

В. СЕЛИВАНОВ, В. С. ЗАРУБИН, В. Н. ИОНОВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по образованию в области машиностроения
и приборостроения в качестве учебного пособия
для студентов технических университетов
и машиностроительных вузов

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
1994

ББК 22.19
С29
УДК 31.35

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, проф. *А. Г. Горшков* (кафедра «Соппротивление материалов» Московского авиационного института); докт. физ.-мат. наук, проф. *Л. А. Толоконников* (кафедра «Расчет и проектирование аппаратов» Тульского политехнического института).

С29 Селиванов В. В., Зарубин В. С., Ионов В. Н. Аналитические методы механики сплошной среды: Учебное пособие. — М.: Изд-во МГТУ, 384 стр., ил.

ISBN 5-7038-1043-4

На современном научном уровне изложены общие теоремы и постановка задач механики сплошной среды. Рассмотрено построение общих решений разрешающих уравнений механики различных сплошных сред. Описаны основные аналитические точные и приближенные методы решения задачи механики жидкости и газа, а также механики деформируемого твердого тела. Концентрированно изложен весь комплекс вопросов, необходимых при постановке и решении прикладных задач механики сплошной среды.

Для студентов технических университетов и машиностроительных вузов. Может быть полезна аспирантам, научным работникам и инженерам, работа которых связана с расчетами в машиностроении.

Ил. 9. Библиогр. 15 назв.

По вопросам приобретения книги обращаться по тел. 263-60-45.

С $\frac{1603040000-71}{095(2)-94}$ Без объявл.

ББК 22.19

ISBN 5-7038-1043-4

© В. В. Селиванов,
В. С. Зарубин,
В. Н. Ионов, 1994

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие обширного раздела теоретической физики — механики сплошной среды, служащей научной базой многих прикладных технических наук, связано с широким применением математических методов исследования различных процессов и явлений, происходящих в сплошной среде при нагружении ее внешними силовыми факторами.

Характерной особенностью решения задач механики сплошной среды является получение численных значений искомых величин. Это требует, во-первых, правильной и обоснованной постановки задачи, способной учесть все главные особенности изучаемого явления или процесса, протекающего в реальной среде; во-вторых, выбора эффективного метода решения поставленной задачи и, в третьих, обстоятельного анализа результатов исследования, приводящего к установлению определенных закономерностей, которыми описывается изучаемое явление или процесс, с выходом на непосредственное использование их в практике решения технических задач, возникающих при расчете и проектировании новых конструкций и сооружений.

В настоящее время как в России, так и за рубежом почти отсутствует литература, в которой концентрированно были бы изложены с достаточной полнотой математические методы, используемые в механике сплошной среды, обеспечивающие успешное решение перечисленных вопросов. Предлагаемая книга должна хотя бы частично устранить указанный пробел. В ней подробно изложены и обоснованы возможные аналитические методы решения ряда задач механики сплошной среды, позволяющие построить точное решение рассматриваемой задачи, записать его в конечной компактной форме и наиболее полно провести анализ изучаемого явления или процесса.

Данная книга была подготовлена к печати в рамках выполнения программы «Университеты России» по разделу «Фундаментальные исследования».

Считаем необходимым отметить, что своим появлением предлагаемая вниманию читателя книга во многом обязана проф. В. Н. Ионову, который осуществил первоначальную методическую проработку исходного материала, составил план-проспект книги и руководил подготовкой первого варианта рукописи. К сожалению, тяжелая болезнь помешала ему закончить начатую совместно с нами работу, поэтому дальнейшая подготовка рукописи к изданию осуществлена нами во исполнение долга перед нашим коллегой и соавтором и в память о нем.

ГЛАВА 1

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

1.1. Общие принципы и законы сохранения

Газообразные, жидкие и твердые среды под влиянием внешних воздействий, к которым относятся объемные F^i и поверхностные $p_{(n)}^i$ силы, тепловой поток q^i или температура T и другие силовые факторы, деформируются. Анализ напряженно-деформированного состояния среды и характеристик движения ее частиц проводят математическими методами. Это связано с заменой атомно-молекулярной структуры материальной сплошной средой, непрерывно размещенной в пространстве и характеризуемой плотностью $\rho = dm/dV$ (где m — масса, V — объем), которую рассматривают как непрерывную дифференцируемую функцию координат x^i и времени t .

Механика сплошной среды изучает движение частиц среды, заключенных в определенной односвязной или многосвязной области D трехмерного евклидова пространства E_3 , объемом V , ограниченной поверхностью S . Область D отнесена к материальной криволинейной системе координат x^i ($i=1, 2, 3$) с началом в точке O . Система координат должна быть ортогональной; её выбирают в соответствии с условиями рассматриваемой задачи так, чтобы граница области D входила в число координатных поверхностей, тогда граничные условия формулируются наиболее просто. Форма области D произвольная при условии выполнения требований однозначности системы координат; геометрия области D задается уравнениями ограничивающих поверхностей S . Системе координат соответствует метрический тензор

$$(g) = g_{ij} \bar{r}^i \bar{r}^j = g^{ik} \bar{r}_i \bar{r}_k = g_i^j \bar{r}^i \bar{r}_j$$

и совокупность символов Кристоффеля Γ_{ijk} , Γ_{ij}^k , где $\bar{r}_i$, $\bar{r}^j$ и $\bar{r}^i$, $\bar{r}_j$ — соответственно векторы основного и взаимного базисов системы координат.

В общем случае деформированное состояние среды характеризуется тензором деформаций

$$(\epsilon) = \epsilon_{ij} \bar{r}^i \bar{r}^j = \epsilon^{ij} \bar{r}_i \bar{r}_j = \epsilon_i^j \bar{r}^i \bar{r}_j$$

с компонентами

$$\epsilon_{ij} = 0,5 (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k), \quad (1.1.1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений частиц среды, или тензором скоростей деформаций

$$(\dot{\epsilon}) = \dot{\epsilon}_{ij} \bar{r}^i \bar{r}^j = \dot{\epsilon}^{ij} \bar{r}_i \bar{r}_j = \dot{\epsilon}_i^j \bar{r}^i \bar{r}_j$$

с компонентами

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0,5 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad (1.1.2)$$

где v_i — компоненты вектора скорости частиц среды.

Как тензор деформации (ε), так и тензор скоростей деформаций ($\dot{\varepsilon}$) должны удовлетворять условиям совместности: $I_{nk}(\varepsilon) = 0$; $I_{nk}(\dot{\varepsilon}) = 0$. Развернутое представление оператора несовместности $I_{nk}(\dots)$ позволяет записать уравнения совместности деформаций и скоростей деформаций с точностью до малых первого порядка:

$$\Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_i \nabla_k \varepsilon_{\alpha\gamma} = 0; \quad \Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_i \nabla_k \dot{\varepsilon}_{\alpha\gamma} = 0, \quad (1.1.3)$$

выполнение которых обеспечивает сохранение сплошности среды при деформации и однозначное определение компонент u_i вектора перемещений по известным компонентам ε_{ij} тензора деформаций. Здесь Λ_{ijk} — компоненты абсолютного дискриминантного тензора (Λ).

В тех случаях, когда перемещения частиц среды при ее деформации малы, деформированное состояние характеризуется тензором малых деформаций

$$(e) = e_{ij} r^i r^j = e^i{}_j r_i r_j = e_{ij} r^i r_j$$

с компонентами

$$e_{ij} = 0,5 (\Delta_i u_j + \Delta_j u_i). \quad (1.1.4)$$

Компоненты ε_{ij} тензора деформаций могут быть выражены через компоненты e_{ij} тензора малых деформаций (e) и тензора поворота (ω)

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + 0,5 (e_i^k - \omega_i^k) (e_{kj} + \omega_{kj}),$$

если ввести в рассмотрение тензор поворота с компонентами

$$\omega_{ij} = 0,5 (\nabla_i u_j - \nabla_j u_i)$$

и воспользоваться очевидными соотношениями

$$\nabla_i u_j = e_{ij} + \omega_{ij}; \quad \nabla_j u_i = e_{ij} - \omega_{ij}.$$

Напряженное состояние среды характеризуется тензором напряжений

$$(\sigma) = \sigma_{ij} r^i r^j = \sigma^i{}_j r_i r_j = \sigma_{ij} r^i r_j.$$

компоненты которого на поверхности S области D удовлетворяют соотношениям

$$p_{(n)}^i = \sigma^{ij} (S) n_j, \quad (1.1.5)$$

а в объеме V области D подчинены уравнениям равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0, \quad \text{чл} \quad (1.1.6)$$

где n_i — компоненты вектора внешней нормали к поверхности S .

Основу механики сплошной среды составляют законы сохранения массы, количества движения и энергии:

а) масса среды в процессе деформации остается постоянной для фиксированной области D объема V с поверхностью S ;

б) изменение количества движения частиц среды, заключенной в области D , равно импульсу всех внешних сил, действующих на среду при ее движении;

в) работа внешних сил, затраченная на деформацию среды в изменяющемся тепловом потоке, равна сумме внутренней и кинетической энергии частиц среды при их движении или равновесии.

Следствием этих законов являются:

а) уравнение неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \nabla_i (\rho v^i) = 0; \quad (1.1.7)$$

б) уравнение движения

$$\rho dv^i / dt = \nabla_j \sigma^{ij} + F^i; \quad (1.1.8)$$

в) термодинамические соотношения

$$\rho d\Phi / dt = \sigma^{ij} \epsilon_{ij} - \nabla_i q^i; \quad \rho T ds / dt = -\nabla_i q^i + W^*;$$

$$dF' + s' dT = d\Phi' - T ds' = \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt - W^* dt,$$

причем

$$F' = \rho F = \rho (\Phi - sT) = \Phi' - s'T;$$

$$\Phi = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}; \quad W^* = \rho \chi = D^{ij}(\sigma) D_{ij}(\dot{\epsilon}) \geq 0,$$

где Φ — удельная энергия деформации; s — энтропия среды; W^* — мощность роста необратимых потерь энергии (рассеяние энергии). Из термодинамических соотношений следует условие необратимости $ds/dt > 0$, так как $W^*/T > 0$.

Тепловое воздействие на среду характеризуется распределением температуры в ней в соответствии с уравнением теплопроводности

$$\rho c dT / dt = \Lambda \nabla^2 T - 3\beta T \partial \epsilon / \partial t + \nabla_i q^i, \quad (1.1.9)$$

где c — удельная теплоемкость среды; Λ — коэффициент теплопроводности; β — коэффициент объемного расширения; $\epsilon = \Gamma_1(\epsilon)/3$ — средняя деформация среды.

В механике сплошной среды фундаментальную роль играют принцип возможных перемещений и принцип возможных изменений напряженного состояния.

Принцип возможных перемещений, характеризуемый уравнением

$$\int_V F^i \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS = \int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV, \quad (1.1.10)$$

указывает на то, что виртуальная работа внутренних сил среды, находящейся в равновесии, равна работе напряжений на соответствующих вариациях деформаций. Так как

$$\int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V (\partial \Phi / \partial e_{ij}) \delta e_{ij} dV = \delta \int_V \Phi dV = \delta U,$$

а объемные и поверхностные силы не варьируются, уравнение (1.1.10) можно переписать в виде

$$\delta \left(U - \int_V F^i u_i dV - \int_S p_{(n)}^i u_i dS \right) = 0, \quad (1.1.11)$$

где U — работа деформации. Выражение

$$\Omega = U - \int_V F^i u_i dV - \int_S p_{(n)}^i u_i dS \quad (1.1.12)$$

назовем полной энергией среды при равновесии, тогда уравнение (1.1.10) принимает вид

$$\delta \Omega = 0, \quad (1.1.13)$$

т. е. в истинном (действительном) напряженно-деформированном состоянии среды функционал Ω имеет стационарное значение.

Принцип возможных изменений напряженного состояния, характеризуемый уравнением

$$\int_V e_{ij} \delta \sigma^{ij} dV = \int_V \delta F^i u_i dV + \int_S \delta p_{(n)}^i u_i dS, \quad (1.1.14)$$

указывает на то, что при равновесии среды работа вариаций внешних сил на истинных перемещениях равна работе вариаций напряжений на истинных деформациях среды. Так как внешние силы не варьируются ($\delta F^i = 0$; $\delta p_{(n)}^i = 0$), а граничные условия заданы на поверхности ($u_i(S) = u_{is}$ на S_1 ; $p_{(n)}^i = \sigma^{ii}(S) n_j$ на S_2), то уравнение (1.1.14) принимает вид

$$\delta \left(R - \int_S u_{is} n_j \sigma^{ij} dS \right) = 0.$$

Выражение

$$\tilde{R} = R - \int_S u_{is} n_j \sigma^{ij} dS \quad (1.1.15)$$

называется полной дополнительной работой, а выражение

$$R = \int_V \int_0^{\sigma_{ij}} e_{ij} d\sigma^{ij} dV$$

— дополнительной работой деформации среды, причем

$$\delta R = \int_V e_{ij} \delta \sigma^{ij} dV.$$

С учетом этого рассматриваемый принцип можно записать так:

$$\delta \tilde{R} = 0. \quad (1.1.16)$$

Следовательно, при равновесии истинному (действительному) состоянию среды соответствует стационарное значение полной дополнительной работы $\tilde{R}$, в частности дополнительной работы деформации R .

При конечных деформациях среды различают два рода дополнительной работы деформации. Величина $R^{(1)} = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij}$ представляет собой удельную дополнительную работу деформации первого рода, вычисленную в предположении, что в течение всего процесса деформации компоненты тензора (σ) сохраняют одни и те же значения, равные их окончательным значениям в положении равновесия. Полная дополнительная работа деформации первого рода среды определяется интегрированием по объему V области D , занятой средой,

т. е. $\tilde{R}^{(1)} = \int_V R^{(1)} dV$. Величина $R^{(2)} = \int_0^{\sigma_{ij}} \nabla_i u_j d\sigma^{ij}$ — удельная дополнительная работа деформации второго рода, вычисленная в предположении, что в течение процесса деформации компоненты тензора (σ) остаются постоянными, равными их окончательным значениям в положении равновесия, которому соответствует вектор перемещений u . Полная дополнительная работа деформации второго рода $\tilde{R}^{(2)} = \int_V R^{(2)} dV$. В выражения

$R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ входят компоненты тензора обобщенных напряжений (σ). Для малых деформаций $R^{(1)} = R^{(2)}$, для конечных деформаций $R^{(1)} \neq R^{(2)}$.

Уравнение (1.1.16) указывает, что истинному напряженно-деформированному состоянию среды соответствует стационарное значение $\tilde{R}^{(2)}$. При малых деформациях среды дополнительные работы деформации $\tilde{R}^{(1)}$ и $\tilde{R}^{(2)}$ совпадают и принимают стационарные значения для истинного поля напряжений и переме-

щений. Очевидно, что при конечных деформациях дополнительная работа деформации $\tilde{R}^{(1)}$ должна также принимать стационарное значение для истинного напряженно-деформированного состояния среды, т. е. должен иметь место принцип стационарности полной дополнительной работы $\tilde{R}^{(1)}$, которому соответствует уравнение (1.1.16).

Пусть среда, занимая область D объема V с поверхностью S , находится в движении. Принцип возможных перемещений динамики сплошной среды характеризуется уравнением

$$\int_V (F^j - \rho g^{ja} v_a / dt) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS = \int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV \quad (1.1.17)$$

и указывает на то, что при движении частиц среды работа внешних сил и сил инерции на вариациях перемещений равна вариации энергии деформации среды. По аналогии с преобразованием уравнения (1.1.10) и с учетом равенств $\delta u_i = v_i \delta t$; $\delta \Phi = (\partial \Phi / \partial t) \delta t$; ..., соотношение (1.1.19) приведем к виду

$$\int_V F^i v_i dV + \int_S p_{(n)}^i v_i dS - \int_V \rho g^{ia} \dot{v}_a v_i dV = \dot{U}.$$

Введем в рассмотрение кинетическую энергию

$$E_k = 0,5 \rho \int_V v^i v_i dV.$$

Тогда

$$dE_k / dt = \rho \int_V g^{ia} \dot{v}_a v_i dV$$

и последнее соотношение можно записать в форме

$$\frac{d}{dt} (E_k + U) = \int_V F^i v_i dV + \int_S p_{(n)}^i v_i dS,$$

которая выражает закон сохранения энергии при адиабатическом процессе деформации: суммарное приращение во времени кинетической энергии и работы деформации равно мощности внешних сил, действующих на среду, заключенную в области D пространства.

Рассмотрим непрерывно изменяющуюся в промежутке времени $t_0 \dots t_1$ конфигурацию деформированной области D . Возможные перемещения $\bar{u}_i = u_i + \delta u_i$ выберем так, чтобы их отличие от действительных перемещений $u_i(\mathbf{r}, t)$ было подчинено условиям

$$\delta u_i(\mathbf{r}, t_0) = 0; \delta u_i(\mathbf{r}, t_1) = 0.$$

Соотношение принципа возможных перемещений, записанное в виде

$$\delta A - \rho \int_V g^{i\alpha} \dot{v}_\alpha \delta u_i dV = \delta \int_V \Phi dV,$$

проинтегрируем по времени от t_0 до t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = \int_{t_0}^{t_1} \rho \int_V g^{i\alpha} \dot{v}_\alpha \delta u_i dV dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta \int_V \Phi dV dt, \quad (1.1.18)$$

где A — работа внешних сил. Интегрируя вариацию кинетической энергии

$$\delta E_k = \rho \int_V v^i \delta v_i dV = \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (v^i \delta u_i) dV - \rho \int_V \dot{v}^i \delta u_i dV$$

по времени от t_0 до t_1 , получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta E_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (v^i \delta u_i) dV dt - \int_{t_0}^{t_1} \rho \int_V \dot{v}^i \delta u_i dV dt,$$

но

$$\int_{t_0}^{t_1} \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (v^i \delta u_i) dV dt = 0$$

в силу сделанных предположений, поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta E_k dt = - \int_{t_0}^{t_1} \rho \int_V g^{i\alpha} \dot{v}_\alpha \delta u_i dV dt.$$

Подстановка полученного интеграла в уравнение (1.1.18) приводит к соотношению, выражающему принцип Гамильтона:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - E_k) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt. \quad (1.1.19)$$

В левой части соотношения (1.1.19) знак вариации вынесен за знак интеграла, что допустимо, так как U и E_k являются функциями состояния среды, т. е. зависят от ее мгновенного состояния и не зависят от того, как оно было достигнуто. В правой части этого соотношения знак вариации можно вынести за знак интеграла только тогда, когда внешние силы потенциальные, т. е.

$$\delta A = - \frac{\partial}{\partial u_i} \delta u_i = - \delta \left(\frac{\partial}{\partial u_i} u_i \right).$$

Очевидно, потенциал внешних сил существует в том случае, если силы не зависят от перемещений, и тогда

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - E_k + \Phi) dt = 0.$$

Пусть $\Pi = U + \Phi$ — полная потенциальная энергия системы, тогда соотношение (1.1.19) имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - E_k) dt = 0, \quad (1.1.20)$$

причем $L = E_k - \Pi$ есть функция Лагранжа, а интеграл $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ выражает действие по Гамильтону. Уравнение (1.1.20) указывает на то, что истинному состоянию среды соответствует стационарное значение действия по Гамильтону.

Если при движении частиц среды на части S_1 поверхности области D задано распределение скоростей $v_i(S) = v_{is}$, то принцип возможных перемещений переходит в *принцип возможных скоростей*, характеризуемый соотношением

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V (F^i - \rho dv^i/dt) \delta v_i dV + \int_{S_1} p_{(n)}^i \delta v_i dS. \quad (1.1.21)$$

С учетом равенства

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \delta U,$$

где $U = \int_V \Psi(\dot{\epsilon}_{ij}) dV$ — полная мощность деформации, а $\Psi(\dot{\epsilon}_{ij}) =$

$= \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma^{ij} d\dot{\epsilon}_{ij}$ — удельная мощность деформации, соотношение (1.1.21) принимает вид

$$\delta U = \int_V (F^i - \rho dv^i/dt) \delta v_i dV + \int_{S_1} p_{(n)}^i \delta v_i dS \quad (1.1.22)$$

и означает, что мощность внешних сил воспроизводится в виде мощности внутренних сил и изменения кинетической энергии среды при соответствующих вариациях скоростей.

Принцип возможных изменений напряженного состояния при движении частиц среды характеризуется соотношением

$$\int_V (\nabla_j u_i \delta \sigma^{ij} + u_i \rho d\delta v^i/dt) dV = \int_{S_1} u_{is} n_j \delta \sigma^{ij} dS. \quad (1.1.23)$$

При $u_{iS}=0$ на S_1 или $S_1=0$

$$\int_V (\nabla_j u_i \delta \sigma^{ij} + u_i \rho d\delta v^i / dt) dV = 0. \quad (1.1.24)$$

Если на поверхности области D задано распределение скоростей $v^i(S)=v_s^i$, тогда справедливо соотношение

$$\int_V (\nabla_j v_i \delta \sigma^{ij} + v_i \rho d\delta v^i / dt) dV = \int_{S_1} v_{iS} n_j \delta \sigma^{ij} dS. \quad (1.1.25)$$

При $v_{iS}=0$ на S_1 или $S_1=0$

$$\int_V (\nabla_j v_i \delta \sigma^{ij} + v_i \rho d\delta v^i / dt) dV = 0. \quad (1.1.26)$$

Вводя в рассмотрение удельную дополнительную работу деформации

$$d\bar{\Phi} = e_{ij} d\sigma^{ij}, \quad e_{ij} = \partial \bar{\Phi} / \partial \sigma^{ij}$$

как функцию, характеризующую физико-математические свойства среды, полную дополнительную работу деформации R представим в виде интеграла

$$R = \int_V \bar{\Phi}(\sigma^{ij}) dV,$$

взятого по объему V области D . Соотношения (1.1.23) и (1.1.24) запишем в форме

$$\begin{aligned} \delta R + \int_V (u_i \rho d\delta v^i / dt) dV &= \int_{S_1} u_{iS} n_j \delta \sigma^{ij} dS; \\ \delta R + \int_V (u_i \rho d\delta v^i / dt) dV &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Из уравнений (1.1.27) следует, что при движении частиц среды в области D истинному напряженному состоянию соответствует равенство нулю суммы вариаций полной дополнительной работы

$$\tilde{R} = R - \int_S u_{iS} n_j \sigma^{ij} dS$$

или полной дополнительной работы деформаций R и работы сил инерции на перемещениях u_i .

Вводя в рассмотрение удельную дополнительную мощность деформаций $\bar{\Psi}(\sigma^{ij})$, связанную с компонентами e_{ij} зависимостью $e_{ij} = \partial \bar{\Psi} / \partial \sigma^{ij}$, представим полную дополнительную мощность

деформации среды в области D интегралом

$$W = \int_V \bar{\Psi}(\sigma^{ij}) dV,$$

а полную дополнительную мощность разностью

$$\tilde{W} = W - \int_S v_{is} n_j \sigma^{ij} dV.$$

Соотношения (1.1.25) и (1.1.26) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \delta \tilde{W} + \int_V (\rho v_i d\delta v^i / dt) dV &= 0; \\ \delta W + \int_V (\rho v_i d\delta v^i / dt) dV &= 0, \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

откуда следует, что при движении частиц среды в области D истинному напряженному состоянию соответствует равенство нулю суммы вариаций полной дополнительной мощности или полной дополнительной мощности деформаций среды и мощности сил инерции.

Рассмотренные принципы возможных перемещений и возможных изменений напряженного состояния являются основополагающими в механике сплошной среды, именуются вариационными и выражают законы сохранения, сводящиеся к утверждению, что при равновесии и движении среды некоторый функционал рассматриваемого процесса должен достигать стационарного значения.

1.2. Основы постановки задач механики сплошной среды

Располагая уравнениями и соотношениями механики сплошной среды, можно перейти к постановке задач, которая включает:

1) выбор модели изучаемого процесса, протекающего в реальной среде, и системы координат, в которой рассматривается изучаемый процесс;

2) запись замкнутой системы уравнений и соотношений для выбранной модели сплошной среды, называемой исходной и описывающей изучаемый процесс;

3) выбор основных неизвестных, характеризующих изучаемый процесс, и сведение системы исходных уравнений и соотношений к системе разрешающих уравнений относительно указанных неизвестных;

4) задание или выявление системы внешних сил, температуры и других факторов, действующих на среду, и выбор или установление соответствующих начальных и граничных усло-

вий, которыми учитывались бы основные специфические аспекты реального процесса.

Выполнение перечисленных требований обеспечивает корректную в математическом отношении постановку задачи механики сплошной среды. Понятие корректности постановки задачи основано на следующем. Задача механики относится к классу количественных задач, решение ее заключается в построении решения $u(x)$ по заданным исходным данным x . Будем считать их элементами метрических пространств U и X с расстояниями между элементами $\rho_U(u_1, u_2)$ и $\rho_X(x_1, x_2)$, причем $u_1, u_2 \in U$; $x_1, x_2 \in X$. Задача нахождения решения $u(x)$ из пространства U по исходным данным $x \in X$ называется *устойчивой* на пространствах (U, X) , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_X(x_1, x_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$. Определение решения $u \in U$ по исходным данным $x \in X$ называется *корректно* поставленной задачей на паре метрических пространств (U, X) , если удовлетворяются три условия: 1) для всякого элемента $x \in X$ существует решение $u \in U$; 2) решение определяется однозначно; 3) задача устойчива на пространствах (U, X) .

Поведение сплошной среды при движении (равновесии) независимо от ее агрегатного состояния и физико-механических свойств характеризуется различными явлениями и процессами, определяемыми множеством факторов, влияние которых учесть невозможно. Поэтому при изучении того или иного процесса возникает потребность в выборе и построении рациональной модели. Выбор модели — предмет специальных исследований — всегда связан с идеализацией, схематизацией и введением различных понятий и гипотез. Все это необходимо для того, чтобы сохранить в модели основные определяющие свойства процесса с целью их математического описания и отбросить второстепенные.

Решение задач механики сплошной среды связано с выбором системы координат, в которой описывается движение и состояние сплошной среды. В качестве системы координат выбирают любые неподвижные и движущиеся системы, однако всегда необходимо указать инерциальную систему координат, так как только в этом случае можно пользоваться данными о силах инерции.

Замкнутая система уравнений и соотношений, с помощью которой описывается состояние и движение сплошной среды с учетом ее агрегатного состояния и физико-механических свойств, называется исходной. Эта система устанавливает связь между объектами ρ , u , v , (σ) , (ε) , ... и их производными, а также связь с действующими внешними силами, температурой и другими факторами. В зависимости от выбора основных неизвестных система исходных уравнений и соотношений различна, однако всегда должна содержать записанные в удобной для

данной задачи форме уравнения, соответствующие законам сохранения массы, количества движения и энергии, причем исходная система уравнений и соотношений должна быть замкнутой.

Исходная система уравнений и соотношений, как правило, содержит достаточно большое число неизвестных функций. Решение выполняется для разрешающих уравнений. Разрешающими называются уравнения, которые содержат наименьшее число независимых искомым функций и получены исключением остальных неизвестных функций из уравнений и соотношений исходной системы. При математически корректной постановке задачи механики сплошной среды число разрешающих уравнений соответствует числу искомым неизвестных. В большинстве случаев разрешающие уравнения — дифференциальные в частных производных, интегродифференциальные, интегральные, но могут существовать и в конечной функциональной форме.

Решение разрешающих уравнений связано с введением произвольных функций интегрирования, определение которых требует задания начальных и граничных условий для рассматриваемой задачи. *Начальными* называются такие условия, которые определяют искомые функции и их производные по времени t в начальный момент t_0 . Интервал времени, в котором изучается рассматриваемый процесс, может быть конечным или бесконечным; он начинается в некоторый характерный момент времени $t=t_0$, принимаемый за начальный. Число начальных условий определяется числом неизвестных функций и порядком высших производных по времени от этих функций, входящих в разрешающие уравнения.

Движение частиц сплошной среды проходит в некоторой области D , которая задана или определяется в процессе решения задачи. Форма области — произвольная; задается уравнениями ограничивающих поверхностей, наличие которых вызывает необходимость формулировать некоторые условия на поверхности S . Эти условия, которые определяют искомые функции и их производные по координатам на поверхности S области D , называются *граничными*, формулируются на основании дополнительных физических соображений и разделяются на геометрические, кинематические, динамические и смешанные.

Пусть ограничивающая поверхность S области D задана уравнением $\Phi(\mathbf{r}, t)=0$, тогда известна внешняя нормаль к ней:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \text{grad } \Phi / |\text{grad } \Phi|.$$

Представим поверхность S в виде суммы поверхностей $S = S_V + S_P + S_{PV}$. В зависимости от свойств рассматриваемой среды геометрические условия, заданные на части $S_1 = S_V$ поверхности, сводятся либо к заданию вектора перемещений

$$u_i(S) = u_{iS}, \quad (1.2.1)$$

либо к заданию нормальной составляющей от вектора перемещений $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n(S) = u_{nS}$.

Кинематические условия, заданные на части $S_1 = S_V$ поверхности, сводятся либо к заданию вектора скорости

$$v_i(S) = v_{iS}, \quad (1.2.2)$$

либо к заданию нормальной составляющей v_n вектора скорости $\mathbf{v} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_n(S) = v_{nS}$.

Динамические условия, заданные на части $S_2 = S_P$ поверхности, сводятся к заданию на $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ либо нормального напряжения $\sigma_n = p_{(n)}$, либо полного вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{p}_{(n)}$, где $\mathbf{p}_{(n)}$ — вектор внешних поверхностных сил. На произвольной площадке $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}$, поэтому

$$\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \sigma^{ij} n_j \mathbf{r}_i = p_{(n)}^i \mathbf{r}_i = \mathbf{p}_{(n)}.$$

Отсюда на $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ имеем условие, аналогичное (1.1.5):

$$p_{(n)}^i = \sigma^{ij}(S) n_j. \quad (1.2.3)$$

Смешанные условия, заданные на части S_{VP} поверхности, сводятся к заданию на $\Phi = 0$ двух (одной) составляющих вектора $\mathbf{v}$ и одной (двух) составляющей вектора $\boldsymbol{\sigma}_n$, т. е. всего трех скалярных условий. В противном случае задача механики сплошной среды поставлена некорректно.

Температурные граничные условия сводятся либо к заданию на части S_T поверхности температуры $T = T_S(\mathbf{r}, t)$, либо к заданию на части S_q поверхности теплового потока $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_S(\mathbf{r}, t)$. В большинстве случаев поток q_S пропорционален разности температур: $q_S = \alpha(T - T_S)$, где α — коэффициент теплоотдачи. Если имеет место собственное излучение, то q_S определяется согласно закону Стефана—Больцмана.

Граничные условия могут быть заданы в любой форме, однако они должны отражать специфику рассматриваемой задачи механики сплошной среды. Число граничных условий определяется прежде всего числом неизвестных функций и порядком высших производных по координатам от этих функций, входящих в разрешающие уравнения. Для каждой функции число граничных условий не должно превышать порядка высшей производной от этой функции, входящей в разрешающее уравнение. Порядок и структура граничного оператора определяются видом граничных условий. В частности, порядок оператора не должен превышать порядок разрешающего уравнения.

Таким образом, общие требования, сформулированные в данном пункте, являются необходимыми и достаточными для математически корректной постановки задач механики сплошной среды.

1.3. Механика жидкости и газа

Жидкими (газообразными) называются среды, сдвиговое сопротивление которых при любой деформации стремится к нулю, если скорости деформации равны нулю в течение достаточно большого промежутка времени. По определению, частица относится к жидкой (газообразной) среде, если при $\epsilon_i = \text{const}$ и $t \rightarrow \infty$ сдвиговые напряжения $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, где $\tau_{12} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2)$; $\tau_{23} = 0,5(\sigma_2 - \sigma_3)$; $\tau_{31} = 0,5(\sigma_3 - \sigma_1)$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; p — давление.

Реальные жидкие (газообразные) среды обладают всеми основными свойствами сплошной среды: вязкостью, упругостью, пластичностью. Причем, первостепенное значение имеет вязкость; упругость и пластичность проявляются слабо и их можно не учитывать. В различных жидких и газообразных средах свойство вязкости проявляется различно. Имеются жидкости (газы), в которых вязкость выражена слабо, тогда вязкостью можно пренебречь и считать жидкие (газообразные) среды идеальными. Если в жидких (газообразных) средах свойство вязкости выражено сильно, тогда имеем вязкие жидкости (газы).

Рассмотрим идеальную жидкость (газ) — среду, в которой отсутствует рассеяние ($W^* = 0$), и сдвиговое сопротивление при произвольной деформации и скорости деформации в любой момент времени равно нулю, т. е. $\sigma_i = -p$ ($i = 1, 2, 3$) для любого t .

Тензор напряжений идеальной жидкости (газа) (σ) $= -p(g)$ — шаровой с компонентами $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$. Уравнения движения (1.1.8) можно привести к виду динамических уравнений Эйлера

$$\rho(\partial v_i / \partial t + v^j \nabla_j v_i) = F_i - g_i \nabla_a p. \quad (1.3.1)$$

Уравнения (1.3.1) и (1.1.7) образуют систему совместных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных ρ, p, v_i . В общем случае система уравнений (1.3.1) и (1.1.7) не замкнута, так как содержит шесть неизвестных: ρ, p, T, v_i , и требует введения дополнительных уравнений, которыми будут уравнение состояния

$$p = p(\rho, T) \quad (1.3.2)$$

и три уравнения распространения теплоты

$$\rho c_v dT/dt - \nabla_i (\lambda g^{ia} \nabla_a T) + p \nabla_i v^i = 0, \quad (1.3.3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Полученная замкнутая система из шести уравнений с шестью неизвестными является системой разрешающих уравнений механики идеальной жидкости и газа.

Дополнительные уравнения (1.3.2) и (1.3.3) требуют некоторых пояснений. Уравнение состояния (1.3.2) может быть задано в форме $E = E(\rho, T)$ или $s = s(\rho, T)$. Сюда входят внутренняя

энергия E и энтропия s жидкости, взаимосвязанные термодинамическим соотношением

$$dE - (p/\rho^2) d\rho = T ds + \sum_i \mu_i dN_i,$$

записанным для переменного числа частиц N_i при наличии химического потенциала $\mu_i = (\partial E / \partial N_i)_{s, \rho}$. Из приведенного термодинамического соотношения следует уравнение закона сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt}.$$

При $N_i = \text{const}$ имеем уравнение энергии для неадиабатического процесса с выделением или поглощением энергии, но без изменения фазового состояния жидкости:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dF}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = T \frac{ds}{dt}. \quad (1.3.4)$$

В адиабатическом процессе $dQ/dt = 0$, т. е.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v^j \nabla_j s = 0. \quad (1.3.5)$$

Вводя в рассмотрение энтальпию торможения

$$i = H + v^2/2 = E + p/\rho,$$

где H — тепловая энергия и, дополняя условие (1.3.5) соотношением

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + v^j \nabla_j i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.3.6)$$

получаем уравнение энергии для адиабатического движения сжимаемой жидкости при неустановившемся движении. Для установившегося движения, когда $\partial s / \partial t = 0$ и $\partial i / \partial t = 0$, из уравнений (1.3.5) и (1.3.6) находим $v^j \nabla_j s = 0$ и $v^j \nabla_j i = 0$, т. е. s и i постоянны вдоль линии тока, тогда как для неустановившегося движения энтропия и энтальпия торможения переменны вдоль линии тока и зависят от скорости изменения давления. Если в начальный момент t_0 энтропия s для всех частиц жидкости одинакова, то в силу адиабатичности процесса она постоянна в течение всего движения, а условие адиабатичности (1.3.5) преобразуется в равенство $s = s_0 = \text{const}$.

В частном случае несжимаемой ($\partial \rho / \partial t = 0$) и однородной ($\nabla_i \rho = 0$) жидкости при постоянной температуре уравнения (1.3.1) и (1.1.7) принимают вид

$$\rho_0 dv_i/dt = F_i - g_i \alpha \nabla_a p; \quad \nabla_i v^i = 0$$

и образуют замкнутую систему разрешающих уравнений. Для баротропной жидкости $p=p(\rho)$, в частности

$$p=p_0(\rho/\rho_0)^n, \quad (1.3.7)$$

где $n \geq 1$ — показатель баротропы.

Уравнения (1.3.1), (1.1.7) и (1.3.7) образуют замкнутую систему разрешающих уравнений относительно неизвестных ρ , p , v_i при условии постоянства температуры.

Газ, в котором молекулы взаимодействуют только при столкновениях, называют совершенным газом; его уравнение состояния есть уравнение Клапейрона $p=R\rho T$, где R — газовая постоянная.

Для идеальной несжимаемой жидкости (газа), находящейся в силовом потенциальном поле, когда действующие внешние силы $F_i = \nabla_i \Phi$ имеют потенциал Φ , справедлива *теорема о циркуляции*: циркуляция Γ вектора скорости $\mathbf{v}$ по произвольному замкнутому жидкому контуру в процессе движения остается постоянной:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_l (v_i dx^i) = 0,$$

откуда

$$\Gamma = \oint_l (v_i dx^i) = \text{const.}$$

Следовательно, если движение возникает из состояния покоя, то циркуляция по произвольному замкнутому жидкому контуру тождественно равна нулю. В соответствии с формулой Стокса

$$\oint_l (v_i dx^i) = \int_S (\Lambda_k^{ji} \nabla_j v_i n^k) dS,$$

где S — поверхность, натянутая на контур l , приходим к условию отсутствия вращения при движении:

$$\omega_k = \Lambda_k^{ji} \nabla_j v_i = 0, \quad (1.3.8)$$

где ω_k — компоненты завихренности, которыми определяется угловая скорость вращения элемента объема жидкости.

Равенство (1.3.8) представляет собой необходимое и достаточное условие потенциальности поля скоростей, т. е. существования потенциала скоростей

$$v_i = \nabla_i \Phi. \quad (1.3.9)$$

Подстановка равенства (1.3.9) в уравнение неразрывности

$$\nabla_i v^i = g^{ia} \nabla_a v_i = 0$$

приводит к уравнению Лапласа

$$g^{ia}\nabla_i\nabla_a\varphi=\nabla^2\varphi=0, \quad (1.3.10)$$

т. е. потенциал скоростей φ — гармоническая функция.

Воспользуемся соотношениями

$$v^j\nabla_jv_i=\Lambda_i^{kj}\omega_kv_j+\nabla_i(v^2/2); \quad v^2=v^\alpha v_\alpha$$

и запишем уравнения Эйлера (1.3.1) в форме

$$\rho[\partial v_i/\partial t+\Lambda_i^{kj}\omega_kv_j+\nabla_i(v^2/2)]=F_i-\nabla_i p.$$

Тогда для потенциала скоростей (1.3.9) имеем

$$\nabla_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{\Phi}{\rho}\right)=0,$$

откуда следует запись *интеграла Коши-Лагранжа*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{\Phi}{\rho}=f(t), \quad (1.3.11)$$

где $f(t)$ — некоторая функция времени, эквивалентная уравнениям (1.3.1).

При установившемся (стационарном) движении, когда поле скоростей не зависит от времени, уравнение Лапласа (1.3.10) полностью описывает поле скоростей, а соотношение (1.3.11) принимает вид

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{\Phi}{\rho}=\text{const}, \quad (1.3.12)$$

называемый *интегралом Бернулли*.

Таким образом, задача об установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости (газа) сводится к отысканию гармонической функции, соответствующей условиям задачи. Интеграл Бернулли является конечным соотношением, связывающим скорость движения $\mathbf{v}$ с давлением p жидкости (газа).

Если движение не потенциальное, обладает некоторой завихренностью ω , а внешние силы имеют потенциал Φ , то можно ввести функцию Лэмба

$$H=\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{\Phi}{\rho},$$

а уравнения движения записать в форме

$$\rho(\partial v_i/\partial t+\Lambda_i^{kj}\omega_kv_j)=-\nabla_i H. \quad (1.3.13)$$

Умножив скалярно уравнения Эйлера (1.3.1) на вектор скорости частиц, получим соотношение

$$\rho v^i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v^i \left[\nabla_i \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla_i p - \frac{1}{\rho} F_i \right] = 0. \quad (1.3.14)$$

Для сжимаемой или несжимаемой баротропной жидкости введем функцию P , определяемую с точностью до постоянной соотношением

$$(1/\rho) \nabla_i p = \nabla_i P,$$

и допустим, что объемные силы $F_i = \nabla_i \Phi$ — потенциальные. Тогда соотношение (1.3.14) принимает вид

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho v^i \nabla_i B, \quad (1.3.15)$$

где $B = v^2/2 + P - \Phi/\rho$.

Если течение стационарное и $\partial(\dots)/\partial t = 0$, то $v^i \nabla_i B = dB/dt = 0$, т. е. величина $B = \text{const}$ на каждой линии тока, причем значение постоянной может изменяться при переходе от одной линии тока к другой. В этом случае имеет место *теорема Бернулли*: в стационарном течении идеальной жидкости при условии, что объемные силы — потенциальные, величина B постоянна на каждой линии тока.

Дивергенция

$$\nabla_i (\rho B v^i) = B \nabla_i (\rho v^i) + \rho v^i \nabla_i B$$

с учетом соотношений (1.3.14) и (1.1.7) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \nabla_i (\rho B v^i) &= - \left[B \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) - \left(P - \frac{\Phi}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по объему V области D внутри жидкости, ограниченной поверхностью S , получим

$$\int_S \rho B v^i n_i dS = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \left(P - \frac{\Phi}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV, \quad (1.3.16)$$

где в левой части равенства записано выражение для потока величины ρB через поверхность S . Соотношение (1.3.16) можно истолковать как интегральную форму записи теоремы Бернулли. Для стационарного течения правая часть (1.3.16) равна нулю, следовательно, поток величины ρB через поверхность S равен нулю.

Свойство сжимаемости становится существенным при движении идеальной жидкости (газа) с большими скоростями, сравнимыми со скоростью c распространения звука в среде, при этом плотность ρ не постоянна, ее необходимо определять. Для упрощения системы разрешающих уравнений можно принять условие изэнтропичности: во всем объеме области D энтропия $s = \text{const}$. В этом случае вместо уравнения (1.3.3) следует использовать термодинамическое уравнение (1.3.5), которое выражает

условие отсутствия теплообмена между частицами и указывает на постоянство энтропии s каждой частицы. Тогда уравнение состояния $p = p(\rho, s)$ упрощается и принимает вид $p = p(\rho)$, что указывает на баротропность процесса. Для баротропной жидкости

$$\Lambda^{ij\alpha} \nabla_i \left(\frac{1}{\rho} \nabla_j p \right) = \Lambda^{ij\alpha} \nabla_i \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \nabla_j \rho \right) = \Lambda^{ij\alpha} \nabla_i \nabla_j p(\rho) = 0.$$

следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_S \Lambda^{ij\alpha} \nabla_i \left(\frac{1}{\rho} \nabla_j p \right) n_\alpha dS = 0,$$

т. е. для изэнтропических движений справедлива теорема о циркуляции, которая позволяет рассматривать изэнтропические потенциальные (безвихревые) движения сжимаемой жидкости.

Следует отметить, что при определенных условиях в идеальных сжимаемых жидкостях в отличие от несжимаемых даже при гладких начальных условиях могут иметь место сильные разрывы — поверхности, на которых характеристики состояния меняются скачком. Из законов сохранения и термодинамических соображений следует, что при прохождении частицы через такой разрыв ее энтропия s меняется скачком и изэнтропичность нарушается.

Теперь можно сформулировать систему разрешающих уравнений для задач о движении идеальной сжимаемой жидкости (газа) относительно неизвестных ρ , p , T и v_i :

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \nabla_i (\rho v^i) &= 0; \\ \partial v_i / \partial t + v^j \nabla_j v_i + (1/\rho) \nabla_i p &= F_i; \\ p &= p(\rho, T); \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= T \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \left(\frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla_i p \right) = \\ &= T \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вязкую жидкость — изотропную сжимаемую среду, сдвиговое сопротивление которой отлично от нуля и линейно зависит от скорости деформации сдвига: $(\sigma) = \Pi(g) + 2\mu(\dot{\epsilon})$, где $\Pi = -p + 3\lambda\dot{\epsilon}$; μ и λ — коэффициенты вязкости, которые не зависят от деформаций и скоростей, но могут зависеть от температуры. Для вязкой жидкости (газа) характерны определяющие уравнения

$$\sigma = -p + 3\lambda'\dot{\epsilon}; \quad D_{ij}(\sigma) = 2\mu D_{ij}(\dot{\epsilon}), \quad (1.3.18)$$

где $\lambda' = \lambda + 2\mu/3$ — коэффициент объемной вязкости. Второе определяющее уравнение характеризует линейный закон вязкости

сдвигового сопротивления, поэтому μ — коэффициент сдвиговой вязкости.

Уравнениям (1.3.18) соответствуют физические соотношения

$$\sigma_{ij} = -p g_{ij} + (3\lambda' - 2\mu) \dot{\epsilon} g_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (1.3.19)$$

При движении вязкой жидкости ее состояние характеризуется функциями ρ , T , p , $\mathbf{v}$, (σ) , $(\dot{\epsilon})$, подчиняющимися уравнению неразрывности (1.1.7), уравнениям движения (1.1.8), кинематическим соотношениям (1.1.2), физическим соотношениям (1.3.19) и уравнениям совместности скоростей деформаций (1.1.3). Пусть основными неизвестными будут ρ , p , T , v_i , относительно которых должна быть написана система разрешающих уравнений. В этом случае исходная система уравнений и соотношений должна быть составлена из уравнений (1.1.7), (1.1.8), (1.1.2) и (1.3.19), однако эта система не замкнута и ее необходимо дополнить другими уравнениями и соотношениями. Объединим физические и кинематические соотношения:

$$\sigma_{ij} = -p g_{ij} + (\lambda' - 2\mu/3) \nabla_\alpha v^\alpha g_{ij} + \mu (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (1.3.20)$$

и подставим их в уравнения движения (1.1.8) в форме $\rho dv_i/dt = F_i + g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij}$, полагая коэффициенты вязкости λ' и μ постоянными. Полученные соотношения

$$\begin{aligned} \rho dv_i/dt &= F_i - \nabla_i p + (\lambda' - 2\mu/3) \nabla_i \nabla_\beta v^\beta + \mu \nabla_i \nabla_\alpha v^\alpha + \\ &+ \mu g^{ja} \nabla_a \nabla_j v_i = \nabla^2 v_i \end{aligned}$$

с учетом $g^{ja} \nabla_a \nabla_j v_i = \nabla^2 v_i$ образуют уравнения Навье—Стокса

$$\rho dv_i/dt = F_i - \nabla_i p + (\lambda' + \mu/3) \nabla_i \nabla_\beta v^\beta + \mu \nabla^2 v_i \quad (1.3.21)$$

и вместе с уравнением неразрывности (1.1.7) формируют систему из четырех дифференциальных уравнений с шестью неизвестными ρ , p , T , v_i .

Для установления дополняющих уравнений рассмотрим частные случаи. Для несжимаемой вязкой жидкости ($\mu = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $\epsilon = 0$) уравнение неразрывности (1.1.7) и уравнения Навье—Стокса (1.3.21) принимают вид

$$\nabla_i v^i = 0; \quad \rho dv_i/dt - F_i + \nabla_i p = \mu \nabla^2 v_i$$

и образуют замкнутую систему разрешающих уравнений относительно неизвестных p и v_i . Для несжимаемой вязкой жидкости с коэффициентом $\mu(T)$ уравнения (1.3.21) приводятся к виду

$$\rho dv_i/dt - F_i + \nabla_i p = 2\mu' g^{ja} \dot{\epsilon}_{ij} \nabla_a T + \mu \nabla^2 v_i, \quad (1.3.22)$$

где $\mu' = d\mu/dT$, а уравнение неразрывности (1.1.7) — к виду

$$\nabla_i v^i = 0. \quad (1.3.23)$$

Из термодинамических равенств

$$\rho \delta E = \delta Q + W^* \delta t, \quad \rho T \delta s = \delta Q + W^* \delta t$$

имеем $\delta E = T\delta s$, причем $E(T)$ и $s(T)$. Для покоящейся жидкости $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\delta Q = \rho c_v \delta t$, тогда

$$E = c_v T + \text{const}; \quad s = c_v \ln T + \text{const}.$$

Из закона сохранения энергии с учетом закона теплопроводности Фурье при $\lambda = \text{const}$ получим уравнение

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c_v} \nabla^2 T + \frac{2\mu}{\rho c_v} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}^{ij}. \quad (1.3.24)$$

В результате имеем замкнутую систему разрешающих уравнений (1.3.22), (1.3.24) относительно неизвестных ρ , T , v_i , которая характеризует движение вязкой несжимаемой жидкости и определяет ее состояние.

Для вязкого совершенного газа уравнения Навье—Стокса (1.3.21) и уравнение неразрывности (1.1.7) дополняются уравнением состояния (1.3.2) и уравнением энергии

$$\rho dE/dt = \nabla_i (\lambda g^{ia} \nabla_a T) - p \nabla_i v^i + W^*.$$

Полагая $E(\rho, T)$ известной функцией и

$$W^* = W_{\text{вяз}} = 9\lambda \dot{\varepsilon}^2 + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}^{ij},$$

совместно с уравнением энергии имеем замкнутую систему разрешающих уравнений (1.3.21), (1.1.7), (1.3.2) относительно неизвестных ρ , p , T , v_i .

Если при постановке задач механики вязкой жидкости (газа) в качестве основных неизвестных принять ρ , p , T , σ , (σ) , то система исходных уравнений и соотношений будет формироваться из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнений совместности скоростей деформаций (1.1.3), уравнения состояния (1.3.2), уравнения теплопроводности

$$\rho \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dt} = \nabla_i (\lambda g^{ia} \nabla_a T) - p \nabla_i v^i + W^*$$

и физических соотношений

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{p}{3\lambda'} g_{ij} + \left(\frac{1}{3\lambda'} - \frac{1}{2\mu} \right) \sigma g_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (1.3.25)$$

Подстановка соотношений (1.3.25) в уравнения совместности (1.1.3) позволяет записать их в форме

$$\frac{2\mu}{3\lambda'} \Lambda_{\alpha k}^i \Lambda_{\beta}^{jk} \nabla_i \nabla_j (p + \sigma) + \Lambda_{\alpha}^{ij} \Lambda_{\beta}^{ik} \nabla_i \nabla_j D_{jk}(\sigma) = 0.$$

Система разрешающих уравнений, составленная из последнего соотношения, уравнения теплопроводности и уравнений (1.1.7), (1.1.8), (1.3.2), содержит 12 уравнений с 12 неизвестными, т. е. является замкнутой.

Системы разрешающих уравнений механики жидкости (газа) — дифференциальные в частных производных; решение их

связано с введением неизвестных функций интегрирования. Выделить из множества допустимых решений истинное можно с помощью начальных и граничных условий. Для разрешающих уравнений механики жидкости и газа начальными условиями при $t=t_0$ являются: $\rho=\rho_0$; $p=p_0$; $T=T_0$; $v_i=v_{i0}$; $\sigma^{ij}=\sigma_0^{ij}$.

Граничные условия характеризуют специфические особенности рассматриваемого течения. Например, условия прилипания на неподвижной поверхности имеют вид $\mathbf{v}=0$. При обтекании тела жидкостью граничные условия на поверхности раздела тела с жидкой средой характеризует равенство

$$\mathbf{v}_{\text{ср}}=\mathbf{v}_\tau, \quad (1.3.26)$$

где $\mathbf{v}_\tau$, $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ — скорость частиц твердого тела и жидкости соответственно. Физически это означает прилипание частиц жидкости к поверхности тела.

Для идеальной жидкости в случае полного прилипания решение уравнений Эйлера не существует. В этом случае необходимо допускать возможность проскальзывания частиц жидкости на поверхности раздела, а три условия (1.3.26) заменять одним скалярным условием обтекания

$$\mathbf{v}_{\text{ср}}^{(n)}=\mathbf{v}_\tau^{(n)}. \quad (1.3.27)$$

Если движение потенциальное ($v_i=\nabla_i\varphi$), то условие (1.3.27) на поверхности S принимает вид $\partial\varphi/\partial n=v_\tau^{(n)}$ и выражает как сохранение контакта между жидкостью и поверхностью S тела, так и непроницаемость поверхности для жидкости. Касательные составляющие векторов скоростей на поверхности S различны: $\mathbf{v}_{\text{ср}}^{(\tau)}\neq\mathbf{v}_\tau^{(\tau)}$, т. е. имеет место проскальзывание частиц жидкости вдоль поверхности.

На неподвижной поверхности S условие непроницаемости определяется равенством $v_n=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$, а на движущейся поверхности — $v_n=v_S^{(n)}$.

На свободной поверхности S имеют место граничные условия

$$\mathbf{p}_{(n)}=(\sigma)\cdot\mathbf{n}=0,$$

эквивалентные двум скалярным $\sigma_n=p_n^{(n)}=-p$ и $\sigma_\tau=\tau^{(n)}$, где p — давление; $\tau^{(n)}$ — касательная нагрузка. Для идеальной жидкости граничное условие на свободной поверхности S имеет вид $p_n^{(n)}=-p$, так как условие идеальности жидкости $\sigma_\tau=0$. Граничные условия $\mathbf{p}_{(n)}=(\sigma)\cdot\mathbf{n}$ эквивалентны трем скалярным $\sigma_{ij}(S)n^j=p_i^{(n)}$. Подставив сюда физические соотношения (1.3.20), получим

$$p_i^{(n)}=[(-p+(\lambda'-2\mu/3)\nabla_a v^a)g_{ij}+\mu(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i)]s n^j.$$

Возможны и другие граничные условия, соответствующие рассматриваемой задаче.

В жидкости (газе) возмущения распространяются с некоторой конечной скоростью в виде волны возмущений, образуя область возмущений. С течением времени область возмущений расширяется; она отделена от области покоя поверхностью S_f фронта волны возмущений. На поверхности S_f некоторые характеристики состояния терпят разрыв. Существуют поверхности слабого и сильного разрыва. Поверхность, на которой искомые функции непрерывны, но разрывны только некоторые их производные по координатам x^i и времени t , называют поверхностью слабого разрыва. Поверхность, при переходе через которую терпят разрыв непрерывности искомые функции, называют поверхностью сильного разрыва. Волны возмущений в жидкости (газе) разделяются на слабые — звуковые и сильные — ударные. На поверхности фронта волны возмущений выполняются законы сохранения массы, количества движения, энергии. При переходе через поверхность фронта волны возмущений перемещения частиц жидкости должны быть функциями непрерывными. В противном случае нарушается сплошность жидкости (газа).

Рассмотрим движение вязкой жидкости, происходящее под действием сил, не зависящих от времени, и в некоторый момент времени $t=0$ определим поле скоростей. Изменим направления всех скоростей на обратные и примем это распределение скоростей за начальное, тогда жидкость будет совершать некоторое движение. Если жидкость идеальная, то каждая частица будет проходить в обратном направлении ту траекторию, по которой она двигалась до момента $t=0$, с той же скоростью, но противоположного знака. В случае вязкой жидкости этого не происходит — новое движение жидкости не имеет непосредственной связи с первоначальным. Такое утверждение формально сводится к следующей записи: если имеем решение $v_i(x^j, t)$, $p(x^j, t)$ разрешающих уравнений вязкой жидкости, то функции $v_i'(x^j, t) = -v_i(x^j, -t)$, $p'(x^j, t) = p(x^j, -t)$ не будут давать решения разрешающих уравнений. Это объясняется *диссипацией энергии*, т. е. процессом перехода части механической энергии в тепловую.

Оценим величину диссипации энергии. Для этого рассмотрим внутри жидкости произвольный объем V , ограниченный поверхностью S , на который действуют объемные F_i и поверхностные $p_i^{(n)}$ силы. Работа внешних сил за время dt равна

$$A = \left(\int_V F^i v_i dV + \int_S p_i^{(n)} v_i dS \right) dt.$$

Преобразовав поверхностный интеграл в объемный, получаем

$$A = \int_V (F^i v_i + \nabla_j \sigma^{ij} v_i + \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) dV dt.$$

Учитывая уравнения движения (1.1.8), имеем

$$A = \int_V (\rho v_i dv_i/dt + \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) dV dt.$$

Кинетическая энергия жидкости

$$E_k = 0,5 \int_V \rho v^i v_i dV,$$

но

$$0,5 d(v^i v_i) = v_i dv^i = v_i \frac{dv^i}{dt} dt,$$

тогда

$$dE_k = \int_V \rho \frac{dv^i}{dt} v_i dV dt.$$

В результате приходим к равенству

$$A = dE_k + \int_V \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV dt,$$

которое указывает, что производимая объемными и поверхностными силами работа только частично идет на увеличение кинетической энергии E_k жидкости. В случае несжимаемой жидкости количество диссипируемой энергии в единицу времени определяется формулой

$$\sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}.$$

Движение вязкой жидкости связано с диссипацией (рассеянием) энергии, характеризуемой удельной мощностью деформаций

$$\Psi(\dot{\epsilon}_{ij}) = -p\Gamma_1(\dot{\epsilon}) + (\lambda' - 2\mu/3)\Gamma_1^2(\dot{\epsilon}) + 2\mu\Gamma_2(\dot{\epsilon}) \quad (1.3.38)$$

или удельной дополнительной мощностью деформаций

$$\bar{\Psi}(\sigma_{ij}) = \frac{p}{3\lambda'}\Gamma_1(\sigma) + \left(\frac{1}{3\lambda'} - \frac{1}{2\mu}\right)\frac{1}{3}\Gamma_1^2(\sigma) + \frac{1}{2\mu}\Gamma_2(\sigma). \quad (1.3.29)$$

Интегрируя (1.3.28) по объему V области D , занятой жидкостью, определим мощность деформации

$$U = \int_V \Psi(\dot{\epsilon}_{ij}) dV = \int_V [-p\Gamma_1(\dot{\epsilon}) + (\lambda' - 2\mu/3)\Gamma_1^2(\dot{\epsilon}) + 2\mu\Gamma_2(\dot{\epsilon})] dV,$$

которая должна удовлетворять соотношению (1.1.22) принципа возможных скоростей, записанному в виде

$$\delta\tilde{U} + \int_V \rho (dv^i/dt) \delta v_i dV = 0, \quad (1.3.30)$$

где $\tilde{U} = U - \int_V F^i v_i dV - \int_S p_{(n)}^i v_i dS$ — полная мощность жидкости. Интегрируя (1.3.29) по объему V области D , определим дополнительную мощность деформаций

$$W = \int_V \bar{\Psi}(\sigma^{ij}) dV = \int_V \left[\frac{p}{3\lambda'} \Gamma_1(\sigma) + \left(\frac{1}{3\lambda'} - \frac{1}{2\mu} \right) \frac{1}{3} \Gamma_1^2(\sigma) + \frac{1}{2\mu} \Gamma_2(\sigma) \right] dV,$$

которая должна удовлетворять соотношению (1.1.28) принципа возможных изменений напряженного состояния. Полная дополнительная мощность

$$\tilde{W} = W - \int_S v_{is} n_j \sigma^{ij} dS$$

подчинена соотношению (1.1.28), т. е.

$$\delta \tilde{W} + \int_V \rho v_i (d\delta v^i / dt) dV = 0. \quad (1.3.31)$$

Следует заметить, что мощность деформации жидкости (газа)

$$U = \int_V \Psi(\dot{\epsilon}_{ij}) dV = \int_V \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

является аддитивной величиной $U = U_{(1)} + U_{(2)}$, где $U_{(1)} = - \int_V p \Gamma_1(\dot{\epsilon}) dV$; $U_{(2)} = \int_V \chi dV$.

Для несжимаемой жидкости $U_{(1)} = 0$, а для сжимаемой, с учетом уравнения неразрывности (1.1.7),

$$U_{(1)} = \int_V \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dV = - \int_V p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho dV.$$

Для баротропной жидкости

$$U_{(1)} = \int_V \frac{de}{dt} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_V e \rho dV = \frac{dE}{dt},$$

где e — массовая плотность внутренней энергии E .

Величина $U_{(2)}$ называется скоростью диссипации энергии и выражает мощность сил трения вязкой жидкости. Термодинамические соотношения указывают, что энергия диссипации не может быть отрицательной, а потому квадратичная форма

$$\chi = (\lambda' - 2\mu/3)(g^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2 + 2\mu \dot{\epsilon}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0$$

должна быть положительно-определенной и, следовательно, ее коэффициенты подчинены условиям $\mu > 0$ и $3\lambda' - 2\mu > 0$.

При решении задач механики вязкой жидкости (газа) можно использовать две известные теоремы.

Теорема о минимуме полной мощности жидкости (газа) при стационарном движении ее частиц утверждает, что истинному (действительному) состоянию жидкости при движении ее частиц соответствует экстремум функционала $U^*(v_i)$

$$\delta U^* = 0, \quad (1.3.32)$$

причем экстремум будет минимумом. Функционал

$$U^* = \tilde{U} + \int_V \rho \dot{v}^i v_i dV = U - \int_V F^i v_i dV - \int_S p_{(n)}^i v_i dS + \\ + \int_V \rho \dot{v}^i v_i dV \quad (1.3.33)$$

представляет собой полную мощность $\tilde{U}$ жидкости в состоянии стационарного движения и изменение во времени ее кинетической энергии $\int_V \rho \dot{v}^i v_i dV$. Вариация функционала (1.3.33) при варьировании компонент вектора скорости равна

$$\delta U^* = \delta \tilde{U} + \int_V \rho \dot{v}^i \delta v_i dV.$$

Сравнение ее с соотношением (1.3.30) приводит к уравнению (1.3.32).

Теорема о минимуме полной дополнительной мощности жидкости (газа) при стационарном движении ее частиц утверждает, что истинному (действительному) состоянию жидкости при движении ее частиц соответствует экстремум функционала $W^*(\sigma_{ij})$

$$\delta W^* = 0, \quad (1.3.34)$$

причем экстремум является минимумом. Функционал

$$W^* = \tilde{W} + \int_V \rho v^i (dv_i/dt) dV = W - \int_S v_{is} n_j \sigma^{ij} dS + \\ + \int_V \rho v^i (dv_i/dt) dV \quad (1.3.35)$$

представляет собой полную дополнительную мощность жидкости при движении, учитывает полную дополнительную мощность жидкости $\tilde{W}$ и мощность сил инерции $\int_V \rho v^i (dv_i/dt) dV$.

Вариация функционала $W^*(\sigma_{ij})$ вида (1.3.35) определяется как

$$\delta W^* = \delta \tilde{W} + \int_V \rho v^i (d\delta v_i/dt) dV.$$

Сравнение ее с соотношением (1.3.31) приводит к уравнению (1.3.34).

В заключение рассмотрим вопрос о законах подобия в механике жидкости и газа, используя разрешающие уравнения механики вязкой несжимаемой жидкости. Прежде всего установим достаточные условия механического подобия двух течений жидкости около или внутри двух геометрических подобных тел. Обозначим через $t_k, x_k^i, v_k^i, F_k^i, \rho_k, p_k, \mu_k$ величины, относящиеся к k -му течению ($k=1,2$). Если течения механически подобны, то после надлежащего выбора начала координат и начала отсчета будем иметь соотношения

$$t_2/t_1 = C_t; \quad x_{(2)}^i/x_{(1)}^i = l_2/l_1 = C_l, \quad (1.3.36)$$

где C_t, C_l — постоянные; l_k — размеры подобных тел.

При механическом подобии

$$v_{(2)}^i(x_{(2)}^i, t_2) = C_v v_{(1)}^i(x_{(1)}^i, t_1); \quad F_{(2)}^i = C_F F_{(1)}^i; \quad (1.3.37)$$

$$\rho_{(2)} = C_\rho \rho_{(1)}; \quad \mu_{(2)} = C_\mu \mu_{(1)},$$

где $C_v = C_l/C_t, C_F, C_\rho, C_\mu$ — постоянные.

Уравнение Навье—Стокса для второго течения

$$\frac{\partial v_{(2)}^i}{\partial t_2} + v_{(2)}^j \nabla_{j(2)} v_{(2)}^i = F_{(2)}^i - \frac{1}{\rho_{(2)}} g^{i\alpha} \nabla_{\alpha(2)} p_{(2)} + \mu_{(2)} \nabla_{(2)}^2 v_{(2)}^i$$

с учетом соотношений (1.3.37) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{C_v}{C_t} \frac{\partial v_{(1)}^i}{\partial t_1} + \frac{C_v^2}{C_l} v_{(1)}^j \nabla_{j(1)} v_{(1)}^i &= C_F F_{(1)}^i - \frac{1}{C_\rho C_l \rho_{(1)}} g^{i\alpha} \nabla_{\alpha(1)} p_{(2)} + \\ &+ \frac{C_\mu C_v}{C_l^2} \mu_{(1)} \nabla_{(1)}^2 v_{(1)}^i. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Если первое течение действительно имеет место, то должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{\partial v_{(1)}^i}{\partial t_1} + v_{(1)}^j \nabla_{j(1)} v_{(1)}^i = F_{(1)}^i - \frac{1}{\rho_{(1)}} g^{i\alpha} \nabla_{\alpha(1)} p_{(1)} + \mu_{(1)} \nabla_{(1)}^2 v_{(1)}^i.$$

Следовательно, если

$$\frac{C_v}{C_t} = \frac{C_v^2}{C_l} = C_F = \frac{C_\mu C_v}{C_l^2}; \quad p_{(2)} = \frac{C_v G_\rho C_l}{C_t} p_{(1)}, \quad (1.3.39)$$

то уравнение (1.3.38) и аналогичные ему будут справедливы и существует второе течение, подобное первому.

через C_v и C_l :

Равенства (1.3.39) позволяют выразить все постоянные C

$$C_t C_v / C_l = 1; \quad C_F C_l / C_v^2 = 1; \quad C_\mu / C_v C_l = 1; \quad p_{(2)} = C_\rho C_v^2 p_{(1)}.$$

Подставляя сюда значения C из (1.3.36) и (1.3.37), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{t_2 v_{(2)}^i}{l_2} &= \frac{t_1 v_{(1)}^i}{l_1}; & \frac{F_{(2)}^i l_2}{v_{(2)}^2} &= \frac{F_{(1)}^i l_1}{v_{(1)}^2}; \\ \frac{\mu_{(2)}}{v_{(2)}^i l_2} &= \frac{\mu_{(1)}}{v_{(1)}^i l_1}; & \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(2)} v_{(2)}^2} &= \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(1)} v_{(1)}^2}. \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Следовательно, достаточными условиями механического подобия будет выполнение соотношений (1.3.40) для любых двух соответствующих точек рассматриваемых течений. Первое соотношение (1.3.40) является условием кинематического подобия, последнее — определяет $\rho_{(2)}$ и всегда выполняется; остальные два выражают условия механического подобия:

$$\frac{v_{(2)}^2}{F_{(2)}^i l_2} = \frac{v_{(1)}^2}{F_{(1)}^i l_1}; \quad \frac{v_{(2)}^i l_2}{\mu_{(2)}} = \frac{v_{(1)}^i l_1}{\mu_{(1)}}. \quad (1.3.41)$$

Обозначим для данного движения характерный размер l , характерную скорость v и положим, что внешней массовой силой является сила тяжести $F = -mg$, тогда можно ввести *число Рейнольдса* $Re = vl/\mu$ и *число Фруда* $Fr = v^2/gl$. Таким образом, для вязкой несжимаемой жидкости, находящейся под действием силы тяжести, два течения, обладающие одинаковыми числами Рейнольдса и Фруда, будут подобными.

Следствием условий механического подобия (1.3.41) является *закон подобия Рейнольдса*: для вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил или при действии силы тяжести, но при отсутствии свободных поверхностей, два течения, обладающие одинаковыми числами Рейнольдса, являются подобными. При малых числах Рейнольдса течение жидкости ламинарное, при больших числах Рейнольдса оно становится турбулентным.

В случае сжимаемой жидкости фундаментальное значение имеет скорость c распространения звука, а потому кроме чисел Re и Fr вводится *число Маха* $M = v/c$. При одновременном действии сил тяжести и вязкости два течения сжимаемой жидкости около или внутри геометрически подобных тел с одинаковыми числами Re , Fr , M будут подобными.

Следует заметить, что всякое движение вязкой несжимаемой жидкости является вихревым, а при плоскопараллельном или осесимметричном обтеканиях неподвижного тела воздействие жидкости на тело зависит от распределения по его поверхности давления и вихря

$$R = \int_S (-p e_1 + 2\mu \omega_3 e_2) dS,$$

где e — базисные векторы системы координат x^i ($i=1, 2, 3$).

1.4. Упругость и термоупругость

Теория упругости изучает изменения геометрического и механического состояний упругого тела, а также напряжения, возникающие при деформации. Теория термоупругости изучает напряженно-деформированное состояние упругого тела, вызванное температурным полем при условии $|\Delta T/T_0| \ll 1$, где $\Delta T = T - T_0$ — температура, отсчитываемая от температуры тела в естественном состоянии; T_0 — абсолютная температура тела в естественном состоянии. Под упругим телом будем понимать такое идеализированное твердое тело, которое после снятия внешних воздействий возвращается в свое первоначальное состояние. При этом допускается существование только одного первоначального состояния, называемого естественным и характеризующего отсутствием напряжений и деформаций.

Основное внимание сосредоточим на линейной теории упругости и термоупругости, основанной на предположениях о малости деформаций тела и линейности физических соотношений. Наличие больших (конечных) деформаций, как показано в п. 1.1, может быть учтено по результатам линейной теории упругости и термоупругости. Изучаемое упругое тело отнесем к материальной криволинейной системе координат $x^i (i=1, 2, 3)$ с началом в точке 0, которую считаем ортогональной с метрическим тензором (g) .

Деформированное состояние упругого тела характеризуется тензором малых деформаций (e) с компонентами e_{ij} , определяемыми по формулам (1.1.4) и подчиненными уравнениям совместности деформаций (1.1.3). Напряженное состояние упругого тела характеризуется тензором напряжений (σ) с компонентами σ_{ij} , подчиненными уравнениям равновесия (1.1.6) или уравнениям движения (1.1.8), к которым следует присоединить уравнение неразрывности (1.1.7).

Для изотропного линейно-упругого тела приняты и подтверждены экспериментально следующие положения:

- а) деформации e_{ij} являются малыми, т. е. вектор перемещений u удовлетворяет условиям $|\nabla_i u_j| \leq \delta \leq 1$;
- б) рассеяние $W^* = 0$;
- в) свободная энергия зависит от деформаций e_{ij} и температуры ΔT :

$$F(e_{ij}, \Delta T) = A_0 - S_0 \Delta T + B_0 \Gamma_1(e) + 0,5(\lambda \Gamma_1^2(e) - 2\beta \Delta T \Gamma_1(e) - c_V \rho_0 \Delta T^2 / T_0 + 2\mu \Gamma_2(e)),$$

где A_0 и S_0 — постоянные.

В рамках указанных положений свободная энергия является потенциалом напряжений, поэтому

$$\sigma^{ij} = \partial(\rho F) / \partial e_{ij} = (B_0 + \lambda \Gamma_1(e) - \beta \Delta T) g^{ij} + 2\mu e^i.$$

Но $B_0=0$, так как предполагается, что $\Delta T=0$ и $\sigma^{ij}=0$ при $e_{ij}=0$. Этому соответствуют определяющие уравнения

$$\sigma = 3K(e - \alpha \Delta T); D_{ij}(\sigma) = 2GD_{ij}(e),$$

которые образуют физические соотношения

$$\sigma_{ij} = 2G[e_{ij} + (3K/2G - 1)eg_{ij} - 3K\alpha\Delta Tg_{ij}/2G]. \quad (1.4.1)$$

В ряде случаев целесообразно использовать обратные определяющие уравнения

$$e = \sigma/3K + \alpha\Delta T; D_{ij}(e) = D_{ij}(\sigma)/2G,$$

которым соответствуют физические соотношения

$$e_{ij} = (1/2G)[\sigma_{ij} + (2G/3K - 1)\sigma g_{ij} + 2G\alpha\Delta Tg_{ij}]. \quad (1.4.2)$$

В эти уравнения входят упругие постоянные

$$\beta = 3\alpha K; K = \lambda + 2\mu/3 = 2G(1+\nu)/3(1-2\nu); \mu = G,$$

где K — модуль объемного сжатия; λ — постоянная Лямэ; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Тепловое воздействие, приложенное к упругому телу, характеризуется распределением температуры в соответствии с уравнением теплопроводности (1.1.9) при $\rho = \rho_0$ и $T = T_0$. Для линейно-упругого тела $3\beta T_0 \partial e / \partial t$ — малая величина, поэтому ею можно пренебречь и уравнение теплопроводности записать в виде

$$\rho_0 c \partial \Delta T / \partial t = \Lambda \nabla^2 \Delta T + \nabla_i q^i. \quad (1.4.3)$$

Таким образом, исходная система уравнений и соотношений, составленная из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8) или равновесия (1.1.6), уравнений совместности деформаций (1.1.3), а также геометрических (1.1.4) и физических (1.4.1) соотношений, является полной, необходимой и достаточной для постановки задач линейной теории упругости и термоупругости.

Прежде чем перейти к непосредственной постановке задач статической теории упругости и термоупругости, рассмотрим общие теоремы этих теорий. Следствием принципа возможных перемещений при равновесии является утверждение, что полная потенциальная энергия упругого тела Ω , определяемая формулой (1.1.12), принимает экстремальное значение (1.1.13), причем экстремум будет минимумом. В соответствии с этим существует простое доказательство *теоремы о минимуме полной потенциальной энергии* упругого тела: из всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, только перемещения, соответствующие состоянию равновесия, дают минимум полной потенциальной энергии тела при его деформации. При отсутствии объемных сил и при заданных перемещениях на поверхности S имеем уравнение

$$\delta U = 0, \quad (1.4.4)$$

причем функционал U достигает минимума.

Справедлива и обратная теорема: если полная потенциальная энергия при деформации упругого тела достигает абсолютного минимума для некоторого поля перемещений u_i , удовлетворяющих граничным условиям $u_i(S) = u_{is}$ на части S_1 поверхности, то это поле должно удовлетворять уравнениям равновесия (1.1.5) на поверхности S и уравнениям равновесия (1.1.6) в объеме тела.

Следствием принципа возможных изменений напряженного состояния при равновесии является утверждение, что полная дополнительная работа упругого тела $\tilde{R}$, определяемая формулой (1.1.15), принимает экстремальное значение (1.1.16), причем экстремум будет минимумом. В соответствии с этим существует простое доказательство *теоремы о минимуме полной дополнительной работы* упругого тела: полная дополнительная работа при деформации тела достигает абсолютного минимума тогда, когда тензор напряжений (σ) удовлетворяет уравнениям равновесия (1.1.6), уравнениям совместности деформаций (1.1.3) и заданным граничным условиям, при этом вариации напряжений $\delta\sigma^{ij}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия $\nabla_j \delta\sigma^{ij} = 0$ и граничным условиям $\delta\sigma^{ij}(S) n_j = 0$ на части S_2 поверхности, а на части S_1 поверхности вариации $\delta\sigma^{ij}$ произвольны. Если поверхностные силы $p_{(n)}^i$ приложены на всей поверхности S тела, то имеет место уравнение

$$\delta R = 0, \quad (1.4.5)$$

а функционал R имеет минимум.

Справедлива и обратная теорема: если полная дополнительная работа $\tilde{R}$ достигает абсолютного минимума, то тензор напряжений (σ) должен удовлетворять заданным граничным условиям и уравнениям совместности деформаций, а также уравнениям равновесия.

Пусть на упругое тело действуют две системы причин и следствий. К причинам первой системы отнесем объемные F^i и поверхностные $p_{(n)}^i$ силы, приложенные на части S_2 поверхности, и перемещения u_{is} на части S_1 поверхности. Эти причины в качестве следствий вызывают перемещения u_i и связанные с ними деформации e_{ij} и напряжения σ^{ij} . Причины обозначим символом $I = \{F^i, p_{(n)}^i, u_{is}\}$, следствия — символом $C = \{u_i\}$. В этой системе должны выполняться уравнения равновесия (1.1.6) и граничные условия (1.2.1) на S_1 и (1.2.3) на S_2 .

Для второй системы причин и следствий $\tilde{I} = \{\tilde{F}^i, \tilde{p}_{(n)}^i, \tilde{u}_{is}\}$; $\tilde{C} = \{\tilde{u}_i\}$ также должны выполняться уравнения равновесия (1.1.6) и граничные условия (1.2.1) и (1.2.3), где переменными являются $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{F}^i$, $\tilde{p}_{(n)}^i$, $\tilde{u}_i$, $\tilde{u}_{is}$. Умножим уравнения равновесия и граничные условия для первой системы на $\tilde{u}_i$, а для второй —

на u_i , вычтем одно из другого и проинтегрируем по объему V области D тела:

$$\int_V (\nabla_j \sigma^{ij} \tilde{u}_i - \nabla_j \tilde{\sigma}^{ij} u_i) dV + \int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV = 0.$$

Учитывая соотношения

$$\nabla_j \sigma^{ij} \tilde{u}_i = \nabla_j (\sigma^{ij} \tilde{u}_i) - \sigma^{ij} \nabla_j \tilde{u}_i; \quad \nabla_j \tilde{\sigma}^{ij} u_i = \nabla_j (\tilde{\sigma}^{ij} u_i) - \tilde{\sigma}^{ij} \nabla_j u_i$$

и применяя теорему Остроградского—Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_{S_1} (\sigma^{ij} \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}^{ij} u_i) n_j dS = \\ = \int_V (\sigma^{ij} \nabla_j \tilde{u}_i - \tilde{\sigma}^{ij} \nabla_j u_i) dV. \end{aligned}$$

Воспользовавшись граничными условиями $p_{(n)}^i = \sigma^{ij}(S) n_j$; $\tilde{p}_{(n)}^i = \tilde{\sigma}^{ij}(S) n_j$, а также соотношениями $\sigma^{ij} \nabla_j \tilde{u}_i = \sigma^{ij} \tilde{e}_{ij}$; $\tilde{\sigma}^{ij} \nabla_j u_i = \tau$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_S (p_{(n)}^i \tilde{u}_i - \tilde{p}_{(n)}^i u_i) dS = \\ = \int_V (\sigma^{ij} \tilde{e}_{ij} - \tilde{\sigma}^{ij} e_{ij}) dV, \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

которое выражает теорему взаимности Бетти в том случае, если

$$\sigma^{ij} \tilde{e}_{ij} - \tilde{\sigma}^{ij} e_{ij} = 0. \quad (1.4.7)$$

Теорема взаимности Бетти утверждает, что работа, выполненная в упругом теле первой системой причин на следствиях второй системы, равна работе, выполненной второй системой причин на следствиях первой системы, т. е.

$$\int_V F^i \tilde{u}_i dV + \int_S p_{(n)}^i \tilde{u}_i dS = \int_V \tilde{F}^i u_i dV + \int_S \tilde{p}_{(n)}^i u_i dS. \quad (1.4.8)$$

Теореме взаимности соответствуют соотношения

$$\int_V F^i \tilde{u}_i dV + \int_S p_{(n)}^i \tilde{u}_i dS = \int_V e_{ij} \tilde{\sigma}^{ij} dV;$$

$$\int_V \tilde{F}^i u_i dV + \int_S \tilde{p}_{(n)}^i u_i dS = \int_V \tilde{e}_{ij} \sigma^{ij} dV.$$

откуда при выполнении (1.4.8), находим

$$\int_V e_{ij} \tilde{\sigma}^{ij} dV = \int_V \tilde{e}_{ij} \sigma^{ij} dV.$$

Условие (1.4.7) для линейной теории упругости выполняется, что легко показать подстановкой физических соотношений.

Общие теоремы термоупругости формулируются аналогично изложенному, полагая известным распределение температуры ΔT внутри тела. Согласно принципу возможных перемещений, справедливо уравнение

$$\int_V F^i \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS = \delta U - 3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV,$$

$$\text{где } U = 2G \int_V [e^{ij} + (3K/2G - 1) e g_{ij}] e_{ij} dV.$$

Полагая объемные F^i и поверхностные $p_{(n)}^i$ силы при возможных перемещениях δu_i неизменными, получим уравнение

$$\delta \Omega_T = 0, \quad (1.4.9)$$

где $\Omega_T = U - \int_V F^i u_i dV - \int_S p_{(n)}^i u_i dS - 3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} e_{ij} dV$ — потенциальная энергия упругого тела при нагреве.

Уравнение (1.4.9) указывает, что среди всех геометрически возможных положений равновесия в действительности реализуется то, для которого Ω_T достигает минимума.

Преобразовав слагаемое $3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV$:

$$\begin{aligned} \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV &= \int_V \Delta T g^{i\alpha} \nabla_i \delta u_\alpha dV = \int_V [\nabla_i (\Delta T g^{i\alpha} \delta u_\alpha) - \\ &- g^{i\alpha} \nabla_i \Delta T \delta u_\alpha] dV = \int_S \Delta T g^{i\alpha} n_i \delta u_\alpha dS - \int_V g^{i\alpha} \nabla_i \Delta T \delta u_\alpha dV, \end{aligned}$$

можно привести уравнение (1.4.9) к виду

$$\delta U = \int_V (F^i - 3K\alpha g^{i\beta} \nabla_\beta \Delta T) \delta u_i dV + \int_S (p_{(n)}^i + 3K\alpha \Delta T n^i) \delta u_i dS.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (1.1.11) указывает на справедливость аналогии внешних сил. Перемещения и деформации в нагретом теле будут такими же, как и в ненагретом, если на части S_1 поверхности задать перемещения $u_{i,}$, а на части S_2 поверхности принять

$$p_{(n)}^{*i} = p_{(n)}^i + 3K\alpha \Delta T n^i.$$

При этом объемные силы

$$F^{*i} = F^i - 3K\alpha g^{i\beta} \nabla_\beta \Delta T.$$

В общем случае тепловому воздействию соответствуют деформации e_{ij}^0 , именуемые *дисторсией* и представляющие собой непрерывные дифференцируемые функции координат, не удовлетворяющие уравнениям совместности деформаций. Частный случай дисторсии — температурные деформации $e_{ij}^T = \alpha \Delta T g_{ij}$. Так как дисторсия не удовлетворяет уравнениям совместности деформаций, то в теле возникают деформации e_{ij} и напряжения σ^{ij} , связанные между собой следующими физическими соотношениями:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}^0 + (1/2G)[\sigma_{ij} + (2G/3K - 1)\sigma g_{ij}]; \\ \sigma_{ij} &= 2G(e_{ij} - e_{ij}^0) + (K - 2G/3)(e_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta}^0)g^{\alpha\beta}g_{ij}. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

В соответствии с (1.4.10) правую часть уравнения (1.1.10) представим в виде

$$\int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V \delta \Phi dV - \int_V \sigma_0^{ij} \delta e_{ij} dV,$$

тогда

$$\int_V F^i \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS = \delta U - \int_V \sigma_0^{ij} \delta e_{ij} dV.$$

Напряжения σ_0^{ij} или σ_{ij}^0 , вызванные дисторсией, называются *собственными напряжениями*, причем

$$\sigma_0^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} \sigma_{\alpha\beta}^0; \quad \sigma_{\alpha\beta}^0 = 2G e_{\alpha\beta}^0 + (K - 2G/3) e_{kl}^0 g^{kl} g_{\alpha\beta}.$$

Полагая $\delta u_i = 0$ на части S_1 поверхности, запишем уравнение, выражающее принцип возможных перемещений:

$$\delta \Omega_D = 0, \quad (1.4.11)$$

где

$$\Omega_D = U - \int_V F^i u_i dV - \int_S p_{(n)}^i u_i dS - \int_V \sigma_0^{ij} e_{ij} dV$$

— полная потенциальная энергия упругого тела при дисторсии.

Уравнение (1.4.11) выражает обобщенную теорему о минимуме полной потенциальной энергии упругого тела при наличии дисторсии. Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\int_V (F^i - \nabla_j \sigma_0^{ij}) \delta u_i dV + \int_S (p_{(n)}^i + \sigma_0^{ij} n_j) \delta u_i dS = \delta U$$

и сравнить с уравнением упругого тела с теми же перемещениями и деформациями, но при отсутствии дисторсии. В результате устанавливаем, что учет дисторсии требует введения фиктивных объемных и поверхностных сил:

$$F_*^i = F^i - \nabla_j \sigma_0^{ij}; \quad p_{*(n)}^i = p_{(n)}^i + \sigma_0^{ij}(S) n_j. \quad (1.4.12)$$

Следовательно, задача о дисторсии сводится к задаче теории упругости для тела, находящегося под действием фиктивных объемных и поверхностных сил (1.4.12).

Запишем принцип возможных изменений напряженного состояния, определяемый уравнением (1.1.14):

$$\int_V e_{ij} \delta \sigma^{ij} dV = \int_{S_1} u_{is} \delta \sigma^{ij} n_j dS$$

и применим его к задачам термоупругости. В случае температурных деформаций, пользуясь физическими соотношениями

$$e_{ij} = \frac{\partial}{\partial \sigma^{ij}} (\bar{\Phi} + \alpha \Delta T g_{ij} \sigma^{ij}),$$

где $\bar{\Phi} = (1/2G)[\sigma_{ij} \sigma^{ij} + (2G/3K - 1) \sigma g_{ij} \sigma^{ij}]$, представим интеграл $\int_V e_{ij} \delta \sigma^{ij} dV$ в виде

$$\begin{aligned} \int_V e_{ij} \delta \sigma^{ij} dV &= \int_V (\partial \bar{\Phi} / \partial \sigma^{ij}) \delta \sigma^{ij} dV + \int_V \alpha \Delta T g_{ij} \delta \sigma^{ij} dV = \\ &= \delta R + \int_V \alpha \Delta T g_{ij} \delta \sigma^{ij} dV \end{aligned}$$

и подставим его в уравнение, характеризующее принцип возможных изменений напряженного состояния. Тогда

$$\delta R + \int_V \alpha \Delta T g_{ij} \delta \sigma^{ij} dV - \int_{S_1} U_{is} n_j \delta \sigma^{ij} dS = 0,$$

но учитывая, что $\delta u_i = 0$ на части S_1 поверхности, получаем уравнение $\delta \tilde{R}_T = 0$, где $\tilde{R}_T = R + \int_V \alpha \Delta T g_{ij} \sigma^{ij} dV - \int_{S_1} u_{is} n_j \sigma^{ij} dS$ — полная дополнительная работа при тепловом воздействии, т. е. среди всех статически допустимых состояний равновесия в действительности реализуется только то, для которого функционал достигает минимума, так как $\delta^2 \tilde{R}_T \geq 0$. Если на поверхности тела действуют только поверхностные силы, то $S_1 = 0$ и

$$\tilde{R}_T = R + \int_V \alpha \Delta T g_{ij} \sigma^{ij} dV.$$

Принцип возможных изменений напряженного состояния распространяется и на задачи о дисторсии тела. Если воспользоваться физическими соотношениями

$$e_{ij} = \frac{\partial}{\partial \sigma^{ij}} (\bar{\Phi} + e_{ij}^0 \sigma^{ij}),$$

то после необходимых преобразований приходим к уравнению

$$\delta \tilde{R}_D = 0. \quad (1.4.13)$$

где $\tilde{R}_D$ — полная дополнительная работа при наличии дисторсии, равная

$$\tilde{R}_D = R + \int_V e_{ij}^0 \sigma^{ij} dV - \int_{S_1} u_i n_j \sigma^{ij} dS.$$

Уравнение (1.4.13) соответствует теореме о минимуме полной дополнительной работы при наличии дисторсии тела.

Теорема взаимности Бетти (1.4.6) обобщается на задачи дисторсии и термоупругости:

$$\begin{aligned} & \int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_S (p_{(n)}^i \tilde{u}_i - \tilde{p}_{(n)}^i u_i) dS + \\ & + \int_V (\sigma_0^{ij} \tilde{e}_{ij} - \tilde{\sigma}_0^{ij} e_{ij}) dV = 0; \\ & \int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_S (p_{(n)}^i \tilde{u}_i - \tilde{p}_{(n)}^i u_i) dS + \\ & + \int_V (\tilde{\sigma}^{ij} e_{ij}^0 - \sigma^{ij} \tilde{e}_{ij}^0) dV = 0. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

При $e_{ij}^0 = e_{ij}^T = \alpha \Delta T g_{ij}$ уравнение (1.4.14) переходит в уравнение

$$\int_V F^i \tilde{u}_i dV + \int_S p_{(n)}^i \tilde{u}_i dS + \int_V \alpha (\tilde{\sigma}^{ij} \Delta T - \sigma^{ij} \Delta \tilde{T}) g_{ij} dV = \int_V \tilde{\sigma}^{ij} e_{ij}^0 dV,$$

которое выражает сущность теоремы взаимности термоупругости.

При постановке задач теории упругости и термоупругости в перемещениях за основные неизвестные принимают ρ , u_i , ΔT . Тогда исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнений равновесия (1.1.6), уравнения теплопроводности (1.4.3), геометрических (1.1.4) и физических (1.4.1) соотношений. Из уравнения неразрывности (1.1.7) следует $\rho = \rho_0$. Для построения системы разрешающих уравнений подставим геометрические соотношения (1.1.4) в физические (1.4.1) и выразим

компоненты тензора напряжений через компоненты вектора перемещений:

$$\sigma_{ij} = G[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1)\nabla_\alpha u^\alpha g_{ij} - (3m-1)\alpha \Delta T g_{ij}], \quad (1.4.15)$$

где $m = K/G + 1/3$ — упругая постоянная тела.

Подставив в уравнения равновесия

$$g^{\alpha j} \nabla_\alpha \sigma_{ij} + F_i = 0$$

физические соотношения (1.4.15), получим уравнения равновесия линейно-упругого тела в перемещениях:

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (\nabla_\alpha u^\alpha) - (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T + F_i/G = 0, \quad (1.4.16)$$

которые необходимо дополнить уравнением теплопроводности

$$\nabla^2 \Delta T = 0; \quad q^i = 0. \quad (1.4.17)$$

Таким образом, система разрешающих уравнений статической теории упругости и термоупругости в перемещениях для изотропного линейно-упругого тела представляет собой совокупность уравнений равновесия (1.4.16) и уравнения теплопроводности (1.4.17). Характерной особенностью этой системы является независимость уравнения теплопроводности от других разрешающих уравнений. Это позволяет рассматривать задачу статической термоупругости как задачу теории температурных напряжений при известном распределении температуры ΔT внутри тела, установленной в результате решения уравнения теплопроводности (1.4.17) с учетом соответствующих граничных условий. Задачу термоупругости легко привести к соответствующей задаче теории линейной упругости, если ввести фиктивные объемные и поверхностные силы

$$F_i^* = F_i - 3K\alpha \nabla_i \Delta T \text{ и } p_i^{*(n)} = p_i^{(n)} + 3K\alpha \Delta T n_i.$$

Тогда система разрешающих уравнений приводится к виду

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (\nabla_\alpha u^\alpha) + F_i^*/G = 0. \quad (1.4.18)$$

Статической задаче теории упругости и термоупругости соответствуют следующие граничные условия: (1.2.1) на S_1 и (1.1.5) на S_2 , а на всей поверхности S

$$\Delta T(S) = \Delta T_s \text{ или } \partial \Delta T / \partial n|_S = -q/\Lambda. \quad (1.4.19)$$

При постановке задач теории упругости и термоупругости в напряжениях за основные неизвестные принимают ρ , ΔT , (σ) . Тогда исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнений равновесия (1.1.6), уравнений совместности деформаций (1.1.3), уравнения теплопроводности (1.4.17) и физических соотношений (1.4.2). Как и в предыдущем случае, из уравнения неразрывности (1.1.7) имеем $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Уравнение

теплопроводности (1.4.17) является независимым от других уравнений и соотношений исходной системы, а потому его решение с учетом граничных условий типа (1.4.19) может быть построено отдельно, что позволяет в дальнейшем считать распределение температуры ΔT внутри и на поверхности тела заданным.

Системе разрешающих уравнений статических задач линейной теории упругости и термоупругости для изотропного тела в напряжениях

$$\begin{aligned}\nabla_j \sigma^{ij} + F^i &= 0; \\ \Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_i \nabla_k \sigma_{\alpha\gamma} - 3 \frac{m-1}{3m-1} \Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_{\beta\gamma}^k \nabla_i \nabla_k \sigma + \\ + 2G\alpha \Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_{\beta\gamma}^k \nabla_i \nabla_k \Delta T &= 0\end{aligned}\quad (1.4.20)$$

соответствуют граничные условия (1.1.5) на S_2 и (1.2.1) на S_1 . Граничным условиям в перемещениях на части S_1 поверхности можно поставить в соответствие граничные условия, записанные через компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{ij}(S) - \frac{m-1}{3m-1} \sigma_{\alpha\beta}(S) g^{\alpha\beta} g_{ij} = 2G(e_{ij}^{(S)} - \alpha \Delta T(S) g_{ij}),$$

где $e_{ij}^{(S)} = 0,5(\nabla_i u_{js} + \nabla_j u_{is})$.

Рассмотрим общие теоремы динамической теории упругости и термоупругости, а также постановку соответствующих задач. При движении упругой среды следствием принципа возможных перемещений является утверждение, что работа внешних сил и сил инерции на вариациях перемещений равна вариации потенциальной энергии деформации:

$$\int_V (F^i - \rho g^{ia} \partial^2 u_a / \partial t^2) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS = \delta U,$$

где $U = G \int_V [\Gamma_2(e) + (1/3)(3K/2G - 1) \Gamma_1^2(e)] dV$.

Отсюда следует также закон сохранения энергии при адиабатическом процессе деформации

$$\frac{d}{dt}(E_k + U) = \int_V F^i v_i dV + \int_S p_{(n)}^i v_i dS.$$

Принцип Гамильтона для упругого тела характеризуется уравнением

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0,$$

которое показывает, что истинному напряженно-деформированному состоянию соответствует экстремум действия по Гамильтону (здесь $L = (E_k - \Pi)$ — функция Лагранжа упругого тела).

Следствием принципа возможных изменений напряженного состояния при движении упругой среды является утверждение, что истинному напряженному состоянию соответствует равенство нулю суммы вариаций полной дополнительной работы и работы сил инерции:

$$\delta \tilde{R} + \int_V \rho \frac{d\delta v^i}{dt} u_i dV = 0,$$

где $\tilde{R}$ определена соотношением (1.1.15), а $R = (1/G) \times \times \int_V [\Gamma_2(\sigma) + (2G/3K - 1) \Gamma_1^2(\sigma)/3] dV$.

Теорема взаимности имеет место и при движении частиц упругой среды при деформации:

$$\int_V (F^i - \rho \ddot{u}^i) \tilde{u}_i dV + \int_S p_{(n)}^i \tilde{u}_i dS = \int_V \tilde{F}^i u_i dV + \int_S \tilde{p}_{(n)}^i u_i dS. \quad (1.4.21)$$

Для динамических задач теории температурных напряжений принцип возможных перемещений определяется уравнением

$$\begin{aligned} & \int_V (F^i - 3K\alpha g^{i\beta} \nabla_\beta \Delta T - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \\ & + \int_S (p_{(n)}^i + 3K\alpha \Delta T n^i) \delta u_i dS = \delta U. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Рассматривая то же упругое тело, находящееся под действием внешних фиктивных сил

$$F_*^i = F^i - 3K\alpha g^{i\beta} \nabla_\beta \Delta T, \quad r \in V;$$

$$p_{*(n)}^i = p_{(n)}^i + 3K\alpha \Delta T n^i, \quad r \in S_2;$$

$$u_{iS}^* = u_{iS}, \quad r \in S_1$$

при $\Delta T = 0$, приведем уравнение (1.4.22) к виду

$$\int_V (F_*^i - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \int_S p_{*(n)}^i \delta u_i dS = \delta U.$$

Пусть вариации $\delta u_i = v_i \delta t$ — действительные, тогда $\delta U = \dot{U} \delta t$ и уравнение

$$\begin{aligned} \int_V (F^i - \rho g^{i\alpha} \ddot{u}_\alpha) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS = \\ = \delta U - 3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

принимает вид

$$\frac{d}{dt} (U + E_\kappa) = \int_V F^i v_i dV + \int_S p_{(n)}^i v_i dS + 3K\alpha \int_V \Delta T \nabla_k v^k dV$$

и выражает основную энергетическую теорему теории температурных напряжений.

