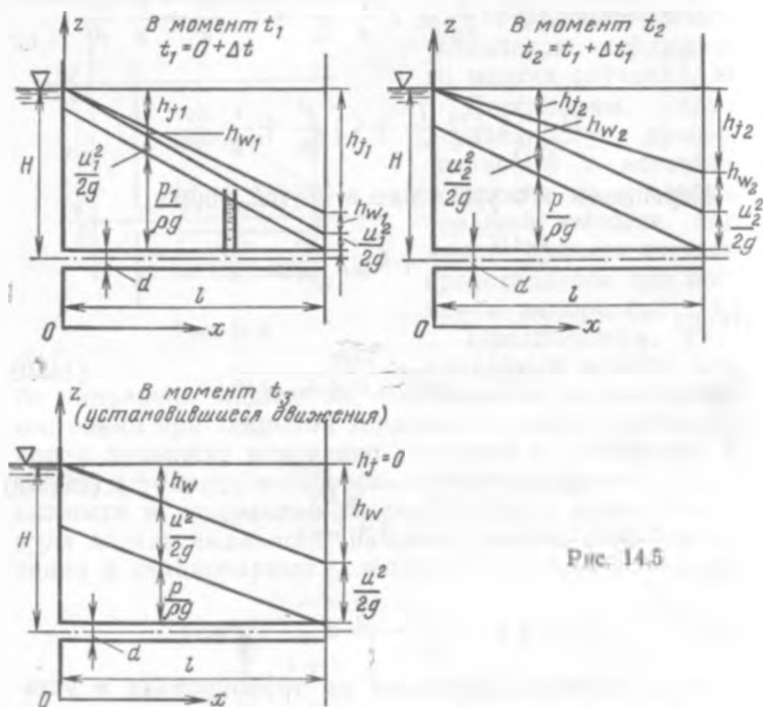


Рис. 14.5

Но практически можно принять приближенно, что движение будет установившимся, когда $v = \rho v_{\text{ст}}$ (например, $\rho = 0,95$)*, тогда

$$\ln \frac{v_{\text{ст}} + v}{v_{\text{ст}} - v} \approx \ln \frac{v_{\text{ст}} (1 + 0,95)}{v_{\text{ст}} (1 - 0,95)} = \ln 39 \approx 3,66.$$

* Зелькин Г. Г. Явление гидравлической индукции при неустановившемся движении несжимаемой вязкой жидкости. — ИФЖ, 1971, т. 21, № 6.

Это условие дает возможность определить рабочее время переходного процесса.

Имея в виду введенное условие и обозначение $a = \frac{2l}{1 + \zeta_{\text{сст}}}$, перепишем уравнение (14.12):

$$\Delta t = \frac{l}{(1 + \zeta_{\text{сст}}) v_{\text{ст}}} \ln \frac{v_{\text{ст}} + v}{v_{\text{ст}} - v},$$

и для практического расчета [приблизленно

$$\Delta t' = \frac{3,66l}{V(1 + \zeta_{\text{сст}}) 2g\Delta H}.$$

Пример 1. Дано: $l = 100$ м; $\Delta H = 25$ м; $d = 1,0$ м; $\lambda = 0,02$; $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$. Определить время переходного процесса.

Решение:

$$\Delta t = \frac{3,66l}{V\left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{вх}}\right) 2g\Delta H} = \frac{3,66 \cdot 100}{V(1 + 2 + 0,5) 2g \cdot 25} \approx 9 \text{ с.}$$

Пример 2. Дано: $l = 10$ м; $\Delta H = 100$ м; $d = 0,1$ м. В этих условиях $\Delta t = 0,45$ с.

Графическое представление развития переходного процесса для рассмотренного случая показано на рис. 14.5.

14.5. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ (ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

14.5.1. Уравнение движения

Воспользуемся общим дифференциальным уравнением одномерного неустановившегося движения (14.2), написав его в несколько иной форме:

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho g} \right) - \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) - \frac{\partial h_w}{\partial s} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (14.13)$$

Примем z равной координате дна русла, тогда $p/\rho g = h$ (h — глубина потока) и уравнение (4.13) можем написать так:

$$-\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{\partial h_w}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Здесь $-\frac{\partial z}{\partial s}$ — уклон дна русла; $h + \frac{v^2}{2g} = \mathcal{E}$, т. е. удельная энергия сечения, а $\frac{\partial h_w}{\partial s} = i_j$, т. е. гидравлический

уклон. В связи с этим имеем

$$i - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = i_f + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

или

$$i - i_f = \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (14.14)$$

Допуская возможность оценивать гидравлический уклон по формуле Шези, можем написать и так

$$i - \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (14.14a)$$

Это и есть основное дифференциальное уравнение неустановившегося движения в открытом русле.

14.5.2. Уравнение неразрывности

Для установившегося движения жидкости в трубопроводах уравнение неразрывности записывалось как $Q = \omega v = \text{const}$ или $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$. Для неустановившегося дви-

жения в открытых руслах это уравнение будет более сложным. Любое изменение расхода в каком-либо створе руслового потока влечет за собой изменение глубины и возникновение волнового процесса. Это изменение расхода будет распространяться вдоль потока не мгновенно, а с некоторой скоростью. В связи с этим происходит изменение во времени как глубины, так и расхода.

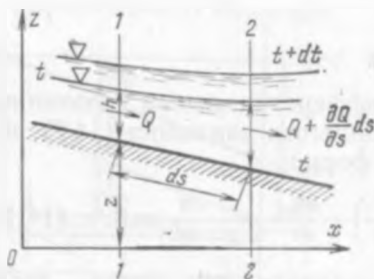


Рис. 14.6.

Выделим в потоке некоторую массу жидкости, заключенную между двумя поперечными его сечениями 1—1 и 2—2 (рис. 14.6), расположенными на расстоянии ds друг от друга. За время dt в этот объем войдет через первое сечение объем жидкости $dW_1 = Q_1 dt$, а выйдет через второе сечение $dW_2 = Q_2 dt$ или $dW_2 = \left(Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial s} ds \right) dt$

Таким образом, в зоне между сечениями объем жидкости изменится на величину dW , равную:

$$dW = dW_1 - dW_2.$$

Опуская индексы 1 и 2 расхода (Q_1 и Q_2), запишем:

$$dW = Q dt - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds \right) dt = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt. \quad (14.15)$$

Этот дополнительный объем жидкости вследствие ее несжимаемости вызовет увеличение глубины потока на участке ds (между выбранными двумя сечениями) на dh , а также и увеличение площади живого сечения на $d\omega$ (за время dt):

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt.$$

Поэтому увеличение объема dV за счет увеличения глубины составит:

$$dV = d\omega ds = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt ds.$$

Очевидно, $dV = dW$, т. е.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} dt ds = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (14.16)$$

или

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial s} + \omega \frac{\partial v}{\partial s} = 0,$$

которое определяет собой сплошность потока. Следовательно, оно является уравнением неразрывности.

Для прямоугольного призматического русла $\omega = Bh$, где $B = \text{const}$, а потому

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Bh) = B \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Производная $\frac{\partial Q}{\partial s}$ равна:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial (Bhv)}{\partial s} = B \frac{\partial (hv)}{\partial s}.$$

После соответствующих подстановок

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial s} = 0. \quad (14.17)$$

Можно записать и иначе (учитывая, что $hv=q$, где q — удельный расход):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0. \quad (14.17a)$$

14.6. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

Гидравлическим ударом в трубах называется резкое увеличение давления при очень быстром (практически мгновенном) уменьшении скорости течения (например, при очень быстром закрытии крана на трубе).

Гидравлический удар как физическое явление был известен и изучался давно. Но только на рубеже XIX и XX вв. Н. Е. Жуковским была впервые создана теория удара. Позднее итальянский ученый Альеви предложил свое (аналогичное) решение. Основная схема физического процесса явления гидравлического удара по теории Н. Е. Жуковского заключается в следующем (рис. 14.7). При чем жидкость считается не вязкой, но сжимаемой

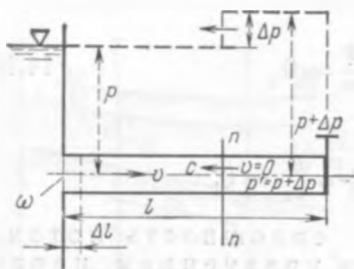


Рис. 14.7.

и подчиняющейся закону Гука, трубопровод — абсолютно жестким.

Первая фаза. В момент внезапного и полного закрытия задвижки в конце трубопровода вся движущаяся в нем жидкость должна остановиться. Но реальная жидкость, будучи упругой, будет останавливаться не мгновенно, а по-

степенно сжимаясь от слоя к слою (начиная от слоя у задвижки). При этом одновременно будет повышаться давление на некоторое значение Δp (ударное давление).

Упругая деформация сжатия и повышение давления распространяются вверх по течению и за время T достигают конца трубы. При этом освободившееся пространство на расстоянии Δl заполняется жидкостью из резервуара. В этот момент заканчивается первая фаза гид-

равлического удара, частицы жидкости в трубе находятся в неподвижном состоянии ($v=0$), в состоянии сжатия под действием увеличенного на Δp давления. Плотность жидкости при этом увеличена до $\rho'=\rho+\Delta\rho$.

Скорость распространения упругой деформации (гидравлического удара)

$$c = \frac{l}{T},$$

где l и T — соответственно длина трубы и длительность первой фазы.

Вторая фаза (фаза расширения). В конечный момент первой фазы жидкость в трубе, находясь под давлением $p'=p+\Delta p$, не уравновешена давлением в резервуаре, где имеется давление p . Поэтому жидкость в трубе начнет расширяться в сторону резервуара, и ее частицы постепенно приобретут скорость v , направленную в сторону резервуара (в сторону, обратную направлению движения до возникновения гидравлического удара), при этом гидравлическое давление уменьшается до начального давления p . К концу второй фазы вся жидкость в трубе окажется в движении со скоростью v в сторону резервуара.

Третья фаза (фаза растяжения и остановки движения). В начальный момент этой фазы вся жидкость движется в обратную сторону и стремится оторваться от задвижки. Если отрыва не произойдет, то начнется растяжение жидкости с дальнейшим понижением давления до $p''=p-\Delta p$, при этом частицы жидкости останавливаются, и к концу третьей фазы вся жидкость останавливается и находится под действием пониженного давления. Это состояние оказывается также неуравновешенным. Давление в резервуаре равно p , а в трубе $p''=p-\Delta p$.

Четвертая фаза (фаза восстановления движения до состояния, имевшего место перед закрытием задвижки). Под влиянием разности давления $\Delta p=p-p''$ происходит также послойно (но уже начиная от резервуара в сторону задвижки) увеличение давления до начального p с одновременным возникновением скорости и увеличения ее (в пределе) до значения v в сторону задвижки. Таким образом, к концу четвертой фазы жидкость в трубе будет находиться в таком же состоянии

движения, в каком она находилась до момента закрытия задвижки.

Очевидно, поскольку задвижка закрыта, а движение соответствует движению до ее закрытия, то в конце четвертой фазы снова возникает гидравлический удар, и процесс будет повторяться неограниченное число раз.

В реальных условиях, когда существуют гидравлические сопротивления и упругие деформации стенок трубопровода, процесс гидравлического удара будет более сложным и затухающим.

Допустим, что в горизонтальной трубе, присоединенной к резервуару неограниченной емкости, на расстоянии l от резервуара установлен затвор. Пусть скорость течения в трубе равна v . Закроем мгновенно затвор, тогда возникнет гидравлический удар, и к концу первой фазы вся масса жидкости остановится.

Запишем уравнение импульсов для массы жидкости, находящейся в трубе на участке l от резервуара до задвижки, в проекциях на ось движения (пренебрегая сопротивлениями)

$$m(v_{\text{кон}} - v_{\text{нач}}) = P\Delta t,$$

где масса $m = \rho\omega l$; конечная скорость $v_{\text{кон}} = 0$, начальная скорость $v_{\text{нач}} = v$. Результирующая сила $P = P_1 - P_2 = \rho\omega - (\rho + \Delta\rho)\omega = -\omega\Delta\rho$.

Время первой фазы

$$\Delta t = \frac{l}{c},$$

где c — скорость распространения гидравлического удара; l — длина трубы.

Итак, получим:

$$-\rho\omega lv = -\omega\Delta\rho \frac{l}{c},$$

откуда

$$\Delta\rho = \rho v c. \quad (14.18)$$

Этот результат является основной формулой Н. Е. Жуковского.

Для практического использования формулы надо знать скорость c . Определим ее сначала для случая, когда упругостью стенок трубы, считая трубу абсолютно жесткой, можно пренебречь.

Воспользуемся уравнением кинетической энергии

$$\frac{m(v_{\text{кон}}^2 - v^2)}{2} = \int_0^{\Delta l} P dl. \quad (14.19)$$

Левая часть равенства определяется так:

$$\frac{m(v_{\text{кон}}^2 - v^2)}{2} = \frac{\rho \omega l(0 - v^2)}{2} = -\rho \omega l \frac{v^2}{2},$$

правая часть $\int_0^{\Delta l} P dl$ представляет собой работу внешних

сил, действующих на массу m . В данном случае имеем две силы: силу давления со стороны задвижки (силу P_1), работа которой A_1 равна нулю, так как перемещение площадки $dl=0$, и силу давления P_2 на площадку ω у входного отверстия трубы (у резервуара). Эта сила изменяется от нуля до $\Delta p \omega$, и ее работа $A_2 = \frac{\Delta p \omega \Delta l}{2}$,

(работа на пути Δl — пути сжатия цилиндрической массы жидкости в трубе).

Итак,

$$\int_0^{\Delta l} P dl = \frac{\Delta p \omega \Delta l}{2}.$$

Результирующее уравнение энергии запишется так:

$$-\frac{\rho \omega l v^2}{2} = \frac{\Delta p \omega \Delta l}{2},$$

откуда

$$\Delta p = -\rho v^2 \frac{l}{\Delta l} = -\frac{\rho v^2}{(\Delta l/l)}, \quad (14.20)$$

где $\Delta l/l$ — относительное сжатие жидкости.

По закону Гука при сжатии

$$-\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta p}{K},$$

где K — модуль упругости тела (в данном случае модуль упругости жидкости).

Сделав подстановку в предыдущее равенство (14.20), получим

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{-\Delta l/l} = \frac{\rho v^2}{\Delta p/K} = \frac{\rho v^2 K}{\Delta p},$$

откуда

$$\Delta p^2 = \rho v^2 K$$

или

$$\Delta p = v \sqrt{\rho K}. \quad (14.21)$$

Сопоставляя (14.19) и (14.21), получаем

$$\rho v c = v \sqrt{\rho K},$$

и, следовательно, скорость распространения гидравлического удара (ударной волны) равна:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (14.22)$$

Заметим, что скорость звука определяется по аналогичной формуле

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

и, следовательно, скорость ударной волны равна скорости звука.

Для воды модуль упругости $K=19,62 \cdot 10^8$ Па, а плотность $\rho=1000$ кг/м³, поэтому для воды

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{19,62 \cdot 10^8}{1000}} = 1400 \text{ м/с.}$$

Теперь можно определить Δp по формуле (14.19):

$$\Delta p = \rho v c = \rho v \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

или, разделив на ρg , получим в метрах

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{v c}{g}.$$

Для воды $\rho=1000$ кг/м³ и $c=1400$ м/с. Тогда $\Delta p = v \cdot 1,4 \cdot 10^6$ Па.

Если учесть упругость материала стенок трубы, то скорость распространения ударной волны будет меньшей. Это объясняется тем, что при увеличении внутреннего давления в трубе (вследствие гидравлического удара) стенки трубы растягиваются и площадь поперечного сечения увеличивается на $\Delta\omega$.

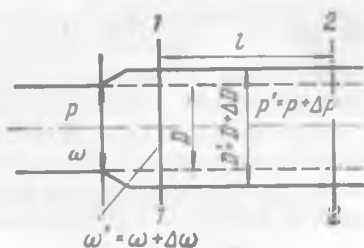


Рис. 14.8.