Интегрируя уравнение (1.4.23) по времени в промежутке $t_0 \dots t_1$ и принимая во внимание $\delta u_i(\mathbf{r}, t_0) = \delta u_i(\mathbf{r}, t_1) = 0$, приходим к уравнению

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - E_\kappa) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt + 3K\alpha \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV,$$

$$\text{где } \delta A = \int_V F^i \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS.$$

Обозначив

$$\dot{U} = \int_V [G\Gamma_2(e) + (K/6 - G/9) \Gamma_1^2(e)] dV - 3K\alpha \int_V \Delta T \Gamma_1(e) dV,$$

запишем последнее уравнение в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\dot{U} - E_\kappa) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt. \quad (1.4.24)$$

Интегральное уравнение (1.4.24) выражает обобщенный принцип Гамильтона теории температурных напряжений. Если внешние силы обладают потенциалом ϑ , то

$$\delta A = - \frac{\partial}{\partial u_i} \vartheta \delta u_i = - \delta \vartheta,$$

а уравнение (1.4.24) принимает вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\dot{U} + \vartheta - E_\kappa) dt = 0.$$

Пусть имеют место две системы причин и следствий, отнесенные к упругому телу. К первой системе причин относятся внешние силы F^i , $p_{(n)}^i$ и температура ΔT , следствием ее будут

перемещения u_i ; ко второй системе причин относятся внешние силы $\tilde{F}^i$, $\tilde{p}_{(n)}^i$ и температура $\Delta\tilde{T}$, ее следствием будут перемещения $\tilde{u}_i$. Применяя к физическим соотношениям (1.4.1) преобразование Лапласа и проводя известные в теории упругости и термоупругости выкладки, можно получить первую форму теоремы взаимности теории температурных напряжений:

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_V [\sigma^{ij}(\mathbf{r}, \tau) \tilde{e}_{ij}(\mathbf{r}, t-\tau) - \tilde{\sigma}^{ij}(\mathbf{r}, t-\tau) e_{ij}(\mathbf{r}, \tau)] dV = \\ & = -3K\alpha \int_0^t d\tau \int_V [\Delta T(\mathbf{r}, \tau) \tilde{e}_{ij}(\mathbf{r}, t-\tau) - \\ & - \Delta\tilde{T}(\mathbf{r}, t-\tau) e_{ij}(\mathbf{r}, \tau)] g^{ij} dV. \end{aligned}$$

Применение интегрального преобразования Лапласа к уравнениям движения с учетом однородных начальных условий и обратного преобразования Лапласа приводит ко второй форме теоремы взаимности теории температурных напряжений (уравнениям Граффи):

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_V [F^i(\mathbf{r}, \tau) \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t-\tau) - \tilde{F}^i(\mathbf{r}, t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dV + \\ & + \int_0^t d\tau \int_S [p_{(n)}^i(\mathbf{r}, \tau) \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t-\tau) - \tilde{p}_{(n)}^i(\mathbf{r}, t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dS + \\ & + 3K\alpha \int_0^t d\tau \int_V [\Delta T(\mathbf{r}, \tau) \tilde{e}_{ij}(\mathbf{r}, t-\tau) - \\ & - \Delta\tilde{T}(\mathbf{r}, t-\tau) e_{ij}(\mathbf{r}, \tau)] g^{ij} dV. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

Обобщение принципа возможных перемещений приводит к формулировке вариационной теоремы термоупругости при варьировании деформаций, предложенной Био. Теорема состоит из двух частей. Первая основывается на принципе Даламбера

$$\int_V \sigma^{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V (F^i - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS, \quad (1.4.26)$$

где вариации δu_i и δe_{ij} считаем непрерывными произвольными функциями, независимыми от времени и согласованными с условиями, ограничивающими движение частиц тела. Подстановка в уравнение (1.4.26) физических соотношений термоупругости

$$\sigma_{ij} = 2G\{e_{ij} + [(K/6G - 1/3)e_{kl}g^{kl} - 3K\alpha\Delta T/2G]g_{ij}\}$$

и введение функционала

$$U = 2G \int_V [\Gamma_2(e) + (K/6G - 1/3)\Gamma_1^2(e)] dV,$$

в котором подынтегральное выражение — положительно определенная квадратичная форма, приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_V (F^i - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS + \\ & + 3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Во второй части теоремы используется закон теплопроводности, представленный соотношениями между тепловым потоком q_i , температурой ΔT и энтропией s ,

$$\begin{aligned} q_i = & -\lambda_0 \nabla_i \Delta T; \\ q^{ia} \nabla_a q_i = & T \dot{s} = 3K\alpha T_0 g^{ki} e_{ki} + c_e \Delta \dot{T}, \end{aligned}$$

где c_e — теплоемкость при постоянной деформации. Для удобства здесь используется функция с компонентами $s = -g^{ia} \nabla_i H_a$, $q_i = T_0 \dot{H}_i$, тогда

$$\begin{aligned} T_0 \dot{H}_i = & -\lambda_0 \nabla_i \Delta T; \\ -T_0 g^{ia} \nabla_i H_a = & 3K\alpha T_0 g^{ki} \dot{e}_{ki} + c_e \Delta \dot{T}. \end{aligned}$$

Умножим первое соотношение на δH_i и проинтегрируем по объему тела:

$$\int_V (\nabla_i \Delta T + T_0 \dot{H}_i / \lambda_0) g^{ia} \delta H_a dV = 0.$$

Преобразовав интеграл с учетом второго соотношения, получим уравнение

$$\begin{aligned} \int_S \Delta T n^i \delta H_i dS + (c_e / T_0) \int_V \Delta T \delta \Delta T dV + \\ + (T_0 / \lambda_0) \int_V \dot{H}_i g^{ia} \delta H_a dV + 3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV = 0. \end{aligned}$$

Исключив интеграл $3K\alpha \int_V \Delta T g^{ij} \delta e_{ij} dV$ с помощью (1.4.27), приходим к окончательной форме уравнения вариационной теоремы:

$$\begin{aligned} \delta(U + P + D) = & \int_V (F^i - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS - \\ & - \int_S \Delta T n^i \delta H_i dS, \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

висим.
реш. входят температурный потенциал P и функция дисси-
пации D :

$$P = (c_e/2T_0) \int_V (\Delta T)^2 dV; \quad D = (T_0/2\lambda_0) \int_V g^{ij} \dot{H}_i \dot{H}_j dV.$$

При адиабатическом процессе деформирования $\Delta T = -\eta \kappa g^{ij} e_{ij}$, а уравнение (1.4.27) принимает вид

$$\delta U^{(a)} = \int_V (F^i - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta u_i dS$$

и выражает принцип Даламбера для динамической теории упру-
гости, где

$$U^{(a)} = \int_V 2G_{(a)} [\Gamma_2(e) + (3K_{(a)}/2G_{(a)} - 1) \Gamma_1^2(e)/3] dV;$$

$G_{(a)}$, $K_{(a)}$ — адиабатические упругие постоянные.

Полагая вариации δu_i , δH_i , ..., совпадающими с действи-
тельными приращениями $\delta u_i = v_i \delta t$, $\delta H_i = \dot{H}_i \delta t = -(\lambda_0/T_0) \nabla_i \Delta T \delta t$, ..., и подставив их в (1.4.28), получим уравнение, определя-
ющее основную энергетическую теорему термоупругости:

$$\frac{d}{dt} (E_k + U + P) + \chi_r = \int_V F^i v_i dV + \int_S p_{(n)}^i v_i dS + \frac{\lambda_0}{T_0} \int_S \Delta T \frac{\partial \Delta T}{\partial n} dS,$$

где

$$E_k = 0,5\rho \int_V v^i v_i dV; \quad \chi_r = \dot{D} = \lambda_0 T_0 \int_V \left(\frac{1}{T_0} \nabla_i \Delta T \right)^2 dV =$$

$$= \lambda_0 T_0 \int_V \left(\frac{1}{\lambda_0 T_0} \right)^2 q^i q_i dV.$$

Пусть к изотропному упругому телу приложены две систе-
мы причин

$$I = \{F^i, p_{(n)}^i, Q, \Delta T_S\}; \quad \tilde{I} = \{\tilde{F}^i, \tilde{p}_{(n)}^i, \tilde{Q}, \Delta \tilde{T}_S\},$$

которым соответствуют следствия

$$C = \{u_i, \Delta T\}; \quad \tilde{C} = \{\tilde{u}_i, \Delta \tilde{T}\}$$

при однородных начальных условиях. Применив к уравнениям
движения, уравнению теплопроводности и физическим соотно-
шениям преобразования Лапласа и проведя известные выклад-
ки, получим уравнение взаимности термоупругости

$$\eta \kappa \left\{ \int_V dV \int_0^t [F^i(\mathbf{r}, t - \tau) \partial \tilde{u}_i(\mathbf{r}, \tau) / \partial \tau - \right.$$

$$\left. - \tilde{F}^i(\mathbf{r}, t - \tau) \partial u_i(\mathbf{r}, \tau) / \partial \tau] d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_S dS \int_0^t [p_{(n)}^i(\mathbf{r}, t-\tau) \partial \tilde{u}_i(\mathbf{r}, \tau) / \partial \tau - \\
& - \tilde{p}_{(n)}^i(\mathbf{r}, t-\tau) \partial u_i(\mathbf{r}, \tau) / \partial \tau] d\tau \Big\} = \\
& = 3K\alpha \left\{ \int_V dV \int_0^t [Q(\mathbf{r}, t-\tau) \Delta \tilde{T}(\mathbf{r}, \tau) - \right. \\
& - \tilde{Q}(\mathbf{r}, t-\tau) \Delta T(\mathbf{r}, \tau)] d\tau + \\
& + \kappa \int_S dS \int_0^t [\Delta \tilde{T}_s(\mathbf{r}, t-\tau) \partial \Delta T(\mathbf{r}, \tau) / \partial n - \\
& - \Delta T_s(\mathbf{r}, t-\tau) \partial \Delta \tilde{T}(\mathbf{r}, \tau) / \partial n] d\tau \Big\}. \quad (1.4.29)
\end{aligned}$$

При постановке динамических задач теории упругости и термоупругости в перемещениях исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнения движения (1.1.8), уравнения теплопроводности (1.4.3), геометрических (1.1.4) и физических (1.4.1) соотношений. Процедура построения системы разрешающих уравнений сводится к подстановке геометрических соотношений (1.1.4) в физические (1.4.1), в результате чего компоненты тензора напряжений (σ) выражаются через компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$ в форме (1.4.15). В уравнения движения (1.1.8), представленные в виде

$$g^{\alpha i} \nabla_{\alpha} \sigma_{ij} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.4.30)$$

подставим соотношения (1.4.15) и получим уравнения движения изотропного линейно-упругого тела в перемещениях:

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (\nabla_{\alpha} u^{\alpha}) - (3m-1) \alpha \nabla_i \Delta T + F_i / G = \ddot{u}_i / a_s^2, \quad (1.4.31)$$

где $a_s = (G/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения волны сдвига в упругом теле.

Уравнения (1.4.31) необходимо дополнить уравнением неразрывности

$$\dot{\rho} + \nabla_i (\rho \dot{u}^i) = 0 \quad (1.4.32)$$

и уравнением теплопроводности

$$\rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T. \quad (1.4.33)$$

Система разрешающих уравнений (1.4.31) ... (1.4.33) состоит из пяти уравнений, содержащих пять неизвестных ρ , ΔT , u_i . Характерной особенностью полученной системы является неза-

ность уравнения теплопроводности (1.4.33) от других разрешающих уравнений, что позволяет рассматривать задачу о движении изотропного линейно-упругого тела как чисто динамическую при известном распределении температуры в теле. Система разрешающих уравнений чисто динамической задачи, составленная из уравнений (1.4.31) и уравнения (1.4.32), содержит четыре неизвестные величины ρ , u_i . Начальные условия для системы разрешающих уравнений при $t=t_0$ следующие: $u_i = u_i^0$; $v_i = v_i^0$; $\rho = \rho_0$; $\Delta T = 0$. Граничные условия могут быть заданы различно: в виде (1.2.1) на S_1 ; в виде (1.1.5) на S_2 и в виде $\rho = \rho_S$ и (1.4.19) на поверхности S .

Если упругое тело несжимаемо, то

$$\sigma_{ij} = \sigma g_{ij} + 2G(e_{ij} - \alpha \Delta T g_{ij}),$$

а уравнения движения принимает вид

$$\nabla^2 u_i + \Delta_i(\sigma/G - 2\alpha \Delta T) + F_i/G = \ddot{u}_i/a_s^2.$$

Если их дополнить условием несжимаемости

$$\nabla_\rho u^k - 3\alpha \Delta T = 0$$

и уравнением теплопроводности (1.4.33), то в результате имеем систему из пяти разрешающих уравнений относительно пяти неизвестных σ , ΔT , u_i .

Динамическая задача термоупругости сводится к соответствующей динамической задаче теории упругости, если ввести фиктивные объемные и поверхностные силы:

$$\begin{aligned} F_i^* &= F_i - G(3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T; \\ p_i^{*(n)} &= p_i^{(n)} + G(3m-1)\alpha \Delta T s n_i. \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Система разрешающих уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + m \nabla_i (\nabla_k u^k) + F_i^*/G &= \ddot{u}_i/a_s^2; \\ \dot{\rho} + \nabla_i (\rho \dot{u}^i) &= 0; \quad \Delta \nabla^2 \Delta T - \beta T_0 \nabla_k \dot{u}^k = \rho_0 c \Delta \dot{T} \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

и интегрируется с учетом приведенных выше начальных и граничных условий, причем динамические граничные условия должны быть представлены в форме

$$[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1) \nabla_k u^k g_{ij}]_S n^j = p_i^{*(n)}/G. \quad (1.4.36)$$

При постановке динамических задач теории упругости и термоупругости в напряжениях исходная система уравнений и соотношений должна включать: уравнение неразрывности (1.1.7), уравнения движения (1.1.8), уравнения совместности деформаций (1.1.3), уравнение теплопроводности (1.4.3) и физические соотношения (1.4.2). Исключая с помощью физических соотно-

шений компоненты e_{ij} тензора деформаций, запишем уравнения совместности деформаций в виде

$$\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta}^{k\alpha}\nabla_i\nabla_k\sigma_{\alpha\gamma}-\frac{m-1}{3m-1}\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}^k\nabla_i\nabla_k3\sigma+2G\alpha\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}^k\nabla_i\nabla_k\Delta T=0,$$

а уравнение теплопроводности в форме

$$\rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\alpha T_0 [\dot{\sigma} + G(3m-1)\alpha \Delta \dot{T}].$$

В итоге получим систему разрешающих уравнений динамической теории термоупругости

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \nabla_i(\rho v^i) &= 0; \quad \rho \dot{v}^i = \nabla_j \sigma^{ij} + F^i; \\ \rho_0 c \Delta \dot{T} &= \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\alpha T_0 [\dot{\sigma} + G(3m-1)\alpha \Delta \dot{T}]; \\ \Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta}^{k\alpha}\nabla_i\nabla_k\sigma_{\alpha\gamma}-\frac{m-1}{3m-1}\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}^k\nabla_i\nabla_k3\sigma+ \\ +2G\alpha\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}^k\nabla_i\nabla_k\Delta T &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

При $\Delta T=0$ имеем систему разрешающих уравнений динамической теории упругости.

Для несжимаемого линейно-упругого тела физические соотношения имеют вид

$$e_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij})/2G + \alpha \Delta T g_{ij},$$

а уравнения совместности деформаций (1.1.3) записываются в форме

$$\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta}^{k\alpha}\nabla_i\nabla_k(\sigma_{\alpha\gamma} - \sigma g_{\alpha\gamma}) + 2G\alpha\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}^k\nabla_i\nabla_k\Delta T = 0.$$

Система разрешающих уравнений динамической теории термоупругости содержит уравнения

$$\begin{aligned} \nabla_i(\rho v^i) &= 0; \quad \rho \dot{v}^i = \nabla_j \sigma^{ij} + F^i; \quad \rho_0 c \Delta \dot{T} + 3\alpha T_0 \dot{\sigma} = \Lambda \nabla^2 \Delta T; \\ \Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta}^{k\alpha}\nabla_i\nabla_k(\sigma_{\alpha\gamma} - \sigma g_{\alpha\gamma}) + 2G\alpha\Lambda_{\delta}^{i\gamma}\Lambda_{\beta\gamma}^k\nabla_i\nabla_k\Delta T &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

При $\Delta T=0$ имеем систему разрешающих уравнений динамической теории упругости.

Разрешающим уравнениям соответствуют при $t=t_0$ следующие начальные условия: $\rho=\rho_0$, $v^i=v_0^i$, $\sigma^{ij}=\sigma_0^{ij}$, $\Delta T=\Delta T_0$, а также граничные условия (1.2.1) на поверхности S_1 и (1.2.3) на S_2 . Граничным условиям в перемещениях на части S_1 поверхности соответствуют соотношения

$$\sigma_{ij}(S) - \frac{m-1}{3m-1} \sigma_{\alpha\beta}(S) g^{\alpha\beta} g_{ij} = 2G(e_{ij}^{(S)} - \alpha \Delta T(S) g_{ij}).$$

Итак, поставлены задачи теории упругости и термоупругости, записанные как в перемещениях, так и в напряжениях.

При наличии конечных деформаций в упругом теле, полагая

в первом приближении справедливыми физические соотношения

$$\sigma_{ij} = 2G[\varepsilon_{ij} - (3K/2G - 1)\varepsilon g_{ij} - (3K/2G)\alpha\Delta T g_{ij}] \quad (1.4.39)$$

и геометрические соотношения

$$\varepsilon_{ij} = 0,5(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k), \quad (1.4.40)$$

построение системы разрешающих уравнений динамической термоупругости в перемещениях проводим в следующем порядке. Подставляя геометрические соотношения (1.4.40) в физические (1.4.39), получаем

$$\sigma_{ij} = G[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1)\nabla_\alpha u^\alpha g_{ij} - (3m-1)\alpha\Delta T g_{ij}] + \\ + G[\nabla_i u_k \nabla_j u_k + 0,5(m-1)\nabla_\beta u^k g^{\beta\gamma} \nabla_\gamma u_k g_{ij}].$$

Подстановка найденных физических соотношений в уравнения движения, представленные в виде

$$\rho dv_i/dt = g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij} + F_i,$$

приводит к уравнениям движения в перемещениях

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (\nabla_\alpha u^\alpha) - (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T + [g^{ja} \nabla_a (\Delta_i u^k \nabla_j u_k) + \\ + 0,5(m-1)\nabla_i (\nabla_\beta u^k g^{\beta\gamma} \nabla_\gamma u_k)] + F_i/G = (1/a_s^2) dv_i/dt, \quad (1.4.41)$$

которые следует дополнить уравнением неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \nabla_i (\rho v_i) = 0 \quad (1.4.42)$$

и уравнением теплопроводности

$$\rho_0 c \partial \Delta T / \partial t = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\beta T_0 \partial \varepsilon / \partial t, \quad (1.4.43)$$

где $\varepsilon = (1/3)(\nabla_i u^i + 0,5 \nabla_i u^k g_{ij} \nabla_j u_k)$.

В результате приходим к нелинейной системе разрешающих уравнений (1.4.41) ... (1.4.43), включающей основные неизвестные ρ , ΔT , u_i .

Этой системе соответствуют следующие начальные условия при $t=t_0$: $u_i = u_i^0$; $v_i = v_i^0$; $\rho = \rho_0$; $\Delta T = \Delta T_0$, и граничные условия (1.2.3) на S_1 , (1.1.5) на S_2 , а также $\rho = \rho_s$ и (1.4.19) на всей поверхности S тела.

При $\Delta T = 0$ система разрешающих уравнений соответствует динамической теории упругости при наличии конечных деформаций, а при $v_i = 0$ — статической теории упругости и термоупругости.

Приведенные системы разрешающих уравнений теории упругости и термоупругости предполагают, что упругое тело изотропное.

1.5. Пластичность и ползучесть

Теория пластичности изучает изменения геометрического и механического состояния упругопластического тела при его деформации, т. е. характеристики напряженно-деформированного

состояния упругопластического тела. Свойство пластичности проявляется при достаточно высокой интенсивности внешних воздействий, когда деформируемое тело при снятии внешних воздействий не возвращается в свое естественное состояние (имеются остаточные деформации), т. е. изменяются форма и объем тела.

В общем случае деформированное состояние упругопластического тела описывается тензором деформаций (ϵ) и тензором скоростей деформаций ($\dot{\epsilon}$), а его напряженное состояние — тензором напряжений (σ). Компоненты тензоров определены зависимостями, подробно рассмотренными в п. 1.1. Связь между характеристиками напряженного и деформированного состояний упругопластического тела устанавливается физическими соотношениями, вид которых определяется характером процесса деформации.

Процесс деформации будет активным (именуется нагрузкой), если выполняется условие $e_i(t_2) > e_i(t_1)$ при $t_2 > t_1$. Процесс деформации будет пассивным (именуется разгрузкой), если выполняется условие $e_i(t_2) \leq e_i(t_1)$ при $t_2 > t_1$, т. е. с течением времени интенсивность деформаций e_i не увеличивается.

При нагрузке определяющие уравнения моделей упругопластического тела устанавливаются с помощью *постулата изотропии Ильюшина*, согласно которому зависимость $\sigma(e)$ можно представить в виде

$$d\sigma = N de - (N - P) \frac{\sigma \cdot de}{\sigma_M^2} \cdot \sigma,$$

где $N(l_e, q_e)$; $|de| = dl_e = \sqrt{dD^{ij}(e) dD_{ij}(e)}$; $P(l_e, q_e)$; $q_e = e \cdot de / (\partial dl_e) = D_{ij}(e) dD^{ij}(e) / (\partial dl_e)$; $\partial = \sqrt{D_{ij}(e) D^{ij}(e)}$

или в виде

$$de = \frac{1}{N} d\sigma + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{\sigma \cdot d\sigma}{\sigma_M^2} \cdot \sigma, \quad (1.5.1)$$

где $N(l_\sigma, q_\sigma)$; $P(l_\sigma, q_\sigma)$; $|d\sigma| = dl_\sigma = \sqrt{dD^{ij}(\sigma) dD_{ij}(\sigma)}$; $q_\sigma = \sigma \cdot d\sigma / (\sigma dl_\sigma) = D_{ij}(\sigma) dD^{ij}(\sigma) / (\sigma_M dl_\sigma)$.

Отсюда, в частности, следуют определяющие уравнения деформационной теории

$$\sigma = 3K(e - \alpha \Delta T); \quad D_{ij}(\sigma) = (2\sigma_i / 3e_i) D_{ij}(e) \quad (1.5.2)$$

и обратные определяющие уравнения

$$e = \sigma / 3K + \alpha \Delta T; \quad D_{ij}(e) = (3e_i / 2\sigma_i) D_{ij}(\sigma), \quad (1.5.3)$$

куда входят величины $2\sigma_i / 3e_i = 2G(1 - \omega)$; $3e_i / 2\sigma_i = (1 + \varphi) / 2G$.

Функция пластичности Ильюшина $\omega(e_i)$ и функция пластич-

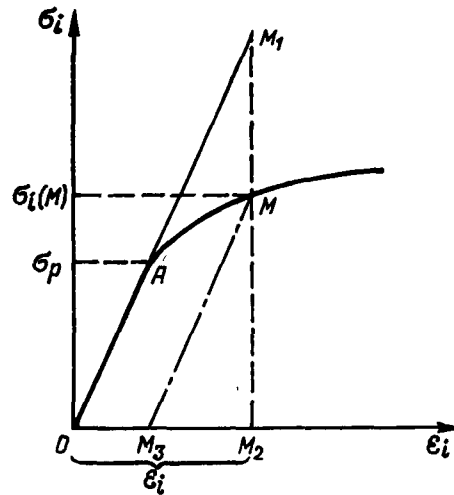


Рис. 1.1. Диаграмма нагрузки

ности Хенки $\varphi(\sigma_i)$ связаны между собой зависимостью $\varphi = \omega/(1-\omega)$, причем $0 \leq \omega < 1$; $d\omega/d\varepsilon_i > 0$. Функция пластичности $\omega(\varepsilon_i)$ определяется по диаграмме $\sigma_i(\varepsilon_i)$ (рис. 1.1) согласно формуле

$$\omega(\varepsilon_i) = M_1 M / M_1 M_2 = (3G\varepsilon_i - \sigma_i) / 3G\varepsilon_i.$$

Определяющие уравнения (1.5.2), (1.5.3) деформационной теории справедливы при простом нагружении, когда направляющий тензор деформаций остается неизменным с течением времени (траектория нагружения — прямая линия). В этом случае имеет место *теорема Ильюшина о простом нагружении*: для того чтобы направляющие тензоры деформаций были неподвижны во всех точках тела произвольной формы при действии произвольных внешних сил, возрастающих по мере их приложения пропорционально общему параметру λ , достаточно, чтобы зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$ в рассматриваемом диапазоне деформаций ($\varepsilon_i' \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_i''$) могла быть представлена в виде $\sigma_i = A\varepsilon_i^x$, где A и x — произвольные постоянные, а зависимость $\sigma(e)$ была заменена условием несжимаемости $e=0$. Иначе говоря, справедливо утверждение: деформационная теория дает правильные (согласованные с опытом) результаты тогда, когда процесс нагружения тела является простым (внешние силы, действующие на тело, возрастают пропорционально общему параметру). При сложном нагружении определяющие уравнения (1.5.2) или (1.5.3) справедливы в том случае, если траекторией нагружения будет гладкая непрерывная кривая малой кривизны. Опре-

деляющим уравнениям (1.5.2), (1.5.3) соответствуют физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = 2G[e_{ij} + 1,5(m-1)eg_{ij} - 1,5(m-1/3)\alpha\Delta Tg_{ij}] - \\ - 2G\omega(e_{ij} - eg_{ij}), \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

$$\begin{aligned} e_{ij} = (1/2G)[\sigma_{ij}(m-1)3\sigma g_{ij}/(3m-1) + 2G\alpha\Delta Tg_{ij}] + \\ + \varphi(\sigma_{ij} - \sigma g_{ij})/2G. \end{aligned}$$

В основу теории пластического течения положен *постулат пластичности Ильюшина*, который утверждает, что на произвольном замкнутом по деформациям изотермическом процессе работа напряжений неотрицательна:

$$A = \int \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} \geq 0.$$

Работу напряжений A можно представить в виде

$$\int \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} = 3 \oint_{\epsilon} \sigma d\epsilon + \oint_{\epsilon} \sigma \cdot d\epsilon,$$

однако $\oint_{\epsilon} \sigma d\epsilon = 0$, поэтому

$$\int \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} = \oint_{\epsilon} \sigma \cdot d\epsilon.$$

Для замкнутого по параметрам состояния μ процесса из термодинамического соотношения

$$\sigma^{ij} d\epsilon_{ij} = \rho_0 dF + W^* dt$$

имеем

$$A_{\mu} = \oint_{\mu} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} = \oint_{\mu} W^* dt \geq 0.$$

Так как $W^* \geq 0$, то $\oint_{\mu} dF(\mu) = 0$, однако отсюда не следует справедливость утверждения постулата пластичности, поскольку компоненты ϵ_{ij} при пластическом деформировании не являются параметрами μ . Процесс замкнутый по ϵ_{ij} не замкнут по μ , а потому $A_{\mu} \neq A$. Полагая $\mu = \mathbf{e}^{(e)}$ и $W^* dt = \sigma \cdot d\mathbf{e}^{(p)}$ при $T = \text{const}$, имеем $\sigma = 2G\mathbf{e}^{(p)}$, $\sigma \cdot d\mathbf{e}^{(p)} \geq 0$.

Определяющие уравнения теории пластического течения следуют из соотношения (1.5.1) при $N = 2G$, когда P зависит от напряжения σ и пластической деформации или работы напряжений на пластических деформациях $\mathcal{E}^{(p)} = \sqrt{D_{ij}(\mathbf{e}^{(p)})D_{ij}(\mathbf{e}^{(p)})}$. Тогда

$$\epsilon = \sigma/3K + \alpha\Delta T; \quad D_{ij}(\dot{\epsilon}) = D_{ij}(\dot{\sigma})/2G + \dot{\lambda}D_{ij}(\sigma). \quad (1.5.5)$$

Для идеально пластической среды при выполнении условия пластичности Мизеса $\sigma_i = \sigma_r$ имеем

$$\dot{\lambda} = (3/2\sigma_r^2)A_p = (3/2\sigma_r^2)D^{ij}(\sigma)\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)},$$

а для среды с изотропным упрочнением ($A_p = \Phi(\tau_i) = \Phi(\sigma_i)$)

$$\dot{\lambda} = (4/3\tau_i^2) \Phi'(\tau_i) \dot{\tau}_i = (2\sqrt{2}/\sigma_i^2) \Phi'(\sigma_i) \dot{\sigma}_i.$$

Определяющим уравнениям (1.5.5) соответствуют физические соотношения

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} + \dot{\lambda} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2G} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\dot{\sigma} g_{ij} + 2G\alpha\Delta\dot{T} g_{ij} \right] + \dot{\lambda} (\rho_{ij} - \sigma g_{ij}). \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Тепловое воздействие, приложенное к упругопластическому телу, характеризуется распределением температуры, подчиняющимся уравнению (1.1.9), а при малых деформациях — уравнению (1.4.3). Таким образом, имеем систему уравнений и соотношений, необходимую для постановки задач теории пластичности и термопластичности.

Определяющие уравнения разгрузки для упругопластического тела устанавливаются в соответствии со следующими соображениями. Поскольку интенсивности упругих и пластических деформаций обладают свойством аддитивности, можно считать истинную диаграмму $\sigma_i(\varepsilon_i)$ эквивалентной диаграмме растяжения образца не только при нагрузке, но и при разгрузке. Если принять, что с некоторого значения $\sigma_i(M)$ в точке M диаграммы $\sigma_i(\varepsilon_i)$ (рис. 1.2) интенсивность напряжений σ_i начинает убывать $\sigma_i(\tilde{M}) < \sigma_i(M)$, то разгрузке отвечает прямая MM' , параллельная начальному линейному участку OA диаграммы, т. е. справедливо соотношение $\Delta\sigma_i = 2G\Delta\varepsilon_i$.

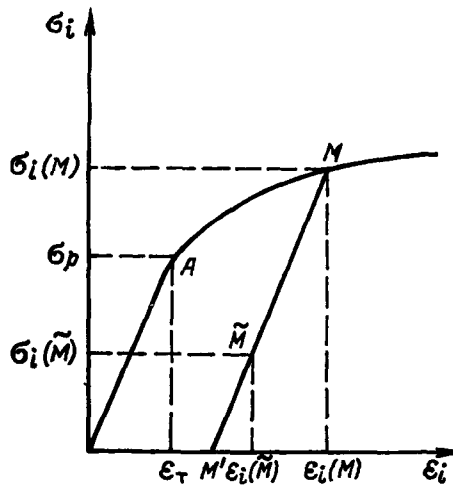


Рис. 1.2. Диаграмма нагрузки и разгрузки

Определяющие уравнения разгрузки имеют вид

$$\Delta\sigma = 3K(\Delta e - \alpha\Delta\tilde{T}); \quad \Delta D_{ij}(\sigma) = 2G\Delta D_{ij}(e) \quad (1.5.7)$$

или

$$\Delta e = \Delta\sigma/3K + \alpha\Delta\tilde{T}; \quad \Delta D_{ij}(e) = \Delta D_{ij}(\sigma)/2G,$$

где $\Delta\sigma = \sigma(M) - \sigma(\tilde{M})$; $\Delta e = e(M) - e(\tilde{M})$; $\Delta\tilde{T} = \Delta T(M) - \Delta T(\tilde{M})$. Из рис. 1.2 также следует, что $\Delta\sigma_i = \sigma_i(M) - \sigma_i(\tilde{M})$; $\Delta e_i = e_i(M) - e_i(\tilde{M})$.

Определяющим уравнениям (1.5.7) соответствуют физические соотношения

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G[\Delta e_{ij} + 1,5(m-1)\Delta e g_{ij} - 1,5(m-1/3)\alpha\Delta\tilde{T}g_{ij}], \quad (1.5.8)$$

$$\Delta e_{ij} = (1/2G)[\Delta\sigma_{ij} - (m-1)3\Delta\sigma g_{ij}/(3m-1) + 2G\alpha\Delta\tilde{T}g_{ij}].$$

Компоненты характеристик напряженно-деформированного состояния тела, отмеченные знаком Δ , должны удовлетворять геометрическим соотношениям (1.1.4), уравнениям совместности деформаций (1.1.3), уравнениям равновесия на поверхности (1.1.5) и в объеме (1.1.6) или уравнениям движения (1.1.8), уравнению неразрывности (1.1.7), в которых необходимо заменить e на Δe , u на Δu , ρ на $\Delta\rho$, σ на $\Delta\sigma$, F на ΔF , v на Δv , а также уравнению теплопроводности $\Delta\rho C\Delta\tilde{T} = \Delta\nabla^2\tilde{T}$ и физическим соотношениям (1.5.8).

Приведенная система исходных уравнений и соотношений, записанная относительно неизвестных со знаком Δ , является полной и соответствует задачам теории упругости и термоупругости, рассмотренным в п. 1.4. В результате приходим к важному утверждению: вектор перемещений частиц среды тела в некоторый момент процесса разгрузки $u(\tilde{M})$ отличается от вектора перемещений в момент начала процесса разгрузки $u(M)$ на вектор упругих перемещений Δu , который возник бы в теле, если бы в естественном состоянии к нему были приложены внешние объемные ΔF и поверхностные $\Delta p_{(n)}$ силы, а также температура $\Delta\tilde{T}$, соответствующие указанным моментам.

Следствием этого утверждения является *теорема об остаточных напряжениях, деформациях и перемещениях* при полной разгрузке: если для тела решена задача теории пластичности, а заданным внешним силам F и $p_{(n)}$ соответствует истинное состояние A и если для тела решена задача теории упругости, а тем же внешним силам соответствует фиктивное упругое состояние $A^{(e)}$, то в результате полной разгрузки тела вектор перемещений, тензор деформаций и тензор напряжений остаются равными разности соответствующих характеристик в истинном и

фиктивном состоянии, причем остаточный тензор напряжений в результате разгрузки вторично не выходит за пределы упругости. Таким образом, имеем систему исходных уравнений и соотношений, необходимую для постановки задач теории пластичности и термопластичности при разгрузке тела.

Для описанного упругопластического тела справедлив *постулат устойчивости Друккера*, который утверждает:

а) если σ^{ij} — напряженное состояние на поверхности пластичности, которому соответствуют скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$, то для всех безопасных $\sigma_{(e)}^{ij}$ и допустимых $\sigma_{(a)}^{ij}$ напряженных состояний имеют место соотношения $(\sigma^{ij} - \sigma_{(e)}^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} > 0$, $(\sigma^{ij} - \sigma_{(a)}^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \geq 0$;

б) если $\dot{\sigma}_{ij}$ — скорости изменения напряжений, которым соответствуют скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$, то $\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \geq 0$;

в) поверхность пластичности выпукла и характеризуется уравнением $f(\sigma^{ij}) = 0$.

Если принять $\sigma^{ij} = \sigma_{(a)}^{ij}$, то из постулата Друккера следует критерий устойчивости деформирования за пределом упругости в общем случае напряженного состояния $d\sigma^{ij} d\epsilon_{ij}^{(p)} > 0$. Если $\sigma^{ij} \neq \sigma_{(a)}^{ij}$, то величина $\sigma^{ij} - \sigma_{(a)}^{ij}$ может быть сколь угодно больше $d\sigma^{ij}$ и тогда из постулата Друккера следует соотношение $(\sigma^{ij} - \sigma_{(a)}^{ij}) d\epsilon_{ij}^{(p)} > 0$. Отсюда получаем неравенство $\sigma^{ij} d\epsilon_{ij}^{(p)} > \sigma_{(a)}^{ij} d\epsilon_{ij}^{(p)}$, которое выражает математическую формулировку *принципа максимума работы пластической деформации*: при любом заданном значении компонент приращения пластической деформации приращение работы пластической деформации $\sigma^{ij} d\epsilon_{ij}^{(p)}$ имеет максимум для действительного напряженного состояния по сравнению со всеми возможными напряженными состояниями, удовлетворяющими условию $f(\sigma^{ij}) < 0$.

Поверхность S_Q ограничивает область Q упругих состояний тела в пространстве напряжений (рис. 1.3), а ее точки соответствуют пределам упругости или пластичности. Эта поверхность имеет следующие свойства: а) она замкнута, но в некоторых направлениях может простирается до бесконечности; б) не проходит через начало координат, и любой луч, выходящий из начала координат, пересекает ее не более одного раза.

Тело, для которого поверхность S_Q фиксирована, называется идеально пластическим. Для идеально пластического тела характерна диаграмма $\sigma_i(\epsilon_i)$ (рис. 1.4) и справедливо равенство $\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}^{ij} = 0$ для всех скоростей изменения напряжений и скоростей пластической деформации.

Если поверхность текучести регулярна в окрестности точки,

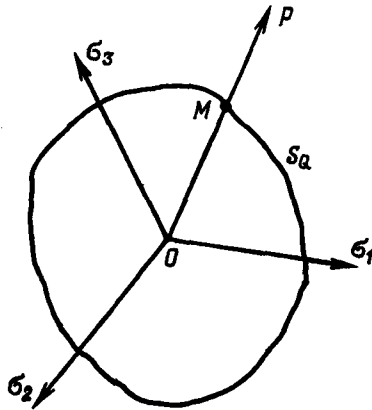


Рис. 1.3. Поверхность текучести

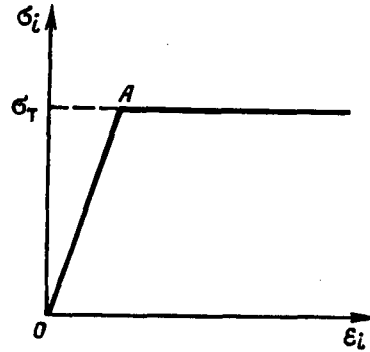


Рис. 1.4. Диаграмма нагрузки для идеально пластического тела

то она может быть описана уравнением $f(\sigma^{ij})=0$, а скорости пластической деформации подчинены соотношениям $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \lambda \partial f / \partial \sigma^{ij}$, где

$$\lambda = 0, \text{ если } f < 0 \text{ и } \dot{f} = (\partial f / \partial \sigma^{ij}) \dot{\sigma}^{ij} < 0;$$

$$\lambda \geq 0, \text{ если } f = 0 \text{ и } \dot{f} = 0.$$

Здесь функция f играет роль потенциала скоростей пластической деформации и называется *пластическим потенциалом*.

Упрочняющееся упругопластическое тело характеризуется тем, что для получения отличных от нуля приращений пластических деформаций необходимо увеличение напряжений выше предела текучести. Поверхность пластичности S_Q такого тела, именуемая поверхностью нагружения, может изменяться при изменении напряженного состояния. Точки поверхности, принадлежащие вектору σ действительного напряженного состояния, называются точками нагружения. Для регулярной поверхности нагружения направление вектора скоростей пластической деформации должно совпадать с направлением внешней нормали к поверхности S_Q . Пропорциональное возрастание скоростей изменения напряжений влечет за собой пропорциональное возрастание скоростей пластической деформации, а потому

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = 0, \text{ если } f < 0 \text{ и } \dot{f} = (\partial f / \partial \sigma^{ij}) \dot{\sigma}^{ij} \leq 0;$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = h (\partial f / \partial \sigma^{ij}), \text{ если } f = 0 \text{ и } \dot{f} \geq 0,$$

где $h > 0$ — функция упрочнения.

В общем случае состояние упрочняющегося упругопластического тела характеризуется совокупностью параметров σ_{ij} , ΔT ,

$\varepsilon_{ij}^{(p)}$, χ_i , k_i , где χ_i — параметры упрочнения, связанные с остаточными деформациями неголономными связями; k_i — константы среды.

Пусть процесс деформирования — изотермический ($T = \text{const}$), тогда поверхность нагружения определяется уравнением $f(\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}^{(p)}, \chi_i, k_i) = 0$. Процессы нагрузки и разгрузки определяются следующим образом. Если напряженное состояние принадлежит поверхности S_Q и приращения напряжений $\Delta\sigma$ приводят вектор σ внутрь области Q , то процесс является разгрузкой (рис. 1.5, а). При этом $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$; $d\chi_i = 0$; $d'f = (\partial f / \partial \sigma^{ij}) d\sigma^{ij}$. Если приращения напряжений $\Delta\sigma$ таковы, что конец вектора σ в любой момент времени остается на фиксированной поверхности S_Q и пластические деформации не изменяются, то нагружение является нейтральным (рис. 1.5, б) и $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$; $d\chi_i = 0$; $d'f = (\partial f / \partial \sigma^{ij}) d\sigma^{ij} = 0$. Если же приращения напряжений $\Delta\sigma$ сопровождаются приращением пластических деформаций, то процесс называется нагрузкой (рис. 1.5, в). Процесс нагрузки связан с изменением поверхности S_Q : $d\varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0$; $d\chi_i \neq 0$; $d'f = (\partial f / \partial \sigma^{ij}) d\sigma^{ij} > 0$, причем

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{(p)}} d\varepsilon_{ij}^{(p)} + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} d\chi_i = 0;$$

$$d\chi_k = A_{(k)}^{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)} = B_{(k)} d'f.$$

Введенные понятия разгрузки, нейтрального нагружения, нагрузки согласуются с ранее данным определением разгрузки и нагрузки, устанавливают ограничения на свойства упрочняющегося упругопластического тела, находятся в полном соответствии с физическими соотношениями (1.5.4) и (1.5.6) при нагрузке и (1.5.8) при разгрузке.

Работа компонент тензора напряжений (σ), совершаемая при переходе элемента тела единичного объема из естествен-

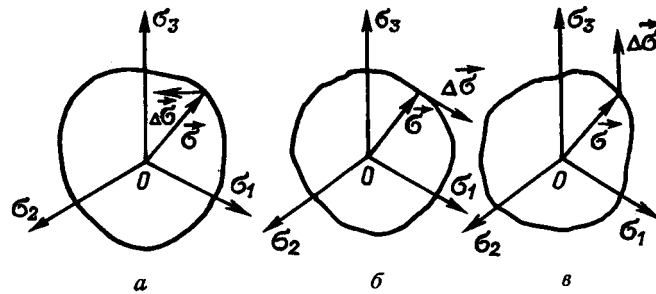


Рис. 1.5. Процессы разгрузки (а), нейтрального нагружения (б) и нагрузки (в) в пространстве напряжений

ного состояния O в деформированное состояние M , определяется интегралом

$$\Phi = \int_0^M \sigma^{ij} de_{ij} = \int_0^{e_{ij}} \sigma^{ij} de_{ij}$$

и называется удельной энергией деформации. Подынтегральное выражение есть полный дифференциал, т. е. Φ зависит только от начального и конечного состояний, а потому

$$\Phi = 9Ke^2/2 + 2 \int_0^{e_i} \sigma_i de_i;$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial e_i} de_i + \frac{\partial \Phi}{\partial e} de = \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}} de_{ij}.$$

Следовательно, работа внутренних сил Φ будет потенциалом напряжений

$$\sigma_i = (1/2) \partial \Phi / \partial e_i; \quad \sigma = (1/3) \partial \Phi / \partial e; \quad \sigma^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}}.$$

Удельной потенциальной энергией деформации называется та часть работы внутренних сил, которая будет возвращена элементом среды при полной разгрузке, она равна работе компонент тензора напряжений (σ) на компонентах тензора упругих деформаций ($e^{(e)}$):

$$\Phi^{(e)} = 0,5 \sigma^{ij} e_{ij}^{(e)} = 1,5 \sigma e^{(e)} + \sigma_i e_i^{(e)},$$

но $\sigma_i = 3Ge_i^{(e)}$, а $\sigma = 3Ke^{(e)}$, поэтому

$$\Phi^{(e)} = \frac{1}{3G} \left(\sigma_i^2 + \frac{3G}{2K} \sigma^2 \right);$$

$$\Phi^{(p)} = \Phi - \Phi^{(e)} = \frac{1}{3G} \left[(\Delta \sigma_i)^2 + \frac{2G}{2K} (\Delta \sigma)^2 \right],$$

где $\Phi^{(p)}$ — необратимая часть работы внутренних сил.

При неполной разгрузке остаточная удельная потенциальная энергия деформации

$$\Phi_0 = \frac{1}{3G} \left[(\Delta \sigma_i)^2 + \frac{3G}{2K} (\Delta \sigma)^2 \right].$$

Энергия деформации тела, потенциальная энергия деформации и остаточная потенциальная энергия деформации определены соотношениями

$$U = \int_V \Phi dV = \int_V \int_0^M \sigma^{ij} de_{ij} dV = \int_V \left(4,5Ke^2 + 2 \int_0^{e_i} \sigma_i de_i \right) dV;$$

$$U^{(e)} = \int_V \Phi^{(e)} dV = (1/3G) \int_V (\sigma_i^2 + 3G\sigma^2/2K) dV;$$

$$U_0 = \int_V \Phi_0 dV = (1/3G) \int_V [(\Delta\sigma_i)^2 + 3G(\Delta\sigma)^2/2K] dV.$$

Принцип возможных перемещений для упругопластического тела характеризуется вариационным уравнением

$$\delta U = \int_V F^i \delta u_i dV + \int_{S_2} p_{(n)}^i \delta u_i dS, \quad (1.5.9)$$

где $U = \int_V \Phi dV$; $\Phi = 2G \{ (1-\omega) \Gamma_2(e) + [0,5(m-1) + \omega/3] \Gamma_1^2(e) - 1,5(m-1/3) \alpha \Delta T \Gamma_1(e) \}$.

Уравнение (1.5.9) можно привести к виду (1.1.13), который указывает, что функционал Ω принимает экстремальное значение, причем экстремум будет минимумом, так как $\delta^2 \Omega > 0$ — положительно определенная форма. Это соответствует теореме о минимуме полной потенциальной энергии тела при деформации. При отсутствии объемных сил и при заданных перемещениях на всей поверхности S уравнение (1.1.13) переходит в уравнение (1.4.4).

Величину

$$\bar{\Phi} = e_{ij} \sigma^{ij} = \int_0^M e_{ij} d\sigma^{ij} = \int_0^{\sigma_i} e_i d\sigma_i = \sigma_i e_i - \int_0^{\sigma_i} \sigma_i de_i$$

назовем удельной дополнительной работой деформации, которая представляет собой потенциал деформаций $e_{ij} = \partial \bar{\Phi} / \partial \sigma^{ij}$; $e_i = \partial \bar{\Phi} / \partial \sigma_i$. Принцип возможных изменений напряженного состояния для упругопластического тела характеризуется вариационным уравнением

$$\delta R = \int_S u_{iS} n_j \delta \sigma^{ij} dS,$$

где $R = \int_V \bar{\Phi} dV = \int_V e_{ij} \sigma^{ij} dV$ — дополнительная работа деформации тела, причем

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2G} \left\{ (1+\varphi) \Gamma_2(\sigma) - \left[\frac{3(m-1)}{3m-1} + \varphi \right] \frac{1}{3} \Gamma_1^2(\sigma) + 2G\alpha\Delta T \Gamma_1(\sigma) \right\}.$$

Вариационные уравнения можно записать в виде (1.1.16), который указывает, что функционал $\tilde{R}$ принимает экстремальное значение, причем экстремум будет минимумом и $\delta^2 \Phi > 0$, что соответствует теореме о минимуме полной дополнительной

работы тела при его деформации. Если поверхностные силы $p_{(n)}^i$ приложены на всей поверхности S тела, то уравнение (1.1.16) принимает вид (1.4.5).

В теории пластического течения имеются дополнительные вариационные теоремы, для формулировки которых необходимы дополнительные определения. Распределение скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{(a)}^{ij}$ в упрочняющемся упругопластическом теле назовем статически возможным, если оно удовлетворяет уравнениям равновесия $\nabla_j \dot{\sigma}^{ij} + \dot{F}^i = 0$ и граничным условиям (1.2.3) на части S_2 поверхности. В идеально пластическом теле статически возможное распределение скоростей напряжений должно удовлетворять дополнительному условию

$$\dot{f} = (\partial f / \partial \sigma^{ij}) \dot{\sigma}^{ij} \leq 0,$$

так как тело не может воспринимать напряжения, превосходящие предел текучести σ_T . По заданным $\dot{\sigma}_{(a)}^{ij}$ при данных σ^{ij} , $e_{ij}^{(p)}$ и χ_i с помощью формул

$$\dot{e}_{ij} = A_{ij\alpha\beta} \dot{\sigma}^{\alpha\beta} + e_{ij}^{(p)}; \quad \dot{e}_{ij}^{(p)} = h^{-1} (\partial f / \partial \sigma^{ij}) \dot{f}; \quad (1.5.10)$$

если $f=0$; $\dot{f} = (\partial f / \partial \sigma^{\alpha\beta}) \dot{\sigma}^{\alpha\beta} > 0$ и

$$\dot{e}_{ij} = A_{ij\alpha\beta} \dot{\sigma}^{\alpha\beta}, \quad \dot{e}_{ij}^{(p)} = 0,$$

если $f < 0$ или $f=0$; $\dot{f} \leq 0$, можно определить компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}^{(a)}$; при этом функция упрочнения

$$h = - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial e_{\alpha\beta}^{(p)}} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} \right] / \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} d\chi_i \right).$$

Для произвольного статически возможного поля напряжений $\dot{\sigma}_{(a)}^{ij}$ скорости деформаций $\dot{e}_{ij}^{(a)}$ несовместны.

Поле скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}^{(k)}$ назовем кинематически возможным, если оно может быть определено соотношениями (1.1.2) для поля скоростей $v_i^{(k)}$, удовлетворяющих граничным условиям (1.2.2) на части S_1 поверхности. По компонентам $\dot{e}_{ij}^{(k)}$ при данных σ^{ij} , $e_{ij}^{(p)}$ и χ_i из обращения формул (1.5.10) определяют соответствующие компоненты $\dot{\sigma}_{(k)}^{ij}$. Для произвольного кинематически возможного поля скоростей деформаций изменения напряжений $\dot{\sigma}_{(k)}^{ij}$ не удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям на части S_2 поверхности тела.

Перейдем теперь к формулировке вариационных принципов

пластического течения, основанных на использовании принципа возможных перемещений, характеризуемого соотношением

$$\int_V \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \dot{F}^i v_i dV + \int_S \dot{\sigma}^{ij} n_j v_i dS,$$

справедливым для действительных $\dot{\sigma}^{ij}$, $\dot{\epsilon}_{ij}$ и v_i . Этим принципам можно поставить в соответствие функционал

$$W = 0,5 \int_V \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_1} \dot{\sigma}^{ij} n_j v_i dS.$$

Принцип минимума для скоростей изменения напряжений утверждает: абсолютный минимум функционала

$$W_{(a)} = 0,5 \int_V \dot{\sigma}_{(a)}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(a)} dV - \int_{S_1} \dot{\sigma}_{(a)}^{ij} n_j v_i dS,$$

определяемого для всех статически возможных распределений скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{(a)}^{ij}$, отвечает действительному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}^{ij}$, т. е. $W_{(a)} \geq W$.

Принцип максимума для скоростей деформаций утверждает: абсолютный максимум функционала

$$W_{(k)} = -0,5 \int_V \dot{\sigma}_{(k)}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(k)} dV + \int_V \dot{F}^i v_i^{(k)} dV + \int_{S_2} \dot{p}_{(n)}^i v_i^{(k)} dS,$$

определенного для всех кинематически возможных распределений скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)}$, отвечает действительному распределению скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ и соответствующих ему скоростей v_i , т. е. $W \geq W_{(k)}$.

В теории пластичности общих экстремальных принципов для напряжений и деформаций нет, так как напряженно-деформированное состояние упругопластического тела зависит от истории нагружения, но, если в теле задано распределение пластических деформаций, то для распределения напряжений и деформаций формулируются экстремальные принципы.

Будем считать пластические деформации $e_{ij}^{(p)}$ заданными. Распределение напряжений $\sigma_{(a)}^{ij}$ назовем статически возможным, если оно удовлетворяет уравнениям равновесия (1.1.6) и граничным условиям (1.2.3) на части S_2 поверхности. Поле деформаций $e_{ij}^{(k)}$ назовем кинематически возможным, если оно определено соотношениями (1.1.4) для поля перемещений $u_i^{(k)}$, удовлетворяющих граничным условиям (1.2.1) на части S_1 поверхности. Очевидно, поле упругих деформаций $e_{ij}^{(e)(k)} = e_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(p)}$ кинематически возможно, ему соответствуют напряжения $\sigma_{(k)}^{ij} = A^{ij\alpha\beta} (e_{\alpha\beta}^{(k)} - e_{\alpha\beta}^{(p)})$, где $A^{ij\alpha\beta} = A_{ij\alpha\beta}^{-1}$ — компонен-

ты тензора упругих констант среды. Для идеально пластического тела нельзя произвольно задать пластические деформации, так как они должны быть такими, чтобы напряжения σ^{ij} нигде не превосходили предел текучести.

Запишем принцип возможных перемещений в виде

$$\begin{aligned} 0,5 \int_V A_{ij\alpha\beta} \sigma^{ij} \sigma^{\alpha\beta} dV + \int_V \sigma^{ij} e_{ij}^{(p)} dV - \int_{S_1} \sigma^{ij} n_j u_{iS} dS = \\ = 0,5 \int_V \sigma^{ij} e_{ij}^{(p)} dV + 0,5 \int_V F^i u_i dV + 0,5 \int_{S_2} p_{(n)}^i u_i dS - \\ - 0,5 \int_{S_1} \sigma^{ij} n_j u_{iS} dS = -0,5 \int_V \sigma^{ij} (e_{ij} - e_{ij}^{(p)}) dV + \\ + \int_V F^i u_i dV + \int_{S_2} p_{(n)}^i u_i dS, \end{aligned}$$

где левая часть равенства есть функционал Ω .

Принцип минимума для напряжений утверждает, что абсолютный минимум функционала

$$\Omega_{(a)} = 0,5 \int_V A_{ij\alpha\beta} \sigma_{(a)}^{ij} \sigma_{(a)}^{\alpha\beta} dV + \int_V \sigma_{(a)}^{ij} e_{ij}^{(p)} dV - \int_{S_1} \sigma_{(a)}^{ij} n_j u_{iS} dS,$$

определенного для заданных пластических деформаций $e_{ij}^{(p)}$ и всех статически возможных распределений напряжений $\sigma_{ij}^{(a)}$, отвечает действительному распределению напряжений σ^{ij} , т. е. $\Omega_{(a)} \geq \Omega$.

Принцип максимума для деформаций утверждает, что абсолютный максимум функционала

$$\begin{aligned} \Omega_{(k)} = -0,5 \int_V A^{ij\alpha\beta} (e_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(p)}) (e_{\alpha\beta}^{(k)} - e_{\alpha\beta}^{(p)}) dV + \\ + \int_V F^i u_i^{(k)} dV + \int_{S_2} p_{(n)}^i u_i^{(k)} dS, \end{aligned}$$

определенного для заданных пластических деформаций $e_{ij}^{(p)}$ и всех кинематически возможных распределений деформаций $e_{ij}^{(k)}$, отвечает действительному распределению деформаций e_{ij} и соответствующих ему перемещений u_i , т. е. $\Omega \geq \Omega_{(k)}$.

Упрочняющемуся упругопластическому телу при граничных условиях (1.2.1) на S_1 и (1.2.3) на S_2 поставим в соответствие геометрически равное упругое тело при тех же граничных условиях, которое назовем фиктивным. Его тензор напряжений ($\sigma^{(e)}$) имеет компоненты $\sigma_{ij}^{(e)}$; соответствующие ему упругие деформации $e_{ij}^{(e)} = A_{ij\alpha\beta} \sigma_{(e)}^{\alpha\beta}$ совместны, а их перемещения $u_i^{(e)}$ связаны с компонентами $e_{ij}^{(e)}$ тензора деформаций форму-

лами (1.1.4). Для упрочняющегося упругопластического тела напряжения и деформации можно представить в виде суммы $\sigma^{ij} = \sigma_{(e)}^{ij} + \sigma_0^{ij}$ и $e_{ij} = e_{ij}^{(e)} + e_{ij}^0$, причем σ_0^{ij} — остаточные напряжения, которые самоуравновешены и удовлетворяют на части S_2 поверхности граничным условиям $\sigma_0^{ij}(S) = 0$. Остаточные деформации e_{ij}^0 совместны, им соответствуют остаточные перемещения u_i^0 , удовлетворяющие на части S_1 поверхности граничным условиям $u_i^0(S) = 0$. Разность $e_{ij}^0 - e_{ij}^{(p)}$ определяет упругие остаточные деформации, которым соответствуют остаточные напряжения

$$\sigma_0^{ij} = A^{ij\alpha\beta} (e_{\alpha\beta}^0 - e_{\alpha\beta}^{(p)}).$$

Действительным остаточным напряжениям соответствует функционал

$$P = 0,5 \int_V A_{ij\alpha\beta} \sigma_0^{ij} \sigma_0^{\alpha\beta} dV + \int_V \sigma_0^{ij} e_{ij}^{(p)} dV.$$

Для остаточных напряжений справедлив принцип минимума: абсолютный минимум функционала

$$P_{(a)} = 0,5 \int_V A_{ij\alpha\beta} \sigma_{0(a)}^{ij} \sigma_{0(a)}^{\alpha\beta} dV + \int_V \sigma_{0(a)}^{ij} e_{ij}^{(p)} dV,$$

определенного для всех заданных пластических деформаций $e_{ij}^{(p)}$ и для всех распределений статически возможных остаточных напряжений $\sigma_{0(a)}^{ij}$, отвечает действительному распределению остаточных напряжений σ_0^{ij} , т. е. $P_{(a)} \geq P$.

Для остаточных деформаций имеет место принцип максимума: абсолютный максимум функционала

$$P_{(k)} = 0,5 \int_V A^{ij\alpha\beta} (e_{ij}^{0(k)} - e_{ij}^{(p)}) (e_{\alpha\beta}^{0(k)} - e_{\alpha\beta}^{(p)}) dV + \int_V F^i u_i^0 dV,$$

определенного для всех заданных пластических деформаций $e_{ij}^{(p)}$ и для всех распределений кинематически возможных остаточных деформаций $e_{ij}^{0(k)}$, отвечает действительному распределению остаточных деформаций e_{ij}^0 , т. е. $P \geq P_{(k)}$.

Постановка статических задач теории пластичности может быть реализована как в перемещениях, так и в напряжениях. При формулировке задач пластичности в перемещениях (основные неизвестные ρ , u_i , ΔT) исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнений равновесия (1.1.6), геометрических соотношений (1.1.1) или (1.1.4), физических соотношений деформационной теории (1.5.4) для σ_i , уравнения теплопроводности (1.4.17), а также граничных условий (1.2.3), (1.2.1) и (1.4.19), заданных в напряжениях на части S_2 по-

верхности, в перемещениях на части S_1 поверхности и на всей поверхности S соответственно.

Следует заметить, что уравнение теплопроводности совместно с граничными условиями решается независимо от других уравнений и соотношений исходной системы, а потому считаем в дальнейшем распределение температуры ΔT в теле заданным.

Для построения разрешающих уравнений подставим геометрические соотношения в физические, выразив компоненты σ_{ij} тензора напряжений через компоненты вектора перемещений:

$$\sigma_{ij} = G[(1-\omega)(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1-2\omega/3)\nabla_\alpha u^\alpha g_{ij} - (3m-1)\alpha \Delta T g_{ij}].$$

Найденные соотношения подставим в уравнения равновесия и запишем их в перемещениях

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha - (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T + F_i/G = R_i(\omega), \quad (1.5.11)$$

где $R_i(\omega) = \omega[\nabla^2 u_i + (5/3)\nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha] + (2/3)\nabla_\alpha u^\alpha \nabla_i \omega + (\nabla_i u^\alpha + g^{j\alpha} \nabla_j u_i) \nabla_\alpha \omega$, а соответствующие граничные условия выражаются соотношением (1.2.1) на части S_1 поверхности и равенством

$$G[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1)\nabla_\alpha u^\alpha g_{ij}] n^j = \tilde{p}_i^{(n)} \quad (1.5.12)$$

на части S_2 поверхности, где $\tilde{p}_i^{(n)} = p_i^{(n)} + q_{ij}(S) n^j + (3m-1)\alpha \times \times \alpha (\Delta T g_{ij})_S n^j$; $q_{ij}(S) = G\omega[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (2/3)\nabla_\alpha u^\alpha g_{ij}]_S$.

При наличии конечных деформаций уравнения (1.5.11) и граничные условия (1.2.1) и (1.5.12) сохраняют свой вид, однако объемные и поверхностные силы будут другими:

$$R_i(\omega) = \omega(\nabla^2 u_i + (5/3)\nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha + (2/3)\nabla_\alpha u^\alpha \nabla_i \omega + (\nabla_i u^\alpha + g^{j\alpha} \nabla_j u_i) \nabla_\alpha \omega + \nabla_j [(1-\omega)\nabla_i u^k g^{j\delta} \nabla_\delta u_k + 0,5(m-1+2\omega/3)\nabla_\alpha u^k g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u_k g_i^j];$$

$$\tilde{p}_i^{(n)} = p_i^{(n)} + q_{ij}(S) n^j + (3m-1)\alpha (\Delta T g_{ij})_S n^j + \eta_{ij}(S) n^j,$$

где $\eta_{ij}(S) = G[(1-\omega)\nabla_i u^k \nabla_j u_k + 0,5(m-1+2\omega/3)\nabla_\alpha u^k g^{\alpha\beta} \times \times \nabla_\beta u_k g_{ij}]_S$.

Для поставленной задачи при произвольных внешних силах существует единственное решение, так как уравнения (1.5.11) относятся к эллиптическому типу с положительно определенными операторами.

При формулировке задач пластичности в напряжениях (основные неизвестные ρ , ΔT , σ^{ij}) исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнений равновесия (1.1.6), уравнений совместности деформаций или скоростей деформаций

ций (1.1.3), физических соотношений деформационной теории (1.5.4) для e_{ij} или теории пластического течения (1.5.6), уравнения теплопроводности (1.4.17), а также граничных условий (1.2.1), (1.2.3) и (1.4.19). Как и в предыдущем случае, уравнение теплопроводности решается независимо, а потому считаем распределение температуры в теле заданным.

Для построения системы разрешающих уравнений в напряжениях подставим физические соотношения деформационной теории в уравнения совместности деформаций. В результате получим

$$\Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_i \nabla_k \left[(1 + \varphi) \sigma_{ij} - \left(\frac{3(m-1)}{3m-1} + \varphi \right) \sigma g_{ij} \right] + 2G\alpha \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_i \nabla_k (\Delta T g_{ij}) = 0. \quad (1.5.13)$$

Система разрешающих уравнений в напряжениях формируется из уравнений равновесия (1.1.6) и уравнений совместности деформаций (1.5.13) с граничными условиями (1.2.1) и (1.2.3).

Система разрешающих уравнений в напряжениях может быть построена на основе физических соотношений теории пластического течения и уравнений совместности скоростей деформаций. Подставляя физические соотношения в уравнения совместности, находим

$$\Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_i \nabla_k \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\dot{\sigma} g_{ij} + 2G\dot{\lambda} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \right] + 2G\alpha \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_i \nabla_k (\Delta T g_{ij}) = 0. \quad (1.5.14)$$

Система разрешающих уравнений формируется из уравнений равновесия (1.1.6) и уравнений совместности скоростей деформаций (1.5.14), которым соответствуют те же граничные условия.

Разгрузка является упругим процессом. Это означает, что изменения характеристик напряженно-деформированного состояния тела при разгрузке, к которым относятся величины $\Delta(\sigma)$, $\Delta(e)$, Δu и другие, связаны между собой уравнениями и соотношениями теории упругости. Компоненты характеристик $\Delta(\sigma)$, $\Delta(e)$, Δu , ... подчинены уравнениям равновесия (1.1.6), геометрическим соотношениям (1.1.4), уравнениям совместности деформаций (1.1.3), физическим соотношениям (1.5.8), уравнению теплопроводности $\nabla^2 \Delta \bar{T} = 0$, а также граничным условиям (1.2.1) на части поверхности S_1 , (1.2.3) на части поверхности S_2 и (1.4.19) на всей поверхности S , причем во всех уравнениях, кроме (1.5.8), необходимо заменить e на Δe , u на Δu , σ на $\Delta \sigma$, F на ΔF , p на Δp и ΔT на $\Delta \bar{T}$.

Как и при нагрузке, распределение температуры ΔT в теле полагаем известным. Систему разрешающих уравнений сформи-

руем в перемещениях или в напряжениях. Если за основные неизвестные принять Δu_i , то получим уравнения равновесия в перемещениях

$$\nabla^2 \Delta u_i + m \nabla_i \nabla_a \Delta u^a - (3m-1) \alpha \nabla_i \Delta \tilde{T} + \Delta F_i / G = 0,$$

которым соответствуют граничные условия $\Delta u_i(S) = \Delta u_{iS}$ на S_1 и $[(\nabla_i \Delta u_j + \nabla_j \Delta u_i) + (m-1) \nabla_a \Delta u^a g_{ij}]_S n^j = \Delta \tilde{p}_i^{(n)} / G$ на S_2 , где $\Delta \tilde{p}_i^{(n)} = \Delta p_i^{(n)} + (3m-1) \alpha (\Delta \tilde{T} g_{ij})_S n^j$.

Если за основные неизвестные принять $\Delta \sigma^{ij}$, то имеем систему разрешающих уравнений, составленную из уравнений равновесия (1.1.6) и уравнений совместности деформаций

$$\Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{kl} \nabla_i \nabla_k [\Delta \sigma_{lj} - \frac{m-1}{3m-1} 3 \Delta \sigma g_{lj}] + \\ + 2G \alpha \Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{kl} \nabla_i \nabla_k (\Delta \tilde{T} g_{lj}) = 0, \quad (1.5.15)$$

которым соответствуют граничные условия (1.2.1), (1.2.3) и (1.4.19).

Полными характеристиками напряженно-деформированного состояния тела при разгрузке будут вектор перемещений, тензоры деформаций и напряжений с компонентами $u_i^{(r)} = u_i - \Delta u_i$; $e_{ij}^{(r)} = e_{ij} - \Delta e_{ij}$; $\sigma_{ij}^{(r)} = \sigma_{ij} - \Delta \sigma_{ij}$, т. е. разгрузка является вторичным процессом, следующим за нагрузкой, и ее решению предшествует решение задачи о нагрузке.

В динамической теории пластичности справедливы законы сохранения и общие принципы механики сплошной среды, рассмотренные в п. 1.1. Принципу возможных перемещений соответствует соотношение

$$\delta U = \int_V (F^i - \rho dv^i/dt) \delta u_i dV + \int_{S_2} p_{(n)}^i \delta u_i dS, \quad (1.5.16)$$

следствием которого является закон сохранения энергии, где δU — вариация энергии деформации тела. Рассматривая уравнение (1.5.16) в промежутке времени $t_1 \dots t_2$, приходим к математической записи принципа Гамильтона, которая позволяет ввести в рассмотрение функцию Лагранжа $L = E_k - \Omega$, где Ω — полная энергия тела. Действие по Гамильтону есть

$$\Gamma = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

следовательно, для принципа Гамильтона справедливо вариационное уравнение

$$\delta \Gamma = 0. \quad (1.5.17)$$

Уравнение (1.5.17) отображает принцип стационарности, который утверждает: стационарное значение функционала Γ со-

ответствует действительной траектории между заданными состояниями при деформации тела. Выражение вариации δU при нагрузке с учетом физических соотношений деформационной теории имеет вид

$$\delta U = 2G \int_V \left[(1 - \omega) \delta \Gamma_2(e) + \left(\frac{m-1}{2} + \frac{\omega}{3} \right) \Gamma_1(e) \delta \Gamma_1(e) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(m - \frac{1}{3} \right) \alpha \Delta T \delta \Gamma_1(e) \right] dV,$$

причем $\delta \Gamma_2(e) = e^{ij} \delta e_{ij}$; $\delta \Gamma_1(e) = g^{ij} \delta e_{ij}$.

Принципу возможных скоростей соответствует соотношение

$$\delta W = \int_V (F^i - \rho d v^i / dt) \delta v_i dV + \int_{S_1} p_{(n)}^i \delta v_i dS,$$

где $\delta W = \int_V \sigma^{ij} \delta \dot{e}_{ij} dV$ — вариация мощности деформации тела.

Относя силы инерции к внешним силам и вводя в рассмотрение полную мощность тела

$$\tilde{W} = W - \int_V (F^i - \rho d v^i / dt) v_i dV - \int_{S_2} p_{(n)}^i v_i dS,$$

приходим к вариационному уравнению $\delta \tilde{W} = 0$, которое характеризует принцип стационарности: действительному состоянию тела при динамическом деформировании соответствует стационарное значение полной мощности тела. Выражение вариации $\delta \tilde{W}$ при нагрузке с учетом физических соотношений деформационной теории имеет вид

$$\delta \tilde{W} = 2G \int_V \left[(1 - \omega) \delta \dot{\Gamma}_2(e) + \left(\frac{m-1}{2} + \frac{\omega}{3} \right) \Gamma_1(e) \delta \dot{\Gamma}_1(e) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(m - \frac{1}{3} \right) \alpha \Delta T \delta \dot{\Gamma}_1(e) \right] dV,$$

где $\delta \dot{\Gamma}_2(e) = e^{ij} \delta \dot{e}_{ij}$; $\delta \dot{\Gamma}_1(e) = g^{ij} \delta \dot{e}_{ij}$.

Принципу возможных изменений напряженного состояния тела соответствует соотношение

$$\delta R + \int_V \rho u_i (d \delta v^i / dt) dV = \int_{S_1} u_i n_j \delta \sigma^{ij} dS,$$

где δR — вариация дополнительной работы деформации тела.

Вводя полную дополнительную работу

$$\tilde{R} = R + \int_V \rho u_i (d v^i / dt) dV - \int_{S_1} u_i n_j \sigma^{ij} dS,$$

получаем вариационное уравнение $\delta\tilde{R}=0$, которое характеризует принцип стационарности: действительному состоянию тела соответствует стационарное значение функционала $\tilde{R}$.

Вариация дополнительной работы деформации тела при нагрузке с учетом физических соотношений деформационной теории определяется выражением

$$\delta R = \frac{1}{2G} \int_V \left[(1 + \varphi) \delta \Gamma_2(\sigma) - \left(\frac{m-1}{3m-1} + \frac{\varphi}{3} \right) \Gamma_1(\sigma) \delta \Gamma_1(\sigma) + \right. \\ \left. + 2G\alpha\Delta T \delta \Gamma_1(\sigma) \right] dV,$$

где $\delta \Gamma_2(\sigma) = \sigma_{ij} \delta \sigma^{ij}$; $\delta \Gamma_1(\sigma) = g_{ij} \delta \sigma^{ij}$.

Если на поверхности тела задано распределение скоростей $v^i(S) = v_{S^i}$, то принципу возможных изменений напряженного состояния тела соответствует соотношение

$$\delta \dot{R} + \int_V \rho v_i (d\delta v^i/dt) dV = \int_{S_1} v_{is} n_j \delta \sigma^{ij} dS,$$

где $\delta \dot{R} = \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \delta \sigma^{ij} dV$ — вариация дополнительной мощности деформации тела.

Вводя полную дополнительную мощность

$$\dot{\tilde{R}} = \dot{R} + \int_V \rho v_i (dv^i/dt) dV - \int_{S_1} v_{is} n_j \sigma^{ij} dS,$$

получаем вариационное уравнение $\delta\dot{\tilde{R}}=0$, которое характеризует принцип стационарности: действительному состоянию тела соответствует стационарное значение полной дополнительной мощности тела. При этом вариация дополнительной мощности деформации тела при нагрузке с учетом физических соотношений теории пластического течения имеет вид

$$\delta \dot{\tilde{R}} = \frac{1}{2G} \int_V \left[\delta \dot{\Gamma}_2'(\sigma) - \frac{m-1}{3m-1} \dot{\Gamma}_1(\sigma) \delta \Gamma_1(\sigma) + 2G\alpha\Delta \dot{T} \delta \Gamma_1(\sigma) \right] dV + \\ + \int_V \dot{\lambda} \left[\delta \Gamma_2(\sigma) - \frac{1}{3} \Gamma_1(\sigma) \delta \Gamma_1(\sigma) \right] dV,$$

где $\delta \dot{\Gamma}_2'(\sigma) = \dot{\sigma}_{ij} \delta \sigma^{ij}$.

Если при деформации тела частицы среды находятся в движении, то компоненты характеристик напряженно-деформированного состояния тела при нагрузке должны удовлетворять исходной системе уравнений и соотношений, составляющих математическую модель динамической задачи. Это уравнение неразрывности (1.1.7), уравнение движения (1.1.8), геометрические (1.1.4) или кинематические (1.1.2) соотношения, уравне-

ния совместности деформаций или скоростей деформаций (1.1.3), физические соотношения деформационной теории (1.5.8) или теории пластического течения (1.5.6), уравнение теплопроводности

$$\rho_0 c \Delta T = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\beta T_0 \dot{\epsilon} + W^*,$$

которое во многих случаях можно рассматривать в форме

$$\rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T + W^*,$$

пренебрегая малой величиной $3\beta T_0 \dot{\epsilon}$. При этом необходимо выполнение начальных условий $u_i = u_i^0$, $v_i = v_i^0$, $\rho = \rho_0$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$, $\Delta T = \Delta T_0$ при $t = t_0$ и граничных условий (1.2.1) на S_1 , (1.2.3) на S_2 , а также (1.2.2) и $\rho(S) = \rho_S$ на S .

Для динамических задач теории пластичности система разрешающих уравнений формируется в зависимости от выбора основных неизвестных. Принимая за основные неизвестные ρ , ΔT и u_i , приходим к системе разрешающих уравнений в перемещениях:

$$\dot{\rho} + \nabla_i (\rho v^i) = 0; \quad \rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\beta T_0 \dot{\epsilon} + W^*; \quad (1.5.18)$$

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha - (3m-1) \alpha \nabla_i \Delta T + \\ + F_i/G - R_i(\omega) = (1/a_s^2) dv_i/dt,$$

которой соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $u_i = u_i^0$, $v_i = v_i^0$, $\Delta T = \Delta T_0$ при $t = t_0$ и приведенные выше граничные условия, дополненные соотношениями (1.4.19).

Принимая за основные неизвестные ρ , ΔT , v_i и σ^{ij} , приходим к системе разрешающих уравнений в напряжениях

$$\dot{\rho} + \nabla_i (\rho v^i) = 0; \quad \rho dv_i/dt = g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij} + F_i; \\ \Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{ki} \nabla_i \nabla_k \left[(1+\varphi) \sigma_{ij} - \left(\frac{m-1}{3m-1} + \frac{\varphi}{3} \right) 3\sigma g_{ij} \right] + \\ + 2G\alpha \Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{ki} \nabla_i \nabla_k (\Delta T g_{ij}) = 0; \\ \rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\beta T_0 \dot{\epsilon} + W^*, \quad (1.5.19)$$

которой соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $v_i = v_i^0$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$, $\Delta T = \Delta T_0$ при $t = t_0$ и граничные условия, справедливые в предыдущем случае.

Если же в основу построения системы разрешающих уравнений положены физические соотношения теории пластического течения, то в системе уравнений (1.5.19) уравнения совместности должны быть приняты в виде

$$\Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{ki} \Delta_i \nabla_k \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\dot{\sigma} g_{ij} + 2G\dot{\lambda} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \right] + \\ + 2G\alpha \Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{ki} \nabla_i \nabla_k (\Delta \dot{T} g_{ij}) = 0. \quad (1.5.20)$$

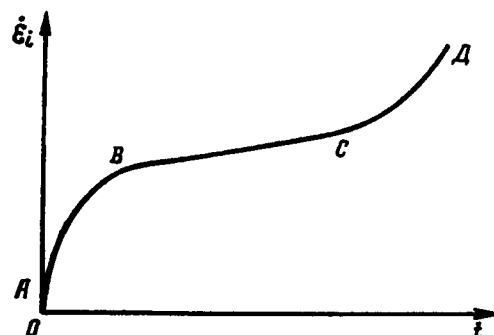


Рис. 1.6. Кривая ползучести

Теория ползучести изучает напряженно-деформированное состояние тела, вызванное действием внешних сил и температуры, изменяющееся с течением времени, причем механические и термические характеристики предполагаются переменными. Процесс ползучести характеризуется кривыми ползучести (рис. 1.6), получаемыми экспериментально. Анализ этих кривых выделяет две стадии ползучести: установившуюся, для которой характерно постоянство скорости деформации, и не установившуюся, когда скорость деформации переменна.

При изучении установившейся ползучести следует различать два случая:

а) скорость деформации постоянна с самого начала, так как упрочнение среды отсутствует;

б) скорость деформации становится постоянной вследствие того, что среда вырабатывает ресурс упрочнения, т. е. теряет способность к дальнейшему упрочнению при продолжающейся деформации.

Первый случай проявляется при достаточно высоком уровне температур и напряжений, что обнаруживается в опытах на кратковременную ползучесть. Второй случай отмечается при относительно низких температурах, когда скорость деформации становится постоянной по истечении достаточно большого промежутка времени, так как установившейся ползучести предшествует начальная фаза, в течение которой происходит упрочнение среды.

При сложном напряженном состоянии упрочнение вследствие ползучести или кратковременной пластической деформации создает анизотропию среды по отношению к последующей ползучести, характеристики которой чрезвычайно чувствительны к степени анизотропии. Поэтому возникает потребность в различии изотропной и анизотропной ползучести. Анизотропия определяется следующими факторами:

а) исходным состоянием среды (в первую очередь текстурой), связанным с технологией изготовления изделия;

б) упрочнением или изменением текстуры, вызванными мгновенной пластической деформацией, возникающей в момент нагружения при достаточно больших нагрузках или в процессе ползучести, если напряженное состояние неоднородно;

в) упрочнением, происходящим на начальной фазе ползучести.

Установившейся будем называть такую ползучесть, при которой все компоненты тензора скоростей ползучести сохраняют постоянные значения на фоне неизменного напряженного состояния. Физические соотношения теории установившейся ползучести представляют собой зависимости вида $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \varphi_{ij}(\sigma^{kl})$, где $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ — изотропные компоненты тензора скоростей деформаций ползучести. Напомним, что зависимости между симметричными тензорами вида $\varphi_{ij}(b_{kl}) = a_{ij}$ являются изотропными тогда, когда они не изменяются при изменении системы координат, а потому они должны иметь вид

$$\varphi_{ij}(b_{kl}) = \varphi g_{ij} + \alpha A_{ij} + \beta B_{ij} + \gamma C_{ij} + \dots,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — скаляры; $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, \dots$ — произвольные тензоры, имеющие те же главные оси, что и тензор b_{kl} . В данном представлении имеет смысл удержать только линейно независимые тензоры $A_{ij}, B_{ij}, \dots$, набор которых ограничен.

Поскольку число компонентов конечно, тензоры имеют одни и те же главные направления и сконструированы с помощью тензора b_{kl} . С учетом сказанного можно показать, что наиболее общая форма закона изотропной ползучести имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = P g_{ij} + Q \sigma_{ij} + R \sigma_i^k \sigma_{kj}, \quad (1.5.21)$$

где P, Q, R — функции инвариантов тензора напряжений $\Gamma_1(\sigma), \Gamma_2(\sigma), \Gamma_3(\sigma)$, выбор которых основан на разумных физических и экспериментальных соображениях. В частности, установлено, что деформация ползучести не сопровождается изменением объема, т. е. $\epsilon^{(e)} = 0$. Тогда можно исключить функцию P и представить зависимость (1.5.21) в форме

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = Q' D_{ij}(\sigma) + R [D_i^k(\sigma) D_{kj}(\sigma) - \Gamma_2(D\sigma) g_{ij}/3].$$

Предположение о несжимаемости среды дополняется предположением, что $\Gamma_1(\sigma)$ не влияет на ползучесть, тогда Q' и R зависят только от $\Gamma_2(D\sigma)$ и $\Gamma_3(D\sigma)$.

Ползучесть представляет собой процесс рассеяния механической энергии, что позволяет ввести в рассмотрение мощность рассеяния

$$L = \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = D^{ij}(\sigma) \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)},$$

так как $\dot{\varepsilon}^{(c)} = 0$ и среднее напряжение σ работы не совершает. В этом случае

$$L = Q' \Gamma_2(D_0) + R \Gamma_3(D_0),$$

но $L > 0$, поэтому функции Q' и R должны удовлетворять условию

$$Q' \Gamma_2(D_0) + R \Gamma_3(D_0) \geq 0.$$

Полагая $L = \text{const}$, в пространстве напряжений имеем поверхность постоянной диссипации, в точках которой мощность диссипации равна k . Поверхности постоянной диссипации не пересекаются, они вложены одна в другую и образуют семейство поверхностей; в противном случае мощность не выражалась бы однозначно через напряжения.

Рассмотрим путь нагружения из точки M_1 на поверхности $L = k_1$ в точку M_2 на поверхности $L = k_2$ (рис. 1.7), который пересекает каждую поверхность семейства $L = k$ ($k_1 \leq k \leq k_2$) только один раз, т. е. в процессе нагружения мощность диссипации не убывает. Пусть на пути нагружения мощность дополнительных воздействий неотрицательна: $dL \geq 0$. В этом случае для каждой точки M пути $M_1 M_2$

$$(\sigma^{ij} - \sigma_{(i)}^{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} \geq 0, \quad (1.5.22)$$

откуда следует, что вектор скорости ползучести направлен по нормали к поверхности $L = k$, а потому

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(c)} = h(\sigma^{ij}) \partial L / \partial \sigma^{ij}. \quad (1.5.23)$$

Условие (1.5.22) представляет собой постулат Друккера для установившейся ползучести. Если существует некоторая функция $f_1(\sigma^{ij})$, называемая потенциалом скоростей ползучести и удовлетворяющая равенству

$$h(\sigma^{ij}) \partial L / \partial \sigma^{ij} = \partial f_1 / \partial \sigma^{ij}, \quad (1.5.24)$$

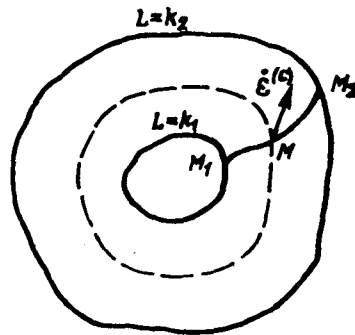


Рис. 1.7. Путь нагружения и поверхности постоянной диссипации в пространстве напряжений

то равенство (1.5.23) принимает вид $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \partial f_1 / \partial \sigma^{ij}$. Из равенства (1.5.24) следует существование функции $U(\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)})$, с помощью которой определяются напряжения $\sigma^{ij} = \partial U / \partial \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$. Выполнение условия (1.5.24) обеспечивает выпуклость поверхности $f_1(\sigma^{ij}) = \text{const}$ в пространстве напряжений и поверхности $U(\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}) = C$ в пространстве скоростей деформаций.

В изотропной среде потенциал ползучести может зависеть только от инвариантов тензора напряжений $f_1 = f_1[\Gamma_1(\sigma); \Gamma_2(\sigma); \Gamma_3(\sigma)]$. Условие несжимаемости позволяет принять $f_1 = f_1[\Gamma_2(D_\sigma); \Gamma_3(D_\sigma)]$, тогда соотношения (1.5.23) преобразуются к виду

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = 2 \frac{\partial f_1}{\partial \Gamma_2(D_\sigma)} D_{ij}(\sigma) + 3 \frac{\partial f_1}{\partial \Gamma_3(D_\sigma)} \left[D_i^k(\sigma) D_{kj}(\sigma) - \frac{1}{3} \Gamma_2(D_\sigma) g_{ij} \right],$$

откуда

$$Q' = 2 \partial f_1 / \partial \Gamma_2(D_\sigma); \quad R = 3 \partial f_1 / \partial \Gamma_3(D_\sigma).$$

Для того чтобы учесть анизотропию среды при ползучести, будем считать среду несжимаемой и предположим, что потенциал ползучести f_1 зависит только от инварианта Γ_2 , составленного из компонент тензора напряжений и компонент постоянного тензора анизотропии $\Gamma_2 = A_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}$, который симметричен относительно пар индексов ij и kl , а также относительно индексов i и j , k и l . Тогда

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \Phi'(\Gamma_2) \partial \Gamma_2 / \partial \sigma^{ij} = 2 \Phi'(\Gamma_2) A_{ijkl} \sigma^{kl}.$$

Согласно условию несжимаемости $\dot{\epsilon}^{(c)} = 0$, тогда $A_{ijkl} \sigma^{ij} = 0$ и $\Gamma_2 = A_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = A_{ijkl} D^{ij}(\sigma) D^{kl}(\sigma)$. Закон анизотропной ползучести имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{ci}^{(c)} = \Phi'(\Gamma_2) 2 A_{ijkl} D^{kl}(\sigma).$$

Экспериментальная зависимость скорости ползучести от напряжений имеет один и тот же характер для различных типов напряженного состояния, что указывает на определенную форму зависимости потенциала f_1 от инвариантов $\Gamma_2(D_\sigma)$ и $\Gamma_3(D_\sigma)$. Для несжимаемой среды достаточно общим является равенство

$$f_1 = f_1[D_i(\sigma), q(\xi)].$$

Здесь

$$D_i^2(\sigma) = 1,5 \Gamma_2(D_\sigma); \quad \xi = \sqrt{6} \Gamma_3(D_\sigma) / [\Gamma_2(D_\sigma)]^{3/2},$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = & \frac{3}{2} f_1' \left[(q - 3\xi q') \frac{D_{ij}(\sigma)}{D_i} + \right. \\ & \left. + 9q' \frac{D_i^k(\sigma) D_{kj}(\sigma) - 2D_i^2 g_{ij}/9}{D_i^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.5.25)$$

Вместо функции $q(\xi)$ возьмем функцию $q(\varphi)$, где φ — угол напряженного состояния $q(0)=1$. В этом случае для простого растяжения аргумент функции $f_1(D_i, q)$ становится равным величине растягивающего напряжения σ_0 , следовательно, $f_1'(D_i, q) = v(\sigma_0, q)$, где v — функция, устанавливающая зависимость скорости ползучести при растяжении от растягивающего напряжения и определяемая экспериментально.

Экспериментально установлено, что при ползучести ряда сред для определенных условий влияние инварианта $\Gamma_3(D_0)$ невелико, им можно пренебречь и считать $f_1 = f_1(D_i)$, тогда из (1.5.25) находим

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = 1,5v(D_i) D_{ij}(\sigma)/D_i; \quad v(D_i) = f_1'(D_i). \quad (1.5.26)$$

Соотношения (1.5.26) квинзилинейны в том смысле, что зависимости между $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ и $D_{ij}(\sigma)$ линейны; нелинейность скрыта в множителе, зависящем от инварианта $D_i(\sigma)$.

При неустановившейся ползучести скорость ползучести переменна, зависит от напряжений; при неизменных напряжениях скорость ползучести постоянна, упругие деформации малыми не считаются. Для простоты изложения будем опираться на квазистатические соотношения (1.5.26), считая среду упругосжимаемой, т. е. $\sigma = 3Ke$. Тогда

$$e_{ij}^{(c)} = D_{ij}(e) - D_{ij}(\sigma)/2G,$$

а скорость ползучести

$$D_{ij}(\dot{\epsilon}) = D_{ij}(\dot{\sigma})/2G + 1,5v(D_i) D_{ij}(\sigma)/D_i. \quad (1.5.27)$$

Мгновенная деформация, возникающая при приложении нагрузки, может быть не только упругой, но и упругопластической, тогда

$$e_{ij}^{(c)} = D_{ij}(e) - D_{ij}(\sigma)/2G - D_{ij}(e^p). \quad (1.5.28)$$

Полагая, что начальная пластическая деформация сопровождается изотропным упрочнением

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3}{2} \frac{g'(D_i)}{D_i} dD_i dD_{ij}(\sigma).$$

объединим (1.5.27) и (1.5.28) в единое соотношение

$$\begin{aligned} D_{ij}(\dot{\epsilon}) &= D_{ij}(\dot{\sigma})/2G + \\ &+ 1,5 [g'(D_i) \dot{D}_i + v(D_i)] D_{ij}(\sigma)/D_i \text{ при } \dot{D}_i > 0; \\ D_{ij}(\dot{\epsilon}) &= D_{ij}(\dot{\sigma})/2G + 1,5v(D_i) D_{ij}(\sigma)/D_i \text{ при } \dot{D}_i < 0. \end{aligned}$$

В соответствии с изложенным физические соотношения теории ползучести будут следующими:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = 1,5v(D_i) (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij})/D_i; \quad (1.5.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2G} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\dot{\sigma} g_{ij} \right] + \\ &+ \left[\frac{3}{2} \left(g'(D_i) \dot{D}_i + \frac{v(D_i)}{D_i} \right) \right] (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \text{ при } \dot{D}_i > 0; \quad (1.5.30) \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2G} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\dot{\sigma} g_{ij} \right] + \frac{3}{2} \frac{v(D_i)}{D_i} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \text{ при } \dot{D}_i < 0. \end{aligned}$$

Здесь соотношение (1.5.29) относится к установившейся, а уравнения (1.5.30) — к неустановившейся стадии ползучести.

Предположение о существовании потенциала ползучести хотя и ограничивает класс возможных видов теории установившейся ползучести для пространственного напряженного состояния, однако позволяет сформулировать общие вариационные теоремы, открывающие возможность развития приближенных методов решения задач ползучести.

Рассмотрим тело, находящееся в состоянии установившейся ползучести под действием температуры ΔT , внешних объемных F^i и поверхностных $p_{(n)}^{ij}$ сил, приложенных на части S_2 поверхности; на остальной части S_1 поверхности заданы компоненты вектора скорости v_{is} частиц тела. В результате действия указанных внешних факторов в теле возникает поле скоростей v и напряженное состояние, определяемое тензором напряжений (σ) . Ползучесть является равновесным процессом, протекающим в условиях статического нагружения тела, когда внешние силы и температура действуют на тело в течение достаточно длительного промежутка времени, а потому компоненты σ^{ij} тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1.6) и граничным условиям (1.2.3) на части S_2 поверхности. Компоненты вектора скорости v должны быть непрерывными дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими граничным условиям (1.2.2) на части S_1 поверхности. При вычислении поля скоростей деформаций (1.1.2) необходимо, чтобы σ^{ij} и $\epsilon_{ij}^{(c)}$ были связаны соотношениями $\epsilon_{ij}^{(c)} = \partial f_i / \partial \sigma^{ij}$ или $\sigma^{ij} = \partial U / \partial \epsilon_{ij}^{(c)}$. Выполнение перечисленных условий указывает на то, что имеется точное решение задачи установившейся ползучести.

Предположим, что наряду с найденным решением σ^{ij} , v^i существует другое сколь угодно близкое решение $\sigma^{ij} + \delta\sigma^{ij}$, $v^i + \delta v^i$, удовлетворяющее тем же граничным условиям, тогда на части S_1 поверхности $\delta v^i = 0$, а на части S_2 поверхности $\delta\sigma^{ij} n_j = 0$, при этом уравнения равновесия $\nabla_j \delta\sigma^{ij} = 0$ — однородные.

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla_j \delta\sigma^{ij} \delta v_i dV &= \int_V [\nabla_j (\delta\sigma^{ij} \delta v_i) - \delta\sigma^{ij} \nabla_j \delta v_i] dV = \\ &= \int_S \delta\sigma^{ij} n_j \delta v_i dS - \int_V \delta\sigma^{ij} \nabla_j \delta v_i dV, \end{aligned}$$

но в силу граничных условий

$$\int_S \delta \sigma^{ij} n_j \delta v_i dS = 0 \quad \text{и} \quad \delta \sigma^{ij} \nabla_j \delta v_i = \delta \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij},$$

тогда

$$\int_V \delta \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = 0.$$

С учетом требований для скоростей ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ и напряжений σ^{ij} можно записать

$$\delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma^{ij} \partial \sigma^{kl}} \delta \sigma^{kl}; \quad \delta \sigma^{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} \partial \dot{\epsilon}_{kl}^{(c)}} \delta \dot{\epsilon}_{kl}^{(c)},$$

тогда

$$\int_V \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma^{ij} \partial \sigma^{kl}} \delta \sigma^{ij} \delta \sigma^{kl} dV = 0; \quad \int_V \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} \partial \dot{\epsilon}_{kl}^{(c)}} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} \delta \dot{\epsilon}_{kl}^{(c)} dV = 0,$$

что невозможно при отличных от нуля $\delta \sigma^{ij}$ и $\delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$, если стоящие под интегралом квадратичные формы знакопеременны. В этом случае сколь угодно близкое состояние ползучести, удовлетворяющее тем же граничным условиям, что и найденное, не существует. Для устойчивости найденного состояния необходимо, чтобы квадратичные формы были положительно определенными. Очевидно, измененному состоянию $\sigma^{ij} + \delta \sigma^{ij}$, $v^i + \delta v^i$ должны соответствовать измененные объемные $F^i + \delta F^i$ и поверхностные $p_{(n)}^i + \delta p_{(n)}^i$ силы, что приводит к равенству

$$\int_V \delta F^i \delta v_i dV + \int_S \delta p_{(n)}^i \delta v_i dS = \int_V \delta \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV.$$

Следовательно, для устойчивой среды $\delta \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} > 0$, так как левая часть равенства представляет собой мощность, развиваемую дополнительными силами на дополнительных скоростях, т. е.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma^{ij} \partial \sigma^{kl}} \delta \sigma^{ij} \delta \sigma^{kl} > 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} \partial \dot{\epsilon}_{kl}^{(c)}} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} \delta \dot{\epsilon}_{kl}^{(c)} > 0.$$

Эти условия указывают на то, что поверхности $f_1 = \text{const}$ в пространстве напряжений и $U = \text{const}$ в пространстве деформаций выпуклы.

Пусть для устойчивой среды решение σ^{ij} , v_i задачи установившейся ползучести соответствует действительному состоянию тела. Наряду с действительным полем скоростей v_i рассмотрим возможное поле скоростей $v_i^{(a)}$, которое предполагаем непрерыв-

ным и дифференцируемым, т. е. для него можно определить поле тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^{(a)}$. В этом случае

$$\int_V F^i v_i^{(a)} dV + \int_S p_{(n)}^i v_i^{(a)} dS = \int_V \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(a)} dV, \quad (1.5.31)$$

поскольку внешние силы F^i , $p_{(n)}^i$ и внутренние силы σ^{ij} находятся в равновесии и работа их на виртуальных скоростях равна нулю. Можно показать, что соотношения (1.5.31) отмечают уравнениям равновесия как в объеме, так и на поверхности тела. Представим возможное поле скоростей в виде $v_i^{(a)} = v_i + \delta v_i$, причем на части S_1 поверхности $\delta v_i = 0$, и подставим его в соотношение (1.5.31). Тогда

$$\int_V F^i \delta v_i dV + \int_S p_{(n)}^i \delta v_i dS = \int_V \sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV,$$

так как действительное поле скоростей v_i удовлетворяет (1.5.31). Согласно приведенным формулам,

$$\sigma^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = (\partial U / \partial \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}) \delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \delta U,$$

поэтому

$$\delta(\tilde{U} - A) = 0, \quad (1.5.32)$$

где $\tilde{U} = \int_V U dV$; $A = \int_V F^i v_i dV + \int_S p_{(n)}^i v_i dS$.

Уравнение (1.5.32) выражает принцип минимума полной мощности: действительному состоянию тела при установившейся ползучести соответствует минимум полной мощности.

Наряду с действительным полем напряжений σ^{ij} рассмотрим некоторое возможное поле напряжений $\sigma_{(a)}^{ij}$, для которого справедливо соотношение

$$\int_V F_{(a)}^i v_i dV + \int_S p_{(n)(a)}^i v_i dS = \int_V \sigma_{(a)}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV. \quad (1.5.33)$$

Подставим $\sigma_{(a)}^{ij} = \sigma^{ij} + \delta \sigma^{ij}$ в (1.5.33), тогда

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij} \delta \sigma^{ij} dV = 0,$$

так как действительное поле напряжений σ^{ij} удовлетворяет соотношению (1.5.33), а вариации сил $\delta F^i = 0$, $\delta p_{(n)}^i = 0$. Согласно приведенным формулам,

$$\dot{\epsilon}_{ij} \delta \sigma^{ij} = (\partial f_1 / \partial \sigma^{ij}) \delta \sigma^{ij} = \delta f_1,$$

поэтому

$$\delta \Phi = 0, \quad (1.5.34)$$

где $\Phi = \int_V f_1 dV$ — дополнительное рассеяние.

Уравнение (1.5.34) выражает принцип минимума дополнительного рассеяния: действительному состоянию тела при установившейся ползучести соответствует минимум дополнительного рассеяния.

В теории неустановившейся ползучести также имеют место общие вариационные теоремы. Предположим, что деформация тела состоит из мгновенной деформации $e_{ij}^{(0)} = e_{ij}^{(e)} + e_{ij}^{(p)}$ и деформации ползучести $e_{ij}^{(c)}$. Будем считать, что мгновенная деформация $e_{ij}^{(0)} = \partial f / \partial \sigma^{ij}$, а скорость деформации ползучести

$$\dot{e}_{ij}^{(c)} = \partial f_1 / \partial \sigma^{ij},$$

тогда скорость полной деформации

$$\dot{e}_{ij} = \partial (\dot{f} + f_1) / \partial \sigma^{ij}. \quad (1.5.35)$$

Пусть на тело действуют внешние объемные F^i и поверхностные $p_{(n)}^i$ силы, а также температура ΔT . В теле возникают поля напряжений σ^{ij} и скоростей v_i . Наряду с истинным напряженным состоянием (σ) рассмотрим сколь угодно близкое статически возможное напряженное состояние с тензором напряжений $(\sigma_{(a)})$, соответствующее тем же внешним объемным и поверхностным силам и температуре. Компоненты тензора $(\sigma_{(a)})$ представим в виде $\sigma_{(a)}^{ij} = \sigma^{ij} + \delta \sigma^{ij}$. Вариации $\delta \sigma^{ij}$ образуют самоуравновешенную систему напряжений, которая на части S_2 поверхности удовлетворяет условиям $\delta \sigma^{ij}(S) n_j = 0$ и подчинена соотношению

$$\int_V \dot{e}_{ij} \delta \sigma^{ij} dV = \int_{S_1} \delta \sigma^{ij} n_j v_{is} dS.$$

Внося (1.5.35) в это соотношение, получаем вариационное уравнение теории неустановившейся ползучести

$$\delta \int_V (\dot{f} + f_1) dV = \int_{S_1} v_{is} n_j \delta \sigma^{ij} dS, \quad (1.5.36)$$

в котором варьируются только напряжения σ^{ij} , но не скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}^{ij}$, а также предполагается существование потенциала мгновенных деформаций f , т. е. используется деформационная теория пластичности.

Если мгновенная пластическая деформация $e_{ij}^{(p)}$ подчиняется соотношениям теории пластического течения, то вместо уравнения (1.5.36) необходимо составить другое вариационное уравнение. Допустим, что деформация тела при ползучести состоит из мгновенной упругопластической деформации $e_{ij}^{(0)}$ и деформации ползучести $e_{ij}^{(c)}$, т. е. $e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + e_{ij}^{(c)}$. Согласно

теории пластического течения $de_{ij}^{(0)} = a_{ijkl} d\sigma^{kl}$, причем компоненты $a_{ijkl} = a_{klij}$ для упругих деформаций $e_{ij}^{(e)}$ являются упругими константами, а для пластических деформаций $e_{ij}^{(p)}$ равны $a_{ijkl} = h(\partial f / \partial \sigma^{ij})(\partial f / \partial \sigma^{kl})$, и тогда $\dot{e}_{ij}^{(0)} = a_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl}$.

Наряду с действительным полем скоростей напряжений $\dot{\sigma}^{ij}$ рассмотрим сколь угодно близкое статически возможное поле скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{(a)}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + \delta \dot{\sigma}^{ij}$, при этом вариации $\delta \dot{\sigma}^{ij}$ удовлетворяют уравнениям равновесия в объеме и на поверхности тела:

$$\nabla_j \delta \dot{\sigma}^{ij} + \delta \dot{F}^i = 0 \text{ и } \delta \dot{\sigma}^{ij}(S) n_j = \delta \dot{p}_{(n)}^i$$

и подчинены соотношению

$$\int_V \delta \dot{\sigma}^{ij} \dot{e}_{ij} dV = \int_V \delta \dot{F}^i v_i dV + \int_S \delta \dot{p}_{(n)}^i v_i dS.$$

С учетом равенства

$$\delta \dot{\sigma}^{ij} \dot{e}_{ij} = 0,5 \delta [\dot{\sigma}^{ij} (\dot{e}_{ij}^{(0)} + \dot{e}_{ij}^{(c)})]$$

получим вариационное уравнение теории неустановившейся ползучести

$$\delta \int_V \dot{\sigma}^{ij} (\dot{e}_{ij}^{(0)} + \dot{e}_{ij}^{(c)}) dV = 2\delta \left(\int_V \dot{F}^i v_i dV + \int_S \dot{p}_{(n)}^i v_i dS \right),$$

основанное на теории пластического течения, в котором варьируются скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}^{ij}$, а следовательно, и зависящие от них скорости полной деформации $\dot{e}_{ij}$, но не скорости ползучести $\dot{e}_{ij}^{(c)}$, зависящие только от $\dot{\sigma}^{ij}$.