Поэтому на участке длиной l^* (рис. 14.8) внутренний объем трубы увеличивается на $\Delta W = \Delta\omega l$. Это пространство заполняется жидкостью, и кажущееся значение сжатия увеличивается, а наблюдаемый модуль упругости K_0 уменьшается, следовательно, и скорость ударной волны уменьшится до значения

$$c = \sqrt{\frac{K_0}{\rho}}, \quad (14.23)$$

где K_0 — кажущийся модуль упругости.

Для вычисления кажущегося модуля упругости воспользуемся формулой Кортвега

$$\frac{1}{K_0} = \frac{1}{K} + \frac{D}{\delta \epsilon}, \quad (14.24)$$

откуда

$$K_0 = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{\epsilon}\right) \left(\frac{D}{\delta}\right)}.$$

Здесь K — модуль упругости данной жидкости; D , ϵ и δ — соответственно диаметр трубы, модуль упругости материала стенок трубы и толщина стенок.

Сделав подстановку в (14.23), получим формулу для скорости распространения гидравлического удара

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho \left(1 + \frac{K}{\epsilon} \frac{D}{\delta}\right)}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K}{\epsilon} \frac{D}{\delta}}} \quad (14.25)$$

* Наблюдаемое сокращение длины жидкого цилиндра в трубе Δl увеличится, и, следовательно, наблюдаемый модуль K_0 уменьшает модуль упругости $K = \Delta p l / \Delta l$.

или при $\sqrt{K/\rho} \approx 1400$ м/с

$$c = \frac{1400}{\sqrt{1 + \frac{K}{\varepsilon} \frac{D}{\delta}}}.$$

Далее находим формулу для ударного давления Δp :

$$\Delta p = \rho v c = \frac{1400 \rho v}{\sqrt{1 + \frac{K}{\varepsilon} \frac{D}{\delta}}}. \quad (14.26)$$

Пример. Для стальных трубопроводов ($K/\varepsilon = 0,01$) примем $D/\delta = 100$. Тогда

$$\Delta p = \frac{1400 \rho v}{\sqrt{1 + 0,01 \cdot 100}} \approx 1000 \rho v.$$

В частности, если $v = 2$ м/с и $\rho = 1000$ кг/м³, то скорость ударной волны $c = 1000$ м/с, а ударное давление $\Delta p = 2 \cdot 10^6$ Па.

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

15.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Теория ветровых волн имеет многовековую историю. Начало ее возникновения связывают с именем Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), который отметил различие между движением поверхностных волн и движением масс самой жидкости. Вопросами теории волн занимались Ньютон, Лагранж, Стокс, разработавший теорию волн в условиях безвихревого движения, и другие ученые. В 1802 г. Герстнер опубликовал теорию трохондальных волн, получившую широкое распространение. Глубокое развитие теории ветровых волн связано с именами многих ученых: в Советском Союзе уже в наше время успешно в этой области работали А. И. Некрасов,

Л. Н. Сретенский, Н. Е. Кочин, А. Н. Крылов, В. В. Шулейкин, М. Н. Кожевников и другие ученые.

Движение ветровых волн на поверхности моря, озера или иного водоема не следует понимать как перемещение массы самой жидкости. Масса жидкости, оставаясь примерно на том же месте, совершает своими частицами у свободной поверхности сложные колебания по высоте, быстро затухающие с увеличением глубины расположения самих частиц.

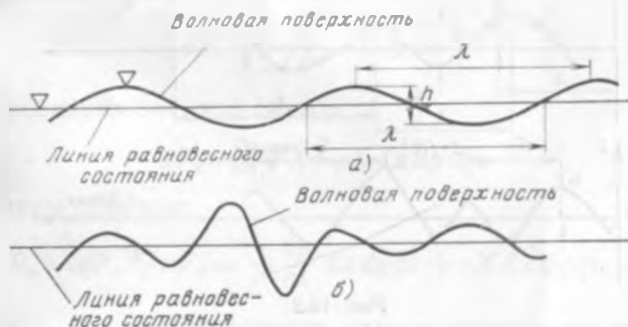


Рис. 15.1.

Ветровые волны могут быть вынужденными, т. е. находиться и развиваться под непрерывным воздействием ветра, и свободными, т. е. при отсутствии ветра (волны зыби). Различают волны регулярные — волны одного и того же размера и формы (рис. 15.1, а) и волны нерегулярные — различных размеров (рис. 15.1, б). При этом рассматриваются два случая — волны морские, т. е. в водоемах большой глубины $H > 0,5\lambda$, и волны на водоемах малой глубины (на мелководье) при $H < 0,5\lambda$, где H — глубина водоема, а λ — длина волны.

Основные геометрические и кинематические характеристики волн:

длина волны λ — расстояние между вершинами двух смежных волн;

высота волны h , м, — превышение ее вершины над подошвой впадины (рис. 15.2);

скорость распространения волн c , м/с;

период колебаний τ , с, — время, в течение которого осуществляется один полный цикл колебаний;

частота колебаний — величина, обратная периоду колебаний $n=1/\tau$ (число колебаний в единицу времени).

Графические характеристики волнового процесса:

волновой профиль $z=f(x)$ (рис. 15.2,а);

волновой график $z=f(t)$ (рис. 15.2,б).

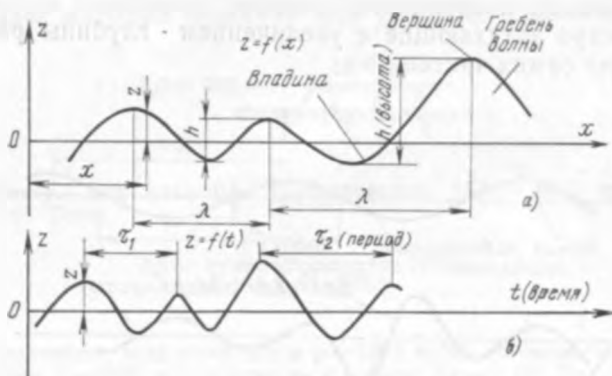


Рис. 15.2.

Размеры волн и скорость их перемещения могут быть весьма большими. В Индийском океане наблюдались волны длиной $\lambda \approx 400$ м при высоте $h \approx 13$ м и скорости $c \approx 20$ м/с.

15.2. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

Рассмотрим свободные волны, возникшие в результате воздействия одного кратковременного импульса внешних сил на покоящуюся массу невязкой и несжимаемой жидкости. При этом будем полагать, что возникшие таким образом волновые колебания находятся под действием сил земного тяготения и сил инерции. Очевидно, что эти колебания будут незатухающими (силы сопротивления отсутствуют).

Волновые движения — движения потенциальные (не вихревые).

Воспользуемся уравнением импульсов, которое можно записать для элементарной массы в таком виде:

$$dm dv = \Sigma R \cos \alpha dt, \quad (15.1)$$

где v — проекция скорости на направление движения.

Запишем это уравнение сначала в проекции на координатную ось Ox :

$$dm = \rho dx dy dz.$$

Равнодействующая внешних сил R_x в проекции на ось Ox равна сумме проекций поверхностных dP_x и объемных dF_x сил.

Проекция равнодействующей поверхностных сил (сил гидродинамического давления)

$$dP_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Проекция объемной силы

$$dF_x = \rho dW X = \rho X dx dy dz.$$

Таким образом,

$$R_x = dP_x + dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho X dx dy dz,$$

где p , ρ , X — соответственно гидродинамическое давление в точке, плотность жидкости и проекция ускорения объемной силы на ось Ox , а dx , dy , dz — ребра параллелепипеда.

Уравнение импульсов в проекции на ось Ox имеет вид:

$$dm du = R_x dt \quad (15.1a)$$

или

$$\rho dx dy dz du = \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho X dx dy dz \right\} dt. \quad (15.16)$$

Сокращая на $\rho dx dy dz$, т. е. относя уравнение к единице массы, получаем дифференциальное уравнение

$$du = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \right) dt = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dt + X dt. \quad (15.2)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\int_0^u du = \int_0^\tau -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dt + \int_0^\tau X dt,$$

где τ — время действия импульса.

Но

$$\int_0^u du = u - 0 = u;$$

$$\int_0^{\tau} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dt = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\tau} p dt.$$

Учитывая, что $p = p(x, y, z, t)$ и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\tau} -\frac{p}{\rho} dt = \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x}$, а также $X = \text{const.}$ $\int_0^{\tau} X dt = X\tau \approx 0$ (так как $\tau \approx 0$, принято очень малым), получаем:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + X\tau \approx \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Аналогично найдем соответствующие уравнения в проекциях на ось Oy и Oz .

Напишем теперь всю систему¹:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Из (15.3) видно, что проекции скорости частицы жидкости в волновом процессе определяются как частные производные некоторой функции F по координатам, причем

$$F(x, y, z, t) = \int_0^{\tau} -\frac{p}{\rho} dt.$$

Но известно, что при безвихревом движении проекции скорости определяются как частные производные от потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$, т. е. как

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

¹ В этой главе проекции скорости по координатным осям обозначены u , v и w , а не u_x , u_y и u_z .

Следовательно, функция $F(x, y, z, t)$ представляет собой потенциал скорости волновых движений

$$\varphi = \int_0^t \frac{p}{\rho} dt. \quad (15.4)$$

Итак, волновые движения оказываются потенциальными. Потенциал скорости, как известно, удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, указанная функция определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial z^2} = 0.$$

Основное уравнение. Поскольку волновые движения являются безвихревыми, т. е. потенциальными, постольку можно воспользоваться интегралом Лагранжа

$$U(x, y, z) - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t) + C. \quad (15.5)$$

Здесь $U(x, y, z)$ — силовая функция; p , v и φ — соответственно гидродинамическое давление в точке, скорость и потенциал скорости; $F(t)$ и C — соответственно произвольная функция времени (не зависящая от координат пространства) и произвольная постоянная интегрирования.

Рассмотрим слагаемые уравнения (15.5).

Первое слагаемое — силовая функция $U(x, y, z)$.

В условиях поля земного тяготения и обычном расположении координатных осей (ось Oz направлена вертикально вверх) функцию $U(x, y, z)$ найдем из уравнения

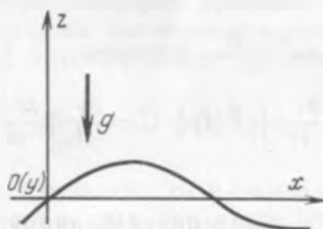


Рис. 15.3.

$$U(x, y, z) = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \int X dx + \\ + Y dy + Z dz.$$

При указанном расположении координатных осей (рис. 15.3) имеем: $X=g_x=0$, $Y=g_y=0$ и $Z=g_z=-g$, поэтому в нашем случае

$$U(x, y, z) = \int -g dz = -gz + C. \quad (15.6)$$

Второе слагаемое для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) равно:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho} + C. \quad (15.7)$$

Третье слагаемое $v^2/2$ мало, так как скорость перемещения частиц жидкости в волновом процессе невелика в сравнении с другими параметрами волн, например со скоростью перемещения волн. Это слагаемое опускаем: $v^2/2 \approx 0$.

Рассмотрим сумму остальных трех слагаемых того же уравнения, а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(t) + C.$$

В производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ потенциал скорости φ является функцией четырех независимых переменных $\varphi(x, y, z, t)$, функция $F(t)$ является функцией только времени t , а C — постоянная величина, поэтому, полагая $F(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$ и $C = \frac{\partial f_1(t)}{\partial t}$, напомним:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(t) + C = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \frac{\partial f_1(t)}{\partial t} = \frac{\partial [\varphi + f(t) + f_1(t)]}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \quad (15.8)$$

Введенную функцию φ' можно рассматривать как потенциал скорости того же движения, которое определяется потенциалом φ , так как производные этих функций φ и φ' по координатам (x, y, z) соответственно равны между собой:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{\partial (\varphi + f(t) + C)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u,$$

аналогично

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w.$$

В связи с этим далее вместо φ' пишем φ , понимая под φ потенциал скорости данного волнового движения.

С учетом приведенных замечаний интеграл Лагранжа (15.5) можем записать в таком виде:

$$-gz - \frac{p}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (15.9)$$

Преобразуем (15.9), прибавляя и вычитая p_0/ρ (p_0 — атмосферное давление):

$$-gz - \frac{p}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho} - \frac{p_0}{\rho} = 0$$

или

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho}.$$

Очевидно,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi + \frac{p_0}{\rho}t\right),$$

или, обозначая $\left(\varphi + \frac{p_0}{\rho}t\right) = \varphi''(x, y, z, t)$, имеем:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi''}{\partial t}.$$

Учитывая сказанное ранее о функции φ' в уравнении (15.8), функцию φ'' принимаем также потенциалом скорости того же движения; тогда, опуская индекс, имеем уравнение

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (15.10)$$

Уравнение (15.10) можно назвать основным уравнением ветровых волн, так как с его помощью, зная потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$, можно решить ряд важнейших задач теории волн.

Так, можно получить уравнение волнового профиля. Поскольку для точек свободной поверхности давление $p = p_0$, из (15.10) следует:

$$z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (15.10a)$$

Понимая здесь z как ординату свободной поверхности z_0 и вычисляя $\varphi(x, y, z, t)$, полагая $z = z_0$, получаем уравнение, определяющее закон распре-

деления гидродинамического давления по глубине. Поскольку $p_{изб} = p - p_0$, то уравнение будет иметь вид:

$$p_{изб} = \rho \left(-gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (15.106)$$

Отметим, что использование этих и других уравнений теории волн требует определения потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$, что возможно путем решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничным и начальным условиям.



Рис. 15.4.

Граничные условия. Будем рассматривать волны в водоеме, свободная поверхность которого безгранично велика (береговая линия удалена в бесконечность). У такого водоема будут только две границы, а именно: неподвижная граница — дно водоема,

которое будем считать горизонтальным, и подвижная граница — свободная (открытая) волновая поверхность, на которой атмосферное давление p_0 будем считать постоянным.

Определим, каким условиям должен удовлетворять потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ на нижней неподвижной границе.

Известно, что для неотрывного обтекания жидкостью твердой неподвижной границы полная скорость движения должна быть направлена по касательной к этой поверхности (рис. 15.4) или (что одно и то же) проекция полной скорости на нормаль к поверхности v_n должна равняться нулю.

Таким образом, должно соблюдаться условие

$$v_n = v \cos \alpha = 0.$$

Но при безвихревом движении проекция полной скорости по любому направлению определяется как частная производная потенциала скорости по этому направлению. Следовательно, граничным условием на неподвижной границе является равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Рассмотрим теперь условие на подвижной волновой свободной поверхности.

Обратимся к основному уравнению (15.10). Для свободной поверхности давление равно атмосферному, т. е. $p=p_0$. Поэтому можем написать:

$$z_0 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t}.$$

Здесь z — координата точек свободной волновой поверхности, а $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости, определенный при значениях $z=z_0$.

Дифференцируя это уравнение по времени, получаем:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (15.11)$$

Но производная $\frac{\partial z_0}{\partial t} = w$, т. е. равна проекции скорости на ось Oz , а скорость w можно определить как производную потенциала скорости по z :

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

После соответствующей подстановки получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (15.12)$$

Уравнение (15.12) и определяет собой условие для потенциала скорости на подвижной границе.

Начальные условия. Начальные условия, так же как и граничные, ставятся для потенциала скорости φ . Очевидно, надо иметь математическое выражение этой функции. В теории потенциальных волн имеются два пути решения этого вопроса.

Можно использовать выражение для потенциала скорости (15.4) и в этом случае за начальное значение φ_0 можно принять значение φ в момент $\tau=\tau_0$, т. е. принять

$$\varphi_0 = \int_0^{\tau_0} -\frac{p \, dt}{\rho}.$$

Однако более удобным оказывается другой путь.

Составим общее выражение для потенциала скорости, имея в виду периодичность колебания регулярных волн. Примем для φ такое выражение:

$$\varphi(x, y, z, t) = \cos \sigma t F(x, y, z). \quad (15.13)$$

Здесь t — время, σ — параметр, определяющий скорость изменения угла θ , равного $\theta = \sigma t$.

Очевидно, что единица измерения σ , с^{-1} , и, следовательно, параметр σ представляет собой угловую скорость (иногда параметр σ называют угловой частотой). Полный цикл колебания определяется углом $\theta = 2\pi$. Время, в течение которого осуществляется этот цикл, представляет собой период колебаний. Таким образом, при $\theta = 2\pi$ время $t = \tau$ и, следовательно, $2\pi = \sigma\tau$, и поэтому параметр $\sigma = 2\pi/\tau$.