Истинное поле скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$ вызвано полем скоростей v_i , а вариациям скоростей δv_i соответствуют вариации скоростей деформаций $\delta \dot{e}_{ij}$. Рассматривая вариации δv_i как возможные скорости, составим вариационное соотношение

$$\int_V \dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{e}_{ij} dV = \int_V \dot{F}^i \delta v_i dV + \int_S \dot{p}_{(n)}^i \delta v_i dS,$$

левая часть которого не является вариацией функционала, так как компоненты $\dot{\sigma}^{ij}$ не определяются через скорости полной деформации $\dot{e}^{ij}$, и не выражает какого-либо вариационного принципа, позволяющего отобрать среди различных кинематически возможных полей скоростей такое поле, которое наилучшим об-

разом аппроксимирует истинное поле скоростей. Запишем функционал

$$K = \int_V [\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 0,5 \dot{\sigma}^{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + 2\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)})] dV - \int_{S_1} \dot{\sigma}^{ij} n_j (v_i - v_{is}) dS - \\ - \int_{S_2} \dot{p}_{(n)}^i v_i dS,$$

полагая, что на части S_1 поверхности заданы скорости v_{is} , а на части S_2 — скорости изменения поверхностных сил $\dot{p}_{(n)}^i$. Будем считать величины $\dot{\sigma}^{ij}$ и v_i независимыми переменными, причем $\dot{\epsilon}_{ij} = 0,5 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$, тогда как компоненты $\dot{\epsilon}_{ij}^{(0)}$ зависят от $\dot{\sigma}^{ij}$ и $\dot{\sigma}^{ij}$, а компоненты $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ — только от $\dot{\sigma}^{ij}$. Вариация функционала

$$\delta K = \int_V [\delta \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} - 0,5 (\dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + 2\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}) \delta \dot{\sigma}^{ij} - \\ - 0,5 \dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)}] dV - \int_{S_1} \delta \dot{\sigma}^{ij} n_j (v_i - v_{is}) dS - \int_{S_1} \dot{\sigma}^{ij} n_j \delta v_i dS - \\ - \int_{S_2} \dot{p}_{(n)}^i \delta v_i dS.$$

Учитывая равенство

$$\delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} \dot{\sigma}^{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} \delta \dot{\sigma}^{ij},$$

перепишем вариацию δK в виде

$$\delta K = \int_V (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}) \delta \dot{\sigma}^{ij} dV - \int_V \dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \\ - \int_{S_1} \delta \dot{\sigma}^{ij} n_j (v_i - v_{is}) dS - \int_{S_1} \dot{\sigma}^{ij} n_j \delta v_i dS - \int_{S_2} \dot{p}_{(n)}^i \delta v_i dS,$$

но первый интеграл равен нулю, так как $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$, тогда

$$\delta K = - \int_V \nabla_j \dot{\sigma}^{ij} \delta v_i dV + \int_S (\dot{\sigma}^{ij} n_j - \dot{p}_{(n)}^i) \delta v_i dS - \\ - \int_S \delta \dot{\sigma}^{ij} n_j (v_i - v_{is}) dS.$$

Вариационное уравнение $\delta K = 0$ эквивалентно уравнениям равновесия и граничным условиям для $\dot{\sigma}^{ij}$, если вариации δv_i , $\delta \dot{\sigma}^{ij}$ подчинены поверхностным условиям $\delta v_i = 0$ на S_1 и $\delta \dot{\sigma}^{ij} n_j = 0$ на S_2 .

Задачи теории ползучести удобнее формулировать в напря-

жениях отдельно для установившейся и неуставившейся ползучести, полагая среду несжимаемой: $\epsilon^{(c)} = 0$. Установившаяся ползучесть, как было показано, характеризуется физическими соотношениями

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)} = 1,5f(\sigma_i, \Delta T, t)(\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}).$$

В систему разрешающих уравнений установившейся ползучести входят:

а) уравнения равновесия

$$g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij} + F_i = 0, \quad (1.5.37)$$

б) уравнение теплопроводности

$$\rho_0 c \Delta T = \Lambda \nabla^2 \Delta T - \beta T_0 \sigma / K + W^*, \quad (1.5.38)$$

в) уравнения совместности, записанные в напряжениях:

$$\Lambda_{\alpha}^{ij} \Lambda_{\beta}^{lk} \left[f \nabla_l \nabla_i (\sigma_{jk} - \sigma g_{jk}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^l} \nabla_l (\sigma_{jk} - \sigma g_{jk}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial f}{\partial x^i} \nabla_i (\sigma_{jk} - \sigma g_{jk}) \right) + (\sigma_{jk} \sigma g_{jk}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^l} \right] = 0.$$

Неуставившаяся ползучесть характеризуется физическими соотношениями

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + 1,5f(\sigma_i, \Delta T, t)(\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}).$$

Система разрешающих уравнений формируется из уравнений равновесия (1.5.37), уравнения теплопроводности (1.5.38) и уравнений совместности, записанных в напряжениях:

$$\Lambda_k^{ij} \Lambda_{\beta}^{lk} \left\{ f \nabla_l \nabla_i (\sigma_{ja} - \sigma g_{ja}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x^l} \nabla_l (\sigma_{ja} - \sigma g_{ja}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial f}{\partial x^i} \nabla_i (\sigma_{ja} - \sigma g_{ja}) \right] + (\sigma_{ja} - \sigma g_{ja}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^l} \right\} = - \Lambda_k^{ij} \Lambda_{\beta}^{lk} \nabla_l \nabla_i \dot{\epsilon}_{ja}^{(0)}.$$

Разрешающим уравнениям установившейся и неуставившейся ползучести соответствуют граничные условия (1.4.19), (1.2.2), (1.2.3), заданные соответственно на поверхности S , S_1 и S_2 области тела.

Итак, выше сформулированы основные соотношения задач теории пластичности и ползучести, которые включают замкнутую систему разрешающих уравнений и соответствующие им начальные и граничные условия.

1.6. Вязкоупругость и вязкопластичность

Теория вязкоупругости изучает поведение среды, обладающей свойствами вязкости и упругости, под действием внешних объемных F^i и поверхностных $p_{(n)}^i$ сил, температуры и других факторов. При низких температурах среда почти упругая,

при повышенных температурах она значительно деформируется при малых напряжениях и обладает сильно выраженными реономными свойствами.

Деформированное состояние вязкоупругого тела характеризуется тензором деформации (ϵ), а его напряженное состояние — тензором напряжений (σ). Компоненты тензоров и законы сохранения подробно рассмотрены в п. 1.1. При нагружении внешними силовыми факторами состояние вязкоупругого тела характеризуется величинами ρ , ΔT , μ , (σ), (ϵ), компоненты которых подчинены соотношениям (1.1.1) или (1.1.4), (1.1.3), (1.1.6)—(1.1.8), образующим незамкнутую систему. Для записи полной системы уравнений необходимы физические соотношения, устанавливающие взаимную связь между компонентами тензора напряжений (σ) и тензора деформаций (ϵ) с учетом вязкоупругих свойств среды. Характерной особенностью поведения вязкоупругих сред является их малая деформируемость и сильное влияние времени деформирования на их поведение. Эта особенность оказывается определяющей при математической формулировке задач теории вязкоупругости. В общем случае, согласно постулатам макроскопической определенности и изотропии, физические соотношения имеют вид

$$\sigma_{ij} = F_{ij}[\epsilon_{kl}(\tau), \Delta T(\tau)]'_i, \text{ при } t_0 \leq \tau \leq t. \quad (1.6.1)$$

где F_{ij} — функционалы по времени от деформаций ϵ_{kl} и температуры ΔT .

В некоторой области исходного естественного состояния вязкоупругих сред имеет место линейность их физико-механических свойств, т. е. функционалы F_{ij} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} F_{ij}[\epsilon_{kl}^{(1)}(\tau) + \epsilon_{kl}^{(2)}(\tau)] &= F_{ij}[\epsilon_{kl}^{(1)}(\tau)] + F_{ij}[\epsilon_{kl}^{(2)}(\tau)]; \\ F_{ij}[a\epsilon_{kl}(\tau)] &= aF_{ij}[\epsilon_{kl}(\tau)]. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Для изотермических процессов деформирования изотропной вязкоупругой среды определяющие уравнения, соответствующие соотношениям (1.6.1) при условиях (1.6.2), имеют вид

$$D_{ij}(\sigma, t) = \int_0^t \tilde{\Gamma}(t, \tau) dD_{ij}(\epsilon, \tau); \quad \sigma(t) = 3 \int_0^t \tilde{\Gamma}_1(t, \tau) d\epsilon(\tau), \quad (1.6.3)$$

где $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_1$ — универсальные для данной среды функции, определяемые экспериментально.

Свойства вязкоупругих сред, описываемые уравнениями (1.6.3), инвариантны относительно изменения начала отсчета времени, что типично для сред, в которых происходят процессы старения и разупрочнения. В тех случаях, когда явлениями типа старения можно пренебречь, ядра $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_1$ интегральных опе-

раторов (1.6.3) имеют разностный характер и вместо соотношений (1.6.3) имеем

$$D_{ij}(\sigma, t) = \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) dD_{ij}(e, \tau);$$

$$\sigma(t) = 3 \int_0^t \tilde{\Gamma}_1(t-\tau) de(\tau), \quad (1.6.4)$$

где $\tilde{\Gamma}(t)$, $\tilde{\Gamma}_1(t)$ — соответственно функции сдвиговой и объемной релаксации.

Если функции $D_{ij}(e, \tau)$, $e(\tau)$ имеют при $0 \leq \tau \leq t$ интегрируемые производные $dD_{ij}(e)/d\tau$, $de/d\tau$, то уравнения (1.6.4) можно записать в форме

$$D_{ij}(\sigma, t) = \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) \frac{dD_{ij}(e)}{d\tau} d\tau;$$

$$\sigma(t) = 3 \int_0^t \tilde{\Gamma}_1(t-\tau) \frac{de}{d\tau} d\tau. \quad (1.6.5)$$

Проводя в первом соотношении (1.6.5) интегрирование по частям, находим

$$D_{ij}(\sigma, t) = \tilde{\Gamma}(0) D_{ij}(e, t) + \int_0^t \tilde{\Gamma}'(t-\tau) D_{ij}(e, \tau) d\tau, \quad (1.6.6)$$

где $\tilde{\Gamma}'(t) = d\tilde{\Gamma}/dt$.

Если потребовать, чтобы при малых временах соотношения (1.6.6) асимптотически переходили в закон Гука, то следует положить $\tilde{\Gamma}(0) = 2G$ и тогда уравнения (1.6.6) примут вид

$$D_{ij}(\sigma, t) = 2GD_{ij}(e, t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) D_{ij}(e, \tau) d\tau, \quad (1.6.7)$$

где $\Gamma(t) = -d\tilde{\Gamma}(t)/dt$.

Аналогичным образом второе соотношение (1.6.5) можно привести к виду

$$\sigma(t) = 3Ke - 3 \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) e(\tau) d\tau, \quad (1.6.8)$$

где $K = \tilde{\Gamma}_1(0)$; $\Gamma_1(t) = -d\tilde{\Gamma}_1(t)/dt$. Функции $\Gamma(t)$ и $\Gamma_1(t)$, входящие в (1.6.7) и (1.6.8), называются соответственно ядрами сдвиговой и объемной релаксации.

Из определяющих уравнений (1.6.7) и (1.6.8) легко получить физические соотношения

$$\sigma_{ij} = 2G [e_{ij} + 1,5(m-1)eg_{ij}] - \int_0^t \Gamma(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^t [3\Gamma_1(t-\tau) - \Gamma(t-\tau)e(\tau) d\tau] g_{ij},$$

а из определяющих уравнений (1.6.4) следуют физические соотношения

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) de_{ij}(\tau) + \int_0^t [3\tilde{\Gamma}_1(t-\tau) - \tilde{\Gamma}(t-\tau)de(\tau)] g_{ij}. \quad (1.6.9)$$

При достаточно общих предположениях определяющие уравнения (1.6.4) могут быть разрешены относительно деформаций и записаны в виде

$$D_{ij}(e, t) = \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) dD_{ij}(\sigma, \tau);$$

$$3e(t) = \int_0^t \tilde{R}_1(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad (1.6.10)$$

где $\tilde{R}(t)$ и $\tilde{R}_1(t)$ — соответственно функции сдвиговой и объемной ползучести.

Полагая, что функции $D_{ij}(\sigma, \tau)$ и $\sigma(\tau)$ имеют при $0 \leq \tau \leq t$ интегрируемые производные $dD_{ij}(\sigma)/d\tau$ и $d\sigma(\tau)/d\tau$, представим соотношения (1.6.10) в форме

$$D_{ij}(e, t) = \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) \frac{dD_{ij}(\sigma, \tau)}{d\tau} d\tau;$$

$$3e(t) = \int_0^t \tilde{R}_1(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

После интегрирования по частям имеем

$$D_{ij}(e, t) = \frac{1}{2G} D_{ij}(\sigma, t) + \int_0^t R(t-\tau) D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau;$$

$$e(t) = \frac{1}{3K} \sigma(t) + \frac{1}{3} \int_0^t R_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.6.11)$$

где $R(t) = d\tilde{R}(t)/dt$; $R_1(t) = d\tilde{R}_1(t)/dt$; $\tilde{R}(0) = 1/2G$; $\tilde{R}_1(0) = 1/K$, причем $\tilde{\Gamma}(0)\tilde{R}(0) = 1$; $\tilde{\Gamma}_1(0)\tilde{R}_1(0) = 1$.

Функции $R(t)$ и $R_1(t)$, входящие в выражения (1.6.11), именуются ядрами сдвиговой и объемной ползучести соответственно. Из определяющих уравнений (1.6.11) легко получить обратные физические соотношения

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\sigma g_{ij} \right] + \int_0^t R(t-\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \left[\frac{1}{3} R_1(t-\tau) - R(t-\tau) \right] \sigma(\tau) d\tau g_{ij},$$

а из определяющих уравнений (1.6.10) — физические соотношения

$$e_{ij} = \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) d\sigma_{ij}(\tau) + \\ + \int_0^t [\tilde{R}_1(t-\tau)/3 - \tilde{R}(t-\tau)] d\sigma(\tau) g_{ij}. \quad (1.6.12)$$

Следует заметить, что из четырех ядер Γ , R , Γ_1 и R_1 только два независимы; причем между ядрами существует взаимная связь, устанавливаемая соотношениями

$$\frac{1}{2G} \Gamma(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) R(\tau) d\tau = 2GR(t); \\ \frac{1}{K} \Gamma_1(t) + \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) R_1(\tau) d\tau = KR_1(t).$$

Функции $\tilde{R}(t)$, $\tilde{R}_1(t)$, $\tilde{\Gamma}(t)$ и $\tilde{\Gamma}_1(t)$, входящие в физические соотношения (1.6.12) и (1.6.9), не зависят от вида напряженного состояния и могут быть определены из простейших опытов. Например, функции ползучести $\tilde{R}(t)$ и $\tilde{R}_1(t)$ можно определить из простого растяжения, если будут замерены продольная и поперечная деформации образца. Действительно, пусть в испытаниях на ползучесть при простом растяжении ($\sigma_{11} = \sigma_1^0 h(t)$) измерены продольная e_{11} и поперечная $e_{22} = e_{33}$ деформации как функции времени. Здесь единичная функция Хевисайда

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Из физических соотношений (1.6.12) находим

$$3e_{11}(t) = \sigma_1^0 [\tilde{R}_1(t)/3 + 2\tilde{R}(t)]; \quad 3e_{22}(t) = \sigma_1^0 [\tilde{R}_1(t)/3 - \tilde{R}(t)],$$

откуда следует

$$\bar{R}(t) = \frac{1}{\sigma_0} [e_{11}(t) - e_{22}(t)]; \quad \bar{R}_1(t) = \frac{3}{\sigma_0} [e_{11}(t) + 2e_{22}(t)].$$

Таковы физические соотношения линейной теории вязкоупругости при изотермическом деформировании.

Известно, что физико-механические свойства вязкоупругих сред существенно зависят от температуры, поэтому наличие температурного поля требует изменения полученных физических соотношений. При их уточнении необходимо учитывать следующее.

Во-первых, в ряде случаев вязкость среды проявляется лишь по отношению к сдвиговым свойствам, а относительно объемных свойств среда ведет себя упруго. Тогда определяющие уравнения (1.6.10) и (1.6.11) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} D_{ij}(e, t) &= \int_0^t \bar{R}(t-\tau) dD_{ij}(\sigma, \tau); \quad e(t) = \frac{1}{3K} \sigma(t); \\ D_{ij}(e, t) &= \frac{1}{2G} D_{ij}(\sigma, t) + \int_0^t R(t-\tau) D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau; \\ e(t) &= \frac{1}{3K} \sigma(t). \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Простейшее обобщение определяющих уравнений (1.6.13) при наличии температурного поля $\Delta T(x^j, t)$ сводится к следующему: а) принимают, что объемная деформация есть сумма изменения объема σ/K , определяемого напряженным состоянием, и температурного расширения $3\alpha\Delta T$; б) считают, что параметры и функции, характеризующие свойства среды, зависят от температуры ΔT . При указанных условиях обобщение уравнений (1.6.13) дает систему

$$\begin{aligned} D_{ij}(e, t) &= \int_0^t \bar{R}(t-\tau, \Delta T) dD_{ij}(\sigma, \tau); \\ e(t) &= \frac{1}{3K} \sigma(t) + \alpha(T) \Delta T(t). \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

При независимо определенной температуре ΔT уравнениям (1.6.14) соответствуют физические соотношения

$$e_{ij} = \frac{\sigma}{3K} g_{ij} + \alpha \Delta T g_{ij} + \int_0^t \bar{R}(t-\tau, \Delta T) d(\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}).$$

Эксперименты показали, что для некоторых вязкоупругих сред в определенном диапазоне температур функция ползучести $\bar{R}(t, \Delta T) = \bar{R}(t')$, где $t' = t/a(\Delta T)$ — приведенное время;

$\alpha(\Delta T)$ — экспериментально определяемая функция температуры. В этом случае определяющие уравнения (1.6.14) принимают вид

$$(D_{ij} e, t') = \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') dD_{ij}(\sigma, \tau'); \quad e(t') = \frac{1}{3K} \sigma(t') + \alpha \Delta T(t')$$

и им соответствуют физические соотношения

$$e_{ij} = \frac{\sigma}{3K} g_{ij} + \alpha \Delta T g_{ij} + \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') d(\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \tau.$$

Во-вторых, при небольших изменениях температуры ΔT функции $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{R}$ в линейной по σ_{ij} , e_{ij} и ΔT теории не должны зависеть от ΔT , определяющие уравнения (1.6.4) и (1.6.10) сохраняются, если только среднюю деформацию e заменить на $e_T = e - \alpha \Delta T$. Тогда

$$D_{ij}(\sigma, t) = 2G D_{ij}(e, t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) D_{ij}(e, \tau) d\tau;$$

$$\sigma(t) = 3K(e - \alpha \Delta T) - 3 \int_0^t \Gamma_1(t - \tau)(e - \alpha \Delta T) \tau d\tau,$$

а соответствующие физические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & 2G[e_{ij} + 1,5(m-1)eg_{ij} - 0,5(3m-1)\alpha\Delta T g_{ij}] - \\ & - \int_0^t \Gamma(t - \tau) e_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^t [3\Gamma_1(t - \tau) - \Gamma(t - \tau)] e(\tau) d\tau g_{ij} + \\ & + 3 \int_0^t \Gamma_1(t - \tau) \alpha \Delta T d\tau g_{ij}. \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Итак, в простейших случаях установлены физические соотношения линейной теории термовязкоупругости, которые учитывают влияние температуры на состояние среды вязкоупругого тела при нагружении.

Постановка задач линейной теории вязкоупругости может быть реализована как в перемещениях, так и в напряжениях. При формулировке задач вязкоупругости в перемещениях (основные неизвестные ρ , ΔT , u_i) исходная система уравнений и соотношений состоит из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнения теплопроводности

$$\rho c \partial \Delta T / \partial t = \Lambda \nabla^2 \Delta T + W^*, \quad (1.6.16)$$

геометрических (1.1.4) и физических соотношений (1.6.15). С целью построения системы разрешающих уравнений подставим геометрические соотношения (1.1.4) в физические (1.6.15) и представим компоненты тензора напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} - \sigma_{ij}^{(g)} + 3\alpha\theta g_{ij}, \quad (1.6.17)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(e)} &= G [\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + (m-1) \nabla_k u^k g_{ij} - (3m-1) \alpha \Delta T g_{ij}]; \\ \sigma_{ij}^{(g)} &= 0,5 \int_0^t \Gamma(t-\tau) (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \tau d\tau + \\ &+ \int_0^t [\Gamma_1(t-\tau) - \Gamma(t-\tau)/3] \nabla_k u^k d\tau g_{ij}; \\ \theta &= \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \Delta T d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя (1.6.17) в уравнения движения (1.1.8), после некоторых преобразований находим уравнения движения в перемещениях

$$\frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = L_1(\nabla^2 u_i) + L_2(\nabla_i \nabla_k u^k) + \frac{F_i^*}{G}, \quad (1.6.18)$$

куда входят интегральные операторы

$$\begin{aligned} L_1(\dots) &= 1 - (1/2G) \int_0^t \Gamma(t-\tau) (\dots) d\tau; \\ L_2(\dots) &= m - (1/G) \int_0^t [\Gamma_1(t-\tau) + \Gamma(t-\tau)/6] (\dots) d\tau \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

и фиктивные объемные силы

$$F_i^* = F_i + 3\alpha \nabla_i [\theta - G(m-1/3) \Delta t]. \quad (1.6.20)$$

Система разрешающих уравнений с основными неизвестными ρ , ΔT , u_i формируется из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнения теплопроводности (1.6.16) и уравнений движения (1.6.18). Система содержит пять уравнений относительно пяти неизвестных и является замкнутой системой разрешающих уравнений линейной термовязкоупругости. Она разрешима при следующих начальных условиях ($t=0$):

$$\rho = \rho_0, \quad \Delta T = \Delta T_0, \quad u_i = u_{i0}, \quad v_i = v_{i0}, \quad (1.6.21)$$

а также граничных условиях $\rho(S) = \rho_S$ и (1.4.19) на поверхности S , (1.2.1) на части S_1 и (1.2.3) на части S_2 поверхности, эквивалентных условиям

$$N_1(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + N_2(\nabla_k u^k) = p_i^{(n)*}. \quad (1.6.22)$$

В уравнение (1.6.22) входят интегральные операторы

$$N_1(\dots) = \left[G(\dots) - 0,5 \int_0^t \Gamma(t-\tau)(\dots) d\tau \right] n^j;$$

$$N_2(\dots) = \left[G(m-1)(\dots) - \int_0^t [\Gamma_1(t-\tau) - \Gamma(t-\tau)/3](\dots) d\tau \right] n_i$$

и фиктивные поверхностные силы

$$p_i^{(n)*} = p_i^{(n)} + G\alpha \left[(3m-1)\Delta T - (3/G) \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)\Delta T d\tau \right] n_i.$$

Система разрешающих уравнений допускает ряд частных случаев. Так, при $\Delta T = 0$ исключается уравнение (1.6.16) и соответствующие начальные и граничные условия, т. е. образуется система уравнений для задач линейной вязкоупругости.

При квазистатической постановке задачи термовязкоупругости, когда пренебрегают силами инерции, имеем

$$L_1(\nabla^2 u_i) + L_2(\nabla_i \nabla_k u^k) + F_i^*/G = 0;$$

$$\nabla_i(\rho v^i) = 0; \quad W^* + \nabla^2 \Delta T = 0.$$

Этим уравнениям соответствуют граничные условия (1.2.1), (1.2.3) и (1.4.19).

При формулировке задач термовязкоупругости в напряжениях (основные неизвестные ρ , ΔT , v_i , σ_{ij}) исходная система уравнений и соотношений состоит из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнения теплопроводности (1.6.16), уравнений совместности деформаций (1.1.3), физических соотношений

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \sigma g_{ij} + 2G\alpha \Delta T g_{ij} \right] + e_{ij}^{(3)},$$

$$\text{где } e_{ij}^{(3)} = \int_0^t R(t-\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_0^t [R_1(t-\tau)/3 - R(t-\tau)] \sigma(\tau) d\tau g_{ij}.$$

Для построения системы разрешающих уравнений линейной термовязкоупругости в напряжениях подставим физические со-

отношения в уравнения совместности деформаций и получим уравнения

$$L_{\delta\beta}^{ij}(\sigma_{ij}) + L_{\delta\beta}(\sigma) + M_{\delta\alpha}(\Delta T) = 0, \quad (1.6.23)$$

в которые входят интегродифференциальные тензорные операторы

$$L_{\delta\beta}^{ij}(\dots) = \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_l \nabla_k \left[\frac{1}{2G}(\dots) + \int_0^t R(t-\tau)(\dots)_\tau d\tau \right];$$

$$L_{\delta\beta}(\dots) = \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta j}^k \nabla_l \nabla_k \left[-\frac{3(m-1)}{2G(3m-1)}(\dots) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left[\frac{1}{3} R_1(t-\tau) - R(t-\tau) \right] (\dots)_\tau d\tau \right];$$

$$M_{\delta\beta} = \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta j}^k \nabla_l \nabla_k (\dots).$$

Система разрешающих уравнений состоит из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнения теплопроводности (1.6.16) и уравнений совместности (1.6.23). Система замкнута, так как содержит 11 уравнений с 11 неизвестными ρ , ΔT , v_i и σ_{ij} .

Полученная система разрешающих уравнений линейной термовязкоупругости интегрируема при следующих начальных условиях ($t=0$):

$$\rho = \rho_0, \Delta T = \Delta T_0, v_i = v_{i0}, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (1.6.24)$$

и граничных условиях (1.2.1) на части S_1 , (1.2.3) на части S_2 , а также $\rho(S) = \rho_S$, (1.2.2) и (1.4.19) на всей поверхности S .

Система разрешающих уравнений допускает частные случаи. Например, при $\Delta T = 0$ имеем систему разрешающих уравнений линейной вязкоупругости, а при $\partial(\dots)/\partial t = 0$ и $W^* = 0$ — систему разрешающих уравнений квазистатической термовязкоупругости.

Необходимо отметить, что в приведенных системах разрешающих уравнений уравнение теплопроводности не зависит от других разрешающих уравнений, а потому решать его можно отдельно с учетом соответствующих начальных и граничных условий, т. е. распределение температуры в теле полагается известным.

В общей нелинейной теории вязкоупругости связи между компонентами тензора деформаций ϵ_{ij} и компонентами тензора

напряжений σ_{ij} представляются в виде суммы интегралов возрастающей кратности:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = & \int_0^t R_{ij k_1 l_1}^{(1)}(t, \tau) \sigma^{k_1 l_1}(\tau_1) d\tau_1 + \\ & + \int_0^t \int_0^t R_{ij k_1 l_1 k_2 l_2}^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2) \sigma^{k_1 l_1}(\tau_1) \sigma^{k_2 l_2}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ & \dots + \int_0^t \dots \int_0^t R_{ij k_1 l_1 \dots k_n l_n}^{(n)}(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \sigma^{k_1 l_1}(\tau_1) \dots \\ & \dots \sigma^{k_n l_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n + \dots \end{aligned} \quad (1.6.25)$$

В настоящее время разработаны некоторые нелинейные теории вязкоупругости, являющиеся частными случаями общей теории (1.6.25).

Перспективной представляется тензорно-линейная теория вязкоупругости для изотропных сред, основанная на фундаментальных постулатах механики деформируемых тел. В этой теории связь между девиаторами тензора деформаций (D_*) и тензора напряжений (D_*) представлена зависимостью

$$\begin{aligned} 2GD_{ij}(\varepsilon, t) = & D_{ij}(\sigma, t) + \int_0^t R(t, \tau) D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau \int_0^t \int_0^\xi R_3(t, \tau, \xi, \eta) D(\sigma, \xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

где R и R_3 — экспериментально определяемые ядра ползучести, причем ядро R_3 симметрично по ξ и η , т. е. $R_3(t, \tau, \xi, \eta) = R_3(t, \tau, \eta, \xi)$; $D(\sigma, \xi, \eta) = \Gamma_2(D_\sigma) = D_{ij}(\sigma, \xi) D^{ij}(\sigma, \eta)$.

Теорию, в которой сдвиговые свойства вязкоупругой среды определяются соотношениями (1.6.26), называют *квазилинейной квадратичной теорией вязкоупругости*. Решение интегральных уравнений (1.6.26) относительно компонент девиатора напряжений $D_{ij}(\sigma, t)$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} (1/2G) D_{ij}(\sigma, t) = & D_{ij}(\varepsilon, t) - \int_0^t \Gamma(t, \tau) D_{ij}(\varepsilon, \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t D_{ij}(\varepsilon, \tau) d\tau \int_0^t \int_0^\xi \Gamma_3(t, \tau, \xi, \eta) D(\varepsilon, \xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где Γ и Γ_3 — ядра релаксации; $D(\varepsilon, \xi, \eta) = \Gamma_2(D_\varepsilon) = D_{ij}(\varepsilon, \xi) \times \times D^{ij}(\varepsilon, \eta)$.

Для вязкоупругих сред, в которых явления типа старения отсутствуют, ядра ползучести R , R_3 и ядра релаксации Γ , Γ_3 определены равенствами

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= R(t-\tau); R_3(t, \tau, \xi, \eta) = R_3(t-\tau, t-\xi, t-\eta); \\ \Gamma(t, \tau) &= \Gamma(t-\tau); \Gamma_3(t, \tau, \xi, \eta) = \Gamma_3(t-\tau, t-\xi, t-\eta). \end{aligned}$$

Если учесть физически наиболее существенную главную часть ядра R_3 , то соотношения (1.6.26) преобразуются в уравнения главной квадратичной теории вязкоупругости, в которой связь между девиаторами тензора деформаций (D_e) и тензора напряжений (D_o) устанавливается соотношениями

$$\begin{aligned} 2GD_{ij}(\epsilon, t) &= [1 + A(t, D(\sigma))] D_{ij}(\sigma, t) + \\ &+ \int_0^t [R(t-\tau) - B(t, \tau, D(\sigma))] D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

Отметим, что здесь временной коэффициент модуля упругости и коэффициент нелинейности ядра ползучести, равные

$$\begin{aligned} A(t, D(\sigma)) &= KD(\sigma, t, t) + \\ &+ \int_0^t [R_1(t-\tau) D(\sigma, t, \tau) + R_2(t-\tau) D(\sigma, \tau, \tau)] d\tau; \\ B(t, \tau, D(\sigma)) &= R_3(t-\tau) D(\sigma, t, t) + \\ &+ R_4(t-\tau) D(\sigma, t, \tau) + R_5(t-\tau) D(\sigma, \tau, \tau), \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

выражаются через инвариант напряжений

$$D(\sigma, t, t) = \Gamma_2(D_o) = D^{ij}(\sigma, t) D_{ij}(\sigma, \tau)$$

и вторичные простые ядра R_l ($l=1, 2, \dots, 5$), а $K = \text{const}$.

Соотношения (1.6.27) и (1.6.28) допускают обобщение, приводящее к главной нелинейной теории вязкоупругости, в которой связь между девиаторами (D_e) и (D_o) имеет вид (1.6.27), а коэффициенты A и B определяются выражениями

$$A = \Phi_0[D(\sigma, t, t)] + \int_0^t \Phi[t-\tau, D(\sigma, t, \tau), D(\sigma, \tau, \tau)] d\tau;$$

$$B = \Psi[t-\tau, D(\sigma, t, t), D(\sigma, t, \tau), D(\sigma, \tau, \tau)],$$

где Φ_0 , Φ , Ψ — экспериментально определяемые функции.

В простейшем случае, когда $R_l = 0$, $D(\sigma, t, t) = 2\sigma_i^2(t)/3$, т. е.

$A=2K\sigma_i^2(t)/3$, $B=0$, соотношения (1.6.27) преобразуются к виду

$$2GD_{ij}(\epsilon, t) = [1 + 2K\sigma_i^2(t)] D_{ij}(\sigma, t) + \int_0^t R(t-\tau) D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau.$$

Полагая $R_2 \neq 0$, $R_5 \neq 0$, из (1.6.28) находим

$$\begin{aligned} A(t, D(\sigma)) &= \frac{2}{3} K\sigma_i^2(t) + \int_0^t R_2(t-\tau) \frac{2}{3} \sigma_i^2(\tau) d\tau; \\ B(t, \tau, D(\sigma)) &= R_5(t-\tau) \frac{2}{3} \sigma_i^2(\tau), \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

и тогда соотношения (1.6.27) принимают вид

$$\begin{aligned} 2GD_{ij}(\epsilon, t) &= [1 + A(t, D(\sigma))] D_{ij}(\sigma, t) + \\ &+ \int_0^t [R(t-\tau) - R_5(t-\tau) \frac{2}{3} \sigma_i^2(\tau)] D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

Если же в (1.6.29) положить $R_2=0$, а σ_i^2 заменить произвольными функциями аргумента σ_i , то (1.6.30) будет иметь вид

$$\begin{aligned} 2GD_{ij}(\epsilon, t) &= [1 + \omega_1(\sigma_i)] D_{ij}(\sigma, t) + \\ &+ \int_0^t [R(t-\tau) + R_5(t-\tau) \omega_2(\sigma_i)] D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.6.31)$$

где $\omega_1(\sigma_i)$ и $\omega_2(\sigma_i)$ — функции, не зависящие от вида напряженного состояния.

Используя условие подобия кривых ползучести, можно показать, что $\omega_1(\sigma_i) = \omega_2(\sigma_i) = f(\sigma_i) - 1$, $R = R_5$, после чего соотношение (1.6.31) принимает вид

$$\begin{aligned} 2GD_{ij}(\epsilon, t) &= f(\sigma_i) D_{ij}(\sigma, t) + \\ &+ \int_0^t R(t-\tau) f(\sigma_i(\tau)) D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Здесь $f(\sigma_i)$ определяют из опытов на нелинейную ползучесть по кривым ползучести в координатах $f(\sigma_i) - \sigma_i$ при различных значениях времени t , причем $f(\sigma_i) = 2G\epsilon_{12}(t) / (\sigma_{12}\varphi(t))$, где $\epsilon_{12}(t)$ и σ_{12} — соответственно деформация и напряжение в опыте на ползучесть при чистом сдвиге; $\varphi(t)$ — известная функция, характеризующая кривую ползучести; $f(\sigma_i) = 1$ при $\sigma_i \leq \sigma_i^*$.

Таким образом, (1.6.32) — первое определяющее уравнение простого варианта нелинейной теории вязкоупругости, оно яв

ляется тензорным и связывает компоненты девиаторов (D_e) и (D_σ) . Уравнение

$$3K\varepsilon = f_1(\sigma)\sigma + \int_0^t R^*(t-\tau) f_1(\sigma(\tau)) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.6.33)$$

— второе определяющее уравнение этой теории; это скалярное уравнение, оно связывает среднюю деформацию ε и среднее напряжение σ . Ядро объемной ползучести $R^*(t)$ определяют из опытов на линейную ползучесть при объемных деформациях, а функцию $f_1(\sigma)$ — аналогично тому, как была определена функция $f(\sigma_i)$.

Определяющим уравнениям (1.6.32) и (1.6.33) соответствуют физические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \frac{1}{2G} \left\{ \left[\sigma_{ij} + \left(\frac{2}{3m-1} f_1(\sigma) - 1 \right) \sigma g_{ij} \right] + \right. \\ & + \int_0^t R(t-\tau) f(\sigma_i(\tau)) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_0^t \left[R^*(t-\tau) \frac{2}{3m-1} f_1(\sigma(\tau)) - \right. \\ & \left. \left. - R(t-\tau) f(\sigma_i(\tau)) \right] \sigma(\tau) d\tau g_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

Если Γ — резольвента ядра R , а Γ^* — резольвента ядра R^* , то уравнения (1.6.32) и (1.6.33) разрешимы относительно напряжений:

$$\begin{aligned} D_{ij}(\sigma) = & \frac{2G}{f(\sigma_i)} \left[D_{ij}(\varepsilon) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) D_{ij}(\varepsilon, \tau) d\tau \right]; \\ \sigma = & \frac{3K}{f_1(\sigma)} \left[\varepsilon - \int_0^t \Gamma^*(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Этим определяющим уравнениям соответствуют физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \frac{2G}{f(\sigma_i)} \left\{ \varepsilon_{ij} + \left[\frac{3m-1}{2} \frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} - 1 \right] \varepsilon g_{ij} - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \int_0^t \left[\Gamma^*(t-\tau) \frac{3m-1}{3} \frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} - \Gamma(t-\tau) \right] \varepsilon(\tau) d\tau g_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

Задачи нелинейной вязкоупругости могут быть сформулированы в перемещениях и в напряжениях. При формулировке задачи в перемещениях (основные неизвестные ρ и u_i) исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнения

неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), геометрических соотношений (1.1.1), а также физических соотношений

$$\sigma_{ij} = \frac{2G}{f(\sigma_i)} \left[L_1(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{3} L_2(\varepsilon) g_{ij} \right],$$

в которые входят интегральные операторы

$$\begin{aligned} L_1(\dots) &= 1 \cdot (\dots) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)(\dots)_\tau d\tau; \\ L_2(\dots) &= \left(\frac{3m-1}{2} \frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} - 1 \right) (\dots) - \\ &- \int_0^t \left[\Gamma^*(t-\tau) \frac{3m-1}{2} \frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} - \Gamma(t-\tau)(\dots)_\tau d\tau. \end{aligned}$$

Для построения системы разрешающих уравнений подставим геометрические соотношения в физические и представим компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{G}{f(\sigma_i)} \left[L_1(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3} L_2(2\nabla_k u^k + g^{\delta\gamma} \nabla_\delta u^k \nabla_\gamma u_k) g_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (1.6.34)$$

Подставляя (1.6.34) в уравнения движения (1.1.8), записанные в виде $g^{j\alpha} \nabla_\alpha \sigma_{ij} + F_i = \rho dv_i/dt$, и учитывая равенства

$$\begin{aligned} g^{j\alpha} \nabla_\alpha L_1(\dots) &= L_1[g^{j\alpha} \nabla_\alpha(\dots)]; \\ g^{j\alpha} \nabla_\alpha L_2(\dots) &= L_2[g^{j\alpha} \nabla_\alpha(\dots)] + \frac{3m-1}{2} L_2'(\dots), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} L_2'(\dots) &= g^{j\alpha} \nabla_\alpha \left(\frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} \right) (\dots) - \\ &- \int_0^t \Gamma^*(t-\tau) g^{j\alpha} \nabla_\alpha \left(\frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} \right) (\dots)_\tau d\tau; \end{aligned}$$

где

$$g^{j\alpha} \nabla_\alpha \left(\frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} \right) = \frac{1}{f_1(\sigma)} \left[\frac{df(\sigma_i)}{d\sigma_i} g^{j\alpha} \nabla_\alpha(\sigma_i) - \frac{f(\sigma_i)}{f_1(\sigma)} \frac{df_1(\sigma)}{d\sigma} g^{j\alpha} \nabla_\alpha \sigma \right],$$

получим уравнения движения в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_S^2} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{F_i}{G} + \tilde{L}_1(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) + \\ &+ \tilde{L}_2(2\nabla_k u^k + g^{\delta\gamma} \nabla_\delta u^k \nabla_\gamma u_k), \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

в которые входят интегродифференциальные операторы

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1(\dots) &= \frac{1}{f(\sigma_i)} \left[L_1 g^{j\alpha} \nabla_\alpha (\dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{f(\sigma_i)} \frac{df(\sigma_i)}{d\sigma_i} g^{j\alpha} \nabla_\alpha (\sigma_i) L_1 (\dots) \right]; \\ \tilde{L}_2(\dots) &= \frac{1}{3} \frac{1}{f(\sigma_i)} \left[L_2 g^{j\alpha} \nabla_\alpha (\dots) + \frac{3m-1}{2} L_2' (\dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{f(\sigma_i)} \frac{df(\sigma_i)}{d\sigma_i} g^{j\alpha} \nabla_\alpha (\sigma_i) L_2 (\dots) \right] g_{ij}.\end{aligned}$$

Система разрешающих уравнений нелинейной вязкоупругости является замкнутой и состоит из уравнения неразрывности (1.1.7) и уравнения движения в перемещениях (1.6.35). Этой системе уравнений соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $u_i = u_i^0$, $v_i = v_i^0$ при $t = t_0$ и граничные условия $\rho(S) = \rho_S$, на поверхности S области D тела, а также (1.2.1) на части S_1 и (1.2.3) на части S_2 поверхности, которые с учетом (1.6.34) можно записать в виде

$$\begin{aligned}L_1(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) n^j + \\ + \frac{1}{3} L_2(2\nabla_k u^k + g^{\delta\gamma} \nabla_\delta u^k \nabla_\gamma u_k) n_i = \frac{p_i^{(n)}}{G} f(\sigma_i).\end{aligned}$$

При квазистатической постановке задачи вязкоупругости силы инерции не учитываются и система разрешающих уравнений состоит из трех уравнений равновесия в перемещениях:

$$\tilde{L}_1(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) + \tilde{L}_2(2\nabla_k u^k + g^{\delta\gamma} \nabla_\delta u^k \nabla_\gamma u_k) + F_i/G = 0$$

приведенными выше граничными условиями.

Если задачи нелинейной вязкоупругости формулировать в напряжениях (основные неизвестные ρ , v_i и σ_{ij}), то исходная система уравнений и соотношений состоит из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнений совместности деформаций (1.1.3), физических соотношений

$$\varepsilon_{ij} = [M_1(\sigma_{ij}) + M_2(\sigma) g_{ij}] / 2G,$$

которые входят интегральные операторы

$$\begin{aligned}M_1(\dots) &= 1 \cdot (\dots) + \int_0^t R(t-\tau) f(\sigma_i(\tau)) (\dots)_\tau d\tau; \\ M_2(\dots) &= \left[\frac{2}{3m-1} f_1(\sigma) - 1 \right] (\dots) + \\ &+ \int_0^t \left[R^*(t-\tau) \frac{2}{3m-1} f_1(\sigma(\tau)) - R(t-\tau) f(\sigma_i(\tau)) \right] (\dots)_\tau d\tau.\end{aligned}$$

Для построения системы разрешающих уравнений подставим физические соотношения в уравнения совместности деформаций (1.1.3). В результате получим соотношения

$$L_{\delta\beta}^{ij}(\sigma_{ij}) + L_{\delta\beta}(\sigma) = 0, \quad (1.6.36)$$

в которые входят интегродифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_{\delta\beta}^{ij}(\sigma_{ij}) &= \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} [M_1 \nabla_l \nabla_k (\sigma_{ij}) + M_{1l} \nabla_k (\sigma_{ij}) + \\ &+ M'_{1k} \nabla_l (\sigma_{ij}) + M''_{1kl} (\sigma_{ij})]; \\ L_{\delta\beta}(\sigma) &= \Lambda_{\delta}^{ij} \Lambda_{\beta}^{kl} [M_2 \nabla_l \nabla_k (\sigma) + M'_{2l} \nabla_k (\sigma) + M'_{2k} \nabla_l (\sigma) + M''_{2kl} (\sigma)], \end{aligned}$$

содержащие производные операторы

$$\begin{aligned} M_{1k}^1(\dots) &= \int_0^t R(t-\tau) \chi(\sigma_i(\tau))(\dots)_{\tau} d\tau; \\ M_{1kl}''(\dots) &= \int_0^t R(t-\tau) \chi'(\sigma_i(\tau))(\dots)_{\tau} d\tau; \\ M_{2k}'(\dots) &= \frac{2}{3m-1} \chi_1(\sigma)(\dots) + \\ &+ \int_0^t \left[R^*(t-\tau) \frac{2}{3m-1} \chi_1(\sigma(\tau)) - R(t-\tau) \chi(\sigma_i(\tau)) \right] (\dots)_{\tau} d\tau; \\ M_{2kl}'(\dots) &= \frac{2}{3m-1} \chi_1'(\sigma)(\dots) + \\ &+ \int_0^t \left[R^*(t-\tau) \frac{2}{3m-1} \chi_1'(\sigma(\tau)) - R(t-\tau) \chi'(\sigma_i(\tau)) \right] (\dots)_{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi(\sigma_i) &= f'(\sigma_i) \nabla_k (\sigma_i); \\ \chi'(\sigma_i) &= f''(\sigma_i) \nabla_k (\sigma_i) \nabla_l (\sigma_i) + f'(\sigma_i) \nabla_l \nabla_k (\sigma_i); \\ \chi_1(\sigma) &= f_1'(\sigma) \nabla_k (\sigma); \quad \chi_1'(\sigma) = f_1''(\sigma) \nabla_k (\sigma) \nabla_l (\sigma) + f_1'(\sigma) \nabla_l \nabla_k (\sigma). \end{aligned}$$

В систему разрешающих уравнений входят уравнение неразрывности (1.1.7), уравнения движения (1.1.8) и уравнения совместности деформаций (1.6.36), т. е. всего 10 уравнений относительно 10 неизвестных. Этой системе уравнений соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $v_i = v_{i0}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ при $t = 0$ граничные условия (1.2.1) на S_1 ; (1.2.3) на S_2 , а также $\rho(S) = \rho_S$ и (1.2.2) на поверхности S области D тела.

Для квазистатических задач вязкоупругости уравнения движения переходят в уравнения равновесия $g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij} + F_i = 0$, которые с уравнениями совместности (1.6.36) образуют систему

разрешающих уравнений при соответствующих граничных условиях.

Успешному решению поставленных задач линейной и нелинейной теории вязкоупругости во многом содействует применение общих теорем теории вязкоупругости.

Теорема взаимности теории вязкоупругости утверждает: изотропное вязкоупругое тело, подвергнутое двум различным состояниям нагружения с соответствующими объемными F^i , $\bar{F}^i$ и поверхностными $p_{(n)}^i$, $\bar{p}_{(n)}^i$ силами и перемещениями u_i , $\tilde{u}_i$, имеет поле переменных, которое удовлетворяет соотношению

$$\int_S p_{(n)}^i d\tilde{u}_i dS + \int_V F^i d\tilde{u}_i dV = \int_S \bar{p}_{(n)}^i du_i dS + \int_V \bar{F}^i du_i dV.$$

Перейдем теперь к формулировке вариационных теорем теории вязкоупругости. Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \int_V [0,5\tilde{\Gamma}^{ijkl} de_{ij} de_{kl} - \sigma^{ij} de_{ij} - (\nabla_j \sigma^{ij} + F^i) du_i] dV + \\ & + \int_{S_1} \sigma^{ij} n_j du_{is} dS + \int_{S_2} (\sigma^{ij} n_j - p_{(n)}^i) du_i dS, \end{aligned}$$

для которого справедлива *первая вариационная теорема*: для функционала Ω_1 $\delta\Omega_1=0$ тогда и только тогда, когда удовлетворяются все уравнения поля

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0; \quad e_{ij} = 0,5(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i);$$

$$\sigma^{ij} = \tilde{\Gamma}^{ijkl} de_{kl} = \int_0^t \tilde{\Gamma}^{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} e_{kl}(\tau) d\tau$$

граничные условия (1.2.1) на части S_1 и (1.2.3) на части S_2 поверхности.

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & 0,5 \int_V [0,5\tilde{R}_{ijkl} d\sigma^{ij} d\sigma^{kl} - 0,5\sigma^{ij} d(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + F^i du_i] dV + \\ & + \int_{S_1} \sigma^{ij} n_j d(u_i - u_{is}) dS + \int_{S_2} p_{(n)}^i du_i dS. \end{aligned}$$

для которого справедлива *вторая вариационная теорема*: для функционала Ω_2 $\delta\Omega_2=0$ тогда и только тогда, когда удовлетворяются уравнения поля

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0; \quad e_{ij} = 0,5 (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i);$$

$$e_{ij} = \tilde{R}_{ijkl} d\sigma^{kl} = \int_0^t \tilde{R}_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma^{kl}(\tau) d\tau$$

и граничные условия (1.2.1) на S_1 и (1.2.3) на S_2 .

Первая и вторая вариационные теоремы дают строгое обоснование на теорию вязкоупругости приближенных методов теории упругости, основанных на вариационных теоремах. Укажем еще две вариационные теоремы, имеющие ограниченное применение, поскольку требуют допущения о разделении пространственных и временных переменных, т. е. возможное представление

$$\begin{aligned} u_i(x^k, t) &= \dot{u}_i(x^k) u(t); \quad e_{ij}(x^k, t) = \dot{e}_{ij}(x^k) u(t); \\ \sigma_{ij}(x^k, t) &= \dot{\sigma}_{ij}(x^k) \kappa(t). \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Необходимое условие такого представления — постоянство коэффициента Пуассона вязкоупругого тела $\nu(t) = \nu = \text{const}$. Вследствие этого условия отношение функций релаксации $\tilde{\Gamma}(t)/\tilde{\Gamma}_1(t) = (1+\nu)/(1-2\nu) = \text{const}$, а две изотропные функции ползучести $\tilde{R}(t)$ и $\tilde{R}_1(t)$ должны быть связаны зависимостями $\tilde{R}_1(t)/\tilde{R}(t) = (1-2\nu)/(1+\nu)$.

На поверхности S области D тела перемещения и напряжения должны иметь форму, определяемую на части S_1 и S_2 соответственно следующими условиями:

$$u_i(x^k, t) = \dot{u}_{is}(x^k) u(t); \quad \sigma^{ij}(x^k, t) n_j(x^k) = \dot{p}_{(n)}^i(x^k) \kappa(t),$$

причем $u(t)$ и $\kappa(t)$ здесь связаны зависимостью

$$\kappa(t) = m \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u(\tau) d\tau,$$

где $m = \text{const}$. Ограничения, накладываемые на физико-механические свойства, сводятся к тому, что среда считается изотропной, а вязкоупругий коэффициент Пуассона — действительной константой среды.

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= 2 \int_0^t \int_V \left[-\sigma^{ij}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} e_{ij}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^{ij}(\tau) \frac{1}{2} \left(\nabla_i \frac{\partial u_j(\tau)}{\partial \tau} + \nabla_j \frac{\partial u_i(\tau)}{\partial \tau} \right) - F^i(\tau) \frac{\partial u_i(\tau)}{\partial \tau} \right] dV d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial e(\tau)}{\partial \tau} \int_0^\tau \tilde{\Gamma}(\tau-\eta) \frac{\partial e(\eta)}{\partial \eta} d\eta + \\
& + \frac{\partial}{\partial \tau} D^{ij}(e, \tau) \int_0^\tau \tilde{\Gamma}(\tau-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} D_{ij}(e, \eta) d\eta \Big] d\tau dV - \\
& - 2 \int_{S_1} \int_0^t p_{(n)}^i(\tau) \frac{\partial u_i(\tau)}{\partial \tau} d\tau dS - 2 \int_{S_1} \int_0^t \sigma^{ij}(\tau) n_j \left(\frac{\partial u_i(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial u_{iS}(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau dS
\end{aligned}$$

возьмем первую вариацию от этого функционала, учитывая при этом представление (1.6.37). Воспользовавшись теоремой строгадского—Гаусса, после некоторых преобразований получим вариации

$$\begin{aligned}
\delta \Omega_3 = & 2 \int_V \int_0^t \left[\left(-\dot{e}_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_i \dot{u}_j + \nabla_j \dot{u}_i) \right) \delta \sigma^{ij} + \delta \sigma^{ij} + \right. \\
& + \delta \dot{D}_{ij}(e) \dot{u}(\tau) \left(-D^{ij}(\sigma, \tau) + 2 \int_0^\tau \tilde{\Gamma}(\tau-\eta) \dot{D}^{ij}(e, \eta) d\eta \right) + \\
& + \delta \dot{e} \dot{u}(\tau) \left(-\sigma(\tau) + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^\tau \tilde{\Gamma}(\tau-\eta) \dot{e}(\eta) d\eta \right) - \\
& - (\nabla_j \sigma^{ij} + F^i) \delta \dot{u}_i \Big] d\tau dV - 2 \int_{S_1} \int_0^t (p_{(n)}^i - \sigma^{ij} n_j) \delta \dot{u}_i(\tau) dS - \\
& - 2 \int_{S_1} \int_0^t \delta \sigma^{ij} n_j (\dot{u}_i - \dot{u}_{iS}) d\tau dS.
\end{aligned}$$

здесь точка сверху означает дифференцирование по времени. Приведенное выражение вариации $\delta \Omega_3$ показывает, что уравнения равновесия (1.1.6), геометрические (1.1.4) и физические соотношения

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} e_{ij}(\tau) d\tau; \\
D_{ij}(\sigma) &= 2 \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} D_{ij}(e, \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

а также граничные условия (1.2.1) на поверхности S_1 и (1.2.3) δ_2 будут выполнены, если $\delta \Omega_3 = 0$. Этот результат соответствует третьей вариационной теореме: для краевых задач теории

вязкоупругости, решение которых допускает представле-
(1.6.37), первая вариация функционала $\delta\Omega_3=0$ тогда и только
тогда, когда удовлетворяются уравнения поля и граничные
условия. При этом допускается варьирование только зависящих
от координат частей переменных поля. Аналогично формулируется
и четвертая вариационная теорема.

Доказанные вариационные теоремы теории вязкоупругости
устанавливают условия стационарности функционалов. При определенных
ограничениях можно показать, что некоторые функционалы имеют
минимальные значения. Более «сильные» теоремы минимума, которые
будут рассмотрены ниже, связаны с двумя последними вариационными
теоремами, так как краевые задачи вязкоупругости описываются
зависимостями, соответствующими этим теоремам, причем компоненты
тензоров напряжений и деформаций, а также вектора перемещений
представляют собой непрерывные и непрерывно дифференцируемые
функции.

Первая теорема: для краевой задачи теории вязкоупругости,
которая допускает представление решения в виде (1.6.37), определяются
как допустимые только те состояния, в которых перемещения
удовлетворяют граничным условиям, в перемещениях отличаются
от перемещений, получаемых в решении, только частью, зависящей
от координат, но не частью, зависящей от времени. Из допустимых
состояний только одно, которое является решением краевой задачи,
приводит функционал

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 = & \int_V \int_0^t \left[3\dot{e}(\tau) \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^\tau \bar{\Gamma}(\tau-\eta) \dot{e}(\eta) d\eta - 2F^i(\tau) \dot{u}_i(\tau) + \right. \\ & \left. + 2\dot{D}^{ij}(e, \tau) \int_0^\tau \bar{\Gamma}(\tau-\eta) \dot{D}_{ij}(e, \eta) d\eta \right] d\tau dV - \\ & - 2 \int_{S_1} \int_0^t p_{(n)}^i(\tau) \dot{u}_i(\tau) d\tau dS \end{aligned}$$

к минимуму по сравнению со значениями $\tilde{\Omega}_1^*$, найденными для
любого другого допустимого состояния, если для рассматриваемого
процесса выполняется условие

$$\int_0^t \sigma^{ij}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} e_{ij}(\tau) d\tau \geq 0.$$

Теорема справедлива для всех сред, для которых произведенная
работа неотрицательна (выполняется для вязкоупругих сред).

Следствием этой теоремы служит *теорема о минимуме полной энергии* при деформации вязкоупругого тела: действительному напряженно-деформированному состоянию вязкоупругого тела при нагружении соответствует минимум полной энергии:

$$\Omega = U - \int_V F^i u_i dV - \int_S p_{(n)}^i u_i dS,$$

где

$$\begin{aligned} U = \int_V \Phi(e_{ij}) dV = \int_V \left\{ 2G \int_0^{e_{ij}} [e^{ij} + 1,5(m-1)eg^{ij} - \right. \\ \left. - 0,5(3m-1)\alpha\Delta T g^{ij}] de_{ij} - \int_0^{e_{ij}} \left[\int_0^t \Gamma(t-\tau) e^{ij}(\tau) d\tau - \right. \right. \\ \left. - \int_0^t (3\Gamma_1(t-\tau) - \Gamma(t-\tau)) e(\tau) g^{ij} + \right. \\ \left. + 3 \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \alpha\Delta T(\tau) d\tau g^{ij} \right] de_{ij} \Big\} dV. \end{aligned}$$

Вторая теорема утверждает: для краевой задачи теории вязкоупругости, которая допускает представление решения в форме 1.6.37), определяются как допустимые только такие состояния, которых напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия 1.1.6), граничным условиям (1.2.3) и отличаются от полученных в решении состояний только зависящей от координат частью. Из этих допустимых состояний одно, которое является решением краевой задачи, приводит к минимуму функционала

$$\tilde{\Omega}_2 = \int_V \int_0^t \left(\rho \frac{\partial W(\tau)}{\partial \tau} - P(\tau) \right) d\tau dV - 2 \int_{S_1} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma^{ij}(\tau) n_j u_{iS}(\tau) d\tau dS,$$

где

$$\begin{aligned} \rho W(\tau) = \frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)} \int_0^t \int_0^t \tilde{R}(2t-\tau-\eta) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \sigma(\eta)}{\partial \eta} d\tau d\eta + \\ + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^t \tilde{R}(2t-\tau-\eta) \frac{\partial}{\partial \tau} D^{ij}(\sigma, \tau) \frac{\partial}{\partial \eta} D_{ij}(\sigma, \eta) d\tau d\eta; \\ P(\tau) = \frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}(2t-\tau-\eta) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \sigma(\eta)}{\partial \eta} d\tau d\eta + \\ + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}(2t-\tau-\eta) \frac{\partial}{\partial \tau} D^{ij}(\sigma, \tau) \frac{\partial}{\partial \eta} D_{ij}(\sigma, \tau) d\tau d\eta, \end{aligned}$$

по сравнению со значениями $\tilde{\Omega}_2^*$, найденными для любого допустимого состояния, если для рассматриваемого процесса

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_{ij}(\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \geq 0.$$

Выполнение этого условия для реальных вязкоупругих сред связано с определенными ограничениями на процесс деформирования, поэтому применимость теоремы ограничена, однако существуют такие частные условия, при которых теорема применима.

Следствием второй теоремы является *теорема о минимуме полной дополнительной работы* при деформации вязкоупругого тела: действительному напряженно-деформированному состоянию вязкоупругого тела при нагружении соответствует минимум полной дополнительной работы

$$\tilde{R} = R - \int_S u_{iS} n_j \sigma_{ij} dS,$$

$$\begin{aligned} R &= \int_V \bar{\Phi}(\sigma_{ij}) dV = \int_V \int_0^{\sigma_{ij}} e_{ij} d\sigma_{ij} = \\ &= \int_V \left\{ \frac{1}{2G} \int_0^{\sigma_{ij}} \left(\sigma_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\sigma g_{ij} + 2G\alpha\Delta T g_{ij} \right) d\sigma_{ij} + \right. \\ &+ \int_0^{\sigma_{ij}} \left[\int_0^t R(t-\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \right. \\ &\left. \left. + \int_0^t \left(\frac{1}{3} R_1(t-\tau) - R(t-\tau) \right) \sigma(\tau) d\tau g_{ij} \right] d\sigma_{ij} \right\} dV. \end{aligned}$$

Таковы основные общие теоремы вязкоупругости, которые будут использованы при построении решений краевых задач теории вязкоупругости.

Теория вязкопластичности изучает поведение среды, обладающей явно выраженными свойствами вязкости и пластичности. Поведение такой среды характеризуется определяющими уравнениями

$$D_{ij}(\sigma) = 2\eta D_{ij}(\dot{\epsilon}); \quad \sigma = -p + \lambda \dot{\epsilon}, \quad (1.6.38)$$

причем $\eta = \mu + \tau_i/\dot{\gamma}_i$, а зависимость $\tau_i(\dot{\gamma}_i)$ предполагается известной. Определяющим уравнениям (1.6.39) при нагрузке соответствуют физические соотношения

$$\sigma_{ij} = 2\eta[\dot{\epsilon}_{ij} + (\lambda/2\eta - 1)\dot{\epsilon}g_{ij}] - pg_{ij}. \quad (1.6.39)$$

Обратные определяющие уравнения имеют вид

$$D_{ij}(\dot{\epsilon}) = D_{ij}(\sigma)/2\eta; \quad \dot{\epsilon} = (\sigma + p)/\lambda,$$

им соответствуют физические соотношения

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta} \left[\sigma_{ij} + \left(\frac{2\eta}{\lambda} - 1 \right) \sigma g_{ij} + \frac{2\eta}{\lambda} p g_{ij} \right]. \quad (1.6.40)$$

Очевидно, что при $\eta = \mu$ физические соотношения (1.6.39) и (1.6.40) справедливы для вязкой жидкости.

Полагая неизвестными ρ , σ и v_i ($i=1, 2, 3$), исходную систему уравнений и соотношений сформируем из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), кинематических соотношений (1.1.2) и физических соотношений (1.6.39). Для построения системы разрешающих уравнений объединим кинематические и физические соотношения:

$$\sigma_{ij} = \sigma g_{ij} + \eta (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + (\lambda/3 + 2\eta/3) \nabla_k v^k g_{ij}$$

и подставим их в уравнения движения. Тогда

$$\rho dv_i/dt - F_i - \nabla_i \sigma = \eta \nabla^2 v_i + (\lambda + \mu) \nabla_i (\nabla_k v^k)/3 + \\ + \nabla_\alpha (\eta) D_i^\alpha (\dot{\epsilon}).$$

Система разрешающих уравнений включает уравнение неразрывности (1.1.7), уравнения движения (1.1.8), уравнение сжимаемости $\sigma = \sigma(\rho) = \sigma(\epsilon)$ и является замкнутой относительно указанных неизвестных. Системе разрешающих уравнений соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $\sigma = \sigma_0$, $v_i = v_{i0}$ при $t = 0$ и граничные условия (1.2.2) или (1.2.3),

$$\rho_i^{(n)} - \sigma n_i = [\eta (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) n^j + (\lambda/3 - 2\eta/3) \nabla_k v^k n_i]_S$$

на поверхности S области D .

Задачу теории вязкопластичности можно поставить также в напряжениях, принимая за основные неизвестные ρ , p , v_i , σ_{ij} . В этом случае исходная система уравнений и соотношений формируется из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнений совместности скоростей деформаций (1.1.3), физических соотношений (1.6.40) и уравнения состояния $p = p(\rho)$. Для исключения неизвестных ϵ_{ij} и записи уравнений совместности в напряжениях подставим физические соотношения (1.6.40) в уравнения совместности. В результате получим

$$\Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{kl} \nabla_i \nabla_k \left\{ \frac{1}{2\eta} \left[\sigma_{lj} + \left(\frac{2\eta}{\lambda} - 1 \right) \sigma g_{lj} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{kl} \nabla_i \nabla_k = 0. \quad (1.6.41)$$

Система разрешающих уравнений задачи теории вязкопластичности в напряжениях состоит из уравнения неразрывности (1.1.7), уравнений движения (1.1.8), уравнения состояния, уравнений совместности скоростей деформаций (1.6.41). Этой системе уравнений соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $p = p_0$, $v_i = v_{i0}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ при $t = 0$, а также граничные условия, заданные на поверхности S области D : $\rho(S) = \rho_s$, $v_i(S) = v_{is}$, $p(S) = p_s$, $\sigma_{ij}(S)n^j = p_i^{(n)}$.

Таковы формулировки задач теории вязкопластичности в скоростях деформаций и в напряжениях.

ГЛАВА 2

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ, ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

2.1. Решения разрешающих уравнений механики жидкости и газа

Система разрешающих уравнений для идеальной жидкости (газа) является системой дифференциальных уравнений (1.3.17) в частных производных, в которой последнее уравнение может быть заменено уравнением распространения теплоты

$$\rho c_v dT/dt - \nabla_i (\lambda g^{ia} \nabla_a T) + p \nabla_i v^i = 0.$$

Эта система нелинейная и имеет весьма общий характер. Содержательное приложение приведенных уравнений к решению ряда задач возможно в том случае, если на рассматриваемые движения жидкости наложить дополнительные условия. Например, в п. 1.3 показано, что условие потенциальности движения (безвихревые движения) приводит для несжимаемой однородной жидкости к потенциалу скоростей ϕ , являющемуся гармонической функцией, определяемой уравнением Лапласа (1.3.10) и соответствующими граничными условиями задачи. Уравнениям движения Эйлера эквивалентен интеграл Коши—Лагранжа (1.3.11), но при установившемся движении $f(t) = \text{const}$ и интеграл Коши—Лагранжа переходит в интеграл Бернулли (1.3.12). Однако и в этом случае гармонические функции столь разнообразны, что отыскание той из них, которая отвечает условиям задачи, затруднительно, поэтому очень немногие пространственные задачи механики идеальной жидкости (газа) удается решить до конца. Все это вызывает необходимость ограничивать класс движений и выбирать наиболее характерные, например плоские и осесимметричные движения.

Плоским называется такое движение жидкости, для которого существует направление $\mathbf{n}$ такое, что ему перпендикулярны все скорости поля, причем во всех плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{n}$, картина поля одинакова. Такое движение описывается полем скоростей в одной из плоскостей, перпендикулярной $\mathbf{n}$. Пусть направление $\mathbf{n}$ совпадает с направлением оси z декартовой системы координат (x, y, z) , тогда, обозначив через v_x, v_y компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ по осям x и y , приходим к условиям несжимаемости и потенциальности:

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0 \quad \text{и} \quad \partial v_x / \partial y - \partial v_y / \partial x = 0. \quad (2.1.1)$$

При этом потенциал скоростей φ будет гармонической функцией вида

$$\nabla^2 \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0,$$

а компоненты вектора скорости равны

$$v_x = \partial \varphi / \partial x; \quad v_y = \partial \varphi / \partial y. \quad (2.1.2)$$

Из уравнений (2.1.1) устанавливаем, что выражение $-v_y dx + v_x dy$ является дифференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$, если принять

$$v_x = \partial \psi / \partial y; \quad v_y = -\partial \psi / \partial x, \quad (2.1.3)$$

причем направление касательной к линии $\psi(x, y) = \text{const}$ совпадает с направлением вектора скорости и поэтому линии уровня ($\psi = \text{const}$) будут векторными линиями поля скоростей. При установившемся (стационарном) движении эти линии совпадают с траекториями движущихся частиц и называются линиями тока, а $\psi(x, y)$ есть функция тока. Из уравнений (2.1.1) видно, что ψ — гармоническая функция, а сравнение (2.1.2) и (2.1.3) показывает, что функции ψ и φ — сопряженные, т. е. $\partial \varphi / \partial x = \partial \psi / \partial y$; $\partial \varphi / \partial y = -\partial \psi / \partial x$. Совокупность функций φ и ψ образует аналитическую функцию $f = \varphi + i\psi$, называемую комплексным потенциалом.

При наличии завихренности, характеризуемой скалярной величиной

$$\omega = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y \quad (2.1.4)$$

в предположении стационарности движения, подставляя $\omega = \omega e_z$ в уравнение Лэмба (1.3.13), приходим к двум скалярным равенствам $\omega v_x = \partial H / \partial x$ и $-\omega v_y = \partial H / \partial y$. Вводя функцию тока по формулам (2.1.3) и приравнявая смешанные производные функции H , получаем тождество

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

откуда следует, что $\omega = \omega(\psi)$, причем вид функции ω предполагается известным. Подставляя функцию тока в выражение (2.1.4), приходим к уравнению

$$\nabla^2 \psi = \partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 = -\omega(\psi).$$

Движение называется *осесимметричным*, если все векторы скорости лежат в полуплоскостях, проходящих через некоторую прямую, называемую осью симметрии, причем во всех полуплоскостях картина поля одинакова. Принимая ось z цилиндрической системы координат (r, θ, z) за ось симметрии и обозначая через v_r и v_z компоненты вектора скорости, запишем условия несжимаемости и потенциальности:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0. \quad (2.1.5)$$

Из второго уравнения (2.1.5) следует, что выражение $v_z dz + v_r dr$ есть дифференциал функции φ , называемой потенциалом скоростей, причем

$$v_r = \partial\varphi/\partial r; \quad v_z = \partial\varphi/\partial z. \quad (2.1.6)$$

Из первого уравнения (2.1.5) видно, что φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

и является гармонической функцией.

Первое уравнение (2.1.5) указывает на то, что выражение $-rv_r dz + rv_z dr$ есть дифференциал функции ψ , называемой функцией тока, причем $v_r = -(1/r) \partial\psi/\partial z$; $v_z = (1/r) \partial\psi/\partial r$, а линии уровня ($\psi = \text{const}$) будут линиями тока. Функция тока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0,$$

которое не является уравнением Лапласа, а потому функция ψ — негармоническая. Функция тока ψ и потенциал скоростей φ взаимосвязаны соотношениями $r \partial\varphi/\partial z = \partial\psi/\partial r$; $r \partial\psi/\partial r = -\partial\varphi/\partial z$.

При наличии завихренности ω в осесимметричном движении рассуждения, аналогичные ранее приведенным, приводят к тождеству

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r} \right) \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

из которого следует, что $\omega = r\omega_1(\psi)$. Здесь $\omega_1(\psi)$ — некоторая функция, причем функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = -r^2\omega_1(\psi).$$

Итак, при безвихревом движении задача механики идеальной несжимаемой жидкости (газа) сводится к решению уравнения Лапласа с учетом некоторых дополнительных условий, которые отражают специфику задачи. Дополнительными являются начальные и граничные условия, причем начальные условия необходимы только при неустановившемся движении.

Начальные условия сводятся к заданию в начальный момент времени t_0 области D_0 , занятой жидкостью, и распределения потенциала скоростей φ в этой области $\varphi(r, 0) = f(r)$, где $f(r)$ — гармоническая функция в области D_0 .

Граничные условия задаются на поверхности S_t области течения D_t для любого момента времени $t \geq t_0$. Во многих задачах S_t делится на три части: жесткая неподвижная граница S_1 , жесткая подвижная граница S_2 , свободная граница S_3 .

При неустановившемся движении граничные условия на твердой неподвижной границе $S_1(\mathbf{r})=0$ есть заданная функция

$$\partial\varphi/\partial n=0 \text{ или } g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j S_1=0. \quad (2.1.7)$$

На жесткой подвижной границе $S_2(\mathbf{r}, t)=0$ задается функция

$$\partial S_2/\partial t + g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j S_2=0. \quad (2.1.8)$$

Свободной границе S_3 соответствуют граничные условия (2.1.7) или (2.1.8) как кинематические с неизвестной функцией S_3 и дополнительное граничное условие

$$\partial\varphi/\partial t + 0,5g^{ij}\nabla_i\varphi - \vartheta/\rho = \text{const}, \quad (2.1.9)$$

где ϑ — потенциал внешних сил, действующих на границу.

При установившемся движении граница не зависит от времени t , поэтому на жестких (известных) участках должно выполняться граничное условие (2.1.7), а на свободных участках — условие (2.1.7) с неизвестной функцией S и условие (2.1.9), в котором отсутствует $\partial\varphi/\partial t$.

С учетом изложенного, рассмотрим подробнее осесимметричное установившееся движение идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах (r, θ, z) , для которого при отсутствии источников и стоков справедливы уравнения

$$r\partial\varphi/\partial z = \partial\psi/\partial r; \quad r\partial\varphi/\partial r = -\partial\psi/\partial z. \quad (2.1.10)$$

Уравнение Лапласа для потенциала скоростей φ запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0. \quad (2.1.11)$$

Для каждого решения этого уравнения выражение $Adz + Bdr$, где $A = -r\partial\varphi/\partial r$, $B = r\partial\varphi/\partial z$, удовлетворяет условию полного дифференциала: $\partial A/\partial r = \partial B/\partial z$. Единственными гармоническими функциями, зависящими только от r и z , будут соответственно функции $\varphi = \log r + b$ — линейная функция и $\varphi = az + b$, где a, b — постоянные; далее в решениях по возрастающей сложности идут гармонические полиномы любой степени. Подбирая к φ сопряженные функции, получаем простейшие векторные функции вида

$$\xi^1 = \log r - iz; \quad \xi^2 = 2z + ir^2; \quad \xi^3 = r^2 - 2z^2 - 2ir^2z; \quad (2.1.12)$$

$$\xi^4 = 4z(3r^2 - 2z^2) - 3ir^2(4z^2 - r^2); \dots,$$

удовлетворяющие системе уравнений (2.1.10). Любое решение

системы в некоторой окрестности произвольной точки можно представить в виде ряда

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k,$$

где $\xi = z + ir$ и ξ^k — функции вида (2.1.12); α_k — постоянные.

Кроме этих элементарных решений, соответствующих положительным степеням ξ , можно написать решения, правильные на бесконечности и соответствующие отрицательным степеням. Простейшим таким решением уравнения (2.1.11) будет функция $\varphi = 1/R$, где $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, а сопряженной к ней — функция $\psi = z/R$. Остальные решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi^{-1} &= (r + iz)/R; \quad \xi^{-2} = (-z + ir^2)/R^3; \quad \dots; \\ \xi^{-n} &= \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{R} + i \frac{\partial R}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Любое решение системы (2.1.10), правильное на бесконечности, представляется в окрестности точки бесконечным рядом по степеням:

$$f(\xi) = \sum_{k=-1}^{-\infty} \alpha_k \xi^k.$$

Следовательно, комплексный потенциал $f(\xi)$ в окрестности точки может быть представлен в виде ряда

$$f(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \xi^k.$$

Компоненты вектора скорости осесимметричного течения жидкости определяются по формулам (2.1.6), причем из системы (2.1.10) видно, что векторные линии поля скоростей совпадают с линиями $\psi = \text{const}$, так что ψ служит функцией тока; линии $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ ортогональны, однако отображение $f = \varphi + i\psi$ не является конформным.

Решения (2.1.6) имеют простой физический смысл. Вычисляя по формулам (2.1.6) вектор скорости движения, находим, что для комплексного потенциала $f = \xi^{-1}$ вектор равен $v_z + iv_r = -(z + ir)/R^3$. Так как все векторы поля направлены к началу координат, а их величина убывает обратно пропорционально квадрату расстояния R от начала координат, то, следовательно, поле создано точечным источником (стоком), расположенным в начале координат. Размещая два источника

интенсивностью $\pm q$ в точках $\pm a$ оси z , получаем осесимметричное течение с комплексным потенциалом

$$f_a(\xi) = q \left[\frac{1+i(z+a)}{\sqrt{(z+a)^2+r^2}} - \frac{1+i(z-a)}{\sqrt{(z-a)^2+r^2}} \right].$$

Предельное образование, получаемое при слиянии таких источников с возрастающей интенсивностью ($a \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, так что $2aq \rightarrow \mu$), называется *точечным диполем* с моментом, направленным вдоль оси z . Комплексный потенциал поля такого диполя

$$f(\xi) = \mu(-z+ir^2)/R^3 = \mu\xi^{-2}.$$

Другие отрицательные степени ξ^{-k} трактуются как комплексные потенциалы полей мультиполей. Комбинируя элементарные решения системы (2.1.10), можно построить решения, описывающие сложные течения жидкости с осевой симметрией.

Пусть течение жидкости характеризуется комплексным потенциалом $f(\xi) = \alpha\xi^2 - \mu\xi^{-2}$, где ξ^2 и ξ^{-2} определяются соответственно по формулам (2.1.12) и (2.1.13); α и μ — положительные постоянные. Функция тока этого течения $\psi = \alpha r^2 - \mu r^2/R^3$ обращается в нуль при $r=0$ и на окружности $R=R_0 = \sqrt[3]{\mu/\alpha}$. Жидкость обтекает шар радиусом R_0 с центром в начале координат так, что ось z является линией тока и осью симметрии течения. Если заменить точечный диполь системой источников интенсивностью $\pm q$, расположенных в точках $\pm a$ оси z , то получим течение с комплексным потенциалом $f(\xi) = 0,5 v_\infty \xi^2 - f_a(\xi)$. Линия тока $\psi=0$ распадается на ось z и овальную кривую, окружающую точки $z=\pm a$. Жидкость обтекает поверхность, вытянутую вдоль оси вращения z , со скоростью v_∞ , направленной вдоль этой оси. Полагая, что источники размещены на произвольном множестве E оси z с переменной плотностью распределения интенсивностей, имеем течение с комплексным потенциалом

$$f(\xi) = \frac{1}{2} v_\infty \xi^2 - \int_E q(\eta) \frac{1+i(z-\eta)}{\sqrt{(z-\eta)^2+r^2}} d\eta,$$

которому соответствует функция тока

$$\psi(z, r) = \frac{1}{2} v_\infty r^2 - \int_E q(\eta) \frac{z-\eta}{\sqrt{(z-\eta)^2+r^2}} d\eta.$$

Для того чтобы на участках оси z вне обтекаемого тела функция $\psi(z, 0)=0$, необходимо и достаточно потребовать равенства нулю суммарной области источников:

$$\int_E q(\eta) d\eta = 0.$$

При соблюдении этого условия уравнение $\psi(z, r)=0$ распадается на равенство $r=0$ и уравнение профиля обтекаемого тела вращения.

Теперь рассмотрим установившиеся пространственные движения идеальной несжимаемой жидкости (газа). Если предположить, что движение безвихревое и не имеет источников в области течения, то существует потенциал скоростей φ , представляющий гармоническую функцию трех переменных;

$$v = \text{grad } \varphi; \quad \nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.1.14)$$

Пространственные гармонические функции хорошо изучены, они обладают многими свойствами, аналогичными свойствам гармонических функций двух переменных, однако в пространстве нет понятия сопряженности гармонических функций, которое связывало бы потенциал скоростей с функцией тока, как, например, на плоскости. Было бы желательным наряду с потенциалом скоростей $\varphi(x^i)$, $i=1, 2, 3$, иметь еще две гармонические или удовлетворяющие другим простым уравнениям функции $\psi_1(x^i)$ и $\psi_2(x^i)$, но такие, чтобы поверхности уровня $\psi_1=C_1$, $\psi_2=C_2$ пересекались по линиям тока течения, а три семейства поверхностей $\varphi=C$, $\psi_1=C_1$, $\psi_2=C_2$ были бы взаимно ортогональны. К сожалению, в общем случае построение таких функций пока затруднительно. Поэтому условие обтекания приходится формулировать через одну функцию φ как условие ортогональности вектора $\text{grad } \varphi$ с нормалью n к обтекаемой поверхности:

$$(\text{grad } \varphi, n) \equiv \partial \varphi / \partial n = 0, \quad (2.1.15)$$

где n — единичный вектор нормали; $\partial / \partial n$ — производная по нормали.

Если область течения содержит бесконечную точку, то необходимо существование предела $\text{grad } \varphi$ при $R^2 \rightarrow \infty$, которым является скорость v_∞ на бесконечности, причем этот вектор считают заданным. Необходимо иметь в виду, что для области D с достаточно гладкой границей гармоническая внутри D функция φ , удовлетворяющая граничному условию (2.1.15) и условию на бесконечности, если D содержит бесконечную точку, всегда существует и определяется с точностью до действительной постоянной.

Уравнение Лапласа (2.1.14) имеет простые решения, которыми можно пользоваться для локального приближения произвольных решений. К ним относятся различные полиномы в декартовых координатах (x, y, z) вида $ax+by+cz$; xy ; yz ; zx ; $ax^2+by^2-(a+b)z^2$; xyz ; $x[ax^2+by^2-(3a+b)z^2]$ и им подобные, получаемые круговой заменой x, y, z и т. д. При этом необходимо опираться на теорему Рунге: линейными комбинациями гармонических многочленов можно с любой степенью точности приблизить в произвольной ограниченной области D со связан-

ным дополнением любую функцию φ , гармоническую в окрестности D . Наряду с гармоническими полиномами, которые имеют особенность на бесконечности, можно рассматривать правильные на бесконечности функции вида

$$\varphi(P) = \frac{q}{R_{AP}} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

где q — постоянная; R_{AP} — расстояние от произвольной фиксированной точки $A(a, b, c)$ до точки $P(x, y, z)$, а также ее производные $\partial^{k_1+k_2+k_3}\varphi/\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}$.

Функция $\varphi(P)$ является потенциалом течения точечного источника, расположенного в точке A , и в силу гармоничности подчинена теореме Остроградского: поток вектора скорости $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ через любую замкнутую поверхность, содержащую внутри точку A , имеет одно и то же значение. Вычисляя поток через сферу S радиусом $r_0 = R_{AP}$ с центром в точке A , найдем

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial R} dS = - \int_S \frac{q}{R^2} dS = -4\pi q,$$

т. е. q характеризует интенсивность источника. Предельное образование, получаемое слиянием источника и стока интенсивностью $\pm q$, расположенных в точках A и A' , когда $A' \rightarrow A$ по прямой направления $\mathbf{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, а $qr'_{AA'} \rightarrow \mu$, называется диполем с осью $\mathbf{l}$ и моментом μ . Потенциал диполя

$$\mu \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{R} \right) = \mu \frac{\cos \theta}{R^2},$$

где $R = R_{AP}$; θ — угол между векторами $\mathbf{R} = \mathbf{AP}$ и осью диполя $\mathbf{l}$. Аналогичное толкование имеют и старшие производные функции φ .

Внесем в стационарный поступательный поток, движущийся со скоростью v_∞ вдоль оси x декартовой системы координат, два источника одинаковой интенсивности q , расположив их перпендикулярно к этой оси в точках $\pm a$ оси z . Такому течению соответствуют потенциал скоростей и компоненты вектора скорости

$$\begin{aligned} \varphi &= v_\infty x + q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right]; \\ v_x &= v_\infty - qx(1/R_1^3 + 1/R_2^3); \quad v_y = -qy(1/R_1^3 + 1/R_2^3); \\ v_z &= -q[(z-a)/R_1^3 + (z+a)/R_2^3], \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

где $R_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp a)^2}$ — расстояния точки (x, y, z) от источников. При $z=0$ $v_z=0$, следовательно, поток обтекает плоскость (x, y) . В этой плоскости получим векторное поле

$$v_x = v_\infty - 2qx/\sqrt{(r^2 + a^2)^3}; \quad v_y = -2qy/\sqrt{(r^2 + a^2)^3},$$

которое не является потенциальным. Построим семейство поверхностей, образованных линиями тока течения, зависящего от параметра h . Такие поверхности $z=z(x, y)$ должны удовлетворять уравнению

$$v_x \partial z / \partial x + v_y \partial z / \partial y = v_z \quad (2.1.17)$$

с коэффициентами, определяемыми по формулам (2.1.16). Решение асимптотической задачи Коши для уравнения (2.1.17) ($z \rightarrow h$ при $x \rightarrow -\infty$, где $0 < h < a$) представляет собой поверхность $z=z(x, y)$ с единственным максимумом на оси x вблизи начала координат, асимптотически стремящуюся к плоскости $z=h$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, причем $z-h$ имеет порядок $1/r^2$, так как влияние источников сказывается только в окрестности начала координат, а при удалении в бесконечность их влияние затухает со скоростью $1/r^2$ и преобладающим становится поступательное движение.

Описанное течение можно обобщить, если вместо одной пары источников рассмотреть семейство таких пар, расположенных над кругом $\xi^2 + \eta^2 < r^2$ в точках $\xi, \eta \pm a(\xi, \eta)$. Варьируя функцию $a(\xi, \eta)$ и плотность распределения интенсивности источника $q(\xi, \eta)$, получим потенциал

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = v_\infty x + \int_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} q(\xi, \eta) \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-a)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+a)^2}} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

течения, обтекающего пространственный слой $0 < z < z(x, y)$, где $z=z(x, y)$ — поверхности достаточно широкого класса.

При движении жидкости (газа) с большими скоростями, сравнимыми со скоростью c распространения звука в среде, становится существенной ее сжимаемость. Систему разрешающих уравнений (1.3.17) в этом случае рассматривают полностью, причем вид третьего уравнения (1.3.17) определяется свойствами изучаемой жидкости (газа). Вследствие нелинейности этих уравнений и отсутствия общего метода решения для произвольных начальных и граничных условий точное решение этой системы невозможно. Возникает потребность прибегнуть к упрощающим предположениям, чтобы проинтегрировать уравнения (1.3.17).

Упрощение системы (1.3.17) проводят поэтапно. На первом этапе движение жидкости (газа) предполагают изэнтропическим, тогда два последних уравнения системы (1.3.17) заменяют уравнениями

$$p = p(\rho, s); \quad \partial s / \partial t + v^j \nabla_j s = 0$$

или

$$p = p(\rho, E); \quad \partial E / \partial t + v^j \nabla_j E - (p/\rho^2) (\partial \rho / \partial t + v^j \nabla_j \rho) = 0.$$

Такое упрощение согласуется с условием изэнтропичности $s = \text{const}$ и позволяет рассматривать потенциальные (безвихревые) изэнтропические движения жидкости (газа). На этом этапе, как частный случай, рассмотрим плоские установившиеся движения, для которых уравнение неразрывности и условие отсутствия завихренности принимают вид

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (2.1.18)$$

Уравнения движения заменим интегралом Бернулли

$$0,5(v_x^2 + v_y^2) + P(\rho) = \text{const}, \quad (2.1.19)$$

при этом внешними силами пренебрегаем, так как при больших скоростях они несущественны, а функцию

$$P(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} dp/\rho$$

назовем энтальпией среды. Из второго соотношения (2.1.18) следует существование потенциала скоростей φ , т. е.

$$v_x = \partial\varphi/\partial x; \quad v_y = \partial\varphi/\partial y, \quad (2.1.20) \quad \blacksquare$$

а из первого соотношения (2.1.18) — существование функции тока ψ , для которой

$$\partial\psi/\partial x = -\rho v_y; \quad \partial\psi/\partial y = \rho v_x. \quad (2.1.21)$$

Сравнив выражения (2.1.20) и (2.1.21), установим систему дифференциальных зависимостей

$$\partial\varphi/\partial x = (1/\rho)\partial\psi/\partial y; \quad \partial\varphi/\partial y = -(1/\rho)\partial\psi/\partial x, \quad (2.1.22)$$

где $\rho = \rho(v)$ — известная функция скорости $v = \sqrt{(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2}$, $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$; $\varphi_y = \partial\varphi/\partial y$.

Исключая из (2.1.22) функцию ψ , получаем уравнение

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1.23)$$

а дифференцируя по ρ интеграл Бернулли (2.1.19), находим

$$d\rho/dv = -\rho v/p'(\rho) = -\rho v/c^2,$$

причем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v} (\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{yx}); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v} (\varphi_x \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_{yy}),$$

где $\varphi_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$; $\varphi_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \varphi_{yx}$; $\varphi_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

Подставляя приведенные соотношения в (2.1.23), после некоторых преобразований получим уравнение

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} = 0, \quad (2.1.24)$$

где c — скорость звука в среде. Уравнение (2.1.24) относится к квазилинейным уравнениям второго порядка вида

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1.25)$$

где A, B, C — известные функции $x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y$. Тип уравнения (2.1.25) определяется знаком дискриминанта $\Delta = AC - B^2$. При $\Delta > 0$ имеем эллиптический тип уравнений, а при $\Delta < 0$ — гиперболический.

Дискриминант уравнения (2.1.24)

$$\Delta = (c^2 - \varphi_x^2)(c^2 - \varphi_y^2) - \varphi_x^2 \varphi_y^2 = c^2(c^2 - v^2),$$

следовательно, оно эллиптическое при дозвуковых скоростях $v < c$ и гиперболическое при сверхзвуковых скоростях $v > c$. Переход через скорость звука $v = c$ сопровождается изменением типа уравнения (2.1.24), что приводит к принципиальному изменению свойств его решения, при этом характер движения в сжимаемых средах резко меняется.

Одно из наиболее существенных отличий сверхзвукового и дозвукового режимов среды связано с различным характером распространения локальных возмущений. При дозвуковых скоростях возмущения распространяются по всей среде, при сверхзвуковых — только внутри некоторого сектора, границы которого есть линии, называемые характеристиками и отделяющие возмущенную зону от невозмущенной. Для уравнения (2.1.25) характеристиками будут кривые γ , удовлетворяющие в каждой своей точке уравнению $A\dot{y}^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + C\dot{x}^2 = 0$, где точкой обозначено дифференцирование по параметру τ . Полагая $y' = \dot{y}/\dot{x}$, запишем уравнение характеристик в виде $A(y')^2 - 2By' + C = 0$, откуда следует, что для уравнений эллиптического типа ($\Delta > 0$) действительных характеристик не существует, а для уравнений гиперболического типа ($\Delta < 0$) через каждую точку проходят две характеристики, которые зависят не только от точки, но и от рассматриваемого решения.

Для уравнения (2.1.24) характеристики определяются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi_x \varphi_y \pm c \sqrt{v^2 - c^2}}{c^2 - \varphi_x^2}. \quad (2.1.26)$$

Если обозначить через θ угол наклона вектора скорости к оси x , а через α угол Маха, определяемый соотношением $\sin \alpha = c/v$, то уравнение (2.1.26) можно записать в форме

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\theta \mp \alpha). \quad (2.1.27)$$

Уравнение (2.1.27) означает, что в каждой точке сверхзвуковой зоны вектор скорости служит биссектрисой угла между характеристиками, причем скорость движения каждой из характеристик в направлении нормали к ней $v_n = v \sin \alpha = c$. Это очевидно, ибо характеристики представляют собой фронты распространения возмущений со скоростью звука c .

Второй этап упрощения системы разрешающих уравнений (1.3.17) — их линеаризация, но прежде выполним некоторые преобразования. Интеграл Коши—Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = f(t)$$

запишем в форме интеграла Бернулли

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const},$$

так как функция $f(t)$ произвольная и может быть введена в потенциал скоростей Φ без изменения соотношений $v_i = \nabla_i \Phi$. Дифференцируя интеграл Бернулли по времени t , находим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + v^i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.1.28)$$

Уравнение неразрывности (1.1.7) запишем в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^2 \Phi + \frac{1}{\rho} v^j \nabla_j \rho = 0,$$

но

$$\frac{1}{\rho} v^j \nabla_j \rho = \frac{1}{c^2} \frac{v^j}{\rho} \nabla_j p = -\frac{1}{c^2} v^i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \nabla_j v_i \right),$$

тогда

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} v^j \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \nabla_j v_i \right) = 0$$

и уравнение (2.1.28) принимает вид

$$\square^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \left(2v^i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v^i v^j \nabla_j v_i \right), \quad (2.1.29)$$

где $\square^2(\dots) = \nabla^2(\dots) - (1/c^2) \partial^2(\dots)/\partial t^2$ — оператор Даламбера которому должен удовлетворять потенциал скоростей при изэнтропическом движении.

Для линеаризации уравнения (2.1.29) воспользуемся методом итераций и рассмотрим уравнение возмущений первого порядка в случае однородного исходного потока с постоянной скоростью v_c в направлении координаты x^k , причем k — фиксированный индекс. Пусть

$$\Phi = v_c(x^k + \Phi_1), \quad (2.1.30)$$

где φ_1 — потенциал возмущений скорости потока, который предполагается малым. Подставляя (2.1.30) в (2.1.29) и сохраняя члены первого порядка малости, для потенциала φ_1 получим уравнение

$$\square^2 \varphi_1 = \frac{v_c}{c^2} \left(g^{k\alpha} \nabla_\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + 2g^{i\alpha} \nabla_\alpha x^k \nabla_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + v_c g^{i\alpha} \nabla_\alpha x^k g^{j\beta} \nabla_\beta x^k \nabla_j \nabla_i \varphi_1 \right). \quad (2.1.31)$$

Здесь предполагалось, что система координат x^i связана с телом, движущимся в жидкости со скоростью v_c . Если система координат x'^i неподвижна относительно жидкости, то уравнение потенциала φ_1 находим из (2.1.31) с помощью преобразования Галилея

$$x'^k = x^k - v_c t; \quad x'^j = x^j, \quad j \neq k; \quad t' = t; \\ \varphi_1(x'^i, t') = \varphi_1(x^i, t).$$

Заменив координаты в (2.1.31), приходим к волновому уравнению

$$\square'^2 \varphi_1 = 0, \quad (2.1.32)$$

где $\square'^2(\dots) = \nabla'^2(\dots) - (1/c^2) \partial^2(\dots)/\partial t'^2$ — оператор Даламбера в системе координат x'^i .

При установившемся движении жидкости уравнение (2.1.31) упрощается:

$$\nabla^2 \varphi_1 = M^2 g^{i\alpha} \nabla_\alpha x^k g^{j\beta} \nabla_\beta x^k \nabla_j \nabla_i \varphi_1, \quad (2.1.33)$$

где $M = v_c/c$ — число Маха исходного однородного потока. Линеаризация уравнения (2.1.33) с помощью преобразования Галилея приводит к уравнению

$$\nabla'^2 \varphi_1 = 0. \quad (2.1.34)$$

Итак, поэтапное упрощение системы разрешающих уравнений (1.3.17) приводит к уравнению Лапласа (2.1.34) для установившихся движений и к волновому уравнению (2.1.32) для неустановившихся движений идеальной жидкости (газа).

Система разрешающих уравнений механики вязкой жидкости (газа), как следует из п. 1.3, определяется выбором основных неизвестных. Если в качестве неизвестных принять ρ , p , T , v_i , то система разрешающих уравнений имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla_i v^i = 0, \quad p = p(\rho, T); \\ \frac{1}{\rho} \frac{dv_i}{dt} = F_i - \nabla_i p + \left(\lambda' + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla_i \nabla_\beta v^\beta + \mu \nabla^2 v_i; \\ c_V \rho \frac{dT}{dt} = \nabla_i q^i + \lambda \nabla^2 T + A \mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}^{ij} + A \nabla_\alpha v^\alpha (-p + \lambda' \nabla_\alpha v^\alpha), \quad (2.1.35)$$

где q' — внешний тепловой поток; λ — коэффициент теплопроводности; A — термический эквивалент теплоты.

Нелинейная дифференциальная в частных производных система уравнений (2.1.35) имеет весьма общий характер, и в силу этого ее применение имеет существенные ограничения. Более широкое приложение дают частные случаи.

В первую очередь изучим движение вязкой несжимаемой жидкости ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), когда уравнение Навье—Стокса позволяет провести строгий математический анализ разрешимости краевых задач. В этом случае система (2.1.35) имеет вид

$$\nabla_i v^i = 0; \quad \rho dv_i/dt = F_i - \nabla_i p + \mu \nabla^2 v_i;$$

$$\rho c_v dT/dt = \nabla_i q^i + \lambda \nabla^2 T \pm A \mu e_{ij} e^{ij};$$

а при отсутствии теплового воздействия

$$\nabla_i v^i = 0; \quad \frac{dv_i}{dt} + v^j \nabla_j v_i - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i = \frac{F_i}{\rho} + \nabla_i \frac{p}{\rho}. \quad (2.1.36)$$

Задача состоит в определении движения вязкой жидкости, если известны объемные силы, действующие на жидкость, и граничные условия, а для неустановившихся движений — начальные условия. Неизвестные p и v_i удовлетворяют системе уравнений (2.1.36) при начальных условиях ($t=0$) $v_i = v_i^0$, $p = p_0$ и граничных условиях $\sigma_n = -p_T$, $\sigma_\tau = 0$ — на свободной границе и $v_i(S) = v_{iT}$ — на твердой стенке, где v_{iT} — заданные на S функции, подчиненные условию $\int_S v_{iT} n^i dS = 0$, которое считается всегда выполненным.

Существование и единственность решений краевых задач механики вязкой несжимаемой жидкости (газа) подробно изучалось О. А. Ладыженской. Для стационарных краевых задач в общем нелинейном случае было доказано, что они имеют решения при любых числах Re , причем границы обтекаемых тел и внешние воздействия могут быть при этом весьма нерегулярными. Устойчивость таких решений имеет место только для небольших чисел Re .

Нестационарные краевые задачи для уравнений (2.1.36) однозначно разрешимы во все моменты времени, если данные задачи не зависят от одной из пространственных координат или задача обладает аксиальной симметрией. В общем трехмерном случае однозначная разрешимость во все моменты времени доказана при условии потенциальности внешних сил и малости числа Re в начальный момент времени, при несоблюдении этих условий во все моменты времени существует по крайней мере одно «слабое» решение $v_i(x^j, t)$, которое имеет производные $\dot{v}_i$, $\nabla_k \nabla_j v_i$, входящие в уравнения Навье—Стокса, суммируемые по (x^j, t) со степенью $5/4$. Единственность этого решения на всем интервале времени $t \geq 0$ не доказана. Если начальные данные достаточно гладкие, то решение единственно в течение некоторо-

го промежутка времени, величина которого определяется данными задачи.

Относительно устойчивости решения нестационарных задач на конечном и бесконечном интервале времени доказано следующее. Если с течением времени внешние силы затухают, а граничные условия соответствуют покою ($v_i(S)=0$), то и движение затухает независимо от того, каким оно было в начальный момент времени. Если значения внешних сил $F_i(x^j, t)$ при $t \rightarrow \infty$ приближаются к некоторым стационарным значениям $F_i^*(x^j)$, для которых соответствующая краевая задача имеет решение $v_i^*(x^j)$ с небольшим числом Re^* , то решения $v_i(x^j, t)$ нестационарной задачи, отвечающие произвольным начальным условиям $v_i^0(x^j)$, стремятся (причем очень быстро) к $v_i^*(x^j)$ при $t \rightarrow \infty$. Если же числа Re^* велики, то решения $v_i(x^j, t)$ вообще не стремятся к каким-либо определенным пределам при $t \rightarrow \infty$. На конечном интервале времени t имеет место непрерывная зависимость решений $v_i(x^j, t)$ от начальных условий $v_i^0(x^j)$ и внешних сил $F_i(x^j, t)$, причем для произвольных трехмерных течений интервал времени фиксирован.

Для линеаризованной системы уравнений (2.1.36) краевые задачи всегда однозначно разрешимы, причем свойства операторов, соответствующих стационарным задачам, весьма близки к свойствам операторов Лапласа $\nabla^2(\dots) = g^{ij} \nabla_i \nabla_j(\dots)$, а свойства операторов нестационарных задач — к свойствам оператора теплопроводности $O_T(\dots) = \lambda \nabla^2(\dots) - \rho c_v d(\dots)/dt$. Приведенные результаты исследований О. А. Ладыженской подтверждают разумность использования системы уравнений (2.1.36) для описания движений вязкой жидкости при числах Re , не превышающих некоторых пределов, и указывают на их недостаточность при больших Re .

Общего метода построения решений системы разрешающих уравнений (2.1.36) в силу их нелинейности не существует, поэтому при изучении отдельных движений вязкой жидкости приходится использовать две возможности: либо заранее задавать виды траекторий всех отдельных частиц жидкости и устанавливать отвечающие этим траекториям частные решения уравнений (2.1.36), либо прибегать к приближенным методам, позволяющим в той или иной мере упрощать уравнения (2.1.36) и приспособлять их к характеру отдельных типов конкретных задач. При этом существенно предположение о возможности выбора такой инерциальной системы координат x^i , в которой область D , заполненная жидкостью, неизменна.

Воспользуемся первой возможностью и рассмотрим ряд точных решений задач механики вязкой несжимаемой жидкости. Пусть движение вязкой несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), отнесенное к ортогональной криволинейной системе координат x^i : прямолинейной координатной осью x^3 , является установившимся ($\partial v_i / \partial t = 0$) и таково, что траектории всех частиц прямоли-

нейны, параллельны между собой и направлены по оси x^3 . Тогда $v_j=0$, $j=1, 2$ и из уравнения неразрывности (2.1.36) имеем $\partial v_3/\partial x^3=0$, а уравнения Навье—Стокса (2.1.36) принимают вид

$$F_j - \frac{\partial p}{\partial x^j} = 0; \quad F_3 - \frac{\partial p}{\partial x^3} + \mu \nabla^2 v_3 = 0. \quad (2.1.37)$$

Представим давление p в виде суммы статического давления p_c , обусловленного действием объемных сил и подчиненного уравнениям равновесия $F_i - \partial p/\partial x^i = 0$, и динамического давления p_d , непосредственно связанного с движением жидкости, т. е.

$$p = p_c + p_d. \quad (2.1.38)$$

Подстановка (2.1.38) в (2.1.37) с учетом уравнений равновесия приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial p_d}{\partial x^j} = 0; \quad \nabla^2 v_3 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial x^3}, \quad (2.1.39)$$

где $\nabla^2 v_3 = g^{jk} \nabla_j \nabla_k v_3$, $j, k=1, 2$ — оператор Лапласа. Отсюда следует, что выполнение уравнений (2.1.39) возможно только тогда, когда $\partial p_d/\partial x^3 = \text{const}$.

Следовательно, задача о прямолинейно-параллельном установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения Пуассона с постоянной правой частью

$$\nabla^2 v_3 = (\partial p_d/\partial x^3)/\mu, \quad (2.1.40)$$

которому соответствуют граничные условия либо на неподвижной границе ($v_3=0$), либо на подвижной границе ($v_3=v_\tau = \text{const}$).

Предположим, что течение жидкости проходит в круглой цилиндрической трубе вдоль ее оси, совпадающей с осью z цилиндрической системы координат (r, θ, z) , и обладает симметрией $\partial v_3/\partial \theta = 0$. Тогда уравнение (2.1.40) и граничные условия принимают соответственно вид

$$\frac{d^2 v_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_3}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_d}{\partial z},$$

$$v_3 = 0 \text{ при } r=a.$$

Общее решение уравнения

$$v_3 = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_d}{\partial z} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

содержит постоянные C_1 и C_2 , определяемые при $r=a$ и $r=0$ соответственно. Отсюда

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_d}{\partial z} a^2.$$

Скорость течения жидкости в трубе радиусом a равна

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p_z}{\partial z} (a^2 - r^2).$$

Соответствующий ей полный расход Q определяется формулой Пуазейля

$$Q = \frac{\pi}{8} \left(-\frac{\partial p_z}{\partial z} \right) \frac{a^4}{\mu},$$

широко используемой для определения значений коэффициента вязкой капельной жидкости.

Рассмотрим установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$; $\partial v_i / \partial t = 0$) при отсутствии объемных сил ($F_i = 0$), когда траектории всех частиц представляют собой дуги концентрических окружностей. При этом $v_r = 0$, $v_z = 0$. Из уравнения неразрывности (2.1.36) находим $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$, т. е. скорость частицы на траектории неизменна, но может изменяться в зависимости от r и z . Уравнения Навье—Стокса, записанные в цилиндрических координатах, для данного случая имеют вид

$$\begin{aligned} v_\theta^2 / r &= (\partial p / \partial r) / \rho; \quad \partial p / \partial z = 0; \\ \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

Дифференцируя первое уравнение (2.1.41) по z с учетом второго, устанавливаем $\partial v_\theta / \partial z = 0$, т. е. круговое движение жидкости должно быть плоскопараллельным, а из третьего уравнения (2.1.41) следует $\partial p / \partial \theta = C$. Для определения скорости v_θ с учетом приведенных равенств из третьего уравнения (2.1.41) имеем

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) \right) = \frac{C}{\mu r}.$$

Проводя интегрирование, приходим к общему решению

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{C}{2\mu} r \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C_1 r + \frac{C_2}{r}; \\ p &= C\theta + \rho \int \frac{v_\theta}{r} dr + C_3, \end{aligned}$$

которому соответствует касательное напряжение

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{C}{2\mu} - 2 \frac{C_2}{r^2} \right),$$

вызванное наличием сил вязкости. Постоянные интегрирования C и C_k определяются из граничных условий конкретной задачи.

Предположим, что траектории всех частиц вязкой несжимаемой жидкости при установившемся движении представляют

собой прямые линии, расходящиеся от оси z , тогда $v_\theta = 0$, $v_z = 0$.

Уравнения (2.1.36), записанные в цилиндрических координатах, имеют вид

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right); \\ -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Движение считаем плоскопараллельным, т. е. $\partial v_r / \partial z = 0$. Последнее уравнение (2.1.42) указывает, что величина $u = r v_r$ не зависит от r . Интегрируя второе уравнение (2.1.42) по θ , получаем

$$p = 2\mu v_r / r + f(r).$$

Подстановка выражений для v_r и p в первое уравнение (2.1.42) приводит к равенству

$$u^2 + \frac{4\mu}{\rho} u + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{\rho} r^3 \frac{df}{dr}.$$

Так как его левая часть не зависит от r , а правая зависит только от r , то обе части равенства равны постоянной A :

$$\frac{r^3}{\rho} \frac{df}{dr} = A; \quad u^2 + \frac{4\mu}{\rho} u + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = A.$$

Из первого соотношения находим $f = -0,5 A \rho / r^2 + B$ и давление при радиальном течении

$$p = 2\mu \frac{u}{r^2} - A \frac{\rho}{2r^2} + B.$$

Умножим второе соотношение на $du/d\theta$. После интегрирования получаем

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = -\frac{2\rho}{3\mu} F(u),$$

где $F(u) = u^3 + 6\mu u^2 / \rho - 3Au + C$. откуда находим решение

$$\theta = \int \frac{du}{\pm \sqrt{-2\rho F(u)/3\mu}} + D.$$

Постоянные A , C , D здесь определяются из граничных условий конкретной задачи, дальнейшее построение решения проводится также для конкретной задачи.

Пусть вязкая жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), объемные силы отсутствуют ($F_i = 0$), а траектории всех частиц жидкости полагаем прямолинейно параллельными ($v_j = 0$, $j = 1, 2$). При таких предположениях из уравнения неразрывности (2.1.36) по-

лучим $\partial v_3/\partial x^3=0$, а уравнения Навье—Стокса (2.1.36) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial x^j}=0; \quad \rho \frac{\partial v^3}{\partial t} - \mu \nabla^2 v_3 = -\partial p/\partial x^3. \quad (2.1.43)$$

Из первых двух уравнений (2.1.43) заключаем, что давление p не зависит от переменных x^j , тогда как левая часть третьего уравнения, содержащая v_3 , зависит только от x^j . Это возможно в том случае, если $-\partial p/\partial x^3=f(t)$. Тогда компонента скорости v_3 подчинена уравнению

$$\rho \partial v_3/\partial t - \mu \nabla^2 v_3 = f(t), \quad (2.1.44)$$

причем функция $f(t)$ предполагается известной. Уравнению (2.1.44) соответствуют начальные условия $v_3(x^j, t) = v_3^0(x^j)$ при $t=0$, а также граничные условия $v_3(S)=0$ на неподвижной границе S_1 и $v_3(S)=v_\tau(t)$ на подвижной границе S_2 . Следовательно, изучение неустановившегося прямолинейно параллельного течения вязкой жидкости сводится к решению уравнения (2.1.44) при заданных начальных и граничных условиях.

Поставленную краевую задачу можно разделить на две отдельные задачи, из которых первая будет учитывать действие перепада давления $\partial p/\partial x^3$, а вторая — движение границы и начальное распределение скоростей. Полагая $v_3=v_3'+v_3''$, запишем соответственно для первой и второй задачи

$$\rho \partial v_3'/\partial t - \mu \nabla^2 v_3' = f(t); \quad v_3'=0 \text{ при } t=0; \quad v_3'=0 \text{ на } S_1 \text{ и на } S_2; \quad (2.1.45)$$

$$\rho \partial v_3''/\partial t - \mu \nabla^2 v_3'' = 0; \quad v_3''=v_3^0(x^j) \text{ при } t=0, \\ v_3''=0 \text{ на } S_1; \quad v_3''=v_\tau(t) \text{ на } S_2.$$

В свою очередь вторая задача разделяется также на две отдельные задачи. Первая представляет задачу о выравнивании начального распределения скорости, а вторая характеризует распространение скорости движения от границы к промежуточным слоям жидкости. Полагая $v_3''=w_1+w_2$, запишем для первой задачи

$$\rho \partial w_1/\partial t - \mu \nabla^2 w_1 = 0; \quad w_1=v_3^0(x^j) \text{ при } t=0; \\ w_1=0 \text{ на } S_1 \text{ и на } S_2; \quad (2.1.46)$$

а для второй

$$\rho \partial w_2/\partial t - \mu \nabla^2 w_2 = 0; \quad w_2=0 \text{ при } t=0; \\ w_2=0 \text{ на } S_1 \text{ и } w_2=v_\tau(t) \text{ на } S_2. \quad (2.1.47)$$

Таким образом, решение поставленной краевой задачи состоит из решений трех отдельных задач (2.1.45), (2.1.46) и 2.1.47). Решение задачи (2.1.47) при произвольном задании

функции $v_r(t)$ может быть построено на основании решения той же задачи, отвечающей значению w_2 , равному единице на границе S_2 , с помощью интеграла Дюгамеля. Действительно, обозначим через u_1 решение задачи

$$\rho \partial u_1 / \partial t - \mu \nabla^2 u_1 = 0; u_1 = 0 \text{ при } t = 0; u_1 = 0 \text{ на } S_1 \text{ и } u_1 = 1 \text{ на } S_2.$$

Тогда решение задачи (2.1.47) будет представлено формулой Дюгамеля

$$w_2(x', t) = v_r(0) u_1(x', t) + \int_0^t v_r'(\tau) u_1(x', t - \tau) d\tau.$$

Для кругового движения частиц вязкой несжимаемой жидкости радиальную компоненту скорости v_r следует положить равной нулю: $v_r = 0$, тогда из уравнения неразрывности (2.1.36) получим $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$. Считая давление p не зависящим от угла θ , уравнения Навье—Стокса представим в виде

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right). \quad (2.1.48)$$

Решение второго уравнения (2.1.48) совместно с начальными условиями $v_\theta = v_0$ при $t = 0$ и граничными условиями $v_\theta(S) = v_{\theta S}$ на S дает нам скорость v_θ . Решение первого уравнения (2.1.48) определяет распределение давления p жидкости. Скорости деформации сдвига

$$\epsilon_{r\theta} = 0,5 (\partial v_\theta / \partial r - v_\theta / r)$$

соответствует касательное напряжение

$$\sigma_{r\theta} = \tau = \mu (\partial v_\theta / \partial r - v_\theta / r),$$

которое характеризует силу вязкости кругового движения частиц жидкости.

2.2. Решения разрешающих уравнений статической теории упругости и термоупругости

Рассмотрим построение общего решения разрешающих уравнений статической теории упругости и термоупругости, записанных в перемещениях и в напряжениях. Разрешающие уравнения в перемещениях можно представить в операторной форме

$$Au = f, \quad (2.2.1)$$

где A — матричный линейный оператор эллиптического типа элементы которого суть непрерывные ограниченные операторы $u(P)$ — перемещение; $f(P)$ — функция внешних причин, вызывающих перемещение.

Структура разрешающих уравнений показывает, что соответ

ствующий им матричный оператор A положительно определен в гильбертовом пространстве H , которым очевидно будет пространство квадратично суммируемых функций L_2 . Записывая систему разрешающих уравнений в операторной форме (2.2.1), можно сформулировать *теорему единственности* решения: если оператор A положителен в гильбертовом пространстве H , то уравнение $Au=f$ для $f \in H$ имеет в этом пространстве не более одного решения. Теорема единственности позволяет также утверждать, что операторному уравнению (2.2.1) с положительным оператором A можно поставить в соответствие функционал энергии $F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u)$, причем области определения оператора A и функционала $F(u)$ совпадают. Так как оператор A положительный и $F(u) = (Au, u) - 2\operatorname{Re}(u, f)$, то $F(u)$ принимает только вещественные значения. Если при этом гильбертово пространство H вещественное, то $(u, f) = f(u)$ и функционал $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$.

Для операторного уравнения (2.2.1) справедлива *теорема о функционале энергии*: если уравнение $Au=f$ с положительным оператором A имеет решение, то это решение сообщает функционалу энергии $F(u)$ наименьшее значение, и наоборот, элемент гильбертова пространства, реализующий минимум функционала энергии $F(u)$, удовлетворяет операторному уравнению $Au=f$. Следовательно, задача о решении операторного уравнения (2.2.1) эквивалентна задаче об отыскании минимума функционала $F(u)$, т. е. существование минимума функционала $F(u)$ равносильно существованию решения операторного уравнения (2.2.1), подчиненного соответствующим граничным условиям.

Перейдем теперь к непосредственному построению общего решения задач статической теории упругости и термоупругости, что сводится к интегрированию уравнений равновесия в перемещениях (1.4.18) совместно с граничными условиями (1.2.1) на S_1 и (1.4.36) на S_2 , причем температура ΔT определена интегрированием уравнения теплопроводности (1.4.17) с граничными условиями (1.4.19).

При построении общего решения уравнений (1.4.18) важное значение имеют частные решения, удовлетворяющие этим уравнениям, но не удовлетворяющие их граничным условиям или удовлетворяющие только некоторым из них. Следуя Трэффцу, из частных решений u_i^m можно построить общее решение в виде ряда

$$u_i = \sum_m a_m u_i^m,$$

коэффициенты a_m которого выбирают такими, чтобы были выполнены все граничные условия.

Прежде всего заметим, что при отсутствии объемных сил

($F_i=0$) средняя деформация e будет гармонической функцией. Дифференцируя (1.4.18) по координате x^3 , находим

$$\nabla^2(\nabla_k u^k) + m g^{i\beta} \nabla_i \nabla_\beta (\nabla_k u^k) = 0,$$

но $g^{i\beta} \nabla_i \nabla_\beta = \nabla^2$ — оператор Лапласа, поэтому $(1+m) \nabla^2 (\nabla_k u^k) = 0$, откуда

$$\nabla^2 e = 0. \quad (2.2.2)$$

Применяя к уравнениям (1.4.18) оператор Лапласа и учитывая (2.2.2), устанавливаем, что при $F_i=0$

$$\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0, \quad (2.2.3)$$

т. е. компоненты u_i вектора перемещений являются бигармоническими функциями.

При отыскании частных решений уравнений равновесия (2.2.3) воспользуемся *теоремой Альманси*: каждая функция вида $f = \varphi + x^i \psi$ удовлетворяет бигармоническому уравнению (2.2.3), если функции φ и ψ — гармонические в рассматриваемой области. Справедливо и обратное утверждение: для каждой функции f , бигармонической в области D , существуют функции φ и ψ такие, что $f = \varphi + x^i \psi$.

Выбор частных решений уравнений (2.2.3) во многом зависит от формы тела. Для упругого полупространства ($x^3 \leq 0$) Треффц выбрал перемещения u_i ($i=1, 2, 3$) в виде $u_i = \varphi_i + x^3 \chi_i$, причем $\nabla^2 \varphi_i = 0$, $\nabla^2 \chi_i = 0$. Удобство такого выбора состоит в том, что при $x^3=0$ заданные перемещения u_{iS} равны функциям φ_i , поэтому функции φ_i можно определять как решения уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi_i = 0$ с граничными условиями $\varphi_i(x^1, x^2, 0) = u_{iS}(x^1, x^2)$. Функции φ_i и χ_i взаимосвязаны с помощью уравнений (1.2.1), (1.4.18), (1.4.36), из которых следует соотношение

$$2g^{\alpha 3} \nabla_\alpha \chi_i + m \nabla_i (\chi^3 + \nabla_k \varphi^k + x^3 \nabla_k \chi^k) = 0.$$

Это соотношение упрощается, если принять $\chi_i = \nabla_i \psi$, где ψ — гармоническая функция. Тогда

$$2g^{\alpha 3} \nabla_\alpha \nabla_i \psi + m \nabla_i (g^{3\beta} \nabla_\beta \psi + \nabla_\alpha \varphi^\alpha) = 0,$$

а после интегрирования имеем

$$\partial \psi / \partial x^3 = \nabla_\alpha \varphi^\alpha / (3-4\nu).$$

Так как функции φ_i можно считать известными, то интегрируя по координате x^3 и определив функцию ψ , в результате получим перемещения

$$u_i = \varphi_i + x^3 \nabla_i \psi. \quad (2.2.4)$$

В задачах о действии сосредоточенных сил в пространстве деформации шара и цилиндра удобно представление

$$u_i = \varphi_i + (R^2 - a^2) \nabla_i \psi,$$

$$\text{где } \alpha = \text{const}, \quad \psi = -\frac{1}{2(3-4\nu)} R^{-\alpha} \int_b^R R_0^{\alpha-1} \nabla_k \varphi^k dR_0 + CR^{-\alpha}; \quad \alpha = \frac{1-2\nu}{3-4\nu},$$

а постоянную C выбирают так, чтобы ψ была гармонической функцией.

При изучении напряженно-деформированного состояния пространственных упругих тел большое распространение получило решение уравнений (1.4.18), предложенное Папковичем и Нейбером. Компоненты u_i вектора перемещений выражают через скалярную функцию φ и компоненты ψ_i векторной функции

$$u_i = A \nabla_i (\varphi + x^j \psi_j) + B \psi_i, \quad (2.2.5)$$

причем постоянные A и B выбирают такими, чтобы функции φ и ψ_i удовлетворяли наиболее простым дифференциальным уравнениям. Подстановка (2.2.5) в уравнения (1.4.18) приводит к соотношению

$$A(1+m) \nabla_i (\nabla^2 \varphi + x^j \nabla^2 \psi_j) + [(1+m)(2A+B) - B] \nabla_i (g^{ab} \nabla_a \psi_b) + B \nabla^2 \psi_i + F_i/G = 0.$$

Так как постоянные A и B подчинены условию $(1+m)(2A+B) - B = 0$, то последнее соотношение принимает вид

$$A(1+m) \nabla_i (\nabla^2 \varphi + x^j \nabla^2 \psi_j) + B \nabla^2 \psi_i + F_i/G = 0.$$

Если положить $A = 1$, то $B = -2(1+m)/m$ и последнее соотношение будет выполнено, если функции φ и ψ_i подчинить условиям

$$\nabla^2 \varphi + x^j \nabla^2 \psi_j = 0; \quad 2(1+m) \nabla^2 \psi_i/m - F_i/G = 0.$$

Исключая из первого уравнения $\nabla^2 \psi_j$ и учитывая равенство $2(1+m)/m = 4(1-\nu)$, получим окончательную форму уравнений для функций φ и ψ_i :

$$\nabla^2 \varphi + \frac{x^i F_i}{4G(1-\nu)} = 0; \quad \nabla^2 \psi_i - \frac{F_i}{4G(1-\nu)} = 0. \quad (2.2.6)$$

При $F_i = 0$ искомые функции φ и ψ_i — гармонические, т. е.

$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad \nabla^2 \psi_i = 0.$$

Итак, определение перемещений основано на решении уравнений (2.2.6) с учетом заданных граничных условий, выраженных через функции φ и ψ_i . Зная функции φ и ψ_i , находим компоненты вектора перемещений

$$u_i = \nabla_i \varphi + \nabla_i (x^j \psi_j) - 4(1-\nu) \psi_i, \quad (2.2.7)$$

а также компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{ij}=2G \left[\nabla_i \nabla_j \Phi - \frac{1}{2(1-\nu)} (\nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i) - \nu \nabla^2 \Phi g_{ij} \right],$$

где $\Phi = \varphi + x^j \psi_j$; $\nabla^2 \Phi = 2g^{ia} \nabla_i \psi_a$.

Решение (2.2.7) называют *решением Папковича—Нейбера*. Компоненты ψ_i векторной функции подчинены соотношениям

$$2\psi_i = \nabla_i \Phi - \Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k,$$

причем

$$g^{ia} \nabla_i \Psi_a = 0; \quad \nabla^2 (\nabla_i \Phi - \Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k) = 0,$$

что позволяет однозначно определить неизвестные Φ и Ψ_k ($k=1, 2, 3$).

В решении Папковича—Нейбера три компоненты u_i вектора перемещений определяются через четыре функции φ и ψ_i , однако для решения многих задач достаточно трех функций. Так, при действии сосредоточенной силы в упругом пространстве полагаем $\varphi=0$, а ψ_i определяем из уравнений (2.2.6); при решении задачи об упругом полупространстве, нагруженном нормально к границе, достаточно трех функций φ , ψ_1 , ψ_2 . Возникает вопрос, будет ли решение, содержащее только три функции Папковича—Нейбера, полным.

Ответом на это служат утверждения, сформулированные Слободянским:

1) функцию φ можно без ограничения общности принять равной нулю, если область ограничена и односвязна или она является внешней для некоторой замкнутой поверхности;

2) без ограничения общности одну из функций ψ_i всегда можно положить равной нулю.

Покажем, что функции Треффца и функции Папковича—Нейбера взаимосвязаны. Решение Треффца (2.2.4) представим в виде $u_i = \alpha_i + x^3 \nabla_i \beta$, где α_i и β — гармонические функции, и подставим его в однородные уравнения (1.4.18). В результате находим $\partial \beta / \partial x^3 = g^{ij} \nabla_j \psi_i$, т. е. производная функции Треффца β , взятая по координате x^3 , связана с дивергенцией векторной функции Папковича—Нейбера ψ . При этом использовано представление

$$u_i = \nabla_i (x^3 \beta) - 4(1-\nu) \psi_i,$$

где $-4(1-\nu)\psi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - \beta)$.

Интегральное представление поля перемещений через три функции предложено Галеркиным; при отсутствии объемных сил ($F_i=0$) эти функции бигармонические. Уравнения (1.4.18) представим в операторной форме

$$L_i^j (u_j) + F_i/G = 0, \quad (2.2.8)$$

где $L_i{}^j(\dots)=g_i{}^j\nabla^2(\dots)+m\nabla_i g^{\alpha j}\nabla_\alpha(\dots)$, и выразим компоненты u_i вектора перемещений через компоненты χ_i векторной функции χ :

$$u_1=\begin{vmatrix} \chi_1 & L_1^2 & L_1^3 \\ \chi_2 & L_2^2 & L_2^3 \\ \chi_3 & L_3^2 & L_3^3 \end{vmatrix}; \quad u_2=\begin{vmatrix} L_1^1 & \chi_1 & L_1^3 \\ L_2^1 & \chi_2 & L_2^3 \\ L_3^1 & \chi_3 & L_3^3 \end{vmatrix}; \quad u_3=\begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 & \chi_1 \\ L_2^1 & L_2^2 & \chi_2 \\ L_3^1 & L_3^2 & \chi_3 \end{vmatrix}.$$

Подставив эти выражения в (2.2.8), получим

$$\begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{vmatrix} \chi_i + \frac{F_i}{G} = 0,$$

откуда следуют уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \chi_i + \frac{F_i}{G(m+1)} = 0. \quad (2.2.9)$$

Вводя новые функции $\Gamma_i = \nabla^2 \chi_i$, запишем выражения для компонент u_i вектора перемещений:

$$u_i = (1+m) \nabla^2 \Gamma_i - m \nabla_i (g^{kl} \nabla_k \Gamma_l), \quad (2.2.10)$$

а уравнения (2.2.9) приведем к виду

$$(1+m) \nabla^2 \nabla^2 \Gamma_i + F_i/G = 0.$$

Вектор Γ называется *вектором Галеркина*, а его компоненты Γ_i — *функциями Галеркина*. Простота уравнений (2.2.9) приводит к сложной структуре граничных условий. Если на поверхности тела заданы перемещения, то с учетом (2.2.10)

$$u_{is} = (1+m) \nabla^2 \Gamma_i - m \nabla_i (g^{kl} \nabla_k \Gamma_l),$$

куда входят вторые производные функций Γ_i . Если на поверхности S заданы поверхностные силы $p_i^{(n)} = \sigma_{ij}(S)n^j$, то в граничные условия входят третьи производные функций Γ_i , так как

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}/G &= (1+m) \nabla^2 (\nabla_i \Gamma_j + \nabla_j \Gamma_i) - m (\nabla_i \nabla_j + \nabla_j \nabla_i) \times \\ &\times (g^{kl} \nabla_k \Gamma_l) + (m-1) g_{ij} g^{kl} \nabla_l [(m+1) \nabla^2 \Gamma_k - \\ &- m \nabla_k (g^{\gamma\delta} \nabla_\gamma \Gamma_\delta)]. \end{aligned}$$

Покажем, что функции Галеркина взаимосвязаны с функциями Папковича—Нейбера. Поскольку $\nabla^2 \Gamma$ — гармоническая векторная функция, то положим $\nabla^2 \Gamma = 2\Phi$. Выполним операцию дивергенции $\nabla^2 (g^{ij} \nabla_i \Gamma_j) = 2g^{ij} \nabla_i \Phi_j$ и сравним полученное соотношение с соотношением $\nabla^2 \Phi = 2g^{ij} \nabla_i \Phi_j$. В результате имеем зависимость

$$g^{ij} \nabla_i \Gamma_j = \Phi = \varphi + x^j \psi_j,$$

которая связывает функции Галеркина Γ_j с функциями Папковича—Нейбера φ и ψ_j .

При решении задач с осесимметричным распределением деформаций и напряжений, возникающих в телах при осесимметричном нагружении, функции Галеркина $\Gamma_1=0$, $\Gamma_2=0$, $\Gamma_3=\chi$, причем в цилиндрической системе координат справедливо уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi + m F_3 / G(m+1) = 0,$$

где χ — функция Лява. Перемещения и напряжения определяют по формулам

$$u_r = -\partial^2 \chi / \partial r \partial z; \quad u_z = [(1+1/m) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2] \chi, \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right]; \quad \sigma_{rr} = 2G \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right]; \\ \sigma_{rz} &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Упрощение формул (2.2.11) и (2.2.12) для компонент вектора перемещений и тензора напряжений основано на использовании функций Буссинеска, которые получают с помощью функций Папковича—Нейбера. Так, если в представлении компонент вектора перемещений через функции Папковича—Нейбера

$$u_i = \nabla_i (\varphi + x^j \psi_j) - 4(1-\nu) \psi_i$$

положить $\psi_1=0$, $\psi_2=0$, $\psi_3=\psi$, то

$$u_i = \nabla_i (\varphi + x^3 \psi_3) - 4(1-\nu) \psi_i.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, находим

$$u_r = \partial \Phi / \partial r; \quad u_z = \partial \Phi / \partial z - 4(1-\nu) \Phi,$$

где $\Phi = \varphi + z\psi$, а функции φ и ψ называются функциями Буссинеска и составляют частный случай функций Папковича—Нейбера.

Компоненты тензора напряжений (σ) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \nu \nabla^2 \Phi \right); \quad \sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nu \nabla^2 \Phi \right); \\ \sigma_{zz} &= 2G \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - (2-\nu) \nabla^2 \Phi \right]; \quad \sigma_{rz} = 2G \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} - 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

Функция Лява χ — бигармоническая, но $\nabla^2 \chi = 2\psi$, поэтому функция ψ — гармоническая. Дифференцируя это соотношение по z , получим $\nabla^2 (\partial \chi / \partial z) = 2 \partial \psi / \partial z$, а сравнивая с $\nabla^2 \Phi = 2 \partial \psi / \partial z$,

устанавливаем связь между функцией Лява χ и функциями Буссинеска φ и ψ :

$$\partial\chi/\partial z = \Phi = \varphi + z\psi.$$

Простейшим представлением компонент u_i вектора перемещений, которое следует из решения (2.2.7), является

$$u_i = \nabla_i \varphi, \quad (2.2.13)$$

где функция φ , введенная Ляме, называется *потенциалом упругого перемещения*. С помощью потенциала Ляме φ найдено много простых решений статических задач теории упругости в перемещениях.

Например, рассмотрим действие объемной силы в упругом пространстве, полагая ее потенциальной $F_i = \nabla_i \vartheta$, где ϑ — потенциал сил, действующих в ограниченной области D объема V . Подставив (2.2.13) в уравнения (1.4.18), получаем

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{jk} \nabla_j u_k) + \nabla_i \vartheta / G = 0,$$

а после преобразований — равенство

$$\nabla_i [(1+m) \nabla^2 \varphi + \vartheta / G] = 0.$$

Отсюда следует уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi + \vartheta / G (m+1) = 0,$$

частное решение которого

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi G(m+1)} \int_V \frac{\vartheta(\mathbf{r}_0)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} dV(\mathbf{r}_0);$$

$$R^2 = (x^i - x_0^i) g_{ij} (y^j - y_0^j)$$

будет окончательным для неограниченного тела. Компоненты u_i вектора перемещений, компоненты e_{ij} тензора деформаций и компоненты σ_{ij} тензора напряжений соответственно равны

$$u_i = \nabla_i \varphi; \quad e_{ij} = \nabla_i \nabla_j \varphi; \quad e = \frac{1}{3} \nabla^2 \varphi;$$

$$\sigma_{ij} = 2G \nabla_i \nabla_j \varphi - \frac{m-1}{m+1} \vartheta g_{ij}.$$

Если тело ограниченное, то к решению $u_i' = \nabla_i \varphi$ следует добавить решение u_i'' однородных уравнений (1.4.18), определенное по формулам (2.2.7), и выбрать его так, чтобы выполнялись заданные граничные условия.

При отсутствии объемных сил ($\vartheta=0$) потенциал Ляме удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi=0$, а его частными решениями будут выражения $1/R$, $\ln(r/c)$, $\ln(R+x^3)$, $x^3 \ln r, \dots$, где $R^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$; $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$. Указанные частные ре-

шения широко используются при рассмотрении различных задач теории упругости.

Например, потенциал $\varphi = C \ln(r/c)$ является частным решением уравнения

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi(r, z) = 0,$$

связанного с осесимметричным деформированием. В этом случае

$$\begin{aligned} u_r &= C/r; \quad u_\theta = 0; \quad u_z = 0; \\ e_{rr} &= -C/r^2; \quad e_{\theta\theta} = C/r^2; \quad e_{zz} = 0; \quad e = 0; \\ \sigma_{zz} &= 0; \quad \sigma_{rr} = -2GC/r^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2GC/r^2. \end{aligned}$$

Если к полученному состоянию добавить равномерное растяжение, характеризуемое напряжениями $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 2GD$, то при суммировании получаем

$$\sigma_{rr} = 2G(D - C/r^2); \quad \sigma_{\theta\theta} = 2G(D + C/r^2).$$

Такое напряженное состояние возникает в бесконечной толстой трубе при действии равномерного давления на внутренней $r=a$ и внешней $r=b$ поверхностях. Постоянные C и D определяются из граничных условий $\sigma_{rr}(a) = -p_a$; $\sigma_{rr}(b) = -p_b$.

Пусть в неограниченном упругом теле действуют объемные силы F_i , распределенные в ограниченной области D . Действие этих сил вызывает деформацию тела, убывающую по мере удаления от области D и принимающую на бесконечности нулевое значение. При определении перемещений, вызванных объемными силами, в частности сосредоточенными, можно воспользоваться как решением Папковича—Нейбера, так и решением Галеркина.

В методе Папковича—Нейбера компоненты вектора перемещений

$$u_i = \nabla_i(\varphi + x^j \psi_j) - 4(1-\nu)\psi_i.$$

Здесь можно положить $\varphi = 0$, а функции ψ_i определять из решения уравнения Пуассона

$$4(1-\nu)\nabla^2 \psi_i = F_i/G.$$

Если сила действует в направлении x^3 , т. е. $F_i = g_i^j(\delta)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, то $\psi_1 = \psi_2 = 0$, а ψ_3 определяем из уравнения

$$4(1-\nu)\nabla^2 \psi_3 = \delta(\mathbf{r})/G,$$

решением которого будет функция

$$\psi_3 = 1/[16\pi G(1-\nu)R].$$

Подставляя значения функций φ и ψ_i в выражения для перемещений, находим

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[g_{i\alpha} \frac{x^\alpha x^\beta}{R^3} + (3-4\nu) \frac{1}{R} g_i^3 \right].$$

В общем случае построение общего решения однородных уравнений равновесия в перемещениях

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) = 0$$

основано на представлении компонент вектора перемещений в форме

$$u_i = \nabla_i f + \Lambda_i^{jk} \nabla_j H_k,$$

при условии $g^{ij} \nabla_i H_j = 0$. Полагая $f = A\varphi$, запишем

$$u_i = A \nabla_i \varphi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j H_k; \quad g^{ij} \nabla_i H_j = 0, \quad (2.2.14)$$

Подставляя (2.2.14) в уравнения равновесия, получим

$$\nabla^2 [A(1+m) \nabla_i \varphi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j H_k] = 0,$$

так как $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Lambda_\beta^{jk} \nabla_j H_k = 0$.

Принимая постоянную $A = 1/(1+m)$, находим уравнение

$$\nabla^2 (\nabla_i \varphi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j H_k) = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$\nabla^2 (\nabla_i \varphi + \nabla_j H_k - \nabla_k H_j) = 0 \quad (2.2.15)$$

при условиях $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$. Уравнение (2.2.15) будет выполнено, если принять

$$\nabla_i \varphi + \nabla_j H_k - \nabla_k H_j = \nabla_j f_i,$$

где $f_i(x')$ — гармонические функции. Последним соотношениям соответствует система

$$\varphi = f_i + \nabla_k \Phi^k; \quad H_k = \nabla_k \Omega_k; \quad H_j = \nabla_i \Phi^k + \nabla_j \Omega_k, \quad (2.2.16)$$

где $\Phi^k(x_l)$; $\Omega_k(x_l)$ — произвольные функции. Для полного выполнения уравнений (2.2.15) необходимо принять

$$H_i = -\nabla_j \Phi^k + \nabla_i \Omega_k + \psi_i, \quad (2.2.17)$$

где Φ^k — бигармонические функции, подчиняющиеся уравнению $\nabla^2 \nabla^2 \Phi^k = 0$, а $\psi_i(x')$ — гармонические функции. Подстановка (2.2.16), (2.2.17) в (2.2.14) определяет компоненты вектора перемещений

$$\begin{aligned}
u_i^{(i)} &= (A-1) \nabla_i \nabla_k \Phi^k + A \nabla_i f_i; \\
u_j^{(i)} &= (A-1) \nabla_j \nabla_k \Phi^k + A \nabla_j f_i + \nabla_k \psi_i; \\
u_k^{(i)} &= (A-1) \nabla_k \nabla_k \Phi^k + \nabla^2 \Phi^i + A \nabla_k f_i - \nabla_j \psi_i.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

причем $A-1 = -m/(1+m)$. Выражения (2.2.18) содержат три возможных комбинации: первая $i=1, j=2, k=3$; вторая $i=2, j=3, k=1$; третья $i=3, j=1, k=2$, из которых в силу линейности уравнений (2.2.15) формируется общее решение

$$u_i = (A-1) \nabla_i \omega + \nabla_i f_0 + \nabla^2 \Phi^i + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k. \tag{2.2.19}$$

Здесь $\omega = \nabla_\alpha \Phi^\alpha = \nabla_1 \Phi^1 + \nabla_2 \Phi^2 + \nabla_3 \Phi^3$; $f_0 = A(f_1 + f_2 + f_3)$, причем $\nabla^2 f_0 = 0$, так как $\nabla^2 f_i = 0$ (Φ^k — произвольные бигармонические, а ψ_k — гармонические функции).

При $\Phi^k = 0$ решение (2.2.19) переходит в известное решение

$$u_i = \nabla_i f_0 + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k,$$

а при $f_0 = 0$ и $\psi_k = 0$ — в решение Галеркина

$$u_i = (A-1) \nabla_i \omega + \nabla^2 \Phi^i, \tag{2.2.20}$$

выражающее компоненты вектора перемещений через три бигармонические функции Φ^k .

Введем функции $\xi_i = \nabla^2 \Phi^i$, подчиненные уравнениям $\nabla^2 \xi_i = 0$ и независимые между собой. Действуя оператором Лапласа ∇^2 на ω , находим

$$\nabla^2 \omega = \nabla_\alpha (\nabla^2 \Phi^\alpha) = \nabla_1 \xi_1 + \nabla_2 \xi_2 + \nabla_3 \xi_3.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\omega = \omega_0 + 0,5(x^j \xi_j),$$

где ω_0 — гармоническая функция. Из (2.2.20) следует решение Папковича

$$u_i = (A-1) \nabla_i \omega + \xi_i.$$

Общее решение уравнений термоупругости

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) = (3K/G) \alpha \nabla_i \Delta T \tag{2.2.21}$$

представим в виде суммы частного решения u_i' уравнений (2.2.21) и общего решения u_i'' соответствующих однородных уравнений

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) = 0, \tag{2.2.22}$$

т. е.

$$u_i = u_i' + u_i''. \tag{2.2.23}$$

Частное решение u_i' определено в форме Гудьера

$$u_i' = \nabla_i \Phi, \quad (2.2.24)$$

где Φ — потенциал термоупругого перемещения. Подставив (2.2.24) в (2.2.21), получим уравнение

$$\nabla_i [(1+m) \nabla^2 \Phi - (3m-1) \alpha \Delta T] = 0,$$

которое будет удовлетворено, если потенциал Φ подчинен уравнению

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3m-1}{m+1} \alpha \Delta T, \quad (2.2.25)$$

решение которого определяет потенциал Φ и частное решение (2.2.24). Частному решению соответствуют деформации

$$e_{ij}' = \nabla_i \nabla_j \Phi; \quad e' = (g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi) / 3$$

и напряжения

$$\sigma_{ij}' = 2G (\nabla_i \nabla_j \Phi - \nabla^2 \Phi g_{ij}).$$

Решение уравнения (2.2.25) записывается через интеграл Пуассона

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{(3m-1)\alpha}{4\pi(m+1)} \int_V \frac{\Delta T(\mathbf{r}_0)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} dV(\mathbf{r}_0), \quad (2.2.26)$$

где $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — расстояние между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Подстановка (2.2.26) в (2.2.24) приводит к частному решению

$$\begin{aligned} u_i' &= -\frac{(3m-1)\alpha}{4\pi(m+1)} \nabla_i \int_V \frac{\Delta T(\mathbf{r}_0)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} dV(\mathbf{r}_0) = \\ &= (3m-1)\alpha \int_V \Delta T(\mathbf{r}_0) u_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0), \end{aligned}$$

где $u_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\nabla_i (1/R) / 4\pi(m+1)$.

Функции $u_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ следует рассматривать как перемещения точки $\mathbf{r}$ в направлении оси x^i , вызванные действием центра растяжение—сжатие, перемещенного в точку $\mathbf{r}_0$ неограниченного тела.

Если тело ограничено, то к решению $u_i' = \nabla_i \Phi$ необходимо добавить общее решение u_i'' однородных уравнений (2.2.22), причём требуется, чтобы перемещения (2.2.23) удовлетворяли всем заданным граничным условиям.

Уравнения термоупругости (2.2.21) можно решать методом Папковича—Нейбера, выражая перемещения через четыре функции

$$u_i = \nabla_i \Phi + \nabla_i (x^j \psi_j) - 4(1-\gamma) \psi_i,$$

где Φ и ψ_i удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(3m-1)\alpha}{m+1} \Delta T; \quad \nabla^2 \psi_i = 0.$$

Трудности применения метода Папковича—Нейбера связаны с удовлетворением граничных условий, куда входят вторые производные функций Φ и ψ_i .

В ряде случаев тепловое воздействие на упругое тело связано с медленным изменением температуры во времени, что позволяет в уравнениях движения пренебречь инерционными членами и трактовать задачу как квазистатическую. Уравнения термоупругости в перемещениях принимают вид

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{kl} \nabla_k u_l) + F_i/G = (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T; \quad (2.2.27)$$

$$\nabla^2 \Delta T - \Delta \dot{T}/\kappa - \eta g^{kl} \nabla_k \dot{u}_l = -Q/\Lambda,$$

где $\kappa = \Lambda/\rho_0 c$; $\eta = \beta T_0/\Lambda$.

Систему (2.2.27) необходимо дополнить начальными условиями $\Delta T(\mathbf{r}, 0) = \Delta T_0(\mathbf{r})$; $u_i(\mathbf{r}, 0) = u_i^0(\mathbf{r})$ при $t = t_0$ и граничными условиями. Решение представим в виде суммы частного решения u_i' , $\nabla T'$ уравнений (2.2.27) и общего решения u_i'' , $\Delta T''$ однородных уравнений

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{kl} \nabla_k u_l) = (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T; \quad (2.2.28)$$

$$\nabla^2 \Delta T - \Delta \dot{T}/\kappa - \eta g^{kl} \nabla_k \dot{u}_l = 0,$$

т. е. принять $u_i = u_i' + u_i''$; $\Delta T = \Delta T' + \Delta T''$. Особенно просто определяется частное решение уравнений (2.2.27) в упругом пространстве, когда помимо тепловых источников действуют объемные потенциальные силы $F_i = \nabla_i \Phi$, где Φ — потенциал сил. Принимая частное решение в форме $u_i' = \nabla_i \Phi$ и подставляя его в первое уравнение (2.2.27), находим

$$\nabla_i \left[\nabla^2 \Phi + \frac{\Phi}{G(m+1)} - \frac{3m-1}{m+1} \alpha \Delta T \right] = 0,$$

откуда имеем уравнение

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3m-1}{m+1} \alpha \Delta T - \frac{\Phi}{G(m+1)}. \quad (2.2.29)$$

Учитывая соотношение $g^{kl} \nabla_k \dot{u}_l = \nabla^2 \Phi$, приведем второе уравнение (2.2.27) к виду

$$\nabla^2 \Delta T - \Delta \dot{T}/\kappa - \eta \nabla^2 \Phi = -Q/\Lambda.$$

Исключая $\nabla^2\Phi$ с помощью (2.2.29), получаем уравнение

$$\nabla^2\Delta T - \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{3m-1}{m+1}\eta\alpha\right)\Delta\dot{T} = -\left(\frac{Q}{\Lambda} + \frac{\eta\dot{\Phi}}{G(m+1)}\right),$$

сходное по структуре с уравнением теплопроводности и решаемое известными методами.

Решение уравнения (2.2.29) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}_0, t)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} dV(\mathbf{r}_0),$$

где $R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = (x^i - x_0^i)g_{ij}(x^j - x_0^j)$; $f(\mathbf{r}_0, t) = (3m-1)\alpha\Delta T \times \times (\mathbf{r}_0, t)/(m+1) - \theta(\mathbf{r}_0, t)/G(m+1)$. Этому решению соответствуют перемещения $u_i' = \nabla_i\Phi$, деформации $e_{ij}' = \nabla_i\nabla_j\Phi$ и напряжения $\sigma_{ij}' = 2G(\nabla_i\nabla_j\Phi - g_{ij}\nabla^2\Phi) - \theta g_{ij}$.

Для ограниченного тела частное решение u_i' , $\Delta T'$ можно определить так, чтобы часть граничных условий была удовлетворена, если это возможно, либо принять их в качестве частных решений для пространства. Общее решение u_i'' , $\Delta T''$ должно быть выбрано так, чтобы на ограничивающей тело поверхности граничные условия выполнялись полностью. Определим напряжения и температуру в ограниченном теле методом Био. Рассмотрим однородные уравнения (2.2.28). Исключим температуру ΔT с помощью выражения для энтропии

$$s = (3m-1)\alpha g^{kl}\nabla_k u_l + \Delta T c_e/T_0$$

и получим систему из четырех уравнений с неизвестными u_i , s :

$$\nabla^2 u_i + (m + \gamma^2\beta)\nabla_i(g^{kl}\nabla_k u_l) = \gamma\beta\nabla_i s; \quad (2.2.30)$$

$$\nabla^2 s - \dot{s}/\kappa - \gamma\nabla^2(g^{kl}\nabla_k u_l) = 0,$$

де $\gamma = (3m-1)\alpha$; $\beta = T_0/c_e$, причем $g^{kl}\nabla_k u_l = 0$ для квазистатических задач. Дифференцируя первое уравнение (2.2.30) по координате x^i , получим соотношение

$$\nabla^2(g^{ij}\nabla_j u_i) = \gamma\beta\nabla^2 s/(1+m+\gamma^2\beta),$$

оторое при подстановке во второе уравнение (2.2.30) приводит уравнению

$$\nabla^2 s - \dot{s}/\kappa_1 = 0, \quad (2.2.31)$$

де $\kappa_1 = \kappa(1+m)/(1+m+\gamma^2\beta)$.

Вектор перемещений представим в форме Папковича—Нейбера

$$u_i = -\nabla_i(\varphi + x^j\psi_j) + B\psi_i; \quad B = 2(1+m+\gamma^2\beta)/(m+\gamma^2\beta), \quad (2.2.32)$$

полагая ψ гармоническим. Подстановка (2.2.32) в (2.2.30) приводит к равенству

$$\nabla_i [(1+m+\gamma^2\beta)\nabla^2\varphi+\gamma\beta s]=0,$$

откуда, в частности, следует уравнение

$$\nabla^2\varphi+\gamma\beta s/(1+m+\gamma^2\beta)=0. \quad (2.2.33)$$

Исключая из (2.2.31) и (2.2.33) энтропию s , для функции φ устанавливаем уравнение

$$\nabla^2\left(\nabla^2-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi=0,$$

решение которого будем искать в виде $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где функцию φ_1 считаем гармонической ($\nabla^2\varphi_1=0$), а функцию φ_2 — подчиненной уравнению

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2=0.$$

Итак, решение задач термоупругости методом Био для ограниченного тела приводит к определению функций φ_1 , φ_2 , ψ_i , удовлетворяющих уравнениям

$$\nabla^2\varphi_1=0; \quad \left(\nabla^2-\frac{1}{\kappa_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2=0; \quad \nabla^2\psi_i=0. \quad (2.2.34)$$

Решив уравнения (2.2.34) с учетом начальных и граничных условий, найдем функции φ и ψ_i . Затем по формулам (2.2.32) определим компоненты u_i вектора перемещений. По известному потенциалу φ с помощью (2.2.33) найдем энтропию s , а по формуле

$$\Delta T=(s-\gamma g^{kl}\nabla_k u_l)/\beta$$

вычислим температуру.

Система разрешающих уравнений (1.4.20) статических задач теории упругости и термоупругости в напряжениях состоит из трех уравнений равновесия и шести уравнений совместности деформаций, которые необходимо преобразовать прежде, чем перейти к непосредственному решению. Уравнения совместности деформаций запишем в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2\sigma_{ij}+\frac{2m}{3m-1}\nabla_i\nabla_j\sigma-\frac{m-1}{3m-1}g_{ij}\nabla^2\sigma- \\ -(\nabla_i g^{kl}\nabla_l\sigma_{kj}+\nabla_j g^{kl}\nabla_l\sigma_{ki})=0, \end{aligned}$$

полагая пока $\Delta T=0$. Учитывая уравнения равновесия, приведем их к виду

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j \sigma - \frac{m-1}{3m-1} g^{ij} \nabla^2 \sigma + (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) = 0.$$

Выполнив операцию свертывания, находим соотношение

$$\nabla^2 \sigma = -\frac{3m-1}{2(m+1)} g^{ij} (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i),$$

с помощью которого в уравнениях совместности деформаций можно исключить $\nabla^2 \sigma$ и привести их к окончательной форме

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j \sigma = & -(\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) - \\ & - \frac{m-1}{m+1} \nabla_k F^k g_{ij}. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Если объемные силы — потенциальные ($F_i = \nabla_i \varphi$; $\nabla^2 \varphi = 0$), то уравнения (2.2.35) принимают вид

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j \sigma = -2 \nabla_i \nabla_j \varphi. \quad (2.2.36)$$

Проведя в уравнениях (2.2.36) операцию свертывания, получим $\nabla^2 \sigma = 0$, т. е. σ — гармоническая функция. Применив к (2.2.36) оператор Лапласа, имеем $\nabla^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = 0$, т. е. компоненты тензора напряжений — бигармонические функции.

При наличии теплового воздействия ($\Delta T \neq 0$) уравнения совместности деформаций можно записать в форме

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j \sigma + 2G\alpha \left(\nabla_i \nabla_j \Delta T + \frac{3m-1}{3m+1} \nabla^2 \Delta T g_{ij} \right) + \\ + \frac{m-1}{m+1} \nabla_k F^k g_{ij} + (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) = 0, \end{aligned}$$

где учтены уравнения равновесия. В общем случае дисторсии уравнения совместности деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j \sigma = & -(\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) - \\ & - \frac{m-1}{m+1} \nabla_k F^k g_{ij} - 2G \{ \nabla^2 (g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0) g_{ij} - \\ & - (\nabla_i g^{k\alpha} \nabla_\alpha e_{jk}^0 + \nabla_j g^{k\alpha} \nabla_\alpha e_{ik}^0) + \\ & + \frac{m-1}{m+1} g_{ij} [\nabla^2 (g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^0) - g^{k\alpha} g^{l\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta e_{kl}^0] \} \end{aligned}$$

и являются обобщенными уравнениями Бельтрами—Митчелла, причем компоненты тензора деформаций e_{ij} и компоненты тензора напряжений σ_{ij} должны быть функциями класса C^2 , а компоненты u_i вектора перемещений — функциями класса C^3 .

Выполнение уравнений равновесия возможно только при наличии их общего решения, которое представимо как сумма частного решения $\sigma_{(1)}^{ij}$, уравнений равновесия (1.1.6) и общего решения $\sigma_{(2)}^{ij}$ однородных уравнений равновесия

$$\nabla_j \sigma^{ij} = 0, \quad (2.2.37)$$

т. е. общее решение уравнений равновесия имеет вид

$$\sigma^{ij} = \sigma_{(1)}^{ij} + \sigma_{(2)}^{ij}.$$

Разложим вектор объемных сил на потенциальную и вихревую части:

$$F^i = g^{i\alpha} \nabla_\alpha \varphi + \Lambda^{i\alpha\beta} \nabla_\alpha a_\beta, \quad (2.2.38)$$

где $\varphi = \int_V (F^i/4\pi)(1/\xi)_i dV$ — потенциал; $a_\beta = (1/4\pi) \int_V F^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}^\gamma \times (1/\xi)_\gamma dV$ — компоненты вектор-потенциала объемных сил.

Любому вектору $\mathbf{a} = a_i \mathbf{r}^i$ можно поставить в соответствии антисимметричный тензор (A) , компоненты которого совпадают с компонентами вектора $\mathbf{a}$. В этом случае можно показать, что

$$\Lambda^{i\alpha\beta} \nabla_\alpha a_\beta = \nabla_\alpha A^{i\alpha},$$

а подстановка этого равенства в (2.2.38) дает соотношение

$$F^i = g^{i\alpha} \nabla_\alpha \varphi + \nabla_\alpha A^{i\alpha} = \nabla_\alpha (g^{i\alpha} \varphi - A^{i\alpha}).$$

Тогда уравнения равновесия (1.1.6) принимают вид $\nabla_j \Phi^{ij} = 0$, где $\Phi^{ij} = \sigma^{ij} + \varphi g^{ij} - A^{ij}$.

Умножим тензор (Φ) скалярно на произвольный вектор $\mathbf{b} = b_i \mathbf{r}^i$ и определим вектор $\mathbf{M}$ с компонентами

$$M^j = \Phi^{ij} b_i, \quad (2.2.39)$$

удовлетворяющими уравнениям $\nabla_j M^j = 0$. Если считать вектор постоянным, что возможно без каких-либо ограничений, то

$$M^j = \Lambda^{jkl} \nabla_k P_l,$$

где P_l — компоненты произвольного вектора $\mathbf{P}$, которые можно представить в виде скалярного произведения произвольного тензора (N) на вектор $\mathbf{b}$, т. е. $P_l = N_{al} b^a$. В результате получим

$$M^j = \Lambda^{jkl} \nabla_k N_{al} b^a.$$

Подстановка этого выражения в (2.2.39) приводит к равенству

$$\Phi^{ij} = g^{i\alpha} \Lambda^{jkl} \nabla_k N_{al},$$

а затем к соотношению

$$\sigma^{ij} + \varphi g^{ij} - A^{ij} = g^{i\alpha} \Lambda^{jkl} \nabla_k N_{al},$$

куда входит симметричный тензор $\sigma^{ij} + \varphi g^{ij}$. Следовательно, тензор $g^{\alpha i} \Lambda^{ikl} \nabla_k N_{\alpha l} + A^{ij}$ должен быть также симметричным, но тогда

$$g^{\alpha i} \Lambda^{ikl} \nabla_k N_{\alpha l} + A^{ij} = g^{\alpha j} \Lambda^{ikl} \nabla_k N_{\alpha l} + A^{ji},$$

откуда

$$2A^{ij} = g^{\alpha j} \Lambda^{ikl} \nabla_k N_{\alpha l} - g^{\alpha i} \Lambda^{jkl} \nabla_k N_{\alpha l} = \Lambda_i^{jk} \nabla_k N^{jl} - \Lambda_i^{jk} \nabla_k N^{il}.$$

Пользуясь тождеством

$$\Lambda_i^{jk} \nabla_k N^{jl} - \Lambda_i^{jk} \nabla_k N^{il} = \nabla_j [-N^{ij} + g^{ij} \Gamma_1(N)],$$

перепишем последнее соотношение в форме

$$2a^i = \nabla_j [g^{ij} \Gamma_1(N) - N^{ij}],$$

а представив компоненты a^i в виде

$$a^i = \nabla_j (\psi g^{ij} - P^{ij}),$$

получим уравнение

$$\nabla_j [g^{ij} \Gamma_1(N) - N^{ij} - 2\psi g^{ij} + 2P^{ij}] = 0,$$

решение которого запишем как

$$g^{ij} \Gamma_1(N) - N^{ij} - 2\psi g^{ij} + 2P^{ij} = \Lambda_i^{jk} \Delta_k \Gamma^{jl}, \quad (2.2.40)$$

где Γ^{jl} — компоненты произвольного тензора (Γ).

Умножив (2.2.40) на g_{ij} и применив операцию свертывания, получим

$$\Gamma_1(N) = g_{ij} (\Lambda_i^{jk} \nabla_k \Gamma^{jl} + 2\psi g^{ij} - 2P^{ij}).$$

Подставив это выражение в (2.2.40), определим компоненты тензора (N):

$$\begin{aligned} N^{ij} = & -\Lambda_i^{jk} \nabla_k \Gamma^{jl} + 2P^{ij} - 2\psi g^{ij} + \\ & + \left[\frac{g_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - 1} (\Lambda_i^{\alpha k} \nabla_k \Gamma^{\beta l} + 2\psi g^{\alpha\beta} - 2P^{\alpha\beta}) g^{ij} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая выражения компонент N^{ij} и N^{ji} , находим компоненты

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & \Lambda_i^{jk} \nabla_k \left[\Lambda_n^{jl} \nabla_l \Gamma^{in} + \frac{g^{lj} g_{lj}}{g^{lj} g_{lj} - 1} \Lambda_n^{lk} \nabla_k \Gamma^{jn} \right] + \\ & + g^{ik} \nabla_k p^j + g^{jk} \nabla_k p^i - 2(\nabla_k p^k + \varphi) g^{ij}, \end{aligned}$$

подстановка которых в уравнения (1.1.6) с учетом равенства $\nabla_i \Lambda_j^{ik} \nabla_k (\dots) = 0$ приводит к уравнению

$$\nabla_j [g^{ik} \nabla_k p^j + g^{jk} \nabla_k p^i - 2(\nabla_k p^k + \varphi) g^{ij}] + F^i = 0.$$

Отсюда следует, что тензор (σ_1) с компонентами

$$\sigma_{(1)}^{ij} = 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_k p^k + \varphi) g^{ij} \quad (2.2.41)$$

будет частным решением уравнений (1.1.6), где $e^{ij}(\mathbf{p}) = 0,5(g^{ik}\nabla_k p^j + g^{jk}\nabla_k p^i)$ — компоненты тензора деформации вектора $\mathbf{p}$ с компонентами $p^i = (1/4\pi) \int_V (F_i/\xi) dV$.

Общее решение уравнений (2.2.37) имеет вид

$$\sigma^{ij} = \Lambda_i^{ik} \nabla_k N^{jl}, \quad (2.2.42)$$

где N^{ij} — компоненты тензора (N) , подчиненные условиям $\nabla_j[N^{ij} - \Gamma_1(N)g^{ij}] = 0$, так как тензор (σ) — симметричный. Эти условия будут выполнены, если

$$N^{ij} = \Lambda_i^{ik} \nabla_k \Pi^{jl}, \quad (2.2.43)$$

где Π^{ij} — компоненты тензора (Π) , называемого *тензором функций напряжений*. Подстановка (2.2.43) в (2.2.42) определяет общее решение уравнений (2.2.37): $\sigma_{(0)}^{ij} = \Lambda_i^{ik} \Lambda_j^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi_{(0)}^{bl}$.

Тензор функций напряжения (Π) — симметричный, его компоненты удовлетворяют условиям $\Pi^{ij} = \Pi^{ji}$, число их равно шести. Тензор (Π) определен с точностью до тензора (Γ) , компоненты которого удовлетворяют условиям

$$\Lambda_i^{jk} \Lambda_\beta^{la} \nabla_k \nabla_a \Gamma^{lb} = 0.$$

Следовательно, компоненты тензора функций напряжений (Π) равны

$$\Pi^{ij} = \Pi_{(0)}^{ij} + e^{ij}(\mathbf{a}), \quad (2.2.44)$$

а общее решение уравнений равновесия (1.1.6) имеет вид

$$\sigma^{ij} = 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_k p^k + \varphi) g^{ij} + \Lambda_i^{ik} \Lambda_j^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi^{bl}. \quad (2.2.45)$$

Компоненты тензора (Π) называются *функциями напряжений*, они произвольны. Матрица тензора (Π) имеет структуру

$$((\Pi^{ij})) = \begin{pmatrix} \Pi^{11} & \Pi^{12} & \Pi^{13} \\ \Pi^{21} & \Pi^{22} & \Pi^{23} \\ \Pi^{31} & \Pi^{32} & \Pi^{33} \end{pmatrix}.$$

Если принять $\Pi^{ii} \neq 0$, $\Pi^{ij} = 0$, $i \neq j$, то получим тензор функций напряжений Максвелла, а если принять $\Pi^{ii} = 0$, $\Pi^{ij} \neq 0$, то получим тензор функций напряжений Морера. Следует заметить, что для полного выражения шести компонент тензора напряж

ний (σ) необходимо и достаточно трех функций напряжений, поэтому общее решение (2.2.45) содержит C_6^3 различных эквивалентных форм.

Наличие уравнений совместности (2.2.35), которым должны удовлетворять компоненты тензора (σ) , указывает на существование вполне определенных уравнений, которым подчинены функции напряжений. Для вывода этих уравнений общее решение

$$\sigma_{ij} = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \Pi^{\beta l}$$

следует подставить в уравнения совместности Бельтрами—Митчелла

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma = 0,$$

учитывая при этом выражение

$$3\sigma = \nabla^2 3\Pi - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta}.$$

Выполнив подстановку, приходим к уравнениям для функций напряжений

$$\begin{aligned} & \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha (\nabla^2 \Pi^{\beta l}) + \\ & + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j (\nabla^2 3\Pi - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta}) = 0, \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

или

$$\Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha (\nabla^2 \Pi^{\beta l}) + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma = 0. \quad (2.2.47)$$

Определим интегралы уравнений (2.2.46) и (2.2.47), воспользовавшись соотношением

$$\nabla_i \nabla_j \varphi - g_{ij} \nabla^2 \varphi = -\Lambda_i^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta j}^k \nabla_\alpha \nabla_k \varphi,$$

согласно которому при $\nabla^2 \sigma = 0$

$$\nabla_i \nabla_j 3\sigma = -\Lambda_i^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta j}^k \nabla_\alpha \nabla_k 3\sigma.$$

Подстановка найденного выражения в (2.2.47) приводит к равенству

$$\Lambda_k^{ij} \Lambda_\beta^{\alpha l} \nabla_i \nabla_\alpha \left(\nabla^2 \Pi^{\beta k} - \frac{2m}{3m-1} 3\sigma g^{\beta k} \right) = 0,$$

следовательно, соотношения

$$\nabla^2 \Pi^{\beta k} - \frac{2m}{3m-1} 3\sigma g^{\beta k} = e^{\beta k}(\varphi) \quad (2.2.48)$$

являются интегралами уравнения (2.2.47), где $e^{jk}(\mathbf{v}) = g^{jk} \nabla_i v^i + g^{kj} \nabla_j v^k$ — деформация вектора $\mathbf{v}$ с компонентами v_i .

Пользуясь неопределенностью тензора функций напряжений, из (2.2.44) находим $\Pi_{(0)}^{ij} = \Pi^{ij} + e^{ij}(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Тогда приходим к равенствам

$$\nabla^2 \Pi_{(0)}^{ij} = \nabla^2 \Pi^{ij} + e^{ij}(\nabla^2 a^k); \quad \nabla^2 3\Pi_{(0)} = \nabla^2 3\Pi + 2\nabla_k(\nabla^2 a^k);$$

$$\nabla_i \nabla_j \Pi_{(0)}^{ij} = \nabla_i \nabla_j \Pi^{ij} + 2\nabla_k(\nabla^2 a^k),$$

пользуясь которыми, запишем интегралы (2.2.48) в форме

$$\nabla^2 \Pi^{ij} - \frac{2m}{3m-1} (\nabla^2 3\Pi - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta}) g^{ij} = e^{ij}(\mathbf{v}^k - \nabla^2 a^k).$$

Учитывая произвольность векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$, полагаем $\mathbf{v}^k = \nabla^2 a^k$ и в результате имеем

$$\nabla^2 \Pi^{ij} - \frac{2m}{(3m-1)} (\nabla^2 3\Pi - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta}) g^{ij} = 0.$$

Приведем преобразованные интегралы к удобному виду. Для этого умножим их на g_{ij} и проведем операцию свертывания. В результате получаем соотношения

$$-\frac{3m+1}{3m-1} \nabla^2 3\Pi + \frac{2m}{3m-1} 3\nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta} = 0,$$

с помощью которых можно исключить $\nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta}$ или $\nabla^2 3\Pi$. В первом случае имеем

$$\nabla^2 (\Pi^{ij} - \Pi g^{ij}) = 0, \quad (2.2.49)$$

во втором —

$$\nabla^2 \Pi^{ij} - \frac{2m}{3m+1} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi^{\alpha\beta} g^{ij} = 0. \quad (2.2.50)$$

Таким образом, определение функций напряжений Π^{ij} требует интегрирования уравнений (2.2.49) или (2.2.50) с учетом соответствующих граничных условий.

Влияние объемных сил на деформируемое упругое тело не может быть учтено частным решением (2.2.41), так как оно не удовлетворяет уравнениям совместности деформаций и требует соответствующего дополнения. Чтобы получить желаемое частное решение, воспользуемся уравнениями совместности деформаций

$$\Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_i \nabla_k \left(\sigma_{\alpha\gamma} - \frac{\nu}{1+\nu} 3\sigma g_{\alpha\gamma} \right) = 0,$$

которые указывают, что тензор $\sigma_{\alpha\gamma} - 3\nu\sigma g_{\alpha\gamma}/(1+\nu)$ есть деформация вектора $q = Gu$, где u — вектор перемещений, т. е.

$$\sigma_{\alpha\gamma} - 3\nu\sigma g_{\alpha\gamma}/(1+\nu) = 2e_{\alpha\gamma}(q). \quad (2.2.51)$$

Рассмотрим выражение

$$\sigma^{ij} = K^{ij} + 2e^{ij}(p) - 2(\Delta_\alpha p^\alpha + \varphi)g^{ij},$$

для которого

$$3\sigma = g_{ij}\sigma^{ij} = g_{ij}K^{ij} - 4\nabla_\alpha p^\alpha - 6\varphi,$$

где $K^{ij} = \Lambda_i^{lk} \nabla_k \left[\Lambda_n^{j\beta} \nabla_\beta \Gamma^{ln} + g^{jl} \frac{g_{\alpha\gamma}}{g_{\alpha\gamma}g^{\alpha\gamma} - 1} \Lambda_n^{\gamma\beta} \nabla_\beta \Gamma^{\alpha n} \right]$. Компоненты тензора (K) преобразуем к виду

$$K^{ij} = \Lambda_\alpha^{il} \Lambda_\beta^{kj} \nabla_l \nabla_k \Gamma^{\alpha\beta},$$

а его первый инвариант к виду

$$\Gamma_1(K) = g_{ij}K^{ij} = \nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_i \nabla_j \Gamma^{ij}.$$

Для компонент тензора напряжений и его первого инварианта соответственно имеем

$$\sigma^{ij} = \Lambda_\alpha^{il} \Lambda_\beta^{kj} \nabla_l \nabla_k \Gamma^{\alpha\beta} + 2e^{ij}(p) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \varphi)g^{ij},$$

$$\Gamma_1(\sigma) = 3\sigma = \nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_i \nabla_j \Gamma^{ij} - 4\nabla_\alpha p^\alpha - 6\varphi.$$

Подстановка выражений σ_{ij} и 3σ в (2.2.51) приводит к уравнению

$$\left[\Lambda_{m\alpha}^l \Lambda_{\beta\gamma}^k \nabla_l \nabla_k \Gamma^{m\beta} - \frac{\nu}{1+\nu} (\nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_i \nabla_j \Gamma^{ij}) g_{\alpha\gamma} \right] - \\ - 2 \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \varphi + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla_\alpha p^\alpha \right) g_{\alpha\gamma} = 2e_{\alpha\gamma}(q - p).$$

Выражение в квадратных скобках в левой части этого уравнения содержит деформацию

$$2e_{\alpha\gamma}(\nabla_j \Gamma^{ij} - 0,5 \nabla_i \Gamma_1(\Gamma)) = \nabla_\alpha \nabla_i \Gamma_\gamma^i + \nabla_\gamma \nabla_j \Gamma_\alpha^j - \nabla_\alpha \nabla_\gamma \Gamma_1(\Gamma),$$

а потому оставшаяся совокупность слагаемых здесь должна быть деформацией вектора v :

$$\nabla^2 \Gamma_{\alpha\gamma} - \frac{1}{1+\nu} (\nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_i \nabla_j \Gamma^{ij}) g_{\alpha\gamma} - \\ - 2 \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \varphi + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla_\alpha p^\alpha \right) g_{\alpha\gamma} = 2e_{\alpha\gamma}(v).$$

Представим компоненты тензора (Γ) в виде суммы $\Gamma_{\alpha\gamma} = \Pi_{\alpha\gamma} + \psi g_{\alpha\gamma}$, где ψ — произвольный скаляр, и подставим их в полученное соотношение. Тогда

$$\left[\nabla^2 \Pi_{\alpha\gamma} - \frac{1}{1+\nu} (\nabla^2 \Gamma_1(\Pi) - \nabla_i \nabla_j \Pi^{ij}) g_{\alpha\gamma} \right] - \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^2 \psi g_{\alpha\gamma} - 2 \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \varphi + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla_k p^k \right) g_{\alpha\gamma} = 2e_{\alpha\gamma}(\mathbf{v}).$$

Скаляр ψ подчиним условию

$$\frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^2 \psi + 2 \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} \varphi + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla_k p^k \right) = 0,$$

откуда находим уравнение

$$\nabla^2 \psi = -2 \left(\varphi + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla_k p^k \right). \quad (2.2.52)$$

Таким образом, искомое частное решение, которое учитывает действие объемных сил и удовлетворяет уравнениям совместности деформаций, должно иметь вид

$$\sigma_*^{ij} = 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_k p^k + \varphi) g^{ij} + \Lambda_i^{kl} \Lambda^{jl} \nabla_k \nabla_\beta \psi.$$

Следовательно, решение задач теории упругости в напряжениях при отсутствии объемных сил сводится к интегрированию уравнений (2.2.49) или (2.2.50) с учетом соответствующих граничных условий. В результате определяются функции напряжений Π^{ij} и вычисляются компоненты тензора напряжений

$$\sigma^{ij} = \Lambda_i^{kl} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_\alpha \Pi^{bl}.$$

Наличие объемных сил, действующих на тело, требует решения дополнительного уравнения (2.2.52), которое определяет скаляр ψ через потенциал φ и вектор-потенциал $\mathbf{p}$ объемных сил. Компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \varphi) g^{ij} + \\ & + \Lambda_i^{kl} \Lambda^{jl} \nabla_k \nabla_\beta \psi + \Lambda_i^{kl} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_\alpha \Pi^{bl}, \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

причем функции напряжений Π^{ij} те же, что и при отсутствии объемных сил. Если объемные силы потенциальные, то $p^\alpha = 0$ и формулы (2.2.53) упрощаются.

2.3. Общие решения разрешающих уравнений динамической теории упругости и термоупругости

Рассмотрим построение общих решений разрешающих уравнений динамической теории упругости и термоупругости, записанных в перемещениях и в напряжениях. Разрешающие уравнения в перемещениях (1.4.35), где фиктивные объемные и поверхностные силы определены соотношениями (1.4.34), следует интегрировать с учетом начальных и граничных условий (см. п. 1.4), причем динамические граничные условия должны быть представлены в форме (1.4.36).

Непосредственному построению общего решения разрешающих уравнений (1.4.35) предположим *теорему единственности*: если решение динамической задачи теории упругости существует, то оно единственное. Вначале рассмотрим построение общих решений задач динамической теории упругости. Решение характеризуется системой гиперболических уравнений, образующихся из уравнений (1.4.35) при $\Delta T=0$ и $Q=0$,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) + F_i/G &= \ddot{u}_i/a_s^2; \\ \dot{\rho} + \nabla_i (\rho \dot{u}^i) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

и соответствующими начальными и граничными условиями:

$$u_i(\mathbf{r}, 0) = u_i^0(\mathbf{r}); \quad \dot{u}_i(\mathbf{r}, 0) = v_i^0(\mathbf{r}) \quad \text{при } t=t_0; \quad (2.3.2)$$

$$u_i(\mathbf{r}, t) = u_{is}(\mathbf{r}, t) \text{ на } S_1; \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) n^j(\mathbf{r}) = p_i^{(n)}(\mathbf{r}, t) \text{ на } S_2. \quad (2.3.3)$$

Применив к уравнениям (2.3.1) операцию $g^{ij} \nabla_j (\dots)$, получим уравнение

$$G(m+1) g^{ij} \nabla_j (\nabla^2 u_i) + g^{ij} \nabla_j F_i = g^{ij} \nabla_j (\rho \ddot{u}_i),$$

которое запишем в форме

$$\square_e^2 (3e) = -g^{ij} \nabla_j F_i / G(m+1),$$

где $\square_e^2 (\dots) = \nabla^2 (\dots) - \frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\dots)$ — оператор Даламбера продольной волны; $a_e = \sqrt{G(m+1)/\rho}$ — скорость распространения продольной волны.

Применение к уравнениям (2.3.1) операции $\Lambda_i^{jk} \nabla_j (\dots)$ с учетом равенства $3\Lambda_i^{jk} \nabla_j \nabla_k (e) = 0$ приводит к уравнению

$$\Lambda_i^{jk} \nabla_j (\nabla^2 u_k) - (1/a_s^2) \Lambda_i^{jk} \nabla_j \ddot{u}_k + \Lambda_i^{jk} \nabla_j F_k / G = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\square_s^2 \omega_i = -\Lambda_i^{jk} \nabla_j F_k / G,$$

если ввести оператор Даламбера сдвиговой (поперечной) волны

$$\square_S^2(\dots) = \nabla^2(\dots) - \frac{1}{a_S^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\dots),$$

а также компоненты вектора поворота $\omega_i = \Lambda_i^{jk} \nabla_j u_k$.

Пусть объемные силы $F_i = 0$, тогда уравнения движения можно записать в виде

$$a_S^2 \nabla^2 u_i + (a_e^2 - a_S^2) \nabla_i (g^{jk} \nabla_j u_k) - \ddot{u}_i = 0$$

и представить вектор перемещений как сумму $u_i = v_i + w_i$ с дополнительными условиями $\Lambda_i^{jk} \nabla_j v_k = 0$; $g^{ij} \nabla_j w_i = 0$. Подставляя в уравнения движения указанные представления компонент u_i , а затем применяя к этому уравнению операцию дивергенции и используя второе дополнительное условие, получаем $g^{ij} \nabla_j (a_e^2 \nabla^2 v_i - \ddot{v}_i) = 0$. Ротор выражения, стоящего в скобках, равен нулю в силу первого дополнительного условия. Если дивергенция и ротор вектора в рассматриваемом объеме обращаются в нуль, то этот вектор тождественно равен нулю, т. е. $\square_e^2 v_i = 0$. Применяя к тому же уравнению операцию ротора и учитывая при этом дополнительные условия и равенство

$$\Lambda_{ik}^j \nabla_j \nabla_k (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) = \Lambda_i^{jk} \nabla_j \nabla_k (3e) = 0,$$

находим

$$\Lambda_i^{jk} \nabla_j (a_S^2 \nabla^2 w_k - \ddot{w}_k) = 0,$$

откуда следует уравнение $\square_S^2 w_i = 0$.

Вектор перемещений v связан с волной, при распространении которой происходит изменение объема при неизменной форме тела, ибо выполнено первое дополнительное условие. Вектор перемещений w связан с волной, при распространении которой происходит только изменение формы тела, ибо выполнено второе дополнительное условие. Следовательно, напряженно-деформированное состояние упругого тела при динамическом нагружении связано с распространением продольных и сдвиговых волн внутри тела.

Общее решение уравнений движения в перемещениях

$$a_S^2 \nabla^2 u_i + (a_e^2 - a_S^2) \nabla_i (g^{kl} \nabla_k u_l) - \ddot{u}_i + F_i / \rho = 0 \quad (2.3.4)$$

может быть представлено в виде суммы слагаемых $u_i = v_i + w_i$, подчиненных условиям $g^{ij} \nabla_j w_i = 0$, $\Lambda_i^{jk} \nabla_j v_k = 0$. Этим требованиям удовлетворяет решение Ляме

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k. \quad (2.3.5)$$

Если объемные силы записать в форме

$$F_i = \nabla_i \vartheta + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \chi_k, \quad (2.3.6)$$

то после подстановки (2.3.5) и (2.3.6) в (2.3.4) приходим к уравнениям

$$\square_e^2 \Phi = -\vartheta/a_e^2; \quad \square_s^2 \psi_i = -\chi_i/a_s^2. \quad (2.3.7)$$

распространяющуюся со скоростью a_e , и характеризует безвихревое поле, ибо

Первое уравнение (2.3.7) описывает продольную волну,

$$\Lambda_i^{jk} \nabla_j v_k = \Lambda_i^{jk} \nabla_j \nabla_k \Phi = 0;$$

при этом средняя деформация

$$e = \frac{1}{3} g^{ij} \nabla_i v_j = \frac{1}{3} \nabla^2 \Phi \neq 0.$$

Второе уравнение (2.3.7) описывает сдвиговую волну, распространяющуюся со скоростью a_s , которая не вызывает изменения объема и связана с изменением формы тела, ибо

$$g^{ij} \nabla_i w_j = g^{ij} \nabla_i \Lambda_j^{kl} \nabla_k \psi_l = 0.$$

Для неограниченного тела введем постулат: объемные силы F_i действуют в ограниченной области, только в этом случае напряжения и деформации на бесконечности обращаются в нуль. Граничные условия (2.3.3) отпадают и частное решение уравнений (2.3.7) является окончательным решением задачи. Зная функции Φ и ψ_i , по формулам (2.3.5) можно определить компоненты u_i вектора перемещений. Следует заметить, что в упругом пространстве волны обоих типов распространяются независимо одна от другой.

В ограниченном теле продольные и сдвиговые волны распространяются от места их возмущения до границы, а затем отражаются. Если граничные условия заданы в перемещениях, то

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k = u_{is}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S;$$

аналогично записываются другие граничные условия (2.3.3), а также начальные условия (2.3.2). Следует иметь в виду, что в ограниченном теле функции Φ и ψ_i связаны между собой граничными условиями.

Воспользуемся теоремой о полноте Клебша—Дюгамеля: для полного определения вектора перемещений $\mathbf{u}$ достаточно знать динамические потенциалы Φ и Ψ . Пусть $u_i(\mathbf{r}, t)$ — частное решение уравнений (2.3.4) при $F_i = 0$ в области D тела при $t_1 < t < t_2$, тогда существуют скалярная функция $\Phi(\mathbf{r}, t)$ и векторная функция с компонентами $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ такие, что

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k; \quad g^{ij} \nabla_i \psi_j = 0,$$

причем потенциалы Φ и ψ_i удовлетворяют уравнениям $\square_e^2 \Phi = 0$ и $\square_s^2 \psi_i = 0$. Теорема легко обобщается и на случай $F_i \neq 0$.

Разновидностью решения Ляме является представление

$$u_i = \nabla_i \Phi + w_i,$$

предложенное Сандру для определения фундаментальных решений уравнений (2.3.4). Подставляя это выражение в указанные уравнения, получим соотношение

$$\nabla_i [a_e^2 \square_e^2 \Phi + (a_e^2 - a_s^2) g^{kj} \nabla_j w_k] + a_s^2 \square_s^2 w_i + F_i / \rho = 0.$$

Функции w_i выбирают такими, чтобы выполнялись уравнения

$$\square_s^2 w_i + F_i / G = 0,$$

тогда

$$a_e^2 \square_e^2 \Phi + (a_e^2 - a_s^2) g^{ij} \nabla_i w_j = 0.$$

Применяя к последнему выражению оператор Даламбера, находим для функции Φ биволновое уравнение

$$(m+1) \square_e^2 \square_s^2 \Phi = m g^{ij} \nabla_j (F_i / G).$$

Для иллюстрации применимости решения Ляме рассмотрим осесимметричные относительно оси z цилиндрической системы координат (r, θ, z) динамические задачи. Выразим перемещения u_r и u_z через потенциалы:

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \text{ и } u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \Psi,$$

а затем подставим их в уравнения движения (2.3.1) при $F_i = 0$. После некоторых преобразований приходим к двум волновым уравнениям

$$\square_e^2 \Phi = 0; \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0,$$

причем второе из них можно привести к виду $\square_s^2 \psi = 0$, если с помощью зависимости $\Psi = -\partial \psi / \partial r$ ввести функцию ψ . В частном случае, когда имеет место только радиальное перемещение u_r , приходим к волновому уравнению $\square_e^2 \Phi = 0$, которое характеризует распространение цилиндрических волн.

Для динамических задач с центральной симметрией, рассматриваемых в сферических координатах R, θ, φ , справедлива зависимость $u_R = \partial \Phi / \partial R$, а потенциал Φ удовлетворяет волновому уравнению $\square_e^2 \Phi = 0$, которое характеризует распространение сферических волн. Уравнения движения в перемещениях (1.4.35) запишем в операторной форме

$$L_i^j(u_j) + F_i / G = 0, \quad (2.3.8)$$

где $L_i^j(\dots) = g_i^j \square_s^2(\dots) + m \nabla_i g^{jk} \nabla_k(\dots)$.

Введем функцию χ и выразим с помощью ее компонент χ_i компоненты u_i вектора перемещений:

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_1^2 & L_1^3 \\ \chi_2 & L_2^2 & L_2^3 \\ \chi_3 & L_3^2 & L_3^3 \end{vmatrix}; \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_1^1 & \chi_1 & L_1^3 \\ L_2^1 & \chi_2 & L_2^3 \\ L_3^1 & \chi_3 & L_3^3 \end{vmatrix}; \quad u_3 = \begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 & \chi_1 \\ L_2^1 & L_2^2 & \chi_2 \\ L_3^1 & L_3^2 & \chi_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.9)$$

Проводя вычисления определителей и учитывая выражения для операторов L_i^j , запишем компоненты u_i в виде

$$u_i = [(\square_s^2 + m\nabla^2)g_i^j - m\nabla_i g^{jk} \nabla_k] \varphi_j,$$

где $\varphi_j = \square_s^2 \chi_j$.

Принимая во внимание соотношение

$$\square_s^2 = (m-1)\square_e^2 - m\nabla^2,$$

преобразуем выражения для u_i к виду

$$u_i = (m+1)\square_e^2 \varphi_i - m g^{kj} \nabla_k \nabla_j \varphi_i, \quad (2.3.10)$$

выразив их через компоненты φ_i вектора φ . С целью определения функций χ_i , подставим (2.3.9) в (2.3.8) и получим уравнения

$$\begin{vmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{vmatrix} \chi_i + \frac{F_i}{G} = 0.$$

Затем, выполняя необходимые преобразования, устанавливаем уравнения

$$\square_e^2 \square_s^2 \varphi_i + F_i / G(m+1) = 0, \quad (2.3.11)$$

которым подчинены компоненты φ_i вектора φ . Выражения (2.3.10) и уравнения (2.3.11) получены Яковом. Это решение удобно в случае действия объемной силы в пространстве, когда частное решение уравнений (2.3.11) является окончательным. Для ограниченного тела предпочтительнее решение Ляме (2.3.5).

При отсутствии объемных сил уравнения (2.3.11) однородные, к ним применима теорема Боджио утверждающая, что самым общим решением уравнения

$$A_1 A_2 \dots A_n(\varphi) = 0,$$

где A_k , $k=1, \dots, n$ — некоторые операторы, действующие на функцию φ , а $\varphi^{(k)}$ удовлетворяют уравнению $A^k(\varphi^{(k)}) = 0$, является функция

$$\varphi = \sum_k \varphi^{(k)}.$$

Полнота решения задачи методом Яковаке устанавливается теоремой Стернберга—Юбенса. Пусть компоненты $u_i(\mathbf{r}, t)$ вектора перемещений являются частным решением уравнений (2.3.8) в области D для $-\infty < t < \infty$, тогда существует векторная функция φ с компонентами $\varphi_i(\mathbf{r}, t)$ такая, что компоненты u_i вектора перемещений выражаются через функции φ_i по формулам (2.3.10), при этом функции φ_i должны удовлетворять уравнениям (2.3.11).

Однородные уравнения движения (2.3.8) преобразуем к виду $\square_e^2 \square_s^2 \varphi_i = 0$, а решения этих уравнений в силу теоремы Боджо представим в форме $\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}$, где функции $\varphi_i^{(1)}$ и $\varphi_i^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\square_e^2 \varphi_i^{(1)} = 0; \quad \square_s^2 \varphi_i^{(2)} = 0. \quad (2.3.12)$$

Подстановка φ_i в (2.3.10) с учетом (2.3.12) приводит к выражению

$$u_i = (m+1) \square_e^2 \varphi_i^{(2)} - m \nabla_i g^{jk} \nabla_j (\varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)}).$$

Используя соотношения

$$(m+1) \square_e^2 = \square_s^2 + m \nabla^2,$$

находим

$$u_i = m \left[\nabla^2 \varphi_i^{(2)} - \nabla_i g^{jk} \nabla_j (\varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)}) \right],$$

но

$$\nabla_i g^{jk} \nabla_j \varphi_k^{(2)} = \nabla^2 \varphi_k^{(2)} + \Lambda_i^{jk} \Lambda_k^{\gamma\delta} \nabla_j \nabla_\gamma \varphi_\delta^{(2)},$$

поэтому

$$u_i = -m \left(g^{jk} \nabla_i \nabla_j \varphi_k^{(1)} + \Lambda_i^{jk} \Lambda_k^{\gamma\delta} \nabla_j \nabla_\gamma \varphi_\delta^{(2)} \right).$$

Введем функции

$$\Phi = -m g^{jk} \nabla_j \varphi_k^{(1)}; \quad \Psi_k = -m \Lambda_k^{\gamma\delta} \nabla_\gamma \varphi_\delta^{(2)}, \quad (2.3.13)$$

тогда имеем представление

$$u_i = \Delta_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k; \quad g^{ij} \nabla_i \Psi_j = 0,$$

эквивалентное решению Ляме, что указывает на связь между решениями Ляме и Яковаке.

Легко показать, что функции Φ и Ψ_i удовлетворяют уравнениям $\square_e^2 \Phi = 0$; $\square_s^2 \Psi_i = 0$. Действительно, подействуем операторами $\square_e^2$ и $\square_s^2$ на выражения (2.3.13):

$$\square_e^2 \Phi = -m g^{ik} \nabla_i \square_e^2 \varphi_k^{(1)}; \quad \square_s^2 \Psi_k = -m \Lambda_k^{\gamma\delta} \nabla_\gamma \square_s^2 \varphi_\delta^{(2)},$$

но, учитывая (2.3.12), устанавливаем, что функции Φ и ψ_k удовлетворяют волновым уравнениям.

Представление компонент u_i вектора перемещений с помощью функций Папковича—Нейбера

$$u_i = \nabla_i (\Phi + x^j \chi_j) - 4(1-\nu) \chi_i \quad (2.3.14)$$

также может быть использовано при решении динамических задач теории упругости. Подставляя решение Папковича—Нейбера в уравнения движения (1.4.35), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \nabla_i \left[(m+1) (\nabla^2 \Phi + x^j \nabla^2 \chi_j) - \frac{\ddot{\Phi}}{a_s^2} - \frac{1}{a_s^2} (x^j \ddot{\chi}_j) \right] - \\ - 4(1-\nu) \left(\nabla^2 \chi_i - \frac{1}{a_s^2} \ddot{\chi}_i \right) + F_i/G = 0. \end{aligned}$$

Функции χ_i следует выбирать такими, чтобы удовлетворялись уравнения

$$-4(1-\nu) \square_s^2 \chi_i + F_i/G = 0, \quad (2.3.15)$$

тогда имеем дополнительное уравнение

$$\square_s^2 \Phi + x_j \square_s^2 \chi_j = 0. \quad (2.3.16)$$

Совокупность (2.3.15) и (2.3.16) образует полную систему волновых уравнений. Функции Φ и χ запишем в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -mg^{ij} \nabla_i \varphi_j - x^j \chi_j; \quad \chi_j(\mathbf{r}, t) = -0,5 m \square_s^2 \varphi_j,$$

тогда представление Яковаче (2.3.10) переходит в представление Папковича—Нейбера (2.3.14), причем для Φ и χ_i имеем уравнения (2.3.15) и (2.3.16).

Среди рассмотренных представлений компонент u_i вектора перемещений наибольшее практическое значение имеет решение Ляме, так как оно приводит к простейшей форме волновых уравнений.

Динамические задачи теории температурных напряжений изотропного упругого тела описываются системой разрешающих уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + m \nabla_j g^{jk} \nabla_k u_k + F_i/G = \ddot{u}_i a_s^2 + (3m-1) \alpha \nabla_i \Delta T; \\ \Delta \nabla^2 \Delta T - \rho_0 c \Delta \dot{T} = -Q, \end{aligned}$$

к которым необходимо добавить соответствующие начальные и граничные условия. Здесь уравнение теплопроводности не связано с уравнениями движения, а потому его можно решать отдельно, т. е. считать распределение температуры в теле известным.

Уравнения движения интегрируют различными способами. Наиболее распространенным является способ представления компонент u_i вектора перемещений в виде

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \Delta_j \psi_k,$$

после чего уравнения движения можно привести к системе волновых уравнений

$$\square_e^2 \Phi = \gamma \Delta T; \quad \square_s^2 \psi_i = 0, \quad (2.3.17)$$

где $\gamma = (3m-1)\alpha/(m+1)$, причем объемные силы $F_i = 0$.

К уравнениям (2.3.17) следует добавить уравнение теплопроводности

$$D \Delta T = -Q/\Lambda, \quad (2.3.18)$$

где $D = \nabla^2 - (1/\kappa)(\partial/\partial t)$; $\kappa = \Lambda/\rho_0 c$.

Исключая из (2.3.17) и (2.3.18) температуру ΔT , приходим к уравнениям

$$\square_e^2 D \Phi = -\gamma Q/\Lambda; \quad \square_s^2 \psi_i = 0. \quad (2.3.19)$$

Решая уравнения (2.3.17) или (2.3.19), находим функции Φ и ψ_i , а затем с помощью приведенных соотношений компоненты u_i вектора перемещений.

Обобщением рассмотренных решений являются динамические задачи термоупругости, характеризуемые взаимосвязанной системой разрешающих уравнений:

$$\nabla^2 \Delta T - \Delta \dot{T}/\kappa - \eta g^{ij} \nabla_i \dot{u}_j = -Q/\Lambda; \quad (2.3.20)$$

$$\Delta^2 u_i + m \nabla_i g^{jk} \nabla_j u_k + F_i/G = \ddot{u}_i/a_s^2 + (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T,$$

где $\eta = G(3m-1)\alpha T_0/\Lambda$.

Механические граничные условия задают в форме перемещений u_{iS} или поверхностных сил (1.2.3) на поверхности S . Температурные условия, определяющие теплообмен через поверхность S , в общем случае, записывают в виде

$$\alpha \partial \Delta T / \partial n + \beta \Delta T = f(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S,$$

где α и β — постоянные. Если $\beta = \infty$, то на границе $\Delta T = 0$, если $\alpha = \infty$, то поверхность является теплоизолированной. Начальные условия определяют при $t = t_0$:

$$u_i(\mathbf{r}, 0) = u_i^0(\mathbf{r}); \quad \dot{u}_i(\mathbf{r}, 0) = v_i^0(\mathbf{r}); \quad \Delta T(\mathbf{r}, 0) = \Delta T^0(\mathbf{r}).$$

Система разрешающих уравнений (2.3.20) достаточно сложна, а потому ее приводят к системе простых волновых уравнений, что достигается с помощью представлений

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k; \quad F_i = \nabla_i \vartheta + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \chi_k.$$

Уравнения (2.3.20) сводят к системе волновых уравнений

$$\square_e^2 \Phi - \gamma \Delta T = -\dot{\Phi}/a_e^2; \quad \square_s^2 \psi_i = -\chi_i/a_s^2; \quad (2.3.21)$$

$$D \Delta T - \eta \nabla^2 \Phi = -Q/\Lambda,$$

причем первое и третье уравнения взаимосвязаны. Исключая из этих уравнений температуру ΔT , приходим к уравнениям продольной волны

$$(\square_e^2 D - \gamma \eta \nabla^2 \partial^2 / \partial t^2) \Phi = -\gamma Q/\Lambda - D \dot{\Phi}/a_e^2, \quad (2.3.22)$$

тогда как второе уравнение (2.3.21) описывает поперечную волну.

Необходимо отметить, что функции Φ и Ψ_i связаны между собой граничными условиями, куда входят производные этих функций, заданные перемещения u_{is} и температура ΔT_s . Исключая из первого и третьего уравнений (2.3.21) функцию Φ , приходим к уравнению

$$\left(\square_e^2 D - \gamma \eta \nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta T = -\frac{\gamma}{\Lambda} \square_e^2 Q - \frac{\eta}{a_e^2} \nabla^2 \dot{\Phi}. \quad (2.3.23)$$

Уравнения (2.3.22) и (2.3.23) имеют одинаковую структуру, которая указывает, что процесс деформации тела связан с распространением затухающей волны, обладающей дисперсией.

Итак, динамическая задача термоупругости сводится к решению системы волновых уравнений (2.3.21), причем первое и третье уравнения эквивалентны либо уравнению (2.3.22), либо (2.3.23) в зависимости от того, что требуется определить.

В упругом пространстве продольные и поперечные волны распространяются независимо. Пусть причиной движения будут источник теплоты Q и объемная сила $F_i = \nabla_i \Phi$, а $\chi_i = 0$. При однородных начальных условиях $\psi_i = 0$ во всем пространстве и возникают только продольные волны, для которых

$$u_i = \nabla_i \Phi; \quad e_{ij} = \nabla_i \nabla_j \Phi; \quad 3e = \nabla^2 \Phi;$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\nabla_i \nabla_j \Phi - \nabla^2 \Phi g_{ij} + \frac{m+1}{2a_e^2} \left(\ddot{\Phi} - \frac{\dot{\Phi}}{\rho} \right) g_{ij} \right].$$

Если в пространстве действуют объемные силы $F_i = \Lambda_i^{jk} \nabla_j \chi_k$, а источник теплоты $Q = 0$, то при однородных начальных условиях отличными от нуля будут только функции ψ_i . Следовательно, распространяются только сдвиговые волны, которые не сопровождаются выделением теплоты и для которых

$$u_i = \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k; \quad 3e = g^{kl} \nabla_j \Lambda_i^{kl} \nabla_k \psi_l = 0;$$

$$e_{ij} = (\nabla_i \Lambda_j^{\alpha\beta} + \nabla_j \Lambda_i^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \psi_\beta; \quad \sigma_{ij} = G (\nabla_i \Lambda_j^{kl} + \nabla_j \Lambda_i^{kl}) \nabla_k \psi_l.$$

В ограниченном теле возникают волны обоих типов. Решение второго уравнения (2.3.21) и уравнения (2.3.22) строим в форме двух слагаемых: частного решения Φ' , ψ_i' этих уравнений и общего решения Φ'' , ψ_i'' однородных уравнений

$$(\square_e^2 D - \gamma \eta \nabla^2 \partial^2 / \partial t^2) \Phi = 0; \quad \square_s^2 \psi_i = 0,$$

причем функции Φ'' и ψ_i'' выбираем такими, чтобы были выполнены граничные условия.

Система разрешающих уравнений динамической теории упругости и термоупругости в напряжениях для сжимаемого (1.4.37) и для несжимаемого (1.4.38) тела содержит уравнение неразрывности, уравнения движения, уравнение теплопроводности и уравнения совместности деформаций, записанные в напряжениях. С целью построения обобщенных уравнений совместности Бельтрами—Митчелла в уравнения движения в перемещениях типа (1.4.35):

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) + F_i / G = \rho \ddot{u}_i / G$$

подставим геометрические соотношения (1.1.4) и преобразуем их к виду

$$\nabla^2 e^{ij} + m \nabla_i \nabla_j (g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}) + (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) / 2G = \rho \ddot{e}_{ij} / G.$$

Затем используем физические соотношения

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3\sigma g_{ij} \right)$$

и после некоторых преобразований получим уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma - \frac{m-1}{3m-1} \nabla^2 3\sigma g_{ij} + \nabla_i F_j + \nabla_j F_i = \\ = \frac{1}{a_s^2} \left(\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3 \ddot{\sigma} g_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Свертывая уравнения (2.3.24), получим соотношение

$$\square_e^2 3\sigma + \frac{3m-1}{m+1} \nabla_i F^i = 0. \quad (2.3.25)$$

С помощью соотношений (2.3.25) уравнения (2.3.24) приводим к виду

$$\square_s^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma + \frac{m-1}{3m-1} \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{a_e^2} \right) 3 \ddot{\sigma} g_{ij} + \xi_{ij} = 0, \quad (2.3.26)$$

где $\xi_{ij} = \nabla_i F_j + \nabla_j F_i + (m-1) \nabla_k F^k g_{ij} / (m+1)$.

Уравнения (2.3.26) называются обобщенными уравнениями совместности Бельтрами—Митчелла для динамических задач

Применяя к (2.3.26) оператор $\square_e^2$, получим уравнение

$$\square_e^2 \square_s^2 \sigma_{ij} - \frac{2m}{m+1} \nabla_i \nabla_j (\nabla_k F^k) + \frac{m-1}{m+1} \square_e^2 (\nabla_k F^k) g_{ij} + \\ + \square_e^2 (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i) = 0,$$

которому подчинены компоненты тензора напряжений. При отсутствии объемных сил ($F_i = 0$) имеем $\square_e^2 \square_s^2 \sigma_{ij} = 0$; $\square_e^2 \sigma = 0$.

Компоненты тензора напряжений можно разделить на две части: $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}$, причем $\square_e^2 \sigma'_{ij} = 0$ и $\square_s^2 \sigma''_{ij} = 0$.

Уравнения (2.3.26) являются необходимыми, но не достаточными для решения конкретной задачи. Исключая из уравнений движения в перемещениях, уравнений движения в напряжениях и геометрических соотношений перемещения и деформации, приходим к соотношениям

$$\frac{1}{a_s^2} \left(\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{m-1}{3m-1} 3 \ddot{\sigma} g_{ij} \right) = \nabla_j (\nabla_k \sigma_i^k + F_i) + \nabla_i (\nabla_k \sigma_j^k + F_j), \quad (2.3.27)$$

которые являются необходимыми уравнениями динамической теории упругости.

Единственность решения динамической задачи теории упругости, если оно существует, устанавливается *теоремой единственности*: пусть на поверхности S односвязного тела действуют внешние силы $p_j^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) n^j(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$, а внутри тела компоненты σ_{ij} тензора напряжений удовлетворяют начальным условиям при $t = t_0$: $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, 0) = \sigma_{ij}^0(\mathbf{r})$; $\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, 0) = \dot{\sigma}_{ij}^0(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$, тогда при выполнении указанных условий решение динамической задачи теории упругости — единственное.

Продифференцируем уравнения (2.3.26) по x^j при $F_i = 0$ ($\xi_{ij} = 0$). Результатом будут соотношения

$$\square_s^2 g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j g^{ja} \nabla_a 3\sigma + \\ + \frac{m-1}{3m-1} \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{a_e^2} \right) g_i^a \nabla_a 3\tilde{\sigma} = 0,$$

но $\square_e^2 3\sigma = 0$, тогда получим уравнения

$$\square_s^2 g^{ja} \nabla_a \sigma_{ij} + \frac{1}{a_s^2} \frac{m}{3m-1} \nabla_i 3\tilde{\sigma} = 0. \quad (2.3.28)$$

Разрешая уравнения (1.4.37) при $F_i = 0$ и однородных начальных условиях относительно u_i , находим

$$\rho u_i(r, t) = \int_0^t (t - \tau) g^{j\alpha} \nabla_\alpha \sigma_{ij}(r, \tau) d\tau.$$

Подставляя это выражение в (2.3.28) и учитывая при этом (2.3.27), приходим к динамическим уравнениям в перемещениях, т. е. постановка задач теории упругости в напряжениях однозначно связана с постановкой задач теории упругости в перемещениях.

Динамические задачи теории термоупругости характеризуются системой разрешающих уравнений

$$\square_s^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma + \frac{m-1}{3m-1} \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{a_e^2} \right) 3\ddot{\sigma} g_{ij} + \\ + 2G\alpha \left(\nabla_i \nabla_j \Delta T + \frac{3m-1}{m+1} \nabla^2 \Delta T g_{ij} \right) - \frac{5m-1}{m+1} \rho \alpha \Delta \ddot{T} g_{ij} + \xi_{ij} = 0$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

Таким образом, решение разрешающих уравнений динамических задач, записанных в напряжениях, основано на сведениях их к системе волновых уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями, выбранными с учетом специфики конкретно рассматриваемой задачи.

2.4. Общие решения разрешающих уравнений теории пластичности и ползучести

Разрешающие уравнения задач пластичности и ползучести (см. п. 1.5) имеют общие решения, структура которых аналогична общим решениям разрешающих уравнений задач упругости и термоупругости, рассмотренных в пп. 2.2 и 2.3.