Итак, начальное значение потенциала скорости можем принять в форме

$$\varphi_0 = \cos \sigma t_0 F(x, y, z).$$

Время t_0 можем выбрать произвольно.

Рассмотрим функцию $F(x, y, z)$. В уравнении (15.13) функция F является функцией координат пространства и не зависит от времени, а потому она не связана с начальными условиями, но при этом она не может быть и любой произвольной. Действительно, поскольку на потенциал скорости, как указано выше, налагаются граничные условия (15.11) и (15.12), а $\cos \sigma t$ не зависит от граничных условий, так как параметр $\sigma = \text{const}$, а t не зависит от x, y, z , то граничным условиям должна отвечать функция $F(x, y, z)$.

Граничных условий два: на неподвижной границе имеем условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

и на подвижной условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Таким образом, этим условиям должна удовлетворять функция $F(x, y, z)$. Рассмотрим этот вопрос. На неподвижной границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} [\cos \sigma t F(x, y, z)] = \cos \sigma t \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial n} = 0.$$

Отсюда видно, что на неподвижной границе требуется условие

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial n} = 0. \quad (15.14)$$

На подвижной границе по (15.12) должно существовать равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

В левой части уравнения определяем производную $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\cos \sigma t F(x, y, z)] = \cos \sigma t \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}.$$

В правой части определяем вторую производную $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\cos \sigma t F(x, y, z)] = F(x, y, z) \frac{\partial^2 \cos \sigma t}{\partial t^2},$$

но

$$\frac{\partial^2 \cos \sigma t}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \cos \sigma t \right] = \frac{\partial (-\sigma \sin \sigma t)}{\partial t} = -\sigma^2 \cos \sigma t.$$

После подстановки получим

$$\cos \sigma t \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = + \frac{F(x, y, z) \sigma^2 \cos \sigma t}{g}$$

или после сокращения на $\cos \sigma t$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} F(x, y, z). \quad (15.15)$$

Формулы (15.14) и (15.15) и определяют собой граничные условия для $F(x, y, z)$.

15.3. ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Будем рассматривать только плоскопараллельные волны, тождественные в плоскостях, параллельных координатной плоскости zOx . Координатную ось Ox расположим в горизонтальной плоскости, а ось Oz направим вертикально вверх (рис. 15.3).

Потенциал скорости для плоских волн в соответствии с (15.13) выражен в виде

$$\varphi(x, z, t) = \cos \sigma t F(x, z). \quad (15.16)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо выяснить общую структуру функции $F(x, z)$, что возможно, если знать условия, которым она должна удовлетворять. Эти условия, очевидно, связаны с условиями, которым должен отвечать потенциал скорости φ . Известно, что функция $\varphi(x, z)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа и двум граничным условиям.

Функция $F(x, z)$ отличается от функции $\varphi(x, z, t)$ только множителем $\cos \sigma t$, поэтому она должна также отвечать уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (15.17)$$

Далее, потенциал скорости должен отвечать граничным условиям:

на неподвижной границе $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, поэтому для $F(x, z)$,

полагая дно водоема горизонтальным, имеем следующее равенство:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} [\cos \sigma t F(x, z)] = \cos \sigma t \frac{\partial F(x, z)}{\partial n} = 0$$

или в соответствии с (15.14)

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial n} = 0; \quad (15.18)$$

на подвижной границе (т. е. на свободной поверхности) для потенциала скорости φ имеем:

$$\frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (15.19)$$

Определяя производные $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ и учитывая (15.16),

находим условия для функции $F(x, z)$ на подвижной границе в виде равенства

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} F(x, z), \quad (15.20)$$

что соответствует (15.15).

Поскольку функция $F(x, z)$ должна отражать периодическую связь координат x и z для любого момента времени, примем для $F(x, z)$ такую структуру:

$$F(x, z) = P(z) \sin kx. \quad (15.21)$$

Напишем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 [P(z) \sin kx]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [P(z) \sin kx]}{\partial z^2} = 0.$$

Вычислим производные, входящие в это уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [P(z) \sin kx] = -P(z) k^2 \sin kx;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [P(z) \sin kx] = \sin kx \frac{d^2 P(z)}{dz^2}.$$

Тогда уравнение Лапласа будет иметь вид:

$$-P(z) k^2 \sin kx + \sin kx \frac{d^2 P(z)}{dz^2} = 0.$$

Сокращая на $\sin kx$, получаем:

$$\frac{d^2 P(z)}{dz^2} - k^2 P(z) = 0. \quad (15.22)$$

Легко видеть, что это есть однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения. Для (15.22) оно будет иметь вид:

$$r^2 - k^2 = 0.$$

Находим корни этого уравнения

$$r_1 = +k \text{ и } r_2 = -k.$$

Оба корня вещественны и не равны между собой, а потому решением уравнения (15.22) будет уравнение

$$P(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}.$$

Для водоема большой глубины ($h \rightarrow \infty$) второе слагаемое правой части стремится к бесконечности, что приводит к нереальным результатам. Поэтому надо считать $C_2 = 0$ (т. е. принять $C_2 e^{-kz} = 0$), а тогда получим (обозначив $C_1 = C$)

$$P(z) = C e^{kz}, \quad (15.23)$$

что определит функцию $F(x, z)$ и потенциал скорости $\Phi(x, z, t)$:

$$F(x, z) = C e^{kz} \sin kx$$

и

$$\Phi(x, z, t) = C e^{kz} \cos \sigma t \sin kx. \quad (15.24)$$

В уравнение (15.24) входят два параметра, функционально связанные между собой: σ — угловая скорость и k — волновое число.

Эту связь находим, используя уравнение (15.20):

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} F(x, z).$$

Определяем производную в левой части уравнения

$$\frac{\partial F(x, z)}{\partial z} = k C e^{kz} \sin kx.$$

Тогда

$$k C e^{kz} \sin kx = \frac{\sigma^2}{g} C e^{kz} \sin kx$$

или после сокращений общих множителей

$$k = \frac{\sigma^2}{g} \text{ или } \sigma = \sqrt{gk}.$$

Имея теперь конкретные выражения потенциала скорости (15.24) и отмечая, что он выражает стоячие волны (в отличие от прогрессивных волн гребни их не перемещаются вдоль свободной поверхности), можем рассмотреть их основные характеристики.

Волновой профиль. Воспользуемся уравнением (15.10a)

$$z = - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Здесь z — координата точек линии свободной поверхности.

Определим производную $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [C e^{kz} \cos \sigma t \sin kx] = - C \sigma e^{kz} \sin \sigma t \sin kx.$$

Поскольку для точек свободной поверхности координата z мала, можем принять $e^{kz} \approx 1.0$ и тогда после подстановки в (15.10a) получим уравнение волнового профиля

$$z = \frac{C \sigma}{g} \sin \sigma t \sin kx. \quad (15.25)$$

Рассмотрим волновой профиль в тот момент времени t , когда $\sin \sigma t = 1,0$. Для этого момента

$$z = \frac{C\sigma}{g} \sin kx. \quad (15.25a)$$

Здесь $C\sigma/g = \text{const}$. Очевидно, линия свободной поверхности, определяемая (15.25a), представит собой синусоиду (рис. 15.5). Синусоида пересекает ось Ox тогда, когда $z=0$, что имеет место при $\sin kx=0$, т. е. когда угол $\theta=kx$ приобретает значения $\theta=0; \pi; 2\pi; \dots; n\pi$ при n — целом числе.

Указанные точки пересечения синусоидой оси x называются узлами.

Расположение узлов вдоль оси Ox определяется координатами $x_1; x_2 \dots$, удовлетворяющими условиям $kx=\theta$, т. е. $x=\theta/k$. Подставляя значения угла θ , при которых $\sin kx = \sin \theta$ равен нулю, имеем независимо от времени следующий ряд значений координат узлов ($z=0$):

$$x=0; \frac{\pi}{k}; \frac{2\pi}{k}; \frac{3\pi}{k}; \dots; \frac{n\pi}{k}.$$

Поскольку расположение узлов не зависит от времени, т. е. узлы не изменяют своего положения, то колебания линии свободной поверхности происходят по высоте (сверху вниз) и волновой профиль не перемещается вдоль оси Ox . Поэтому такие волны называются стоячими.

Расстояние между узлами

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)\pi}{k} - \frac{n\pi}{k} = \frac{\pi}{k},$$

и оно оказывается одинаковым вдоль оси Ox для всех волн.

Из рис. 15.5 можно видеть, что длина волны равна двойному расстоянию между узлами:

$$\lambda = 2\Delta x = \frac{2\pi}{k}. \quad (15.26)$$

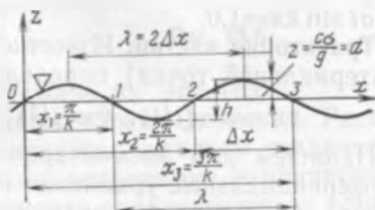


Рис. 15.5.

Из рис. 15.5 видно, что высота волны равна удвоенной амплитуде:

$$h=2a.$$

Амплитуда колебаний различна для различных вертикалей вдоль оси Ox и изменяется по своей величине от нуля в узлах до максимального значения $a=C\sigma/g$ в вертикальных плоскостях, нормальных к оси Ox и расположенных посередине между узлами, когда $\sin \sigma t \sin kx=1,0$.

Траектория частиц. Известно, что траектория частицы (материальной точки) определяется уравнениями

$$x=f_1(t); y=f_2(t) \text{ и } z=f_3(t).$$

Напишем для элементарного перемещения частицы дифференциальные уравнения (в условиях плоского движения) $dx=u dt$ и $dz=w dt$. Здесь под dx и dz понимаем проекции элементарных перемещений. Определяем скорости u и w :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (Ce^{kz} \cos \sigma t \sin kx) = Ce^{kz} \cos \sigma t k \cos kx;$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (Ce^{kz} \cos \sigma t \sin kx) = kCe^{kz} \cos \sigma t \sin kx.$$

Тогда

$$dx=u dt=kCe^{kz} \cos \sigma t \cos kx dt;$$

$$dz=w dt=kCe^{kz} \cos \sigma t \sin kx dt,$$

откуда, определяя отношение $\frac{dz}{dx}$, находим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sin kx}{\cos kx} = \operatorname{tg} kx \text{ и } dz = \operatorname{tg} kx dx = \operatorname{tg} kx \frac{dkx}{k}.$$

Интегрируя, получаем уравнения траектории частицы

$$z = -\frac{\ln \cos kx}{-k} + C \text{ или } kz + \ln \cos kx = C$$

или иначе

$$\ln e^{kz} + \ln \cos kx = \ln C$$

или

$$\ln e^{kz} \cos kx = \ln C.$$

Окончательно запишем:

$$e^{kz} \cos kx = C. \quad (15.27)$$

Таким образом, перемещения частиц в процессе волновых колебаний происходят по линиям, не изменяющим своего положения в пространстве. Задавая ряд значений C_1, C_2 и т. д., найдем траектории ряда отдельных частиц. Семейство линий, описываемых уравнением (15.27), изображено на рис. 15.6.

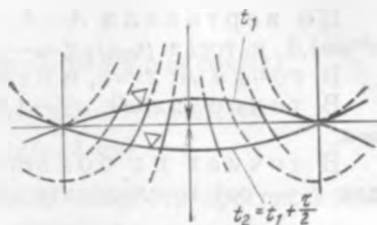


Рис. 15.6.

Распределение гидродинамического давления. Распределение давления в пространстве, занятом жидкостью, при наличии волн, очевидно, непрерывно изменяется по времени и для любого момента определяется из общего уравнения (15.10)

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Если потенциал скорости φ выразить по уравнению (15.24), то для стоячих волн запишем:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz + C e^{kz} \sin \omega t \sin kx. \quad (15.28)$$

Затем, разделив на g , получим основное уравнение распределения давления для стоячих волн

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} - z + \frac{C e^{kz}}{g} \sin \omega t \sin kx, \quad (15.28a)$$

или так как $p - p_0 = p_{изб}$, то

$$\frac{p_{изб}}{\rho g} = -z + \frac{C e^{kz}}{g} \sin \omega t \sin kx.$$

Рассмотрим распределение $p_{изб}/\rho g$ по трем вертикалям в момент t , когда $\sin \omega t = 1, 0$.

По вертикали $B-B$ (рис. 15.7). Здесь $\sin kx = 0$, и тогда $p_{изб}/\rho g = -z$, что графически представится линией $B-b$, т. е. распределение давления происходит по закону треугольника.

По вертикали $A-A$. Здесь $\sin kx=1,0$; $C\sigma/g=a$; $e^{kz}=1,0$, и тогда $p_{изб}/\rho g = -z + a$.

В точке A : $z=a$, и тогда $p_{изб}/\rho g = -a + a = 0$.

В точке I : $z=0$; $e^{kz} \rightarrow 1,0$, и тогда $p_{изб}/\rho g = -0 + a = a$.

В точках на большой глубине: $ae^{kz} \rightarrow 0$ (так как $z \rightarrow -\infty$) и, следовательно, $p_{изб}/\rho g = -z$.

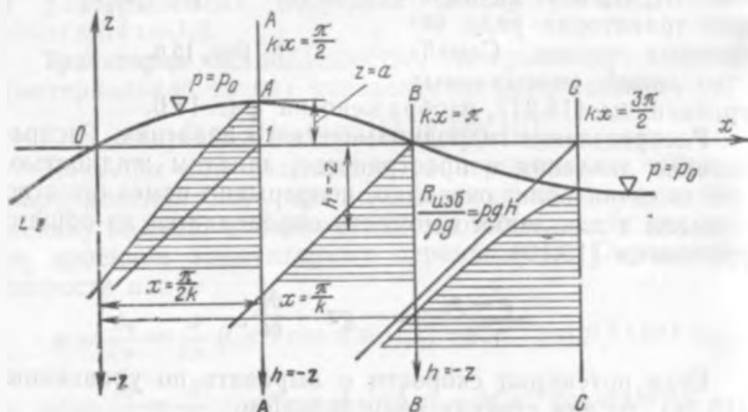


Рис. 15.7.

Форма эпюры для $p_{изб}/\rho g$ указана на рис. 15.7. На этом рисунке изображена эпюра распределения избыточного давления и по вертикали $C-C$.

15.4. ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ

В реальных условиях встречаются преимущественно прогрессивные волны, т. е. перемещающиеся в горизонтальном направлении. Координаты узлов (точек пересечения волнового профиля с осью Ox) перемещаются вдоль оси Ox , т. е. они являются функциями времени. Это указывает на то, что потенциал скорости должен содержать в себе тригонометрическую (периодическую) функцию (непрерывно изменяемый угол должен связывать время и координату x).

Сложим два потенциала φ_1 и φ_2 .

Пусть

$$\varphi_1 = Ce^{kz} \cos \sigma t \sin kx;$$

$$\varphi_2 = Ce^{kz} \cos kx \sin \sigma t,$$

тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Ce^{kz} (\sin kx \cos \sigma t + \sin \sigma t \cos kx),$$

и так как $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta)$, то

$$\varphi = Ce^{kz} \sin(\sigma t + kx).$$

Очевидно, φ есть потенциал скорости прогрессивных волн, так как координата x равна:

$$x = \frac{\theta - \sigma t}{k} = f(t),$$

т. е. является функцией времени.

Волновой профиль. Уравнение волнового профиля при потенциале скорости находим из основного уравнения (15.10а)

$$z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Определив производную $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C\sigma e^{kz} \cos(\sigma t + kx)$ и сделав подстановку в основном уравнении, найдем уравнение волнового профиля (полагая, как и ранее, $e^{kz} \approx 1,0$)

$$z = -\frac{C\sigma}{g} \cos(\sigma t + kx).$$

Координаты узлов находим из условия

$$\cos(\sigma t + kx) = 0,$$

что имеет место, когда угол $\theta = \sigma t + kx$ равен:

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \dots; \frac{n\pi}{2}$$

при n — нечетном, и, следовательно, можно написать для координат узлов

$$x = \frac{\theta - \sigma t}{k} = \frac{\frac{n\pi}{2} - \sigma t}{k} = \frac{n\pi}{2k} - \frac{\sigma t}{k},$$

где n — целое нечетное число.