Для статических задач пластичности система разрешающих уравнений в перемещениях (1.5.11) при $\Delta T = 0$ и $R_i(\omega) = 0$ приводится к виду

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha + F_i / G = 0 \quad (2.4.1)$$

с граничными условиями (1.2.1) на части S_1 поверхности и (1.5.12) на части S_2 поверхности. Структура разрешающих уравнений (2.4.1) и граничных условий (1.2.1) и (1.5.12) полностью совпадает со структурой разрешающих уравнений и граничных условий статической задачи упругости, если внешние объемные F_i и поверхностные $p_i^{(n)}$ силы заменить соответственно на фиктивные объемные и поверхностные силы

$$F_i^* = F_i - R_i(\omega) - (3m-1)\alpha \nabla_i \Delta T; \\ p_i^{*(n)} = p_i^{(n)} + [q_{ij}(S) + \eta_{ij}(S)] n^j + \\ + 3(m-1/3)\alpha (\Delta T g_{ij})_s n^j, \quad (2.4.2)$$

считая их известными. Это позволяет использовать результаты, полученные в п. 2.2, при решении статических задач пластичности в перемещениях. В частности, можно утверждать, что решение статической задачи в перемещениях существует и оно единственное.

Для динамических задач пластичности система разрешающих уравнений в перемещениях (1.5.18) имеет вид

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha + F_i / G = \ddot{u}_i / a_s^2; \quad (2.4.3)$$

$$\dot{\rho} + \nabla_i (\rho v^i) = 0.$$

Начальными условиями ($t = t_0$) являются равенства

$$u_i(\mathbf{r}, 0) = u_i^0(\mathbf{r}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{r}, 0) = v_i^0(\mathbf{r}), \quad \rho = \rho_0, \quad (2.4.4)$$

а граничные условия выражаются в форме

$$u_i(\mathbf{r}, t) = u_{is}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S_1; \\ G[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1) \nabla_\alpha u^\alpha g_{ij}]_s n^j = p_i^{*(n)}, \quad \mathbf{r} \in S_2. \quad (2.4.5)$$

Структура разрешающих уравнений (2.4.3), начальных (2.4.4) и граничных (2.4.5) условий совпадает со структурой разрешающих уравнений (2.3.1), начальных (2.3.2) и граничных (2.3.3) условий динамической задачи упругости, если внешние объемные F_i и поверхностные $p_i^{*(n)}$ силы заменить соответственно на определяемые по формулам (2.4.2) фиктивные объемные F_i^* и поверхностные $p_i^{*(n)}$ силы, считая их известными. Это обстоятельство позволяет использовать результаты, полученные в п. 2.3, при решении динамических задач пластичности в перемещениях и считать, что решение такой задачи существует и оно единственное.

Построение общих решений разрешающих уравнений задач пластичности в напряжениях и использование при этом результатов, представленных в пп. 2.2 и 2.3, требует предварительных преобразований и использования известного доказательства единственности решения статической задачи пластичности, сформулированной в напряжениях.

Преобразуем уравнения совместности деформаций (1.5.13) по формуле

$$\Lambda_\delta^{ij} \Lambda_\beta^{ki} \nabla_i \nabla_k A_{ij} = \nabla_\delta g^{ki} \nabla_k A_{i\beta} + \nabla_\beta g^{ki} \nabla_k A_{i\delta} - \\ - \nabla^2 A_{\delta\beta} - \nabla_\delta \nabla_\beta \Gamma_1(A) + \nabla^2 \Gamma_1(A) g_{\delta\beta} - \nabla_\alpha \nabla_k A^{\alpha k} g_{\delta\beta}. \quad (2.4.6)$$

Применяя выражение (2.4.6) к уравнениям (1.5.13), используя определяющие уравнения деформационной теории (1.5.2) для $D_{ij}(\sigma)$, учитывая уравнения равновесия (1.1.6), а затем исключая с помощью операции свертывания тензора из уравнений совместности величину $\nabla^2 \Sigma \sigma$, приведем уравнения совместности к окончательной форме:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \sigma_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\sigma + (\nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta) + \\ & + \frac{m-1}{m+1} \nabla_k F^k g_{\delta\beta} + L_{\delta\beta}(\varphi, \sigma) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

где

$$L_{\delta\beta}(\varphi, \sigma) = \nabla^2(\varphi D_{\delta\beta}(\sigma)) + \frac{5m-1}{2(m+1)} \nabla_\alpha \nabla_k (\varphi D^{\alpha k}(\sigma)) g_{\delta\beta}. \quad (2.4.8)$$

Таким образом, для определения шести компонент тензора напряжений (σ) имеем три уравнения равновесия (1.1.6) и шесть уравнений совместности деформаций (2.4.7).

Если объемные силы потенциальные ($F_i = \nabla_i \varphi$; $\nabla^2 \varphi = 0$), то уравнения (2.4.7) можно записать в виде

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma + 2\nabla_i \nabla_j \tilde{\varphi} + L_{ij}(\varphi, \sigma) = 0. \quad (2.4.9)$$

Проводя операцию свертывания, находим $\nabla^2 \sigma = 0$, так как $g^{ij} L_{ij}(\varphi, \sigma) = 0$, т. е. среднее напряжение σ — гармоническая функция. Применяя к (2.4.9) оператор Лапласа, имеем

$$\nabla^2 (\nabla^2 \sigma_{ij} + L_{ij}(\varphi, \sigma)) = 0,$$

т. е. функция $\tau_{ij} = \nabla^2 \sigma_{ij} + L_{ij}(\varphi, \sigma)$ — гармоническая ($\nabla^2 \tau_{ij} = 0$), а компоненты тензора напряжений подчинены уравнениям

$$\nabla^2 \sigma_{ij} = \tau_{ij} - L_{ij}(\varphi, \sigma).$$

Преобразование уравнений совместности скоростей деформаций (1.5.14) также возможно с помощью формулы (2.4.6), определяющих уравнений теории пластического течения (1.5.5) для $D_{ij}(\epsilon)$ и следующих из них определяющих уравнений теории упругости при $\lambda = 0$, а также уравнений равновесия (1.1.6). Преобразования приводят к окончательной форме уравнений совместности скоростей деформаций

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_\alpha \nabla_k \dot{\sigma}^{\alpha k} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} + 2GL_{\delta\beta} = \\ & = (\nabla_\delta \dot{F}_\beta + \nabla_\beta \dot{F}_\delta) - 3m \nabla_\alpha \dot{F}^\alpha g_{\delta\beta}, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где $L_{\delta\beta} = \nabla^2(\dot{\lambda} D_{\delta\beta}(\sigma)) + \nabla_\alpha \nabla_k (\dot{\lambda} D^{\alpha k}(\sigma)) g_{\delta\beta}$.

Таким образом, для определения шести компонент тензора напряжений (σ) имеем три уравнения равновесия (1.1.6) и шесть уравнений совместности скоростей деформаций.

Если внешние объемные силы $F^\alpha = 0$, уравнения совместности скоростей деформаций упрощаются:

$$\nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_\alpha \nabla_k \dot{\sigma}^{\alpha k} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} + 2GL_{\delta\beta} = 0.$$

Нетрудно показать, что в этом случае $\nabla^2 \dot{\sigma} = 0$. Применяя тогда к уравнениям совместности оператор Лапласа, находим

$$\nabla^2 (\nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + 2GL_{\delta\beta}) = 0,$$

т. е. функция

$$\dot{\tau}_{\delta\beta} = \nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + 2GL_{\delta\beta}$$

— гармоническая ($\nabla^2 \dot{\tau}_{\delta\beta} = 0$), а компоненты тензора скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{\delta\beta}$ подчинены уравнениям

$$\nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} = \dot{\tau}_{\delta\beta} - 2GL_{\delta\beta}.$$

При разгрузке уравнения совместности деформаций (1.5.15) принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Delta \sigma_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\Delta\sigma + (\nabla_\delta \Delta F_\beta + \nabla_\beta \Delta F_\delta) + \\ + \frac{m-1}{m+1} \nabla_k \Delta F^k g_{\delta\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Таким образом, для определения тензора напряжений $\Delta(\sigma)$ имеем три уравнения равновесия (1.1.6) и шесть уравнений совместности (2.4.11).

Для динамических задач пластичности уравнения совместности деформаций, входящие в систему разрешающих уравнений (1.5.19), с помощью аналогичных преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\sigma - \frac{m-1}{3m-1} \nabla^2 3\sigma g_{\delta\beta} + \nabla^2 (\varphi D_{\delta\beta}(\sigma)) + \\ + \nabla_\alpha \nabla_k (\varphi D^{\alpha k}(\sigma)) g_{\delta\beta} - (\nabla_\delta g^{kl} \nabla_k \sigma_{l\beta} + \nabla_\beta g^{kl} \nabla_k \sigma_{l\delta}) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Тогда с учетом уравнений движения (1.1.8) и физических соотношений (1.5.4) для e_{ij} при $\Delta T = 0$ получаем соотношение

$$\square_e^2 3\sigma + \frac{3m-1}{m+1} \nabla_\beta F^\beta = \frac{3m-1}{m+1} v^\beta \nabla_\beta \rho, \quad (2.4.13)$$

а также обобщенные уравнения совместности Бельтрами—Митчелла для динамических задач упругопластического тела:

$$\begin{aligned} \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\sigma + \frac{m-1}{3m-1} \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{a_e^2} \right) 3\ddot{\sigma} g_{\delta\beta} + \\ + L_{\delta\beta}^{(1)}(\varphi, \sigma) + \xi_{\delta\beta} = \eta_{\delta\beta}, \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

где $\xi_{\delta\beta} = \nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta + \frac{m-1}{m+1} \nabla_k F^k$; $\eta_{\delta\beta} = \dot{v}_\beta \nabla_\delta \rho + \dot{v}_\delta \nabla_\beta \rho + \frac{m-1}{m+1} \dot{v}^k \nabla_k \rho$.

Следует заметить, что уравнения (2.4.14) являются необходимыми, но недостаточными при решении конкретных задач. Применяя к уравнениям (2.4.14) оператор Даламбера $\square_e^2$, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \square_e^2 \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + \square_e^2 L_{\delta\beta}^{(1)} - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k) + \\ & + \square_e^2 (\nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k) g_{\delta\beta} = \\ & = \square_e^2 (\dot{\nu}_\beta \nabla_\delta \rho + \dot{\nu}_\delta \nabla_\beta \rho) - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\dot{\nu}^k \nabla_k \rho) + \\ & + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\dot{\nu}^k \nabla_k \rho), \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

которому подчинены компоненты тензора напряжений.

Для однородного тела ($\nabla_k \rho = 0$) уравнения (2.4.13) и (2.4.15) упрощаются:

$$\begin{aligned} & \square_e^2 3\sigma + \frac{3m-1}{m+1} \nabla_k F^k = 0; \\ & \square_e^2 \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + \square_e^2 L_{\delta\beta}^{(1)} - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k) + \\ & + \square_e^2 (\nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k) g_{\delta\beta} = 0. \end{aligned}$$

При отсутствии объемных сил ($F_i = 0$) имеем

$$\square_e^2 3\sigma = 0; \quad \square_e^2 (\square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + L_{\delta\beta}^{(1)}) = 0.$$

Если $\Delta T \neq 0$, то рассуждения, аналогичные ранее изложенным, приводят к следующей форме уравнений совместности:

$$\begin{aligned} & \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\sigma + \frac{m-1}{3m-1} \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{1}{a_e^2} \right) 3\ddot{\sigma} g_{\delta\beta} + \\ & + L_{\delta\beta}^{(1)}(\varphi, \sigma) + M_{\delta\beta}^{(1)}(\Delta T) + \xi_{\delta\beta} = \eta_{\delta\beta}, \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

где

$$M_{\delta\beta}^{(1)} = 2G\alpha \left[\nabla_\delta \nabla_\beta \Delta T + \frac{3m-1}{m+1} \left(\nabla^2 \Delta T - \frac{5m-1}{2(3m-1)} \frac{\Delta \ddot{T}}{a_s^2} \right) g_{\delta\beta} \right]. \quad (2.4.17)$$

Применяя к (2.4.16) оператор Даламбера $\square_e^2$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \square_e^2 \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + \square_e^2 (L_{\delta\beta}^{(1)} + M_{\delta\beta}^{(1)}) - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k) + \\ & + \square_e^2 (\nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k) g_{\delta\beta} = \end{aligned}$$

$$= \square_e^2 (\dot{v}_\beta \nabla_\delta \rho + \dot{v}_\delta \nabla_\beta \rho) - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\dot{v}^k \nabla_k \rho) + \\ + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\dot{v}^k \nabla_k \rho), \quad (2.4.18)$$

которому подчинены компоненты тензора напряжений при тепловом воздействии на тело. Для однородного тела уравнения (2.4.18) принимают вид

$$\square_e^2 \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + \square_e^2 (L_{\delta\beta}^{(1)} + M_{\delta\beta}^{(1)}) - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k) + \\ + \square_e^2 (\nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k) g_{\delta\beta} = 0,$$

а при отсутствии объемных сил

$$\square_e^2 (\square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + L_{\delta\beta}^{(1)} + M_{\delta\beta}^{(1)}) = 0.$$

Итак, компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям (2.4.15), если тепловое воздействие отсутствует ($\Delta T = 0$), и уравнению (2.4.18), если $\Delta T \neq 0$. Решение указанных уравнений должно быть подчинено начальным условиям

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0, \quad \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^0 \text{ при } t = t_0 \quad (2.4.19)$$

и граничным условиям, заданным в напряжениях на части S_2 поверхности (1.2.3) и в перемещениях на части S_1 поверхности (1.2.1), которым соответствуют вполне определенные значения компонент тензора напряжений

$$\sigma_{ij}^{(s)} = G[(1 - \omega_s)(\nabla_i u_{js} + \nabla_j u_{is}) + (m - 1 - 2\omega_s/3) \nabla_k u_s^k g_{ij} - \\ - (3m - 1) \alpha \Delta T_s g_{ij}]$$

и фиктивные поверхностные силы $p_{i(S)}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(s)} n^j$. Это позволяет записать граничные условия в единой форме:

$$\sigma_{ij}(S) n^j = \begin{cases} p_{i(S)}^{(n)} & \text{на } S_1; \\ p_i^{(n)} & \text{на } S_2. \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Уравнения совместности скоростей деформаций (1.5.20), входящие в систему разрешающих уравнений динамических задач пластичности и полученные с помощью физических соотношений теории пластического течения, а также преобразований, аналогичных изложенным, можно привести к виду

$$\nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_\alpha \nabla_k \dot{\sigma}^{\alpha k} g_{\delta\beta} + \frac{2}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta \dot{\sigma} - \frac{2m}{3m-1} \nabla^2 \dot{\sigma} g_{\delta\beta} + \\ + 2G L_{\delta\beta}(\dot{\lambda}, \sigma) - (\nabla_\delta g^{kt} \nabla_k \dot{\sigma}_{t\beta} + \nabla_\beta g^{kt} \nabla_k \dot{\sigma}_{t\delta}) + \\ + \frac{2(m-1)}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta \dot{\sigma} = 0.$$

С учетом уравнений движения в виде

$$g^{ki} \nabla_k \sigma_{i\beta} = F_{\beta}^{(q)}; \quad F_{\beta}^{(q)} = \rho dv_{\beta}/dt - F_{\beta} \quad (2.4.21)$$

приведем уравнения совместности к окончательной форме:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_{\alpha} \nabla_k \dot{\sigma}^{\alpha k} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_{\delta} \nabla_{\beta} 3\dot{\sigma} + 2GL_{\delta\beta}(\dot{\lambda}, \sigma) = \\ = -(\nabla_{\delta} \dot{F}_{\beta}^{(q)} + \nabla_{\beta} \dot{F}_{\delta}^{(q)}) + 3m \nabla_{\alpha} \dot{F}_{(q)}^{\alpha} g_{\delta\beta}, \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

где $\dot{F}_{\beta}^{(q)} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{dv_{\beta}}{dt} \right) - \dot{F}_{\beta}$. В этом случае компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям движения (2.4.21) и уравнениям совместности (2.4.22) при начальных (2.4.19) и граничных (2.4.20) условиях.

Перейдем теперь к построению общего решения статической задачи пластичности в напряжениях. Решение системы разрешающих уравнений в напряжениях, составленной из уравнений равновесия (1.1.6) и уравнений совместности деформаций (2.4.7) с граничными условиями (2.4.20), имеет следующий порядок. Выполнение уравнений равновесия возможно только при наличии общего решения, которое построено в п. 2.2 и имеет вид (2.2.45). Оно содержит в себе C_6^3 различных эквивалентных форм. Наличие уравнений совместности (2.4.7), которым должны удовлетворять компоненты тензора напряжений (σ), указывает на существование вполне определенных уравнений, которым должны подчиняться функции напряжений Π^{ij} .

Если объемные силы $F_{\beta} = 0$, то общее решение (2.2.45) упрощается:

$$\sigma_{ij} = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^{\alpha} \nabla_k \nabla_{\alpha} \Pi^{\beta l}, \quad (2.4.23)$$

причем ему соответствует соотношение

$$3\sigma = \nabla^2 3\Pi - \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \Pi^{\alpha\beta}.$$

Так как

$$\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \Pi^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (\Pi^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) / 3 = \nabla^2 \Pi,$$

то $3\sigma = 2\nabla^2 \Pi$, а учитывая, что $\nabla^2 \sigma = 0$, находим $\nabla^2 \nabla^2 \Pi = 0$. Выполняя подстановку общего решения (2.4.23) в (2.4.9) при $\tilde{\varphi} = 0$, приходим к уравнениям для функций напряжений

$$\Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^{\alpha} \nabla_k \nabla_{\alpha} (\nabla^2 \Pi^{\beta l}) + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma + L_{ij}(\varphi, \sigma) = 0. \quad (2.4.24)$$

Рассмотрим выражения (2.4.8) функций $L_{ij}(\varphi, \sigma)$ с учетом общего решения (2.4.23) уравнений равновесия. С этой целью преобразуем соотношение

$$\nabla_i \nabla_j \psi - g_{ij} \nabla^2 \psi = -\Lambda_i^{\alpha\beta} \Lambda_{j\beta}^k \nabla_\alpha \nabla_k \psi.$$

С учетом тождества

$$\nabla_i \nabla_j \psi = \frac{1}{3} g^{lj} g_{ij} \nabla_l \nabla_j \psi = \frac{1}{3} g_{ij} \nabla^2 \psi$$

левая часть этого соотношения равна

$$\nabla_i \nabla_j \psi - g_{ij} \nabla^2 \psi = -\frac{2}{3} \nabla^2 \psi g_{ij},$$

следовательно,

$$\Lambda_i^{\alpha\beta} \Lambda_{j\beta}^k \nabla_\alpha \nabla_k \psi = \frac{2}{3} g_{ij} \nabla^2 \psi.$$

Компоненты девиатора напряжений $D_{ij}(\sigma)$ с учетом общего решения (2.4.23) можно записать в форме

$$D_{ij}(\sigma) = \sigma_{ij} - \sigma g_{ij} = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \Pi^{\beta l} - \frac{2}{3} \nabla^2 \Pi g_{ij},$$

но

$$\frac{2}{3} g_{ij} \nabla^2 \Pi = \Lambda_i^{\alpha\beta} \Lambda_{j\beta}^k \nabla_k \nabla_\alpha \Pi,$$

тогда

$$\begin{aligned} D_{ij}(\sigma) &= \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \Pi^{\beta l} - \Lambda_i^{\alpha\beta} \Lambda_{j\beta}^k \nabla_k \nabla_\alpha \Pi = \\ &= \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha (\Pi^{\beta l} - \Pi g^{\beta l}); \\ D^{\alpha k}(\sigma) &= g^{\alpha l} g^{kj} D_{lj}(\sigma). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что второе слагаемое в (2.4.8) равно нулю, тогда

$$L_{ij}(\varphi, \sigma) = \nabla^2 (\varphi D_{ij}(\sigma)) = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha [\varphi (\Pi^{\beta l} - \Pi g^{\beta l})]. \quad (2.4.25)$$

Подстановка (2.4.25) в (2.4.24) приводит к уравнениям

$$\Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \nabla^2 [\Pi^{\beta l} + \varphi (\Pi^{\beta l} - \Pi g^{\beta l})] + \frac{2m}{3m-1} \nabla_i \nabla_j 3\sigma = 0. \quad (2.4.26)$$

Интегралы уравнений (2.4.26) определены соотношением

$$\nabla^2 [\Pi^{\beta l} + \varphi (\Pi^{\beta l} - \Pi g^{\beta l})] - \frac{2m}{3m-1} 3\sigma g^{\beta l} = e^{\beta l}(\varphi), \quad (2.4.27)$$

где $e^{\beta l}(\varphi)$ — компоненты тензора деформаций произвольного вектора φ . В связи с неопределенностью тензора функций на-

пряжений (Π) его компоненты $\Pi^{ij} = \Pi_0^{ij} + e^{ij}(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Подстановка этих выражений в (2.4.27) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} & \nabla^2 [(1+\varphi) \Pi_0^{\beta l} - \varphi \Pi_0 g^{\beta l}] - \frac{2m}{3m-1} (\nabla^2 3\Pi_0 - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi_0^{\alpha\beta}) g^{\beta l} = \\ & = e^{\beta l}(\mathbf{v}) - \nabla^2 [(1+\varphi) e^{\beta l}(\mathbf{a}) - \varphi e(\mathbf{a}) g^{\beta l}] + \\ & + \frac{2m}{3m-1} [\nabla^2 3e(\mathbf{a}) - \nabla_\alpha \nabla_\beta e^{\alpha\beta}(\mathbf{a})] g^{\beta l}. \end{aligned}$$

В силу произвольности векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ выбираем их такими, чтобы $e_{\beta l}(\mathbf{v}) = 0$ и $e_{\beta l}(\mathbf{a}) = 0$, тогда имеем

$$\begin{aligned} & \nabla^2 [(1+\varphi) \Pi_0^{\beta l} - \varphi \Pi_0 g^{\beta l}] - \\ & - \frac{2m}{3m-1} (\nabla^2 3\Pi_0 - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Pi_0^{\alpha\beta}) g^{\beta l} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Умножив уравнения (2.4.28) на $g_{\beta l}$ и выполнив операцию свертывания, получим соотношение, с помощью которого уравнение (2.4.28) преобразуется к виду

$$\nabla^2 [(1+\varphi) (\Pi_0^{\beta l} - \Pi_0 g^{\beta l})] = 0. \quad (2.4.29)$$

Итак, определение функций напряжений $\Pi^{\beta l}$ приводит к интегрированию уравнений (2.4.29) с учетом соответствующих граничных условий.

Влияние объемных сил на деформированное состояние упругопластического тела не может быть учтено частным решением (2.2.41), так как оно не удовлетворяет уравнениям совместности деформаций и требует соответствующего дополнения. Чтобы получить требуемое частное решение, воспользуемся уравнениями совместности деформаций

$$\Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_i \nabla_k \left\{ (1+\varphi) \sigma_{\alpha\gamma} - \left[\frac{3(m-1)}{3m-1} + \varphi \right] \sigma g_{\alpha\gamma} \right\} = 0,$$

которые указывают, что тензор

$$(1+\varphi) \sigma_{\alpha\gamma} - \left[\frac{3(m-1)}{3m-1} + \varphi \right] \sigma g_{\alpha\gamma} = 2e_{\alpha\gamma}(\mathbf{q}), \quad (2.4.30)$$

где $\mathbf{q} = 2G\mathbf{u}$; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения.

Рассматривая выражение

$$\sigma^{ij} = K^{ij} + 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}) g^{ij},$$

устанавливаем, что

$$\sigma^{ij} = \Lambda_\alpha^{il} \Lambda_\beta^{kj} \nabla_l \nabla_k \Gamma^{\alpha\beta} + 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}) g^{ij},$$

а его первый инвариант

$$\Gamma_1(\sigma) = \nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_i \nabla_j \Gamma^{ij} - 4\nabla_\alpha p^\alpha - 6\tilde{\varphi}.$$

Подстановка σ^{ij} и $\Gamma_i(\sigma)$ в (2.4.30) приводит к соотношению

$$\left\{ (1+\varphi) \Lambda_{\alpha i}^l \Lambda_{\beta j}^k \nabla_l \nabla_k \Gamma^{\alpha\beta} - \left(\frac{m-1}{3m-1} + \frac{\varphi}{3} \right) [\nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_\alpha \nabla_\beta \Gamma^{\alpha\beta}] g_{ij} \right\} - \\ - 2 \left(\frac{m+1}{3m-1} \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} \right) g_{ij} = e_{ij}(\mathbf{q}) - (1+\varphi) 2e_{ij}(\mathbf{p}).$$

Выражение в квадратных скобках левой части равенства содержит деформацию

$$(1+\varphi) 2e_{\alpha\gamma} [\nabla_j \Gamma_i^j - 0,5 \nabla_i \Gamma_1(\Gamma)] = \\ = (1+\varphi) [\nabla_\alpha \nabla_i \Gamma_\gamma^i + \nabla_\gamma \nabla_j \Gamma_\alpha^j - \nabla_\alpha \nabla_\gamma \Gamma_1(\Gamma)],$$

поэтому оставшаяся совокупность слагаемых левой части должна быть деформацией вектора $\mathbf{v}$:

$$(1+\varphi) \nabla^2 \Gamma_{\delta\beta} - \left(\frac{2}{3} \varphi + \frac{2m}{3m-1} \right) [\nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_\alpha \nabla_k \Gamma^{\alpha k}] g_{\delta\beta} + \\ + 2 \left(\frac{m+1}{3m-1} \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} \right) g_{\delta\beta} = 2e_{\delta\beta}(\mathbf{v}).$$

Представим компоненты тензора (Γ) в виде $\Gamma_{\delta\beta} = \Pi_{\delta\beta} + \psi g_{\delta\beta}$, где ψ — произвольный скаляр, и подставим их в полученное соотношение:

$$\left\{ (1+\varphi) \nabla^2 \Pi_{\delta\beta} - \left(\frac{2}{3} \varphi + \frac{2m}{3m-1} \right) [\nabla^2 \Gamma_1(\Pi) - \nabla_\alpha \nabla_k \Pi^{\alpha k}] g_{\delta\beta} \right\} - \\ - g_{\delta\beta} \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{m+1}{3m-1} \right) \nabla^2 \psi - 2 \left(\frac{m+1}{3m-1} \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} \right) g_{\delta\beta} = 2e_{\delta\beta}(\mathbf{v}).$$

Подчиним скаляр ψ условию

$$\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{m+1}{3m-1} \right) \nabla^2 \psi + 2 \left(\frac{m+1}{3m-1} \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} \right) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{m+1}{3m-1} \right) \nabla^2 \psi = -2 \left(\frac{m+1}{3m-1} \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} \right). \quad (2.4.31)$$

Следовательно, искомое частное решение, учитывающее действие объемных сил и удовлетворяющее уравнениям совместности деформаций, должно иметь вид

$$\sigma^{ij} = 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}) g^{ij} + \Lambda_i^{kl} \Lambda^{bij} \nabla_k \nabla_\beta \psi. \quad (2.4.32)$$

Итак, решение задач пластичности в напряжениях, основанных на деформационной теории, при отсутствии объемных сил сводится к интегрированию уравнений (2.4.29) совместно с соответствующими граничными условиями. При их решении на-

ходим функции напряжений $\Pi^{\beta l}$ и компоненты тензора напряжений

$$\sigma^{ij} = \Lambda_l^{ik} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi^{\beta l}. \quad (2.4.33)$$

Наличие объемных сил, действующих на тело, требует решения дополнительного уравнения (2.4.31), которое определяет скаляр ψ через известные потенциал $\tilde{\varphi}$, вектор-потенциал $\mathbf{p}$ объемных сил и компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = & 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_a p^a + \tilde{\varphi}) g^{ij} + \Lambda_l^{ki} \Lambda^{\beta lj} \nabla_k \nabla_\beta \psi + \\ & + \Lambda_l^{ik} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi^{\beta l}. \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Граничные условия (2.4.20), соответствующие рассматриваемой задаче о равновесии упругопластического тела, с учетом решения (2.4.33) запишем в виде

$$\Lambda_l^{ik} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi^{\beta l} |_S n_j = p_{(n)}^i.$$

Воспользуемся формулой (2.4.6) и преобразуем левую часть этого выражения к виду

$$\begin{aligned} \Lambda_l^{ik} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi^{\beta l} &= \Lambda_l^{ik} \Lambda_\beta^{jl} \nabla_k \nabla_a \Pi_{il} = \nabla_l g^{kl} \nabla_k \Pi_{l\beta} + \\ &+ \nabla_\beta g^{kl} \nabla_k \Pi_{ll} - \nabla^2 \Pi_{l\beta} - \nabla_l \nabla_\beta \Gamma_1(\Pi) + \nabla^2 \Gamma_1(\Pi) g_{l\beta} - \\ &- \nabla_a \nabla_k \Pi^{\alpha k} g_{l\beta}. \end{aligned}$$

С учетом тождества $\nabla_l g^{kl} \nabla_k \Pi_{l\beta} = \nabla^2 \Pi_{\beta l} / 3$ можно записать

$$\begin{aligned} \nabla_l g^{kl} \nabla_k \Pi_{l\beta} + \nabla_\beta g^{kl} \nabla_k \Pi_{ll} &= (2/3) \nabla^2 \Pi_{\beta l}; \\ \nabla_l \nabla_\beta \Gamma_1(\Pi) &= (1/3) g_{\beta l} \nabla^2 \Gamma_1(\Pi) = \nabla^2 \Pi g_{\beta l}; \\ \nabla_a \nabla_k \Pi^{\alpha k} g_{\beta l} &= (1/3) \nabla^2 \Gamma_1(\Pi) g_{\beta l} = \nabla^2 \Pi g_{\beta l}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\Lambda_l^{ik} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_a \Pi^{\beta l} = -(1/3) \nabla^2 (\Pi_{\beta l} - 3\Pi g_{\beta l}),$$

т. е. граничные условия (2.4.20) определены соотношением

$$\nabla^2 (\Pi_{\beta l} - 3\Pi g_{\beta l}) |_S n^l = -3p_\beta^{(n)}. \quad (2.4.35)$$

Следовательно, определение функций напряжений $\Pi_{\beta l}$ сводится к интегрированию уравнений (2.4.29) с граничными условиями (2.4.35).

Уравнение (2.4.31) представим в форме

$$\nabla^2 \psi = -2P, \quad (2.4.36)$$

где $P = \frac{[(m+1)/(3m-1)] \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}}{\varphi/3 + (m+1)/(3m-1)}$. Граничные условия, соответствующие уравнению (2.4.36), получаются из (2.4.20) при подстановке (2.4.34):

$$2[e^{ij}(\mathbf{p})n_j - (\nabla_k p^k + \tilde{\varphi})n^i] + \Lambda_i^{ik} \Lambda^{blj} \nabla_k \nabla_\beta \psi n_j + \\ + \Lambda_i^{ik} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_k \nabla_\alpha \Pi^{bl} n_j = p_{(n)}^i.$$

С учетом граничных условий (2.4.35) для функций напряжений имеем

$$2[e^{ij}(\mathbf{p})n_j - (\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi})n^i] + \Lambda_i^{ik} \Lambda^{blj} \nabla_k \nabla_\beta \psi n_j = 0,$$

однако

$$\Lambda_i^{ik} \Lambda^{blj} \nabla_k \nabla_\beta \psi n_j = (2/3) \nabla^2 \psi n^i,$$

тогда на поверхности S должно выполняться равенство

$$\nabla^2 \psi = 3[(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}) - e^{ij}(\mathbf{p})n_i n_j]. \quad (2.4.37)$$

Решение уравнений (2.4.29) и (2.4.36) с учетом граничных условий (2.4.35) и (2.4.37) определяет функции напряжений $\Pi_{\beta i}$ и скаляр ψ . Затем по формулам (2.4.33) и (2.4.34) можно вычислить компоненты тензора напряжений (σ) .

Рассмотрим решение системы разрешающих уравнений в напряжениях, состоящей из уравнений равновесия (1.1.6) и уравнений совместности скоростей деформаций (2.4.10) с граничными условиями (2.4.20). Выполнение уравнений равновесия требует знания общего решения (2.2.45). Уравнения совместности (2.4.10), которым должны удовлетворять компоненты тензора (σ) , указывают на существование уравнений для функций скоростей напряжений $\dot{\Pi}_{ij}$.

Если объемные силы $F_\beta = 0$, то общее решение упрощается:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \dot{\Pi}^{bl}, \quad (2.4.38)$$

причем ему соответствует соотношение

$$3\dot{\sigma} = \nabla^2 3\dot{\Pi} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}^{\alpha\beta},$$

где $\dot{\sigma} = (2/3) \nabla^2 \dot{\Pi}$, а потому $\nabla^2 \nabla^2 \dot{\Pi} = 0$. Выполняя подстановку общего решения (2.4.38) в уравнения совместности (2.4.10) при $F_\alpha = 0$, приходим к следующим уравнениям для функций скоростей напряжений:

$$\nabla^2 [\Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \dot{\Pi}^{lj}] + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} + 2GL_{\delta\beta} = 0.$$

Так как $\nabla_\alpha \nabla_k [\dot{\lambda} D^{\alpha k}(\sigma)] = 0$, то

$$L_{\delta\beta}(\dot{\lambda}, \sigma) = \nabla^2 [\dot{\lambda} D_{\delta\beta}(\sigma)] = \Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \nabla^2 [\dot{\lambda} (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})].$$

Подстановка этого выражения в рассматриваемые уравнения приводит к соотношению

$$\Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \{ \nabla^2 \dot{\Pi}^{lj} + 2G \nabla^2 [\dot{\lambda} (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})] + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} \} = 0,$$

которое с учетом равенства

$$\nabla_\beta \nabla_\delta 3\dot{\sigma} = -\Lambda_{\delta}^{\alpha j} \Lambda_{\beta j}^k \nabla_\alpha \nabla_k 3\dot{\sigma}$$

преобразуется к виду

$$\Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \left\{ \nabla^2 [\dot{\Pi}^{lj} + 2G \dot{\lambda} (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})] - \frac{2m}{3m-1} 3\dot{\sigma} g^{lj} \right\} = 0.$$

Отсюда следуют интегралы уравнения

$$\nabla^2 [\dot{\Pi}^{lj} + 2G \dot{\lambda} (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})] - \frac{2m}{3m-1} 3\dot{\sigma} g^{lj} = e^{lj}(\mathbf{v}). \quad (2.4.39)$$

Пользуясь представлениями

$$\Pi^{lj} = \Pi_0^{lj} + e^{lj}(\mathbf{a}); \quad \dot{\Pi}^{lj} = \dot{\Pi}_0^{lj} + \dot{e}^{lj}(\mathbf{a})$$

и подставляя их в (2.4.39), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \nabla^2 [\dot{\Pi}_0^{lj} + 2G \dot{\lambda} (\Pi_0^{lj} - \Pi_0 g^{lj})] - \frac{2m}{3m-1} (\nabla^2 3\dot{\Pi}_0 - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}^{\alpha\beta}) g^{lj} = \\ & = e^{lj}(\mathbf{v}) + \frac{2m}{3m-1} [\nabla^2 3\dot{e}(\mathbf{a}) - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{e}^{\alpha\beta}(\mathbf{a})] g^{lj} - \\ & - \nabla^2 [\dot{e}^{lj}(\mathbf{a}) + 2G \dot{\lambda} (e^{lj}(\mathbf{a}) - e(\mathbf{a}) g^{lj})]. \end{aligned}$$

В силу произвольности векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ выберем их такими, чтобы $e^{lj}(\mathbf{v}) = 0$, $e^{lj}(\mathbf{a}) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} & \nabla^2 [\dot{\Pi}_0^{lj} + 2G \dot{\lambda} (\Pi_0^{lj} - \Pi_0 g^{lj})] - \\ & - \frac{2m}{3m-1} (\nabla^2 3\dot{\Pi}_0 - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}_0^{\alpha\beta}) g^{lj} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

Проводя свертку уравнений, имеем

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}_0^{\alpha\beta} = \frac{3m+1}{6m} \nabla^2 3\dot{\Pi}_0,$$

т. е. выражение

$$\nabla^2 3\dot{\Gamma}_0 - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Gamma}_0^{\alpha\beta} = \frac{3m-1}{6m} \nabla^2 3\dot{\Gamma}_0$$

и уравнения (2.4.40) преобразуются к виду

$$\nabla^2 [(\dot{\Gamma}_0^{IJ} - \dot{\Gamma}_0 g^{IJ}) + 2G\dot{\lambda}(\Pi_0^{IJ} - \Pi_0 g^{IJ})] = 0. \quad (2.4.41)$$

Таким образом, функции напряжений Π_0^{IJ} можно определить интегрированием уравнений (2.4.41) с учетом соответствующих граничных условий.

Частное решение уравнений равновесия, учитывающее действие объемных сил и удовлетворяющее уравнениям совместности скоростей деформаций, строится аналогично предыдущему. Воспользуемся уравнениями совместности вида

$$\Lambda_\delta^{\gamma\beta} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_I \nabla_k \left[\dot{\sigma}_{\alpha\gamma} - \frac{m-1}{3m-1} 3\dot{\sigma} g_{\alpha\gamma} + 2G\dot{\lambda}(\sigma_{\alpha\gamma} - \sigma g_{\alpha\gamma}) \right] = 0,$$

которые указывают, что

$$\dot{\sigma}_{\alpha\gamma} - \frac{m-1}{3m-1} \Gamma_1(\dot{\sigma}) g_{\alpha\gamma} + 2G\dot{\lambda}(\sigma_{\alpha\gamma} - \sigma g_{\alpha\gamma}) = 2\dot{\varepsilon}_{\alpha\gamma}(q), \quad (2.4.42)$$

где $q = 2G u$; u — вектор перемещений. Рассматривая выражение

$$\sigma^{ij} = K^{ij} + 2e^{ij}(p) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi})g^{ij},$$

устанавливаем, что

$$\dot{\sigma}^{IJ} = \Lambda_\alpha^{IJ} \Lambda_\beta^{kl} \nabla_I \nabla_k \dot{\Gamma}^{\alpha\beta} + 2\dot{e}^{IJ}(p) - 2(\nabla_\alpha \dot{p}^\alpha + \dot{\tilde{\varphi}})g^{IJ},$$

а его первый инвариант

$$\Gamma_1(\dot{\sigma}) = \nabla^2 \Gamma_1(\dot{\Gamma}) - \nabla_I \nabla_J \dot{\Gamma}^{IJ} - 4 \nabla_\alpha \dot{p}^\alpha - 6\dot{\tilde{\varphi}}.$$

Подстановка $\dot{\sigma}^{IJ}$ и $\Gamma_1(\dot{\sigma})$ в (2.4.42) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} & \left[\Lambda_{\alpha\kappa}^I \Lambda_{\gamma\beta}^k \nabla_I \nabla_k \dot{\Gamma}^{\alpha\beta} - \frac{m-1}{3m-1} (\nabla^2 \Gamma_1(\dot{\Gamma}) - \nabla_I \nabla_J \dot{\Gamma}^{IJ}) g_{\alpha\gamma} \right] - \\ & - \frac{2(m+1)}{3m-1} \nabla_\kappa \dot{p}^\kappa g_{\alpha\gamma} - \frac{4}{3m-1} \dot{\tilde{\varphi}} g_{\alpha\gamma} = 2\dot{\varepsilon}_{\alpha\gamma}(q - p); \\ & \left[\Lambda_{\alpha\kappa}^I \Lambda_{\gamma\beta}^k \nabla_I \nabla_k \dot{\Gamma}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} (\nabla^2 \Gamma_1(\Gamma) - \nabla_I \nabla_J \Gamma^{IJ}) g_{\alpha\gamma} \right] - \\ & - \frac{2}{3} \nabla_\kappa p^\kappa g_{\alpha\gamma} + 2e_{\alpha\gamma}(p) = 0. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках в левой части первого соотношения содержит скорости деформаций

$$2\dot{\epsilon}_{\alpha\gamma}(\nabla_j\dot{\Gamma}_i{}^j - 0,5\nabla_i\Gamma_1(\dot{\Gamma})) = \nabla_\alpha\nabla_i\dot{\Gamma}_\gamma{}^i + \nabla_\gamma\nabla_j\dot{\Gamma}_\alpha{}^j - \nabla_\alpha\nabla_\gamma\Gamma_1(\dot{\Gamma}),$$

а в левой части второго соотношения — деформации

$$2e_{\alpha\gamma}(\nabla_j\Gamma_i{}^j - 0,5\nabla_i\Gamma_1(\Gamma)) = \nabla_\alpha\nabla_i\Gamma_\gamma{}^i + \nabla_\gamma\nabla_j\Gamma_\alpha{}^j - \nabla_\alpha\nabla_\gamma\Gamma_1(\Gamma).$$

Оставшаяся совокупность слагаемых в левой части первого соотношения должна быть скоростью деформаций вектора $\mathbf{v}$:

$$\left[\nabla^2\dot{\Gamma}_{\alpha\gamma} - \frac{2m}{3m-1}(\nabla^2\Gamma_1(\dot{\Gamma}) - \nabla_i\nabla_j\dot{\Gamma}^{ij}) \right] + \frac{2(m+1)}{3m-1}\nabla_\kappa\dot{p}^\kappa g_{\alpha\gamma} + \\ + \frac{4}{3m-1}\dot{\Phi}g_{\alpha\gamma} = 2\dot{\epsilon}_{\alpha\gamma}(\mathbf{v}),$$

а соответственно в левой части второго соотношения — деформацией вектора $\mathbf{v}$:

$$\nabla^2\Gamma_{\alpha\gamma} - \frac{2}{3}(\nabla^2\Gamma_1(\Gamma) - \nabla_i\nabla_j\Gamma^{ij})g_{\alpha\gamma} + \frac{2}{3}\nabla_\kappa p^\kappa g_{\alpha\gamma} = 2e_{\alpha\gamma}(\mathbf{v}).$$

Представим компоненты тензора (Γ) в виде $\Gamma_{\alpha\gamma} = \Pi_{\alpha\gamma} + \psi g_{\alpha\gamma}$, где ψ — произвольный скаляр, и подставим их в полученные соотношения:

$$\nabla^2\dot{\Pi}_{\alpha\gamma} - \frac{2m}{3m-1}(\nabla^2\Gamma_1(\dot{\Pi}) - \nabla_i\nabla_j\dot{\Pi}^{ij})g_{\alpha\gamma} + \\ + \left[\nabla^2\dot{\psi} - \frac{2m}{3m-1}(3\nabla^2\dot{\psi} - \nabla_i\nabla_j\dot{\psi}g^{ij}) + \frac{2(m+1)}{3m-1}\nabla_\kappa\dot{p}^\kappa + \right. \\ \left. + \frac{4}{3m-1}\dot{\Phi} \right] g_{\alpha\gamma} = 2\dot{\epsilon}_{\alpha\gamma}(\mathbf{v}); \\ \nabla^2\Pi_{\alpha\gamma} - \frac{2}{3}(\nabla^2\Gamma_1(\Pi) - \nabla_i\nabla_j\Pi^{ij})g_{\alpha\gamma} + \\ + \left[\nabla^2\psi - \frac{2}{3}(3\nabla^2\psi - \nabla_i\nabla_j\psi g^{ij}) + \frac{2}{3}\nabla_\kappa p^\kappa \right] g_{\alpha\gamma} = 2e_{\alpha\gamma}(\mathbf{v}).$$

Подчиним скаляр ψ условиям

$$\nabla^2\dot{\psi} - \frac{2m}{3m-1}(3\nabla^2\dot{\psi} - \nabla_i\nabla_j\dot{\psi}g^{ij}) + \\ + \frac{2(m+1)}{3m-1}\nabla_\kappa\dot{p}^\kappa + \frac{4}{3m-1}\dot{\Phi} = 0; \\ \nabla^2\psi - \frac{2}{3}(3\nabla^2\psi - \nabla_i\nabla_j\psi g^{ij}) + \frac{2}{3}\nabla_\kappa p^\kappa = 0,$$

которые можно записать в форме

$$-(m+1)\nabla^2\dot{\psi} + 2[(m+1)\nabla_\kappa\dot{p}^\kappa + 2\dot{\Phi}] = 0; \quad -\nabla^2\psi + 2\nabla_\kappa p^\kappa = 0,$$

откуда находим уравнение

$$\nabla^2\dot{\psi} = 2(\nabla_\kappa\dot{p}^\kappa + 2\dot{\Phi}/m). \quad (2.4.43)$$

Таким образом, искомое частное решение, учитывающее действие объемных сил и удовлетворяющее уравнениям совместности скоростей деформаций, есть (2.4.32), однако скаляр ψ подчинен уравнению (2.4.43) и граничным условиям (2.4.37).

Ползучесть, как показано в п. 1.5, характеризуется разрешающими уравнениями (1.5.37) и (1.5.38), а также уравнениями совместности для установившейся ползучести

$$\Lambda_{\delta}^{i/j} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_l \nabla_k (f D_{ij}(\sigma)) = 0$$

и для неуставившейся ползучести

$$\Lambda_{\delta}^{i/j} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_l \nabla_k (\dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} + 1,5 f D_{ij}(\sigma)) = 0.$$

Предположим, что процессу ползучести среды предшествуют упругие деформации, тогда

$$2G \dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} = \dot{\sigma}_{ij} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \dot{\sigma} g_{ij}$$

и уравнения совместности для неуставившейся ползучести можно записать в виде

$$\Lambda_{\delta}^{i/j} \Lambda_{\beta}^{kl} \nabla_l \nabla_k \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \dot{\sigma} g_{ij} + \frac{3}{2} f D_{ij}(\sigma) \right] = 0.$$

Проводя преобразования, аналогичные ранее изложенным, приходим к уравнениям совместности в форме

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_{\alpha} \nabla_k \dot{\sigma}^{ak} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_{\delta} \nabla_{\beta} 3\dot{\sigma} + \frac{3}{2} L_{\delta\beta} = \\ = (\nabla_{\delta} \dot{F}_{\beta} + \nabla_{\beta} \dot{F}_{\delta}) - 3m \nabla_{\alpha} \dot{F}^{\alpha} g_{\delta\beta}, \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

где $L_{\delta\beta}(f, \sigma) = \nabla^2 (f D_{\delta\beta}(\sigma)) + \nabla_{\alpha} \nabla_k (f D^{\alpha k}(\sigma)) g_{\delta\beta}$.

Если объемные силы отсутствуют ($F_{\beta} = 0$), то уравнение (2.4.44) упрощается:

$$\nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_{\alpha} \nabla_k \dot{\sigma}^{ak} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_{\delta} \nabla_{\beta} 3\dot{\sigma} + \frac{3}{2} L_{\delta\beta} = 0. \quad (2.4.45)$$

Общее решение уравнений равновесия (1.5.37) есть

$$\sigma_{ij} = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^{\alpha} \nabla_k \nabla_{\alpha} \Pi^{\beta l},$$

где $\Pi^{\beta l}$ — компоненты тензора функций напряжений. Дифференцирование дает

$$\dot{\sigma}_{ij} = \Lambda_{il}^k \Lambda_{j\beta}^{\alpha} \nabla_k \nabla_{\alpha} \dot{\Pi}^{\beta l} \quad (2.4.46)$$

и соответственно $\dot{\sigma} = (2/3) \nabla^2 \dot{\Pi}$. Подставив (2.4.46) в (2.4.45), приходим к следующим уравнениям для функций скоростей напряжений:

$$\nabla^2 [\Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \dot{\Pi}^{lj}] + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} + \frac{3}{2} L_{\delta\beta} = 0.$$

Так как $\nabla_\alpha \nabla_k (f D^{\alpha k}(\sigma)) = 0$, то

$$L_{\delta\beta} = \nabla^2 (f D_{\delta\beta}(\sigma)) = \Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \nabla^2 [f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})];$$

$$\Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \left\{ \nabla^2 \dot{\Pi}^{lj} + \frac{3}{2} \nabla^2 [f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})] \right\} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} = 0.$$

Учитывая равенство

$$\nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} = -\Lambda_{\delta}^{\alpha j} \Lambda_{\beta j}^k \nabla_\alpha \nabla_k 3\dot{\sigma},$$

получаем

$$\Lambda_{\delta l}^k \Lambda_{\beta j}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \left\{ \nabla^2 \left[\dot{\Pi}^{lj} + \frac{3}{2} f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj}) \right] - \frac{2m}{3m-1} 3\dot{\sigma} g^{lj} \right\} = 0,$$

откуда следуют интегралы уравнения

$$\nabla^2 \left[\dot{\Pi}^{lj} + \frac{3}{2} f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj}) \right] - \frac{2m}{3m-1} 3\dot{\sigma} g^{lj} = e^{lj}(\mathbf{v}).$$

Преобразования, аналогичные предыдущим, при произвольности векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ приводят к равенствам

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \left[\dot{\Pi}^{lj} + \frac{3}{2} f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj}) \right] - \\ & - \frac{2m}{3m-1} (\nabla^2 3\dot{\Pi} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}^{\alpha\beta}) g^{lj} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Если провести свертку соотношений (2.4.47), то

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}^{\alpha\beta} = \frac{3m+1}{6m} \nabla^2 3\dot{\Pi}; \quad \nabla^2 3\dot{\Pi} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{\Pi}^{\alpha\beta} = \frac{3m-1}{6m} \nabla^2 3\dot{\Pi}$$

и уравнение (2.4.47) преобразуется к виду

$$\nabla^2 [(\dot{\Pi}^{lj} - \dot{\Pi} g^{lj}) + 1,5 f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})] = 0. \quad (2.4.48)$$

Итак, функции напряжений Π^{lj} определяются интегрированием уравнений (2.4.48) с учетом соответствующих граничных условий.

При установившейся ползучести уравнения (2.4.48) принимают вид

$$\nabla^2 [f (\Pi^{lj} - \Pi g^{lj})] = 0. \quad (2.4.49)$$

Если мгновенные деформации упругопластические, то

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2G} \left[\dot{\sigma}_{ij} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \dot{\sigma} g_{ij} + 2G\lambda D_{ij}(\sigma) \right],$$

а функции напряжений Π^{ij} при неустановившейся ползучести подчинены уравнениям

$$\nabla^2 [(\dot{\Pi}^{ij} - \dot{\Pi} g^{ij}) + (2G\lambda + 1,5f)(\Pi^{ij} - \Pi g^{ij})] = 0. \quad (2.4.50)$$

При наличии объемных сил ($F_\beta \neq 0$) необходимо пользоваться общим решением

$$\sigma^{ij} = 2e^{ij}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi})g^{ij} + \Lambda_i^{kl}\Lambda^{bij}\nabla_k\nabla_\beta\psi + \Lambda_i^{lk}\Lambda_\beta^{ja}\nabla_k\nabla_\alpha\Pi^{bl},$$

причем скаляр φ определять в результате решения уравнения

$$\nabla^2 \dot{\varphi} = 2(\nabla_\alpha \dot{p}^\alpha + 2\dot{\varphi}/m), \quad (2.4.51)$$

где $\mathbf{p}$ — вектор-потенциал объемных сил; $\tilde{\varphi}$ — потенциал. Функции напряжений Π^{ij} остаются теми же, что и в случае отсутствия объемных сил.

Для уравнений (2.4.48) — (2.4.50) имеют место граничные условия

$$\nabla^2 (\Pi^{ij} - 3\Pi g^{ij})|_S n_i = -3p_{(n)}^j. \quad (2.4.52)$$

где $p_{(n)}^j$ — компоненты поверхностных сил. Для уравнения (2.4.51) граничное условие на поверхности S определено равенством

$$\nabla^2 \psi = 3(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} - e_{ij}(\mathbf{p})n^i n^j). \quad (2.4.53)$$

Таким образом, при ползучести функции напряжений Π^{ij} вычисляются путем интегрирования уравнений (2.4.48) ... (2.4.50) с учетом граничных условий (2.4.52), а скаляр ψ — в результате интегрирования уравнения (2.4.51) с учетом граничного условия (2.4.53).

2.5. Решения разрешающих уравнений вязкоупругости и вязкопластичности

Система разрешающих уравнений термовязкоупругости, как показано в п. 1.6., в зависимости от выбора основных неизвестных, может быть записана в перемещениях или в напряжениях.

Если основными неизвестными считать ρ , ΔT , u_i , то система разрешающих уравнений состоит из уравнений (1.1.7), (1.6.16),

(1.6.18), куда входят интегральные операторы (1.6.19), объемные силы (1.6.20) и функция рассеяния

$$W^* = \int_0^t \Gamma(t-\tau) D^{ij}(e, \tau) D_{ij}(\dot{e}, t) d\tau.$$

Системе разрешающих уравнений соответствуют начальные условия (1.6.21) и граничные условия (1.2.1) и (1.2.3) на поверхности S области D .

Решение поставленной краевой задачи линейной вязкоупругости может быть построено операторным методом, сущность которого состоит в следующем. Вводятся операторы

$$\tilde{G}(\dots) = G(\dots) - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(t-\tau)(\dots) d\tau;$$

$$\tilde{K}(\dots) = K(\dots) - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)(\dots) d\tau,$$

с помощью которых определяющие уравнения термовязкоупругости (1.6.7) и (1.6.8) принимают вид

$$D_{ij}(\sigma) = 2\tilde{G}D_{ij}(e); \quad \sigma = 3\tilde{K}e_T; \quad e_T = e - \alpha\Delta T,$$

а физические соотношения задаются соотношениями

$$\sigma_{ij} = \tilde{G}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (\tilde{K} - 2\tilde{G}/3) \nabla_\alpha u^\alpha g_{ij} - 3\tilde{K}\alpha\Delta T g_{ij},$$

причем операторы (1.6.19) определяются выражениями

$$L_1(\dots) = \frac{1}{\tilde{G}} \tilde{G}(\dots); \quad L_2(\dots) = \frac{1}{\tilde{G}} [\tilde{K}(\dots) + \frac{1}{3} \tilde{G}(\dots)]. \quad (2.5.1)$$

Подстановка операторов (2.5.1) в уравнения движения (1.6.18) позволяет записать их в форме

$$\nabla^2 u_i + \tilde{m} \nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha + F_i^* / \tilde{G} = \ddot{u}_i / \tilde{a}_s^2, \quad (2.5.2)$$

где $\tilde{m} = \tilde{K} / \tilde{G} + 1/3$; $F_i^* = F_i - 3\tilde{K}\alpha\nabla_i \Delta T$; $\tilde{a}_s^2 = \tilde{G} / \rho$. Это указывает на эквивалентность соответствующих краевых задач вязкоупругости и упругости, что достигается заменой упругих констант G, K, m операторами $\tilde{G}, \tilde{K}, \tilde{m}$ и позволяет использовать результаты пп. 2.3 и 2.4 при решении задачи линейной вязкоупругости.

Частным случаем сформулированной динамической задачи линейной вязкоупругости является квазистатическая задача

Квазистатическими называются задачи, связанные с процессами, протекающими настолько медленно, что инерционными членами, входящими в левую часть уравнений (2.5.2), можно пренебречь и заменить их уравнениями равновесия

$$\nabla^2 u_i + \tilde{m} \nabla_i \nabla_\alpha u^\alpha + F_i^* / \tilde{G} = 0,$$

которым соответствуют граничные условия (1.2.1) и (1.2.3).

Проведенные рассуждения приводят к *принципу Вольтерра*: решение квазистатической задачи линейной вязкоупругости может быть получено из решения соответствующей задачи линейной теории упругости путем замены упругих констант интегральными операторами. При использовании принципа Вольтерра получается решение, в которое входят алгебраические или трансцендентные функции операторов по времени и которое надо расшифровать, что в общем случае связано со значительными трудностями. Принцип Вольтерра позволяет получить простые решения для таких задач вязкоупругости, в которых решение задачи теории упругости записывается как произведение рациональной функции упругих постоянных на функцию координат. Расшифровка указанных операторов осуществляется сравнительно просто в случаях, когда ядра интегральных операторов являются вырожденными или представляют собой комбинации экспоненциальных функций (обыкновенных или дробного порядка), одним из представителей которых является функция Работнова

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_n \frac{\beta n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma_*(n+1)(1+\alpha)},$$

где $\Gamma_*(n+1)(1+\alpha)$ — гамма-функция.

Другие методы решения краевых задач линейной вязкоупругости связаны с применением интегральных преобразований и будут рассмотрены в гл. 3.

Для задач вязкопластичности, как показано в п. 1.6, в зависимости от выбора основных неизвестных система разрешающих уравнений может быть записана в скоростях или в напряжениях. Если основными неизвестными считать q, p, v_i , то уравнения движения имеют вид

$$\rho dv_j/dt = F_j - \nabla_j p + \eta \nabla^2 v_j + (1/3)(\eta + \lambda) \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \\ + (\nabla_j v_k + \nabla_k v_j) g^{h\alpha} \nabla_\alpha \eta - (2/3) \nabla_j \eta \nabla_\alpha v^\alpha,$$

где $\eta = \mu + \tau_i / \dot{\gamma}_i$ в предположении известного уравнения механического поведения среды $\tau_i = \tau_i(\dot{\gamma}_i)$. Подстановка выражения для η в уравнения движения позволяет представить их в виде

$$\rho dv_j/dt = F_j - \nabla_j p + \mu \nabla^2 v_j + (\lambda + \mu) \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + D_j(v),$$

где

$$D_j(v) = \frac{\tau_i}{\dot{\gamma}_i} (\nabla^2 v_j + \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha) + (\nabla_j v_k + \nabla_k v_j) g^{k\alpha} \nabla_\alpha \left(\frac{\tau_i}{\dot{\gamma}_i} \right) - \frac{2}{3} \nabla_\alpha v^\alpha \nabla_j \left(\frac{\tau_i}{\dot{\gamma}_i} \right). \quad (2.5.3)$$

В этом случае система разрешающих уравнений, основанная на использовании кинематических (1.1.2) и физических (1.6.40) соотношений, принимает вид

$$\begin{aligned} dp/dt + \rho \nabla_\alpha v^\alpha &= 0; \quad p = p(\rho); \\ \rho dv_j/dt &= F_j - \nabla_j p + \mu \nabla^2 v_j + (\lambda + \mu) \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + D_j(v) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

и является системой разрешающих уравнений вязкопластичности. Этой системе уравнений соответствуют начальные условия $\rho = \rho_0$, $p = p_0$, $v_i = v_{i0}$ при $t = 0$, а также граничные условия

$$\begin{aligned} \rho(S) &= \rho_s, \quad v_j(S) = v_{js} \text{ на } S \text{ и } \sigma_{kj}(S) n^k = \\ &= p_j^{(n)} \text{ на } S_2. \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Таким образом, совокупность уравнений (2.5.4) с начальными и граничными условиями образует краевую задачу вязкопластичности, сформулированную в скоростях.

Структура уравнений движения, входящих в (2.5.4), показывает, что при $D_j(v) = 0$ и $\lambda = \lambda' - 2\mu/3$ имеем уравнения движения Навье—Стокса для вязкой жидкости. Это позволяет при решении краевой задачи вязкопластичности воспользоваться методом последовательных приближений, считая исходное и последующие приближения решениями соответствующих краевых задач механики вязкой жидкости. Учитывая (1.6.40) и (1.1.2) представим граничные условия в напряжениях (2.5.5) в форме

$$\begin{aligned} p_j^{(n)} + p n_j &= n^k [\mu (\nabla_k v_j + \nabla_j v_k) + \\ &+ (1/3) (\lambda - 2\mu) \nabla_\alpha v^\alpha g_{kj}] + n^k q_{kj}, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где

$$q_{kj} = (\tau_i / \dot{\gamma}_i) [(\nabla_k v_j + \nabla_j v_k) - (2/3) \nabla_\alpha v^\alpha g_{kj}]. \quad (2.5.7)$$

Для несжимаемой вязкопластической среды $dp/dt = 0$, уравнение неразрывности упрощается и система разрешающих уравнений (2.5.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha v^\alpha &= 0; \quad p = p(\rho); \\ \rho dv_j/dt &= F_j - \nabla_j p + \mu \nabla^2 v_j + D_j(v), \end{aligned}$$

где

$$D_j(v) = (\tau_i / \dot{\gamma}_i) \nabla^2 v_j + (\nabla_j v_k + \nabla_k v_j) g^{k\alpha} \nabla_\alpha (\tau_i / \dot{\gamma}_i).$$

Граничные условия в напряжениях (2.5.6) также упрощаются:

$$p_j^{(n)} + p n_j = n^k \mu (\nabla_k v_j + \nabla_j v_k) + n^k q_{kj},$$

где $q_{kj} = (\tau_i / \dot{\gamma}_i) (\nabla_k v_j + \nabla_j v_k)$.

Системы разрешающих уравнений краевых задач вязкопластичности в скоростях являются нелинейными, их точное решение возможно только в частных случаях.

Если основными неизвестными считать ρ , p , v_j и σ_{kj} , то система разрешающих уравнений основана на использовании физических соотношений (1.6.41) в предположении известного уравнения механического поведения среды $\tau_i = \tau_i(\dot{\gamma}_i)$ и включает в себя уравнения (1.1.7), (1.1.8), (1.6.42) и уравнение сжимаемости $p = p(\rho)$. Уравнения совместности (1.6.42) с помощью (2.4.6) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\eta} \nabla^2 D_{\delta\beta}(\sigma) + g^{lk} \nabla_l \frac{1}{\eta} \nabla_k D_{\delta\beta}(\sigma) + \frac{1}{6} \nabla^2 \frac{1}{\eta} D_{\delta\beta}(\sigma) - \\ & - \nabla_k \frac{1}{2\eta} (\nabla_\delta \sigma_\beta^k + \nabla_\beta \sigma_\delta^k) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2\eta} - \frac{1}{\lambda} \right) \nabla^2 \sigma g_{\delta\beta} + \\ & + \left(\nabla_\beta \frac{1}{\eta} \nabla_\delta \sigma + \nabla_\delta \frac{1}{\eta} \nabla_\beta \sigma \right) = \frac{2}{3\lambda} \nabla^2 p g_{\delta\beta} + \\ & + \nabla_\delta \left[\frac{1}{2\eta} \left(\rho \frac{dv_\beta}{dt} - F_\beta \right) \right] + \nabla_\beta \left[\frac{1}{2\eta} \left(\rho \frac{dv_\delta}{dt} - F_\delta \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Таким образом, краевой задаче вязкопластичности в напряжениях соответствует система разрешающих уравнений, составленная из уравнений совместности (2.5.8), уравнения неразрывности, уравнения сжимаемости среды, уравнений движения, а также начальных и граничных условий. Система разрешающих уравнений краевой задачи вязкопластичности является нелинейной, поэтому возможно только приближенное ее решение.

2.6. Типовые уравнения, способы их решения

Многие задачи механики сплошной среды, по крайней мере в линейной постановке, сводятся к интегрированию типовых уравнений математической физики, к которым относятся уравнения Лапласа и Пуассона, волновое уравнение, уравнение теплопроводности, бигармоническое и биволновое уравнения и другие, а потому возникает необходимость в их решении с учетом заданных начальных и граничных условий.

Рассмотрим указанные уравнения в евклидовом пространстве E_m размерностью m . Точку пространства будем обозначать $x = \{x^j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, а область пространства — D с поверхностью S . Символом D_δ обозначим пограничную полосу

поверхности. Она представляет собой совокупность точек области, расстояние от которых до границы S области D не превосходит заданной постоянной δ , называемой шириной полоски, причем предполагается, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} |D_\delta| = 0$.

Пусть G — множество в пространстве E_m . Множество функций непрерывных и ограниченных в G , обозначим $C(G)$; множество функций, имеющих в G непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно, обозначим $C^{(k)}(G)$. Функция $u(x)$, определенная на множестве G , удовлетворяет условию Липшица с показателем λ , если для любых точек x и $x' \in G$ справедливо неравенство

$$|u(x') - u(x)| \leq A|x' - x|,$$

где A и λ — положительные постоянные. Если $\lambda > 1$, то $u = \text{const}$, поэтому считают $0 < \lambda \leq 1$.

Функция, определенная почти всюду в области D , называется *локально суммируемой* в области D , если она суммируема на любом компакте, содержащемся в этой области. Множество таких функций обозначают $L_{\text{loc}}(D)$. Замыкание множества точек, в которых непрерывная функция $u(x)$ отлична от нуля, называется ее *носителем* и обозначается символом $\text{supp } u$.

Большинство линейных задач механики сплошной среды описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, линейными относительно старших производных:

$$A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0. \quad (2.6.1)$$

Уравнение первого порядка

$$A_{jk}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0 \quad (2.6.2)$$

называется *уравнением характеристик* дифференциального уравнения (2.6.1). Построение уравнения характеристик (2.6.2) проводят в следующем порядке. Составляют квадратичную форму

$$(At, t) = A_{jk} t^j t^k,$$

соответствующую матрице A старших коэффициентов уравнения (2.6.1). В этой форме полагают $t^k = \partial \omega / \partial x_k$ и полученное выражение приравнивают нулю. Если функция $\omega(x_j)$ удовлетворяет уравнению характеристик (2.6.2), то поверхность $\omega(x_j) = C$ называется *характеристикой* уравнения (2.6.1), где C — постоянная. Характеристики инвариантны при преобразовании независимых переменных x_j . Далее в любой точке прост-

пространства с помощью линейного преобразования независимых переменных $y_k(x_j)$ уравнение (2.6.1) приводят к виду

$$A_{kk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_k} + \Phi_1 \left(y_k, u, \frac{\partial u}{\partial y_k} \right) = 0,$$

называемому *каноническим*. При A_{jk} постоянных уравнение (2.6.1) можно привести к каноническому виду во всем пространстве E_m . Уравнения Лапласа, теплопроводности и волновое имеют канонический вид.

Дифференциальный оператор

$$Lu = A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u$$

называется *сопряженным* с оператором

$$Mu = \frac{\partial^2 (A_{jk} u)}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial (A_k u)}{\partial x_k} + A_0 u$$

тогда и только тогда, когда эти операторы можно представить в виде

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu; \\ Mu &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial (B_k u)}{\partial x_k} + Cu, \end{aligned}$$

где $B_k = A_k - \partial A_{jk} / \partial x_j$; $C = A_0$.

Если $M=L$, то оператор L называется *самосопряженным*. Условием самосопряженности оператора L является равенство $B_k=0$; самосопряженный оператор имеет вид

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Cu; \quad A_{jk} = A_{kj}.$$

Оператор Лапласа $\nabla^2 u$ и волновой оператор $\square^2 u$ — самосопряженные, оператор теплопроводности $\partial u / \partial t - \nabla^2 u$ не является самосопряженным.

Пусть уравнение

$$Lu = f \tag{2.6.3}$$

имеет решение $u \in C^{(l)}(D)$, которое удовлетворяет тождеству

$$\int_D u M \varphi dV = \int_D f \varphi dV; \quad A \varphi \in \tilde{M}^{(l)}(D), \tag{2.6.4}$$

где M — оператор, сопряженный с оператором L ; $\tilde{M}^{(l)}(D)$ — множество l раз непрерывно дифференцируемых в области D функций, которые обращаются в нуль в пограничной полоске D_0 .

Предположим, что функция $f(x)$ локально суммируема в D ($f \in L_{\text{loc}}(D)$), тогда функция $u \in L_{\text{loc}}(D)$ называется *обобщенным решением* уравнения (2.6.3) в области D , если она удовлетворяет тождеству (2.6.4). Обобщенному решению соответствуют обобщенные производные

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Упорядоченная последовательность m целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ называется *мультииндексом* порядка m , а число $|\alpha| = \sum_{k=1}^m \alpha_k$ — длиной мультииндекса.

Для обобщенного решения уравнения (2.6.3) справедлива следующая теорема: пусть $u(x)$ — локально суммируемое обобщенное решение уравнения (2.6.3) в области D ; если функция $u(x)$ имеет обобщенные производные, входящие в (2.6.3), то эта функция почти всюду в области D удовлетворяет указанному уравнению.

Функция $f(x)$ называется *обобщенной*, если функционал

$$(f, \varphi) = \int_D f(x) \varphi(x) dV; \quad \forall \varphi \in \Omega(D)$$

линеен и непрерывен в пространстве Ω , причем пространство Ω есть множество $\tilde{M}^{(\infty)}(D)$ вещественных функций, финитных в области $D \subset E^m$. Пространство обобщенных функций обозначается символом $\Omega'(D)$.

Локально суммируемые обобщенные функции называются *регулярными*, остальные обобщенные функции — *сингулярными*. Важнейшей сингулярной обобщенной функцией будет δ -функция Дирака, определяемая формулой

$$[\delta(x-y), \varphi(y)] = [\delta(y-x), \varphi(y)] = \varphi(x); \quad \forall \varphi \in \Omega; \quad \forall x \in D.$$

Отсюда следует, что $[\delta(x), \varphi(x)] = \varphi(0)$, δ -функция равна нулю всюду, кроме начала координат; носитель δ -функции состоит из одной точки $x=0$.

Обобщенная функция f имеет порядок сингулярности $s(f) \leq j$, если ее можно представить в виде

$$f = \sum_{|\alpha| < j} D^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L_{\text{loc}}(D).$$

Если число j уменьшить невозможно, то порядок сингулярности обобщенной функции $s(f) = j$. Порядок сингулярности локально суммируемой функции равен нулю.

В области $D \subset E_m$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0} A_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad (2.6.5)$$

коэффициенты которого $A_\alpha \in C^{(j+|\alpha|)}(D)$, где $0 \leq j \leq \infty$ — целое число. Если u есть решение уравнения (2.6.5) в классе Ω'_j , то $s(u) \leq j$, $s(A_\alpha D^\alpha u) \leq j + |\alpha|$, левая часть уравнения будет обобщенной функцией класса $\Omega'_{j+s}(D)$, а потому свободный член уравнения $f \in \Omega'_{j+s}(D)$. Если решение u класса $\Omega'_j(D)$ существует, то можно рассматривать u как обобщенное решение уравнения (2.6.5), определяемое тождеством

$$(u, M\varphi) = (f, \varphi); \quad \forall \varphi \in \Omega_{j+s}(D),$$

где M — оператор, сопряженный с L . Отсюда следует, что локально суммируемое обобщенное решение уравнения (2.6.5) будет регулярной обобщенной функцией.

Особо важную роль играют решения уравнения

$$(Lv)(y) = \sum_{|\alpha|=0}^l A_\alpha(y) D_y^\alpha v = \delta(x-y),$$

называемые *сингулярными решениями* уравнения (2.6.5). Они являются функциями двух точек $x, y \in D$, $v(x, y)$ и удовлетворяют соотношению

$$[v(x-y), (M\varphi)(y)] = [\delta(x-y), \varphi(y)] = \varphi(x); \quad \forall \varphi \in \Omega_{j+s}(D).$$

Для самосопряженного оператора L соотношение принимает вид

$$[v(x-y), (L\varphi)(y)] = \varphi(x); \quad \forall \varphi \in \Omega_{j+s}(D).$$

Сингулярное решение уравнения Лапласа $\nabla^2 u = 0$ строится как обобщенная функция класса $\Omega'(E_m)$, подчиняется уравнению — $\Delta^2 v = \delta(x-y)$ и имеет вид

$$v(x, y) = \frac{1}{(m-2)|S_c|} \frac{1}{r^{m-2}}, \quad m > 2,$$

где S_c — поверхность единичной сферы; $r = |x-y|$. При $m=2$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}.$$

Сингулярное решение уравнения теплопроводности $\partial u / \partial t - \nabla^2 u = 0$ строится в виде $v(x-y, t-\tau)$, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \nabla_y^2 v = -\delta(x-y, t-\tau)$$

и имеет вид

$$v(x-y, t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^m} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} & \text{при } \tau < t; \\ 0 & \text{при } \tau \geq t. \end{cases}$$

Сингулярное решение волнового уравнения $\square^2 u = 0$ строится в виде $v(x-y, t-\tau)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \nabla_y^2 v = \delta(x-y, t-\tau)$$

и имеет вид

$$v(x-y, t-\tau) = \frac{1}{(m-2)! |S_c|} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} q_0\left(\frac{t-\tau}{r}\right),$$

где

$$q_0(\lambda) = \begin{cases} \int_1^\lambda (z^2-1)^{\frac{m-3}{2}} dz & \text{при } \lambda > 1; \\ 0 & \text{при } \lambda \leq 1. \end{cases}$$

При $m=2$ получаем

$$v(x-y, t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} & \text{при } t-\tau > r; \\ 0 & \text{при } t-\tau \leq r; \end{cases}$$

а при $m=3$

$$v(x-y, t-\tau) = \delta(t-\tau-r)/4\pi r.$$

Рассмотрим подробно уравнение Лапласа

$$\nabla^2 u = 0 \tag{2.6.6}$$

и уравнение Пуассона

$$\nabla^2 u = f,$$

где $u(x)$ — искомая, а $f(x)$ — заданная функции. Это уравнение эллиптического типа, соответствующие статическим и стационарным задачам механики сплошной среды, поэтому их интегрирование следует проводить совместно с граничными условиями.

Уравнению Лапласа (2.6.6) соответствуют гармонические функции. Функция $u(x)$ называется *гармонической* в конечно области D с поверхностью S , если она в этой области дважды

непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция $u(x)$ будет гармонической в бесконечной области D , если в каждой точке этой области, находящейся на конечном расстоянии от начала координат, она дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению Лапласа и для достаточно больших $|x|$ справедливо неравенство $|u(x)| \leq C|x|^{2-m}$, где C — постоянная; m — размерность пространства. Данное определение гармонической функции относится к открытой области и не накладывает никаких ограничений на поведение функции на поверхности S .

Гармонические функции $u(x) \in C^{(2)}(\bar{D})$, для них существует интегральное представление

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_c|} \int_S \left[\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} \right] d_y S \quad \text{при } m > 2;$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] d_y S \quad \text{при } m=2$$

и справедлива теорема: функция, гармоническая в некоторой области, имеет в этой области производные всех порядков.

Для гармонических функций характерны прямая и обратная теоремы о среднем. *Прямая теорема о среднем* утверждает: если функция гармоническая в некотором шаре и непрерывна в соответствующем замкнутом шаре, тогда значение этой функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере, ограничивающей данный шар

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_c| R^{m-1}} \int_{S_c} u dS_c, \quad (2.6.7)$$

где R — радиус шара.

Формулу (2.6.7) можно преобразовать к виду

$$u(x) = \int_D u(\xi) \omega_a(r) dV; \quad \forall x \in D \setminus D_{2a},$$

где $\omega_a(r) = \omega_a(|\xi - x|)$ — усредняющее ядро с радиусом усреднения a .

Обратная теорема о среднем утверждает: если D — конечная область пространства E_m и $u \in C(D)$, а также если для любого шара вместе со своей границей, принадлежащей области D , функция $u(x)$ удовлетворяет формуле (2.6.7), то эта функция гармоническая в области D .

Пусть $D \subset E_m$ конечная область, $u \in C^{(2)}(D)$ и $\nabla^2 u \geq 0$, тогда для гармонической функции имеет место *принцип максимума*: если $u(x)$ принимает максимальное значение во внутренней точке области D , то $u(x) = \text{const}$.

При $u \in C^{(2)}(D)$ и $\nabla^2 u < 0$ для гармонической функции имеет место *принцип минимума*: если $u(x)$ принимает минимальное значение во внутренней точке области D , то функция $u(x) = \text{const}$. Следствием этих принципов будут утверждения: 1) если гармоническая в конечной области функция достигает максимума или минимума во внутренней точке этой области, то функция $u(x) = \text{const}$; 2) если гармоническая в конечной области функция непрерывна в соответствующей замкнутой области, то эта функция принимает как максимальное, так и минимальное значения на границе области.

В заключение остановимся на оценке сходимости последовательностей гармонических функций в конечной области. Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность функций, гармонических в конечной области D , и пусть функции $u_n(x)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D} = D \cup S$. В этом случае справедлива *теорема Харнака*: если последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится на S , то, во-первых, последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в замкнутой области $\bar{D}$; во-вторых, предельная функция $u(x)$ гармоническая в D ; в-третьих, в любой замкнутой подобласти $\bar{D}'$ области D производные любого порядка от функции $u_n(x)$ равномерно сходятся к соответствующим производным предельной функции $u(x)$. Следствием этой теоремы является утверждение, что локально суммируемое обобщенное решение уравнения Лапласа есть функция, гармоническая в области D .

Для эллиптических уравнений типа уравнения Лапласа существуют внутренняя и внешняя краевые задачи. Краевая задача называется *внутренней*, если искомая функция $u(x)$ определяется в конечной области, и *внешней*, если функция $u(x)$ определяется в бесконечной области. Важнейшими краевыми задачами для уравнения

$$-A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x) \quad (2.6.8)$$

являются задача Дирихле (первая краевая задача) и задача Неймана (вторая краевая задача).

Внутренняя задача Дирихле формулируется так. Пусть в конечной области D с поверхностью S на границе задана непрерывная функция $\varphi(x)$. Требуется найти решение $u(x)$ уравнения (2.6.8), принадлежащее классу $C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D})$ и подчиняющееся на границе условию $u(x) = \varphi(x)$.

Внутренняя задача Неймана заключается в том, чтобы найти решение $u(x)$ уравнения (2.6.8), принадлежащее классу $C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D})$, причем на множестве тех точек $x \in S$, в которых существует нормаль n к поверхности S , должно выполняться равенство

$$A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} n^k \Big|_S = \psi(x), \quad (2.6.9)$$

где $\psi(x)$ — функция, заданная на указанном множестве точек поверхности S .

Если $A_{jk} = g_{jk}$, то уравнение (2.6.8) преобразуется к виду

$$-\nabla^2 u + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x),$$

а граничное условие (2.6.9) имеет вид

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_S = \psi(x).$$

Внешние задачи формируются аналогично, однако требуют введения дополнительного условия $u(x) = 0(|x|^{2-m})$, где $x \rightarrow \infty$.

Единственность решения сформулированных задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа устанавливается следующими тремя теоремами:

1. Как внутренняя, так и внешняя задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеют не более одного решения.

2. Два решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа могут отличаться только на постоянное слагаемое, при этом необходимым условием разрешимости задачи будет условие

$$\int_D F(x) dV + \int_S \psi(x) dS = 0.$$

3. Если размерность пространства $m > 2$, то внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа имеет не более одного решения.

Для шара радиусом R решение задачи Дирихле определяется формулами Пуассона:

для внутренней задачи

$$u(x) = \frac{1}{|S_c|} \int_{S_R} \varphi(\xi) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} d\xi S_R \quad \text{при } \rho \leq R; \quad (2.6.10)$$

для внешней задачи

$$u(x) = \frac{1}{|S_c|} \int_{S_R} \varphi(\xi) \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m} d\xi S_R \quad \text{при } \rho > R. \quad (2.6.11)$$

Соотношения (2.6.10) и (2.6.11) справедливы для любой гармонической функции класса $C^{(2)}(\bar{D}_R)$, когда область $\bar{D}_R$ есть шар радиусом R или «внешность» этого шара.

Ядро Пуассона есть $(R^2 - \rho^2)/Rr^m$ при $\rho \leq R$ и $(\rho^2 - R^2)/Rr^m$ при $\rho > R$, причем условие $|x| = \rho$ обладает следующими свой-

ствами: 1) ядро Пуассона неотрицательно, при $\rho=R$ оно всюду равно нулю, кроме точки $x=\xi$, вблизи которой оно неограничено; 2) если точка x меняется внутри шара, то ядро Пуассона есть гармоническая функция. Можно показать, что если функция $\varphi(x)$ непрерывна на сфере S_R , то формулы Пуассона определяют гармоническую в шаре функцию, которая имеет в любой точке x_0 сферы S_R предельное значение $\varphi(x_0)$.

Из формул Пуассона следует *теорема Лиувилля*, которая утверждает, что функция, гармоническая в конечной области ограниченная сверху или снизу, есть постоянная функция.

Для производных от гармонической функции на бесконечности существует оценка для больших $|x|$, и для любого мультииндекса справедливо неравенство

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_\alpha |x|^{2-m-k}; \quad k=|\alpha|,$$

где C_α не зависит от x .

Решения внутренней и внешней задач Неймана для шара радиусом R имеют вид

$$u(x) = -R \int_0^{r_1} \frac{1}{\rho} \frac{1}{|S_\rho|} \int_{S_R} \psi(\xi) \frac{R^2 - \rho^2}{R \rho^m} dS_R \quad \text{при } \rho \leq R;$$

$$u(x) = R \int_\infty^{r_1} \frac{1}{\rho} \frac{1}{|S_\rho|} \int_{S_R} \psi(\xi) \frac{\rho^2 - R^2}{R \rho^m} dS_R \quad \text{при } \rho > R,$$

где r_1 — расстояние до точки x_1 от начала координат.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = f(x, t), \quad (2.6.12)$$

которому соответствует матрица

$$\left(\begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1n} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -A_{n1} & -A_{n2} & \dots & -A_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

составленная из старших коэффициентов уравнения. Одно из характеристических чисел этой матрицы равно нулю, остальные отличаются от характеристических чисел матрицы $((A_{jk}))$ знаком. Если все числа имеют один знак, то уравнение (2.6.12) является параболическим и называется *уравнением теплопроводности*. Входящий в него дифференциальный оператор

$$Lu = -A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u$$

будет эллиптическим и зависит от переменных x_j , $j=1, 2, \dots, m$.

Пусть матрица $((A_{jk}))$ — положительно определенная, все ее характеристические числа — положительные. Характеристики уравнения теплопроводности суть m -мерные плоскости, нормальные к оси t . В дальнейшем будем рассматривать уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(x, t), \quad (2.6.13)$$

считая эллиптический оператор

$$Lu = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

— невырождающимся, а его коэффициенты A_{jk} — не зависящими от t и непрерывно дифференцируемыми по x_j . При $f(x, t) = 0$ имеем однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0, \quad (2.6.14)$$

соответствующее уравнению (2.6.13).

В евклидовом пространстве E_m (плоскость $t=0$) рассмотрим конечную область D с границей S и построим цилиндрическую поверхность с направляющей S и образующими, параллельными оси t . Часть поверхности, заключенную между плоскостями $t=0$ и $t=T$, где $T>0$ — постоянная, обозначим B_T ; проекцию области D на плоскость $t=T$ обозначим D_T и область пространства (x_j, t) с границей $D \cup B_T \cup D_T$ обозначим Q_T . Если Ω — некоторое множество в пространстве (x_j, t) , то $C^{(p+q)}(\Omega)$ будет означать класс функций, которые на множестве Ω имеют непрерывные производные по x_j порядка $\leq p$ и непрерывные производные по t порядка $\leq q$.

Для уравнения теплопроводности можно сформулировать *принцип максимума*. Пусть функция $u(x, t)$ принадлежит пересечению $C(\bar{Q}_T) \cap C^{(2,1)}(Q_T \cup D_T)$ и удовлетворяет в Q_T однородному уравнению (2.6.14), а наибольшее и наименьшее свои значения в замкнутой области $\bar{D}_T$ функция $u(x, t)$ принимает на $D \cup B_T$. Если $Lu \leq 0$ всюду в Q_T , то на $D \cup B_T$ функция $u(x, t)$ достигает максимума; если же $Lu \geq 0$ всюду в Q_T , то на $D \cup B_T$ функция $u(x, t)$ достигает минимума.

Краевая задача теплопроводности сводится к поиску решения уравнения (2.6.13), определенного в полубесконечной области $D \times (0, \infty)$ пространства переменных x_j, t с границей $D \cup B$. При $t=0$ решение должно удовлетворять условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in D, \quad (2.6.15)$$

а на цилиндрической поверхности B — одному из трех граничных условий:

$u|_B = \psi(x, t)$ — для первой краевой задачи;

$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} n^j \right]_B = \chi(x, t)$ — для второй краевой задачи; (2.6.16)

$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} n^j + \alpha u \right]_B = \omega(x, t)$ — для третьей краевой задачи.

Краевая задача для уравнения теплопроводности (2.6.13) при начальном (2.6.15) и граничных (2.6.16) условиях имеет в классе

$$C(\bar{D}x[0, \infty)) \cup C^{(2,1)}(Dx(0, \infty))$$

не более одного решения. Если $A_{jk} = g_{jk}$, то эллиптический оператор L превращается в оператор Лапласа $\nabla^2 u$, тогда уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^2 u = f(x, t)$$

имеет в классе $C(E_m x[0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(E_m x(0, \infty))$ не более одного ограниченного решения, удовлетворяющего начальному условию (2.6.15).

Слабым решением краевой задачи теплопроводности будем называть абстрактную функцию $u(t)$ класса

$$C([0, \infty), L_2(D)) \cap C((0, \infty), H_L) \cap C^{(1)}((0, \infty), L_2(D)),$$

удовлетворяющую соотношению

$$(du(t)/dt, \eta(t)) + [u(t), \eta(t)]_L = (f(t), \eta(t))$$

и начальному условию $u|_{t=0} = \varphi$. Здесь L — эллиптический оператор уравнения (2.6.13) для конечной области $D \subset E_m$ с границей S ; $\eta(t)$ — произвольная абстрактная функция от t со значениями в энергетическом пространстве H_L ; $f(t)$ — абстрактная функция со значениями в $L_2(D)$, причем $f \in C^{(1)}([0, \infty), L_2(D))$; φ — элемент пространства $L_2(D)$. Следует заметить, что слабое решение $u(t)$ есть обычное решение, если $u(t) \in D(L)$ при любом $t > 0$ и если $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x)$.

Слабое решение задачи строят методом Фурье в предположении, что решение $u(t) = u(x, t)$ существует при любом $t \geq 0$ оно является элементом пространства $L_2(D)$ и разлагается в ряд по системе собственных функций $u_n = u_n(x)$ оператора L с соответствующими им собственными числами λ_n . Тогда

$$u(t) = \sum_n C_n(t) u_n(x).$$

Здесь $C_n(t) = (u(t), u_n)$ — неизвестные коэффициенты, подчиненные уравнению

$$C_k'(t) + \lambda_k C_k(t) = f_k(t); f_k(t) = (f(t), u_k),$$

решением которого является функция

$$C_k(t) = e^{-\lambda_k t} \left[C_k + \int_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau) d\tau \right],$$

причем постоянные C_k определяются из начальных условий и будут равны $C_k = (\varphi, u_k)$.

Обобщенное решение краевой задачи теплопроводности имеет вид

$$u(x, t) = \sum_n (\varphi, u_n) e^{-\lambda_n t} u_n(x) + \sum u_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

Для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = f(x, t)$$

при начальном условии $u|_{t=0} = \varphi(x)$ решение определяется формулой Пуассона

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^m \int_0^t \int_{E_m} \frac{1}{(t-\tau)^{m/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} f(y, \tau) dV d\tau + \\ + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^m \int_{E_m} e^{-\frac{r^2}{4t}} \varphi(y) dV.$$

Волновым уравнением называется уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = f(x, t), \quad (2.6.17)$$

в котором матрица коэффициентов $((A_{jk}))$ является положительно определенной. Матрица старших коэффициентов уравнения (2.6.17) имеет вид

$$\left(\begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1m} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{m1} & -A_{m2} & \dots & -A_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

одно из ее характеристических чисел равно единице, а остальные совпадают с характеристическими числами матрицы $-(A_{jk})$, следовательно, отрицательны. Волновое уравнение — гиперболическое, его характеристики являются вещественными и подчинены уравнению

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - A_{jk} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0,$$

причем функция $\omega(x, t) = t$ не удовлетворяет этому уравнению, а потому плоскости $t = \text{const}$ не являются характеристическими поверхностями уравнения (2.6.17) и при $t = \text{const}$ можно задавать оба данных Коши.

В дальнейшем будем рассматривать волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(x, t), \quad (2.6.18)$$

коэффициенты A_{jk} которого не зависят от t , непрерывно дифференцируемы, а матрица $((A_{jk}))$ не вырождается. В частном случае, когда $A_{jk} = \text{const}$, что справедливо для однородной среды, уравнение (2.6.18) приводится к простейшей форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(x, t). \quad (2.6.19)$$

В прикладном отношении большой интерес представляет уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = f(x, t); \quad a^2 = \text{const},$$

которое заменой переменного $t' = at$ приводится к виду (2.6.19).

Для волнового уравнения краевая задача формулируется так. В плоскости $t = 0$ задана конечная область D с границей S . В области $Q = Dx(0, \infty)$ требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(x, t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (2.6.20)$$

и граничным условиям

$$u|_B = \psi(x, t) \text{ — для первой задачи;}$$

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} n^j \right]_B = \chi(x, t) \text{ — для второй задачи;}$$

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} n^j + \alpha u \right]_B = \omega(x, t) \text{ — для третьей задачи.}$$

Пусть решение $u(x, t)$ краевой задачи принадлежит классу $C^{(2,2)}(\bar{D}x[0, \infty))$ и трактуется как абстрактная функция $u(t)$ со значениями в области $D(L)$, причем эта функция имеет две непрерывные производные в интервале $(0, \infty)$. Функцию $f(x, t)$ будем рассматривать как абстрактную со значениями $L_2(D)$, функцию $\varphi_0(x)$ считаем элементом энергетического пространства H_L , а функцию $\varphi_1(x)$ — элементом пространства $L_2(D)$. Слабым решением краевой задачи для волнового уравнения будет абстрактная функция, если $u \in K = C([0, \infty), H_L) \cap C^{(1)}([0, \infty), L_2(D))$; $u(0) = \varphi_0$; $u(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t^*} \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^{t^*} [u(t), \eta(t)] dt - (\varphi_1, \eta(0)) = \\ & = \int_0^{t^*} (f(t), \eta(t)) dt. \end{aligned}$$

Здесь $\eta(t)$ — произвольная функция класса K_T , а через K_T обозначен класс функций $\eta(t)$ таких, что $\eta \in K$ и $\eta(t^*) = 0$; $t^* > 0$ — произвольный момент времени. Следует заметить, что слабое решение $u(t)$, принадлежащее пересечению $C^{(1)}([0, \infty), D(L)) \cup \cap C^{(2)}((0, \infty), D(L))$, есть обычное решение краевой задачи для волнового уравнения.

Для волнового уравнения (2.6.19) характеристикой будет коническая поверхность, определяемая уравнением $\omega(t) = t_0 - t - r = 0$; $r = |x - x_0|$ и называемая *характеристическим конусом* волнового уравнения с вершиной в точке (x_0, t_0) и осью, параллельной оси t . Направление внешней нормали n к характеристическому конусу определяется углом нормали с осью t , косинус которого положителен и равен

$$\cos(n, t) = - \frac{\partial \omega / \partial t}{\sqrt{(\partial \omega / \partial t)^2 + \sum_{k=1}^m (\partial \omega / \partial x_k)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\sum_{k=1}^m \cos^2(n, x_k) = 1 - \cos^2(n, t) = \frac{1}{2}.$$

Задача Коши для волнового уравнения (2.6.19) ставится так. При любом $x \in E_m$ и любом $t > 0$ найти решение уравнения (2.6.19), удовлетворяющее начальным условиям (2.6.20). Рассмотрим две задачи Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u &= f(x, t); \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x); \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \nabla^2 v &= g(x, t); \quad v|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_1(x).\end{aligned}$$

Пусть в характеристическом конусе $|x-x_0| \leq t_0 - t$ с вершиной (x_0, t_0) совпадают свободные члены $f(x, t) = g(x, t)$, а в шаре $|x-x_0| \leq t_0$, который конус вырезает из пространства $t=0$, совпадают начальные условия $\varphi_0(x) = \psi_0(x)$. Если обе задачи имеют решения, непрерывные вместе со своими производными первых двух порядков, то эти решения совпадают внутри и на границе конуса $|x-x_0| \leq t_0 - t$. Областью зависимости для точки (x_0, t_0) называется множество точек плоскости $t=0$, на котором достаточно знать значения начальных функций, чтобы определить $u(x_0, t_0)$. Для уравнения (2.6.19) за область зависимости можно принять шар $|x-x_0| \leq t_0$. Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0; \quad a^2 = \text{const}$$

областью зависимости точки (x_0, t_0) будет шар $|x-x_0| \leq at_0$, а в случае нечетного значения $m > 1$ — сфера $|x-x_0| = at_0$.

Слабое решение $u(x, t) = u(t)$ краевой задачи для волнового уравнения строят методом Фурье. Представим искомое решение $u(t)$ в виде ряда по собственным функциям оператора L :

$$u(t) = \sum_n C_n(t) u_n(x); \quad C_n(t) = (u(t), u_n) \text{ — в метрике } L_2(D);$$

$$u(t) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} C_n(t) u_n / \sqrt{\lambda_n} \text{ — в метрике } H_L.$$

Коэффициенты ряда $C_n(t)$ подчинены дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} + \lambda_n C_n = f_n(t)$$

с начальными условиями $C_n(0) = (\varphi_0, u_n); \quad C_n'(0) = (\varphi_1, u_n)$. Решением задачи будет выражение

$$\begin{aligned}C_n(t) &= (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Искомое слабое решение краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_n \left[(\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau \right] u_n(x).\end{aligned}$$

ГЛАВА 3 ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

3.1. Интегральные преобразования, их применение

Описание точных методов решения линейных задач механики сплошной среды начнем с метода интегральных преобразований, который применялся в предыдущих главах при доказательстве некоторых общих положений и теорем.

Интегральным преобразованием с ядром $K(x_k, \alpha_k)$ называется преобразование

$$\int_D f(x_j) K(x_k, \alpha_k) dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad m \leq n, \quad (3.1.1)$$

с помощью которого функция $f(x_j)$ n переменных x_j ($j=1, 2, \dots, n$) сопоставляется с функцией $\bar{f}(\alpha_k, x_l)$ m переменных α_k ($k=1, 2, \dots, m$) и $n-m$ переменных x_l ($l=k+1, \dots, n$). Функция $\bar{f}$, определенная интегралом (3.1.1), называется *изображением* по переменным x_k функции $f(x_j)$, которую называют *оригиналом*. Переменные x_k , по которым ведется интегрирование, называют переменными преобразования. Интегральное преобразование определяется ядром $K(x_k, \alpha_k)$, областью интегрирования D и множеством M функций $f(x_j)$, к которым оно применяется. Преобразование, которым функция $\bar{f}(\alpha_k, x_l)$ снова преобразуется в функцию $f(x_j)$, называется *обратным*, тогда как преобразование (3.1.1) называют *прямым*.

В дальнейшем, как правило, будет применяться интегральное преобразование только по одной переменной. Схема применения таких интегральных преобразований при решении задач механики сплошной среды сводится к следующему. С помощью интегрального преобразования исключают дифференцирование по одной переменной и получают более простую задачу относительно преобразованной функции. Найдя последнюю, с помощью обратного преобразования определяют неизвестную функцию, являющуюся решением первоначальной задачи. При необходимости интегральные преобразования применяют повторно, последовательно исключая дифференциальные операции по ряду переменных. Решив преобразованную задачу, последовательно осуществляют обратные преобразования, получая искомую функцию.

Рассмотрим задачу, поставленную в некоторой области D для дифференциального уравнения

$$Lu = f, \quad (3.1.2)$$

где

$$Lu = A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u; \quad (3.1.3)$$

$u(x_j, t)$ — искомая, а $f(x_j, t)$ — заданная функции переменных x_j и t ; $A_{jk} = A_{kj}$ — дифференциальный оператор с переменными коэффициентами. В общем случае среди дополнительных условий задачи, обеспечивающих единственность решения, могут быть начальные и граничные условия, условия на бесконечности, условия периодичности решения по каким-либо координатам, условия сопряжения на границе сред и др. Преобразование задачи включает как преобразование заданного уравнения, так и преобразование дополнительных условий задачи, предполагая при этом, что все функции, подвергаемые интегральному преобразованию, обладают свойствами, которые делают такое преобразование возможным. Пределы интегрального преобразования должны соответствовать пределам изменения переменных преобразования x_i , которые могут быть конечными и бесконечными, а потому интегральные преобразования различаются на конечные и бесконечные.

С помощью интегрального преобразования можно исключить дифференциальные операции по переменной x_i , меняющейся в конечном интервале (a, b) , при выполнении ряда приведенных ниже достаточных условий. Оператор уравнения (3.1.2) вида (3.1.3) представим в виде суммы

$$Lu = L_i u + L' u.$$

Первый оператор

$$L_i u = A_{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0 u$$

с коэффициентами, зависящими только от переменной x_i , содержит операции дифференцирования только по переменной преобразования x_i , причем коэффициенты $A_{ii} \geq 0$, $A_0 \leq 0$ и производная $\partial A_{ii} / \partial x_i$ непрерывны в интервале (a, b) . Второй оператор

$$L' u = A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

с коэффициентами, не зависящими от x_i , не содержит операций дифференцирования по x_i ($j, k \neq i$). Интеграл

$$\rho(x_i) = \exp \left[- \int \frac{1}{A_{ii}} \left(\frac{\partial A_{ii}}{\partial x_i} - A_i \right) d\xi \right]$$

имеет непрерывную производную по x_i в интервале (a, b) , а также существует такое число $\epsilon \geq 0$, что интегралы

$$\int_0^{a+\varepsilon} \frac{x_i - a}{p(x_i)} dx_i; \quad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{dx_i}{p(x_i)}; \quad \int_{b-\varepsilon}^b \frac{b - x_i}{p(x_i)} dx_i,$$

где $p(x_i) = A_{ii}p(x_i)$, сходятся.

Если по переменной преобразования x_i заданы граничные условия, то при $p(a) \neq 0$ и $p(b) \neq 0$ они должны иметь форму

$$\left[\beta_a \frac{\partial u}{\partial x_i} - \gamma_a u \right]_{x_i=a} = \varphi_a; \quad \left[\beta_b \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma_b u \right]_{x_i=b} = \varphi_b, \quad (3.1.4)$$

где величины β_a и β_b , а также γ_a и γ_b неотрицательны и не равны нулю одновременно, а φ_a и φ_b — известные функции переменных x_k ($k \neq i$). В случае $p(a) = 0$ ($p(b) = 0$) граничное условие при $x_i = a$ ($x_i = b$) должно удовлетворять требованиям разложения в ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля (обычно это условие конечности u при $x_i = a$, $x_i = b$). Условия задачи по переменным x_k ($k \neq i$) не содержат ни производных $\partial u / \partial x_i$, ни зависящих от x_i коэффициентов.

Ядро преобразования можно представить как

$$K(x_i, \alpha) = \rho(x_i) \bar{K}_\alpha(x_i),$$

где $\bar{K}_\alpha(x_i)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - q \bar{K} + \lambda^2 \rho \bar{K} = 0; \quad q = -A_{00}p. \quad (3.1.5)$$

Уравнение (3.1.5) удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left[\beta_a \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - \gamma_a \bar{K} \right]_{x_i=a} = 0; \quad \left[\beta_b \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} + \gamma_b \bar{K} \right]_{x_i=b} = 0, \quad (3.1.6)$$

если по переменной x_i заданы граничные условия вида (3.1.4), и условию периодичности, если по переменной x_i задано условие периодичности. При $p(a) = 0$ ($p(b) = 0$) первое (второе) условие (3.1.6) должно быть заменено условием, вытекающим из требований теоремы разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля.