Расстояние между узлами

$$\Delta x = \left[\frac{(n+2)\pi}{2k} - \frac{\sigma t}{k} \right] - \left[\frac{n\pi}{2k} - \frac{\sigma t}{k} \right] = \frac{\pi}{k},$$

при этом длина волны (рис. 15.8)

$$\lambda = 2\Delta x = \frac{2\pi}{k},$$

т. е. та же, что и для стоячих волн.

Период колебаний $\tau = 2\pi/\sigma$ представляет собой время, в течение которого перемещающаяся волна пройдет расстояние, равное длине волны.

Скорость волны

$$c = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (15.29)$$

Для скорости c можно написать ряд других выражений. Поскольку $\lambda = 2\pi/k$, а $\tau = 2\pi/\sigma$, то

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{2\pi}{k} \frac{\sigma}{2\pi} = \frac{\sigma}{k},$$

а так как $\sigma = \sqrt{gk}$, то можно написать

$$c = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

и, наконец, так как $k = 2\pi/\lambda$, то получаем

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

а приняв $g = 9,81$ м/с², получаем следующую приближенную формулу для определения скорости волны:

$$c \approx 1,25 \sqrt{\lambda}. \quad (15.29a)$$

Отметим, что в этой формуле λ должно измеряться в метрах. Например, пусть длина волны $\lambda = 100$ м, тогда

$$c = 1,25 \sqrt{100} = 12,5 \text{ м/с.}$$

Траектории частиц. Уравнение траектории частиц составим так же, как указано для стоячих волн.

Определяем:

$$dx = u dt = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt;$$

$$dz = w dt = \frac{\partial \varphi}{\partial z} dt;$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [Ce^{kz} \sin(\sigma t + kx)] = Ce^{kz} k \cos(\sigma t + kx);$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [Ce^{kz} \sin(\sigma t + kx)] = kCe^{kz} \sin(\sigma t + kx).$$

Деля подстановку и интегрируя, имеем:

$$x = \int Ce^{kz} k \cos(\sigma t + kx) dt = Ce^{kz} k \times \\ \times \int \frac{\cos(\sigma t + kx) d(\sigma t + kx)}{1} = -\frac{Ck}{\sigma} e^{kz} \sin(\sigma t + kx) + C_1;$$

$$z = \int Ce^{kz} k \sin(\sigma t + kx) dt = Ce^{kz} k \times \\ \times \int \frac{\sin(\sigma t + kx) d(\sigma t + kx)}{1} = -\frac{Ck}{\sigma} e^{kz} \cos(\sigma t + kx) + C_2.$$

Полагая $C_1=0$ и $C_2=0$, а затем составляя сумму x^2+z^2 , получаем:

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{Ck}{\sigma} e^{kz}\right)^2 [\sin^2(\sigma t + kx) + \cos^2(\sigma t + kx)].$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, равно единице, тогда, обозначив

$$\frac{Ck}{\sigma} e^{kz} = R,$$

получим уравнение траектории частицы

$$x^2 + z^2 = R^2, \quad (15.30)$$

которое, как известно, представляет собой уравнение окружности в плоскости zOx , радиус которой в дан-

ном случае равен $R = \frac{Ck}{\sigma} e^{kz}$, или так как $k = \sigma^2/g$, то

$$R = \frac{C\sigma}{g} e^{kz} = ae^{kz},$$

где a — амплитуда колебаний.

Итак, траектория частиц жидкости в прогрессивных волнах является окружностью (рис. 15.9).

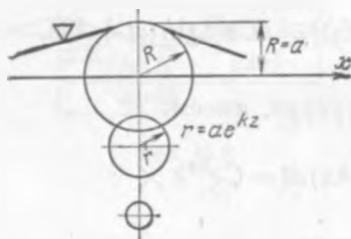


Рис. 15.9.

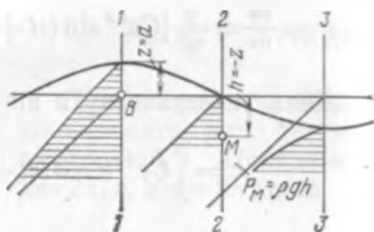


Рис. 15.10.

Радиус окружности очень быстро уменьшается с увеличением глубины центра вращения данной частицы.

Распределение гидродинамического давления. Как и для стоячих волн, воспользуемся основным уравнением (15.10)

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Для прогрессивных волн потенциал скорости имеет вид:

$$\varphi = Ce^{kz} \sin(\sigma t + kx).$$

Основное уравнение распределения давления для прогрессивных волн имеет вид:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz - C\sigma e^{kz} \cos(\sigma t + kx)$$

или

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = -z - \frac{C\sigma}{g} e^{kz} \cos(\sigma t + kx) = -z - ae^{kz} \cos \theta.$$

График распределения давления показан на рис. 15.10.

15.5. ТРОХОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

Как отмечено было выше, теория трохоидальных волн была опубликована Герстнером в 1802 г. Волны, изученные Герстнером, называются трохоидальными, потому что волновой их профиль имеет форму трохойды (рис. 15.11).

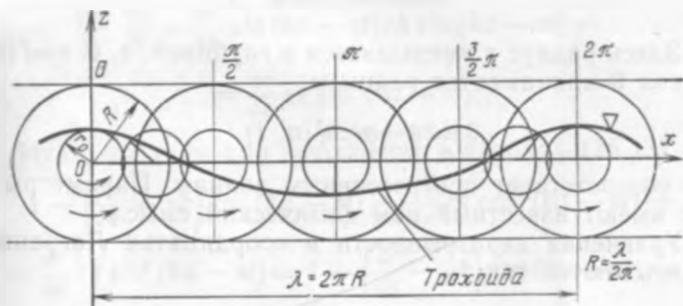


Рис. 15.11.

Теория Герстнера построена на гипотезе о круговом движении частиц жидкости при убывании радиуса траекторий с глубиной. Так в соответствии с этой гипотезой движутся все частицы жидкости, жидкость считается невязкой и несжимаемой. Описание движения должно удовлетворять основным уравнениям гидромеханики — уравнению неразрывности и уравнению движения.

Рассмотрим в краткой форме эту теорию в рамках плоской задачи (в плоскости xOz).

В координатах Лагранжа уравнения движения записываются в форме системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, c, t); \\ z &= f_2(a, c, t), \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

где a и c — начальные координаты данной точки.

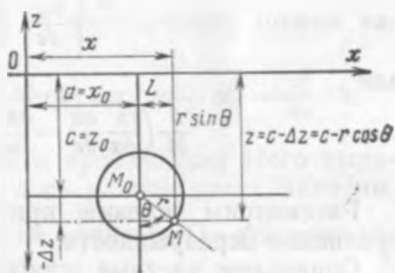


Рис. 15.12.

В нашем случае начальными координатами движущейся точки (частицы) M будут координаты ее в состоянии равновесия, т. е. координаты точки O — центра окружности, по которой она движется. В соответствии с этим будем иметь (рис. 15.12):

$$\left. \begin{aligned} x &= a + r \sin \theta; \\ z &= c - r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Здесь радиус r уменьшается с глубиной, т. е. $r=f(c)$, а угол θ принимается равным:

$$\theta = ka - \sigma t = f(a, t),$$

что соответствует прогрессивным волнам. Параметры k и σ имеют известный нам физический смысл.

Уравнения неразрывности в координатах Лагранжа записываются так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a} \right) = 0. \quad (15.33)$$

Рассмотрим условия, при которых удовлетворяется уравнение неразрывности.

Определим частные производные, входящие в уравнение (15.33):

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} [a + r \sin(ka - \sigma t)] = 1 + rk \cos(ka - \sigma t);$$

$$\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} [a + r \sin(ka - \sigma t)] = \frac{dr}{dc} \sin(ka - \sigma t);$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} [c - r \cos(ka - \sigma t)] = rk \sin(ka - \sigma t);$$

$$\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} [c - r \cos(ka - \sigma t)] = 1 - \frac{dr}{dc} \cos(ka - \sigma t).$$

Вычисляя выражение в скобках (15.33), получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} &= 1 - \frac{dr}{dc} \cos(ka - \alpha t) + rk \cos(ka - \alpha t) - \\ &- \frac{dr}{dc} rk \cos^2(ka - \alpha t) = 1 - \left(\frac{dr}{dc} - rk\right) \cos(ka - \alpha t) - \\ &- \frac{dr}{dc} rk \cos^2(ka - \alpha t); \\ \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{dr}{dc} \sin(ka - \alpha t) rk \sin(ka - \alpha t) = \\ &= \frac{dr}{dc} rk \sin^2(ka - \alpha t).\end{aligned}$$

Итак, получим для выражения в скобках (15.33)

$$\begin{aligned}1 - \left(\frac{dr}{dc} - rk\right) \cos(ka - \alpha t) - \frac{dr}{dc} rk \cos^2(ka - \alpha t) - \\ - \frac{dr}{dc} rk \sin^2(ka - \alpha t) = 1 - \left(\frac{dr}{dc} - rk\right) \cos(ka - \alpha t) - \\ - \frac{dr}{dc} rk [\cos^2(ka - \alpha t) + \sin^2(ka - \alpha t)],\end{aligned}$$

а так как $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, то окончательно можем написать:

$$\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a} = 1 - \left(\frac{dr}{dc} - rk\right) \cos(ka - \alpha t) - \frac{dr}{dc} rk.$$

По условию непрерывности производная этого выражения по времени должна быть равной нулю. Заметим, что 1 и $\frac{dr}{dc} rk$ не зависят от времени. По условию непрерывности должно быть:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{dr}{dc} - rk\right) \cos(ka - \alpha t) \right] = 0, \quad (15.34)$$

но $\frac{\partial}{\partial t} [\cos(ka - \alpha t)] \neq 0$, поэтому необходимо, чтобы имело место равенство

$$\left(\frac{dr}{dc} - rk\right) = 0 \quad (15.35)$$

или

$$\frac{dr}{dc} = rk.$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\ln r = kc + C.$$

Но $kc = \ln e^{kc}$, поэтому можем записать:

$$\ln r = \ln e^{kc} + \ln C$$

или

$$\ln \frac{r}{e^{kc}} = \ln C,$$

откуда получим

$$r = Ce^{kc}. \quad (15.36)$$

Для частиц жидкости, находившихся в условиях равновесия $c=0$ (начальное значение координаты z), постоянная интегрирования C равна радиусу R (это будет максимальным значением для r), тогда можно написать:

$$r = Re^{kc}.$$

На бесконечно большой глубине $c = -\infty$ ($c < 0$), и тогда

$$r = 0.$$

Итак, система уравнений движения жидких частиц (15.32) удовлетворяет уравнению неразрывности, и при этом имеет место условие (15.36).

Рассмотрим теперь условия, при которых та же система (15.32) удовлетворяет основным уравнениям гидродинамики.

В рамках плоской задачи основные уравнения гидродинамики, записанные в координатах Лагранжа в условиях, когда внешними массовыми силами являются силы земного притяжения, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left(g + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \left(g + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \frac{\partial z}{\partial c} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (15.37)$$

Вычисляем вторые производные $\frac{d^2 x}{dt^2}$ и $\frac{d^2 z}{dt^2}$ (т. е. проекции ускорения движения)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [a + r \sin(ka - \omega t)] = -r\omega^2 \sin(ka - \omega t);$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [c - r \cos(ka - \omega t)] = r\omega^2 \cos(ka - \omega t).$$

Затем вычисляем отдельные слагаемые левой части каждого из уравнений системы (15.37), используя при этом уравнения (15.32) и вычисленные ранее частные производные.

Результативно после необходимых подстановок получим основную систему уравнений гидродинамики (15.37) для рассматриваемого случая волновых движений в виде двух следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (gk - \sigma^2) r \sin(ka - \sigma t) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ (g - kr^2 \sigma^2) - (gk - \sigma^2) r \cos(ka - \sigma t) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (15.37a)$$

Умножая первое уравнение на da и второе на dc и складывая, получаем:

$$\begin{aligned} (gk - \sigma^2) r \sin(ka - \sigma t) da + (g - kr^2 \sigma^2) dc + \\ + [(\sigma^2 - gk) r \cos(ka - \sigma t)] dc = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial a} da + \right. \\ \left. + \frac{\partial p}{\partial c} dc \right) = -\frac{dp}{\rho}. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} -(gk - \sigma^2) \frac{r}{k} \cos(ka - \sigma t) + gc - kR^2 \frac{e^{2kc}}{2k} \sigma^2 + \\ + (\sigma^2 - gk) \cos(ka - \sigma t) \frac{Re^{kc}}{k} + C = -\frac{p}{\rho}; \end{aligned}$$

или, замечая, что $-(gk - \sigma^2) = \sigma^2 - gk$, а также что $Re^{kc} = r$, после подстановок и сокращений имеем:

$$\frac{p}{\rho} = -gc + \frac{\sigma^2 r^2}{2} - 2(\sigma^2 - gk) \frac{r}{k} \cos(ka - \sigma t) + C. \quad (15.38)$$

Определим постоянную интегрирования из условий на свободной поверхности.

На свободной поверхности имеем давление p_0 (атмосферное давление), $c=0$ и радиус $r=Re^{kc}=R$.

Следовательно, можем записать:

$$\frac{p_0}{\rho} - \frac{\sigma^2 R^2}{k} + 2(\sigma^2 - gk) \frac{R}{k} \cos(ka - \sigma t) = C = \text{const.} \quad (15.38a)$$

В левой части уравнения (15.38а) все слагаемые должны быть постоянными величинами, поэтому и третье слагаемое должно быть постоянной величиной, т. е. должно быть

$$2(\sigma^2 - gk) \frac{R}{k} \cos(ka - \sigma t) = \text{const.}$$

Очевидно, что производная по времени левой части этого равенства должна равняться нулю, так как производная правой части равна нулю $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2(\sigma^2 - gk) \frac{R}{k} \cos(ka - \sigma t) \right\} = 0,$$

что возможно только при условии следующего равенства:

$$\sigma^2 - gk = 0 \text{ или } \sigma^2 = gk.$$

Отметим, что таким образом известная связь между параметрами σ и k сохраняется и для трохондальных волн.

Итак, постоянная интегрирования C равна:

$$C = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\sigma^2 R^2}{2}.$$

Делая подстановку этого значения C в уравнение (15.38) и учитывая условие $\sigma^2 - gk = 0$, получаем:

$$\frac{p}{\rho} = -gc + \frac{\sigma^2 r^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} - \frac{\sigma^2 R^2}{2},$$

откуда

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gc + \frac{\sigma^2}{2} (r^2 - R^2).$$

Но известно, что $r = Re^{ikc}$, а поэтому

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gc + \frac{\sigma^2 R^2}{2} (e^{2ikc} - 1) \quad (15.39)$$

или

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gc - \frac{\sigma^2 R^2}{2} (1 - e^{2ikc}) \quad (15.39a)$$

или иначе

$$\frac{p_{\text{max}}}{\rho g} = -c - \frac{(\sigma R)^2}{2g} (1 - e^{2ikc}). \quad (15.40)$$

Волновой профиль. Отметим наличие некоторого сходства между рассмотренными выше прогрессивными волнами и волнами трохондальными.

В обоих случаях имеем:

$$r = Re^{ikc} \text{ (или } r = Re^{ikz}); \sigma^2 = gk;$$

в обоих случаях длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

и, очевидно, скорость волны

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Но волновой профиль по Герстнеру — трохонды, а для потенциальных прогрессивных волн — косинусоиды.

Составим уравнение волнового профиля, исходя из исходных уравнений круговых движений частиц жидкости:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + r \sin \theta; \\ z &= c - r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.41)$$

Для точек, лежащих на линии свободной поверхности, центр окружности (т. е. центр траектории этих частиц) лежит на уровне свободной поверхности в равновесном состоянии жидкости, т. е. $c=0$.

Угол θ , как было принято, равен:

$$\theta = ka - \sigma t,$$

откуда

$$a = \frac{\theta + \sigma t}{k} \text{ или } a = \frac{\lambda(\theta + \sigma t)}{2\pi}.$$

Здесь для момента $t=0$

$$a = \frac{\lambda \theta}{2\pi}.$$

Учитывая, что $\lambda = 2\pi R_{\text{тр}}$ (рис. 15.11), получаем

$$a = R_{\text{тр}} \theta$$

и тогда из (15.41) получаем систему уравнений волнового профиля

$$\left. \begin{aligned} x &= R_{\text{гп}} \theta + R \sin \theta; \\ z &= -R \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (15.42)$$

Система (15.42) и представляет собой уравнения трохонды.

15.6. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

В естественных условиях регулярные волны могут наблюдаться очень редко. Почти всегда волновая поверхность имеет очень сложную форму, которую можно рассматривать как результат сложения ряда волн с различными параметрами. Для изучения таких волновых движений приходится вводить теоретические модели, при этом стремясь возможно ближе подойти к реальному явлению.

Наблюдения показывают, что морские волны при больших глубинах и достаточном удалении от береговой зоны (с известным приближением) могут рассматриваться как плоские, образованные сложением плоских волн, различной длины и высоты. В теоретическом и практическом отношении эти волны имеют существенное значение.

Остановимся здесь на рассмотрении простейшего случая, когда данный волновой процесс возникает в результате сложения двух прогрессивных волн, определяемых, например, такими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{C_1 \sigma_1}{g} \cos(\sigma_1 t + k_1 x); \\ z &= \frac{C_2 \sigma_2}{g} \cos(\sigma_2 t + k_2 x). \end{aligned} \right\} \quad (15.43)$$

Слагаемые волны относятся к потенциальным движениям, поэтому рассматриваемое суммарное волновое движение будет также потенциальным.

Построим профиль такой волны. Допустим, что в какой-то момент времени узлы слагаемых волн совпали в точке O , которую примем за начало координат. Тогда в результате сложения двух различных косинусоид получим профиль рассматриваемой волны. На рис. 15.13 показан волновой профиль, построенный при сложении

двух прогрессивных волн с произвольно принятыми длинами и высотой.

Здесь можно видеть образование ряда тождественных групп волн, чередующихся одна за другой. В рамках каждой группы находится несколько отдельных волн, различных по высоте и форме.

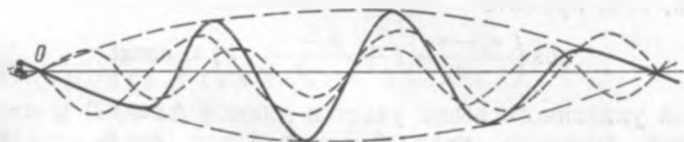


Рис. 15.13.

Волновой профиль. Уравнение волнового профиля получим в результате сложения уравнений (15.43) в таком виде (полагаем $C_1=C_2$):

$$z = \frac{C}{g} [\sigma_1 \cos(\sigma_1 t + k_1 x) + \sigma_2 \cos(\sigma_2 t + k_2 x)]. \quad (15.44)$$

С учетом известного равенства

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

перепишем уравнение (15.44) в таком виде (полагая $C_1 \sigma_1 / g = C_2 \sigma_2 / g = C \sigma / g$):

$$z = 2 \frac{C \sigma}{g} \cos \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 + k_2}{2} x \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x \right). \quad (15.44a)$$

Рассмотрим случай, когда параметры k_1 и k_2 по своему значению мало отличаются друг от друга, а следовательно, мало отличаются и параметры σ_1 и σ_2 ($\Delta \sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{g} (\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2})$). В пределе $k_1 \rightarrow k_2$ и $\Delta \sigma \rightarrow 0$). При таких условиях угол θ_1 , равный:

$$\theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x,$$

мало изменяется на значительной длине Δx (например, при $k_1 = 0,0314$, $k_2 = 0,0294$ получим изменение угла $\Delta \theta =$

$$= \theta'', -\theta' = 0,10\pi, \text{ которое происходит на расстоянии}$$

$$\Delta x = \frac{0,10\pi}{\frac{k_1 - k_2}{2}} \approx \frac{2 \cdot 0,10\pi}{0,002} = 314 \text{ м}), \text{ а тогда косинус угла}$$

$\cos \theta_1$ будет мало изменяться, и, следовательно, на этом расстоянии Δx можно принять величину $\cos \theta_1$ неизменной, т. е. принять

$$\cos \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) \approx \text{const}$$

[для указанного выше участка длиной $\Delta x \approx 300$ м изменение косинуса угла θ_1 составляет $\cos \theta_1 - \cos(\theta + 0,1\pi) \approx 1,00 - 0,98 = 0,02$, т. е. $\approx 2\%$].

В связи с этим можно считать, что

$$2 \frac{C_2}{g} \cos \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) = \text{const} = A. \quad (15.45)$$

Уравнение волнового профиля для участка Δx получим из (15.45) в таком виде:

$$z = A \cos \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 + k_2}{2} x \right) = A \cos \theta_1. \quad (15.46)$$

Нетрудно видеть, что в этом уравнении величина A

явится наибольшей амплитудой для отдельных волн данного участка Δx .

Но $\cos \theta_1$ изменяется от 0 до 1,0, и, следовательно, в пределах данной группы волн амплитуда A изменяется от 0 до A .

Определим длину одной из волн с амплитудой A в пределах данной

группы. Первый узел волны будет иметь координаты (при $\theta_2 = 0$)

$$z_1 = 0 \text{ и } x_1 = \frac{0 - (\sigma_1 + \sigma_2) t}{k_1 + k_2},$$

а второй узел (при $\theta_2 = \pi$)

$$z = 0 \text{ и } x_2 = \frac{2\pi - (\sigma_1 + \sigma_2) t}{k_1 + k_2}.$$

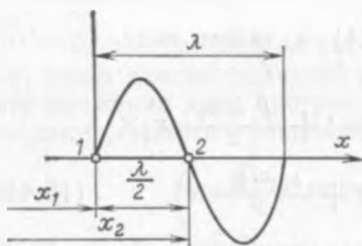


Рис. 15.14.

Таким образом, длина полуволны (рис. 15.14)

$$\frac{\lambda}{2} = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k_1 + k_2}.$$

Длина волны $\lambda = 2\Delta x$, т. е.

$$\lambda = \frac{4\pi}{k_1 + k_2} = \frac{2\pi}{\frac{k_1 + k_2}{2}}. \quad (15.47)$$

Скорость отдельной волны

$$c = \frac{\lambda}{\tau},$$

Здесь τ — период колебаний; $\tau = 2\pi/\sigma$.

Итак,

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

или

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (15.48)$$

Длину одной группы волн можно определить следующим образом. Рассмотрим уравнение волнового профиля

$$z = A \cos \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 + k_2}{2} x \right) = A \cos \theta_2. \quad (15.49)$$

Здесь, как было указано выше, величина A определяется выражением

$$A = 2 \frac{C\sigma}{g} \cos \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) = 2a \cos \theta_1. \quad (15.50)$$

Эта величина мало изменяется на небольшом протяжении вдоль оси Ox («медленно изменяется», т. е. $\frac{dA}{dx} \approx 0$), но в пределах одной группы волн величина A изменяется от 0 при $\cos \theta_1 = 0$, т. е. при $\theta = n\pi/2$, и до 0 также при $\theta = 0$, но уже при $\theta_1 = (n+2)\pi/2$, где n — нечетное число, проходя при этом свой максимум $A = 2a$ при $\cos \theta_1 = 1$ (рис. 15.15).

Очевидно, что косинусоида $2a \cos \theta_1$ описывает границу максимальных значений амплитуды A отдельных

волн внутри данной группы. Длина косинусоиды (равная расстоянию между узлами этой косинусоиды) и определит собой длину данной группы волн.

Определим $l = x_2 - x_1$. Имеем:

$$\cos \theta_1 = \cos \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x \right).$$

В точке 1 (первый узел, рис. 15.15) имеем $z=0$ при $\theta=\pi/2$.

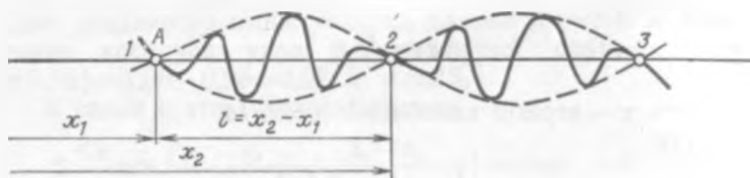


Рис. 15.15.

В таком случае из уравнения

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + \frac{k_1 - k_2}{2} x_1 = \frac{\pi}{2}$$

находим x_1 :

$$x_1 = \frac{\pi}{k_1 - k_2} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) t}{k_1 - k_2}.$$

В точке 2 (второй узел, рис. 15.15) имеем $z=0$ при $\theta=3\pi/2$, и тогда

$$x_2 = \frac{3\pi - (\sigma_1 - \sigma_2) t}{k_1 - k_2}.$$

Таким образом, длина группы волн равна:

$$l_{гp} = x_2 - x_1 = \frac{3\pi - (\sigma_1 - \sigma_2) t}{k_1 - k_2} - \frac{\pi - (\sigma_1 - \sigma_2) t}{k_1 - k_2} = \frac{2\pi}{k_1 - k_2}. \quad (15.51)$$

Определим теперь скорость, с которой рассматриваемая группа волн переходит из одной позиции в другую. Такую скорость называют групповой скоростью.

Очевидно, что при таком переходе каждый узел данной группы волн проходит расстояние, равное длине

этой группы, т. е. $l_{гр}$. Этот переход осуществляется за время t , равное полупериоду:

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Следовательно, групповая скорость волн равна:

$$c_{гр} = \frac{l_{гр}}{\tau/2} = \frac{2l_{гр}}{\tau}.$$

Период $\tau = 2\pi/(\sigma_1 - \sigma_2)$, где величина $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ представляет собой параметр σ , именуемый иногда угловой скоростью данного волнового движения.

Но $l_{гр} = \frac{2\pi}{k_1 - k_2}$, а $\tau = \frac{2\pi}{\sigma_1 - \sigma_2}$, следовательно, скорость $c_{гр}$ равна:

$$c_{гр} = \frac{2\pi}{k_1 - k_2} : \frac{2\pi}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k}.$$

Можно принять

$$c = \frac{d\sigma}{dk}.$$

Как известно, $\sigma = f(k) = \sqrt{gk}$, поэтому

$$c_{гр} = \frac{d}{dk} (\sqrt{gk}) = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (15.52)$$

Но $\sqrt{g/k}$ представляет собой скорость одиночной волны c , т. е. $\sqrt{g/k} = c$, поэтому групповая скорость оказывается равной половине скорости одиночной волны, входящей в состав данной группы.

15.7. ВОЛНЫ ПРИ НЕБОЛЬШОЙ ГЛУБИНЕ ВОДОЕМА (ВОЛНЫ НА МЕЛКОВОДЬЕ)

При глубине воды, меньшей половины длины волны ($h < \lambda/2$), водоем называют водоемом малой глубины, или мелководьем. Параметры волн на таком водоеме отличаются от параметров волн при больших глубинах. Особенно заметно это различие при набегании волн на пологий береговой откос.

Рассмотрим зависимости, определяющие характеристики этих волн. Прежде всего отметим, что все основные дифференциальные уравнения теории волн являют-

ся общими для волн на водоемах как большой, так и малой глубины. В соответствии с этим волновые движения на водоемах малой глубины оказываются потенциальными, потенциал скорости для которых можно принять равным (для плоских волн)

$$\varphi = \cos \sigma t F(x, z), \quad (15.53)$$

где функция $F(x, z)$, определяется уравнением

$$F(x, z) = (C_1 e^{hz} + C_2 e^{-hz}) \sin kx, \quad (15.54)$$

и, следовательно, для потенциала скорости можно написать:

$$\varphi = (C_1 e^{hz} + C_2 e^{-hz}) \cos(\sigma t) \sin(kx).$$

Ранее было указано, что если глубина водоема неограниченно велика ($z \rightarrow -\infty$), то слагаемое $C_2 e^{-hz}$ приводит к нереальным результатам, и было принято $C_2 = 0$.

В данном случае $z = -h$, где h — конечная величина, и $C_2 \neq 0$.

Для установления значений C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями на неподвижной границе (считая дно водоема горизонтальным). В этом случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Определяем производную $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (k C_1 e^{kz} - k C_2 e^{-kz}) \cos \sigma t \sin kx = 0,$$

откуда находим

$$C_1 e^{hz} - C_2 e^{-hz} = 0$$

и при $z = -h$

$$C_1 e^{-kh} = C_2 e^{+kh} = \text{const} = \frac{C}{2}.$$

Из этих равенств находим выражения для C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{C}{2e^{-kh}} = \frac{C e^{kh}}{2}$$

и аналогично

$$C_2 = \frac{C}{2e^{kh}} = \frac{C e^{-kh}}{2}.$$

Делая подстановку в уравнение (15.54), получаем для потенциала скорости

$$\varphi = C \left(\frac{e^{kh} e^{kx}}{2} + \frac{e^{-kh} e^{-kx}}{2} \right) \cos \sigma t \sin kx.$$

Но $e^{kh} e^{kx} = e^{k(h+x)}$, а $e^{-kh} e^{-kx} = e^{-k(z+h)}$, поэтому

$$\varphi = C \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \cos \sigma t \sin kx.$$

С учетом известной формулы $0,5(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$ окончательно получаем:

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(z+h) \cos \sigma t \sin kx. \quad (15.55)$$

Связь между параметрами σ и k находим из условий на подвижной границе (на свободной поверхности). Как известно, на подвижной границе имеем условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Находим производные, входящие в это равенство:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = Ck \operatorname{sh} k(z+h) \cos \sigma t \sin kx;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\sigma^2 C \operatorname{ch} k(z+h) \cos \sigma t \sin kx.$$

Делая подстановку в условие на подвижной границе и сокращая подобные члены, получаем:

$$k \operatorname{sh} k(z+h) = + \frac{\sigma^2}{g} \operatorname{ch} k(z+h).$$

В этом равенстве можно принять $z \approx 0$ (как малую величину для свободной поверхности в сравнении с глубиной h) и тогда записать его так:

$$k \operatorname{sh} kh = \frac{\sigma^2}{g} \operatorname{ch} kh,$$

откуда

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh$$

и, следовательно,

$$\sigma = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}. \quad (15.56)$$

Волновой профиль. Имеем основное уравнение для волнового профиля в таком виде:

$$z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (15.57)$$

Вычисляя производную $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, считая так же, как и ранее, для φ координату свободной поверхности малой величиной ($z \approx 0$) и $\varphi = C \operatorname{ch} kh \cos \sigma t \sin kx$, после подстановки получаем:

$$z = + \frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch} kh \sin \sigma t \sin kx. \quad (15.58)$$

Можно записать и иначе. Обозначим

$$A = \frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch} kh (= \text{const}), \quad (15.59)$$

тогда

$$z = A \sin \sigma t \sin kx.$$

Легко видеть, что это уравнение волнового профиля стоячих волн (15.25).

Формула (15.59) позволяет написать уравнение потенциала скорости в виде (15.55).

Определим из (15.59) значение постоянной интегрирования C :

$$C = \frac{gA}{\sigma \operatorname{ch} kh}.$$

Подставляя значение C в уравнение (15.55), найдем

$$\varphi(x, z, t) = \frac{gA}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos \sigma t \sin kx. \quad (15.60)$$

Очевидно, что, имея уравнение потенциала скорости φ и связь между параметрами σ и k , можно установить и все другие характеристики волн. Так, поле скоростей найдем, определив

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

а распределение давлений по уравнению

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Прогрессивные волны. Потенциал скорости прогрессивных волн получим тем же способом, что и для волн на большой глубине.

Напишем для двух потенциалов скорости φ_1 и φ_2 два таких выражения:

$$\varphi_1 = \frac{gA}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos \sigma t \sin kx;$$

$$\varphi_2 = \frac{gA}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \sin \sigma t.$$

Суммируя эти потенциалы, находим искомый результирующий потенциал $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, а именно

$$\varphi = \frac{gA}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(\sigma t + kx). \quad (15.61)$$

Это и есть потенциал скорости прогрессивных волн. Имея в виду обозначение $A = \frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch} kh$, можно написать и другое выражение для функции φ :

$$\varphi = C \operatorname{ch} k(z+h) \sin(\sigma t + kx). \quad (15.62)$$

Связь между параметрами σ и k сохранится той же, что и для стоячих волн.