При выполнении указанных требований можно принять следующие утверждения. Уравнение (3.1.5) имеет решения, отличные от нулевого при значениях λ^2 , образующих бесконечную дискретную последовательность $\{\lambda_\alpha^2\}$ возрастающих положительных чисел λ_α^2 (собственных чисел). Если по переменной x_i заданы граничные условия, то каждому собственному числу λ_α^2 соответствует только одно линейно независимое решение $\bar{K}_\alpha(x_i)$ уравнения (3.1.5), т. е. при фиксированном значении переменной x_i есть только одно выражение для ядра

$$K(x_i, \alpha) = \rho(x_i, \bar{K}_\alpha(x_i)).$$

Если по переменной x_i задано условие периодичности, то каждому собственному числу λ_n^2 соответствуют два различных линейно независимых периодических решения уравнения (3.1.5), которые с помощью линейного преобразования могут быть сделаны взаимно ортогональными. Обозначим их как $\bar{K}_{2n-1}(x_i)$ и $\bar{K}_{2n}(x_i)$.

Уравнение (3.1.2), представленное в виде

$$L_i u + L' u = f,$$

при помощи интегрального преобразования с ядром

$$K(x_i, \alpha) = \rho(x_i) \bar{K}_\alpha(x_i)$$

может быть приведено к виду

$$L' \bar{u} - \lambda_\alpha^2 \bar{u} = \bar{f} + \bar{N}_\alpha - \bar{N}_b. \quad (3.1.7)$$

Здесь

$$\bar{N}_\alpha = \begin{cases} \frac{p(a) \bar{K}_\alpha(a)}{C_\alpha \beta_\alpha} \Phi_\alpha & \text{при } \beta_\alpha \neq 0; \\ \frac{1}{C_\alpha} p(a) \frac{\partial \bar{K}_\alpha}{\partial x_i} \Big|_{x_i=a} \Phi_\alpha & \text{при } \beta_\alpha = 0; \end{cases} \quad (3.1.8)$$

$$\bar{N}_b = \begin{cases} \frac{p(b) \bar{K}_\alpha(b)}{C_\alpha \beta_b} \Phi_b & \text{при } \beta_b \neq 0; \\ \frac{1}{C_\alpha} p(b) \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} \Big|_{x_i=b} \Phi_b & \text{при } \beta_b = 0; \end{cases}$$

$\gamma_a = -1$; $\gamma_b = 1$, если по переменной x_i заданы граничные условия типа (3.1.4); $C_\alpha = \int_a^b \rho(x_i) [\bar{K}_\alpha(x_i)]^2 dx_i$ — нормирующий делитель. Если же по переменной x_i заданы условия периодичности, то

$$\bar{N}_\alpha - \bar{N}_b = 0. \quad (3.1.9)$$

Дополнительные условия по переменным x_k ($k \neq i$), необходимые для постановки задачи и решения уравнения (3.1.7), получают заменой в соответствующих условиях по переменным x_k первоначальной задачи каждой функции переменной x_i ее изображением $\bar{u}$.

Решение u исходной задачи выражается через решения $\bar{u}_\alpha$ преобразованной задачи с помощью ряда

$$u = \sum_{\alpha=1} \bar{u}(\alpha) \bar{K}_\alpha(x_i). \quad (3.1.10)$$

Сформулируем последовательность действий при конечном интегральном преобразовании:

- 1) установить возможность преобразования рассматриваемой задачи;
- 2) вычислить по значениям коэффициентов A_{ii} , A_i , A_0 функции $\rho(x_i)$, $p(x_i)$, $q(x_i)$;
- 3) определить функцию $K_\alpha(x_i)$;
- 4) установить ядро прямого преобразования;
- 5) записать с помощью соотношений (3.1.7)—(3.1.9) преобразованную задачу;
- 6) найти решение преобразованной задачи;
- 7) записать решение исходной задачи в форме ряда (3.1.10).

Если необходимо исключить дифференциальные операции по переменной x_i , меняющейся в бесконечном интервале, то ядро прямого интегрального преобразования должно быть с точностью до постоянного множителя равно произведению

$$\rho(x_i)\bar{K}(x_i, \alpha), \quad (3.1.11)$$

где $\bar{K}(x_i, \alpha)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - q\bar{K} + \gamma^2 \rho \bar{K} = 0. \quad (3.1.12)$$

Если же нижний предел a изменения переменной x_i конечен и по переменной x_i задано граничное условие, то на этом пределе функция $\bar{K}$ должна удовлетворять однородному условию, соответствующему условию задачи. На бесконечных пределах функция $\bar{K}$ должна быть такова, чтобы выражение

$$p(x_i) \left(\bar{K} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} u \right) \quad (3.1.13)$$

обращалось в нуль, а величина α пробегала не дискретную, а непрерывную последовательность значений. Ядро прямого интегрального преобразования $\rho\bar{K}$ должно принадлежать к числу ядер, для которых возможно обратное преобразование.

Уравнение (3.1.2) в результате преобразования в бесконечных пределах принимает вид

$$L'\bar{u} - \gamma^2 \bar{u} = \bar{f} + \bar{N}_a, \quad (3.1.14)$$

где функция $\bar{N}_a$ определяется соотношением (3.1.8), если нижний предел a изменения x_i конечен и при $x_i = a$ задано граничное условие, или равно выражению (3.1.12) при $x_i = a$, если заданы условия Коши (начальные условия).

Сформулируем последовательность действий при бесконечном интегральном преобразовании:

- 1) установить отсутствие признаков, делающих интегральное преобразование задачи невозможным;

- 2) вычислить функции $\rho(x_i)$, $p(x_i)$, $q(x_i)$;
- 3) найти общее решение уравнения (3.1.12) и с помощью формул (3.1.11) определить общий вид ядра прямого преобразования;
- 4) исходя из требований, связанных с преобразованием условий рассматриваемой задачи, уточнить выбор ядра прямого преобразования;
- 5) с помощью формул прямого и обратного преобразований установить преобразование с этим ядром;
- 6) с помощью формул (3.1.8), (3.1.13), (3.1.14) записать преобразованную задачу;
- 7) найти решение преобразованной задачи;
- 8) с помощью формулы обратного преобразования записать решение исходной задачи в интегральной форме.

Существует ряд формул прямых и обратных интегральных преобразований. Для применения преобразования Фурье

$$\bar{u}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi;$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = u(x)$$

достаточно, чтобы интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx$ сходилась, а функция была кусочно непрерывна и имела ограниченное изменение в любом конечном интервале.

Для применения косинус-преобразования Фурье

$$\bar{u}(\alpha) = \int_0^{\infty} u(\xi) \cos \alpha \xi d\xi;$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{u}(\alpha) \cos \alpha x d\alpha = \begin{cases} u(x) & \text{при } x > 0, \\ u(-x) & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

и синус-преобразования Фурье

$$\bar{u}(\alpha) = \int_0^{\infty} u(\xi) \sin \alpha \xi d\xi;$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{u}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = \begin{cases} u(x) & \text{при } x > 0, \\ -u(-x) & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

достаточно, чтобы интеграл $\int_0^{\infty} |u(x)| dx$ сходилась, а функция

$u(x)$ при $x \geq 0$ была кусочно-непрерывна и имела ограниченное изменение в любом конечном интервале. Условия применимости преобразования Ханкеля

$$\bar{u}(\alpha) = \int_0^{\infty} u(\xi) J_n(\xi\alpha) \xi d\xi;$$

$$\int_0^{\infty} \bar{u}(\alpha) J_n(\alpha x) \alpha d\alpha = u(x) \text{ при } x > 0$$

те же, что и для преобразования Фурье.
Преобразование Лапласа

$$\bar{u}(\alpha) = \int_0^{\infty} u(\xi) e^{-\alpha\xi} d\xi;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \bar{u}(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha = \begin{cases} u(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

можно использовать, если функция $u(x)$ при $x > 0$ кусочно-непрерывна в любом конечном интервале и существует такое число a , что при $x \rightarrow \infty$ произведение $u(x)e^{-ax}$ ограничено; при этом в формуле для обратного преобразования следует принять $\eta > a$.

Для применения преобразования Меллина

$$\bar{u}(\alpha) = \int_0^{\infty} u(\xi) \xi^{\alpha-1} d\xi;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \bar{u}(\alpha) \frac{d\alpha}{x^{-\alpha}} = u(x) \text{ при } x > 0$$

достаточно, чтобы функция $u(x)$ была кусочно-непрерывна, имела ограниченное изменение на любом конечном интервале полуоси $x > 0$ и чтобы существовали числа $a > 0$, α_1 и α_2

($\alpha_1 < \alpha_2$), такие, что интегралы $\int_0^a |u(\xi) \xi^{\alpha_1-1}| d\xi$ и $\int_0^{\infty} |u(\xi) \xi^{\alpha_2-1}| d\xi$

сходились, причем в формуле обратного преобразования следует принять $\alpha_1 < \eta < \alpha_2$.

Применим описанные интегральные преобразования к решению линейных задач механики сплошной среды. Для иллюстрации соображений, высказанных в п. 2.1 по поводу плоскопараллельного движения вязкой жидкости и о возможности применения интегрального преобразования Лапласа к решению

такого типа задач механики жидкости и газа, рассмотрим задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости между неограниченными параллельными стенками.

Допустим, что неограниченная стенка, совпадающая с плоскостью xz , является неподвижной, а параллельная стенка, расположенная на расстоянии h от первой, в момент $t=0$ начинает перемещаться с постоянной скоростью v_c в положительную сторону оси x . Предполагая движение частиц жидкости прямолинейным и используя условия прилипания, получим систему соотношений:

$$\begin{aligned} \partial v / \partial t &= \nu \partial^2 v / \partial y^2; \quad \nu = \mu / \rho; \\ v &= 0 \text{ при } y > 0 \text{ и } t = 0; \\ v &= 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } t \geq 0; \\ v &= v_c \text{ при } y = h \text{ и } t > 0. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Выполнив преобразование Лапласа над (3.1.15), получим} \\ \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - p \bar{v} / \nu &= 0; \\ \bar{v} &= 0 \text{ при } y = 0; \\ \bar{v} &= v_c \text{ при } y = h, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$\text{причем } \bar{v} / p = \int_0^\infty v e^{-pt} dt.$$

Решение задачи (3.1.16) для изображения $\bar{v}$ можно представить в виде

$$\bar{v}(y, p) = v_c (\operatorname{sh} y \sqrt{p/\nu}) / (\operatorname{sh} h \sqrt{p/\nu}).$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Лапласа, для скорости движения частиц имеем

$$v(y, t) = \frac{v_c}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{pt} [(\operatorname{sh} y \sqrt{p/\nu}) / (\operatorname{sh} h \sqrt{p/\nu})] \frac{dp}{p}.$$

Вычислив интеграл, приходим к формуле

$$v(y, t) = v_c \left[\frac{y}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\nu \frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \frac{\sin(k\pi y/h)}{k} \right],$$

которая указывает на то, что при $t \rightarrow \infty$ распределение скорости становится линейным $\lim_{t \rightarrow \infty} v(y, t) = v_c y/h$, что соответствует установившемуся движению жидкости между параллельными стенками. Сила вязкости на движущейся стенке

$$\tau = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=h} = -\frac{\mu v_c}{h} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-v \frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \right).$$

Если стенка перемещается с переменной скоростью $v_c(t)$, то

$$v(y, t) = v_c(0) v_1(y, t) + \int_0^t v_c'(\tau) v_1(y, t - \tau) d\tau,$$

$$\text{где } v_1(y, t) = \frac{y}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-v \frac{k^2 \pi^2}{h^2} t} \frac{\sin(k \pi y / h)}{k}.$$

Рассмотрим задачу о неустановившемся движении вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Ее решение будем строить в предположении, что по двум сечениям трубы, находящимся на расстоянии l , распределены давления p_1, p_2 . Пусть давления p_1 и p_2 не изменяются во времени, а при $t=0$ жидкость находится в покое, тогда ее движение будет осесимметричным и $\partial v / \partial \theta = 0$. Запишем уравнение движения жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.1.17)$$

причем в силу сделанного предположения

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{\rho l} = P_1 = \text{const.}$$

Начальное условие и условие прилипания частиц жидкости к стенке имеют соответственно следующий вид:

$$v=0 \text{ при } t=0; \quad v=0 \text{ при } r=a. \quad (3.1.18)$$

Проводя преобразование Лапласа в уравнении движения (3.1.17) и граничном условии (3.1.18), получим

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{p}{\nu} \bar{v} = -\frac{P_1}{p}; \quad \bar{v}=0 \text{ при } r=a. \quad (3.1.19)$$

Общее решение уравнения (3.1.19) определено выражением

$$\bar{v}(r, p) = A I_0(r \sqrt{p/\nu}) + B K_0(r \sqrt{p/\nu}) + P_1/p,$$

но $K_0 = \infty$ при $r=0$, поэтому следует принять $B=0$ и определить из граничного условия A . В результате приходим к следующему выражению для изображения скорости и оригинала соответственно:

$$\begin{aligned}\bar{v}(r, p) &= -\frac{P_1}{p} \frac{I_0(r \sqrt{p/\nu}) - I_0(a \sqrt{p/\nu})}{I_0(a \sqrt{p/\nu})}; \\ v(r, t) &= -\frac{P_1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{pt} \frac{I_0(r \sqrt{p/\nu}) - I_0(a \sqrt{p/\nu})}{I_0(a \sqrt{p/\nu})} \frac{dp}{p}.\end{aligned}\quad (3.1.20)$$

Вычислив интеграл в (3.1.20), находим решение задачи в виде ряда

$$v(r, t) = P_1 \frac{a^2}{4\nu} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - 8 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t} \frac{J_0(\lambda_k r/a)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)} \right],$$

где λ_k — корни функции Бесселя $J_0(\lambda_k) = 0$.

Расход жидкости определяется формулой

$$Q = \frac{P_1 a^4}{8\nu} \left(1 - 32 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t} \frac{1}{\lambda_k^4} \right),$$

а формула Пуазейля получается предельным переходом при $t \rightarrow \infty$.

Сила вязкости на стенке трубы

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=a} = -\frac{P_1}{2} \rho a \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k^2}{a^2} t} \frac{1}{\lambda_k^2} \right].$$

Рассмотрим задачу о движении шара в вязкой жидкости. Пренебрегая силами инерции, не учитывая объемных сил и считая движение частиц жидкости осесимметричным, запишем уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \sin \theta v_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta v_\theta) = 0;$$

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left(\nabla^2 v_R - \frac{2v_R}{R^2} - \frac{2v_\theta}{R^2} \cotg \theta - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right);$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right).$$

Первое уравнение позволяет ввести функцию тока ψ , тогда

$$v_R = -\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}.$$

Два последующих уравнения представим в виде

$$\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\nu}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} D\psi;$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\nu}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} D\psi,$$

где $D(\dots) = \frac{\partial^2}{\partial R^2}(\dots) + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\dots)$ — оператор Стокса. Исключая давление p , получим для функции тока ψ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} D\psi = \nu D D\psi. \quad (3.1.21)$$

Пусть шар радиусом a движется с постоянной скоростью v_0 параллельно положительному направлению оси z в неограниченной вязкой несжимаемой жидкости. Условия прилипания частиц жидкости к поверхности шара при $R=a$ и на бесконечности определены соотношениями

$$v_R = -\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_0 \cos \theta; \quad v_\theta = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -v_0 \sin \theta; \quad (3.1.22)$$

$v_R=0$ и $v_\theta=0$ при $R=\infty$.

Вид граничных условий (3.1.22) позволяет искать функцию тока в виде произведения $\psi = \sin^2 \theta F(R, t)$, тогда уравнение (3.1.21) и граничные условия (3.1.22) будут следующими:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{2F}{R^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2}{R^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{2F}{R^2} \right);$$

$$-\frac{2F}{R^2} = v_0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial R} = -v_0 \quad \text{при } R=a;$$

$$\frac{F}{R^2} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial R} = 0 \quad \text{при } R=\infty.$$

Применяя преобразование Лапласа и вводя обозначение

$$\int_0^\infty e^{-pt} F(R, t) dt = \bar{F}/p,$$

запишем (3.1.23) так:

$$-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{2F}{R^2} \right)_{t=0} + \frac{d^2 \bar{F}}{dR^2} - \frac{2\bar{F}}{R^2} = \nu \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{2}{R^2} \right) \left(\frac{d^2 \bar{F}}{dR^2} - \frac{2\bar{F}}{R^2} \right);$$

$$-\frac{2\bar{F}}{R^2} = v_0, \quad \frac{1}{R} \frac{d\bar{F}}{dR} = -v_0 \quad \text{при } R=a;$$

$$\frac{\bar{F}}{R^2} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{d\bar{F}}{dR} = 0 \quad \text{при } R=\infty.$$

Пользуясь неопределенностью начальных условий, потребуем, чтобы первое слагаемое в уравнении обращалось в нуль, тогда

$$\frac{d^2 f}{dR^2} - 2 \frac{f}{R^2} = 0,$$

где $f = \frac{d^2 \bar{F}}{dR^2} - \bar{F} \left(\frac{p}{v} + \frac{2}{R^2} \right)$. Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$f = C_1/R + C_2 R^2.$$

Итак, для изображения $\bar{F}$ получим уравнение

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dR^2} - \bar{F} \left(\frac{p}{v} + \frac{2}{R^2} \right) = \frac{C_1}{R} + C_2 R^2, \quad (3.1.24)$$

частное решение которого равно $-(v/p)(C_1/R + C_2 R^2)$.

Однородное уравнение для $\bar{F}$ подстановкой $\bar{F} = y \sqrt{R}$ приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 y}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dy}{dR} - y \left(\frac{p}{v} + \frac{9}{4R^2} \right) = 0,$$

решением которого будет выражение

$$y = A I_{3/2}(R \sqrt{p/v}) + B K_{3/2}(R \sqrt{p/v}).$$

Таким образом, полное решение уравнения (3.1.24) определено соотношением

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \sqrt{R} [A I_{3/2}(R \sqrt{p/v}) + B K_{3/2}(R \sqrt{p/v})] + \\ & + C_1'/R + C_2' R^2. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Выполнение условия на бесконечности требует равенства нулю постоянных A и C_2' . Представим функцию $K_{3/2}(x)$ в виде

$$K_{3/2}(x) = \sqrt{\pi/2x} e^{-x} (1 + 1/x),$$

тогда решение (3.1.25) будет следующим:

$$\bar{F} = B_1 e^{-R \sqrt{p/v}} [1 + R^{-1}(p/v)^{-1/2}] + C_1' R^{-1}.$$

Из граничных условий при $R=a$ находим постоянные B_1 и C_1'

В результате решение уравнения (3.1.24), удовлетворяющее всем граничным условиям, имеет вид

$$\bar{F} = \frac{v_0 a}{2} \left[3 e^{-(R-a) \sqrt{p/v}} \left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{p}} + \frac{v}{pR} \right) - \frac{a^2}{R} - \frac{3a}{R} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{p}} - \frac{3v}{pR} \right].$$

Проводя обращение преобразования Лапласа, получаем

$$F(R, t) = \frac{v_0 a}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{pt} \left[3e^{-(R-a)Vp/v} \left(\sqrt{\frac{v}{p}} + \frac{v}{pR} \right) - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{R} - \frac{3a}{R} \sqrt{\frac{v}{p}} - \frac{3v}{pR} \right] \frac{dp}{p}. \quad (3.1.26)$$

Асимптотическое значение оригинала при бесконечно больших значениях переменной t можно получить разложением изображения в окрестности той особой точки на плоскости комплексного параметра p , для которой действительная часть этого параметра имеет наибольшее значение. В данном случае такой особой точкой изображения (3.1.26) служит точка, для которой $p=0$. Этому соответствует функция

$$(\bar{F})_{p \rightarrow 0} = 0,25av_0(3R - a^2/R)$$

и функция тока

$$(\psi)_{t \rightarrow \infty} = -0,25av_0(3R - a^2/R) \sin^2 \theta. \quad (3.1.27)$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$ решение (3.1.26) вырождается в решение Стокса об установившемся движении шара в неограниченной вязкой жидкости.

При решении задачи начальные условия не были сформулированы, так как начальное распределение скорости следует из решения (3.1.26). Полагая в (3.1.27) $p = \infty$ и учитывая выражение для функции тока, получаем

$$(\psi)_{t \rightarrow 0} = -a^3v_0 \sin^2 \theta / 2R.$$

Следовательно, решение (3.1.26) имеет место при том начальном условии, что распределение скоростей в момент начала движения совпадает с распределением скоростей при движении шара в неограниченной идеальной жидкости. Давление в произвольной точке вязкой жидкости

$$p = \frac{\rho av_0 \cos \theta}{2R^2} \left(3a \sqrt{\frac{v}{\pi t}} + 3v \right) + C.$$

Результирующее воздействие вязкой жидкости на шар, движущийся прямолинейно и равномерно, определяется формулой

$$P_z = -6\pi\mu av_0 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\pi vt}} \right),$$

а при движении шара с переменной скоростью

$$P_z = -\frac{2}{3} \pi a^2 \mu v'(t) - 6\pi\mu av(t) - \\ - 6 \sqrt{v} \pi \rho a^2 \left[\frac{v(t)}{\sqrt{t}} + \int_0^t v'(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right].$$

Перейдем теперь к решению некоторых задач теории упругости и термоупругости. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упругого полупространства $x^3 \geq 0$ при различном характере нагружения. Пусть на поверхности полупространства $x^3 = 0$ заданы перемещения $u_i(x^1, x^2, 0) = u_{is}(x^1, x^2)$. Задача состоит в том, чтобы в области $x^3 > 0$ определить поле напряжений и перемещений, подчиненное уравнениям равновесия

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{kl} \nabla_k u_l) = 0$$

с граничными условиями $u_i(x^1, x^2, 0) = u_{is}(x^1, x^2)$. Компоненты вектора перемещений возьмем в виде

$$u_i = x^3 \nabla_i \psi + \varphi_i, \quad (3.1.28)$$

где ψ и φ_i — гармонические функции, связанные между собой зависимостью

$$(3-4\nu) \partial \psi / \partial x^3 = -g^{kl} \nabla_k \varphi_l.$$

Из граничных условий и представления u_i следует, что при $x^3 = 0$

$$u_i(x^1, x^2, 0) = u_{is}(x^1, x^2, 0) = \varphi_i(x^1, x^2, 0),$$

поэтому функции φ_i находим в результате решения уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi_i = 0$ ($x^3 > 0$) с граничными условиями $\varphi_i(x^1, x^2, 0) = u_{is}(x^1, x^2)$; на бесконечности $\varphi_i = 0$ и $\psi = 0$.

При нахождении функций φ_i и ψ воспользуемся интегральным преобразованием Фурье

$$\bar{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x^3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x^1, x^2, x^3) \exp[i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] dx^1 dx^2$$

и его обращением

$$\varphi_i(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x^3) \exp[-i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Умножим уравнение Лапласа на $\exp[i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)]$ и проинтегрируем по x^1 и x^2 , используя при этом формулы преобразования Фурье. В результате приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_i}{dx^3 dx^3} - \gamma^2 \bar{\varphi}_i = 0; \quad \gamma^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Применение преобразования Фурье к граничным условиям дает

$$\bar{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \bar{u}_{is}(\alpha_1, \alpha_2),$$

в предположении ограниченности интеграла —

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |u_{is}(x^1, x^2)| dx^1 dx^2.$$

Здесь

$$\bar{u}_{is}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_{is}(x^1, x^2) \exp[i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] dx^1 dx^2.$$

Решение преобразованного уравнения с учетом соответствующих граничных условий приводит к выражению

$$\bar{\varphi}_i(\alpha_1, \alpha_2, x^3) = \bar{u}_{is}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x^3).$$

Функция ψ — гармоническая. Уравнение Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{dx^3 dx^3} - \gamma^2 \bar{\psi} = 0,$$

решением которого, стремящимся к нулю на бесконечности, будет функция

$$\bar{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, x^3) = B(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x^3).$$

Функции φ_i и ψ взаимосвязаны. Применяя к связывающему их соотношению преобразование Фурье, находим

$$\frac{d\bar{\psi}}{dx^3} = -\frac{1}{3-4\nu} \left(\frac{d\bar{\varphi}_i}{dx^3} - i\alpha_1 \bar{\varphi}_1 - i\alpha_2 \bar{\varphi}_2 \right).$$

Подставив сюда выражения для $\bar{\varphi}_i$ и $\bar{\psi}$, определим

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma(3-4\nu)} [i\alpha_1 \bar{u}_{1s}(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_2 \bar{u}_{2s}(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma \bar{u}_{3s}(\alpha_1, \alpha_2)].$$

Выполнив обратные преобразования Фурье, получим

$$\varphi_i(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_{is}(\alpha_1, \alpha_2) \exp[-\gamma x^3 - i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\psi(x^1, x^2, x^3) = -\frac{1}{2\pi(3-4\nu)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\alpha_1}{\gamma} \bar{u}_{1s} + \frac{i\alpha_2}{\gamma} \bar{u}_{2s} + \bar{u}_{3s} \right) \times$$

$$\times \exp[-\gamma x^3 - i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Подставив (3.1.29) в выражения (3.1.28) для компонентов вектора перемещений, находим неизвестные u_i .

Пусть на границе $x^3=0$ заданы поверхностные силы $p_i^{(n)}(x^1, x^2)=p_{i3}^{(n)}n^3$. Задача состоит в том, чтобы решить уравнения равновесия

$$\nabla^2 u_i + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta) = 0 \text{ для } x^3 > 0$$

с граничными условиями

$$\sigma_{i3}(x^1, x^2, 0) = -p_{i3}^{(n)}(x^1, x^2),$$

полагая, что нагрузки действуют в направлении координатных осей.

Решение задачи представим в виде (3.1.28), а граничные условия запишем в перемещениях, используя физические соотношения

$$\sigma_{ij} = G[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1)g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta g_{ij}].$$

Тогда при $x^3=0$

$$\nabla_3 \varphi_1 + \nabla_1 \varphi_3 + \nabla_1 \psi = -p_{13}/G;$$

$$\nabla_3 \varphi_2 + \nabla_2 \varphi_3 + \nabla_2 \psi = -p_{23}/G;$$

$$\nabla_3 \varphi_3 + (1-2\nu) \nabla_3 \psi = -p_{33}/G.$$

Введем гармонические функции Ω_i , удовлетворяющие уравнению $\nabla^2 \Omega_i = 0$ для $x^3 > 0$, с граничными условиями $\Omega_i(x^1, x^2, 0) = -p_{i3}(x^1, x^2)/G$ для $x^3=0$. Тогда на границе $x^3=0$ имеем уравнения

$$\nabla_3 \varphi_1 + \nabla_1 \varphi_3 + \nabla_1 \psi = \Omega_1;$$

$$\nabla_3 \varphi_2 + \nabla_2 \varphi_3 + \nabla_2 \psi = \Omega_2;$$

$$\nabla_3 \varphi_3 + (1-2\nu) \nabla_3 \psi = \Omega_3/2,$$

которые справедливы и при $x^3 > 0$ в силу свойств гармонических функций. Дифференцированием полученных уравнений по координатам x^1, x^2, x^3 соответственно находим уравнение

$$g^{33} \nabla_3 \nabla_3 \psi = 0,5 g^{ij} \nabla_j \Omega_i.$$

При определении функций φ_i и ψ воспользуемся интегральным преобразованием Фурье, тогда решение уравнения Лапласа можно выразить в форме

$$\bar{\Omega}_i(\alpha_1, \alpha_2, x^3) = -\bar{p}_{i3}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-\gamma x^3); \quad \gamma^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Здесь

$$\bar{p}_{i3}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} p_{i3}(x^1, x^2) \exp[i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] dx^1 dx^2,$$

причем $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |p_{13}(x^1, x^2)| dx^1 dx^2$ — величина ограниченная, а на бесконечности $\Omega_i = 0$. Гармонические функции φ_i и φ представим в виде

$$\bar{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, x^3) = B(\alpha_1 \alpha_2) \exp(-\gamma x^3);$$

$$\bar{\varphi}_i(\alpha_1 \alpha_2, x^3) = C_i(\alpha_1 \alpha_2) \exp(-\gamma x^3).$$

Величину $B(\alpha_1 \alpha_2)$ определим из уравнения связи функций ψ и Ω_i , применяя преобразование Фурье и учитывая трансформанту решения уравнения Лапласа:

$$B = (-1/2G\gamma^2)(i\alpha_1 \bar{p}_{13} + i\alpha_2 \bar{p}_{23} + \gamma \bar{p}_{33}).$$

Применяя преобразование Фурье к соотношениям на границе ($x^3 = 0$), устанавливаем

$$\nabla_3 \bar{\varphi}_1 - i\alpha_1 \bar{\varphi}_3 - i\alpha_1 \bar{\psi} = \bar{\Omega}_1;$$

$$\nabla_3 \bar{\varphi}_2 - i\alpha_2 \bar{\varphi}_3 - i\alpha_2 \bar{\psi} = \bar{\Omega}_2;$$

$$\nabla_3 \bar{\varphi}_3 + (1 - 2\gamma) \nabla_3 \bar{\psi} = \bar{\Omega}_3/2.$$

Подставляя сюда выражения для $\bar{\varphi}_i$ и $\bar{\psi}$, приходим к уравнениям

$$\gamma C_1 + i\alpha_1 C_3 + i\alpha_1 B = \bar{p}_{13}/G;$$

$$\gamma C_2 + i\alpha_2 C_3 + i\alpha_2 B = \bar{p}_{23}/G;$$

$$\gamma C_3 + (1 - 2\gamma) \gamma B = \bar{p}_{33}/G,$$

решая которые, находим $C_i(\alpha_1 \alpha_2)$. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем соотношения

$$\varphi_i(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_i(\alpha_1 \alpha_2) \exp[-\gamma x^3 - i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] d\alpha_1 d\alpha_2;$$

$$\psi(x^1, x^2, x^3) = -\frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(i\alpha_1 \bar{p}_{13} + i\alpha_2 \bar{p}_{23} + \gamma \bar{p}_{33})/\gamma^2] \times$$

$$\times \exp[-\gamma x^3 - i(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)] d\alpha_1 d\alpha_2,$$

подстановка которых в выражения (3.1.28) для компонент u_i вектора перемещений определяет последние. В частном случае, при действии только силы p_{33} ($p_{13} = p_{23} = 0$), следует принять $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, тогда $B = -\bar{p}_{33}/2G\gamma$ и решение упрощается. Решение этой задачи следует строить в форме Папковича—Нейбера

$$u_i = \nabla_i \varphi + \nabla_i (x^j \psi_j) - 4(1-\nu) \psi_i, \quad (3.1.30)$$

полагая $\varphi = (1-2\nu)\chi$ и $\psi_i = g_i^3 \nabla_3 \chi$, где χ — гармоническая функция. Тогда имеем

$$u_i = x^3 \nabla_i \nabla_3 \chi + (1-2\nu) \nabla_i \chi - (3-4\nu) g_i^3 \nabla_3 \chi.$$

Дальнейшее решение следует проводить в цилиндрических координатах r, θ, z . Компоненты вектора перемещений определены уравнениями

$$u_r = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} + (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial r};$$

$$u_\theta = \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z} + (1-2\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta};$$

$$u_z = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

а соответствующие им напряжения — уравнениями

$$\sigma_{rr} = 2G \left[z \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - 2\nu \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) \right];$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2G \left[z \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} + z \frac{\partial^3 \chi}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right];$$

$$\sigma_{r\theta} = G \left[\frac{2z}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z} - \frac{1-2\nu}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right];$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(z \frac{\partial^3 \chi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right); \quad \sigma_{rz} = 2Gz \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2}; \quad \sigma_{\theta z} = 2G \frac{z}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial \theta \partial z^2},$$

откуда следует, что при конечных значениях производных $\partial^3 \chi / \partial r \partial z^2$ и $(1/r) \partial^3 \chi / \partial \theta \partial z^2$ на поверхности $z=0$ $\sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0$. Определение функции χ требует решения уравнения Лапласа $\nabla^2 \chi = 0$, с граничными условиями при $z=0$ $\sigma_{zz} = -2G \partial^2 \chi / \partial z^2 = -p_{zz}(r, \theta)$.

При осесимметричном деформировании, когда $p_{zz} = p_z(r)$, целесообразно воспользоваться интегральным преобразованием Ханкеля

$$\bar{\chi}(\alpha, z) = \int_0^\infty \chi(r, z) r J_0(\alpha r) dr;$$

$$\chi(r, z) = \int_0^\infty \bar{\chi}(\alpha, z) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha,$$

где $J_0(\alpha r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Применяя к уравнению Лапласа это интегральное преобразование и учитывая

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \chi(r, z) J_0(\alpha r) dr = -\alpha^2 \bar{\chi}(\alpha),$$

приходим к дифференциальному уравнению

$$d^2 \bar{\chi} / dz^2 - \alpha^2 \bar{\chi} = 0,$$

решение которого с учетом условия на бесконечности $\chi=0$ имеет вид

$$\bar{\chi}(\alpha) = A(\alpha) \exp(-\alpha z).$$

При этом $A(\alpha)$ определяется из граничных условий при $z=0$:

$$[2G\alpha^2 A \exp(-\alpha z)]_{z=0} = \bar{p}_z(\alpha),$$

$$\text{где } \bar{p}_z(\alpha) = \int_0^{\infty} p_z(r) r J_0(\alpha r) dr.$$

Тогда $A(\alpha) = \bar{p}_z(\alpha) / 2G\alpha^2$ и, следовательно,

$$\bar{\chi}(\alpha) = (\bar{p}_z(\alpha) / 2G\alpha^2) \exp(-\alpha z).$$

Последовательное применение прямого и обратного преобразований Ханкеля приводит к формулам для перемещений

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{2G} \int_0^{\infty} (1-2\nu - \alpha z) \bar{p}_z(\alpha) \exp(-\alpha z) J_1(\alpha r) d\alpha; \\ u_z &= \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} [2(1-\nu) + \alpha z] \bar{p}_z(\alpha) \exp(-\alpha z) J_0(\alpha r) d\alpha, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

которым соответствуют напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\int_0^{\infty} \alpha (1 + \alpha z) \bar{p}_z(\alpha) \exp(-\alpha z) J_0(\alpha r) d\alpha; \\ \sigma_{rz} &= -z \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{p}_z(\alpha) \exp(-\alpha z) J_1(\alpha r) d\alpha; \\ \sigma_{rr} &= -\int_0^{\infty} \alpha (1 - \alpha z) \bar{p}_z(\alpha) \exp(-\alpha z) J_0(\alpha r) d\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_0^{\infty} [\alpha z - (1 - 2\nu)] \frac{1}{\alpha} \bar{p}_z(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2(1+\nu) \int_0^\infty \alpha \bar{p}_z(\alpha) \exp(-\alpha z) J_0(\alpha r) d\alpha - (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}).$$

Частным случаем этих задач является задача Буссинеска, в которой рассматривается упругое полупространство $x^3 \geq 0$, нагруженное в начале координат сосредоточенной силой $p_{33} = P\delta(x^1)\delta(x^2)$, направленной по оси x^3 . Решение задачи строится в цилиндрических координатах в форме Папковича—Нейбера (3.1.30). Для сосредоточенной силы $p_{33} = p_z(r) = P\delta(r)/2\pi r$, приложенной в начале координат, имеем $p_z(\alpha) = P/2\pi$. Подставляя это выражение в (3.1.31), находим

$$u_r = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{rz}{R^3} - (1-2\nu) \left(\frac{1}{r} - \frac{z}{rR} \right) \right];$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G} \left[2(1-\nu) \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right],$$

где $R^2 = r^2 + z^2$; $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$.

Частное решение разрешающих уравнений термоупругости в перемещениях (2.2.27), характеризующее действие в пространстве сосредоточенной силы, приложенной в начале координат, может быть построено методом интегральных преобразований. Представим объемные силы в виде

$$F_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \chi_k,$$

а компоненты вектора перемещений в форме

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k.$$

Подставив эти выражения в первое уравнение (2.2.27), получим

$$\nabla_i [(1+m) \nabla^2 \Phi + \Phi/G - (3m-1) \alpha \Delta T] +$$

$$+ \Lambda_i^{jk} \nabla_j (\nabla^2 \psi_k + \chi_k/G) + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Lambda_\beta^{\delta\gamma} \nabla_\delta \psi_\gamma) = 0.$$

Отсюда находим уравнения

$$\nabla^2 \Phi = \frac{3m-1}{m+1} \alpha \Delta T - \frac{1}{G(m+1)} \Phi; \quad \nabla^2 \psi_k = -\frac{1}{G} \chi_k, \quad (3.1.32)$$

так как $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Lambda_\beta^{\delta\gamma} \nabla_\delta \psi_\gamma = 0$; $Q = 0$. Подстановка тех же выражений во второе уравнение (2.2.27) приводит к уравнению

$$\nabla^2 \Delta T - \Delta \dot{T}/\kappa - \eta \nabla^2 \dot{\Phi} = 0, \quad (3.1.33)$$

так как $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Lambda_\beta^{\delta\gamma} \nabla_\delta \dot{\psi}_\gamma = 0$; $Q = 0$.

Пусть в направлении оси x^1 в начале координат действует сосредоточенная сила $F_j = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)g_j f(t)$. Применим к уравнениям (3.1.32) и (3.1.33) преобразование Лапласа

$$\bar{q}(\mathbf{r}, p) = \int_0^\infty q(\mathbf{r}, t) \exp(-pt) dt$$

и предположим, что начальные условия однородны, тогда имеем уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Phi} &= \frac{3m-1}{m+1} \alpha \Delta \bar{T} - \frac{1}{G(m+1)} \bar{\Phi}; \quad \nabla^2 \bar{\psi}_k = -\frac{1}{G} \bar{\chi}_k; \\ \nabla^2 \Delta \bar{T} - \frac{p}{\kappa} \Delta \bar{T} - \eta p \nabla^2 \bar{\Phi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\mathbf{r}, p) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \bar{F}^i(\mathbf{r}', p) \nabla_i \left(\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right) dV(\mathbf{r}'); \\ \bar{\chi}_i(\mathbf{r}, p) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V F_j(\mathbf{r}', p) \Lambda_i^{jk} \nabla_k \left(\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right) dV(\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение для сосредоточенной силы F_j , получим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\mathbf{r}, p) &= -\frac{1}{4\pi} \nabla_1 \left(\frac{1}{R} \right) \bar{f}(p); \quad \bar{\chi}_1 = 0; \\ \bar{\chi}_2 &= \frac{1}{4\pi} \nabla_3 \left(\frac{1}{R} \right) \bar{f}(p); \quad \bar{\chi}_3 = -\frac{1}{4\pi} \nabla_2 \left(\frac{1}{R} \right) \bar{f}(p), \end{aligned}$$

где $R^2 = g_{ij}x^i x^j$.

Исключив из (3.1.34) функцию $\bar{\Phi}$, находим

$$(\nabla^2 - \beta^2) \Delta \bar{T} = \frac{p}{\kappa} \frac{\varepsilon}{4\pi C_1^2 \bar{m}} \nabla_1 \left(\frac{1}{R} \right) \bar{f}(p),$$

где $\beta^2 = p(1 + \varepsilon)/\kappa$; $\varepsilon = \eta \kappa m$; $m = (3m-1)\alpha/(m+1)$; $C_1^2 = G(m+1)$. Частным решением этого уравнения будет функция

$$\begin{aligned} \Delta \bar{T} &= \varepsilon A \nabla_1 [(\exp(-\beta R) - 1)/R] \bar{f}(p); \\ A &= 1/[4\pi C_1^2 \bar{m}(1 + \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Подставив (3.1.35) в первое уравнение (3.1.34), приходим к уравнению

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = B \nabla_1 [(\varepsilon \exp(-\beta R) + 1)/R] \bar{f}(p); \quad B = 1/4\pi C_1^2(1+\varepsilon),$$

частное решение которого

$$\bar{\Phi} = \frac{B}{2} \nabla_1 \left[R + \frac{2\varepsilon\kappa}{p(1+\varepsilon)R} \exp\left(-R \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)p}{\kappa}}\right) \right] \bar{f}(p).$$

Решение второго уравнения (3.1.34) известно:

$$\psi_1 = 0; \quad \psi_2 = \frac{1}{8\pi G} \nabla_3 R f(t); \quad \psi_3 = -\frac{1}{8\pi G} \nabla_2 R f(t).$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа и подставив Φ и Ψ в выражения компонент вектора перемещений, получим

$$u_j^{(1)} = \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{8\pi G} \right) g^{11} \nabla_1 \nabla_j R + \frac{1}{8\pi G R} g_j^1 \right] f(t) + \\ + \frac{\varepsilon B \kappa}{1+\varepsilon} g^{11} \nabla_1 \nabla_j \int_0^t \frac{f(\tau)}{R} \operatorname{erfc} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{1+\varepsilon}{\kappa(t-\tau)} \right)^{1/2} \right] d\tau,$$

где $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-u^2) du$. Температура ΔT определяется формулой

$$\Delta T = \varepsilon A g^{11} \nabla_1 \left\{ \frac{f(t)}{R} - \int_0^t f(\tau) \left[\frac{1+\varepsilon}{4\pi\kappa(t-\tau)^2} \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{R^2(1+\varepsilon)}{4\kappa(t-\tau)} \right] d\tau \right\}.$$

Если действующая в точке r_0 сосредоточенная сила

$$F_j^{(k)} = \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) g_j^k f(t)$$

направлена по оси x^k , то имеем решение

$$u_j^{(k)} = \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{8\pi G} \right) g^{kl} \nabla_l \nabla_j R + \frac{1}{8\pi G R} g_j^k \right] f(t) + \\ + \frac{\varepsilon B \kappa}{1+\varepsilon} g^{kl} \nabla_l \nabla_j \int_0^t \frac{f(\tau)}{R} \operatorname{erfc} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{1+\varepsilon}{\kappa(t-\tau)} \right)^{1/2} \right] d\tau; \\ \Delta T^{(k)} = -\varepsilon A g^{kl} \nabla_l \left\{ \frac{f(t)}{R} - \int_0^t f(\tau) \left[\frac{1+\varepsilon}{4\pi\kappa(t-\tau)^2} \right]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{R^2(1+\varepsilon)}{4\kappa(t-\tau)} \right] d\tau \right\}.$$

В ряде случаев при решении динамических задач теории упругости особенно эффективным оказывается прием объединения решения Ляме, изложенный в п. 2.3., с интегральными преобразованиями. Здесь мы имеем дело с соотношениями

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \psi_k; \quad F_i = \nabla_i \bar{\Phi} + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \bar{\chi}_k \quad (3.1.36)$$

и волновыми уравнениями

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Phi = -\frac{1}{a_e^2} \bar{\Phi}; \quad \left(\nabla^2 - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \psi_i = -\frac{1}{a_s^2} \bar{\chi}_i; \\ \beta^2 = \left(\frac{a_e}{a_s} \right)^2. \quad (3.1.37)$$

Применим ко второму соотношению (3.1.36) интегральное преобразование Фурье

$$\bar{F}_k = -i(\alpha_k \bar{\Phi} + \Lambda_k^{jl} \alpha_j \bar{\chi}_l).$$

Разрешая эти уравнения относительно $\bar{\Phi}$, $\bar{\chi}_j$ и учитывая при этом равенство

$$g^{kl} \nabla_k \bar{\chi}_l = -i g^{nk} \alpha_n \bar{\chi}_k = 0,$$

находим трансформанты правых частей уравнений (3.1.37)

$$\bar{\Phi} = -i g^{jk} \alpha_j \bar{F}_k / \gamma^2; \quad \bar{\chi}_k = -\frac{1}{\gamma^2} \Lambda_k^{jl} \alpha_j \bar{F}_l; \quad \gamma^2 = \sum_j \alpha_j^2.$$

Применяя к уравнениям (3.1.37) преобразование Фурье, имеем

$$(\gamma^2 - \omega^2) \bar{\Phi} = \bar{\Phi} / a_e^2; \quad (\gamma^2 - \omega^2 \beta^2) \bar{\psi}_j = \bar{\chi}_j / a_s^2.$$

Выполняя теперь в полученных уравнениях обратное преобразование, находим

$$\Phi(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{(2\pi a_e)^2} \int_V [\bar{\Phi} / (\gamma^2 - \omega^2)] \exp[-i(\alpha_k x^k + \omega \tau)] dV; \\ \psi_j(\mathbf{r}, \tau) = \frac{1}{(2\pi a_s)^2} \int_V [\bar{\chi}_j / (\gamma^2 - \omega^2 \beta^2)] \exp[-i(\alpha_k x^k + \omega \tau)] dV.$$

По известным функциям Φ и ψ_j с помощью формул (3.1.36) определим компоненты u_i вектора перемещений. Представление вектора перемещений в форме Ляме, как показано ранее, позволяет свести уравнения движения в перемещениях к системе

волновых уравнений, поэтому возникает потребность в подробном изучении решений волновых уравнений, в частности уравнения

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{a_e^2} \gamma(\mathbf{r}, t), \quad (3.1.38)$$

характеризующего распространение продольной волны в упругом пространстве при однородных начальных условиях. Можно считать, что единственной причиной, вызывающей волновое движение, будет источник $\gamma(\mathbf{r}, t)$, который является заданной функцией переменных $\mathbf{r}$ и t . Для решения уравнения (3.1.38) воспользуемся функцией Грина $G(R, t)$, где $R^2 = g_{ij}x^i x^j$, которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = -4\pi \delta(R) \delta(t)$$

с однородными начальными условиями $G(R, 0) = 0$; $\dot{G}(R, 0) = 0$ и описывает сферическую волну, вызванную действием точечного источника мгновенного возмущения в начале координат. Уравнение волны запишем в цилиндрических координатах

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = -4\pi \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z) \delta(t),$$

а при его решении воспользуемся интегральным преобразованием Ханкеля—Фурье. Вначале применим к уравнению волны преобразование Лапласа, учитывая при этом однородные начальные условия. В итоге получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{p^2}{a_e^2}\right) \bar{G} = -4\pi \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z),$$

где $\bar{G} = \int_0^\infty G(r, z, t) \exp(-pt) dt$. Умножим полученное уравнение на $r J_0(\alpha r) \cos \gamma z$ и проинтегрируем по объему:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{p^2}{a_e^2}\right) \bar{G} r J_0(\alpha r) \cos \gamma z dr dz = \\ & = -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty r \delta(r) J_0(\alpha r) dr \int_0^\infty \delta(z) \cos \gamma z dz. \end{aligned}$$

Согласно правилам интегрального преобразования Ханкеля—Фурье получим

$$\bar{G}(\alpha^2 + \gamma^2 + p^2/a_e^2) = \sqrt{2/\pi},$$

откуда следует

$$\bar{G}(r, z, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{J_0(\alpha r) \alpha \cos \gamma z d\alpha d\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2 + p^2/a_e^2}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{\cos \gamma z d\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2 + p^2/a_e^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\exp[-z \sqrt{\alpha^2 + p^2/a_e^2}]}{\sqrt{\alpha^2 + p^2/a_e^2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp[-z \sqrt{\alpha^2 + p^2/a_e^2}]}{\sqrt{\alpha^2 + p^2/a_e^2}} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{1}{R} \exp(-Rp/a_e),$$

находим

$$\bar{G} = \frac{1}{R} \exp\left(-\frac{p}{a_e} \sqrt{z^2 + r^2}\right) = \frac{1}{R} \exp(-Rp/a_e).$$

Перенесем возмущение в точку $\mathbf{r}_0$, запишем уравнение волны в произвольных координатах

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t)$$

и применим к нему преобразование Лапласа. Тогда получим уравнение

$$(\nabla^2 - p^2/a_e^2) \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, p) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.1.39)$$

решением которого является функция

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, p) = \frac{1}{R} \exp(-Rp/a_e),$$

где $R^2 = g_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$. Применяя к этому выражению обратное преобразование Лапласа, находим

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \delta(R/a_e - t)/R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0). \quad (3.1.40)$$

Функция (3.1.40) является *фундаментальным решением* волнового уравнения и представляет собой мгновенный импульс, перемещающийся в направлении возрастающих значений R от точки $\mathbf{r}_0$ до бесконечности. Применяя к уравнению (3.1.38) преобразование Лапласа и учитывая однородность начальных условий, имеем

$$(\nabla^2 - p^2/a_e^2) \bar{\Phi}(\mathbf{r}, p) = -\bar{\gamma}(\mathbf{r}, p)/a_e^2.$$

Умножим это уравнение на $\bar{G}$, а уравнение (3.1.39) на $\bar{\Phi}$, вычтем одно из другого и проинтегрируем полученное выражение по объему:

$$\int_V (\bar{G} \nabla^2 \bar{\Phi} - \bar{\Phi} \nabla^2 \bar{G}) dV = (-1/a_e^2) \int_V \bar{\gamma} \bar{G} dV + \\ + 4\pi \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \bar{\Phi}(\mathbf{r}) dV.$$

Так как

$$\int_V (\bar{G} \nabla^2 \bar{\Phi} - \bar{\Phi} \nabla^2 \bar{G}) dV = \int_S \left(\bar{G} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} \right) dS; \\ \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \bar{\Phi}(\mathbf{r}) dV = \bar{\Phi}(\mathbf{r}_0, p),$$

то

$$\int_S \left(\bar{G} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} \right) dS = 4\pi \bar{\Phi}(\mathbf{r}_0, p) - \frac{1}{a_e^2} \int_V \bar{\gamma} \bar{G} dV.$$

Для бесконечной области, считая интеграл $\int_V |\bar{\gamma}| dV$ ограниченным, имеем $\bar{\Phi} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. В полученном уравнении поверхностный интеграл исчезает, поэтому

$$\bar{\Phi}(\mathbf{r}_0, p) = \frac{1}{4\pi a_e^2} \int_V \bar{\gamma}(\mathbf{r}, p) \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, p) dV(\mathbf{r}).$$

Применяя к этому выражению обратное преобразование Лапласа и используя при этом теорему о свертывании, получаем

$$\Phi(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi a_e^2} \int_0^t d\tau \int_V \gamma(\mathbf{r}, t - \tau) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \tau) dV(\mathbf{r}).$$

Подставляя сюда фундаментальное решение (3.1.40) и меняя местами точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, находим при $R \leq a_e t$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a_e^2} \int_V \frac{\gamma(\mathbf{r}_0, t - R/a_e)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} dV(\mathbf{r}_0), \quad (3.1.41)$$

т. е. решением уравнения (3.1.39) является запаздывающий потенциал (3.1.41), а неравенство $R \leq a_e t$ указывает на интегрирование внутри шара. При наличии в начале координат сосредоточенного возмущения $\gamma(\mathbf{r}, t) = 4\pi a_e^2 \delta(\mathbf{r}) f(t)$, изменяющегося во

времени с момента $t=0$ по заданному закону $f(t)$, решение (3.1.41) принимает вид

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = f(t - R/a_e) / R(\mathbf{r}, 0).$$

Решение (3.1.41) волнового уравнения (3.1.38) справедливо при однородных начальных условиях, однако для большинства динамических задач теории упругости начальные условия неоднородны, поэтому возникает потребность в решении однородного волнового уравнения

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.1.42)$$

с неоднородными начальными условиями

$$\Phi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}); \quad \dot{\Phi}(\mathbf{r}, 0) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D, \quad (3.1.43)$$

т. е. необходимо изучить распространение вызванной начальными возмущениями волны в упругом пространстве. Применяя к уравнению (3.1.42) преобразование Лапласа, находим уравнение

$$(\nabla^2 - p^2/a^2) \bar{\Phi}(\mathbf{r}, p) = -(1/a^2)[pf(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})],$$

правую часть которого $pf(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})$ можно трактовать как источник $\bar{\gamma}(\mathbf{r}, p)$. Тогда

$$\bar{\Phi}(\mathbf{r}_0, p) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_V [pf(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})] \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, p) dV(\mathbf{r}),$$

где функция $\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, p)$ определена формулой (3.1.40). Применим к приведенному уравнению обратное преобразование Лапласа и заменим переменные. В результате получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{4\pi a^2} \left\{ \int_V g(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t) dV(\mathbf{r}_0) + \right. \\ & \left. + \int_V \frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t)] dV(\mathbf{r}_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Первый интеграл

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_V g(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t) dV(\mathbf{r}_0)$$

запишем в сферических координатах R, θ, φ с помощью соотношений $x_0^i = x^i + Rn^i$, где n^i — направляющие косинусы прямой, соединяющей точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$: $n^1 = \sin \theta \cos \varphi$; $n^2 = \sin \theta \sin \varphi$; $n^3 = \cos \theta$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В этом случае

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(x' + n'R) \delta\left(\frac{R}{a} - t\right) \frac{R dR}{a^2} \sin \theta d\varphi d\theta.$$

Используя свойство функции Дирака

$$\int_V h(\eta) \delta(\eta - t) d\eta = h(t),$$

приведем полученное выражение к виду

$$\Phi_1(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(x' + n'at) \sin \theta d\varphi d\theta = t M_{at}[g(r, t)].$$

Тогда (3.1.44) принимает вид

$$\Phi(r, t) = t M_{at}[g(r, t)] + \frac{\partial}{\partial t} \{t M_{at}[f(r, t)]\} \quad (3.1.45)$$

и называется *интегралом Пуассона*.

Выполним в (3.1.45) дифференцирование по времени t :

$$\Phi = t M_{at}[g(r, t)] + M_{at}[f(r, t)] + t \frac{\partial}{\partial t} M_{at}[f(r, t)].$$

Тогда при $t=0$ имеем

$$\Phi(r, 0) = M_{at}[f(r, 0)] = f(r) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = f(r).$$

Вторично дифференцируя $\Phi(r, t)$ по времени t , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= M_{at}[g(r, t)] + t \frac{\partial}{\partial t} M_{at}[g(r, t)] + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial t} M_{at}[f(r, t)] + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{at}[f(r, t)]. \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} M_{at}[f(r, t)] = 0,$$

производная $\partial^2 M_{at} / \partial t^2$ при $t \rightarrow 0$ — ограниченная величина, а потому

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, 0) = M_{at}[g(r, 0)] = g(r) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = g(r).$$

Следовательно, интеграл Пуассона (3.1.45) удовлетворяет начальным условиям (3.1.43) и является решением однородного волнового уравнения. Совокупность решений (3.1.41) и (3.1.45) определяет решение неоднородного волнового уравнения (3.1.38) для упругого пространства при неоднородных начальных условиях (3.1.43).

Рассмотрим распространение термоупругих волн. При отсутствии объемных сил и предположении об однородности начальных условий функций $\psi_i = 0$ имеем безвихревое поле, характеризующееся первым уравнением (2.3.17) или (2.3.19). Для определения u_i достаточно найти частное решение первого уравнения (2.3.17). Для этого применим преобразование Лапласа к уравнениям (2.3.17) и (2.3.19) при однородных начальных условиях $\Delta T(\mathbf{r}, 0) = 0$; $\Phi(\mathbf{r}, 0) = 0$; $\dot{\Phi}(\mathbf{r}, 0) = 0$. В результате получим

$$(\nabla^2 - p^2/a_e^2)\bar{\Phi} = \gamma\Delta\bar{T}; \quad (\nabla^2 - p/\kappa)\Delta\bar{T} = -\bar{Q}/\Lambda.$$

Исключая $\Delta\bar{T}$, находим уравнение

$$(\nabla^2 - p^2/a_e^2)(\nabla^2 - p/\kappa)\bar{\Phi} = -\gamma\bar{Q}/\Lambda,$$

частным решением которого будет функция

$$\bar{\Phi} = (\Delta\bar{T} - \Delta\bar{S})\gamma/(p^2/a_e^2 - p/\kappa),$$

где $\Delta\bar{T}$ — решение уравнения $(\nabla^2 - p/\kappa)\Delta\bar{T} = -\bar{Q}/\Lambda$, а $\Delta\bar{S}$ — частное решение уравнения $(\nabla^2 - p^2/a_e^2)\Delta\bar{S} = -\bar{Q}/\kappa$ с однородными начальными условиями $\Delta\bar{S}(\mathbf{r}, 0) = 0$; $\Delta\dot{\bar{S}}(\mathbf{r}, 0) = 0$.

Интегрирование указанных уравнений не содержит трудностей. Применение обратного преобразования Лапласа к функции $\bar{\Phi}$ завершает решение задачи. Для ограниченного тела решение уравнений (2.3.17) состоит из частного решения Φ' уравнения $\square_{,2}^2\Phi = \gamma\Delta T$ и общего решения Φ'' и ψ_i уравнений $\square_{,2}^2\Phi = 0$ и $\square_{,2}^2\psi_i = 0$. Полное решение складывается из суммы решений $u_i = u_i' + u_i''$, где $u_i' = \nabla_i\Phi'$; $u_i'' = \nabla_i\Phi'' + \Lambda_i^{jk}\nabla_j\psi_k$. Функции u_i'' можно представить через функции Яковаке

$$u_i'' = [(\square_{,2}^2 + m\nabla^2)g_i^j - mg_i^j\nabla^2]\varphi_j,$$

где функции φ_j удовлетворяют биволновым уравнениям $\square_{,2}^2\square_{,2}^2\varphi_j = 0$.

Решение разрешающих уравнений динамических задач, записанных в напряжениях, также основано на сведении их к системе волновых уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями или на использовании интегральных преобразований, выбранных с учетом специфики конкретно рас-

смаатриваемой задачи. Рассмотрим действие объемных сил в упругом пространстве в предположении, что напряжения и перемещения на бесконечности обращаются в нуль. Задаче соответствуют уравнения движения (1.4.30) и физические соотношения (1.4.15) при $\Delta T=0$. Введем переменную $\tau=a_e t$ и перепишем уравнения движения в виде

$$g^{ja}\nabla_a\sigma_{ij}(\mathbf{r}, \tau)+F_i(\mathbf{r}, \tau)=\rho a_e^2 \frac{\partial}{\partial \tau^2} u_i(\mathbf{r}, \tau). \quad (3.1.46)$$

Для решения уравнений (3.1.46) воспользуемся интегральным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha_k, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_V f(x^k, \tau) \exp[i(\alpha_k x^k + \omega \tau)] dV; \\ f(x^k, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_V \bar{f}(\alpha_k, \tau) \exp[-i(\alpha_k x^k + \omega \tau)] dV. \end{aligned}$$

Умножая уравнения движения (3.1.46) и физические соотношения (1.4.15) при $\Delta T=0$ на $\exp[i(\alpha_k x^k + \omega \tau)]$, а затем, интегрируя по объему переменных x^k, τ с учетом

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_V (\nabla_j f, \partial^2 f / \partial \tau^2) \exp[i(\alpha_k x^k + \omega \tau)] dV = -(i\alpha_k, \omega) \bar{f},$$

приводим уравнения (3.1.46) к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -i\alpha_j g^{jk} \bar{\sigma}_{kl} + \bar{F}_l + \rho a_e^2 \omega^2 \bar{u}_l &= 0; \\ \bar{\sigma}_{kl} &= -iG[(\bar{u}_l \alpha_k + \bar{u}_k \alpha_l) - (m-1)\bar{u}^n \alpha_n g_{kl}]. \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

Исключая отсюда трансформанты напряжений, получаем

$$(\gamma^2 - \omega^2 \beta^2) \bar{u}_k + (\beta^2 - 1) \alpha_j \alpha_k \bar{u}^j = \bar{F}_k / G,$$

где $\gamma^2 = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2$; $\beta^2 = (a_e/a_s)^2$. Решение этих уравнений определяет трансформанты перемещений

$$\bar{u}_j = [\beta^2(\gamma^2 - \omega^2) \bar{F}_j - \delta^2 \alpha_j \alpha_k \bar{F}^k] / [\rho a_e^2 (\gamma^2 - \omega^2 \beta^2) (\gamma^2 - \omega^2)]. \quad (3.1.48)$$

Подставляя (3.1.48) во второе соотношение (3.1.47), находим выражения для трансформант напряжений $\bar{\sigma}_{kl}$. Применяя теперь к (3.1.48) обратное преобразование Фурье, находим

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2 \rho a_e^2} \int_V \frac{\beta^2(\gamma^2 - \omega^2) \bar{F}_j - \delta^2 \alpha_j \alpha_k \bar{F}^k}{(\gamma^2 - \omega^2 \beta^2) (\gamma^2 - \omega^2)} \times \\ &\times \exp[-i(\alpha_k x^k + \omega \tau)] dV, \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

где $\delta^2 = \beta^2 - 1$, а подстановка выражений (3.1.49) в физические соотношения определяет компоненты тензора напряжений.

Для решения квазистатических задач вязкоупругости, учитывая специфику операторов (1.6.19), воспользуемся *интегральным преобразованием Лапласа—Карсона*, которое заключается в том, что всякой функции $f(t)$, определенной на интервале $0 \leq t < \infty$ и называемой оригиналом, ставится в соответствие функция $f^*(p)$ комплексной переменной p

$$f^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (3.1.50)$$

именуемая изображением функции $f(t)$. Как видно из (3.1.50), такое преобразование линейно. Если функция $f^*(p)$ известна, то с помощью *обратного преобразования Меллина*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{1}{p} e^{pt} f^*(p) dp$$

определяют функцию $f(t)$, причем интегрирование ведут в комплексной плоскости вдоль вертикальной прямой с абсциссой η .

Пусть имеет место характерное для вязкоупругости соотношение между функциями $f(t)$, $g(t)$ и $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \int_0^t f(t-\tau) dg(\tau). \quad (3.1.51)$$

Возьмем от этого соотношения интеграл (3.1.50) и получим соотношение в изображениях

$$\psi^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(t-\tau) dg(\tau).$$

Поменяв местами порядок интегрирования и введя переменную $x = t - \tau$, находим

$$\psi^*(p) = f^*(p) \int_0^{\infty} e^{-p\tau} dg(\tau) = f^*(p) \left[g(0) + p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} g(\tau) d\tau \right].$$

Принимая $g(0) = 0$, получаем изображение (3.1.51) в форме

$$\psi^*(p) = f^*(p) g^*(p), \quad (3.1.52)$$

причем соотношение (3.1.52) выражает *теорему свертывания*.

Применим соотношение (3.1.51) к определяющим уравнениям линейной вязкоупругости (1.6.4) и (1.6.10). В результате определяющие уравнения в изображениях будут следующими:

$$\begin{aligned} D_{ij}^*(\sigma, p) &= \tilde{\Gamma}^*(p) D_{ij}^*(e, p); \\ \sigma^*(p) &= 3\tilde{\Gamma}_1^*(p)[e^*(p) - \alpha\Delta T^*(p)]; \end{aligned} \quad (3.1.53)$$

$$D_{ij}^*(e, p) = \tilde{R}^*(p) D_{ij}^*(\sigma, p); \quad e^*(p) - \alpha\Delta T^*(p) = \tilde{R}_1^*(p)\sigma^*(p).$$

Отсюда видно, что между ядрами $\tilde{\Gamma}(t)$, $\tilde{\Gamma}_1(t)$ и ядрами $\tilde{R}(t)$, $\tilde{R}_1(t)$ существует связь

$$\tilde{R}^*(p)\tilde{\Gamma}^*(p) = 1; \quad \tilde{R}_1^*(p)\tilde{\Gamma}_1^*(p) = 1,$$

которая указывает, что выражения (3.1.53) — определяющие уравнения линейной теории упругости при $\tilde{\Gamma}^*(p) \rightarrow 2G$ и $\tilde{\Gamma}_1^*(p) \rightarrow K$. Для полной аналогии принимаем $\tilde{\Gamma}^* = 2G^*$ и $\tilde{\Gamma}_1^* = K^*$, причем звездочки над модулями означают, что в оригиналах им соответствуют интегральные операторы по времени. Это позволяет формально вводить различные операторы, например:

$$2G^* = \tilde{\Gamma}^*; \quad \nu^* = (3\tilde{\Gamma}_1^* - \tilde{\Gamma}^*)/(6\tilde{\Gamma}_1^* + \tilde{\Gamma}^*),$$

при этом, если оператор Пуассона ν^* есть число ν , то операторы $\tilde{\Gamma}^*$ и $\tilde{\Gamma}_1^*$ подобны, а их отношение является также числом:

$$\tilde{\Gamma}_1^*/\tilde{\Gamma}^* = (1 + \nu)/3(1 - 2\nu).$$

Квазистатические задачи термовязкоупругости решают в предположении, что температурное поле однородно и нестационарно, т. е. $\Delta T(t)$. При этом вводят приведенное время

$$t' = \int_0^t dt/a_T,$$

где a_T — некоторая функция температуры, характеризующая зависимость вязкости среды от температуры и определяемая формулой Вильямса—Ландела—Ферри

$$\lg a_T = -\frac{c_1(T - T_s)}{C_2 + T - T_s},$$

где C_1 и C_2 — экспериментальные постоянные среды; T_s — температура приведения, $a(T_s) = 1$. Следовательно, задаваемые поверхностные силы $p_i^{(n)}$ и перемещения u_{is} , а также объемные

силы F_i и температуру ΔT рассматривают как заданные функции координат x^j и приведенного времени t' .

Разрешающие уравнения квазистатической задачи в изображениях и соответствующие граничные условия имеют вид

$$\nabla^2 u_i^* + m^* \nabla_i \nabla_k u_k^* + 2\tilde{R}^* F_i^* = 0$$

или

$$(\sigma_{ij}^* n^j - E_2 u_i^*) r_n^i = N_n^*, \quad (3.1.54)$$

$$u_i^* r_m^i = u_{ms}^* \text{ на } S_1; \quad \sigma_{ij}^* n^j r_m^i = p_m^* \text{ на } S_2,$$

где $m^* = 1/(1-2\nu^*) = 1/3 + 2\tilde{R}^* \tilde{\Gamma}_1^*$; n^j — компоненты вектора внешней нормали; E_2 — функция координат x^j , имеющая размерность модуля, деленного на длину; r_n^i — компоненты базисных векторов r_n ; N_n^* — заданные величины. Учитывая изображения напряжений

$$\sigma_{ij}^* = \tilde{\Gamma}^* [e_{ij}^* + 1,5(m^* - 1)e^* g_{ij} - 0,5(3m^* - 1)\alpha \Delta T^* g_{ij}],$$

граничные условия, входящие в (3.1.54), преобразуем к виду

$$u_i^* r_m^i = u_{ms}^*,$$

$$(e_{ij}^* n^j + 0,5(m^* - 1) \nabla_k u_k^* n_i) r_n^i = \tilde{R}^* p_n^* + 0,5(3m^* - 1)\alpha \Delta T^* n_i r_n^i \quad (3.1.55)$$

или

$$[0,5(\nabla_i u_j^* + \nabla_j u_i^*) n^j + 0,5(m^* - 1) \nabla_k u_k^* n_i - E_2 \tilde{R}^* u_i^*] r_n^i = \tilde{R}^* N_i^* + 0,5(3m^* - 1)\alpha \Delta T^* n_i r_n^i.$$

Итак, система разрешающих уравнений (3.1.54) вместе с граничными условиями (3.1.55) соответствует квазистатической краевой задаче линейной вязкоупругости, представленной в изображениях и эквивалентной статической краевой задаче статической теории упругости, записанной в перемещениях, а потому к ней применимы результаты, изложенные в п. 2.2.

В произвольной точке x^j тела компоненты вектора перемещений u_i^* являются линейными функционалами от $2\tilde{R}^* F_i^*$ и $\tilde{R}^* p_n^* + 0,5(3m^* - 1)\alpha \Delta T^* n_i r_n^i$. При этом коэффициенты $\tilde{R}^*$ и $0,5(3m^* - 1)\alpha \Delta T^*$ не зависят от координат, поэтому u_i^* будут неоднородными линейными функциями этих коэффициентов. Общее решение задачи всегда имеет вид

$$\begin{aligned} u_i^* &= f_i^* + \tilde{R}^* \Phi_i^* + 0,5(3m^* - 1)\alpha \Phi_{Ti}^* \Delta T^*; \\ \sigma_{ij}^* &= \tilde{\Gamma}^* f_{ij}^* + \Phi_{ij}^* + 3\alpha \tilde{\Gamma}_1^* \Phi_{Tij}^* \Delta T^* + \\ &+ [3(m^* - 1)\tilde{\Gamma}_1^* \Delta_k f^* / (3m^* - 1) + 0,5(m^* - 1) \nabla_k \Phi_k^* + \\ &+ 1,5\alpha(m^* - 1)\tilde{\Gamma}_1^* \nabla_k \Phi_{T*}^*] g_{ij} - 3\alpha \tilde{\Gamma}_1^* \Delta T^* g_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

где все функции f^* и Φ^* зависят только от упругих характеристик m^* , $\gamma^* = E_2 \tilde{R}^*$ и координат, а потому будут линейными функционалами от u_{ms}^* , p_n^* , N_n^* , причем $f_{ij}^* = 0,5(\nabla_i f_j^* + \nabla_j f_i^*)$; $\Phi_{ij}^* = 0,5(\nabla_i \Phi_j^* + \nabla_j \Phi_i^*)$; $\Phi_{Ti}^* = 0,5(\nabla_i \Phi_{Ti}^* + \nabla_j \Phi_{Ti}^*)$.

Так как задача теории упругости предполагается решенной, то в уравнениях (3.1.56) компоненты f_i^* , Φ_i^* и Φ_{Ri}^* известны: компоненты f_i^* возникли в связи с заданием на границе вектора перемещений u_{ms}^* и равны нулю, если u_{ms} не заданы или равны нулю; компоненты Φ_i^* возникли в связи с заданием хотя бы одной из сил F_i , $p_i^{(n)}$ или N_i , они обращаются в нуль, если объемные силы F_i равны нулю и ни одной из сил $p_i^{(n)}$, N_i не задано; компоненты Φ_{Ti}^* возникли в связи с заданием температурных граничных условий, они не существенны при $\Delta T = 0$.

Введем обозначения

$$U_{ij}^* = f_i^*, \quad P_i^* = \Phi_i^*, \quad T_i^* = 0,5(3m^* - 1)\Phi_{Ti}^*$$

и

$$U_{ij}^* = f_{ij}^* + 0,5(m^* - 1)\nabla_k f_k^* g_{ij},$$

$$P_{ij}^* = \Phi_{ij}^* + 0,5(m^* - 1)\nabla_k \Phi_k^* g_{ij},$$

$$T_{ij}^* = \Phi_{Tij}^* + 0,5(m^* - 1)\nabla_k \Phi_{Tk}^* g_{ij},$$

— для векторов и тензоров, которые можно выразить через векторы следующим образом:

$$U_{ij}^* = 0,5(\nabla_i U_j^* + \nabla_j U_i^*) + 0,5(m^* - 1)\nabla_k U_k^* g_{ij};$$

$$P_{ij}^* = 0,5(\nabla_i P_j^* + \nabla_j P_i^*) + 0,5(m^* - 1)\nabla_k P_k^* g_{ij};$$

$$T_{ij}^* = 0,5(\nabla_i T_j^* + \nabla_j T_i^*) + 0,5(m^* - 1)\nabla_k T_k^* g_{ij}.$$

Тогда общее решение (3.1.56) принимает вид

$$\begin{aligned} u_i^* &= U_i^* + \tilde{R}^* P_i^* + \alpha T_i^* \Delta T^*; \\ \sigma_{ij}^* &= \tilde{\Gamma}^* U_{ij}^* + P_{ij}^* + 3\alpha \tilde{\Gamma}_i^* T_{ij}^* \Delta T^* \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

и требует решения системы дифференциальных уравнений

$$0,5(\nabla_i Z_j^* + \nabla_j Z_i^*) = Z_{ij}^* - 3(m^* - 1)Z^* g_{ij}/(3m^* - 1);$$

$$Z^* = g^{ij} Z_{ij}^*/3$$

с однородными граничными условиями. Решение уравнений имеет вид

$$Z_i^* = Z_i'^* - \frac{3(m^* - 1)}{3m^* - 1} Z_i^{**},$$

где $Z_i'^*$ и Z_i^{**} — известные линейные интегральные операторы по координатам от Z_{ij}^* и Z^* . Решение справедливо для векторов

$$U_i^* = U_i'^* - 3(m^* - 1)U_i^{**}/(3m^* - 1);$$

$$P_i^* = P_i'^* - 3(m^* - 1)P_i^{**}/(3m^* - 1);$$

$$T_i^* = T_i'^* - 3(m^* - 1)T_i^{**}/(3m^* - 1).$$

Отсюда следует, что трудности построения точных решений рассматриваемых краевых задач линейной вязкоупругости сводятся к переходу от изображений к оригиналам в уравнениях (3.1.57).

Для дифференциальных уравнений с производными по координатам точек тела краевых задач не возникает, так как предполагается известным решение соответствующих задач теории упругости. Координаты точек тела, его размеры и области приложения нагрузок являются параметрами, зависимость от которых в изображениях остается такой же, как в задачах теории упругости. Поэтому для произвольной точки тела можно рассматривать величину V типа перемещения и величину H типа напряжения, для которых существуют выражения

$$\begin{aligned} V &= U_v + P_v/2G + \alpha T_v \Delta T; \\ H &= 2GU_n + P_n + 3\alpha K T_n \Delta T, \end{aligned} \quad (3.1.58)$$

представляющие решение линейных задач теории упругости. Сюда входят U_v и U_n — однородные линейные функции или функционалы заданных граничными условиями величин типа перемещений; P_v и P_n — функции заданных величин типа сил; T_v и T_n — функции, не зависящие от заданных сил и перемещений. Все шесть типов функций зависят от координат и размеров, от коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma = E_2/2G$, но не от G и K . Переходя в (3.1.58) к изображениям решений вязкоупругих задач, имеем

$$H^* = P_n^*, \quad V^* = \tilde{R}^*(P_v'^* - P_v^{**}) + \tilde{R}_1^* P_v^{**}/3.$$

Изложенный материал позволяет сформулировать следующие утверждения:

1) напряжения упругого и термовязкоупругого тел совпадают, а перемещения получаются заменой нагрузок операторами ползучести;

2) если кривые сдвиговой и объемной ползучести среды подобны, то решение задачи термовязкоупругости при заданных объемных силах и граничных условиях получается из решения задачи теории упругости заменой нагрузок и заданных перемещений на соответствующие операторы ползучести и релаксации. Иначе говоря, в выражениях

$$\begin{aligned} V^* &= U_V^* + \tilde{R}^* P_V^* + \alpha T_V^* \Delta T^*; \\ H^* &= \tilde{\Gamma}^* U_H^* + P_H^* + 3\alpha \tilde{\Gamma}_1^* T_H^* \Delta T^* \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

для функций v^* и P^* линейный характер имеют только изображения нагрузок и заданных перемещений, тогда как v и γ в них постоянны, $T^* = T$ и, следовательно, оригиналами будут

$$\begin{aligned} V &= U_V + \alpha T_V \Delta T + \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) dP_V(\tau); \\ H &= P_H + \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) dU_H(\tau) + 3\alpha T_H \int_0^t \tilde{\Gamma}_1(t-\tau) d\Delta T(\tau); \end{aligned}$$

3) общее решение задачи термовязкоупругости при произвольных допустимых граничных условиях, налагаемых на перемещения, для упруго несжимаемых тел ($K = \infty$) имеет вид

$$\begin{aligned} V &= U_V^0 + \alpha T_V^0 \Delta T + \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) dP_V^0(\tau); \\ H &= P_H + \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) dU_H^0(\tau) + \alpha T_H^0 \int_0^t \tilde{\Gamma}_1(t-\tau) d\Delta T(\tau), \end{aligned}$$

где U_V^0 , T_V^0 , P_V^0 , U_H^0 , — пределы соответствующих величин в (3.1.58) при $\nu \rightarrow 0,5$; $T_H^0 = [3T_H/2(1-2\nu)]_{\nu \rightarrow 1/2}$.

Динамическим задачам термовязкоупругости соответствует полная система разрешающих уравнений (1.1.7), (1.6.16), (1.6.18) с начальными (1.6.21) и граничными (1.2.1) и (1.2.3) условиями. При сведении их к динамическим задачам теории упругости будем исходить из представления физических соотношений в форме

$$\sigma_{ij} = 2(G - G^*)e_{ij} + (\lambda - \lambda^*)3eg_{ij} - 3\alpha(K - \theta^*)\Delta Tg_{ij},$$

куда входят операторы

$$2G = \tilde{\Gamma}(0); \quad G^*(\dots) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)(\dots) d\tau;$$

$$\lambda = K - 2G/3 = \tilde{\Gamma}_1(0) - \tilde{\Gamma}(0)/3;$$

$$\lambda^*(\dots) = \int_0^t [\Gamma_1(t-\tau) - \Gamma(t-\tau)/3](\dots) d\tau;$$

$$\theta^*(\dots) = \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)(\dots) d\tau.$$

С учетом геометрических соотношений (1.1.4) запишем физические соотношения в виде

$$\sigma_{ij} = (G - G^*)(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (\lambda - \lambda^*) \nabla_k u^k g_{ij} - \\ - 3\alpha(K - \theta^*) \Delta T g_{ij}$$

и подставим их в уравнения движения (1.4.30). После преобразования (1.4.30) к виду

$$\rho \ddot{u}_i = L_i(u) + F_i - 3\alpha K \nabla_i \Delta T - L_i^*(u) + 3\alpha \theta^* (\nabla_i \Delta T) \quad (3.1.60)$$

операторы Ляме

$$L_i(u) = G \nabla^2 u_i + (G + \lambda) \nabla_i \nabla_k u^k; \\ L_i^*(u) = G^* \nabla^2 u_i + (G^* + \lambda^*) \nabla_i \nabla_k u^k$$

связаны с операторами $L_1(\nabla^2 u_i)$ и $L_2(\nabla_i \nabla_k u^k)$ соотношениями

$$L_i(u) - L_i^*(u) = G[L_1(\nabla^2 u_i) + L_2(\nabla_i \nabla_k u^k)].$$

Это указывает на эквивалентность различных записей уравнений движения. Для уравнений (3.1.60) имеют место начальные условия $u_i = u_{i0}$, $v_i = v_{i0}$ при $t = 0$ и граничные условия

$$u_i(S) = u_{is} \text{ на } S_1; \\ [(G - G^*)(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (\lambda - \lambda^*) \nabla_k u^k g_{ij} - \\ - 3\alpha(K - \theta^*) \Delta T g_{ij}]_S n^j = p_j^{(n)} \text{ на } S_2. \quad (3.1.61)$$

Таким образом, краевая динамическая задача вязкоупругости при заданном температурном поле сводится к системе уравнений (3.1.60) и граничным условиям (3.1.61) простой заменой констант G и λ , входящих в динамические уравнения теории упругости, на операторы $(G - G^*)$ и $(\lambda - \lambda^*)$ соответственно.

Уравнения (3.1.60) могут быть преобразованы к виду

$$\square_S^2 u_i + m \nabla_i \nabla_k u^k - \left(\frac{G^*}{G}\right) \nabla^2 u_i - \left(\frac{G^* + \lambda^*}{G}\right) \nabla_i \nabla_k u^k + \frac{F_i^{**}}{G} = 0,$$

где $F_i^{**} = F_i + 3\alpha[\theta^* - G(m-1/3)]\nabla_i \Delta T$ и где отчетливо видна интегродифференциальная структура уравнений (3.1.60),

Если основными неизвестными считать ρ , ΔT , v_i , σ_{ij} , то система разрешающих уравнений состоит из (1.1.3), (1.1.7), (1.1.8) и (1.6.16) при физических соотношениях

$$e_{ij} \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_0^t \left[\frac{1}{3} \tilde{R}_1(t-\tau) - \tilde{R}(t-\tau) \right] \sigma(\tau) d\tau g_{ij} + \\ + \alpha \Delta T g_{ij}.$$

В этом случае диссипативная функция

$$W^* = D^{ij}(\sigma) D_{ij}(\varepsilon) - \dot{\sigma}_M \sigma_M / \tilde{\Gamma}(0); \quad \sigma_M^2 = D^{ij}(\sigma) D_{ij}(\sigma),$$

а системе уравнений соответствуют начальные (1.6.24) и граничные (1.2.1), (1.2.3), (1.4.19) условия.

Для квазистатических задач термовязкоупругости применимо интегральное преобразование Лапласа—Карсона. Запишем в изображениях уравнения равновесия

$$g^{ja} \nabla_a \sigma_{ia}^* + F_i^* = 0, \quad \sigma_{ij}^* = D_{ij}^*(\sigma) + \sigma^* g_{ij};$$

уравнения совместности деформаций

$$\Lambda_\delta^{i\gamma} \Lambda_\beta^{ka} \nabla_i \nabla_k e_{\alpha\gamma}^* = 0, \quad e_{ij}^* = D_{ij}^*(e) + e^* g_{ij}$$

и физические соотношения

$$e_{ij}^* = \tilde{R}^* \left[\sigma_{ij}^* - \frac{3(m^*-1)}{3m^*-1} \sigma^* g_{ij} \right] + \alpha \Delta T^* g_{ij}.$$

Граничные условия имеют вид

$$u_i^* r_m^i = u_{ms}^* \text{ на } S_1;$$

$$\sigma_{ij}^* n^j r_m^i = p_m^* \text{ на } S_2.$$

(3.1.62)

или $(\sigma_{ij}^* n^j - E_2 u_i^*) r_n^i = N_n^*$.

Подстановка физических соотношений в уравнения совместности с учетом формулы (2.4.6) позволяет записать их в форме

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij}^* + \frac{6m^*}{3m^*-1} \nabla_i \nabla_j \sigma^* + \frac{\alpha}{R^*} \left(\nabla_i \nabla_j \Delta T^* + \frac{3m^*-1}{3m^*+1} \nabla^2 \Delta T^* g_{ij} \right) + \\ + \frac{m^*-1}{m^*+1} \nabla_k F_{*k}^i g_{ij} + (\nabla_i F_i^* + \nabla_j F_j^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

При $\Delta T^* = 0$ из (3.1.63) следуют уравнения Бельтрами—Митчелла

$$\nabla^2 \sigma_{ij}^* + \frac{6m^*}{3m^*-1} \nabla_i \nabla_j \sigma^* + \frac{m^*-1}{m^*+1} \nabla_k F_{*k}^i g_{ij} + \nabla_j F_i^* + \nabla_i F_j^* = 0.$$

Итак, квазистатическая задача термовязкоупругости в изображениях характеризуется уравнениями равновесия

$$g^{i\alpha} \nabla_\alpha \sigma_{ij}^* + F_i^* = 0,$$

уравнениями совместности (3.1.63) и граничными условиями (3.1.62) при известном температурном поле, что эквивалентно краевой задаче термоупругости в напряжениях, рассмотренной в п. 2.2. Общее решение уравнений равновесия есть

$$\sigma_{ij}^* = 2e_{ij}^*(\mathbf{p}^*) - 2(\nabla_\alpha p_\alpha^* + \varphi^*) + \Lambda_{li}^k \Lambda_{lj}^{\beta l} \nabla_k \nabla_\beta \psi^* + \Lambda_{li}^k \Lambda_{j\beta}^\alpha \nabla_k \nabla_\alpha \Pi_{*}^{\beta l},$$

причем изображения функций $\Pi_{*}^{\beta l}$ подчинены дифференциальным уравнениям

$$\nabla^2 (\Pi_{*}^{lj} - \Pi_{*} g^{lj}) = 0$$

с учетом граничных условий (3.1.62), а изображение скаляра ψ^* подчинено уравнению

$$\nabla^2 \psi^* = -2[\varphi^* + 0.5(m^*+1) \nabla_k p^k]$$

с граничными условиями (3.1.62).

Для динамической задачи термовязкоупругости в напряжениях система разрешающих уравнений, записанная в изображениях, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(\rho^* - \rho_0) + \nabla_i(\rho^* v_i^*) = 0; \quad g^{i\alpha} \nabla_\alpha \sigma_{ij}^* + F_i^{**} = 0; \\ \rho^* c^* \rho \Delta T^* = \Lambda^* \nabla^2 \Delta T^* + \bar{W}^*; \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_\delta^{lj} \Lambda_\beta^{k\alpha} \nabla_l \nabla_k \sigma_{\alpha\gamma}^* - \frac{3(m^*-1)}{3m^*-1} \Lambda_\delta^{ly} \Lambda_{\beta\gamma}^k \nabla_l \nabla_k \sigma^* + \\ + \frac{\alpha}{R^*} \Lambda_\delta^{ly} \Lambda_{\beta\gamma}^k \nabla_l \nabla_k \Delta T^* = 0, \end{aligned}$$

куда входят изображения фиктивных объемных сил

$$F_i^{**} = F_i^* - \rho^* p^* (u_i^* - u_{i0} - v_{i0}/p)$$

и диссипативной функции

$$\bar{W}^* = D_{ij}^*(\sigma) D_{ij}^*(\epsilon) - \sigma_M^* p \sigma_M^* / \bar{\Gamma}^*(0).$$

В совокупности с граничными условиями (3.1.62) система (3.1.64) соответствует квазистатической краевой задаче термоупругости, решение которой изложено в п. 2.2.

Рассмотрим теперь более общие методы решения задач термовязкоупругости.

3.2. Функция Грина, ее приложение

Эффективное решение ряда задач механики сплошной среды в замкнутой интегральной форме возможно с помощью функции Грина. Для получения искомого поля $u(\mathbf{r})$, порожденного некоторым распределением источников, определяют эффект от каждого элементарного источника, затем все эти эффекты суммируют и решение представляют в интегральной форме. Действительно, если $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ представляет собой поле в некоторой точке $\mathbf{r} \{x^j\}$, порожденное единичным точечным источником в точке $\mathbf{r}_0 \{x_0^j\}$, то поле в точке $\mathbf{r}$, порожденное совокупностью источников, распределенных с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, равно интегралу

$$u(\mathbf{r}) = \int_{D_V} \rho(\mathbf{r}_0) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0), \quad (3.2.1)$$

где D_V — область объема V , занятая источниками; $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — функция Грина.

Решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, строят также: определяют поле в точке $\mathbf{r}$, где граничные условия равны нулю в каждой точке поверхности S , за исключением точки $\mathbf{r}_s$, где граничное значение имеет характер δ -функции, поэтому интеграл от него по малому участку поверхности вблизи $\mathbf{r}_{0s}$ равен единице. Если это поле обозначить $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0s})$, то общее решение для произвольных граничных условий $u_s(\mathbf{r}_{s0})$ определено интегралом

$$u(\mathbf{r}) = \int_{D_S} u_s(\mathbf{r}_{0s}) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0s}) dS(\mathbf{r}_{0s}), \quad (3.2.2)$$

где D_S — область поверхности S с ненулевыми граничными условиями; $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0s})$ — функция Грина. Функции Грина в (3.2.1) и (3.2.2) не являются различными, по существу это одна и та же функция, так как задание граничных условий на поверхности S эквивалентно заданию распределения источников на этой поверхности.

Таким образом, *функция Грина* представляет собой общее решение для случая, когда однородность уравнения и граничных условий краевой задачи имеет место всюду, кроме одной точки, в которой расположен источник любой природы.

Разрешающие уравнения механики сплошной среды имеют различную структуру, они могут быть дифференциальными в частных производных, интегродифференциальными, интегральными, а потому их можно записать в операторной форме $Lu=j$, которой соответствует однородное уравнение $Lu=0$, где L — оператор, действующий на все переменные, от которых зависит u , включая пространственные координаты x^j и время t . Большинство задач механики сплошной среды, как это показано в гл. 2, можно привести к типовым уравнениям: статические и стационарные задачи — к уравнениям Лапласа, Пуассона, Гельмгольца:

$$Lu=\nabla^2 u, \quad Lu=(\nabla^2+k^2)u;$$

нестационарные температурные задачи — к уравнению теплопроводности

$$Lu=\left(\nabla^2-a^2\frac{\partial}{\partial t}\right)u;$$

динамические задачи — к волновому уравнению

$$Lu=\square^2 u=\left(\nabla^2-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u.$$

Для функции Грина $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ имеет место уравнение

$$LK(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

причем оператор L действует только на $\mathbf{r}$, а величина $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ представлена произведением δ -функции по отдельным переменным. В частности, соотношение

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\prod_{j=1}^3 \delta(x^j-x_0^j)\delta(t-t_0)$$

целесообразно записать в виде

$$(L-\lambda)K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Сопряженная функция $\tilde{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, подчиненная теореме Грина

$$uLv-v\tilde{L}u=\nabla_i P^i(u, v),$$

удовлетворяет уравнению

$$(\bar{L} - \lambda) \bar{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и сопряженным граничным условиям на поверхности S , вытекающим из требования

$$\int_S n_i P^i [\bar{K}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_0) u_S(\mathbf{r}_S)] dS = 0.$$

Функция Грина $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ должна удовлетворять соотношению *принципа взаимности*

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \bar{K}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}).$$

При выполнении указанных условий, наложенных на функцию Грина, справедливо представление

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_V \rho(\mathbf{r}) \bar{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}).$$

Для эрмитова оператора L функция Грина K также является эрмитовой и может быть представлена в виде

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda - \lambda_n)},$$

так как собственные значения λ_n — вещественны, а собственные функции ψ_n — взаимно ортогональны, где $N_n = \int |\psi_n|^2 dV$. Если же оператор L не является эрмитовым, то собственные функции φ_n эрмитова сопряженного уравнения

$$(\bar{L}^* - \mu_n) \varphi_n = 0, \quad \bar{L}^* = \bar{L}, \quad \mu_n = \bar{\lambda}_n$$

могут отличаться от собственных функций ψ_n и могут быть не взаимно ортогональными. Однако двойная система функций ψ_n и φ_n биортогональна, а потому

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0) \psi_n(\mathbf{r})}{N_n(\lambda - \lambda_n)},$$

где $N_n = \int \bar{\varphi}_n \psi_n dV$.

Следует указать, что функцию Грина можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \vartheta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

где $\vartheta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — сингулярное решение рассматриваемой краевой задачи, а $w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — регулярная дважды непрерывно дифференцируемая функция точки $\mathbf{r}$.

Для уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 + k^2)u = -4\pi\rho$ функция Грина является решением уравнения

$$(\nabla^2 + k^2)K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S ; при этом соотношение взаимности имеет вид

$$K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = K_k(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}),$$

так как уравнение — самосопряженное. Если u представляет собой решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)u = -4\pi\rho$ с граничными условиями

$$u(\mathbf{r}_S) = u_S \quad \text{или} \quad (\partial u / \partial n)_S = N_0(\mathbf{r}_S),$$

то внутри области D и на ее поверхности S

$$u(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}_0) K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0) + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0S}) N_0(\mathbf{r}_{0S}) - u_S(\mathbf{r}_{0S}) \frac{\partial}{\partial n} K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0S}) \right],$$

причем первый интеграл взят по объему V области D с поверхностью S , а второй представляет собой поток через поверхность S (нормальная производная берется по внешней нормали). Для бесконечной области функция Грина равна

$$K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{R} e^{ikR},$$

где $R^2 = g_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$ — расстояние между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$.

Для уравнения Пуассона $\nabla^2 u = -4\pi\rho$ параметр $k=0$, тогда функция Грина $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ и для бесконечной области $K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 1/R$.

Для волнового уравнения $\square^2 u = -4\pi\rho$ функция Грина является решением уравнения

$$\square^2 K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S и подчиняющимся требованию, что $K=0$ и $\partial K/\partial t=0$ всюду при $t < t_0$. Тогда соотношение взаимности имеет вид

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = K(\mathbf{r}_0, -t_0; \mathbf{r}, -t).$$

Если $u(\mathbf{r}, t)$ — решение уравнения $\square^2 u = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$, имеющее на поверхности S граничные условия $u(\mathbf{r}_S) = u_S(\mathbf{r}_S)$, $\partial u / \partial n|_S = N_S(\mathbf{r}_S)$, а при $t=0$ $u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r})$, $\partial u / \partial t|_{t=0} = v_0(\mathbf{r})$, то при $t > 0$ внутри области D и на поверхности при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}, t) = & \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int_V K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \rho(\mathbf{r}_0, t_0) dV(\mathbf{r}_0) + \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int_S [K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_{0S}, t_0) N_S(\mathbf{r}_{0S}) - \\
& - u_S(\mathbf{r}_{0S}) \frac{\partial}{\partial n} K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_{0S}, t)] dS(\mathbf{r}_0) - \\
& - \frac{1}{4\pi a^3} \int_V \left[\left(\frac{\partial K}{\partial t_0} \right)_{t=0} u_0(\mathbf{r}_0) - K_{t=0} v_0(\mathbf{r}_0) \right] dV(\mathbf{r}_0).
\end{aligned}$$

Для бесконечной области функция Грина равна

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \delta[(R/a) - (t - t_0)]/R.$$

Функция Грина волнового уравнения связана с функцией Грина уравнения Гельмгольца интегральным соотношением Фурье

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) e^{-ika(t-t_0)} dk.$$

Для уравнения теплопроводности $(\nabla^2 - a^2 \partial/\partial t)u = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$ функция Грина $K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$ является решением уравнения

$$(\nabla^2 - a^2 \partial/\partial t)K_a(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0),$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям на поверхности S и подчиняющимся требованию, что $K=0$ при $t < t_0$.

Сопряженная функция Грина $\tilde{K}_a(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = K_a(\mathbf{r}, -t, \mathbf{r}_0, -t_0)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$(\nabla^2 + a^2 \partial/\partial t)K = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0).$$

Соотношение взаимности имеет вид

$$K_a(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0, t_0) = K_0(\mathbf{r}_0, -t_0, \mathbf{r}, -t).$$

Если решение $u(\mathbf{r}, t)$ уравнения

$$(\nabla^2 - a^2 \partial/\partial t)u = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t),$$

имеющее на поверхности S граничные условия $u(\mathbf{r}_S) = u_S(\mathbf{r}_S)$; $(\partial u/\partial n)_S = N_S(\mathbf{r}_S)$, а при $t=0$ $u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r})$, то для $t > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}, t) = & \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int_V \rho(\mathbf{r}_0, t_0) K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) dV(\mathbf{r}_0) + \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t+\varepsilon} dt_0 \int_S [K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_{0S}, t_0) N_S(\mathbf{r}_{0S}) - \\
& - u_S(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n_0} K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_{0S}, t_0)] dS(\mathbf{r}_0) + \\
& + \frac{a^2}{4\pi} \int_V u_0(\mathbf{r}_0) K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, 0) dV(\mathbf{r}_0).
\end{aligned}$$

Для бесконечной области функция Грина равна

$$K_a(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{4\pi}{a^2} \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi(t-t_0)}} \right)^n e^{-a^2 R^2/4(t-t_0)} u(t-t_0).$$

Рассмотрим упругое тело объемом V , ограниченное поверхностью S , причем на части S_1 поверхности тело закреплено ($u_{iS}=0$), другая часть S_2 поверхности свободна от нагрузок ($p_i^{(n)}=0$). Пусть в точке $\mathbf{r}_0 \in D$ действует единичная сосредоточенная сила, направленная параллельно оси x^j и характеризуемая выражением

$$F_{(j)}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i, \quad (3.2.3)$$

которое следует рассматривать вместе с интегралом

$$\int_V F_{(j)}^i dV = \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i dV(\mathbf{r}) = g_j^i, \quad (3.2.4)$$

причем $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \prod_{j=1}^3 \delta(x^j - x_0^j)$.

Выражение (3.2.3) означает, что компонента силы направлена по x^j и отлична от нуля; символ Дирака указывает, что сосредоточенная сила равна нулю при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, а в точке $\mathbf{r}_0$ принимает бесконечное значение, однако интеграл (3.2.4) равен единице. Определенная единичная сосредоточенная сила вызывает в теле поле перемещений $u_{(j)}^i$, причем индекс i указывает компоненту вектора перемещений $\mathbf{u}_{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, а индекс (j) указывает причину перемещений (сосредоточенную силу, направленную параллельно оси x^j). Компоненты $u_{(j)}^i$ вектора перемещений являются решением уравнений равновесия

$$\nabla^2 u_{(j)}^i + m g^{ip} \nabla_p (\nabla_k u_{(j)}^k) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i = 0$$

совместно с граничными условиями

$$u_{(j)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0 \text{ на } S_1, \quad p_{(n)(j)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0 \text{ на } S_2, \quad (3.2.5)$$

где $p_{(n)(j)}^i = G[(g^{i\beta} \nabla_\beta u_{(j)}^k + g^{k\lambda} \nabla_\lambda u_{(j)}^i) n_k + (3m - 1) \nabla_k u_{(j)}^k n^i]$.

Компоненты $u_{(j)}^i$ именуются *функциями перемещений Грина* и представляют собой фундаментальные решения уравнений теории упругости. Совокупность $u_{(j)}^i$ образует симметричный тензор $(u_{(j)}^i)$, называемый *тензором Грина* и характеризуемый матрицей

$$((u_{(j)}^i)) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(1)}^1 & u_{(1)}^2 & u_{(1)}^3 \\ u_{(2)}^1 & u_{(2)}^2 & u_{(2)}^3 \\ u_{(3)}^1 & u_{(3)}^2 & u_{(3)}^3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим силу $F_{(j)}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i$, действующую в точке $\mathbf{r}_0$, направленную параллельно оси x^j и вызывающую поле перемещений $u_{(j)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, и силу $\tilde{F}_{(k)}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i$, приложенную в точке $\tilde{\mathbf{r}}_0$, направленную параллельно оси x^k и вызывающую поле перемещений $u_{(k)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Применим к ним теорему взаимности

$$\int_V F^i \tilde{u}_i dV + \int_S p_{(n)}^i \tilde{u}_i dS = \int_V \tilde{F}^i u_i dV + \int_S \tilde{p}_{(n)}^i u_i dS,$$

учитывая при этом, что в силу граничных условий (3.2.5) поверхностные интегралы исчезают. Тогда

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i u_{(j)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}) = \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i u_{(k)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}).$$

Пользуясь свойством функции Дирака

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0),$$

приведем последнее равенство к виду

$$u_{(j)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = u_{(j)}^{(k)}(\tilde{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}), \quad (3.2.6)$$

выражающему *теорему Максвелла* о взаимности работ сосредоточенных сил.