Для определения этой связи используем условия на подвижной границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (15.63)$$

Вычислив производные $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, принимаем φ по (15.61), а $z=0$, тогда получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = Ck \operatorname{sh} k(z+h) \sin(\sigma t + kx);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\sigma^2 C \operatorname{ch} k(z+h) \sin(\sigma t + kx).$$

После необходимых подстановок и сокращений находим (при $z=0$)

$$k \operatorname{sh} kh = \frac{\sigma^2}{g} \operatorname{ch} kh$$

и, следовательно,

$$\sigma = \sqrt{gk \operatorname{th} kh},$$

т. е. то же, что и для стоячих волн,

Волновой профиль. Запишем основное выражение для волнового профиля

$$z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Определяя $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ так же, как и ранее для свободной поверхности ($z \approx 0$), а поэтому принимая

$$\operatorname{ch} k(z+h) \approx \operatorname{ch} kh$$

и

$$\varphi = C \operatorname{ch} kh \sin(\sigma t + kx),$$

находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C\sigma \operatorname{ch} kh \cos(\sigma t + kx).$$

Тогда

$$z = -\frac{C\sigma}{g} \operatorname{ch} kh \cos(\sigma t + kx). \quad (15.64)$$

Это уравнение сходно с уравнением волнового профиля для прогрессивных волн при $h = \infty$.

Скорость волн определится по формуле

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\sigma}{k}.$$

Полагая, что $\sigma = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$, получаем для определения скорости c формулу

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh}. \quad (15.65)$$

Для волн в водоемах большой глубины ($kh \rightarrow \infty$) $\operatorname{th} kh \rightarrow 1.0$, и тогда скорость распространения волн

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \approx 1.25 \sqrt{\lambda}.$$

Для волн в водоемах малой глубины (kh — мало) $\operatorname{th} kh \rightarrow kh$ ($\operatorname{th} x \rightarrow x$ при $x \rightarrow 0$), и тогда скорость

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} kh} = \sqrt{gh}. \quad (15.66)$$

Это — формула Лагранжа для волновой скорости, она является предельной для волн в водоемах малой глубины.

Отметим также, что и иные параметры для прогрессивных волн на мелководе определяются (подобно изложенному ранее) по известному потенциалу скорости Φ и известной связи между параметрами σ и k .

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

16.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Во многих случаях не удастся описать то или иное явление, связанное с движением жидкости, системой уравнений с надлежащей точностью. При этом становится невозможным аналитическое решение гидравлической задачи. Такая ситуация вынуждает инженера (или исследователя) прибегать к экспериментальному изучению данного явления с помощью его моделирования. К моделированию иногда прибегают и в тех случаях, когда исходная система уравнений надежна, но слишком сложна, когда требуется проверить или уточнить теоретическое решение и т. п.

Моделирование, т. е. исследование объектов познания на их моделях, является понятием достаточно широким. Если модель и моделируемый объект (натура) имеют одну и ту же физическую природу, то такое моделирование называют физическим. Например, моделирование натурального фильтрационного потока жидкости фильтрационным же потоком является физическим. Явление может исследоваться и на основе изучения его модели иной физической природы, если математически они описываются одними и теми же уравнениями. Такое моделирование широко применяется для замены изучения потоков жидкости рассмотрением других явлений, более удобных для лабораторного изучения и позволяющих, в частности, измерять ранее неизвестные величины. Такое моделирование называют аналоговым. Например, замена натурального фильтрационного потока течением электрического тока по про-

воднику является аналоговым моделированием (см. § 13.5.3. Метод ЭГДА).

В тех случаях, когда уравнения, описывающие движение жидкости, достаточно надежны, а решение их оказывается затруднительным, широко используется вычислительная техника, в частности аналоговые вычислительные машины (АВМ). В этой связи можно говорить о математическом моделировании.

Конечной целью физического моделирования потоков жидкости является перенос полученных опытных данных на натурные условия. Последнее можно уверенно сделать лишь при обеспечении подобия явления в натуре и на модели. В этом случае значения натуральных величин получаются простым умножением опытных значений на соответствующий масштаб.

16.2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОДОБИИ

Два потока жидкости считаются гидродинамически подобными, если все параметры, характеризующие их движение, взаимно пропорциональны во всех сходственных точках.

Гидродинамическое подобие возможно, если соблюдается геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Геометрическое подобие общеизвестно, оно состоит в том, что все сходственные линейные элементы двух подобных потоков находятся в одном и том же соотношении:

$$\frac{l_1}{l_2} = \lambda_l = \text{idem},$$

где l_1 и l_2 — соответственно длины сходственных элементов модели и натуре; λ_l — линейный масштаб. Сходственные площади и объемы также находятся в одном и том же соотношении:

$$\frac{w_1}{w_2} = \lambda_w = \lambda_l^2 = \text{idem}$$

и

$$\frac{W_1}{W_2} = \lambda_W = \lambda_l^3 = \text{idem},$$

при этом углы между двумя соответственными направлениями равны между собой.

Кинематическое подобие состоит в том, что в сходственных точках все кинематические параметры находятся в одинаковом отношении, причем векторные величины имеют соответственно одинаковое направление.

Следовательно, во всех сходственных точках для линейной скорости имеем

$$\frac{v_1}{v_2} = \lambda_v = \text{idem},$$

так же и для линейного ускорения

$$\frac{f_1}{f_2} = \lambda_f = \text{idem}.$$

Время прохождения сходственными частицами сходственных расстояний находится (как следствие первых двух условий) также в одном и том же соотношении

$$\frac{t_1}{t_2} = \lambda_t = \text{idem}.$$

Аналогично в одинаковом соотношении будут находиться и другие кинематические параметры — угловая скорость и т. д.

Эти условия дают связь между масштабными коэффициентами. Например, для масштабного коэффициента скорости λ_v получим

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right) \left(\frac{t_2}{t_1} \right) = \lambda_l \lambda_t^{-1},$$

так же и для масштабного коэффициента ускорения

$$\lambda_f = \lambda_l \lambda_t^{-2}.$$

Динамическое подобие характеризуется постоянством отношения сил, действующих на сходственные массы:

$$\frac{F_1}{F_2} = \lambda_F = \text{idem}.$$

Здесь λ_F — масштабный коэффициент сил. Легко установить связь этого коэффициента с другими коэффициентами. Так как сила $F = m j$, а масса $m = \rho W$, то для отношения сил

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 W_1 j_1}{\rho_2 W_2 j_2} = \lambda_\rho \lambda_W \lambda_f.$$

Но $\lambda_v = \lambda^0$, а $\lambda_l = \lambda_l \lambda_l^{-2}$, поэтому результирующе по-лучим

$$\lambda_F = \lambda_l \lambda_l^4 \lambda_l^{-2}.$$

16.3. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

На практике полного динамического подобия потоков жидкости достигнуть не удастся, так как одновременно действующие на жидкость внешние силы могут быть различными по своей физической природе, например, силы земного тяготения, силы поверхностного давления, силы вязкости и пр. Однако часто возможно выделить среди реально действующих сил одну из них в качестве доминирующей, пренебрегая влиянием остальных сил. В таком случае будем иметь не полное, а частичное подобие.

Рассмотрим так называемые критерии подобия. Критерий Ньютона — основной критерий, определяющий полное динамическое подобие по условию (в соответствии с законом Ньютона $F = mj$)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 j_1}{m_2 j_2} = \lambda_F = \text{idem}.$$

Запишем это равенство несколько в иной форме. Как указано было выше,

$$\frac{j_1}{j_2} = \lambda_j = \frac{\lambda_l}{\lambda_l^2}.$$

Поэтому, умножая и деля на λ_l , имеем:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{\lambda_l}{\lambda_l^2} \frac{\lambda_l}{\lambda_l} = \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_l} \right)^2 \frac{1}{\lambda_l},$$

но $\lambda_l / \lambda_l = \lambda_v$, поэтому после подстановки получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 j_1}{m_2 j_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_l} \right)^2 \frac{1}{\lambda_l} = \text{idem},$$

или так как $\lambda_l / \lambda_l = \lambda_v = v_1 / v_2$, а $\lambda_l = l_1 / l_2$, то

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \frac{l_2}{l_1} = \text{idem}.$$

Отсюда находим соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \text{idem}$$

или окончательно

$$\frac{m_1 v_1^2}{F_1 l_1} = \frac{m_2 v_2^2}{F_2 l_2} = Ne = idem.$$

Таким образом, критерий полного подобия запишем так:

$$\frac{mv^2}{Fl} = Ne = idem. \quad (16.1)$$

Здесь число Ne — критерий Ньютона.

Рассмотрим некоторые критерии частичного подобия.

Критерий Фруда. Допустим, что основными силами являются силы земного тяготения, а всеми остальными можно пренебречь (например, при рассмотрении явления водопада).

Тогда $j=g$ и сила F равна:

$$F=mg.$$

Подставляя в формулу критерия Ньютона (16.1) вместо F его частное значение mg , получаем:

$$\frac{mv^2}{Fl} = \frac{mv^2}{mgl} = \frac{v^2}{gl} = idem.$$

Таким образом, в том случае, когда можно пренебречь всеми силами, кроме сил земного тяготения, критерием подобия будет число v^2/gl , именуемое числом Фруда, или критерием Фруда:

$$Fr = \frac{v^2}{gl} = idem. \quad (16.2)$$

Критерий Рейнольдса. Допустим теперь, что доминирующими силами являются силы вязкости. Как известно (см. § 5.3), эти силы определяются по формуле

$$F = \mu S \frac{du}{dn} \text{ или } F = \rho \nu S \frac{du}{dn}.$$

Подставляя значение силы F в формулу критерия Ньютона (16.1), получаем:

$$\frac{mv^2}{Fl} = \frac{\rho \nabla v^2}{\left(\rho \nu S \frac{du}{dn} \right) l} = \frac{\nabla v^2}{\nu S l} \frac{dn}{du}.$$

Обозначая производную $\frac{dn}{du}$ в конечных разностях $\frac{dn}{du} \approx \frac{\Delta n}{\Delta u} \approx k \frac{l}{v}$, а произведение Sl в виде объема $W (Sl = W)$, получаем

$$\frac{mv^2}{Fl} = \frac{Wv^2kl}{vMo} = \frac{vl}{v} k = \text{idem}$$

и, опуская коэффициент k ($k = \text{const}$), получаем

$$\frac{mv^2}{Fl} = \frac{vl}{v} = \text{idem.}$$

Это есть критерий Рейнольдса.

Итак, в условиях, когда доминирующими силами являются силы вязкости, критерием подобия будет число Рейнольдса Re :

$$Re = \frac{vl}{v} = \text{idem.} \quad (16.3)$$

Не повторяя аналогичных рассуждений, приводим некоторые другие критерии.

Критерий Эйлера — доминирующими силами являются силы давления:

$$Eu = \frac{v^2}{p} = \text{idem.} \quad (16.4)$$

Здесь ρ — плотность; v — скорость; p — напряжение сжатия.

Критерий Вебера — для сил поверхностного натяжения:

$$We = \frac{v^2 l}{\sigma} = \text{idem.} \quad (16.5)$$

Здесь σ — поверхностное натяжение на единицу ширины.

Критерий Струхала — для сил периодического действия:

$$St = \frac{ln}{v} = \text{idem,} \quad (16.6)$$

где n — частота повторения явления.

Существуют и другие критерии.

Рассмотрим вопрос о соотношения между кинематическими параметрами в условиях различных критериев частичного подобия.

Соотношение скоростей v_1/v_2 в двух потоках, подобных между собой по критерию Фруда (16.2), находим из равенства

$$\frac{v_1^3}{gl_1} = \frac{v_2^3}{gl_2},$$

откуда скорость первого потока равна (если сократить на g):

$$v_1 = v_2 \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = v_2 \sqrt{\lambda_1},$$

где λ_1 — масштабный коэффициент длины: $\lambda_1 = (l_1/l_2)$.

Рассмотрим то же соотношение скоростей в условиях подобия по критерию Рейнольдса (16.3).

В этом случае

$$\frac{v_1 l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 l_2}{\nu_2},$$

Если жидкость в обоих потоках одна и та же, т. е. если $\nu_1 = \nu_2$, то $v_1 l_1 = v_2 l_2$, следовательно, скорость первого потока

$$v_1 = v_2 \frac{l_2}{l_1} = \frac{v_2}{\lambda_1} = v_2 \lambda_1^{-1},$$

где λ_1 — масштабный коэффициент длины.

Таким образом, при одном и том же масштабном коэффициенте длины λ_1 соотношение скоростей v_1/v_2 оказывается различным при моделировании по Фруду или по Рейнольдсу.

В реальных условиях при движении жидкости всегда одновременно существуют действующие силы — силы земного тяготения и силы вязкости (и другие), поэтому полного подобия между двумя потоками одной и той же жидкости, как это было указано выше, быть не может.

16.4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ И НЕОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

В общем случае течение жидкости может быть полностью описано некоторой замкнутой системой уравнений, краевыми и начальными условиями. Оно полностью определяется условиями (условиями однозначности), к которым относятся геометрия потока,

основные физические характеристики жидкости, начальные условия, условия на границах потока.

Перечисленные условия однозначности являются внешними и независимыми по отношению к исходной системе уравнений и поэтому определяют течение жидкости.

Безразмерные критерии, составленные из условий однозначности, называются определяющими критериями, остальные критерии являются неопределяющими. Например, потери напора h_l по длине в круглом трубопроводе зависят от режима движения жидкости (определяемого значением $Re=vd/\nu$), кинематической вязкости жидкости ν , шероховатости стенок Δ , диаметра трубопровода d , средней скорости v и длины трубопровода l . Очевидно, безразмерные критерии Re ; Δ/d ; l/d являются определяющими. Потери напора $h_l=\Delta p/\rho g$ входят в критерий Эйлера $Eu=\frac{\rho v^2}{\Delta p_s}=\frac{\rho v^2}{\rho g h_l}$, который является неопределяющим, и зависимость $Eu=f(Re; \Delta/d; l/d)$ описывает все возможные решения рассмотренной задачи.

16.5. ПИ-ТЕОРЕМА

Моделирование гидравлических явлений требует глубокого предварительного проникновения в сущность изучаемой проблемы. Значительную помощь исследователю может оказать теория размерностей. При предварительном анализе обычно пытаются переменные величины, определяющие течение, свести в возможно меньшее число безразмерных комплексов. Эта задача облегчается тем, что, как известно, уравнение, описывающее тот или иной процесс, должно иметь слагаемые с одинаковой размерностью.

Достижение поставленной цели осуществляется обычно использованием Пи-теоремы. Суть ее заключается в следующем. Пусть имеется некоторое уравнение, описывающее какой-либо физический процесс и содержащее n переменных:

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)=0. \quad (16.7)$$

Если эти переменные могут быть выражены через m основных размерных единиц, то их можно сгруппировать в $n-m$ безразмерных членов π :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m})=0. \quad (16.8)$$

Каждый из новых членов π будет состоять из $m+1$ сомножителей (из числа величин $a_1, a_2, \dots, a_n$), причем первые m сомножителей возводятся в некоторые степени (подлежащие отысканию) и выбираются произвольно, а последний сомножитель имеет первую степень и меняется от комплекса к комплексу.

В системе СИ для механических процессов, например, $m=3$ (М, L, T). Тогда, учитывая сказанное, можно написать структуру членов π в виде

$$\begin{aligned}\pi_1 &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} a_3^{\gamma_1} a_4; \\ \pi_2 &= a_1^{\alpha_2} a_2^{\beta_2} a_3^{\gamma_2} a_4; \\ &\dots \dots \dots \pi_{n-m} = a_1^{\alpha_{n-m}} a_2^{\beta_{n-m}} a_3^{\gamma_{n-m}} a_n.\end{aligned}$$

Показатели степени α, β, γ определяются из условия, чтобы комплексы π были безразмерными.

Покажем применение Пи-теоремы на примере.

Допустим, изучаются вопросы, связанные с истечением через водослив. Очевидно, расход Q , проходящий через водослив, зависит от напора H , ширины водослива b , g и плотности жидкости ρ . Поэтому $Q=f(b, \rho, g, H)$ или

$$\varphi(Q, b, \rho, g, H)=0. \quad (16.9)$$

Здесь пять связанных между собой физических величин.

Воспользуемся Пи-теоремой. Для уравнения (16.9) имеем $n-m=5-3=2$ безразмерных комплекса

$$\varphi(\pi_1, \pi_2)=0. \quad (16.10)$$

Определим π_1 и π_2 :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= Q^{\alpha_1} b^{\beta_1} \rho^{\gamma_1} g; \\ \pi_2 &= Q^{\alpha_2} b^{\beta_2} \rho^{\gamma_2} H.\end{aligned}$$

Размерность $[Q]=L^3 T^{-1}$; $[b]=L$; $[\rho]=ML^{-3}$; $[g]=LT^{-2}$.

Тогда для π_1 запишем

$$\pi_1 = [Q]^{\alpha_1} [b]^{\beta_1} [\rho]^{\gamma_1} [g]. \quad (16.11)$$

Чтобы комплекс π_1 был безразмерным, надо, чтобы сумма показателей степеней для каждой размерности

была равна нулю. Составим соответствующие уравнения для размерности длины, времени и массы:

$$\text{для } L \quad 3\alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1 + 1 = 0;$$

$$\text{для } T \quad -\alpha_1 - 2 = 0;$$

$$\text{для } M \quad \gamma_1 = 0.$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными α_1 , β_1 и γ_1 .

$$\text{Находим } \gamma_1 = 0, \alpha_1 = -2, \beta_1 = 5.$$

Результативно находим комплекс π_1 :

$$\pi_1 = Q^{\alpha_1} b^{\beta_1} \rho^{\gamma_1} g = Q^{-2} b^5 \rho^0 g = \frac{b^5 g}{Q^2}.$$

Аналогично находим второй комплекс π_2 :

$$\pi_2 = Q^{\alpha_2} b^{\beta_2} \rho^{\gamma_2} H.$$

Составляя (подобно предыдущему) три уравнения, находим значения $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = -1$ и $\gamma_2 = 0$, и тогда

$$\pi_2 = b^{-1} H = \frac{H}{b}. \quad (16.12)$$

Теперь напишем уравнение (16.10)

$$\varphi(\pi_1, \pi_2) = \varphi\left(\frac{b^5 g}{Q^2}, \frac{H}{b}\right) = 0. \quad (16.13)$$

Выражение для π_1 можно преобразовать, воспользовавшись обратной зависимостью:

$$\pi_1 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{Q^2}{b^5 g} = \frac{v^2 \omega^2}{b^5 g} = \frac{v^2 b^2 H^2}{b^5 g} = \frac{v^2}{g b} \frac{H^2}{b^3}.$$

Но выражение v^2/gb представляет собой число Фруда, поэтому можно записать:

$$\varphi\left(\text{Fr}, \frac{H}{b}\right) = 0.$$

Это равенство определяет собой зависимость явления истечения через водослив от числа Фруда. Очевидно, что в других случаях может оказаться, что рассматриваемое явление зависит от числа Рейнольдса и т. д.

Следует сказать, что Пи-теорема имеет широкое применение. Пользуясь этой теоремой, удается определять структуру формул, описывающих данное движение жидкости, правильно организовать экспериментальные работы и пр. Однако нельзя считать, что применение

Пи-теоремы является универсальным средством решения гидравлических задач. Возможности теории размерностей по существу достаточно ограничены.

16.6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АВМ ПРИ РЕШЕНИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аналоговое моделирование основано на аналогии уравнений, описывающих явления различной физической природы. Примером может служить рассмотренное применение метода ЭГДА при решении фильтрационных задач [см. § 13.5.3].

В настоящее время довольно широко используются аналоговые вычислительные машины (АВМ). Особенно эффективно их применение при решении гидравлических задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

АВМ состоит из отдельных частей, называемых операционными блоками, каждый из которых осуществляет какую-либо математическую операцию (сложение, умножение, интегрирование, дифференцирование и т. д.). Для решения задачи на АВМ операционные блоки соединяют в порядке, определяемом структурой формулы или уравнения. Чтобы решить другую задачу на данной АВМ придется разрушать связи между операционными блоками и устанавливать новые. В этом смысле АВМ являются узко специализированными вычислительными машинами¹.

Таким образом, АВМ делятся на две группы:

1) моделируют процессы по составным частям, т. е. являются устройствами, воспроизводящими решение задачи в физической постановке на основе использования аналогии;

2) проводят математическое моделирование, расчленяя по операциям подлежащие решению уравнения, т. е. являются счетно-решающими устройствами.

Решение гидравлической задачи с помощью АВМ второй группы (называемых также структурными АВМ) проводится в следующем порядке:

1) анализируются исходные математические данные задачи и разрабатываются способы соединения операционных блоков АВМ, т. е. производится программирование АВМ;

2) исходные математические переменные представляются физическими величинами путем выбора необходимых масштабов;

3) составляется программа в виде структурной схемы с показом в условных обозначениях используемых операционных блоков и связей между ними в виде линий.

Решение задачи на АВМ может быть получено приборным измерением значений физических величин либо в виде записи их изменений регистрирующей аппаратурой.

16.7. РЕШЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ЭВМ

Современное развитие технических наук (и в том числе гидравлики) существенно связано с широким использованием электронных цифровых вычислительных машин (ЭВМ). ЭВМ способны произво-

¹ Урмаев А. С. Основы моделирования на АВМ. М.: Наука, 1974.

дять вычисления быстро и точно, запоминать и хранить большие массивы информации, реализовать длинные и громоздкие вычисления без участия человека

Естественно, это позволило инженерам от простейших расчетов оценочного плана перейти (там, где это целесообразно) к детальному математическому моделированию, что позволяет сократить и даже исключить потребность в натурных и лабораторных исследованиях. Допустимо говорить о переходе от физического к вычислительному эксперименту.

Таким образом, умение работать на ЭВМ является элементом технической грамотности современного инженера.

Сказанное не означает, что в настоящее время логарифмическая линейка и клавишные вычислительные машины стали архаизмами. Еще долгое время они будут служить инженеру, и их использование при решении многих и многих гидравлических задач вполне оправдано.

Обычно к услугам ЭВМ прибегают при необходимости решить большое число однотипных задач (например, с целью составления таблиц), при решении большой и сложной задачи, при поиске оптимального решения, когда оно зависит от многих параметров, и т. п.

Основой решения сложных задач является использование численных методов. Их применение базируется не на использовании формул, а на алгоритме, т. е. на соответствующей последовательности вычислительных операций, позволяющей из ряда чисел, характеризующих исходные данные задачи, получить решение также в виде ряда чисел. На основе алгоритма составляется программа для ЭВМ, представляющая собой по сути дела тот же алгоритм, но записанный на языке машины. Численные методы обычно громоздки, однако для современных ЭВМ это обстоятельство не имеет существенного значения.

Какова же последовательность решения сложной задачи гидравлики с помощью ЭВМ?

Понятие «решение задачи» ни в коей мере не сводится к производству вычислений на ЭВМ, а содержит следующие этапы:

1) сначала глубоко прорабатывается существо задачи, что требует от инженера соответствующих специальных знаний по гидравлике, формулируются необходимые условия, которым должно удовлетворять решение, выбираются критерии и параметры и т. п.);

2) выбирается или разрабатывается математическое описание задачи¹;

3) так как ЭВМ могут выполнять лишь арифметические и логические действия, необходимо разработать алгоритм, сводящий все вычисления к последовательности указанных действий²;

4) необходимо убедиться, что никакие (допустимые) погрешности в исходных данных или связанные с вычислительной процедурой не влияют заметным образом на точность результатов;

5) численный алгоритм решения задачи выражается в виде точно определенной последовательности операций ЭВМ. Обычно сна-

¹ В работе над этапами 1 и 2 ЭВМ не может оказать инженеру помощи.

² Выбирать математическую модель и алгоритм необходимо с учетом быстродействия и объема памяти ЭВМ: слишком сложный алгоритм машина может «не осилить», а слишком простой не обеспечит необходимой точности.

чала ее изображают графически в виде блок-схемы, а затем излагают алгоритм на языке данной ЭВМ (например, АЛГОЛ-60, Фортран и т. п.);

6) производятся вычисления на ЭВМ;

7) производится анализ полученных результатов, т. е. осмысливается математическое решение. Если оно удовлетворяет контрольным экспериментальным данным, то это свидетельствует о правильности выбора математической модели. В противном случае следует ее заменить либо внести коррективы.

Из сказанного полезно усвоить следующее:

а) ЭВМ сама задач не решает, а лишь производит вычисления в заданной последовательности;

б) использование ЭВМ ни в малейшей степени не освобождает инженера от необходимости тщательного осмысливания решаемой задачи (скорее наоборот);

в) необходимость применения численных методов требует и соответствующего их изучения.

Современные численные методы и мощные ЭВМ позволяют решать такие задачи, о которых в недалеком прошлом можно было лишь мечтать.

Более подробно об искусстве использования цифровой ЭВМ см. в специальной литературе¹. Овладеть им можно лишь на практике.

¹ Например, Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. М.: Мир, 1977.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

В 1978 г. утвержден СТ СЭВ 1052—78 «Единицы физических величин», которым устанавливается применение Международной системы единиц СИ.

Основными единицами СИ являются:

метр (м) — единица длины;
килограмм (кг) — единица массы;
секунда (с) — единица времени;
ампер (А) — единица силы электрического тока;
кельвин (К) — единица термодинамической температуры;
моль (моль) — единица количества вещества;
кандела (кд) — единица силы света.

Дополнительными единицами СИ являются:

радиан (рад) — единица плоского угла;
стерадиан (ср) — единица телесного угла.

Производные единицы СИ устанавливаются по определяющим уравнениям связи между физическими величинами. Производные величины, часто употребляемые в гидравлических расчетах, приведены в табл. П.1.

Физические величины имеют наименование и буквенное обозначение в соответствии с государственными стандартами. Для выражения больших и малых значений физических величин образуют десятичные, кратные и дольные единицы, используя приставки и множители, приведенные в табл. П.2.

Таблица П.1

Величина		Единица		Выражение единицы	
наименование	размерность	наименование	обозначение	через другие единицы СИ	через основные единицы СИ
Площадь	L^2	квадратный метр	m^2	—	—
Объем, вместимость	L^3	кубический метр	m^3	—	—
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	m/c	—	—
Ускорение	LT^{-2}	метр в секунду в квадрате	m/c^2	—	—
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	—	—
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	H	—	$кг \cdot м/с^2$
Удельный вес	$LM^{-2}T^{-2}$	ньютон на кубический метр	$H/м^3$	—	$кг/(м^2 \cdot с^2)$
Давление, гидростатическое, модуль упругости	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	$Па$	$H/м^2$	$кг/(м \cdot с^2)$

Продолжение табл. П.1

Величина		Единица		Выражение единицы	
наименование	размерность	наименование	обозначение	через другие единицы СИ	через основные единицы СИ
Энергия, работа Мощность Динамическая вязкость Кинематическая вязкость	L^2MT^{-2} L^2MT^{-3} L^2MT^{-1} L^2T^{-1}	джоуль ватт паскаль-секунда квадратный метр на секунду	Дж Вт Па·с м ² /с	Н·м Дж/с Н·с/м ²	кг·м ² /с ² кг·м ² /с ³ кг/(м·с)

Таблица П.2

Множитель	Приставка		Пример
	наименование	обозначение	
10 ⁶	мега	М	МН (меганьютон)
10 ³	кило	к	кПа (килопаскаль)
10 ⁻¹	деци	д	дм (дециметр)
10 ⁻²	санти	с	см (сантиметр)
10 ⁻³	милли	м	мм (миллиметр)
10 ⁻⁶	микро	мк	мкм (микрометр)

В табл. П.3 показаны единицы, временно допускаемые к применению наравне с единицами СИ и используемые в гидравлических расчетах.

Таблица П.3

Величина	Единица		Соотношение с единицами СИ
	наименование	обозначение	
Сила, вес	килограмм-сила тонна-сила грамм-сила	кгс тс гс	1 кгс = 9,81 Н ≈ 10 Н 1 тс = 9810 Н ≈ 10 кН 1 гс = 9,81 · 10 ⁻³ Н ≈ 10 мН
Давление, давление, модуль упругости	килограмм-сила на квадратный сантиметр	кгс/см ²	1 кгс/см ² = 98100 Па ≈ 100 кПа
Энергия, работа	килограмм-сила-метр тонна-сила-метр лошадиная сила	кгс·м тс·м л. с.	1 кгс·м = 9,81 Дж ≈ 10 Дж 1 тс·м = 9810 Дж ≈ 10 кДж 1 л. с. = 736,8 Вт
Мощность	килограмм-сила-метр в секунду	кгс·м/с	1 кгс·м/с = 9,81 Вт ≈ 10 Вт
Масса	тонна	т	1 т = 1000 кг
Объем	литр	л	1 л = 10 ⁻³ м ³
Объемный расход	литр в секунду	л/с	1 л/с = 10 ⁻³ м ³ /с
Динамическая вязкость	пуаз	П	1 П = 0,1 Па·с
Кинематическая вязкость	стокс	Ст	1 Ст = 10 ⁻⁴ м ² /с

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И. Гидравлика. М.: Энергия, 1964.
2. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат, 1975.
3. Бахметев Б. А. Гидравлика открытых русл. М.—Л.: Госэнергониздат, 1934.
4. Бахметев Б. А. Механика турбулентного потока. М.: Госстройиздат, 1939.
5. Богомолов А. И., Михайлов К. А. Гидравлика. М.: Стройиздат, 1973.
6. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости/ Пер. с англ. под ред. чл.-корр. АН СССР О. Ф. Васильева. М.: Энергия, 1971.
7. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1978.
8. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Госэнергониздат, 1960.
9. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах. Л.: Гидрометеониздат, 1973.
10. Киселев П. Г. Гидравлика. М.: Госэнергониздат, 1963.
11. Кожевников М. Н. Гидравлика ветровых волн. М.: Энергия, 1972.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Гостеортехиздат, 1948.
13. Ландау Л. Д., Лившиц Е. А. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
14. Лятхер В. М. Турбулентность в гидросооружениях. М.: Энергия, 1968.
15. Павловский Н. Н. Гидравлический справочник. Л.: ОНТИ, 1937.
16. Рауз Х. Механика жидкости. М.: Стройиздат, 1967.
17. Седов Л. И. Методы теории размерностей и подобия в механике. М.: Наука, 1970.
18. Справочник по гидравлическим расчетам. Под ред. П. Г. Киселева. М.: Энергия, 1975.
19. Слиский С. М. Гидравлика зданий гидроэлектростанций. М.: Энергия, 1970.
20. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М.: Наука, 1964.
21. Чертоусов М. Д. Гидравлика (специальный курс). Л.: Госэнергониздат, 1957.
22. Чугаев Р. Р. Гидравлика. М.: Энергия, 1977.
23. Шулейкин В. В. Краткий курс физики моря. М.: Гидрометеониздат, 1959.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А
Архимедова сила 39

Б
Бьеф:
 верхний 244
 нижний 244

В
Вакуум 22
Вакуумметрическая высота 22
Валец поверхностный 238
Ватерлиния 41
Векторное поле скоростей 56
Вихрь 65
Водобойная стенка 248
Водобойный колодец 248
Водоворотное образование при турбулентном движении 138
Водоизмещение 40
Водослив:
 безвакуумный 202
 боковой 191
 вакуумный 202
 косой 191
 криволинейный 191
 неподтопленный 191
 подтопленный 190
 практического профиля 190, 202
 прямой 191
 прямоугольный 191
 с тонкой стенкой (с острым гребнем) 190, 192
 с широким порогом 190, 197
 трапециевидный 191
 треугольный 191

Водоупор 263
Волновая поверхность 287
Волновой профиль 310, 315, 326, 333

Волны ветровые:
 вынужденные 287
 морские 297
 на мелководье 297, 331
 нерегулярные 297
 плоские 307
 плоскопараллельные 307
 потенциальные 307
 прогрессивные 314, 334
 регулярные 297
 свободные (волны зыби) 297, 319
 слабые 326
 стоячие 310
 троихлоидальные (Герстнера) 296, 319

Высота:
 волны 297
 прыжка 239

Вязкость:
 динамическая 131
 кинематическая 131

Г
Гасители энергии 248
Гидравлически невыгоднейшее сечение 212
Гидравлический показатель русла 210
 — прыжок 238
 — радиус 126, 206