Пользуясь тензором Грина $u_{(j)}^i$, установим формулы, выражающие компоненты u_i вектора перемещений упругого тела через поверхностные интегралы, куда входят заданные граничные условия. Пусть компоненты u_i удовлетворяют уравнениям равновесия (1.4.18) с заданными на S граничными условиями. В точке $\mathbf{r}_0$ неограниченной области, принадлежащей телу, поместим сосредоточенную силу $F_{(j)}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i$, направленную

параллельно оси x^j , которая вызывает поле перемещений $u_i = u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, удовлетворяющее уравнениям

$$\nabla^2 u_i^{(j)} + m \nabla_i (\nabla_k u_{(j)}^k) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j = 0$$

с нулевыми значениями перемещений на бесконечности. Определим напряжения $\sigma_{ik}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, соответствующие перемещениям $u_i^{(j)}$, и с их помощью образуем равенство

$$p_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G [(\nabla_k u_i^{(j)} + \nabla_i u_k^{(j)}) n^k + 3(m-1) \nabla_k u_{(j)}^k n_i].$$

Подставив $\tilde{u}_i = u_i^{(j)}$ и $\tilde{p}_{(n)}^i = g^{i\beta} p_{\beta}^{(j)}$ в соотношение, выражающее теорему взаимности,

$$\int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_S (p_{(n)}^i \tilde{u}_i - \tilde{p}_{(n)}^i u_i) dS = 0,$$

получим формулы Сомилианы

$$u^j(\mathbf{r}_0) = \int_S [p_{(n)}^j(\mathbf{r}) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - g^{i\beta} p_{\beta}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) u_i(\mathbf{r})] dS(\mathbf{r}) + \\ + \int_V F^j(\mathbf{r}) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}),$$

которые позволяют по известным распределениям объемных сил F^i внутри тела, а также перемещений и поверхностных сил на поверхности S тела, определить компоненты $u^j(\mathbf{r})$ вектора перемещений в точке $\mathbf{r}_0 \in D$. Если точка расположена вне области D , то $u^j(\mathbf{r}_0) = 0$. Меняя точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ местами и используя при этом теорему Максвелла (3.2.6), перепишем формулы Сомилианы в виде

$$u_j(\mathbf{r}) = \int_S [p_{(n)}^j(\mathbf{r}_0) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - p_{(n)}^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}_0)] dS(\mathbf{r}_0) + \\ + \int_V F_i(\mathbf{r}_0) u_j^{(i)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}_0).$$

Задачи теории упругости в перемещениях можно решать с помощью функции Грина $K_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Пусть упругое тело, занимающая область D объема V с поверхностью S , находится в равновесии под действием объемных сил F_i и заданных на S перемещений u_{is} . Требуется определить компоненты вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in D$, удовлетворяющие уравнениям равновесия (1.4.18) с граничными условиями (1.2.1) для $\mathbf{r} \in S_1$. Введем функции Грина $\hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2 \hat{K}_i^{(j)} + m \nabla_i (g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \hat{K}_\alpha^{(j)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j = 0$$

с однородными граничными условиями $\hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$ для $\mathbf{r} \in S$ и $\mathbf{r}_0 \in D$, которые характеризуют перемещения точки $\mathbf{r} \in S$, вызванные силой $\tilde{F}_i^{(j)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j$, приложенной в точке $\mathbf{r}_0$ и направленной параллельно оси x^j . Пользуясь теоремой взаимности

$$\int_V (F^i \tilde{u}_i - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_S (p_{(n)}^i \tilde{u}_i - \tilde{p}_{(n)}^i u_i) dS = 0$$

и полагая $\tilde{u}_i = \tilde{K}_i^{(j)}$, $\tilde{F}^i = g^{i\beta} \tilde{F}_\beta$, запишем

$$u^j(\mathbf{r}_0) = \int_V g^{\alpha i} F_\alpha(\mathbf{r}) \hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}) - \int_S g^{i\beta} \hat{p}_{\beta}^{(j)} u_i(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}), \quad (3.2.7)$$

где $\hat{p}_{\beta}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G[(\nabla_k \hat{K}_{\beta}^{(j)} + \nabla_{\beta} \hat{K}_k^{(j)}) n^k + 3(m-1) g^{\alpha\gamma} \nabla_{\gamma} \hat{K}_{\alpha}^{(j)} n_{\beta}]$.

Выражение (3.2.7) представляет собой решение рассматриваемой задачи теории упругости, которое определяет компоненты $u^j(\mathbf{r}_0)$ вектора перемещений в точке $\mathbf{r}_0$ при заданных объемных силах F_i и перемещениях u_{iS} на S . Заменяя $\mathbf{r}_0$ на $\mathbf{r}$ и учитывая (3.2.6), запишем (3.2.7) в форме

$$u_j(\mathbf{r}) = \int_V F_i(\mathbf{r}_0) \hat{K}_j^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0) - \int_V \hat{p}_j^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) u_i(\mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}_0).$$

При построении решения уравнений равновесия (1.4.18) с граничными условиями (1.2.3) для $\mathbf{r} \in S$ тело полагаем закрепленным в точке $\mathbf{r}_* \in D$ (вектор перемещения и вектор поворота равны нулю), что исключает его вращение как абсолютно твердого тела. Введем функции Грина $\hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, подчиненные уравнениям

$$\nabla^2 \hat{K}_i^{(j)} + m \nabla_i (g^{\alpha\gamma} \nabla_{\gamma} \hat{K}_i^{(j)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j = 0$$

с граничными условиями $\hat{p}_i^{(j)} = \hat{\sigma}_{ik}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) n^k(\mathbf{r}) = 0$ и условиями закрепления в точке $\hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}_*, \mathbf{r}_0) = 0$, $\hat{\omega}_{ik}^{(j)}(\mathbf{r}_*, \mathbf{r}_0) = 0$. Пользуясь теоремой взаимности, имеем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_V [g^{i\beta} F_{\beta}(\mathbf{r}) \hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j u^i(\mathbf{r})] dV(\mathbf{r}) + \\ & + \int_S [p_{(n)}^i(\mathbf{r}) \hat{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \hat{p}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) g^{i\alpha} u_{\alpha}(\mathbf{r})] dS(\mathbf{r}) = 0, \end{aligned}$$

куда входит работа сосредоточенных сил и моментов в точке $\mathbf{r}_0$, так как в этой точке перемещения и повороты равны нулю. Из приведенного соотношения находим

$$u^j(\mathbf{r}_0) = \int_V g^{i\beta} F_\beta(\mathbf{r}) \dot{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}) + \\ + \int_S p_i^{(n)}(\mathbf{r}) \dot{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}).$$

Переставив местами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, с учетом теоремы Максвелла получим

$$u_j(\mathbf{r}) = \int_V F_i(\mathbf{r}_0) \dot{K}_j^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0) + \int_S p_i^{(n)}(\mathbf{r}_0) \dot{K}_j^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}_0).$$

Если уравнения равновесия (1.4.18) следует рассматривать совместно с граничными условиями (1.2.1) на S_1 и (1.2.3) на S_2 , то при построении решения задачи использовать функции Грина $\dot{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, подчиненные уравнениям равновесия

$$\nabla^2 \dot{K}_i^{(j)} + m \nabla_i (g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \dot{K}_\alpha^{(j)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j = 0$$

с граничными условиями $\dot{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 0$ на S_1 и $\check{p}_i^{(j)} = \check{\sigma}_{ik}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) n^k(\mathbf{r}) = 0$ на S_2 . Пользуясь теоремой взаимности, найдем соотношение

$$\int_V (F^i \dot{K}_i^{(j)} - \tilde{F}^i u_i) dV + \int_{S_1} (p_i^{(n)} \dot{K}_i^{(j)} - \check{p}_i^{(j)} u^i) dS + \\ + \int_{S_2} (p_i^{(n)} \dot{K}_i^{(j)} - \check{p}_i^{(j)} u^i) dS = 0.$$

Учитывая граничные условия и полагая $\tilde{F}_i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j$, из приведенного соотношения имеем

$$u^j(\mathbf{r}_0) = \int_V g^{i\beta} F_\beta(\mathbf{r}) \dot{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}) - \\ - \int_{S_1} \check{p}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) u^i(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}) + \int_{S_2} p_i^{(n)}(\mathbf{r}_0) \dot{K}_j^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}).$$

Таким образом, решения задач теории упругости в перемещениях могут быть получены с помощью специального построения функций Грина $\dot{K}_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Основные трудности решения рассмотренных задач упругости сводятся к определению функций Грина для заданной формы тела. Следует

заметить, что при необходимости функции Грина $K_i^{(j)}$ можно также представить в виде суммы $K_i^{(j)} = u_i^{(j)} + v_i^{(j)}$, где первое слагаемое — решение с особенностью для упругого пространства (компоненты тензора перемещений Грина), а второе — регулярные функции, выбранные так, чтобы на поверхности выполнялись условия $v_i^{(j)} = -u_i^{(j)}$.

Метод построения решения задач теории упругости в перемещениях при наличии дисторсии и теплового воздействия, основанный на использовании теоремы взаимности, предложен Майзелем. Пусть тело объемом V , ограниченное поверхностью S , находится под действием дисторсии e_{ij}^0 при отсутствии объемных сил $F^i = 0$ и поверхностных сил $p_{(n)}^i = 0$, причем на части S_1 поверхности $u_{is} = 0$. Систему обозначений для того же тела, но свободного от нагрузок на части S_2 поверхности ($p_{(n)}^i = 0$) и «защемленного» ($u_{is} = 0$) на части S_1 поверхности, будем записывать со штрихом. Предположим, что в теле отсутствуют дисторсии $e_{ij}^0 = 0$ и в точке r_0 в направлении оси x^j действует сосредоточенная сила $F_{(j)}^i = \delta(r - r_0) g_j^i$, вызывающая перемещения $u_i' = u_i^{(j)}(r)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 u_i^{(j)} + m \nabla_i (g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma u_\alpha^{(j)}) + (1/G) \delta(r - r_0) g_i^j = 0$$

с граничными условиями $u_i^{(j)} = 0$ для $r \in S_1$; $p_{(n)}^i = \sigma_{ik}^{(j)}(S) n^k = 0$ для $r \in S_2$. Перемещениям $u_i^{(j)}$ соответствуют напряжения

$$\sigma_{ik}^{(j)} = G [(\nabla_i u_k^{(j)} + \nabla_k u_i^{(j)}) + 3(m-1) g^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma u_\alpha^{(j)} g_{ik}].$$

Применяя к указанным системам причин и следствий уравнение взаимности, получаем соотношение

$$-\int_V \delta(r - r_0) g_i' u_i(r) dV(r) + \int_V \sigma_{(j)}^{\gamma\lambda} e_{\gamma\lambda}^0(r) dV(r) = 0,$$

где $\sigma_{(j)}^{\gamma\lambda} = g^{i\gamma} g^{k\lambda} \sigma_{ik}^{(j)}$. Тогда перемещения, соответствующие дисторсии $e_{\gamma\lambda}^0$, равны

$$u_j(r_0) = \int_V \sigma_{(j)}^{\gamma\lambda}(r, r_0) e_{\gamma\lambda}^0(r) dV(r),$$

причем напряжения $\sigma_{(j)}^{\gamma\lambda}(r, r_0)$, вызванные действием сосредоточенной силы в точке r_0 , являются функциями Грина для рассматриваемого тела.

Пусть в упругом пространстве действует источник теплоты интенсивностью Q , помещенный в начале координат. Задача термоупругости, соответствующая заданным условиям, сводится, как показано в п. 2.2., к решению уравнений

$$\nabla^2 \Delta T = Q \delta(\mathbf{r}) / \Lambda; \quad \nabla^2 \Phi = (3m-1) \alpha \Delta T / (m+1).$$

В силу сферической симметрии поля температур и потенциала Φ формируется однородная одномерная задача с независимой переменной R . Решение разрешающих уравнений в сферических координатах имеет вид

$$\Delta T = Q / 4\pi R \Lambda; \quad \Phi = [(3m-1) \alpha / (m+1)] (Q / 8\pi \Lambda),$$

так как $\nabla^2 (1/R) = -4\pi \delta(R)$.

Этому решению соответствуют напряжения

$$\sigma_{RR} = -G \frac{(3m-1) \alpha}{m+1} \frac{Q}{2\pi R \Lambda}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -G \frac{(3m-1) \alpha}{m+1} \frac{Q}{4\pi R \Lambda}.$$

Поместим источник теплоты $Q=1$ в точку $\mathbf{r}_0$, тогда

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{(3m-1) \alpha}{m+1} \frac{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{8\pi \Lambda},$$

где $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sqrt{g_{ij}(x^j - x_0^j)(x^i - x_0^i)}$.

Перемещения и напряжения, возникающие при действии единичного сосредоточенного источника теплоты, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \frac{(3m-1) \alpha}{m+1} \frac{g_{ij}}{8\pi \Lambda} \frac{x^j - x_0^j}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}; \\ \sigma_{ij}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= -G \frac{3m-1}{m+1} \frac{1}{4\pi R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \Lambda} \times \\ &\times [g_{ij} + g_{ik}(x^k - x_0^k) g_{jl}(x^l - x_0^l) / R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)], \end{aligned}$$

которые следует трактовать как функции Грина для задачи об упругом пространстве. Если в упругом пространстве источники теплоты Q занимают область D , то вызванные этими источниками перемещения и напряжения определяют по формулам

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= \int_V Q(\mathbf{r}_0) u_i^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}_0); \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &= \int_V Q(\mathbf{r}_0) \sigma_{ij}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) dV(\mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

Стационарные задачи механики вязкой несжимаемой жидкости, как и статические задачи теории упругости, также могут быть решены методом функций Грина. Рассмотрим задачу Стокса о стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости. Необходимо определить скорость $\mathbf{v}$ и давление p в области D исходя из уравнений

$$\nu \nabla^2 v_i = \nabla_i p - f_i; \quad \nabla_a v^a = 0 \quad (3.2.8)$$

и граничных условий (1.2.2). Решение краевой задачи для однородного уравнения ($f_i = 0$) при неоднородных граничных условиях (внутренняя задача Стокса) позволяет построить матрицу функций Грина $((K_i^{(j)}))$ с элементами

$$K_i^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = u_i^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) - w_i^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r});$$

$$r^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = q^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) - w^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}),$$

куда входят основные сингулярные решения задачи, определяемые по формулам

$$u_i^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi\nu} \left[\frac{g_i^{(j)}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} + \frac{g_{ik}(x_0^k - x^k)(x_0^j - x^j)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \right];$$

$$q^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = -\frac{(x_0^j - x^j)}{4\pi|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3},$$

где $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| = \sqrt{g_{\alpha\beta}(x_0^\alpha - x^\alpha)(x_0^\beta - x^\beta)}$.

Функции $w_i^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$, $w^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ находим в результате решения задачи Стокса, определяемой уравнениями и граничными условиями $\nu \nabla^2 w_i^{(j)} = \nabla_i w^j$, $g^{ia} \nabla_a w_i^{(j)} = 0$, $w_i^{(j)}|_S = u_i^{(j)}|_S$.

Решение неоднородной системы (3.2.8) при нулевых граничных условиях имеет вид

$$v_i(\mathbf{r}) = \int_V K_i^{(j)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f_j(\mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0);$$

$$p(\mathbf{r}) = \int_V r^j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f_j(\mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}_0).$$

Пусть в точке $\mathbf{r}_0$ действует единичная мгновенная сосредоточенная сила $F_{(j)}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i \delta(t)$, направленная по оси x^j и создающая в бесконечной области поле перемещений $u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$. В точке $\mathbf{r}_0$ приложим силу $\tilde{F}_{(k)}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i \delta(t)$, направленную по оси x^k и создающую поле перемещений $u_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$. Уравнение теоремы взаимности для пространства в данном случае принимает вид

$$\int_0^t d\tau \int_V [\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) g_j^i \delta(\tau) u_i^{(k)}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}_0; t-\tau) - \\ - \delta(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}_0) g_k^i \delta(t-\tau) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \tau)] dV(\mathbf{r}_0) = 0,$$

откуда следует соотношение

$$u_j^{(k)}(\mathbf{r}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0, t) = u_k^{(j)}(\tilde{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0, t), \quad (3.2.9)$$

которое является обобщением теоремы взаимности Максвелла на динамические задачи упругости.

Можно показать, что соотношение (3.2.9) справедливо и для ограниченного тела при однородных начальных условиях. В этом случае уравнения Граффи, представляющие вторую формулу теоремы взаимности, имеют вид

$$\int_0^t d\tau \int_V [F^i(\mathbf{r}, \tau) \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t-\tau) - \tilde{F}^i(\mathbf{r}, t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dV(\mathbf{r}) + \\ + \int_0^t d\tau \int_S [p_{(n)}^i(\mathbf{r}, \tau) \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t-\tau) - \\ - \tilde{p}_{(n)}^i(\mathbf{r}, t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dS(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.2.10)$$

Полагая, что в точке $\mathbf{r}_0$ действует сосредоточенная сила $\mathbf{F}_{(j)}^i$, а в точке $\tilde{\mathbf{r}}_0$ — сила $\tilde{\mathbf{F}}_{(k)}^i$, и считая, что на части S_2 поверхности $p_{(n)}^i = 0$, $\tilde{p}_{(n)}^i = 0$, а на части S_1 поверхности $u_{iS} = 0$, $\tilde{u}_{iS} = 0$, приходим к соотношению (3.2.9).

Теорема взаимности, представленная в форме (1.4.21), позволяет использовать фундаментальные решения статической теории упругости для определения перемещений при решении динамических задач. Пусть перемещения $u_i(\mathbf{r}_0, t)$, вызваны действием объемных сил $F^i(\mathbf{r}, t)$ в пространстве. Для их определения воспользуемся перемещениями $u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, соответствующими действию статической сосредоточенной силы, приложенной в точке $\mathbf{r}_0$ и направленной по оси x^j . Из уравнения (1.4.21) следует уравнение

$$u^j(\mathbf{r}_0, t) + \rho \int_V \ddot{u}^i(\mathbf{r}, t) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}) = \\ = \int_V F^i(\mathbf{r}, t) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV(\mathbf{r}),$$

решение которого определяет перемещения $u^j(\mathbf{r}_0, t)$.

Пусть на тело действуют объемные силы, а на поверхности S заданы перемещения u_{is} , причем начальные условия для перемещений — однородные. Пользуясь теоремой взаимности (3.2.10) и принимая тело ограниченным, определим перемещения $u_i(\mathbf{r}_0, t)$ в точке $\mathbf{r} \in D$, выражая их через граничные условия и соответственно выбранные перемещения $\tilde{u}_i$. Предположим, что $\tilde{u}_i = u_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ вызваны действием сосредоточенной мгновенной силы $\tilde{F}_i^{(k)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i \delta(t)$, приложенной в точке $\mathbf{r}_0$ пространства и направленной параллельно оси x^k . Перемещения $u_i^{(k)}$ получим в результате решения уравнений

$$\nabla^2 u_i^{(k)} + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta^{(k)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i \delta(t) = \ddot{u}_i^{(k)} / a_s^2$$

в пространстве с однородными начальными условиями. По найденным перемещениям $u_i^{(k)}$, пользуясь физическими соотношениями, определим компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ и построим вектор напряжений на поверхности

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(n)}^i &= p_{(n)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = G [(\nabla_j u_\alpha^{(k)} + \Delta_\alpha u_j^{(k)}) g^{i\alpha} n^j + \\ &+ (m-1) (g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha^{(k)}) n^i / 3]. \end{aligned}$$

Подставляя $\tilde{u}_i = u_i^{(k)}$, $\tilde{p}_{(n)}^i = p_{(n)}^i$, $\tilde{F}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i \delta(t)$ в уравнение (3.2.10) и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} &\int_0^t d\tau \int_V [\tilde{F}^i(\mathbf{r}, t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dV(\mathbf{r}) = \\ &= \int_0^t d\tau \int_V [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i \delta(t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dV(\mathbf{r}) = u_k(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{r}_0, t) &= \int_0^t d\tau \int_V F^i(\mathbf{r}, \tau) u_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_S [p_{(n)}^i(\mathbf{r}, \tau) u_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) - \\ &- p_{(k)}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) u_i(\mathbf{r}, \tau)] dS(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

представляющие обобщения формул Сомилианы на динамические задачи и справедливые для всех точек области $D(\mathbf{r}_0 \in D)$. Если перемещения $\tilde{u}_i$ выбрать так, чтобы они соответствовали силе $\tilde{F}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_k^i \delta(t)$, действующей в ограниченном теле,

то определение перемещений $u_k(\mathbf{r}_0, t)$ приобретает практический смысл.

Пусть поле перемещений $\tilde{u}_i = \hat{u}_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2 \hat{u}_i^{(k)} + m \nabla_i (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \hat{u}_\beta^{(k)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^k \delta(t) = \ddot{\hat{u}}_i^{(k)}$$

с граничными условиями $\hat{u}_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = 0$ для $\mathbf{r} \in S$ и однородными начальными условиями. Подстановка $\tilde{F}^i$, $\hat{u}_i^{(k)}$, $\hat{p}_i^{(k)}$ в уравнение (3.2.10) приводит к формуле Соммильяны

$$u_k(\mathbf{r}_0, t) = \int_0^t d\tau \int_V F^i(\mathbf{r}, \tau) \hat{u}_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t - \tau) dV(\mathbf{r}) - \\ - \int_0^t d\tau \int_S \hat{p}_i^{(k)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t - \tau) u^i(\mathbf{r}, \tau) dS(\mathbf{r}),$$

представляющей решение краевой динамической задачи теории упругости.

При тепловом воздействии в ограниченном теле возникло температурное поле $\Delta T(\mathbf{r}, t)$. Пусть на поверхности S тела заданы граничные условия $u_i(S) = u_{iS}(\mathbf{r}, t)$ для $\mathbf{r} \in S$ и требуется определить перемещения u_i в точке $\mathbf{r}_0$. Для этого в качестве второй системы причин принимаем мгновенную сосредоточенную силу $\tilde{F}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j \delta(t)$, приложенную в точке $\mathbf{r}_0$, направленную параллельно оси x^j и действующую в неограниченной области, причем $\mathbf{r}_0 \in V$, а температура $\Delta \tilde{T} = 0$. Этой системе соответствуют перемещения $u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2 u_i^{(j)} + m \nabla_j (g^{\beta\gamma} \nabla_\gamma u_\beta^{(j)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j \delta(t) = \ddot{u}_i^{(j)},$$

однородным начальным условиям и условиям на бесконечности $u_i^{(j)} = 0$. Подставляя указанную систему в (1.4.25), приходим к формуле

$$u^j(\mathbf{r}_0, t) = \\ = G \left[(3m - 1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V \Delta T(\mathbf{r}, \tau) g^{\beta k} \nabla_\beta u_k^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t - \tau) dV(\mathbf{r}) \right] + \\ + \int_0^t d\tau \int_S [p_{(n)}^i(\mathbf{r}, \tau) u_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t - \tau) - \\ - g^{\gamma i} p_{\gamma}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t - \tau) u_{iS}(\mathbf{r}, \tau)] dS(\mathbf{r}), \quad (3.2.11)$$

которая является обобщением формулы Соммилианы на динамические задачи теории температурных напряжений. Уравнение преобразуется к виду

$$u^j(\mathbf{r}_0, t) = -G \left[(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V u_i^{(j)} g^{ik} \nabla_k \Delta T dV + \right. \\ \left. + \int_0^t d\tau \int_S \{ [p_{(n)}^k + G(3m-1) \alpha \Delta T n^k] u_k^{(j)} - p_k^{(j)} u_S^k \} dS, \quad (3.2.12) \right.$$

где $p_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) = G [(\nabla_k u_i^{(j)} + \nabla_i u_k^{(j)}) n^k + (m-1) g^{k\beta} \nabla_\beta u_k^{(j)} n_i]$.

Если перемещения $\tilde{u}_i$ выбирать так, чтобы $\tilde{u}_i = 0$ на поверхности S , то получим формулы, более удобные для определения перемещений u_i . Для этого воспользуемся функциями Грина $K_i^{(j)}$ и положим $\tilde{u}_i = K_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$. Функции Грина удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 K_i^{(j)} + m \nabla_i (g^{k\beta} \nabla_\beta K_\beta^{(j)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j \delta(t) = (1/a_S^2) \ddot{K}_i^{(j)}$$

с граничными условиями $K_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = 0$ для $\mathbf{r} \in S$ и однородными начальными условиями. Тогда формула (3.2.12) принимает вид

$$u^{(j)}(\mathbf{r}_0, t) = \\ = G(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V \Delta T(\mathbf{r}, \tau) g^{k\beta} \nabla_\beta K_k^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}) - \\ - \int_0^t d\tau \int_S p_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) u_S^i(\mathbf{r}, \tau) dS(\mathbf{r}),$$

причем выражение для $p_i^{(j)}$ при этом не меняется, а $u_i^{(j)}$ следует заменить на $K_i^{(j)}$.

Если тело жестко закреплено на поверхности S ($u_{iS} = 0$), то

$$u^{(j)}(\mathbf{r}_0, t) = \\ = G(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V \Delta T(\mathbf{r}, \tau) g^{k\beta} \nabla_\beta K_k^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}) = \\ = -G(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V g^{ik} \nabla_k \Delta T K_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}).$$

Если на поверхности S ограниченного тела заданы смешанные условия: $u_i(\mathbf{r}, t) = 0$ на S_1 и $p_{(n)}^i(\mathbf{r}, t) = 0$ на S_2 , то пере-

мещения $u^j(\mathbf{r}_0, t)$ можно получить по формуле (3.2.11), принимая $\tilde{u}_i = \Phi_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$. Перемещения вызваны действием сосредоточенной силы $\tilde{F}^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j \delta(t)$, приложенной в точке $\mathbf{r}_0$ и направленной по оси x^j . При этом функция $\Phi_i^{(j)}$ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \Phi_i^{(j)} + m \nabla_i (g^{k\beta} \nabla_\beta \Phi_k^{(j)}) + (1/G) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j \delta(t) = \ddot{\Phi}_i^{(j)} / a_s^2$$

с граничными условиями $\Phi_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = 0$ для $\mathbf{r} \in S_1$; $p_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = 0$ для $\mathbf{r} \in S_2$ и однородными начальными условиями. В результате имеем

$$\begin{aligned} u^{(j)}(\mathbf{r}_0, t) = & \\ = G(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V \Delta T(\mathbf{r}, \tau) g^{k\beta} \nabla_\beta \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}) + & \\ + \int_0^t d\tau \int_S [p_{(n)}^i(\mathbf{r}, \tau) \Phi_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) - & \\ - p_i^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) u_S^i(\mathbf{r}, \tau)] ds(\mathbf{r}), & \end{aligned}$$

но поверхностный интеграл равен нулю в силу граничных условий, тогда приходим к формуле Майзеля

$$\begin{aligned} u^{(j)}(\mathbf{r}_0, t) = & \\ = G(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V \Delta T(\mathbf{r}, \tau) g^{k\beta} \nabla_\beta \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}) = & \\ = -G(3m-1) \alpha \int_0^t d\tau \int_V \nabla_i \Delta T(\mathbf{r}, \tau) g^{ik} \Phi_k^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t-\tau) dV(\mathbf{r}). & \end{aligned}$$

Из уравнения (1.4.29) теоремы взаимности термоупругости вытекает ряд интересных следствий.

1. Пусть в точке $\mathbf{r}_0 \in D$ действует мгновенная сосредоточенная сила $F^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_i^j \delta(t)$, направленная по оси x^j , а в точке $\tilde{\mathbf{r}}_0$ — сосредоточенная сила $\tilde{F}^i = \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0) g_k^i \delta(t)$, направленная по оси x^k . Полагая граничные условия однородными, можно написать

$$\dot{\tilde{u}}_j(\mathbf{r}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0, t) = \dot{u}_k(\tilde{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0, t).$$

2. Для источников теплоты $Q = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t)$ и $\tilde{Q} = \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_0) \delta(t)$ справедливо

$$\Delta \tilde{T}(\mathbf{r}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0, t) = \Delta T(\tilde{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0, t).$$

3. Если в точке $\mathbf{r}_0$ приложить мгновенную сосредоточенную силу $F^i = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) g_j^i \delta(t)$, а в точке $\mathbf{r}_0$ поместить источник теплоты $Q = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t)$, то имеет место соотношение

$$\Delta T(\tilde{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0, t) = -(\eta\kappa/3K\alpha) \tilde{u}_j(\mathbf{r}_0, \tilde{\mathbf{r}}_0, t).$$

4. Пусть в пространстве с постоянной скоростью v перемещается источник теплоты $Q = \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3 - vt)$ в направлении оси x^3 . Принимая в системе $\tilde{I}$ источник $\tilde{Q} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t)$, можно определить температуру

$$\Delta T(x_0^j, t) = \int_0^t \Delta \tilde{T}(0, 0, v\tau, x_0^j, t - \tau) d\tau,$$

обусловленную движущимся источником, с помощью температуры, вызванной действием неподвижного источника теплоты. В теории температурных напряжений $\eta = 0$. В этом случае имеет место уравнение Майзеля

$$\begin{aligned} & \int_V [\bar{F}^i \bar{u}_i - \bar{F} \bar{u}_i] dV + \int_S [\bar{p}_{(n)}^i \bar{u}_i - \bar{p}_{(n)}^i \bar{u}_i] dS + \\ & + G(3m - 1) \alpha \int_V (\Delta \bar{T} \bar{e} - \Delta \bar{T} \bar{e}) dV = 0. \end{aligned}$$

3.3. Метод собственных функций, его реализация

Большинство линейных задач механики сплошной среды, как показано в гл. 2, сводится к решению краевой задачи для дифференциального линейного уравнения в частных производных. Одним из возможных методов решения краевой задачи является метод собственных функций, основанный на построении собственных функций и разложении искомого решения в ряд по собственным функциям с последующим вычислением соответствующих коэффициентов разложения.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный оператор L , соответствующий дифференциальному уравнению краевой задачи. Число λ и функция φ называются соответственно собственным значением (числом) и собственной функцией оператора L , если φ не является нулевым элементом пространства H и выполняется равенство $L\varphi = \lambda\varphi$; при этом собственная функция φ соответствует собственному значению λ . Из данного определения следует, что

$$\lambda = (L\varphi, \varphi) / \|\varphi\|^2; \quad \|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi).$$

Собственному значению λ может соответствовать несколько собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, тогда любая отличная от нулевого элемента, линейная комбинация $\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k$ также будет собственной функцией, соответствующей тому же собственному значению. Поэтому необходимо рассматривать только линейно независимые собственные функции, соответствующие данному собственному значению. Число независимых собственных функций определяет ранг (кратность) соответствующего собственного значения. Совокупность собственных значений оператора L принято называть его собственным спектром, который может быть как дискретным, так и непрерывным.

Линейный оператор L , действующий в пространстве H , будет симметричным, если $\overline{D(L)} = H$ и если для любых $u, v \in D(L)$ справедливо тождество $(Lu, v) = (u, Lv)$, где (Lu, v) — симметричный билинейный функционал, а (Lu, u) — квадратичная форма. Собственные значения и собственные функции симметричного оператора обладают следующими свойствами:

- 1) собственные значения вещественны;
- 2) собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, нормированы, т. е. $\|\varphi_k\| = 1$, и ортогональны, т. е. $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ и $k \neq m$;
- 3) в сепарабельном гильбертовом пространстве оператор имеет не более чем счетное множество собственных значений;
- 4) собственные функции оператора образуют ортонормированную систему.

Предположим, что оператор L , действующий в пространстве H , положительно определен, а его спектр дискретен. Пусть λ_n и φ_n — собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора L . Полагая систему $\{\varphi_n\}$ ортонормированной в H , имеем систему $\{\varphi_n / \sqrt{\lambda_n}\}$, ортонормированную в энергетическом пространстве H_L . Так как система $\{\varphi_n\}$ полна в H , то для любого элемента $u \in H$ справедливо разложение в ортогональный ряд

$$u = \sum_n (u, \varphi_n) \varphi_n, \quad (3.3.1)$$

сходящийся в метрике пространства H . Если $u \in H_L$, то ряд (3.3.1) сходится в метрике пространства H_L . Пусть $u \in D(L)$, тогда $Lu \in H$, а следовательно,

$$Lu = \sum_n (Lu, \varphi_n) \varphi_n,$$

но

$$(Lu, \varphi_n) = [u, \varphi_n] = \lambda_n (u, \varphi_n),$$

тогда

$$Lu = \sum_n \lambda_n (u, \varphi_n) \varphi_n.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка любого типа содержат дифференциальный оператор эллиптического типа

$$Lu = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(x) u, \quad (3.3.2)$$

определенный в замкнутой области $\overline{D(L)}$ с кусочно гладкой граничной поверхностью S . Вследствие эллиптичности оператора L (3.3.2) все собственные значения $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ матрицы $((A_{jk}(x)))$ имеют в $\overline{D}$ один и тот же знак, поэтому будем считать $\lambda_k(x) > 0$ при $x \in \overline{D}$, где $\lambda_k(x) \geq \mu_0, \forall x \in \overline{D}; \mu_0 = \text{const} > 0$. Отсюда следует условие невырождения (невырождаемости) эллиптического оператора L

$$A_{jk} t^j t^k = \mu_0 \sum_{k=1}^m (t^k)^2,$$

которое дополним требованием $C(x) \geq 0, \forall x \in \overline{D}$.

Можно показать, что при указанных ограничениях оператор Lu , действующий в пространстве $L_2(D)$, будет положительно определенным и имеет форму

$$Lu = - \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u,$$

где $p(x), q(x)$ — известные функции координат $x\{x^j\}$, составленные из коэффициентов $A_{jk}(x)$ и $C(x)$ эллиптического оператора (3.3.2).

Рассмотрим оператор

$$Lu = - \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u \quad (3.3.3)$$

на множестве $D(L)$ функций u , непрерывных на отрезке $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную первую производную и суммируемую с квадратом вторую производную, при граничных условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (3.3.4)$$

Коэффициенты $p(x), q(x)$ оператора (3.3.3) подчиним условиям

$$\begin{aligned} p(x), p'(x), q(x) &\in C[a, b]; \\ p(x) &\geq p_0 = \text{const} > 0; q(x) \geq 0; \\ p_0 &\leq p(x) \leq p_1; 0 \leq q(x) \leq q_1, x \in [a, b], \end{aligned}$$

где p_1, q_1 — положительные постоянные. Так как оператор (3.3.3) положительно определенный, то нетрудно показать, что оператор L имеет в пространстве $L_2(a, b)$ дискретный спектр —

бесконечную последовательность собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$ и соответствующие им собственные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, причем $\|\varphi\|=1$, $(\varphi_k, \varphi_m)=0$ и $k \neq m$. Функции $\varphi_n(x)$ образуют полную систему функций в каждом из пространств $L_2(a, b)$ и H_L , однако в энергетической метрике собственные функции ортогональны $([\varphi_k, \varphi_m]=0$ и $k \neq m$), но не нормированы, так как $|\varphi_n| = \sqrt{\lambda_n}$. Определение спектра оператора L вида (3.3.2) равносильно задаче Штурма—Лиувилля о нахождении таких значений параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + \lambda u = 0,$$

удовлетворяющие граничным условиям (3.3.4). Система собственных функций $\{\varphi_n(x)\}$ задачи Штурма—Лиувилля полна в $L_2(a, b)$, и любая функция $u \in L_2(a, b)$ разлагается в ряд

$$u(x) = \sum_n C_n \varphi_n(x); \quad C_n = (u, \varphi_n), \quad (3.3.5)$$

сходящийся в метрике $L_2(a, b)$, причем ряд (3.3.5) сходится на отрезке $[a, b]$ равномерно, если $u \in H_L$, т. е. если $u(x)$ абсолютно непрерывна на указанном отрезке, $u(a) = u(b) = 0$ и $u' \in L_2(a, b)$.

Рассмотрим общую схему метода собственных функций применительно к построению слабого решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Определение «слабого» решения смешанной задачи для указанных уравнений было дано ранее.

Для смешанной задачи теплопроводности «слабое» решение представляет собой абстрактную функцию $u(t)$ класса

$$C([0, \infty), L_2(D)) \cap C((0, \infty), H_L) \cap C^1((0, \infty), L_2(D)),$$

удовлетворяющую соотношению

$$(du(t)/dt, \eta(t)) + [u(t), \eta(t)]_L (f(t), \eta(t)) \quad (3.3.6)$$

и начальному условию $u(0) = u_0$, где $\eta(t)$ — произвольная абстрактная функция от t со значениями в пространстве H_L ; L — оператор вида (3.3.2) для конечной области $D \subset E_m$ с кусочно гладкой граничной поверхностью S ; $f(t) \in C^1([0, \infty); L_2(D))$ — абстрактная функция от t со значениями в $L_2(D)$; u_0 — элемент пространства $L_2(D)$.

Пусть решение смешанной задачи теплопроводности существует. При любом $t > 0$ оно является элементом пространства $L_2(D)$ и разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_n(x)$

оператора L , которым соответствуют собственные значения λ_n , т. е.

$$u(t) = \sum_n C_n(t) \varphi_n. \quad (3.3.7)$$

Следовательно, задача сводится к вычислению коэффициентов $C_n(t) = (u(t), \varphi_n)$.

В соотношении (3.3.6) положим $\eta(t) = \varphi_k$, тогда

$$(du(t)/dt, \varphi_k + [u(t), \varphi_k]_L = (f(t), \varphi_k).$$

Так как φ_k не зависит от t , то

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \varphi_k \right) = \frac{d}{dt} (u(t), \varphi_k) = \frac{d}{dt} C_k(t);$$

$$[u(t), \varphi_k]_L = \lambda_k (u(t), \varphi_k) = \lambda_k C_k(t); \quad (f(t), \varphi_k) = f_k(t).$$

В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dt} C_k(t) + \lambda_k C_k(t) = f_k(t),$$

решение которого имеет вид

$$C_k(t) = e^{-\lambda_k t} \left(A_k + \int_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau) d\tau \right),$$

а постоянная A_k определяется в соответствии с начальным условием $C_k(0) = (u_0, \varphi_k)$. Отсюда имеем $A_k = C_k(0) = (u_0, \varphi_k)$. Подстановка постоянной A_k приводит к формуле

$$C_k(t) = (u_0, \varphi_k) e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau. \quad (3.3.8)$$

Из (3.3.7) с учетом (3.3.8) находим искомое решение

$$u(x, t) = \sum_n (u_0, \varphi_n) e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) + \sum_n \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \varphi_n(x), \quad (3.3.9)$$

которое позволяет сделать следующее утверждение: если смешанная задача теплопроводности имеет обобщенное решение, то его можно представить в виде ряда (3.3.9). Это решение является «слабым» решением задачи теплопроводности по четырем причинам:

1) ряд (3.3.9) сходится в метрике $L_2(D)$ равномерно по t на любом отрезке времени $[0, T]$;

2) ряд (3.3.9) сходится в метрике H_L равномерно по t на любом отрезке $[t_1, T]$, где $0 < t_1 < T < \infty$, откуда следует $u(t) \in C((0, \infty); H_L)$;

3) ряд, полученный дифференцированием по t ряда (3.3.9), сходится в метрике $L_2(D)$ равномерно по t в любом отрезке $[t_1, T]$;

4) сумма ряда (3.3.9) удовлетворяет начальному условию для соотношения (3.3.6).

В смешанной задаче для волнового уравнения «слабое» решение $u(x, t) = u(t)$ есть абстрактная функция от t , принадлежащая классу K , удовлетворяющая соотношению

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)] dt - (v_0, \eta(0)) = \\ & = \int_0^T (f(t), \eta(t)) dt, \quad \eta \in K_T \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

и начальному условию $u(0) = u_0$, причем $u_0 \in H_L$, $v_0 \in L_2(D)$; $f(t) = f(x, t)$ — абстрактная функция класса $C([0, \infty); L_2(D))$. Начальное условие имеет смысл предельного перехода $\lim_{t \rightarrow 0} |u(t) - u_0| = 0$ в энергетической метрике.

Пусть существует решение $u(t)$ смешанной задачи для волнового уравнения. Разложим его в метрике $L_2(D)$ в ряд по собственным функциям оператора L :

$$u(t) = \sum_n C_n(t) \varphi_n, \quad (3.3.11)$$

где $C_n(t) = (u(t), \varphi_n)$ — неизвестные коэффициенты ряда, подлежащие определению.

В соотношении (3.3.10) положим $\eta(t) = (T-t)\varphi_n$, тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt}, \varphi_n \right) dt + \int_0^T [u(t), (T-t)\varphi_n] dt - (v_0, T\varphi_n) = \\ & = \int_0^T (f(t), (T-t)\varphi_n) dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \varphi_n \right) = \frac{d}{dt} (u(t), \varphi_n) = \frac{d}{dt} C_n(t);$$

$$\begin{aligned}
[u(t), (T-t)\varphi_n] &= (T-t)[u(t), \varphi_n] = (T-t)\lambda_n(u(t), \varphi_n) = \\
&= (T-t)\lambda_n C_n(t); \\
(v_0, T\varphi_n) &= T(v_0, \varphi_n); \\
(f(t), (T-t)\varphi_n) &= (T-t)(f(t), \varphi_n) = (T-t)f_n(t),
\end{aligned}$$

то в результате находим соотношение

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt} C_n(t) dt + \int_0^T (T-t)\lambda_n C_n(t) dt - T(v_0, \varphi_n) &= \\
= \int_0^T (T-t)f_n(t) dt.
\end{aligned}$$

Дифференцируя его по T и заменяя T и t соответственно на t и τ , получаем

$$\frac{d}{dt} C_n(t) + \int_0^t \lambda_n C_n(\tau) d\tau - (v_0, \varphi_n) = \int_0^t f_n(\tau) d\tau,$$

а, дифференцируя по t , приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} C_n(t) + \lambda_n C_n(t) = f_n(t) \quad (3.3.12)$$

с начальными условиями $C_n(0) = (u_0, \varphi_n)$; $C_n'(0) = (v_0, \varphi_n)$. Решение задачи (3.3.12) имеет вид

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= (u_0, \varphi_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{(v_0, \varphi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Подстановка (3.3.13) в (3.3.11) приводит к «слабому» решению смешанной задачи для волнового уравнения

$$u(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t). \quad (3.3.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
w_1(x, t) &= \\
&= \sum_n \left[(u_0, \varphi_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{(v_0, \varphi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right] \varphi_n(x);
\end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$w_2(x, t) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n(x) \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau. \quad (3.3.16)$$

Относительно первого слагаемого $\omega_1(x, t)$ можно утверждать следующее:

а) ряд (3.3.15) сходится в метрике H_L равномерно по t на всей оси;

б) ряд, полученный дифференцированием (3.3.15) по t , сходится равномерно по t в метрике $L_2(D)$;

в) сумма ряда (3.3.15) удовлетворяет начальным условиям $\omega_1|_{t=0}=u_0, d\omega_1/dt|_{t=0}=v_0$;

г) сумма ряда (3.3.15) удовлетворяет соотношению

$$-\int_0^T \left(\frac{d\omega_1(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt} \right) dt + \int_0^T [\omega_1(t), \eta(t)] dt - (v_0, \eta(0)) = 0.$$

Относительно второго слагаемого $\omega_2(x, t)$ следует сказать, что для ряда (3.3.16) справедливы все утверждения, указанные для ряда (3.3.15), за исключением того, что равномерная сходимость имеет место не на всей оси t , а только на отрезке $[0, t_1]$, где $t_1 = \text{const} > 0$.

В совокупности сформулированные утверждения указывают на справедливость «слабого» решения (3.3.14) и обоснованность метода собственных функций при решении смешанной задачи для волнового уравнения. Для применимости метода собственных функций существенным является линейность дифференциального уравнения и граничных условий данной краевой задачи. В остальном метод в одинаковой степени применим к дифференциальному уравнению в частных производных любого типа.

Проиллюстрируем реализацию метода собственных функций при решении задач механики сплошной среды. Рассмотрим неустановившееся круговое движение вязкой несжимаемой жидкости, для которого радиальная компонента скорости $v_r = 0$. Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

находим $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$. Считая давление p не зависящим от координаты θ , запишем уравнения движения

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right).$$

Пусть цилиндр радиусом a , заполненный вязкой жидкостью, с момента $t=0$ начал вращаться с постоянной угловой скоростью ω . С учетом условия прилипания частиц жидкости к стенкам цилиндра задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (3.3.17)$$

с начальным $v_0 = \omega a = v_0$ при $t=0$ и граничным $v_0 = \omega a$ при $r = a$ условиями. Собственные функции $\varphi_n(r)$ краевой задачи определим в результате решения уравнения

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda r^2 - 1)R = 0$$

с граничным условием $R(a) = R_s$ при $r=a$. Решение уравнения имеет вид

$$R(r) = C_1 J_1(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y_1(\sqrt{\lambda}r).$$

При $r=0$ $Y_1(\sqrt{\lambda}r)$ обращается в бесконечность, поэтому принимаем $C_2=0$. Согласно граничным условиям при $r=a$ постоянная $C_1 = R_s/J_1(\sqrt{\lambda}a)$ и решение уравнения будет следующим:

$$R(r) = R_s J_1(\sqrt{\lambda}r)/J_1(\sqrt{\lambda}a).$$

Итак, собственные функции краевой задачи есть

$$\varphi_n(r) = J_1(\sqrt{\lambda_n}r)/J_1(\sqrt{\lambda_n}a),$$

а соответствующие им собственные значения равны $\lambda_n = (\mu_n/r)^2$, где μ_n — корни уравнения $J_1(\mu) = 0$; $n=1, 2, \dots$

В соответствии со схемой метода представим решение уравнения (3.3.17) в виде ряда

$$v_0 = \sum_n C_n(t) \varphi_n(r) R_s \quad (3.3.18)$$

и подставим его в (3.3.17). В результате приходим к уравнению

$$C_n' + \nu \lambda_n C_n = 0,$$

решение которого будет следующим:

$$C_n(t) = C_{n0} e^{-\nu \lambda_n t}.$$

Подставив найденное выражение для $C_n(t)$ в (3.3.18), получим

$$v_0/R_s = \sum_n C_{n0} e^{-\nu \lambda_n t} \varphi_n(r).$$

Начальное значение скорости v_0 разложим в ряд по собственным функциям:

$$v_0(r) = \sum_n A_n \varphi_n(r),$$

где $A_n = \int_0^a \omega \varphi_n(r) dr$, и подставим в начальное условие к уравнению (3.3.17). В результате получим $C_{n0} = A_n/R_s$.

Таким образом, скорость кругового движения жидкости

$$v_{\theta}(r, t) = \sum_n \frac{\omega \int_0^a J_1(V \bar{\lambda}_n r) dr}{[J_1(V \bar{\lambda}_n a)]^2} e^{-\nu \bar{\lambda}_n t} J_1(V \bar{\lambda}_n r),$$

а соответствующее давление

$$p = \rho \int_0^r (v_{\theta}^2/r) dr.$$

Пусть полый упругий цилиндр конечной длины l с толщиной стенки $h=b-a$, где b и a — соответственно внешний и внутренний радиус цилиндра, находится под тепловым воздействием с начальным распределением температуры $\Delta T_0(r, \theta, z)$, а поверхности и основания цилиндра удерживаются при температуре, равной нулю. Требуется определить закон распределения температуры $u(r, \theta, z, t)$ в цилиндре, если уравнение теплопроводности имеет вид

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \kappa = \Lambda / \rho_0 c. \quad (3.3.19)$$

Граничные условия: $u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0$, $u|_{r=a} = u|_{r=b} = 0$, начальные условия: $u|_{t=0} = \Delta T_0(r, \theta, z)$.

Собственные функции Φ определим в результате решения краевой задачи, описываемой уравнением

$$\nabla^2 \Phi = \lambda \Phi \quad (3.3.20)$$

с граничными условиями $\Phi|_{z=0} = \Phi|_{z=l} = 0$, $\Phi|_{r=a} = \Phi|_{r=b} = 0$. Поставленную задачу будем решать в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Тогда оператор Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Частное решение уравнения (3.3.20) будем искать в виде произведения $\Phi = R(r) \Phi(\theta) Z(z)$, которое подставим в уравнение (3.3.20). В результате для функций произведения получим уравнения

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0; \quad Z'' + \mu^2 Z = 0;$$

$$R'' + R'/r + (k^2 r^2 - m^2) R = 0; \quad -k^2 = \lambda + \mu^2,$$

где m, μ, k — произвольные постоянные.

Общие решения этих уравнений следующие:

$$\Phi(\theta) = C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta;$$

$$Z(z) = C_3 \cos \mu z + C_4 \sin \mu z;$$

$$R(r) = C_5 J_m(kr) + C_6 Y_m(kr).$$

Так как внутри цилиндра температура является периодической функцией по координате θ с периодом 2π , то постоянная m должна быть целым числом ($m=0, 1, \dots$). Для функции $Z(z)$ из граничных условий к уравнению (3.3.20) находим $C_3=0$ и $\mu=n\pi/l$, причем n — целое число ($n=0, 1, \dots$). Тогда функция

$$Z(z) = C_4 \sin(n\pi z/l).$$

Для функции $R(r)$ из граничных условий к уравнению (3.3.20) устанавливаем

$$R(r) = C_6 \frac{J_m(kb)Y_m(kr) - Y_m(ka)J_m(kr)}{J_m(kb)}.$$

Неизвестную постоянную k определяем в результате решения уравнения $J_m(kb)Y_m(ka) = Y_m(ka)J_m(kb)$, причем число решений есть бесконечное множество k_α ($\alpha=1, 2, \dots$).

Таким образом, решаемой для цилиндра задаче теплопроводности соответствуют две системы собственных функций

$$\begin{aligned} \Phi_{mna}^{(1)} &= \frac{J_m(k_\alpha b)Y_m(k_\alpha r) - Y_m(k_\alpha a)J_m(k_\alpha r)}{J_m(k_\alpha b)} \sin \frac{n\pi z}{l} \cos m\theta; \\ \Phi_{mna}^{(2)} &= \frac{J_m(k_\alpha b)Y_m(k_\alpha r) - Y_m(k_\alpha a)J_m(k_\alpha r)}{J_m(k_\alpha b)} \sin \frac{n\pi z}{l} \sin m\theta. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

подчиненные граничным условиям к уравнению (3.3.20).

Общее решение уравнения (3.3.19) представим в виде ряда по собственным функциям

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{\infty} (C_{mna}^{(1)}(t) \Phi_{mna}^{(1)} + C_{mna}^{(2)}(t) \Phi_{mna}^{(2)}),$$

подстановка которого в исходное уравнение дает уравнение для коэффициентов ряда $C_{mna}^{(j)}(t)$:

$$\dot{C}_{mna}^{(j)} + [(n\pi/l)^2 + k_\alpha^2] C_{mna}^{(j)} = 0.$$

Решение этого уравнения есть функция

$$C_{mna}^{(j)}(t) = D_{mna}^{(j)} e^{-[(n\pi/l)^2 + k_\alpha^2] t},$$

где $D_{mna}^{(j)}$ — произвольные постоянные, определяемые из начального условия к уравнению (3.3.19).

Общее решение уравнения (3.3.19) принимает вид

$$u = \sum_m \sum_n \sum_\alpha (D_{mna}^{(1)} \Phi_{mna}^{(1)} + D_{mna}^{(2)} \Phi_{mna}^{(2)}) e^{-[(n\pi/l)^2 + k_\alpha^2] t}. \quad (3.3.22)$$

Разложим $\Delta T_0(r, \theta, z)$ в ряд по собственным функциям (3.3.21):

$$\Delta T_0 = \sum_m \sum_n \sum_\alpha (A_{mna}^{(1)} \varphi_{mna}^{(1)} + A_{mna}^{(2)} \varphi_{mna}^{(2)}), \quad (3.3.23)$$

коэффициенты которого равны

$$A_{mna}^{(j)} = \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_a^b \Delta T_0 r \varphi_{mna}^{(j)} dr dz d\theta \bigg/ \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_a^b r (\varphi_{mna}^{(j)})^2 dr dz d\theta.$$

Подставив (3.3.22) и (3.3.23) в начальное условие к уравнению (3.3.19), определим неизвестные $D_{mna}^{(j)} = A_{mna}^{(j)}$.

Итак, общее решение задачи теплопроводности для цилиндра конечной длины определяет закон распределения температуры

$$u = \sum_m \sum_n \sum_\alpha (A_{mna}^{(1)} \varphi_{mna}^{(1)} + A_{mna}^{(2)} \varphi_{mna}^{(2)}) e^{-[(n\pi/l)^2 + k_\alpha^2]t}. \quad (3.3.24)$$

Если задача теплопроводности осесимметричная и искомая температура не зависит от координаты θ , то система собственных функций

$$\varphi_{n\alpha} = \frac{J_0(k_\alpha b) Y_0(k_\alpha r) - Y_0(k_\alpha a) J_0(k_\alpha r)}{J_0(k_\alpha b)} \sin \frac{n\pi z}{l},$$

решение (3.3.24) упрощается и принимает вид

$$u = \sum_n \sum_\alpha A_{n\alpha} \varphi_{n\alpha} e^{-[(n\pi/l)^2 + k_\alpha^2]t} \quad (3.3.25)$$

где коэффициенты ряда

$$A_{n\alpha} = \int_0^l \int_a^b \Delta T_0 r \varphi_{n\alpha} dr dz \bigg/ \int_0^l \int_a^b r (\varphi_{n\alpha})^2 dr dz.$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние полого цилиндра длиной l , с толщиной стенки $h = b - a$ и жестко заделанными торцами, находящегося под действием внешнего $p_2(z, t)$ и внутреннего $p_1(z, t)$ давлений в тепловом потоке с температурой $\Delta T(r, z, t)$, распределенной по закону (3.3.25). Решим задачу в цилиндрических координатах (r, θ, z) с учетом осесимметричности по координате θ , принимая за основные неиз-

вестные ρ и u_i ($i=1, 2, 3$), причем в силу осесимметричности задачи $u_\theta=0$ и $\partial(\dots)/\partial\theta=0$. Основные неизвестные подчинены уравнениям (1.4.31) и (1.4.32) с начальными и граничными условиями

$$u_i(r, 0) = u_i^0(r), \quad \dot{u}_i(r, 0) = v_i^0(r), \quad \rho = \rho_0 \text{ при } t=0; \quad (3.3.26)$$

$$u_i(r, t) = 0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=l; \\ \sigma_{ij}(S)n^j = p_i^{(n)} \text{ при } r=a \text{ и } r=b.$$

Так как задача поставлена в перемещениях, то, пользуясь физическими соотношениями (1.4.15), преобразуем граничные условия в напряжениях к виду (1.4.36):

$$[(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + (m-1) \nabla_k u^k g_{ij}] n^j \Big|_{r=a}^{r=b} = p_i^{(n)} / G,$$

где $p_i^{(n)} = [p_{ij}^{(n)} + G(3m-1)\alpha\Delta T g_{ij}] n^j \Big|_{r=a}^{r=b}$.

Решать задачу будем в форме Ляме

$$u_i = \nabla_i \Phi + \Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k. \quad (3.3.27)$$

Подстановка (3.3.27) в уравнения (1.4.31) и (1.4.32) приводит к уравнениям

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{a_s^2(m+1)} \ddot{\Phi} = \frac{(3m-1)}{m+1} \alpha \Delta T; \quad \nabla^2 \Psi_k - \frac{1}{a_s^2} \ddot{\Psi}_k = 0 \quad (3.3.28)$$

при условии $\Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k = 0$. Начальные и граничные условия (3.3.26), записанные для функций Φ и Ψ_k , принимают соответственно следующий вид:

$$\nabla_i \Phi = u_i^0, \quad \nabla_i \dot{\Phi} = v_i^0; \quad \Psi_k = 0, \quad \dot{\Psi}_k = 0; \quad (3.3.29)$$

$$\partial \Phi / \partial z = 0, \quad \Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k = 0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=l;$$

$$[(\nabla_1 \nabla_j \Phi + \nabla_j \nabla_1 \Phi) + (m-1) \nabla^2 \Phi g_{ij}] n^j \Big|_{r=a}^{r=b} = p_i^{(n)} / G; \quad (3.3.30)$$

$$\Lambda_i^{jk} \nabla_j \Psi_k = 0 \text{ при } r=a \text{ и } r=b,$$

где $p_i^{(n)} = [p_{ij}^{(n)} + G(3m-1)\alpha\Delta T g_{ij}] n^j \Big|_{r=a}^{r=b}$.

Определение функций Ψ_k требует интегрирования уравнений (3.3.28) с учетом начальных (3.3.29) и граничных (3.3.30) условий. Собственные функции найдем в результате решения краевой задачи

$$\nabla^2 \varphi_k - \lambda \varphi_k = 0$$

с граничными условиями

$$\Lambda_t^k \nabla_t \psi_k \Big|_{z=0} = 0; \quad \Lambda_t^k \nabla_t \psi_k = 0 \Big|_{r=a} = 0.$$

Системы собственных функций имеют вид

$$\varphi_{n\alpha}^{(1)} = \frac{J_0(i\kappa b) Y_0(i\kappa r) - Y_0(i\kappa b) J_0(i\kappa r)}{J_0(i\kappa b)} \cos \frac{n\pi z}{l};$$

$$\varphi_{n\alpha}^{(2)} = 0;$$

$$\varphi_{n\alpha}^{(3)} = \frac{J_1(i\kappa b) Y_0(i\kappa r) - Y_1(i\kappa b) J_0(i\kappa r)}{J_1(i\kappa b)} \sin \frac{n\pi z}{l},$$

где $\kappa = (\lambda + \mu^2)^{1/2}$; $\mu = n\pi/l$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Параметры $\kappa^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) определим в результате решения следующих уравнений:

$$\kappa^{(1)} \rightarrow Y_0(i\kappa^{(1)} a) J_0(i\kappa^{(1)} b) = J_0(i\kappa^{(1)} a) Y_0(i\kappa^{(1)} b);$$

$$\kappa^{(3)} \rightarrow Y_1(i\kappa^{(3)} a) J_1(i\kappa^{(3)} b) = Y_1(i\kappa^{(3)} b) J_1(i\kappa^{(3)} a).$$

Число корней этих уравнений — счетное множество; они нумеруются индексом α ($\alpha = 1, 2, \dots$), а потому имеем счетное множество величин κ_α , которому соответствуют собственные значения

$$\lambda_{n\alpha}^{(k)} = (\kappa_\alpha^{(k)})^2 - (n\pi/l)^2.$$

Искомые функции ψ_k представим в виде ряда

$$\psi_k = \sum_n \sum_\alpha C_{n\alpha}^{(k)} \varphi_{n\alpha}^{(k)}$$

и подставим в уравнения (3.3.28). В результате получим уравнения

$$\ddot{C}_{n\alpha}^{(k)} - a_s^2 \lambda_{n\alpha}^{(k)} C_{n\alpha}^{(k)} = 0$$

с начальными условиями $C_{n\alpha}^{(k)} = 0$ и $\dot{C}_{n\alpha}^{(k)} = 0$ при $t = 0$. Решением является равенство $C_{n\alpha}^{(k)}(t) = 0$, следовательно, $\psi_k = 0$, $k = 1, 2, 3$.

Определение функции Φ сводится к интегрированию уравнения (3.3.28) совместно с начальными (3.3.29) и граничными (3.3.30) условиями. Представляя искомую функцию Φ в виде $\Phi = \varphi(r, z) \Gamma(t)$ и подставляя ее в уравнение (3.3.28), получаем

$$\nabla^2 \varphi + \lambda \varphi = 0; \quad \ddot{\Gamma} + \lambda a_s^2 (m+1) \Gamma = 0. \quad (3.3.31)$$

Таким образом, собственные функции можно определить в результате решения краевой задачи, описываемой первым

уравнением системы (3.3.31) с граничными условиями $\partial\varphi/\partial z=0$ при $z=0$ и $z=l$; $\partial\varphi/\partial r=0$; $(m+1)\partial^2\varphi/\partial r^2+(m-1)\partial^2\varphi/\partial z^2=$
 $=p_{11(k)}^{*(j)}/G$ при $r=a$ и $r=b$, где

$$p_{11(k)}^{*(j)}=(1/T)\int_0^T p_{11}^{*(j)}(z, t) \sin(kt/T) dt$$

—коэффициенты Фурье нагрузки; $p_{11}^{*(j)}=p_{11}^{(j)}+G(3m-1)\alpha\Delta T$;
 T — время действия нагрузки.

Собственные функции имеют вид

$$\varphi(r, z)=R(r) \cos(n\pi z/l),$$

где функции $R(r)$ удовлетворяют уравнению

$$R''+R'/r+\kappa^2 R=0; \quad \kappa^2=\lambda-(n\pi/l)^2$$

и граничным условиям

$$R'=0, \quad (m+1)R''-(m-1)(n\pi/l)R=A_{nk}^{(j)}G \quad \text{при } r=a \text{ и } r=b,$$

где

$$A_{nk}^{(j)}=(1/l)\int_0^l p_{11(k)}^{*(j)}(z) \cos(n\pi z/l) dz.$$

Решением последнего уравнения будет функция

$$R(r)=C_1 J_0(\kappa r)+C_2 Y_0(\kappa r),$$

содержащая постоянные C_1 и C_2 , определяемые из граничных условий при $r=a$ и $r=b$. Чтобы воспользоваться этими условиями, вычислим производные

$$R'(r)=-\kappa[C_1 J_1(\kappa r)+C_2 Y_1(\kappa r)];$$

$$R''(r)=0,5\kappa^2[C_1(J_2(\kappa r)-J_0(\kappa r))+C_2(Y_2(\kappa r)-Y_0(\kappa r))].$$

Выполнение первого граничного условия приводит к уравнению

$$Y_1(\kappa b)J_1(\kappa a)=J_1(\kappa b)Y_1(\kappa a),$$

решение которого определяет множество собственных значений

$$\lambda_{n\alpha}=\kappa_\alpha^2+(n\pi/l)^2,$$

где κ_α ($\alpha=1, 2, \dots$) — корни уравнения.

Выполнение второго граничного условия приводит к уравнениям

$$C_1 B_{n\alpha}^{(1)}(a)+C_2 B_{n\alpha}^{(2)}(a)=A_{nk}^{(1)}/G;$$

$$C_1 B_{n\alpha}^{(1)}(b)+C_2 B_{n\alpha}^{(2)}(b)=A_{nk}^{(2)}/G,$$

куда входят функции

$$B_{n\alpha}^{(1)}(r) = 0,5(m+1)\kappa_\alpha^2 [J_2(\kappa_\alpha r) - J_0(\kappa_\alpha r)] - \\ - (m-1)(n\pi/l)^2 J_0(\kappa_\alpha r); \\ B_{n\alpha}^{(2)}(r) = 0,5(m+1)\kappa_\alpha^2 [Y_2(\kappa_\alpha r) - Y_0(\kappa_\alpha r)] - \\ - (m-1)(n\pi/l)^2 Y_0(\kappa_\alpha r).$$

Решение уравнений определяет постоянные

$$C_1 = \frac{1}{G} \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad C_2 = \frac{1}{G} \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

куда входят определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{nk}^{(1)} & B_{n\alpha}^{(2)}(a) \\ A_{nk}^{(2)} & B_{n\alpha}^{(2)}(b) \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_{n\alpha}^{(1)}(a) & A_{nk}^{(1)} \\ B_{n\alpha}^{(1)}(b) & A_{nk}^{(2)} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} B_{n\alpha}^{(1)}(a) & B_{n\alpha}^{(2)}(a) \\ B_{n\alpha}^{(1)}(b) & B_{n\alpha}^{(2)}(b) \end{vmatrix}.$$

Функции $R(r)$ определены выражением

$$R(r) = \frac{1}{G} \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} J_0(\kappa_\alpha r) + \frac{\Delta_2}{\Delta} Y_0(\kappa_\alpha r) \right].$$

Собственные функции $\varphi_{n\alpha}(r, z)$ имеют вид

$$\varphi_{n\alpha} = \frac{1}{G} \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} J_0(\kappa_\alpha r) + \frac{\Delta_2}{\Delta} Y_0(\kappa_\alpha r) \right] \cos \frac{n\pi z}{l},$$

к которым эквивалентны две системы собственных функций

$$\varphi_{n\alpha}^{(1)} = \frac{1}{G} \frac{\Delta_1}{\Delta} J_0(\kappa_\alpha r) \cos \frac{n\pi z}{l}; \\ \varphi_{n\alpha}^{(2)} = \frac{1}{G} \frac{\Delta_2}{\Delta} Y_0(\kappa_\alpha r) \cos \frac{n\pi z}{l}.$$

Решение первого уравнения (3.3.28) представим в виде ряда по собственным функциям

$$\Phi = \sum_n \sum_\alpha (\Gamma_{n\alpha}^{(1)} \varphi_{n\alpha}^{(1)} + \Gamma_{n\alpha}^{(2)} \varphi_{n\alpha}^{(2)}), \quad (3.3.32)$$

полагая, что правую часть этого уравнения можно разложить в ряд по собственным функциям:

$$(3m-1)\alpha\Delta T/(m+1) = \sum_n \sum_\alpha (D_{n\alpha}^{(1)} \varphi_{n\alpha}^{(1)} + D_{n\alpha}^{(2)} \varphi_{n\alpha}^{(2)}),$$

$$\text{где } D_{n\alpha}^{(j)} = \frac{3m-1}{m+1} \alpha \left[\int_0^l \int_a^b \Delta T r \varphi_{n\alpha}^{(j)} dr dz \right] / \left[\int_0^l \int_a^b r (\varphi_{n\alpha}^{(j)})^2 dr dz \right].$$

Подставив указанные представления в уравнение (3.3.28), для неизвестных коэффициентов $\Gamma_{n\alpha}^{(j)}(t)$ ряда (3.3.32) получим уравнение

$$\ddot{\Gamma}_{n\alpha}^{(j)} + a_s^2 (m+1) \lambda_{n\alpha} \Gamma_{n\alpha}^{(j)} = -D_{n\alpha}^{(j)} a_s^2 (m+1),$$

решением которого будет функция

$$\begin{aligned} \Gamma_{n\alpha}^{(j)} = & A_{n\alpha}^{(1)(j)} \cos a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}} t + A_{n\alpha}^{(2)(j)} \sin a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}} t - \\ & - a_s \sqrt{\frac{m+1}{\lambda_{n\alpha}}} \int_0^t D_{n\alpha}^{(j)}(\tau) \sin a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}} (t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Постоянные $A_{n\alpha}^{(1)(j)}$ и $A_{n\alpha}^{(2)(j)}$ определим из начальных условий (3.3.29), эквивалентных условиям

$$\Gamma_{n\alpha}^{(j)}(0) = U_{in\alpha}^{(j)}, \quad \dot{\Gamma}_{n\alpha}^{(j)}(0) = V_{in\alpha}^{(j)},$$

где

$$\begin{aligned} U_{in\alpha}^{(j)} = & \int_0^l \int_a^b u_i^0 r \nabla_i \Phi_{n\alpha}^{(j)} dr dz \Bigg/ \int_0^l \int_a^b r (\nabla_i \Phi_{n\alpha}^{(j)})^2 dr dz; \\ V_{in\alpha}^{(j)} = & \int_0^l \int_a^b v_i^0 r \nabla_i \Phi_{n\alpha}^{(j)} dr dz \Bigg/ \int_0^l \int_a^b r (\nabla_i \Phi_{n\alpha}^{(j)})^2 dr dz. \end{aligned}$$

Подстановкой выражения (3.3.33) в начальные условия, находим неизвестные постоянные

$$A_{n\alpha}^{(1)(j)} = U_{in\alpha}^{(j)}, \quad A_{n\alpha}^{(2)(j)} = V_{in\alpha}^{(j)} / a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}}.$$

В результате для функций $\Gamma_{n\alpha}^{(j)}(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{n\alpha}^{(j)} = & U_{in\alpha}^{(j)} \cos a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}} t + \\ & + (V_{in\alpha}^{(j)} / a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}}) \sin a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}} t - \\ & - a_s \sqrt{(m+1) / \lambda_{n\alpha}} \int_0^t D_{n\alpha}^{(j)}(\tau) \sin a_s \sqrt{(m+1) \lambda_{n\alpha}} (t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Компоненты вектора перемещений u_i в цилиндре при деформации вычисляем по формуле

$$u_i = \sum_n \sum_\alpha (\Gamma_{n\alpha}^{(1)} \nabla_i \Phi_{n\alpha}^{(1)} + \Gamma_{n\alpha}^{(2)} \nabla_i \Phi_{n\alpha}^{(2)}); \quad (3.3.34)$$

им соответствуют компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = & G \sum_n \sum_\alpha [\Gamma_{n\alpha}^{(1)} (\nabla_i \nabla_j \varphi_{n\alpha}^{(1)} + \nabla_j \nabla_i \varphi_{n\alpha}^{(1)} - (m-1) \lambda_{n\alpha} \varphi_{n\alpha}^{(1)} g_{ij}) + \\ & + \Gamma_{n\alpha}^{(2)} (\nabla_i \nabla_j \varphi_{n\alpha}^{(2)} + \nabla_j \nabla_i \varphi_{n\alpha}^{(2)} - (m-1) \lambda_{n\alpha} \varphi_{n\alpha}^{(2)} g_{ij}) - \\ & - (3m-1) \alpha \Delta T g_{ij}].\end{aligned}$$

Итак, определены все характеристики напряженно-деформированного состояния цилиндра при действии внешнего и внутреннего давления в тепловом поле с температурой $\Delta T(r, z, t)$.

Дифференцируя (3.3.34) по t , находим компоненты вектора скорости

$$v_i = \sum_n \sum_\alpha (\dot{\Gamma}_{n\alpha}^{(1)} \nabla_i \varphi_{n\alpha}^{(1)} + \dot{\Gamma}_{n\alpha}^{(2)} \nabla_i \varphi_{n\alpha}^{(2)}). \quad (3.3.35)$$

Подстановка (3.3.35) в уравнение (1.4.32) приводит к уравнению

$$d\rho/dt + \rho \nabla_i v^i = 0,$$

$$\text{где } -\nabla_i v^i = f = \sum_n \sum_\alpha (\dot{\Gamma}_{n\alpha}^{(1)} \varphi_{n\alpha}^{(1)} + \dot{\Gamma}_{n\alpha}^{(2)} \varphi_{n\alpha}^{(2)}) \lambda_{n\alpha}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий, получаем соотношение

$$\rho = \rho_0 \exp \left(\int_0^t f(r, t) dt \right),$$

завершающее решение поставленной задачи о деформации цилиндра.

Рассмотренные задачи указывают на эффективность метода собственных функций при решении задач механики сплошной среды.

3.4. Теория потенциала и интегральные уравнения механики жидкости и газа

Рассмотрим функцию $u(\xi) \in C^{(2)}(D)$ в конечной области D евклидова пространства E_m ($m \geq 2$), ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S . В области D возьмем произвольную точку x , которую вырежем шаром $r = |\xi - x| < \epsilon$, причем радиус ϵ полагаем настолько малым, чтобы шар целиком лежал внутри области D . В области $D^{(\epsilon)}$ функция $u(\xi)$ и сингулярное решение уравнения Лапласа

$$v(x, \xi) = \frac{1}{(m-2)|S_C|} \frac{1}{r^{m-2}}, \quad r = |\xi - x|$$

принадлежат классу $C^{(2)}(\overline{D^{(\epsilon)}})$, т. е. к ним применима формула Грина

$$\int_{D(\varepsilon)} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dV = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\xi S + \\ + \int_{S(\varepsilon)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\xi S_{(\varepsilon)}.$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует интегральное представление функций класса $C^{(2)}$;

$$u(x) = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\xi S - \int_D v \nabla^2 u dV, \quad (3.4.1)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке ξ . Учитывая сингулярное решение $v(x, \xi)$ при $m > 2$, из (3.4.1) следует,

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|S_C|} \int_S \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d\xi S - \\ - \frac{1}{(m-2)|S_C|} \int_D \frac{1}{r^{m-2}} \nabla^2 u dV.$$

Это интегральное представление при замене функций $\nabla^2 u(\xi)$, $du(\xi)/\partial n$, $u(\xi)$ соответственно произвольными функциями $\rho(\xi)$, $\mu(\xi)$, $v(\xi)$ позволяет ввести три интегральных оператора, называемых объемным потенциалом Φ , потенциалом простого слоя V и потенциалом двойного слоя W :

$$\Phi = \int_D \frac{1}{r^{m-2}} \rho(\xi) dV; \quad V = \int_S \frac{1}{r^{m-2}} \mu(\xi) d\xi S; \quad W = \int_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} v(\xi) d\xi S,$$

причем функции $\rho(\xi)$, $\mu(\xi)$; $v(\xi)$ будут плотностями этих потенциалов, каждый из которых обладает определенными свойствами.

Объемный потенциал Φ есть интеграл со слабой особенностью и с показателем $\lambda = m-2$, а потому он обладает следующими свойствами.

1. Если плотность $\rho \in L_1(D)$, то Φ гармоничен в каждой из областей, дополнительных к области D .

2. Пусть $\rho \in L_p(D)$, тогда $\Phi \in C(E_m)$ при $p > m/2$, $\Phi \in L_q(E_m)$ и $1 < q < mp/(m-2p)$ при $1 \leq p \leq m/2$, $\Phi \in C^{(1)}(E_m)$ при $p > m$, $\Phi \in W_q^{(1)}(E_m)$ и $1 < q < mp/(m-p)$ при $1 \leq p \leq m$.

3. Если $\rho \in L_2(D)$, то существуют обобщенные вторые производные от Φ , принадлежащие классу $L_2(D)$ и определяемые формулой

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = - \frac{(m-2)|S_C|}{m} g_j^k \rho(x) + \int_D \rho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}} dV,$$

а если $\rho \in L_p(D)$ и $1 < p < \infty$, то производные $\partial^2 \Phi / \partial x_j \partial x_k \in L_p(D)$ и определяются той же формулой.

4. Если $\rho \in L_p(D)$, $p \geq 1$, то Φ есть обобщенное решение уравнения Пуассона $\nabla^2 \Phi = (m-2) |S_C| \rho(x)$.

Описание свойств потенциалов простого слоя $V(x)$ и двойного слоя $W(x)$ требует введения понятия поверхности Ляпунова. Поверхностью Ляпунова принято называть такую поверхность, которая в каждой своей точке имеет определенную нормаль и для которой существуют такие постоянные $d > 0$, $a > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, что если x — произвольная точка на S , то сфера $S_d(x)$, называемая сферой Ляпунова и имеющая радиус d с центром в x , вырезает из S участок $S(x)$, который в местной системе координат $(\xi_1, \dots, \xi_m)$, связанной с точкой x , может быть задан уравнением $\xi_m = f(\xi')$. Штрихом здесь отмечена проекция данной точки на плоскости, касательной к S в точке x , т. е. на плоскости $\xi_m = 0$. Если ξ и ζ — две точки участка $S(x)$, а l — произвольное направление в плоскости $\xi_m = 0$, то

$$\left| \frac{\partial f(\xi')}{\partial l} - \frac{\partial f(\zeta')}{\partial l} \right| \leq a \left[\sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{\alpha/2}.$$

Потенциал простого слоя $V(x)$ непрерывен во всем пространстве E_m , если S — замкнутая поверхность Ляпунова, а плотность $\mu(\xi)$ измерима и ограничена. Нормальная производная потенциала

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = (m-2) \int_S \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} d\xi S, \quad (3.4.2)$$

так как $\partial r^{2-m} / \partial n = (m-2) r^{1-m} \cos(r, n)$, причем, если $\mu(\xi)$ измерима и ограничена ($|\mu(\xi)| \leq M = \text{const}$), то интеграл (3.4.2) сходится. Значение интеграла (3.4.2) при $x \in S$ называется *прямым значением* нормальной производной потенциала простого слоя и обозначается $\overline{\partial V(x)} / \partial n$. Предельные значения (если они существуют) нормальной производной $\partial V(x) / \partial n$, когда $x \rightarrow x_0 \in S$ изнутри и извне S , обозначим соответственно через $\partial V(x_0) / \partial n_i$ и $\partial V(x_0) / \partial n_l$. При этом можно утверждать, что если S — замкнутая поверхность Ляпунова, а плотность $\mu(\xi)$ непрерывна на S , то на поверхности S существуют равномерные пределы нормальных производных потенциала $V(x)$ как изнутри, так и извне S , причем предельные значения нормальной производной потенциала $V(x)$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} &= \frac{(m-2) |S_C|}{2} \mu(x_0) + \frac{\partial \overline{V(x_0)}}{\partial n}; \\ \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_l} &= - \frac{(m-2) |S_C|}{2} \mu(x_0) + \frac{\partial \overline{V(x_0)}}{\partial n}. \end{aligned}$$

Потенциал двойного слоя $W(x)$ является гармонической функцией как внутри, так и вне поверхности S . Значение потенциала $W(x)$ при $x \in S$ (на поверхности) называется *прямым значением* потенциала, для которого справедливо утверждение: если S — замкнутая поверхность Ляпунова и плотность $v(\xi)$ непрерывна на S , то прямое значение потенциала $W(x)$ существует и непрерывно на S .

В частном случае, когда $v(\xi) = 1$, потенциал двойного слоя принимает вид

$$W_0(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S$$

и называется *интегралом Гаусса*, значения которого можно вычислить по формулам

$$W_0(x) = \begin{cases} -(m-2)|S_C| = \\ = -2(m-2)\pi^{m/2}/S(m/2) & \text{для } x \text{ внутри } S, \\ 0 & \text{для } x \text{ вне } S, \\ -(m-2)|S_C|/2 = \\ = -(m-2)\pi^{m/2}/S(m/2) & \text{для } x \in S, \end{cases}$$

если поверхность S является замкнутой поверхностью Ляпунова.

В общем случае потенциал $W(x)$ терпит разрыв, когда точка x пересекает поверхность S , однако при довольно широких условиях существуют пределы значений потенциала $W(x)$, когда точка x стремится к произвольной точке $x_0 \in S$ либо изнутри, либо извне S . Предельные значения потенциала двойного слоя в точке $x_0 \in S$, когда $x \rightarrow x_0$ изнутри и извне S , обозначим соответственно через $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$. Прямое значение этого потенциала в точке x_0 обозначим через $\overline{W}(x_0)$. Для потенциала $W(x)$ при $x_0 \in S$ справедливы предельные соотношения

$$W_i(x_0) = -0,5(m-2)|S_C|v(x_0) + \overline{W}(x_0); \quad (3.4.3)$$

$$W_e(x_0) = 0,5(m-2)|S_C|v(x_0) + \overline{W}(x_0),$$

если S — замкнутая поверхность Ляпунова и $v(\xi)$ непрерывна на S . При этих условиях потенциал $W(x)$ равномерно стремится к своим предельным значениям как изнутри, так и извне поверхности S .

Следствием формул (3.4.3) будет соотношение

$$W_i(x_0) - W_e(x_0) = -(m-2)|S_C|v(x_0),$$

связывающее плотность $v(x_0)$ потенциала $W(x)$ с его предельными значениями.

Пользуясь потенциалами и их свойствами, можно построить интегральные уравнения теории потенциала. С этой целью обратимся к краевым задачам для уравнения Лапласа $\nabla^2 u = 0$, имеющим следующую формулировку: найти функцию $u(x)$, гармоническую во внутренней D или внешней D' области и удовлетворяющую либо условию задачи Дирихле $u|_S = u_S(x)$, либо условию задачи Неймана $\partial u / \partial n|_S = v_S(x)$, где функции $u_S(x)$ и $v_S(x)$ непрерывны на поверхности S . Решение задач Дирихле (внутренней D_i и внешней D_e) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_S v(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S,$$

а решение задач Неймана (внутренней N_i и внешней N_e) — в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S,$$

требуя при этом, чтобы искомые плотности $v(\xi)$ и $\mu(\xi)$ были непрерывны на S . При таком представлении решений, получив функции, гармонические в соответствующей области, остается выполнить только граничные условия. В результате для каждой краевой задачи имеем свое интегральное уравнение:

$$v(x) - \frac{2}{(m-2)|S_C|} \int_S v(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S = \frac{2}{(m-2)|S_C|} u_S(x) -$$

для (D_i) ;

$$v(x) + \frac{2}{(m-2)|S_C|} \int_S v(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S = \frac{2}{(m-2)|S_C|} u_S(x) -$$

для (D_e) ;

(3.4.4)

$$\mu(x) + \frac{2}{(m-2)|S_C|} \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S = \frac{2}{(m-2)|S_C|} v_S(x) -$$

для (N_i) ;

$$\mu(x) - \frac{2}{(m-2)|S_C|} \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi S = - \frac{2}{(m-2)|S_C|} v_S(x) -$$

для (N_e) ,

где $x \in S$.

Уравнения (3.4.4) обладают рядом свойств:

1. Имеют слабую особенность.

2. Ядра $\partial r^{2-m}/\partial n$ задач Дирихле и ядра $\partial r^{2-m}/\partial n$ задач Неймана получаются одно из другого перестановкой точек x и ξ . Так как ядра вещественные, то они сопряженные, а потому первое и четвертое, а также второе и третье уравнения системы (3.4.4) — попарно сопряженные.

3. Любое суммируемое с квадратом решение каждого из уравнений (3.4.4) непрерывно на S .

Для первой пары сопряженных уравнений имеют место следующие два утверждения:

1. Если S — поверхность Ляпунова, то внутренняя задача Дирихле для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных условиях, а решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.

2. Если S — поверхность Ляпунова, то внешняя задача Неймана для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных условиях, а решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

Для полупространства $x_m > 0$ решение задачи Дирихле определяется формулой

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)|S_C|} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_s(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi_1 \dots d\xi_{m-1},$$

а решение задачи Неймана — формулой

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)|S_C|} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} v_s(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi_1 \dots d\xi_{m-1}.$$

Для второй пары сопряженных уравнений имеем также два утверждения:

1. Если S — поверхность Ляпунова, функция $v_s \in C(S)$ и выполнено условие $\int_S v_s(x) d_x S = 0$, то решение внутренней задачи Неймана существует в виде потенциала простого слоя с непрерывной плотностью $\mu(\xi)$.

2. Если условие $\int_S u_s(x) \mu_0(x) d_x S = 0$ выполнено, то второе интегральное уравнение (3.4.4) разрешимо, а решение внешней задачи Дирихле существует в виде потенциала двойного слоя. Если же указанное условие нарушено, то решение второго интегрального уравнения не существует, и решение внешней задачи Дирихле не может быть представлено в форме потенциала двойного слоя.

Применим изложенные положения теории потенциала к механике жидкости и газа. Прежде всего определим сингулярное решение линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса для несжимаемой вязкой жидкости:

$$\nu \nabla^2 v_j^{(k)} - \nabla_j (p/\rho)^{(k)} = A \delta_j^{(k)} (x-y); \quad g^{j\beta} \nabla_\beta v_j^{(k)} = 0, \quad (3.4.5)$$

где $A = F/\rho = 1$ для единичной сосредоточенной силы, причем все операции дифференцирования проводятся по координатам x_j переменной точки x , а точка y играет роль параметра, в ней приложена сосредоточенная единичная сила, направленная вдоль k -й координатной оси.

К системе уравнений (3.4.5) добавим требование на бесконечности: $v_j^{(k)} \rightarrow 0$ и $(p/\rho)^{(k)} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Определение неизвестных $v_j^{(k)}$ и $(p/\rho)^{(k)}$ основано на использовании преобразования Фурье, характеризуемого соотношениями

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\alpha(x-y)} d\alpha dy;$$

$$\nabla^2 [1/4\pi(x-y)] = -\delta(x-y);$$

$$\nabla^2 \nabla^2 (|x-y|/8\pi) = -\delta(x-y),$$

из которых следует

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-y)} d\alpha;$$

$$\frac{1}{4\pi(x-y)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(x-y)}}{\alpha^2} d\alpha;$$

$$\frac{|x-y|}{8\pi} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(x-y)}}{\alpha^4} d\alpha,$$

$$\text{где } \alpha^2 = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^2; \quad \alpha x = \sum_{k=1}^3 \alpha_k x^k = \alpha_k x^k.$$

Применив к уравнениям (3.4.5) преобразование Фурье, получим

$$-\nu \alpha^2 \tilde{v}_j^{(k)} - i\alpha_j (p/\rho)^{(k)} = g_j^k / (2\pi)^{3/2}; \quad \alpha_j g^{j\beta} \tilde{v}_\beta^{(k)} = 0.$$

Решая эти уравнения, находим изображения

$$\tilde{v}_j^{(k)} = \frac{1}{\nu (2\pi)^{3/2} \alpha^2} \left(-g_j^k + \frac{\alpha_j \alpha^k}{\alpha^2} \right); \quad \left(\frac{p}{\rho} \right)^{(k)} = \frac{i\alpha^k}{(2\pi)^{3/2} \alpha^2},$$

которым соответствуют оригиналы

$$\begin{aligned}
v_j^{(k)}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_j^{(k)}(\alpha) e^{i\alpha(x-y)} d\alpha = \\
&= \frac{1}{v} \left(-\frac{g_j^k}{4\pi|x-y|} + \nabla_j g^{k\beta} \nabla_\beta \frac{|x-y|}{8\pi} \right); \\
\left(\frac{p}{\rho}\right)^{(k)}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha^k}{\alpha^2} e^{i\alpha(x-y)} d\alpha = g^{k\beta} \nabla_\beta \frac{1}{4\pi|x-y|}.
\end{aligned}$$

Из этих представлений следует искомое сингулярное решение уравнений Навье—Стокса

$$\begin{aligned}
v_j^{(k)} &= -\frac{A}{8\pi v} \left[\frac{g_j^k}{|x-y|} + \frac{g_{j\beta}(x^\beta - y^\beta)(x^k - y^k)}{|x-y|^3} \right]; \\
\left(\frac{p}{\rho}\right)^{(k)} &= -\frac{A}{4\pi} \frac{x^k - y^k}{|x-y|^3},
\end{aligned} \quad (3.4.6)$$

которое указывает, что по параметру y функции $v_j^{(k)}$ и $(p/\rho)^{(k)}$ удовлетворяют сопряженной системе уравнений (3.4.5).

По аналогии с теорией потенциала, определение гидродинамических потенциалов основано на использовании формул Грина, соответствующих уравнениям Навье—Стокса. При выводе этих формул воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}
\nabla_k [\sigma^{kj}(u) v_j / \rho] &= 0,5 v g^{j\beta} g^{k\delta} (\nabla_\beta u_\delta + \nabla_\delta u_\beta) (\nabla_j v_k - \nabla_k v_j) + \\
&+ [v g^{j\beta} \nabla^2 u_\beta - g^{j\beta} \nabla_\beta (p/\rho)] v_j,
\end{aligned}$$

где $\sigma^{jk}(u) = -g^{jk}p + \mu g^{j\beta} g^{k\delta} (\nabla_\beta u_\delta + \nabla_\delta u_\beta)$.

Интегрируя тождество по объему области D , получаем первую формулу Грина

$$\begin{aligned}
\int_D [v \nabla^2 u_\beta - \nabla_\beta (p/\rho)] g^{j\beta} v_j dV &= - \int_D 0,5 v g^{j\beta} g^{k\delta} (\nabla_\beta u_\delta + \nabla_\delta u_\beta) \times \\
&\times (\nabla_j v_k - \nabla_k v_j) dV + \int_S [\sigma^{jk}(u)/\rho] v_j n_k dS,
\end{aligned} \quad (3.4.7)$$

где n_k — компоненты внешней нормали к поверхности S области D .

Меняя местами u_j и v_j и вводя наряду с p любую гладкую функцию q с размерностью давления, получаем вторую формулу Грина

$$\begin{aligned}
\int_D \{ [v \nabla^2 v_\beta - \nabla_\beta (q/\rho)] g^{j\beta} u_j - v_\beta g^{j\beta} [v \nabla^2 u_j + \nabla_j (p/\rho)] \} dV = \\
= \int_S [\sigma^{jk}(v) u_j n_k / \rho - \sigma^{jk}(u) v_j n_k / \rho] dS,
\end{aligned} \quad (3.4.8)$$

где $\sigma^{jk}(u) = g^{jk}p + \mu g^{j\beta} g^{k\delta} (\nabla_\beta u_\delta + \nabla_\delta u_\beta)$.

С помощью формулы (3.4.8) и основного сингулярного решения (3.4.6) можно написать соотношение

$$v_j(x) = \int_D v_j^{(k)}(x, y) F_k(y) dV + \int_S \frac{\sigma'^{i\beta}(v_j^{(k)}(x, y))_y}{\rho} v_i n_\beta dS - \\ - \int_S v_j^{(k)}(x, y) \frac{\sigma_{k\beta}(v)}{\rho} n^\beta dS \quad (3.4.9)$$

для любого $x \in D$, причем индекс y при $\sigma'^{i\beta}(v_j^{(k)}(x, y))_y$ показывает, что дифференцирование в $\sigma'^{i\beta}$ ведется по переменной y .

Давление q , соответствующее v_j , можно получить из уравнений Навье—Стокса вида

$$\nu \nabla^2 v_j - \nabla_j (q/\rho) = F_j/\rho; \quad g^{i\beta} \nabla_\beta v_j = 0,$$

если воспользоваться соотношением (3.4.9) и тождеством

$$\nabla_x^2 \frac{\sigma'_{ij}(v_j^{(k)}(x, y))_y}{\rho} = \nabla_x^2 \left[g_{ij} \left(\frac{p(x, y)}{\rho} \right)^{(k)} - \nu (\nabla_i v_j^{(k)} + \nabla_j v_i^{(k)}) \right] = \\ = -\nabla_i \nabla_j (p/\rho)^{(k)} - \nabla_j \nabla_i (p/\rho)^{(k)} = -2\nabla_i \nabla_j (p/\rho)^{(k)}.$$

В результате имеем

$$\frac{q(x)}{\rho} = \int_D \left(\frac{p(x, y)}{\rho} \right)^{(k)} F_k(y) dV - \int_S \left(\frac{p(x, y)}{\rho} \right)^{(k)} \frac{\sigma_{k\beta}(v_j)}{\rho} n^\beta dS - \\ - 2\nu \int_S \nabla_\beta \left(\frac{p(x, y)}{\rho} \right)^{(k)} v_k n^\beta dS. \quad (3.4.10)$$

Формулы (3.4.9) и (3.4.10) указывают на возможность введения *гидродинамических объемных потенциалов*

$$U_j(x) = \int_D v_j^{(k)}(x, y) F_k(y) dV; \quad \Phi(x) = \int_D [p(x, y)/\rho]^{(k)} F_k(y) dV,$$

которые в силу (3.4.5) удовлетворяют линеаризованным уравнениям Навье—Стокса

$$\nu \nabla^2 U_j - \nabla_j \Phi = F_j/\rho; \quad g^{i\beta} \nabla_\beta U_j = 0,$$

так как тип особенностей ядер $v_j^{(k)}$ и $(p/\rho)^{(k)}$ такой же, как у сингулярного решения уравнения Лапласа $1/4\pi(x-y)$ и его первых производных соответственно. В этом случае справедливы два утверждения.

1. Если F_j удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ ($0 < \lambda < 1$) и D ограничена, то U_j и Φ , а также $\nabla_k U_j$ непрерывны во всем пространстве, а $\nabla_i \nabla_k U_j$ и $\nabla_i \Phi$ принадлежат классу $C_{0,\lambda}(D')$ в любой области $D' \subset D$, причем если поверх-

ность S области D есть поверхность Ляпунова с показателем λ , то U_j и Φ обладают указанными свойствами во всей области D .

2. Если F_j квадратично суммируемы по конечной области D , то U_j и Φ имеют соответственно обобщенные производные по x^k до второго и первого порядков включительно, квадратично суммируемые по любой конечной области D_1 , и для них справедливы неравенства

$$\|U_j\|_{W_2^2(D_1)} \leq C \|F_j\|_{L_2(D)}; \quad \|\Phi\|_{W_2^1(D_1)} \leq C \|F_j\|_{L_2(D)}.$$

Формулы (3.4.9) и (3.4.10) позволяют также ввести *гидродинамические потенциалы простого слоя* с плотностью $\psi_k(\eta)$.

$$\begin{aligned} V_j(x, \psi_k) &= - \int_S v_j^{(k)}(x, \eta) \psi_k(\eta) d\eta S = \\ &= \frac{1}{8\pi\nu} \int_S \left[\frac{g_{j^k}}{|x-\eta|} + \frac{g_{j\beta}(x^\beta - \eta^\beta) g_{\delta^k}(x^\delta - \eta^\delta)}{|x-\eta|^3} \right] \psi_k(\eta) d\eta S; \\ Q(x, \psi_l) &= - \int_S \left(\frac{p}{\rho} \right)^{(k)}(x, \eta) \psi_k(\eta) d\eta S = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{x^k - \eta^k}{|x-\eta|^3} \psi_k(\eta) d\eta S, \end{aligned}$$

а также *гидродинамические потенциалы двойного слоя* с плотностью $\varphi_k(\eta)$

$$\begin{aligned} W^{(k)}(x, \varphi_l) &= \int_S \frac{\sigma'^{l\beta} [v_j^{(k)}(x, \eta)]_\eta}{\rho} \varphi_l(\eta) n_\beta(\eta) d\eta S = \\ &= - \frac{3}{4} \int_S \frac{(x^k - \eta^k)(x^\beta - \eta^\beta)(x^\delta - \eta^\delta)}{|x-\eta|^5} \varphi_\beta(\eta) n_\delta(\eta) d\eta S; \\ \Pi(x, \varphi_l) &= - 2\nu \nabla_j \int_S \left(\frac{p}{\rho} \right)^{(k)}(x, \eta) \varphi_k(\eta) n^j(\eta) d\eta S = \\ &= \frac{\nu}{2\pi} \nabla_j \int_S \frac{x^k - \eta^k}{|x-\eta|^3} \varphi_k(\eta) n^j(\eta) d\eta S. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} K^{k\beta}(x, \eta) &= - \frac{3}{4\pi} \frac{(x^k - \eta^k)(x^\beta - \eta^\beta)(x^\delta - \eta^\delta)}{|x-\eta|^5} n_\delta(\eta); \\ K_j(x, \eta) &= \frac{\nu}{2\pi} \nabla_j \frac{x^k - \eta^k}{|x-\eta|^3} n_k(\eta), \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

то гидродинамические потенциалы двойного слоя принимают вид

$$\begin{aligned} W^{(k)}(x, \varphi_l) &= \int_S K^{k\beta}(x, \eta) \varphi_\beta(\eta) d\eta S; \\ \Pi(x, \varphi_l) &= \int_S K_j(x, \eta) \varphi^j(\eta) d\eta S. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Формулу (3.4.9) в этом случае можно представить следующим образом:

$$v_i(x) = U_i(x) + W_i(x, v_i) + V_i(x, \sigma_{i\beta} n^\beta / \rho).$$

Потенциалы простого V_i и двойного W_i слоя суть аналитические функции вне S , удовлетворяющие однородной системе уравнений Навье—Стокса. Для потенциала двойного слоя W_i с постоянной плотностью $\varphi_i = C_i$ справедливы равенства Гаусса

$$W_i(x, C_i) = \begin{cases} C_i & \text{при } x \in D; \\ 0,5C_i & \text{при } x \in S; \\ 0 & \text{при } x \in \bar{D}, \end{cases}$$

которые дают возможность установить значения скачков на S для $W_i(x, \varphi_i)$ при любой непрерывной плотности φ_i , т. е.

$$\begin{aligned} W_i(\xi)_{(i)} &= 0,5\varphi_i(\xi) + \overline{W_i(\xi)}; & W_i(\xi)_{(i)} &= \\ &= -0,5\varphi_i(\xi) + \overline{W_i(\xi)}, \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

где $W_i(\xi)_{(i)}$ и $\overline{W_i(\xi)}$ — соответственно предельные значения $\overline{W_i(\xi)}$ на S изнутри и извне области D ; $\overline{W_i(\xi)}$ — прямое значение $W_i(x, \varphi_i)$ на S , причем все значения существуют и являются непрерывными функциями на S , если φ_i — непрерывны, а S — поверхность Ляпунова с показателем λ .

Ядро потенциала V_i имеет слабую особенность вида $1/|x-\eta|$, а потому потенциал V_i непрерывен во всем пространстве, включая поверхность S , если плотность $\psi_i(\eta)$ непрерывна, тогда как потенциал давления Q имеет скачок первого рода. Рассмотрим поведение потенциала простого слоя $V_i(x, \psi_i)$ на поверхности S при непрерывной плотности ψ_i . Составим для него тензор напряжений

$$\frac{\sigma^{\beta\delta}(V_i)}{\rho} = -\frac{3}{4} \int_S \frac{(x^\beta - \eta^\beta)(x^\delta - \eta^\delta)(x^k - \eta^k)}{|x - \eta|^5} \psi_k(\eta) d\eta S. \quad (3.4.14)$$

При приближении x к точке ξ по нормали к S функции $\sigma^{\beta\delta}(V_i)/\rho$ имеют вполне определенные предельные значения изнутри и извне поверхности S , которые обозначим соответственно $[\sigma^{\beta\delta}(V_i)/\rho]_{(i)}$ и $[\sigma^{\beta\delta}(V_i)/\rho]_{(e)}$. При этом на S в точке ξ существует прямое значение $\sigma^{\beta\delta}(V_i)/\rho$, которое связано с предельными значениями соотношениями

$$\begin{aligned} [\sigma^{\beta\delta}(V_i)/\rho]_{(i)} n^\delta &= 0,5\psi^\beta(\xi) + \overline{\sigma^{\beta\delta}(V_i)} n_\delta / \rho; \\ [\sigma^{\beta\delta}(V_i)/\rho]_{(e)} n_\delta &= -0,5\psi^\beta(\xi) + \overline{\sigma^{\beta\delta}(V_i)} n_\delta / \rho. \end{aligned}$$

Подстановка выражений (3.4.12) в соотношения (3.4.13) приводит к первой паре интегральных уравнений

$$W_j(\xi)_{(1)} = 0,5\varphi_j(\xi) - \int_S K_{jk}(\xi, \eta) \varphi^{(k)}(\eta) d\eta S; \quad (3.4.15)$$

$$W_j(\xi)_{(1)} = -0,5\varphi_j(\xi) + \int_S K_{jk}(\xi, \eta) \varphi^{(k)}(\eta) d\eta S.$$

а подстановка выражений (3.4.14) в (3.4.15) с учетом (3.4.11) приводит ко второй паре интегральных уравнений

$$\sigma^{\beta\delta}(V_j/\rho)_{(1)} n_\delta = 0,5\psi^\beta(\xi) - \int_S K^{\beta\delta}(\eta, \xi) \psi_\delta(\eta) d\eta S; \quad (3.4.16)$$

$$[\sigma^{\beta\delta}(V_j/\rho)_{(1)}] n_\delta = -0,5\psi^\beta(\xi) - \int_S K^{\beta\delta}(\eta, \xi) \psi_\delta(\eta) d\eta S$$

механики вязкой несжимаемой жидкости, причем интегральные уравнения (3.4.15) и (3.4.16) — попарно сопряженные.

С целью установления условий разрешимости интегральных уравнений механики вязкой несжимаемой жидкости рассмотрим две краевые задачи для уравнений Навье—Стокса внутри и вне S :

$$v \nabla^2 v_j - \nabla_j(p/\rho) = 0; \quad \nabla_j v^j = 0.$$

В первой задаче граничные условия заданы в виде $v_j(S) = v_{js} = a_j$, а во второй — в виде $\sigma_{jk}(S) n^k/\rho = b_j$, причем для внешней задачи граничные условия дополнены условиями $v_j(x) \rightarrow 0$ и $p(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Будем считать, что при больших $|x|$ функция v_j ведет себя как $1/|x|$, ее производные — как соответствующие производные от $1/|x|$, а $p(x)$ — как $1/|x|^2$. При указанных предположениях относительно v_j и p первая формула Грина (3.4.7), примененная к $u_j = v_j$ в области D_i , дает интеграл

$$\int_{D_i} 0,5 v g^{j\beta} g^{k\delta} (\nabla_\beta v_\delta + \nabla_\delta v_\beta) (\nabla_j v_k + \nabla_k v_j) dV =$$

$$= \int_S [\sigma^{jk}(v)/\rho] v_j n_k dS,$$

а в области D_i —

$$\int_{D_i} 0,5 v g^{j\beta} g^{k\delta} (\nabla_\beta v_\delta + \nabla_\delta v_\beta) (\nabla_j v_k + \nabla_k v_j) dV =$$

$$= - \int_S [\sigma^{jk}(v)/\rho] v_j n_k dS, \quad (3.4.1)$$

причем из формулы (3.4.17) видно, что краевые задачи в области D_i имеют не более одного решения.