Гидравлический удар 290
 — уклон 101, 129, 204, 215
Гидродинамическая сегка 113, 269

Глубина:
 бытовая 245
 заоплелая отверстия 201
 колодца 249
 критическая 199, 222
 нормальная 211
 раздельная 245
 сопряженная 239
Гравитационная вода 256
Градиент скорости 143
График:
 волны 298
 Никурадзе 151
 прыжковой функции 241
 пульсации скоростей 139
 удельной энергии сечения 221

Д
Давление:
 абсолютное 21
 атмосферное 12
 гидродинамическое 313, 318
 гидростатическое 8, 12
 избыточное 20
 на горизонтальное дно 30
 на криволинейные поверхности 35
 на плоские стенки 28
 ударное 290
Дальность отгона прыжка 248

Движение жидкости:
 безвихревое 64, 67, 81
 винтовое 68
 вихревое 64, 67
 вращательное 64
 — относительно вертикальной оси 26
 грунтовых вод см. Фильтрация 255
 — — неравномерное 259
 — — равномерное 259
 деформационное 64
 ламинарное 132
 неравномерное 46, 215
 неустановившееся 46, 279, 287
 периодически изменяющееся 91
 плоское 104
 поступательное 64
 потенциальное 67, 81, 104, 114, 122
 — вращательное 120, 123
 — плоскопараллельное 105, 115
 равномерное 46, 204
 равноускоренное по вертикали 24
 свободное 91
 сплошное 47
 турбулентное 132, 138
 установившееся 46, 159, 215
Дефицит скорости 148

Линия:
 волны 297, 311
 колодца 249
 прыжка 239, 243
 пути перемешивания 144

Е
Единицы физических величин 350

Ж

- Жидкость** 5
— баротропная 83
— идеальная (несжимаемая) 6
— реальная (вязкая) 6, 51

З

- Закон:**
Архимеда 38
Бахметева показательный 211
вязкостного сопротивления 131
Дарси (фильтрация) 257
Ньютона (сопротивление жидкости) 95
Паскаля (давление жидкости) 23
распределения скоростей 142
Зона турбулентного течения:
промежуточная 152
сопротивления квадратичного 152
— ламинарного потока 152

И

- Изотакса см. Линия равных скоростей**
Инверсия струи 174
Истечение жидкости 172
Источник (жидкости) 117

К

- Канал:**
с гидравлически наимыгоднейшим сечением 212
сечения круглого 213
— прямоугольного 206, 212
— трапецеидального 207
Колодец водобойный 248
Конформное отображение 273
Координаты:
Лагранжа 52
Эйлера 53
Коэффициент:
Буссинеска (количества движения) 103
затопления водослива 197
Кориолиса (кинетической энергии) 94, 104
масштабный 339
обтекаемости 196
откоса 207
пористости 255
расхода водослива 176, 192, 194
сжатия 174, 195
скорости 175
сопротивлений местных 155
сопротивления в трубах 137, 148
фильтрации 257
Шези 130
шероховатости 154

- Кривая:**
депрессии 260
подпора 215, 226, 244
свободной поверхности см. Линия свободной поверхности спада 216, 227, 244

- Критерий:**
Павловского (к закону Дарси) 258
подобия Вебера 342
— Ньютона 340
— Рейнольдса 341

- Критерий:**
подобия Струхала 342
— Фруда 341
— Эйлера 342
Рейнольдса (число) 131

Л

- Линия:**
отмеченных точек 48
гидравлическая 100
равновесного состояния волны 297
равного потенциала 106
равных скоростей 206, 223
свободной поверхности 204, 236
тока 47
энергии 100

М

- Магнуса эффект** 125, 139
Метацентр 41
Метод:
абстрактной модели 211
гидравлического показателя русла 210
гидродинамической сетки 269
конформных отображений 272
Лагранжа 51, 61
Чугаева (коэффициентов сопротивления) 277
ЭГДА 271
Эйлера 53, 61
Моделирование:
аналоговое 338
математическое 338
физическое 337
Модель реального потока 256
Модуль упругости кажущийся 285

Н

- Напор:**
инерционный 282
на водосливе 189, 250
потерянный 101
скоростной 89, 156
Насадок:
Вентури 180
внешний 179
внутренний 179

О

- Остойчивость** 41
Ось плавления 40
Отверстие водосливное:
большое 173
малое 173
Отгон гидравлического прыжка 196

П

- Перепад на водосливе см. Напор на водосливе**
Переходные процессы 284
Периметр смоченный 125, 206
Период колебаний волн 297
Пи-теорема 344
Плавание тел 38
Площадь:
ватерлинии 41
живого сечения 126, 206

Поверхность:
раздела 29
уровня 16, 18
Подобие гидродинамическое:
геометрическое 336
динамическое 336
кинематическое 338
Поле скорости мгновенное 140
Пористость грунта 255
Порог водослива 189
Потенциал скорости 67, 106
Потери напора:
в гидравлическом прыжке 243
местные 184
— при внезапном расширении
трубы 186
— при слиянии двух потоков 158
Поток:
бурный 223
донный 48, 49
спокойный 223
Прибор ЭГДА 272
Прыжковая функция 241
Прыжок-волна 239
Прыжок гидравлический 238
— затопленный 238, 261
Пульсация скорости 139

Р

Радиус:
гидравлический 125, 206
метацентрический 42
Разрыв сплошности 80
Расход:
потока 49
удельный 222
фильтрации 256
элементарный 48
Расходная характеристика 160
Расчет каналов 210
Режим течения:
донный 251
критический 252
поверхностный 251
Русло:
непризматическое 216
призматическое 216

С

Сетка:
гидродинамическая (сетка дви-
жения) 113, 269
ортогональная 112
Сечение:
гидравлически наимыгоднейшее
212
живое 126, 206
сжатое 173
Сжатие струи 173
— боковое (для водосливов) 196
Силы внешние:
вязкости 96
массовые (объемные) 7, 11
поверхностные 7, 10
сопротивления 96
Скоростная высота см. Напор ско-
ростной
Скорость:
волн, групповая 331
волн ударной 295
в сжатом сечении 178
динамическая 146
истечения 174, 284

Скорость:
критическая 132
мгновенная 140
осредненная 178
подхода 178
потерянная 156
потока 49
предельная (в переходных про-
цессах) 284
пульсационная 140
распространения ветровых волн
297
средняя 135
фильтрации 256
Слой ламинарный (пристенный) 142
Соединение трубопровода:
параллельное 167
последовательное 166
Сопротивления:
местные 125, 154
по длине 125
Сопряжение бьефов:
при подпорном сооружении 246
при смене уклона 244
Сопряженные глубины 239
Сплошность течения 50, 289
Стенка водобойная 250
Сток жидкости 117
Струйка элементарная 45, 48
Струя:
волнистая 193
отжатая 192
подтопленная 192
прилипшая 193
свободная 192

Т

Теорема:
гидростатики 9
Борда—Карно (потери напора
при расширении трубы) 156
Коши—Гельмгольца (движение
частицы жидкости) 64
Точка раздела прыжка 239
Траектория частицы:
волны 312, 316
жидкости 47
Трубка тока 48
Трубопровод:
длинный 159
короткий 160
простой 159, 161
сложный 159, 166

У

Угол крена 41
Удар гидравлический 290
Уклон:
гидравлический 101, 129, 204, 215
для 204, 215
критический 223
свободной поверхности 204, 215
Уравнение:
Бернулли 88, 90, 99
ветровых волн 303
волнового профиля 310
гидравлического прыжка 241
движения грунтовых вод 260
— неустановившегося 280
— в открытом русле 288
— равномерного 129

Жуковского (фильтрации) 268
 количества движения (инпуль-
 сов) 101, 253
 Лапласа 107
 линии тока 60
 Навье—Стокса (движения вязкой
 жидкости) 99
 неразрывности 79, 106, 268
 поверхности уровня 17
 потенциала скорости 106
 равновесия жидкости см. Урав-
 нение Эйлера
 — — в поле тяготения 19
 расхода потока 50
 функции тока 112
 характеристическое 16, 77, 106
 Эйлера 12, 70
 энергии см. Уравнение Бернулли
 Устойчивость плавающего тела см.
 Остойчивость



Фаза гидравлического удара 290
 Фильтрация 255, 264
 Формула:
 Альтшуля 183
 Астафьевой 265
 Базена 194
 Блязюса 151
 Буссинеска 144
 Дарси (фильтрация) 287
 Дарси—Вейсбаха 130, 137, 151
 Жуковского (удар) 292
 Колбрука 183
 Конакова 160
 Кортвега 296
 Маннинга 154
 Никурадзе 182
 Павловского 154
 Прадтля 144, 180

Формула:
 Форхгеймера 184
 Френсиса 196
 Хазена 258
 Шези 130, 181
 Шифринсона 182
 Функция:
 отображающая 273
 потенциала скорости 106, 111
 тока (течения) 109, 111

Ц

Центр:
 водоизмещения 40
 давления 31

Ч

Частота колебаний волны 298
 Число Рейнольдса 131, 341

Ш

Шероховатость:
 абсолютная 151
 искусственная 151
 эквивалентная 183

Э

Эквивалентность см. Линия равного
 потенциала
 Энергия:
 кинетическая 89
 потенциальная 89
 удельная 92, 220
 Эпюра скорости 49
 Эффект Магнуса 139

Я

Ядро турбулентное 142

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава первая. Равновесие жидкости	7
1.1. Равновесие жидкости. Действующие силы	7
1.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)	12
1.3. Равновесие несжимаемой жидкости в поле земного тяготения	18
1.4. Давление жидкости на плоские стенки	28
1.5. Давление жидкости на криволинейные поверхности	35
1.6. Закон Архимеда и плавание тел	38
Глава вторая. Основные понятия о движении жидкости	44
2.1. Основные сведения о движении жидкости	44
2.2. Траектория, линия тока и линия отмеченных точек	47
2.3. Элементарная струйка и ее расход	48
2.4. Расход и средняя скорость потока. Условие сплошности	49
Глава третья. Основные уравнения кинематики и динамики невязкой жидкости	51
3.1. Два метода исследования движения жидкости — метод Лагранжа и метод Эйлера	51
3.2. Движение жидкой частицы	63
3.3. Кинематические характеристики вихревых и безвихревых движений	64
3.4. Общие уравнения динамики жидкости	68
3.5. Интегрирование основной системы дифференциальных уравнений движения невязкой жидкости	80
3.6. Уравнение Бернулли	88
3.7. Движение вязкой жидкости	95
3.8. Уравнение импульсов	101
Глава четвертая. Плоское потенциальное движение	104
4.1. Предварительные замечания	104
4.2. Основная система уравнений плоскопараллельного движения	105
4.3. Потенциал скорости	106
4.4. Функция тока $\psi(x, y)$	107
4.5. Простейшие случаи плоского потенциального движения	115
4.6. Примеры сложения потенциальных потоков	122
	357

Глава пятая. Основы теории гидравлических сопротивлений	125
5.1. Предварительные замечания	125
5.2. Основное уравнение равномерного движения	126
5.3. Основной закон вязкого сопротивления	130
5.4. Режимы движения реальной жидкости	132
5.5. Ламинарное движение	133
5.6. Турбулентное движение	138
5.7. Местные сопротивления	154
Глава шестая. Установившееся движение жидкости в трубах	159
6.1. Понятие о коротких и длинных, простых и сложных трубопроводах. Расчетные формулы	159
6.2. Простой трубопровод. Истечение в атмосферу и под уровень	161
6.3. Три основные задачи расчета простого трубопровода	163
6.4. Основные элементы сложного трубопровода	166
Глава седьмая. Истечение жидкости из отверстий	172
7.1. Истечение в атмосферу при постоянном напоре через малые отверстия в тонкой стенке	173
7.2. Истечение через большие отверстия в атмосферу	177
7.3. Истечение через затопленное большое отверстие	178
7.4. Истечение через насадки	179
7.5. Истечение при переменном напоре	183
Глава восьмая. Водосливы	189
8.1. Общие понятия	189
8.2. Основная формула расхода водослива	191
8.3. Водослив с острым порогом	192
8.4. Водослив с широким порогом	197
8.5. Водослив практического профиля	202
Глава девятая. Равномерное движение жидкости в открытых руслах	204
9.1. Основные понятия	204
9.2. Распределение скоростей течения в потоке при равномерном движении	205
9.3. Геометрические элементы поперечного сечения канала. Основные расчетные формулы	206
9.4. Основные задачи	208
9.5. Некоторые практические методы расчета каналов	210
9.6. Каналы с гидравлически невыгоднейшим сечением	212
9.7. Каналы со сложным очертанием поперечного сечения	213
9.8. Каналы сложного полигонального профиля	214
Глава десятая. Неравномерное установившееся движение жидкости в открытых руслах	215
10.1. Основное дифференциальное уравнение неравномерного движения	215
10.2. Удельная энергия потока и сечения. Критическая глубина	220

10.3. Формы свободной поверхности при неравномерном движении в призматическом русле	223
10.4. Интегрирование основного дифференциального уравнения неравномерного движения	229
10.5. Построение линии свободной поверхности в естественных руслах	236
Глава одиннадцатая. Гидравлический прыжок	238
11.1. Общие сведения	238
11.2. Основное уравнение гидравлического прыжка в призматическом русле	239
11.3. Потери напора. Длина прыжка	243
Глава двенадцатая. Сопряжение бьефов	244
12.1. Сопряжение бьефов при смене уклона	244
12.2. Сопряжение бьефов при перегораживающем сооружении	246
12.3. Водобойный колодец и водобойная стенка	248
12.4. Водосливная плотина с носком на сливной грани	251
Глава тринадцатая. Движение грунтовых вод (основы теории фильтрации)	255
13.1. Общие сведения	255
13.2. Основной закон фильтрации — закон Дарси	257
13.3. Равномерное движение	258
13.4. Неравномерное движение	259
13.5. Фильтрация под гидротехническими сооружениями	264
Глава четырнадцатая. Неустановившееся движение жидкости	279
14.1. Предварительные замечания	279
14.2. Основное уравнение неустановившегося движения для элементарной струйки	279
14.3. Основное уравнение неустановившегося движения для потока в цилиндрическом трубопроводе	283
14.4. Переходные процессы	284
14.5. Неустановившееся движение в открытых руслах (основные уравнения)	287
14.6. Гидравлический удар в трубах	290
Глава пятнадцатая. Элементы теории ветровых волн	296
15.1. Общие сведения	296
15.2. Основные дифференциальные уравнения ветровых волн	298
15.3. Плоские потенциальные волны	307
15.4. Прогрессивные волны	314
15.5. Трохоидальные волны	319
15.6. Групповая скорость	326
15.7. Волны при небольшой глубине водоема (волны на мелководье)	331
	359

Глава шестнадцатая. Моделирование гидравлических явлений. Использование ЭВМ при гидравлических расчетах	337
16.1. Моделирование гидравлических явлений	337
16.2. Основные сведения о гидродинамическом подобии .	338
16.3. Критерии подобия	340
16.4. Определяющие и неопределяющие критерии подобия	343
16.5. Пи-теорема	344
16.6. Использование АВМ при решении гидравлических задач	347
16.7. Решение гидравлических задач с помощью цифровых ЭВМ	347
Приложение	350
Список литературы	352
Предметный указатель	353

Петр Григорьевич КИСЕЛЕВ

ГИДРАВЛИКА

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Рецензенты: доктор техн. наук, проф. Л. И. Высоцкий
и кафедра гидравлики Киевского автомобильно-
дорожного института

Редактор Л. И. Высоцкий

Переплет художника Е. Н. Волкова

Редактор издательства Т. П. Готман

Технический редактор Н. М. Пушкарёва

Корректор Г. А. Полонская

ИБ № 1779

Сдано в набор 25.07.79

Подписано в печать 04.03.80

T-01083

Формат 84×108¹/₃₂

Бумага типографская № 1

Гарн. шрифта литературная

Печать высокая

Усл. печ. л. 18,9

Уч.-изд. л. 17,33

Тираж 23 000 экз.

Заказ 235

Цена 75 к.

Издательство «Энергия», 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10
Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государствен-
ном комитете по делам издательства, полиграфии и книжной
торговли. 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10