Будем искать решения первой краевой задачи в виде гидродинамического потенциала двойного слоя, а второй — в виде гидродинамического потенциала простого слоя. При этом для первой краевой задачи в области D_i поле a_j не может быть произвольным, так как

$$\int_{D_i} \nabla_j v^j dV = \int_S v^j n_j dS = 0.$$

Первая краевая задача в D_i однозначно разрешима на S при непрерывном поле a_j , удовлетворяющем условию

$$\int_S a_j n^j dS = 0,$$

причем плотность φ_j потенциала подчинена уравнению

$$a_j(\xi) = 0,5\varphi_j(\xi) + \int_S K_{jk}(\xi, \eta) \varphi^k(\eta) d\eta S.$$

Первая краевая задача в области D_i однозначно разрешима при любом непрерывном поле a_j , причем плотность φ_j потенциала подчинена уравнению

$$a_j(\xi) = -0,5\varphi_j(\xi) + \int_S K_{jk}(\xi, \eta) \varphi^k(\eta) d\eta S,$$

которое разрешимо только при условии

$$\int_S a_j \psi'_{(k)} dS = 0, \quad (3.4.18)$$

где $k = 1, 2, \dots, 6$; $\psi'_{(k)}(\xi)$ — линейно независимые решения уравнения

$$-0,5\psi_j(\xi) + \int_S K_{jk}(\eta, \xi) \psi^k(\eta) d\eta S = 0,$$

Следовательно, решение внешней первой краевой задачи существует только при тех граничных условиях (значениях) $a_j(\xi)$, которые удовлетворяют условиям (3.4.18).

В общем случае для любых $a_j(\xi)$ решение задачи можно строить в виде

$$v_j(x) = W_j(x, \varphi_j) + \sum_{m=1}^6 C_m V_j(x, \psi_j^m),$$

тогда для φ_j получим систему уравнений

$$a_j(\xi) - \sum_{m=1}^6 C_m V_j(\xi, \psi_j^m) = -0,5\varphi_j(\xi) + \int_S K_{jk}(\xi, \eta) \varphi^k(\eta) d\eta S, \quad (3.4.19)$$

причем постоянные C_m должны быть такими, чтобы

$$\int_S \left[a_j(\xi) - \sum_{m=1}^6 C_m V_j(\xi, \psi_j^m) \right] \psi'_{(k)} dS = 0.$$

Тогда система уравнений (3.4.19) однозначно разрешима при любых a_j , следовательно, первая краевая задача для D_l однозначно разрешима при любом векторе a_j . Условия разрешимости краевых задач обеспечивают полную разрешимость интегральных уравнений механики вязкой несжимаемой жидкости.

3.5. Интегральные уравнения теории упругости и термоупругости

Решение разрешающих уравнений теории упругости и термоупругости в конечном виде с помощью аналитических методов, изложенных ранее, не всегда возможно, а если возможно, то, как правило, мало эффективно. Эффективное решение задач теории упругости и термоупругости, основанное на широком использовании ЭВМ, можно получить с помощью интегральных уравнений.

Рассмотрим прежде всего упругое пространство, в точке y которого приложена единичная сосредоточенная сила $\delta_k^i(x-y)$, направленная вдоль оси x^i . Ей соответствуют перемещения u_k , определяемые формулой Сомилианы

$$u_k^{(i)} = \frac{m\delta_k^{(i)}(x-y)}{8\pi G(m+1)} \left[g_{jk} \frac{(x^j-y^j)(x^i-y^i)}{r^3} + \frac{m+2}{m} \frac{1}{r} g_{ki} \right],$$

где $r^2 = g_{jk}(x^j-y^j)(x^k-y^k)$.

Приложим в точке y силу F_k ($k=1, 2, 3$), тогда в произвольной точке x пространства вектор перемещений $u(x)$ имеет компоненты

$$u_i(x) = \Gamma_{ij}(xy) F^j(y). \quad (3.5.1)$$

Здесь

$$\Gamma_{ij}(xy) = \frac{1}{2\pi G(m+1)} \left[m \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial r}{\partial x^j} + (m+1) g_{ij} \right] \frac{1}{r} \quad (3.5.2)$$

— элементы матрицы Кельвина—Сомилианы $((\Gamma_{ij}(xy)))$.

Допустим, что в пространстве на некоторой замкнутой поверхности Ляпунова S заданы поверхностные силы $p_{(n)}^k(y)$,

удовлетворяющие условиям Гельдера—Липшица, тогда суммарные перемещения во всем пространстве равны

$$u_j(x) = \int_S \Gamma_{jk}(xy) p_{(n)}^k(y) d_y S$$

и представляют собой непрерывные функции, удовлетворяющие уравнениям Ляме во всем пространстве, исключая поверхность S .

Интеграл

$$V_j(x) = \int_S \Gamma_{jk}(xy) \psi^k(y) d_y S \quad (3.5.3)$$

называется обобщенным *упругим потенциалом простого слоя*, который может быть определен в точках поверхности, причем его предельные значения изнутри и извне совпадают между собой и равны прямому значению. Следовательно, потенциал $V_j(x)$ представляет собой вектор-функцию, непрерывную во всем пространстве с особенностью на бесконечности типа $1/|x|$.

Проведем в точке x косую площадку с нормалью n_j и определим вектор напряжений $\sigma^{(n)}$, действующий на эту площадку. Введем оператор напряжений $T(\nabla n)$ с компонентами

$$T_{jk}(\nabla n) = G[(m-1)n_j \nabla_k + n_k \nabla_j + g_{jk} \partial/\partial n],$$

тогда компоненты вектора напряжений

$$\sigma_j^{n} = T_{jk}(\nabla n) u^k = T_{jk}(\nabla n) g^{ka} u_a.$$

Подставив сюда выражение (3.5.1), получим

$$\sigma_j^{(n)}(x) = \Gamma_{(1)j\beta}(xy) F^\beta(y),$$

где $\Gamma_{(1)j\beta}(xy) = T_{jk}(\nabla n) g^{ka} \Gamma_{a\beta}(xy)$.

Матрица $\Gamma_i(xy) = ((\Gamma_{(1)j\beta}(xy)))$ есть результат действия оператора напряжений $T(\nabla n)$ на матрицу $\Gamma(xy) = ((\Gamma_{jk}(xy)))$; ее элементы имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{(1)j\beta}(xy) T_{jk}(\nabla n) g^{ka} \Gamma_{a\beta}(xy) = \\ = \frac{1}{2\pi(m+1)} \left\{ \left(g_{j\beta} + 3m \frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial r}{\partial x^\beta} \right) n^k \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ \left. + \left[n_\beta(y) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{r} \right) - n_j(y) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Рассмотрим точки, расположенные в непосредственной близости к поверхности S так, что в каждой из них можно однозначно определить нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности. Построим вектор напряжений, порождаемый потенциалом V_j и нормалью n_j :

$$\sigma_j^{(n)}(x) = T_{jk}(\nabla n)_\eta V^k(x) = \int_S \Gamma_{(1)}(xy) \psi^k(y) d_y S;$$

при этом точка $\eta \in S$, в которой нормаль попадает в точку x . Для вектора напряжений выполним предельный переход к точкам поверхности изнутри и извне соответственно:

$$\lim_{x \rightarrow \eta} T_{jk}(\nabla n) V^k(x) = \lim \int_S \Gamma_{(1)jk}(xy) \psi^k(y) d_y S = T_{jk}^{(i)}(\nabla n) V^k(\eta);$$

$$\lim_{x \rightarrow \eta} T_{jk}(\nabla n) V^k(x) = \lim \int_S \Gamma_{(1)jk}(xy) \psi^k(y) d_y S = T_{jk}^{(l)}(\nabla n) V^k(\eta).$$

Здесь прямое значение интеграла $\int_S \Gamma_{(1)jk}(xy) \psi^k(y) d_y S$ нельзя считать несобственным, поскольку в элементах (3.5.4) последние слагаемые имеют особенность второго порядка, поэтому его следует рассматривать как главное значение.

Введем матрицу $\Gamma_2(xy) = ((\Gamma_{(2)j\beta}(xy)))$, сопряженную с матрицей $\Gamma_1(xy) = ((\Gamma_{(1)j\beta}(xy)))$. Элементы матриц связаны соотношениями $\Gamma_{(2)j\beta}(xy) = \Gamma_{(1)\beta j}(yx)$, откуда следуют выражения элементов $\Gamma_{(2)j\beta}(xy)$. Каждый столбец матрицы $\Gamma_2(xy)$ удовлетворяет уравнениям Ляме по переменным x . Этим же уравнениям за исключением точки y удовлетворяет произведение $\Gamma_2(xy) \Phi(y)$, которое можно рассматривать как поле перемещений в пространстве, порожденное сосредоточенным моментом $\Phi(y)$, приложенным в точке y плоскости с нормалью n . Интеграл

$$W_j(x) = \int_S \Gamma_{(1)j\beta}(xy) \Phi^\beta(y) d_y S, \quad (3.5.5)$$

где S — поверхность Ляпунова, называется обобщенным *упругим потенциалом двойного слоя*, прямое значение которого является сингулярным интегралом.

Опираясь на теорему взаимности Бетти и пользуясь представлениями элементов введенных матриц $\Gamma(xy)$ и $\Gamma_2(xy)$, для точек $x \in D$ области с поверхностью S и для точек $x \in D_{(l)} = E_m \setminus \bar{D}$ получим соотношения

$$\begin{aligned} & - \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) u^\beta(y) d_y S + \int_S \Gamma_{jk}(xy) g^{ka} T_{a\beta}(\nabla n) u^\beta(y) d_y S = \\ & = \begin{cases} 2u_j(x) & \text{при } x \in D, \\ 0 & \text{при } x \in D_l; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) u^\beta(y) dy S - \int_S \Gamma_{jk}(xy) g^{k\alpha} T_{\alpha\beta}(\nabla n) u^\beta(y) dy S = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in D, \\ 2u_j(x) & \text{при } x \in D_{(1)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь предельные свойства для перемещений, порождаемых потенциалом двойного слоя, и напряжений, порождаемых потенциалом простого слоя. В области D зададим постоянную векторную величину с компонентами u_j^0 , которые будем рассматривать как перемещения всей области D . Тогда интеграл $\int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) u_0^\beta dy S$ есть интеграл Гаусса, для которого имеем

$$\int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) u_0^\beta dy S = \begin{cases} -2u_j^0 & \text{при } x \in D, \\ 0 & \text{при } x \in D_{(1)}, \\ -u_j^0 & \text{при } x \in S. \end{cases}$$

Потенциал $W_j(x)$ представим в виде

$$\begin{aligned} W_j(x) &= \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) \psi^\beta(y) dy S = \\ &= \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) [\varphi^\beta(y) - \varphi^\beta(\eta)] dy S + \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) \varphi^\beta(\eta) dy S, \quad (3.5.7) \end{aligned}$$

где η — точка поверхности S , в окрестности которой изучают предельные свойства.

Пусть точка x стремится изнутри или извне к точке η , тогда первый интеграл (3.5.7) является равномерно сходящимся несобственным интегралом и представляет собой непрерывную функцию, если $\varphi^\beta(y)$ удовлетворяет условию Гельдера—Липшица (поведение второго интеграла уже изучено). В результате приходим к равенствам

$$\begin{aligned} W_j^{(i)}(\eta) - W_j^{(e)}(\eta) &= -2\varphi_j(\eta); \quad W_j^{(i)}(\eta) + W_j^{(e)}(\eta) = \\ &= 2\overline{W_j(\eta)}, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

откуда находим

$$W_j^{(i)}(\eta) = -\varphi_j(\eta) + \overline{W_j(\eta)}; \quad W_j^{(e)}(\eta) = \varphi_j(\eta) + \overline{W_j(\eta)},$$

где $\overline{W_j(\eta)}$ — прямое (сингулярное) значение потенциала $W_j(x)$.

Представим интеграл

$$T_{j\beta}(\nabla n) V^\beta(x) = \int_S \Gamma_{(1)j\beta}(xy) \psi^\beta(y) dy S$$

в виде

$$T_{j\beta}(\nabla n) V^{\beta}(x) = \int_S [\Gamma_{(1)j\beta}(xy) \psi^{\beta}(y) + \Gamma_{(2)j\beta} \varphi^{\beta}(\eta)] d_y S - \\ - \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(xy) \varphi^{\beta}(\eta) d_y S, \quad (3.5.9)$$

где η — некоторая точка поверхности S , в окрестности которой изучают предельные свойства.

Второй интеграл в правой части уравнения (3.5.9) подчинен соотношениям (3.5.8). Подынтегральное выражение первого интеграла (3.5.9) состоит из двух групп слагаемых. Слагаемые одной группы имеют особенность интегрируемого порядка, однако составляют такую комбинацию, что определяемый ими интеграл оказывается равномерно сходящимся, а потому непрерывным в точках поверхности. Другая группа состоит из слагаемых, имеющих особенность второго порядка, однако определяемый ими интеграл оказывается непрерывным в силу выполнения условия существования сингулярного интеграла. Следовательно, получены соотношения, которые указывают на существование соответствующих предельных значений:

$$[T_{j\beta}(\nabla n) V^{\beta}(\eta)]^{(1)} = \varphi_j(\eta) + \overline{T_{j\beta}(\nabla n)} V^{\beta}(\eta); \\ [T_{j\beta}(\nabla n) V^{\beta}(\eta)]^{(1)} = -\varphi_j(\eta) + \overline{T_{j\beta}(\nabla n)} V^{\beta}(\eta), \quad (3.5.10)$$

где $\overline{T_{j\beta}(\nabla n)} V^{\beta}(\eta)$ — прямое значение оператора напряжений от потенциала простого слоя.

Для предельных значений оператора напряжений от потенциала двойного слоя справедлива *теорема Ляпунова—Таубера*: если существуют предельные значения оператора напряжений от потенциала двойного слоя с одной стороны поверхности, то они существуют и с другой стороны этой поверхности. При этом имеет место равенство

$$[T_{j\beta}(\nabla n) W^{\beta}(x)]^{(1)} = [T_{j\beta}(\nabla n) W^{\beta}(x)]^{(2)}.$$

Объемный интеграл

$$U_j(x) = \int_B \Gamma_{j\beta}(xy) \rho^{\beta}(y) d_y V$$

называется обобщенным *объемным упругим потенциалом* с плотностью $\rho^{\beta}(y)$, причем функция $\rho^{\beta}(y)$ является ограниченной измеримой функцией и на бесконечности удовлетворяет условию $|\rho(y)| \leq C/|y|^3$.

Потенциал $U_j(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Ляме, правая часть которого равна удвоенной плотности

$$\nabla^2 U_j + m \nabla_j (\nabla_k U^k) = 2\rho_j,$$

при этом функция плотности должна быть гладкой.

Введенные потенциалы позволяют свести решение основных краевых задач теории упругости к интегральным уравнениям второго рода. Рассмотрим сначала первую краевую задачу теории упругости, когда граничные условия заданы в перемещениях. Пусть для упругого тела с областью D , ограниченной поверхностью S , требуется определить перемещения, предельные значения которых будут принимать заданные значения $u_{jS}(y)$.

Искомые перемещения $u_j(x)$ представим в виде обобщенного упругого потенциала двойного слоя (3.5.5). В этом случае, согласно соотношениям (3.5.8), имеем интегральные уравнения

$$\Phi_j(y) \pm \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(y\eta) \Phi^\beta(\eta) d\eta S = \mp u_{jS},$$

где верхний знак соответствует области $D_{(0)}$ (внешняя краевая задача), а нижний — области D (внутренняя краевая задача).

Вводя параметр $\lambda = \pm 1$, представим уравнения в единой форме интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\Phi_j(y) - \lambda \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(y\eta) \Phi^\beta(\eta) d\eta S = u_{jS}. \quad (3.5.11)$$

При решении второй краевой задачи теории упругости (на поверхности S граничные условия заданы в напряжениях $T_{j\beta}(\nabla n) u^\beta(y) = p_j^{(n)}(y)$) искомые перемещения $u_j(x)$ представим в виде обобщенного потенциала простого слоя (3.5.3), тогда, согласно (3.5.10), получим интегральные уравнения второго рода

$$\Psi_j(y) - \lambda \int_S \Gamma_{(1)}(y\eta) \Psi^\beta(\eta) d\eta S = p_j^{(n)}(y). \quad (3.5.12)$$

Пользуясь соотношениями (3.5.6) и осуществляя предельный переход к точкам поверхности, можно построить сингулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи, считая известным интеграл $\Phi_j(y)$ от граничных значений напряжений. Пользуясь соотношениями (3.5.8), приходим к уравнениям

$$u_j(y) + \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(y\eta) u^\beta(\eta) d\eta S = \Phi_j(y),$$

которые являются сингулярными интегральными уравнениями относительно перемещений на граничной поверхности. Вводя параметр λ , запишем их в единой форме

$$u_j(y) - \lambda \int_S \Gamma_{(2)j\beta}(y\eta) u^\beta(\eta) d\eta S = \Phi_j(y), \quad (3.5.13)$$

причем параметр $\lambda=1$ соответствует внешней, а $\lambda=-1$ — внутренней задаче. Индекс уравнений (3.5.13) равен нулю, следовательно, существует оператор, который преобразует их в эквивалентные регулярные интегральные уравнения второго рода. Поэтому к уравнениям (3.5.13) применимы альтернативы Фредгольма. Уравнения (3.5.13) тождественны уравнениям (3.5.11) первой краевой задачи (отличаются от них физическим смыслом искоемых функций и правыми частями уравнений).

Уравнения (3.5.11) и (3.5.12), а также (3.5.12) и (3.5.13) взаимно сопряжены (союзные уравнения). Для уравнений (3.5.12) и (3.5.13) значение параметра $\lambda=1$ не является собственным значением, а потому они разрешимы при произвольной правой части, причем получаемые решения являются единственными. Краевые задачи $I^{(i)}$ (первая внутренняя) и $II^{(i)}$ (вторая внешняя) имеют единственное решение при произвольно заданных правых частях уравнений.

При $\lambda=-1$ интегральные уравнения (3.5.11) — (3.5.13) имеют собственные функции, число которых равно шести. Обозначим их для уравнения (3.5.11) через $\varphi_{ij}^{(1)}$, для уравнения (3.5.12) через $\varphi_{ij}^{(2)}$, где $i=1, 2, \dots, 6$. Согласно альтернативе Фредгольма, необходимым и достаточным условием разрешимости интегральных уравнений, расположенных на спектре, является ортогональность правых частей и собственных функций союзных уравнений. Поскольку собственные функции уравнения (3.5.11) установлены, то условия разрешимости уравнения (3.5.12) следующие:

$$\int_S p_{(n)}^j(y) \varphi_{ji}^{(1)}(y) dS = 0.$$

Смысл этих условий сводится к равенству нулю главного вектора и главного момента сил, приложенных к телу. Следовательно, при $\lambda=-1$ уравнения (3.5.12) всегда разрешимы. Само решение оказывается неоднозначным, так как к любому частному решению необходимо добавить все его собственные функции. Однако ранее было показано, что потенциалы $V_j(y, \varphi_{ij}^{(1)})$ соответствуют перемещению тела как жесткого целого, а потому задачи $I^{(i)}$ (первая внешняя) и $II^{(i)}$ (вторая внутренняя), вообще говоря, решений не имеют. Использование представлений перемещений в виде потенциала двойного слоя при решении внешней первой краевой задачи приводит к ограничению поведения решения на бесконечности $|u_j(x)| < C/|x|^2$, хотя в постановке задачи такого ограничения не требуется, поэтому уравнение (3.5.11) может оказаться неразрешимым. В этом случае можно выбрать какую-либо точку x_0 , расположенную в D , за-

дать в ней сосредоточенную силу и момент и накладывать полученные перемещения на искомые. В результате приходим к интегральному уравнению (3.5.11), однако граничные условия будут содержать шесть числовых параметров, определяющих величины силы и момента, которые можно найти из условий ортогональности.

Введение термоупругих потенциалов аналогично предыдущим рассуждениям и основано на использовании фундаментального решения уравнений статической термоупругости, характеризуемого матрицами

$$\begin{aligned}\Phi(x-y) &= ((\Phi_{jk}(x-y))) (4 \times 4); \\ \Phi^*(x-y) &= ((\Phi_{jk}^*(x-y))) (4 \times 4)\end{aligned}$$

с элементами

$$\begin{aligned}\Phi_{jk}(x-y) &= (1 - \delta_{j4})(1 - \delta_{k4}) \Gamma_{jk}(x-y) + \delta_{j4} \delta_{k4} \frac{1}{2\pi r} + \\ &+ \frac{(3m-1)\alpha}{4\pi(m+1)} (1 - \delta_{j4}) \delta_{k4} g_{k\alpha} \frac{x^\alpha - y^\alpha}{r}; \quad \Phi_{jk}^*(x-y) = \Phi_{kj}(y-x),\end{aligned}$$

куда входят элементы матрицы Кельвина — Соммилианы (3.5.2)

$$\Gamma_{jk}(x-y) = \frac{1}{4\pi G(m+1)} \left[g_{jk} + g_{ja} g_{kb} \frac{(x^\alpha - y^\alpha)(x^\alpha - y^\alpha)}{r^2} \right] \frac{1}{r},$$

причем

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j=k, \\ 0 & \text{при } j \neq k; \end{cases} \quad \delta_{j4} = 0; \quad \delta_{44} = -1.$$

Интеграл

$$V_j(x) = \int_S \Phi_{jk}(x-y) \psi^k(y) d_y S$$

называется *термоупругим потенциалом простого слоя*. Он определен в точке x пространства и представляет собой непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую уравнениям статической термоупругости во всем пространстве, исключая поверхность S . Функция $\psi^k(y)$ является плотностью потенциала $V_j(x)$ и подчинена условиям Гельдера—Липшица на замкнутой поверхности Ляпунова. Предельные значения потенциала $V_j(x)$ изнутри и извне совпадают между собой и равны прямому значению $\overline{V_j(x)}$ на поверхности S .

Введем оператор термоупругих напряжений $R(\nabla n\gamma) = ((R_{jk}(\nabla n\gamma)))$ с элементами

$$\begin{aligned}
R_{jk}(\nabla n\gamma) &= T_{jk}(\nabla n); \\
R_{j4}(\nabla n\gamma) &= -G(3m-1)\alpha g_{j4}; \\
R_{4k}(\nabla n\gamma) &= 0; \\
R_{44}(\nabla n\gamma) &= \partial/\partial n = n^\alpha \nabla_\alpha,
\end{aligned}$$

где $j, k=1, 2, 3$.

Составим интеграл по поверхности S

$$W_j(x) = \int_S [R_{j\alpha}(\nabla_y n\gamma) g^{\alpha\beta} \Phi'_{\beta k}(x-y)]' \Phi^k(y) dy S, \text{ где } j, k=1, 2, 3, 4,$$

называемый *термоупругим потенциалом двойного слоя*. Потенциал определен в точке x пространства и представляет собой непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую однородным уравнениям статической термоупругости во всем пространстве, исключая поверхность S , причем

$$[R_{j\alpha}(\nabla_y n) g^{\alpha\beta} \Phi'_{\beta k}(x-y)]' \Phi^k(y) = \Phi_{\beta k}(x-y) g^{\beta\alpha} R_{j\alpha}'(\nabla_y n) \Phi^k(y).$$

Здесь оператор $R'(\nabla_y n)$ действует в точке y на матрицу $\Phi(x-y)$, стоящую слева, что следует из смысла операции.

Поведение потенциала $W_j(x)$ при стремлении точки x из D или $D_{(1)}$ к точке $z \in S$ характеризуют соотношения

$$W_j^{(1)}(z) = -\Phi_j(z) + \overline{W_j(z)}; \quad W_j^{(1)}(z) = \Phi_j(z) + W_j(z),$$

где $\overline{W_j(z)} = \int_S [R_{j\alpha}(\nabla_y n) g^{\alpha\beta} \Phi'_{\beta k}(z-y)]' \Phi^k(y) dy S$ — прямое значение потенциала $W_j(x)$.

Аналогично упругому потенциалу простого слоя для термоупругого потенциала $V_j(x)$ получим соотношения

$$[R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha k} V_k(z)]^{(1)} = \psi_j(z) + R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha\beta} \overline{V_\beta(z)};$$

$$[R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha k} V_k(z)]^{(1)} = -\psi_j(z) + R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha\beta} \overline{V_\beta(z)},$$

где $\overline{V_\beta(z)} = \int_S \Phi_{\beta k}(z-y) \psi^k(y) dy S$ — прямое значение потенциала $V_j(x)$.

Объемный интеграл

$$U_j(x) = \int_D \Phi_{jk}(x-y) g^{k\alpha} \chi_\alpha(y) dy V$$

называется *термоупругим объемным потенциалом* с плотностью $\chi_\alpha(y)$, причем функция $\chi_\alpha(y)$ является ограниченной из-

меримой функцией и на бесконечности удовлетворяет условию $|\chi_\alpha(y)| \leq C/|y|^3$.

С помощью введенных термоупругих потенциалов решение статических задач термоупругости сводится к решению интегральных уравнений. Действительно, если решение первой краевой задачи термоупругости искать в виде

$$u_j(x) = W_j(x, \varphi) + U_j(x, F/2),$$

то приходим к следующим интегральным уравнениям для внутренней (область D) и внешней задачи (область D_l) соответственно:

$$\begin{aligned} & -\varphi_j(z) + \int_S [R_{j\alpha}(\nabla_y n) g^{\alpha\beta} \Phi'_{\beta k}(z-y)]' \varphi^k(y) d_y S = \\ & = W_{js}(z) - 0,5 \int_D \Phi_{jk}(z-y) g^{k\beta} F_\beta(y) d_y V; \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_j(z) + \int_S [R_{j\alpha}(\nabla_y n) g^{\alpha\beta} \Phi'_{\beta k}(z-y)]' \varphi^k(y) d_y S = \\ & = V_{js}(z) - 0,5 \int_{D(l)} \Phi_{jk}(z-y) g^{k\beta} F_\beta(y) d_y V, \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

где $W_{js}(z)$, $j=1, 2, 3, 4$ — компоненты перемещений u_{js} , $j=1, 2, 3$, $W_{4s}=u_{4s}$, причем $u_4=\Delta T$; $F_4=Q/\kappa$; F_β ($\beta=1, 2, 3, 4$) — компоненты объемных сил.

Если решение второй краевой задачи термоупругости искать в виде

$$u_j(x) = V_j(x, \psi) + U_j(x, F/2),$$

то интегральные уравнения для внутренней и внешней задачи имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} & \psi_j(z) + \int_S [R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha\beta} \Phi_{\beta k}(z-y)] \psi^k(y) d_y S = \\ & = W_{js}(z) - 0,5 \int_D R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha\beta} \Phi_{\beta k}(z-y) F^k(y) d_y V; \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

$$\begin{aligned} & -\psi_j(z) + \int_S [R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha\beta} \Phi_{\beta k}(z-y)] \psi^k(y) d_y S = \\ & = W_{js}(z) - 0,5 \int_{D(l)} R_{j\alpha}(\nabla_z n) g^{\alpha\beta} \Phi_{\beta k}(z-y) F^k(y) d_y V, \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

где $W_{js}(z) = P_{jk}(\nabla n) u^k(S)$; $W_{4s} = \partial u_4(S)/\partial n$; $P(\nabla n) = ((P_{jk}(\nabla n)))$ — оператор с элементами $P_{jk}(\nabla n) = T_{jk}(\nabla n)$ при

$j, k=1, 2, 3; P_{j4}(\nabla n)=-G(3m-1)\alpha n_j\delta_{k4}; P_{4k}(\nabla n)=\delta_{4k}; P_{44}(\nabla n)=-\delta_{44}.$

Интегральные уравнения (3.5.14) — (3.5.17) — сингулярны и для них справедливы теоремы и альтернатива Фредгольма.

Динамическая задача теории упругости определена разрешающими уравнениями

$$\nabla^2 u + {}_j m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha - \frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{F_j}{G}.$$

Начальные и граничные условия $u_j(x, 0) = u_j^0(x); \partial u_j / \partial t|_{t=0} = v_j^0(x); u_j(S, t) = u_{js}(y, t), y \in S$ при $t \geq 0$ подчинены следующим требованиям:

$$\begin{aligned} &F_j(x, t), x \in \bar{D}; u_j^0(x), v_j^0(x) \in \bar{D}; u_{js}(y, t), y \in S; \\ &\frac{\partial^{p+q} F_j(x, t)}{\partial t^p (\partial x^1)^{q_1} \dots (\partial x^3)^{q_3}}, x \in \bar{D}, q_1 + q_2 + q_3 = q, p + q \leq 5; \\ &u_j^0(x) \in C^7(\bar{D}); v_j^0(x) \in C^6(\bar{D}); \\ &u_{js}(xt) \in C^{2,8}(S) \text{ при } \beta > 0; u_{js}(y) \in C^7[0, \infty) \text{ для } y \in S. \end{aligned}$$

Кроме того, для них выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} &u_j^0(y) = u_{js}(y, 0); v_j^0(y) = u_j^{(1)}(y) = \partial u_{js}(y, 0) / \partial t; \\ &u_j^{(k)}(y) = \partial^k u_{js}(y, t) / \partial t^k|_{t=0}, y \in S, k=2, \dots, 5, \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

где $\rho u_j^{(k)}(x) = G(\nabla^2 u_j^{(k-2)}(x) + m \nabla_j g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta^{(k-2)}(x)) - \partial^{k-2} F_j(x, t) / \partial t^{k-2}.$

Для рассматриваемой задачи существует единственное решение $u_j(x, t)$, которое можно представить интегралом Лапласа

$$u_j(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{pt} \tilde{u}_j(xp) dp,$$

где $\tilde{u}_j(xp) = \sum_{l=0}^{\infty} \Omega_l(p) u_j^{(l)}(xp)$, причем ряд равномерно сходится, а $\Omega_l(p)$ и $u_j^{(l)}(xp)$ выражаются в квадратурах с помощью исходных данных задачи.

Введенные функции $u_j^{(k)}(x)$ и условия согласования (3.5.18) позволяют привести краевую задачу к аналогичной задаче с нулевыми начальными условиями, специальной правой частью разрешающего уравнения и специальными граничными условиями на поверхности S . Для этого используется некоторая вектор-функция $\kappa_j(x, t)$, удовлетворяющая двум требованиям: 1) для $x \in E_s, t \geq 0$ функция $\kappa_j(x, t)$ пять раз непрерывно дифференцируе-

ма по t , 2) производная $\partial^k \kappa_j(x, t)/\partial t^k|_{t=0} = u_j^{(k)}(x)$, где $k=0, 1, \dots, 5$, а $x \in \bar{D}$, для больших значений t обращается в нуль.

Пусть

$$u_j^*(x, t) = u_j(x, t) - \kappa_j(x, t),$$

где $u_j(x, t)$ — решение исходной динамической задачи, тогда $u_j^*(x, t)$ будет решением задачи с разрешающими уравнениями

$$\nabla^2 u_j^*(x, t) + m \nabla_j \nabla_\alpha u^{*\alpha}(x, t) - \frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2 u_j^*(x, t)}{\partial t^2} = \frac{F_j^*(x, t)}{G}$$

и следующими начальными и граничными условиями:

$$u_j^*(x, 0) = 0; \partial u_j(x, 0)/\partial t = 0; u_j^*(y, t)|_s = u_{js}^*(y, t) \text{ при } y \in S.$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_j^*(x, t) &= F_j(x, t) - G[\nabla^2 \kappa_j(x, t) + m \nabla_j \nabla_\alpha \kappa^\alpha(x, t)] + \\ &+ \rho \partial^2 \kappa_j(x, t)/\partial t^2; \\ u_{js}^*(y, t) &= u_{js}(y, t) - \kappa_j(y, t), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \partial^k F_j^*(x, t)/\partial t^k|_{t=0} &= \partial^k F_j(x, t)/\partial t^k|_{t=0} - G[\nabla^2 u_j^{(k)}(x) + \\ &+ m \nabla_j \nabla_\alpha u^{(k)\alpha}(x)] + \rho u_j^{(k-2)}(x) = 0 \text{ при } x \in D, \text{ где } k=0, 1, \dots, 3; \\ \partial^k u_{js}^*(y, t)/\partial t^k|_{t=0} &= 0 \text{ при } y \in S, \text{ где } k=0, 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Сформулированная краевая задача для $u_j^*(x, t)$ интегральным преобразованием Лапласа

$$\tilde{u}_j^*(xp) = \int_0^\infty e^{-pt} u_j^*(x, t) dt$$

сводится к статической задаче теории упругости в изображениях

$$\nabla^2 \tilde{u}_j^*(xp) + m \nabla_j \nabla_\alpha \tilde{u}^{*\alpha}(xp) - (p^2/a_s^2) \tilde{u}_j^*(xp) = \tilde{F}_j^*(xp)/G; \quad (3.5.19)$$

$$\tilde{u}_j^*(xp)|_s = \tilde{u}_{js}^*(yp), \quad x \in D \rightarrow y, \quad y \in S.$$

Решение задачи (3.5.19) единственное и существует в виде

$$\tilde{u}_j^*(xp) = W_j(x, \varphi) - U_j(x, \tilde{F}^*/2),$$

где

$$W_j(x, \varphi) = \int_S [T_{jl}(\nabla_y n) g^{l\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}(x-y, ip)]' \varphi^\beta(y) dy; \\ U_j(x, \tilde{F}^*/2) = 0,5 \int_D \Gamma_{jl}(x-y, ip) g^{l\alpha} \tilde{F}_\alpha^*(y, p) dy.$$

Здесь плотность $\varphi_j(y)$ потенциала $W_j(x, \varphi)$ есть решение сингулярного интегрального уравнения

$$-\varphi_j(z) + \int_S [T_{jl}(\nabla_y n) g^{l\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}(z-y, ip)]' \varphi^\beta(y) dy = \\ = \tilde{u}_{js}^*(z, p) + U_j(z, \tilde{F}^*/2),$$

которое разрешимо по первой теореме Фредгольма.

Вторая краевая динамическая задача упругости отличается от первой граничными условиями, заданными в напряжениях,

$$T_{jl}(\nabla_x n) u^l(x, t) = p_j^n(y, t) \text{ при } x \rightarrow y \text{ и } y \in S.$$

Граничная вектор-функция $p_j^n(y, t)$ такова, что для $t \geq 0$ относительно y

$$p_j^{(n)}(y, t) \in C^{1,\beta}(S), \quad \beta > 0,$$

для $\forall y \in S$ относительно t

$$p_j^{(n)}(y, t) \in C^r[0, \infty),$$

а полная система условий согласования имеет вид

$$T_{jl}(\nabla_y n) g^{l\alpha} u_\alpha^{(k)}(y) = \frac{\partial^k p_j^{(n)}(y, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0},$$

где $k=0, 1, \dots, 5$. При этих ограничениях решение краевой задачи единственное и существует в виде интеграла Лапласа

$$u_j(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{pt} \tilde{u}_j(xp) dp,$$

где ряд

$$\tilde{u}_j(xp) = \sum_{l=1}^{\infty} H_l(p) \psi_j^{(l)}(xp)$$

равномерно сходится, а $H_l(p)$ и $\psi_j^{(l)}(xp)$ выражаются в квадратурах с помощью заданных функций. Как и в предыдущем случае, поставленная краевая задача с помощью представления

$$u_j^*(x, t) = u_j(x, t) - \kappa_j(x, t)$$

сводится к эквивалентной задаче

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_j^*(x, t) + m \nabla_j \nabla_\alpha u^{*\alpha}(x, t) - \\ - \frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2 u_j^*(x, t)}{\partial t^2} = \frac{F_j^*(x, t)}{G} \quad \text{при } x \in D \text{ и } 0 \leq t < \infty; \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

$$\begin{aligned} u_j^*(x, 0) = 0, \quad \partial u_j^*(x, t) / \partial t|_{t=0} = 0, \\ T_{ji}(\nabla_\gamma n) u^{*i}(y) = p_j^{*(n)}(y, t) \quad \text{при } y \in S, \end{aligned}$$

где $p_j^{*(n)}(y, t) = p_j^{(n)}(y, t) - T_{ji}(\nabla_\gamma n) g^{i\alpha} \kappa_\alpha(y, t)$.

В свою очередь, краевая задача (3.5.20) интегральным преобразованием Лапласа

$$\tilde{u}_j^*(xp) = \int_0^\infty e^{-pt} u_j^*(x, t) dt$$

сводится к статической задаче теории упругости в изображениях

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{u}_j^*(xp) + m \nabla_j \nabla_\alpha \tilde{u}^{*\alpha}(xp) - (p^2/a_s^2) \tilde{u}_j^*(xp) = \\ = \tilde{F}_j^*(xp)/G; \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

$$T_{ji}(\nabla_\gamma n) \tilde{u}^{*i}(yp) = \tilde{p}_j^{*(n)}(yp) \quad \text{при } y \in S.$$

Решение задачи (3.5.21) единственное и существует в виде

$$\tilde{u}_j^*(xp) = V_j(x, \psi) - U_j(x, \tilde{F}^*/2),$$

где

$$\begin{aligned} V_j(x, \psi) = \int_S \Gamma_{ji}(x-y, ip) \psi^i(y) dy; \\ U_j(x, \tilde{F}^*/2) = 0,5 \int_D \Gamma_{ji}(x-y, ip) \tilde{F}^{*i}(y, p) dy. \end{aligned}$$

Здесь плотность $\psi^i(y)$ потенциала $V_j(x, \psi)$ есть решение сингулярного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \psi_j(y) + \int_S T_{ji}(\nabla_\gamma n) g^{i\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}(y-z, ip) \psi^\beta(z) dz = \\ = \tilde{p}_j^{*(n)}(y, p) + T_{ji}(\nabla n) g^{i\alpha} U_\alpha(y, \tilde{F}^*/2) \end{aligned}$$

при $y \in S$, которое разрешимо по первой теореме Фредгольма.

В заключение рассмотрим динамические задачи термоупругости. Первая краевая задача определяет в области $\bar{D}x[0, \infty)$

компоненты $u_j(x, t)$ и $u_4(x, t)$ вектора перемещений, подчиненные системе разрешающих уравнений

$$\nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha - (3m - 1) \alpha \nabla_j u_4 - \frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = -\frac{F_j}{G},$$

$$\nabla^2 u_4 - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_4}{\partial t} - \eta \nabla_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} Q.$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u_j(x, t)|_{t=0} = u_j^0(x), \quad \partial u_j(x, t)/\partial t|_{t=0} = v_j^0(x), \quad u_4(x, t)|_{t=0} = \Delta T^0(x);$$

$$u_j(x, t)|_{x \rightarrow y} = u_{js}(y, t), \quad u_4(x, t)|_{x \rightarrow y} = u_{4s}(y, t) \quad \text{при } y \in S.$$

При $t \geq 0$ $F_j(x, t)$, $Q(x, t)$, $x \in \bar{D}$; $u_j^0(x)$, $v_j^0(x)$, $\Delta T^0(x)$, $x \in D$; $u_{js}(y, t)$, $u_{4s}(y, t)$, $y \in S$ — заданные функции, удовлетворяющие требованиям непрерывности, гладкости и дифференцируемости.

Решение краевой задачи $u_j(x, t)$ и $u_4(x, t)$ ищем в классе $C(\bar{D} \times [0, \infty)) \cap C^2(\bar{D} \times [0, \infty))$. Для существования решения необходимо выполнение условий согласования

$$\partial^k u_j(x, t)/\partial t^k|_{t=0} = u_j^{(k)}(x) \quad \text{при } k=0, 1, \dots, 7;$$

$$\partial^k u_4(x, t)/\partial t^k|_{t=0} = u_4^{(k)}(x) \quad \text{при } k=0, 1, \dots, 6.$$

Здесь

$$u^{(0)}(x) = u_{js}(y, 0), \quad u_j^{(1)}(x) = \partial u_{js}(y, 0)/\partial t, \quad u_4^{(0)}(x) = u_{4s}(y, 0),$$

$$x \rightarrow 0 \text{ и } y \in S;$$

$$u_j^{(k)}(x) = a_s^2 [\nabla^2 u_j^{(k-2)}(x) + m \nabla_j \nabla_\alpha g^{\alpha\beta} u_\beta^{(k-2)}(x)] - \\ - a_s^2 (3m - 1) \alpha \nabla_j u_4^{(k-2)}(x) - (1/\rho) \partial^{k-2} F_j(x, t)/\partial t^{k-2}|_{t=0}; \quad (3.5.22)$$

$$u_4^{(k-1)}(x) = \kappa \nabla^2 u_4^{(k-2)}(x) - \kappa \eta \nabla_\alpha g^{\alpha 4} u_4^{(k-2)}(x) - \\ - \partial^{k-2} Q(x, t)/\partial t^{k-2}|_{t=0}.$$

Сформулированной динамической задаче, как и в предыдущем случае, поставим в соответствие динамическую задачу термоупругости с нулевыми начальными условиями. Решение последней $u_j^*(x, t)$ и $u_4^*(x, t)$ связано с решением исходной задачи $u_j(x, t)$ и $u_4(x, t)$ соотношениями

$$u_j^*(x, t) = u_j(x, t) - \kappa_j(x, t); \quad u_4^*(x, t) = u_4(x, t) - \kappa_4(x, t)$$

и подчиняется разрешающим уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_j^* + m \nabla_j \nabla_\alpha u^{*\alpha} - (3m-1) \alpha \nabla_j u_4^* - \frac{1}{a_S^2} \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial t^2} &= -\frac{F_j^*}{G}; \\ \nabla^2 u_4^* - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_4^*}{\partial t} - \eta \nabla_\alpha g^{\alpha l} \frac{\partial u_l^*}{\partial t} &= F_4^* \text{ при } x \in \bar{D}. \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

Запишем начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} u_j^*(x, t)|_{t=0} &= 0, \quad u_4^*(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial u_j^*(x, t)/\partial t|_{t=0} = 0; \\ u_j^*(x, t)|_{x \rightarrow y} &= u_{jS}^*(y, t), \quad u_4^*(x, t)|_{x \rightarrow y} = u_{4S}^*(y, t) \text{ при } y \in S. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_j^*(x, t) &= F_j(x, t) - G[\nabla^2 \kappa_j(x, t) + m \nabla_j \nabla_\alpha g^{\alpha\beta} \kappa_\beta(x, t)] + \\ &+ G(3m-1) \alpha \nabla_j \kappa_4(x, t) + \rho \partial^2 \kappa_j(x, t)/\partial t^2; \\ F_4^*(x, t) &= F_4(x, t) - \nabla^2 \kappa_4(x, t) + (1/\kappa) \partial \kappa_4(x, t)/\partial t + \\ &+ \eta \nabla_\alpha g^{\alpha\beta} \partial \kappa_\beta(x, t)/\partial t; \\ u_{jS}^*(y, t) &= u_{jS}(y, t) - \kappa_j(y, t); \quad u_{4S}^*(y, t) = u_{4S}(y, t) - \kappa_4(y, t). \end{aligned}$$

Дополнением к (3.5.22) служат формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k F_j^*(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial^k F_j(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} - G[\nabla^2 u_j^{(k)}(x) + m \nabla_j \nabla_\alpha u^{(k)\alpha}(x)] + \\ &+ G(3m-1) \alpha \nabla_j^{(k)}(x) + \rho u_j^{(k+2)}(x) = 0 \text{ при } k=0, \dots, 5; \\ \frac{\partial^{k-1} F_4^*(x, t)}{\partial t^{k-1}} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial^{k-1} F_4(x, t)}{\partial t^{k-1}} \Big|_{t=0} - \nabla^2 u_4^{k-1}(x) + \eta \nabla_\alpha u^{(k)\alpha}(x) + \\ &+ u_4^{(k)}(x)/\kappa = 0 \text{ при } k=1, \dots, 5; \\ \frac{\partial^k u_{jS}^*(y, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} &= 0 \text{ при } k=0, \dots, 7; \\ \frac{\partial^k u_{4S}^*(y, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} &= 0 \text{ при } k=0, \dots, 6. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим случаем, краевую задачу (3.5.23) интегральным преобразованием Лапласа

$$\tilde{u}_j^*(xp) = \int_0^\infty e^{-pt} u_j^*(x, t) dt \text{ при } j=1, \dots, 4$$

можно свести к статической задаче термоупругости с разрешающими уравнениями

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{u}_j^*(xp) + m \nabla_j \nabla_\alpha \tilde{u}^{*\alpha}(xp) - (3m-1) \alpha \nabla_j u_4^*(xp) - \\ - (p^2/a_s^2) \tilde{u}_j^*(xp) = \tilde{F}_j^*(xp)/G; \\ \nabla^2 \tilde{u}_4^*(xp) - (p/\kappa) u_4^*(xp) - \eta p \nabla_\alpha \tilde{u}^{*\alpha}(xp) = \tilde{F}_4^*(xp) \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

при $x \in D$.

Здесь граничные условия $\tilde{u}_j^*(xp) = \tilde{u}_{js}^*(yp)$, причем $x \rightarrow y$ и $y \in S$, а $|\tilde{F}_j^*(xp)| \leq C/|p|^7$, $|\tilde{F}_4^*(xp)| \leq C/|p|^6$, $|\tilde{u}_{js}^*(y, p)| \leq C/|p|^9$, $|\tilde{u}_{4s}^*(y, p)| \leq C/|p|^8$.

Решение краевой задачи (3.5.24) единственное и существует в виде

$$\tilde{u}_j^*(x) = W_j(x, \varphi) + U_j(x, \tilde{F}^*/2),$$

где φ плотность потенциала $W_j(x, \varphi)$, определяемая в результате решения сингулярного интегрального уравнения (3.5.14).

Итак, статические и динамические задачи теории упругости и термоупругости могут быть сведены к соответствующим сингулярным интегральным уравнениям, разрешимость которых следует из теорем Фредгольма.

3.6. Метод возмущений и метод усреднения, их сущность

Одним из возможных методов решения задач механики сплошной среды, который можно отнести в какой-то степени к разряду точных, является метод возмущений. Отклонения от задачи, допускающей точное решение, будем называть *возмущениями*, которые могут быть поверхностными и объемными. *Поверхностными возмущениями* принято называть отклонения граничной поверхности или граничных условий или того и другого соответственно от поверхности и условий, допускающих точное решение. *Объемными возмущениями* будем называть отклонения внутри объема сплошной среды, которые выводят задачу из класса точно разрешимых задач. Возмущения, объемные и поверхностные, предполагаются малыми, а потому может быть осуществлено разложение по степеням параметра, измеряющего величину возмущения; главный член разложения будет решением при отсутствии возмущения.

Метод возмущений особенно успешно применим тогда, когда рассматриваемая задача близка к задаче, имеющей точное решение. При этом предполагается, что отличия не носят сингулярного характера, так что переход от точно разрешимой задачи до рассматриваемой можно провести непрерывно. Аналитически это означает, что возмущения должны быть непрерывными функциями параметра ϵ , измеряющего величину возмущения.

Задачи механики сплошной среды характеризуются вполне определенными разрешающими уравнениями, которые могут быть представлены в операторной форме

$$Au=f, \quad (3.6.1)$$

где u — искомая, а f — заданная функции координат x^i и времени t . Оператор A операторного уравнения (3.6.1) известен, он в большинстве случаев является дифференциальным, однако может быть интегральным или интегродифференциальным.

Сущность метода возмущений сводится к следующему. Если оператор A допускает разложение вида $A=A^{(0)}+\varepsilon B$, причем $A^{(0)}$ — оператор некоторой решенной, невозмущенной задачи, а возмущение εB с параметром возмущения ε мало по сравнению с $A^{(0)}$, то можно указать процедуру, позволяющую вслед за решением невозмущенной задачи получить точное или приближенное решение возмущенной задачи с оператором A . С этой целью применяется разложение по степеням параметра ε

$$A=A^{(0)}+\sum_{j=1}^k \varepsilon^j B^{(j)}+\dots \quad (3.6.2)$$

Если старшей степенью в (3.6.2) будет ε^k , то говорят о k -м приближении, при этом решение исходной невозмущенной задачи рассматривается как нулевое приближение.

В сложных задачах следует, если это возможно, исходное операторное уравнение (3.6.1) преобразовать в более простое уравнение, к которому затем применять метод возмущений.

Если имеется несколько параметров возмущения, то выгоднее проводить вычисления вначале для того параметра, который приводит к более точным и более простым решениям, а затем использовать полученные возмущенные решения как невозмущенные в процессе применения метода возмущений к остальным параметрам. Правильный выбор последовательности параметров позволяет значительно упростить построение решения и сделать его более точным.

Применим метод возмущений к решению задачи о собственных значениях для уравнения (3.6.1). Пусть невозмущенная задача имеет вид

$$A^{(0)}\varphi_j^{(0)}-\lambda_j^{(0)}\varphi_j^{(0)}=0, \quad (3.6.3)$$

где собственные значения $\lambda_j^{(0)}$ и собственные функции $\varphi_j^{(0)}$ известны. Определим собственные значения λ_j и собственные функции φ_j возмущенной задачи о собственных значениях

$$A\varphi_j-\lambda_j\varphi_j=0, \quad (3.6.4)$$

где $A=A^{(0)}+\varepsilon B$, с теми же однородными граничными условиями. Иначе говоря, установим характер изменения собственных значений и собственных функций при возмущении εB .

Предположим, что невозмущенное собственное значение $\lambda_j^{(0)}$ является простым и ему соответствует собственная функция $\varphi_j^{(0)}$. Пусть

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_j^{(n)}; \quad \varphi_j = \varphi_j^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_j^{(n)}, \quad (3.6.5)$$

где $\lambda_j^{(n)}$ — собственные значения, а $\varphi_j^{(n)}$ — собственные функции, подлежащие определению.

Подстановка выражений (3.6.5) в (3.6.4) и приравнивание нулю коэффициентов разложения по степеням ε приводит к системе операторных уравнений вида

$$A^{(0)}\varphi_j^{(n)} - \lambda_j^{(0)}\varphi_j^{(n)} = -B\varphi_j^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n \lambda_j^{(k)}\varphi_j^{(n-k)}, \quad (3.6.6)$$

с помощью которой можно последовательно вычислять $\lambda_j^{(n)}$ и $\varphi_j^{(n)}$, исходя из низших приближений $\lambda_j^{(0)}, \dots, \lambda_j^{(n-1)}$; $\varphi_j^{(0)}, \dots, \varphi_j^{(n-1)}$. Здесь функция $\varphi_j^{(0)}$ сначала известна лишь с точностью до произвольного кратного $\varphi_j^{(0)}$, а потому для устранения указанной неопределенности положим

$$(\varphi_j^{(0)}, \varphi_j^{(n)}) = \int \varphi_j^{(0)*} \varphi_j^{(n)} dt = 0, \quad (3.6.7)$$

где $n=1, 2, \dots$

Неоднородные операторные уравнения (3.6.6) разрешимы только в том случае, когда их правые части ортогональны к решению $\varphi_j^{(0)*}$ однородного уравнения (3.6.3), т. е. когда

$$\left[\varphi_j^{(0)*}, \left(\sum_{k=1}^n \lambda_j^{(k)} \varphi_j^{(n-k)} - B\varphi_j^{(n-1)} \right) \right] = 0.$$

Однако в силу условия (3.6.7) при нормированном $\varphi_j^{(0)*}$ это сводится к зависимости

$$\lambda_j^{(n)} = (\varphi_j^{(0)*}, B\varphi_j^{(n-1)}). \quad (3.6.8)$$

Итак, если известны собственные функции $(n-1)$ -го приближения, то квадратурой можно найти возмущения собственных значений n -го приближения.

Для самосопряженного оператора A имеют место формулы: при четном $n=2m$ ($m=1, 2, \dots$)

$$\lambda_j^{(n)} = (\varphi_j^{(m)*}, B\varphi_j^{(m-1)}) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_j^{(n-k-l)} (\varphi_j^{(k)*}, \varphi_j^{(l)}),$$

при нечетном $n=2m+1$ ($m=0, 1, 2, \dots$)

$$\lambda_j^{(n)} = (\varphi_j^{(m)*}, B\varphi_j^{(m)}) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \lambda_j^{(n-k-l)} (\varphi_j^{(k)*}, \varphi_j^{(l)}).$$

Если собственные функции m -го приближения известны, то, пользуясь ими, можно определить возмущения собственных значений до $(2m+1)$ -го приближения конечным числом квадратур.

Неизвестные приближения собственных функций $\varphi_j^{(n)}$ будем искать в виде разложений по собственным функциям $\varphi_j^{(0)}$ невозмущенного уравнения (3.6.3), которые должны образовать ортонормированную систему,

$$\varphi_j^{(n)} = \sum_l \Phi_{jl}^{(n)} \varphi_l^{(0)}, \quad (3.6.9)$$

где $\Phi_{jl}^{(n)} = (\varphi_l^{(0)}, \varphi_j^{(n)})$. В соответствии с (3.6.7) $\Phi_{jj}^{(n)} = 0$, поэтому суммы (3.6.9) не содержат слагаемого $\Phi_{jj}^{(n)}$ ($l=j$) с невозмущенной исходной функцией $\varphi_j^{(0)}$.

Используя уравнение (3.6.3), находим

$$A^{(0)}\varphi_j^{(n)} = \sum_l \Phi_{jl}^{(n)} \lambda_l^{(0)} \varphi_l^{(0)},$$

а также

$$[\varphi_l^{(0)*}, (A^{(0)}\varphi_j^{(n)} - \lambda_j^{(0)}\varphi_j^{(n)})] = (\lambda_l^{(0)} - \lambda_j^{(0)}) \Phi_{jl}^{(n)}.$$

Введя обозначение $(\varphi_l^{(0)*}, B\varphi_j^{(0)}) = B_{lj}^{(0)}$, умножим уравнение (3.6.6) при $n=1$ на $\varphi_l^{(0)*}$ и проинтегрируем по переменным. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} [\varphi_l^{(0)*}, (A\varphi_j^{(1)} - \lambda_j^{(0)}\varphi_j^{(1)})] &= (\lambda_l^{(0)} - \lambda_j^{(0)}) \Phi_{jl}^{(1)} = \\ &= [\varphi_j^{(0)*}, (\lambda_j^{(1)}\varphi_j^{(0)} - B\varphi_j^{(0)})] = -B_{lj}^{(0)}. \end{aligned}$$

Так как из соотношения (3.6.8) следует

$$\lambda_j^{(1)} = (\varphi_j^{(0)*}, B\varphi_j^{(0)}) = B_{jj}^{(0)}, \quad (3.6.10)$$

то

$$\Phi_{jl}^{(1)} = B_{lj}^{(0)} / (\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)})$$

и, согласно (3.6.9), имеем первое приближение собственной функции φ_j возмущенного уравнения (3.6.4)

$$\varphi_j^{(1)} = \sum_{l \neq j} B_{lj}^{(0)} \varphi_l^{(0)} / (\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)}). \quad (3.6.11)$$

Второе приближение ($n=2$) собственного значения, определяемое формулой (3.6.8), будет равно

$$\lambda_j^{(2)} = (\varphi_j^{(0)*}, B\varphi_j^{(1)}) = \sum_{l \neq j} B_{lj}^{(0)} B_{jl}^{(0)} (\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)}).$$

Умножая уравнение (3.6.6) при $n=2$ на $\varphi_l^{(0)*}$ и интегрируя по переменным, находим

$$\begin{aligned} [\varphi_l^{(0)*}, (A^{(0)}\varphi_j^{(2)} - \lambda_j^{(0)}\varphi_j^{(2)})] &= (\lambda_l^{(0)} - \lambda_j^{(0)}) \Phi_{jl}^{(2)} = \\ &= [\varphi_l^{(0)*}, (\lambda_j^{(1)}\varphi_j^{(1)} + \lambda_j^{(2)}\varphi_j^{(0)} - B\varphi_j^{(1)})] = \\ &= \lambda_j^{(1)}\Phi_{jl}^{(1)} - \sum_{i \neq j} B_{li}^{(0)} B_{ij}^{(0)} / (\lambda_j^{(0)} - \lambda_i^{(0)}). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.6.10) и (3.6.11), получаем

$$\Phi_{jl}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)}} \left[\sum_{i \neq j} \frac{B_{li}^{(0)} B_{ij}^{(0)}}{(\lambda_j^{(0)} - \lambda_i^{(0)})} - \frac{B_{jj}^{(0)} B_{lk}^{(0)}}{(\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)})} \right]$$

и, согласно (3.6.9), имеем второе приближение собственной функции φ_j возмущенного уравнения

$$\varphi_j^{(2)} = \sum_{l \neq j} \frac{\varphi_l^{(0)}}{(\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)})} \left[\sum_{i \neq j} \frac{B_{li}^{(0)} B_{ij}^{(0)}}{(\lambda_j^{(0)} - \lambda_i^{(0)})} - \frac{B_{jj}^{(0)} B_{lj}^{(0)}}{(\lambda_j^{(0)} - \lambda_l^{(0)})} \right].$$

Аналогично можно построить третье и последующие приближения для собственных значений и собственных функций возмущенного уравнения (3.6.4).

Если одному и тому же невозмущенному собственному значению $\lambda_j^{(0)}$ принадлежат m различных ортогонализованных функций $\varphi_{j(\alpha)}^{(0)}$ ($\alpha=1, 2, \dots, m$), то прежде всего необходимо нулевое приближение собственных функций приспособить к возмущению. Для этого подставим в (3.6.5) более общие выражения

$$\varphi_j^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha} \varphi_{j(\alpha)}^{(0)}, \quad (3.6.12)$$

тогда для первого приближения ($n=1$) из уравнений (3.6.6) имеем

$$A^{(0)}\varphi_j^{(1)} - \lambda_j^{(0)}\varphi_j^{(1)} = - \sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha} (B - \lambda_j^{(1)}) \varphi_{j(\alpha)}^{(0)}.$$

Здесь правая часть уравнения должна быть ортогональна ко всем $\varphi_{j(\alpha)}^{(0)}$, следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha} [\varphi_{j(\alpha')}^{(0)*}, (B\varphi_{j(\alpha)}^{(0)} - \lambda_j^{(1)}\varphi_{j(\alpha)}^{(0)})] = 0,$$

где $\alpha' = 1, 2, \dots, m$. Эти равенства представляют собой систему из m уравнений, определяющую C_{α} . Запишем эту систему с помощью сокращений

$$B_{j\alpha', j\alpha} = (\varphi_{j(\alpha')}^{(0)*}, B\varphi_{j(\alpha)}^{(0)})$$

и с нормированными $\varphi_{j(\alpha)}^{(0)}$ в виде

$$\sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha} (B_{j\alpha', j\alpha} - \lambda_j^{(1)}\delta_{\alpha'\alpha}) = 0, \quad (3.6.13)$$

причем условием ее разрешимости будет уравнение

$$\det |B_{j\alpha', j\alpha} - \lambda_j^{(1)}\delta_{\alpha'\alpha}| = 0,$$

где $\alpha', \alpha = 1, 2, \dots, m$. Оно имеет m корней $\lambda_j^{(1)} = \lambda_{jl}^{(1)}$ ($l = 1, 2, \dots, m$), каждому из которых, согласно (3.6.13), соответствует система коэффициентов $C_{\alpha} = C_{\alpha l}$, а остающийся неопределенным множитель фиксируется нормирующим условием

$$\sum_{l=1}^m |C_{\alpha l}|^2 = 1.$$

В этом случае нормированные собственные функции нулевого приближения (3.6.12), приспособленные к возмущению, полностью определены. Обозначим их через $\chi_{jl}^{(0)}$ в отличие от неприспособленных функций $\varphi_{j(\alpha)}^{(0)}$. Таким образом,

$$\chi_{jl}^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^m C_{\alpha l} \varphi_{j(\alpha)}^{(0)},$$

где $(\chi_{jl}^{(0)*}, \chi_{j'l}^{(0)}) = \delta_{jj'}\delta_{ll'}$; $(\chi_{jl}^{(0)*}, B\chi_{j'l}^{(0)}) = \lambda_{jl}^{(1)}\delta_{ll'}$.

Собственные значения $\lambda_j^{(0)}$, имеющие кратность m , расщепляются на m различных значений $\lambda_{jl} = \lambda_j^{(0)} + \epsilon\lambda_{jl}^{(1)}$, при этом

высшие приближения вычисляются аналогично случаю простых собственных значений. Принимая

$$\lambda_{jl} = \lambda_j^{(0)} + \sum_n \varepsilon^n \lambda_{j(l)}^{(n)}; \quad \varphi_{jl} = \chi_{jl}^{(0)} + \sum_n \varepsilon^n \chi_{jl}^{(n)},$$

где $l=1, 2, \dots, m$, получим систему, аналогичную (3.6.6),

$$A^{(0)} \chi_{jl}^{(n)} - \lambda_j^{(0)} \chi_{jl}^{(n)} = -B \chi_{jl}^{(n-1)} + \sum_{l=1}^m \lambda_{j(l)}^{(k)} \chi_{jl}^{(n-k)}, \quad (3.6.14)$$

с помощью которой можно последовательно вычислить $\chi_{jl}^{(n)}$ с точностью до суммы произвольных кратных m различных $\chi_{jl}^{(0)}$.

Неопределенные m коэффициентов определяют так, чтобы правая часть того из уравнений (3.6.14), в котором впервые встречается $\chi_{jl}^{(n)}$, была ортогональна ко всем m функциям $\chi_{jl}^{(0)}$, что приводит к m условиям. Первое из этих условий ($l'=l$) дает приближение собственного значения $\lambda_{j(l)}^{(n+1)}$ (ближайшего более высокого порядка), а остальные $(m-1)$ определяют $m-1$ неизвестных коэффициентов. При этом остается неопределенным коэффициент, соответствующий $l'=l$, который может быть определен из условия типа (3.6.7) или из условия нормированности. Окончательные значения функций $\chi_{jl}^{(n)}$ определяют параллельно с вычислением $\lambda_{j(l)}^{(n+1)}$ подобно ранее изложенному случаю.

Вычисление высших приближений при полностью расщепляющемся кратном собственном значении аналогично вычислению при простых собственных значениях. В частности, возможны разложения в ряд по собственным функциям невозмущенной задачи или по приспособленным собственным функциям. Для первого приближения

$$\lambda_{j(l)}^{(1)} = U_{jl,jl}; \quad \chi_{jl}^{(1)} = \sum_{j'l'} X_{jl,j'l'} \chi_{j'l'}^{(0)},$$

где

$$X_{jl,j'l'} = (\chi_{j'l'}^{(0)*}, \chi_{jl}^{(0)}) = U_{j'l',jl} \text{ при } j' \neq j;$$

$$X_{jl,j'l'} = \frac{1}{(\lambda_{jl}^{(1)} - \lambda_{j'l'}^{(1)})} \sum_{i \neq j} \sum_n \frac{U_{j'l',in} U_{in,jl}}{(\lambda_j^{(0)} - \lambda_i^{(0)})} \text{ при } l' \neq l;$$

$$U_{j'l',jl} = (\chi_{j'l'}^{(0)*}, B \chi_{jl}^{(0)}).$$

Метод возмущений нашел широкое применение в механике жидкости и газа. Рассмотрим комплекс связанных между собой задач регулярных возмущений. Поскольку точные решения чрез-

вычайно редки, естественно стремление использовать их возможно более полно, поэтому рассмотрим различные возмущения какого-либо одного точного решения для различных эффектов.

В задаче об обтекании тела безграничным потоком жидкости возмущения могут быть вызваны граничными условиями в набегающем потоке, граничными условиями на поверхности тела, уравнениями движения. В свою очередь, каждая из указанных возможностей может быть осуществлена различными способами.

В качестве основного точного решения возьмем бесциркуляционное обтекание круга радиусом a безграничным потоком идеальной несжимаемой жидкости (рис. 3.1). Наряду с потен-

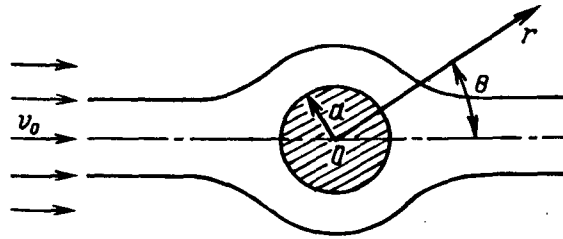


Рис. 3.1. Схема обтекания круга потоком жидкости

циалом скоростей $v_i = \nabla_i \psi$ введем функцию тока $d\psi_i = \Lambda_{ik}^j v_j dx^k$, подчиняющуюся уравнению $\nabla^2 \psi = -\omega(\psi)$, которое указывает на неизменность завихренности ω вдоль линии тока при отсутствии вязкости. Это уравнение нелинейное, если завихренность ω не является линейной функцией от ψ ; для равномерного набегающего потока завихренность обращается в нуль и ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$.

Плоское течение в полярных координатах r, θ описывается уравнением

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.6.15)$$

Дополним это уравнение условием симметрии течения относительно линии $\theta = 0$ $\psi(r, \theta) = -\psi(r, -\theta)$ и граничными условиями $\psi(r, \theta) \rightarrow v_0 r \sin \theta$ при $r \rightarrow \infty$, $\psi(a, \theta) = 0$ на поверхности тела. Решение находим наложением на равномерный поток течения от диполя, помещенного в центре круга. Тогда основное решение

$$\psi_0 = v_0 (r - a^2/r) \sin \theta \quad (3.6.16)$$

и соответствующий ему потенциал скоростей

$$\varphi_0 = v_0 (r + a^2/r) \cos \theta$$

можно представить в комплексной форме

$$\varphi_0 + i\psi_0 = v_0(z + a^2/z); \quad z = re^{i\theta}.$$

Рассмотрим малые возмущения условий в набегающем потоке, представляющем собой параллельное течение малой постоянной завихренности. Скорость потока

$$v_\infty = v_0(1 + \varepsilon(r/a) \sin \theta),$$

функция тока ψ_∞ с точностью до аддитивной постоянной равна

$$\psi_\infty = v_0[r \sin \theta + 0,25\varepsilon r^2(1 - \cos 2\theta)/a],$$

а завихренность

$$\omega_\infty = -\nabla^2 \psi_\infty = -\varepsilon v_0/a.$$

Очевидно, что полная краевая задача определена уравнением

$$\nabla^2 \psi = \varepsilon v_0/a \quad (3.6.17)$$

в совокупности с требованием отсутствия дополнительной циркуляции $\psi \rightarrow \psi_\infty$ при $r \rightarrow \infty$; $\psi(a, \theta) = 0$.

Если параметр завихренности ε мал, то течение слабо отличается от безвихревого, а потому решение будем искать в виде ряда

$$\psi(r, \theta, \varepsilon) = \psi_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(r, \theta), \quad (3.6.18)$$

где $\psi_0(r, \theta)$ — основное решение (3.6.16). Подстановка (3.6.18) в (3.6.17) и приравнивание членов с одинаковой степенью ε приводит для возмущения первого порядка ψ_1 к краевой задаче

$$\nabla^2 \psi_1 = v_0/a,$$

где $\psi_1 \rightarrow 0,25 v_0 r^2(1 - \cos 2\theta)/a$ при $r \rightarrow \infty$; $\psi_1(a, \theta) = 0$.

Представим решение задачи в виде

$$\psi_1 = 0,25 v_0 r^2(1 - \cos 2\theta)/a + \chi_1(r, \theta),$$

причем функция $\chi_1(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \chi_1 = 0$ и граничным условиям $\chi_1 = \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$; $\chi_1(a, \theta) = -0,25 v_0 a(1 - \cos 2\theta)$. В результате полное решение первого порядка является точным и имеет вид

$$\psi = v_0 \left\{ \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\varepsilon}{4} \left[\frac{r^2}{a} (1 - \cos 2\theta) + \frac{a^3}{r^2} \cos 2\theta - a \right] \right\}.$$

Пусть на поверхности тела имеется возмущение, форма которого определяется уравнением $r = a(1 - \varepsilon \sin^2 \theta)$. Возмущенное решение представим в виде разложения по степеням ε :

$$\psi(r, \theta, \varepsilon) = \psi_0(r, \theta) + \varepsilon \psi_1(r, \theta) + \dots \quad (3.6.19)$$

и подставим его в уравнение (3.6.15) с учетом граничных условий. Затем приравняем члены с одинаковыми степенями ϵ и получим для первых двух членов разложения (3.6.19) две задачи:

$$\nabla^2 \psi_0 = 0, \psi_0 \rightarrow v_0 r \sin \theta \text{ при } r \rightarrow \infty;$$

$$\nabla^2 \psi_1 = 0, \psi_1 \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Точная запись условия обтекания будет следующей:

$$\psi_0[a(1-\epsilon \sin^2 \theta), \theta] + \epsilon \psi_1[a(1-\epsilon \sin^2 \theta), \theta] + \dots = 0.$$

Параметр возмущения ϵ имеется здесь как в явной, так и в неявной форме, а потому приравнять нулю члены разложения по степеням ϵ нельзя. Предполагая функции ψ_0 и ψ_1 аналитическими и разлагая их в ряд Тейлора при $r=a$, получаем

$$\psi_0(a, \theta) - \epsilon a \sin^2 \theta \partial \psi_0(a, \theta) / \partial r + \epsilon \psi_1(a, \theta) + \dots = 0.$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях ϵ дает соотношения

$$\begin{aligned} \psi_0(a, \theta) &= 0; \quad \psi_1(a, \theta) = a \sin^2 \theta \partial \psi_0(a, \theta) / \partial r = \\ &= 0,5 v_0 a (3 \sin \theta - \sin 3\theta). \end{aligned}$$

Обе задачи имеют ту же форму, что и основная задача, а потому их решение может быть написано непосредственно. Полное приближение первого порядка имеет вид

$$\psi = v_0 \left[\left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\epsilon}{2} \left(3 \frac{a^2}{r} \sin \theta - \frac{a^4}{r^3} \sin 3\theta \right) \right] + O(\epsilon^2).$$

Рассмотрим теперь возмущение, связанное с уравнением движения для несжимаемой жидкости, когда число Маха набегающего потока мало. В этом случае уравнение для потенциала скоростей задано в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{M^2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\ &+ (\gamma - 1) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 - 1 \right] \nabla^2 \varphi \Big\}, \end{aligned}$$

где M — число Маха; γ — показатель адиабаты. Масштаб удобно выбрать так, чтобы радиус круга был равен единице, тогда граничные условия будут определяться следующими соотношениями: в набегающем потоке $\varphi \rightarrow r \cos \theta$ при $r \rightarrow \infty$; на поверхности тела $\partial \varphi(1, \theta) / \partial r = 0$. К ним следует добавить условие симметрии, исключающее циркуляцию. Решение этой задачи аналогично предыдущему. Полное приближение первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + M^2 \left[\left(\frac{13}{12} \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{12} \frac{1}{r^5} \right) \cos \theta + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{12} \frac{1}{r^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{r} \right) \cos 3\theta \right]; \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

при этом следует указать на независимость решения (3.6.20) от множителя $(\gamma-1)$, что свидетельствует о независимости сжимаемости от термодинамических свойств газа.

Отметим ряд общих положений, характерных для метода возмущений. Применение метода возмущений связано прежде всего с построением приближенных решений уравнений движения жидкости, зависящих от предельного перехода. Эти решения становятся точными при стремлении величины возмущения к нулю или некоторому критическому значению. В ряде случаев встречаются двойные или множественные предельные переходы, в которых две или более величин возмущений стремятся к своим предельным значениям. Поскольку порядок выполнения предельных переходов не может быть изменен, приходится уточнять относительную скорость стремления к пределам, что требует введения параметра подобия задачи. Например, в гиперзвуковой теории малых возмущений для тела с относительной толщиной ε принимают следующий параметр подобия:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty \end{array} \right\} \frac{1}{M\varepsilon} = 0(1).$$

Величина возмущения никогда не определена однозначно, поэтому параметр подобия выбирают в удобной форме. Например, в гиперзвуковой теории малых возмущений и в смежных режимах сверхзвукового течения вместо $1/M$ лучше принять $1/\sqrt{M^2-1}$.

Решение задач механики жидкости и газа зависит от координат x^i и времени t , а также от различных параметров, при этом одна или несколько из этих величин при их определении в решении с заданным возмущением могут быть малыми. Рассмотрим зависимость решения от одной такой величины возмущения при фиксированных остальных координатах и параметрах, т. е. опишем поведение функции $f(\varepsilon)$, когда ε приближается к нулю, что может быть проведено при сопоставлении функции с некоторым набором функций сравнения. Функции сравнения являются простыми, их предельное поведение можно считать известным. Для сравнения используются символы O и o , которые служат необходимым средством учета степени приближения в возмущенных решениях. Символ O применяется тогда, когда сравнение $f(\varepsilon)$ с функцией сравнения $\delta(\varepsilon)$ показывает, что отношение $f(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)$ остается ограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, $f(\varepsilon) = O[\delta(\varepsilon)]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)) < \infty$. Если

$f(\varepsilon)/\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, то применяют символ o : $f(\varepsilon) = o[\delta(\varepsilon)]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)) = 0$.

Опираясь на результаты сравнения, можно написать $f(\varepsilon) \sim c\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)] = c$. В этом случае мы имеем асимптотическую форму (*представление*) функции $f(\varepsilon)$:

$$f(\varepsilon) = c\delta(\varepsilon) + o[\delta(\varepsilon)]. \quad (3.6.21)$$

Уточнение представления функции $f(\varepsilon)$ возможно последовательным применением формулы (3.6.21). Его результатом является асимптотическое разложение (ряд)

$$f(\varepsilon) \sim C_1\delta_1(\varepsilon) + C_2\delta_2(\varepsilon) + \dots + C_n\delta_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n C_k\delta_k(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (3.6.22)$$

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n C_k\delta_k(\varepsilon) + o[\delta_n(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если функция $f(\varepsilon)$ известна вместе с функциями сравнения $\delta_k(\varepsilon)$, то коэффициенты C_k асимптотического разложения могут быть вычислены по формуле

$$C_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{k=1}^{n-1} C_k\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}.$$

При $n \rightarrow \infty$ ряд (3.6.22) будет бесконечным сходящимся или расходящимся асимптотическим рядом.

Описанный процесс асимптотического разложения более эффективен, чем метод построения возмущенных решений, так как в этом случае для построения возмущенного решения задачи требуется специальная система функций сравнения $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$, $\delta_3(\varepsilon)$, ..., расположенных по убыванию порядка $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n)$. Такая асимптотическая последовательность связана с задачей, ее нельзя задать произвольно, поскольку она должна быть достаточно полной, чтобы описать заданную функцию. Оценка сходимости и точности асимптотических рядов (3.6.22) является предметом особых исследований и здесь не проводится.

В механике деформируемого тела метод возмущений называют методом малого параметра, сущность которого рассмотрим на примере задач о плоском напряженном состоянии упругого тела. В декартовой системе координат (x, y, z) для плоского напряженного состояния примем $\sigma_z = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$; остальные компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y , σ_{xy} мало изменяются в направлении оси z , т. е. их можно считать функциями координат x, y .

При отсутствии внешних объемных сил уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.6.23)$$

Деформированное состояние, соответствующее плоскому напряженному состоянию, характеризуется тензором деформаций (e) с компонентами

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right); \quad e_{yz} = e_{xz} = 0,$$

которые подчиняются условию совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.6.24)$$

В физические соотношения для упругого тела

$$e_x = \frac{1}{2G} \left[\frac{2}{3m-1} k(s_0) \sigma + g(\tau_0^2) (\sigma_x - \sigma) \right];$$

$$e_y = \frac{1}{2G} \left[\frac{2}{3m-1} k(s_0) \sigma + g(\tau_0^2) (\sigma_y - \sigma) \right]; \quad (3.6.25)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{G} g(\tau_0^2) \sigma_{xy}$$

входят среднее приведенное напряжение

$$s_0 = (\sigma_x + \sigma_y) / 3G(3m-1)$$

и приведенная интенсивность касательных напряжений

$$\tau_0 = (V\sqrt{2}/3G) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}.$$

Функции $k(s_0)$ и $g(\tau_0^2)$ характеризуют упругие свойства тела и для линейной упругости $k(s_0) = 1$, $g(\tau_0^2) = 1$. Подстановка физических соотношений (3.6.25) в (3.6.24) приводит к уравнению совместности деформаций в напряжениях

$$\nabla^2 \left\{ \left[\frac{k(s_0)}{3m-1} + g(\tau_0^2) \right] (\sigma_x + \sigma_y) \right\} =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\sigma_x \frac{\partial^2 g(\tau_0^2)}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 g(\tau_0^2)}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2 g(\tau_0^2)}{\partial x \partial y} \right]. \quad (3.6.26)$$

Таким образом, уравнения равновесия (3.6.23) и уравнение совместности деформаций (3.6.26) образуют систему разрешающих уравнений для плоского напряженного состояния упругого тела.

Уравнения равновесия (3.6.23) позволяют ввести функцию напряжений Эри Φ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (3.6.27)$$

которая подчинена уравнению (3.6.26). Подстановка (3.6.27) в (3.6.26) определяет для функции напряжений $\Phi(x, y)$ уравнение

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left\{ \left[\frac{k(s_0)}{3m-1} + g(\tau_0^2) \right] \nabla^2 \Phi \right\} - \frac{3}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(\tau_0^2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(\tau_0^2) - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(\tau_0^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

Здесь

$$s_0 = \frac{1}{3G(3m-1)} \nabla^2 \Phi; \quad \tau_0^2 = \frac{2}{9G^2} \left[(\nabla^2 \Phi)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right].$$

При $k(s_0)=1$ и $g(\tau_0^2)=1+g_2\tau_0^2$ уравнение (3.6.28) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \varepsilon \left[\nabla^2 (\tau_0^2 \nabla^2 \Phi) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tau_0^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tau_0^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tau_0^2}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

где $\varepsilon = (3m-1)g_2/3m$ — малый параметр; g_2 — определяемая экспериментально величина.

Применим к уравнению (3.6.29) метод малого параметра, полагая отклонение закона упругости материала тела от закона Гука незначительным, т. е. считаем параметр ε малым. Решение уравнения (3.6.29) представим в виде разложения в ряд по степеням

$$\Phi(x, y, \varepsilon) = \Phi^{(0)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi^{(k)}(x, y). \quad (3.6.30)$$

Подстановка (3.6.30) в уравнение (3.6.29) и приравнивание коэффициентов разложения по степеням ε нулю приводят к бесконечной системе бигармонических уравнений относительно неизвестных функций $\Phi^{(k)}(x, y)$, $k=1, 2, \dots$:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi^{(k)} + A_k = 0. \quad (3.6.31)$$

Здесь величины $A_0=0$ для $k=0$ и A_k для $k \neq 0$ представляют собой выражения, составленные из функций $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(k-1)}$

и их производных, уже известных из последовательного решения предыдущих уравнений (3.6.31).

Итак, последовательные решения уравнения (3.6.31) с учетом соответствующих граничных условий рассматриваемой задачи определяют члены разложения (3.6.30) $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots$, а следовательно, и функцию напряжений $\Phi(x, y)$.

Пользуясь разложением (3.6.30), выразим компоненты тензора напряжений в виде степенных рядов относительно ϵ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sum_k \epsilon^k \sigma_x^{(k)}; \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sum_k \epsilon^k \sigma_y^{(k)}; \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^{(0)} + \sum_k \epsilon^k \sigma_{xy}^{(k)}.\end{aligned}\quad (3.6.32)$$

Здесь

$$\sigma_x^{(k)} = \Phi_{yy}^{(k)}; \quad \sigma_y^{(k)} = \Phi_{xx}^{(k)}; \quad \sigma_{xy}^{(k)} = -\Phi_{xy}^{(k)}.\quad (3.6.33)$$

При этом среднее напряжение и интенсивность напряжений

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \sum_k \epsilon^k \sigma^{(k)}, \quad \sigma_l^2 = \sigma_l^{(0)2} + \sum_k \epsilon^k \sigma_l^{(k)2}\quad (3.6.34)$$

связаны с интенсивностью касательных напряжений τ_l соотношением $\tau_l = (\sqrt{2}/3) \sigma_l$, причем

$$s_0 = \frac{1}{G(3m-1)} \left(\sigma^{(0)} + \sum_k \epsilon^k \sigma^{(k)} \right); \quad \tau_0^2 = \frac{4}{9G^2} \left(\sigma_l^{(0)2} + \sum_k \epsilon^k \sigma_l^{(k)2} \right),$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma^{(k)} &= (\sigma_x^{(k)} + \sigma_y^{(k)})/3; \quad \sigma_l^{(0)2} = 0,5 (\sigma_x^{(0)2} + \sigma_y^{(0)2} - \sigma_x^{(0)} \sigma_y^{(0)} + 3\sigma_{xy}^{(0)2}); \\ \sigma_l^{(1)2} &= \sigma_x^{(0)} \sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(0)} \sigma_y^{(1)} - 0,5 (\sigma_x^{(0)} \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(0)} \sigma_x^{(1)}) + 3\sigma_{xy}^{(0)} \sigma_{xy}^{(1)}; \\ \sigma_l^{(2)2} &= \sigma_x^{(0)} \sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(0)} \sigma_y^{(2)} + 0,5 (\sigma_x^{(1)2} + \sigma_y^{(1)2}) - \\ &- 0,5 (\sigma_x^{(0)} \sigma_y^{(2)} + \sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(1)} + \sigma_x^{(2)} \sigma_y^{(0)}) + 3\sigma_{xy}^{(0)} \sigma_{xy}^{(2)} + 1,5\sigma_{xy}^{(1)2}; \dots\end{aligned}\quad (3.6.35)$$

Компоненты вектора перемещений u_j и соответствующие деформации e_{lj} также представим в форме рядов по степеням ϵ :

$$u_j = u_j^{(0)} + \sum_k \epsilon^k u_j^{(k)}; \quad e_{lj} = e_{lj}^{(0)} + \sum_k \epsilon^k e_{lj}^{(k)},\quad (3.6.36)$$

где $j, l = 1, 2$; $k = 0, 1, 2, \dots$;

$$e_{ij}^{(k)} = 0,5 (\nabla_i u_j^{(k)} + \nabla_j u_i^{(k)}). \quad (3.6.37)$$

Воспользуемся физическим соотношением

$$e_{ij} = (1/2G)[(1+g_2\tau_0^2)(\sigma_{ij}-\sigma g_{ij})+2\sigma g_{ij}/(3m-1)]. \quad (3.6.38)$$

Подставив в него выражения (3.6.32), (3.6.34), (3.6.36) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этого уравнения, получим

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(0)} &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij}^{(0)} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \sigma^{(0)} g_{ij} \right); \\ e_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij}^{(1)} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \sigma^{(1)} g_{ij} + \frac{2m}{3m-1} \sigma_i^{(0)} (\sigma_{ij}^{(0)} - \sigma^{(0)} g_{ij}) \right]; \\ e_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{ij}^{(2)} - \frac{3(m-1)}{3m-1} \sigma^{(2)} g_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2m}{3m-1} [\sigma_i^{(0)} (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma^{(1)} g_{ij}) + \sigma_i^{(1)} (\sigma_{ij}^{(0)} - \sigma^{(0)} g_{ij})] \right\}. \end{aligned} \quad (3.6.39)$$

Таким образом, по известным решениям $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, ... уравнений (3.6.32) с соответствующими граничными условиями и формулам (3.6.33) можно вычислить $\sigma_{ij}^{(k)}$, а также компоненты тензора напряжений (3.6.32). Далее по формулам (3.6.35) можно найти величины $\sigma^{(k)}$ и $\sigma_i^{(k)}$, а по формулам (3.6.34) — среднее напряжение σ и интенсивность напряжений σ_i . Затем, вычислив по формулам (3.6.39) коэффициенты разложения $e_{ij}^{(k)}$ и деформации (3.6.36), можно интегрированием соотношений (3.6.37) определить величины $u_j^{(k)}$, по которым затем с помощью (3.6.36) вычислить компоненты вектора перемещений. Так как функция $\Phi(x, y, \varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ должна совпадать с функцией напряжений $\Phi^*(xy)$, определяемой законом Гука, то из представления (3.6.30) следует, что $\Phi(xy, 0) = \Phi^{(0)}(xy) = \Phi^*(xy)$. Значения всех величин, вводимых в процессе вычислений с индексом (0), также равны значениям, полученным для соответствующих величин типа $\Phi(x, y, 0)$ в соответствии с законом Гука. Следовательно, если полностью известно решение задачи о плоском напряженном состоянии, удовлетворяющее закону Гука, то существуют все функции типа $\Phi(xy, 0)$.

Решение уравнений (3.6.1) может быть найдено методом усреднения, который особенно успешно применяют при построении приближенных решений дифференциальных уравнений в частных производных, близких к уравнениям гиперболического типа. Метод усреднения проще всего реализовать в тех случаях, когда, применяя метод собственных функций (метод Фурье), в уравнениях можно провести разделение переменных, после чего полученные счетные системы обыкновенных диффе-

ренциальных уравнений привести к стандартной форме. По терминологии Н. Н. Боголюбова уравнениями в стандартной форме называются такие уравнения, правая часть которых пропорциональна малому параметру $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в векторной форме

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x), \quad (3.6.40)$$

где ε — малый параметр; t — время; x — точки n -мерного евклидова пространства E_n . При определенных ограничениях, накладываемых на правые части уравнения (3.6.40), заменой переменных

$$x = \xi + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k F_k(t, \xi) \quad (3.6.41)$$

уравнение (3.6.40) можно привести к эквивалентному уравнению

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi) + \sum_{k=2}^m \varepsilon^k P_k(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi).$$

Пренебрегая слагаемым $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi)$, получим «усредненное» уравнение m -го приближения

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi) + \sum_{k=2}^m \varepsilon^k P_k(\xi).$$

Функции $F_k(t, \xi)$ находятся элементарно. Функции $X_0(\xi)$ и $P_k(\xi)$ определим в результате усреднения правой части уравнения (3.6.40) после подстановки в него выражения (3.6.41). В результате получим

$$X(\xi) = M_t \{X(t, \xi)\},$$

где M_t — оператор усреднения при постоянных x , или оператор усреднения по явно содержащемуся времени.

Математическое обоснование метода усреднения сводится к следующему: 1) отыскание условий, при которых разность между решениями точной и соответствующей ей усредненной систем для достаточно малого параметра $\varepsilon > 0$ становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но конечном интервале времени; 2) установление соответствий между различными свойствами решений точных и усредненных уравнений, зависящих от их поведения на бесконечном интервале времени.

Первая задача разрешима с помощью *первой основной теоремы Боголюбова*. Пусть функция $X(t, x)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для некоторой области D можно указать такие положительные постоянные M и λ , что для всех вещественных значений $t \geq 0$ и для любых точек x, x', x'' из этой области выполняются неравенства

$$|X(t, x)| \leq M; \quad |X(t, x') - X(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|;$$

2) в области D равномерно относительно x существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x).$$

Тогда любым сколь угодно малым положительным ρ, η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0 , что если $\xi(t)$ — решение уравнения $d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi)$, определенное на интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе со своей ρ -окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство $|x(t) - \xi(t)| < \eta$, где $x(t)$ — решение уравнения (3.6.40), совпадающее с $\xi(t)$ при $t=0$.

Для решения второй задачи воспользуемся *второй основной теоремой Боголюбова*. Пусть функция $X(t, x)$ уравнения (3.6.40) удовлетворяет следующим четырем условиям:

1) усредненное уравнение $d\varepsilon/dt = \varepsilon X_0(\xi)$, где

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt,$$

при $T \rightarrow \infty$ имеет квазистатическое решение $\xi = \xi_0$;

2) вещественные части всех n корней характеристического уравнения

$$\text{Det } |pI - X'_{0\xi}(\xi_0)| = 0,$$

составленного для уравнения в вариациях

$$d\delta\xi/dt = \varepsilon_0 X'_{0\xi}(\xi_0) d\xi,$$

соответствующих квазистатическому решению $\xi = \xi_0$, отличны от нуля;

3) можно указать такую ρ -окрестность D_ρ точки ξ_0 , в которой $X(t, x)$ — почти периодические функции t , равномерные относительно $x \in D_\rho$;

4) функция $X(t, x)$ и ее частные производные первого порядка по x ограничены и равномерно непрерывны относительно x в области $-\infty < t < \infty, x \in D_\rho$.

Тогда можно указать такие положительные постоянные $\varepsilon', \sigma_0, \sigma_1$ ($\sigma_0 \leq \sigma_1 < \rho$), что для всякого положительного $\varepsilon < \varepsilon'$ справедливы следующие четыре утверждения:

1. Уравнение (3.6.40) имеет единственное решение $x^*(t)$, определенное на всем интервале $(-\infty, \infty)$, для которого $|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, -\infty < t < \infty$.

2. Решение $x^*(t)$ почти периодическое с частотным базисом функции $X(t, x)$.

3. Можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю вместе с ε , что будет выполняться неравенство $|x^*(t) - \xi_0| \leq \delta(\varepsilon)$, $-\infty < t < \infty$.

4. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (3.6.40), отличное от $x^*(t)$, при $t=t_0$ удовлетворяющее неравенству $|x(t) - \xi_0| < \sigma_0$. Тогда, если вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, разность $|x(t) - x^*(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, причем $|x(t) - x^*(t)| < Ce^{-\gamma(t-t_0)}$, где $C, \gamma > 0$ — постоянные. Если вещественные части корней характеристического уравнения положительны, то можно найти такое $t_1 > t_0$, для которого $|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1$; если s вещественных частей корней отрицательны, а остальные $n-s$ положительны, то в σ_0 -окрестности точки ξ_0 существует s -мерное точечное многообразие m_{t_0} такое, что из соотношения $x(t) \in m_{t_0}$ следует экспоненциальное стремление к нулю разности $|x(t) - x^*(t)|$ при $t \rightarrow \infty$.

Из четвертого утверждения следует, что решение $x^*(t)$ устойчиво асимптотически, когда вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны. Если вещественная часть хотя бы одного из корней положительна, решение $x^*(t)$ оказывается неустойчивым.

Применимость метода усреднений к дифференциальным уравнениям в частных производных проиллюстрируем на уравнении гиперболического типа с постоянными коэффициентами

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial u}{\partial t} + E \frac{\partial u}{\partial x} + Ku = \\ = \varepsilon F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (3.6.42)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $F(t, x, u, \partial u/\partial t, \partial u/\partial x)$ — нелинейная функция; коэффициенты A, B, C удовлетворяют условию $B^2 - AC > 0$.

Заменой зависимых и независимых переменных приведем уравнение (3.6.42) при соблюдении указанного условия к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u + \varepsilon F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (3.6.43)$$

решение которого будем искать при следующих граничных и начальных условиях

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0; \quad u(0, x) = f(x), \\ \partial u(t, x) / \partial t|_{t=0} = F(x), \quad (3.6.44)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ — непрерывные функции.

Невозмущенное уравнение, соответствующее уравнению (3.6.43), имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u,$$

и при условиях (3.6.44) имеет решение

$$u(t, x) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin(n\pi x/l),$$

где A_n и B_n — постоянные, определяемые из начальных условий; $\omega_n = \sqrt{(n\pi a/l)^2 - \lambda} > 0$.

Принимая во внимание решение невозмущенного уравнения и предполагая, что в связи с малостью параметра ε формы колебаний нормальных тонов при наличии возмущения с достаточной точностью определяются функциями $\sin(n\pi x/l)$, решение возмущенного уравнения (3.6.43) представим в виде ряда

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_n z_n(t) \sin(n\pi x/l).$$

Здесь $z_n(t)$ — неизвестные функции, определяемые бесконечной системой уравнений

$$d^2 z_n / dt^2 + \omega_n^2 z_n = \varepsilon F_n(t, z_1, \dots, \dot{z}_1, \dots) \quad (3.6.45)$$

с начальными условиями $z_n(0) = f_n$, $dz_n(t)/dt|_{t=0} = F_n$, где F_n , f_n — коэффициенты Фурье функций $F(x)$ и $\dot{f}(x)$ при разложении в ряд по собственным функциям $\sin(n\pi x/l)$ для $n=1, 2, \dots$

С помощью формулы

$$z_m = x_m e^{i\omega_m t} + x_{-m} e^{-i\omega_m t}$$

систему уравнений (3.6.45) можно привести к стандартной форме

$$dx_n/dt = \varepsilon X_n(t, x_1, \dots, x_{-1}, \dots), \quad (3.6.46)$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

При некоторых предположениях к уравнениям (3.6.46) применим принцип усреднения. В результате получаем усредненные уравнения в первом приближении

$$d\xi_n/dt = \varepsilon M_t \{X_n(t, \xi_1, \dots, \xi_{-1}, \dots)\},$$

решение которых определяет неизвестные ξ_n .

Рассмотрим уравнение, близкое к уравнению гиперболического типа, с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon F[t, x, u(t, x), u(t - \tau, x), u_t'(t, x), u'(t - \tau, x), \\ u_{x'}'(t, x), u_{x'}'(t - \tau, x), \varepsilon], \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

где F — нелинейная функция, периодическая по t с периодом 2π и имеющая достаточное число непрерывных частных производных по всем аргументам. Уравнению (3.6.47) соответствуют начальные и граничные условия $u(t, x) = \varphi(t, x)$ и $\partial u(t, x)/\partial t =$

$=\Phi(t, x)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$; $u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=l} = 0$, где $\varphi(t, x)$ и $\Phi(t, x)$ — непрерывные по t и достаточное число раз дифференцируемые по x функции. По аналогии с предыдущим случаем решение уравнения (3.6.47) представим в виде ряда

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_n T_n(t, \varepsilon) \sin(n\pi x/l), \quad (3.6.48)$$

где функции $T_n(t, \varepsilon)$ подлежат определению. Подстановка (3.6.48) в уравнение (3.6.47) с выполнением известных преобразований приводит для определения функций $T_n(t, \varepsilon)$ к бесконечной системе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + \omega_n^2 T_n = \varepsilon F_n \left[t, T_k(t, \varepsilon), T_k(t - \tau, \varepsilon), \frac{dT_k(t, \varepsilon)}{dt}, \frac{dT_k(t - \tau, \varepsilon)}{dt}, \varepsilon \right], \quad (3.6.49)$$

которые разрешимы при следующих начальных условиях: $T_n(t, \varepsilon) = \varphi_n(t)$ и $dT_n(t, \varepsilon)/dt = \Phi_n(t)$ для $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, где $\varphi_n(t)$, $\Phi_n(t)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(t, x)$ и $\Phi(t, x)$ при разложении в ряд по собственным функциям $\sin(n\pi x/l)$.

Приведение уравнений (3.6.49) к стандартной форме выполняется с помощью формулы

$$T_m = z_m e^{i\omega_m t} + z_{-m} e^{-i\omega_m t},$$

уравнения (3.6.49) можно привести к стандартной форме

$$dz_n/dt = \varepsilon z_n[t, z_k(t), z_k(t - \tau), \varepsilon] \quad (3.6.50)$$

с начальными условиями

$$z_n(t) = \frac{1}{2} \varphi_n(t) e^{-i\omega_n t} + \frac{1}{2i\omega_n} \Phi_n(t) e^{-i\omega_n t}$$

для $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$. Здесь $z_n = (\bar{F}_n/2i\omega_n) e^{-i\omega_n t}$. $\omega_n = \omega_{-n}$; $F_n = \bar{F}_{-n}$.

Применение метода усреднения к системе (3.6.50) сводится к тому, что ее решение с соответствующими начальными условиями может быть с достаточной точностью аппроксимировано более простой системой

$$d\xi_n/dt = \varepsilon Z_n^{(0)}[\xi_k(t), \xi_k(t - \tau), \varepsilon], \quad (3.6.51)$$

где $Z_n^{(0)}(x, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T Z_n(t, x, \varepsilon) dt$, с теми же начальными условиями.

Задача существенно упрощается, когда запаздывание мало. Тогда вместо системы (3.6.51) приходим к усредненной системе

$$d\xi_n/dt = \varepsilon Z_n^{(0)}[\xi_k(t), \varepsilon],$$

решение которой определяет ξ_n .

ГЛАВА 4 ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

4.1. Задачи о течении жидкости и газа, их линеаризация

Приближенные решения нелинейных разрешающих уравнений механики жидкости и газа применительно к задачам установившегося и неустановившегося течений как идеальной, так и вязкой жидкости (газа) можно построить различными методами. Линеаризация разрешающих уравнений (1.3.17) механики идеальной жидкости (газа) приводит для потенциала скоростей φ_1 возмущенного течения к уравнению Лапласа при установившемся и к волновому уравнению при неустановившемся течении (см. п. 2.1). Однако линеаризация уравнений (1.3.17) возможна только в случае потенциального течения при наличии малых возмущений (см. п. 3.6). В силу важности метода линеаризации и его широкого применения в механике идеальной жидкости (газа) построим решения ряда задач обтекания тел потоком жидкости.

Поскольку основное уравнение (2.1.32) линеаризованной теории — линейное, то возможно применение принципа суперпозиции. В этом отношении особый интерес представляют фундаментальные решения уравнения (2.1.32). Одним из таких решений является решение для точечного источника. Пусть имеем течение несжимаемой жидкости ($c = \infty$), тогда уравнение (2.1.32) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0. \quad (4.1.1)$$

Для точечного источника, помещенного в начало координат, потенциал скоростей φ_1 — функция переменных r и t , причем $r = \sqrt{g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta}$, а уравнение (4.1.1) преобразуется к виду $\partial^2(r\varphi_1)/\partial r^2 = 0$ и имеет решение $\varphi_1(r, t) = f(t)/4\pi r$, где $f(t)$ — мощность источника (при установившемся течении $f(t) = \text{const}$). Если источник расположен в точке x_0^α , то

$$r = \sqrt{g_{\alpha\beta} (x^\alpha - x_0^\alpha) (x^\beta - x_0^\beta)}.$$

При дозвуковом течении сжимаемой жидкости ($M < 1$), когда $\varphi_1(r', t')$, $r' = \sqrt{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}$, $x'^\alpha = x^\alpha$, $x'^\beta = x^\beta$ ($\alpha \neq \beta$), $t' = \kappa^2 t + (M/c_\infty) x^\alpha$, $\kappa^2 = 1 - M^2$, уравнение (2.1.32) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial r'^2} (r' \varphi_1) = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} (r' \varphi_1).$$

Его решение можно представить в форме

$$\varphi_1(r', t') = [f(t' - \tau) + g(t' - \tau)] / 4\pi r',$$

где $\tau = r'/c_\infty$, а произвольные функции f и g характеризуют соответственно расходящуюся и сходящуюся волну. При установившемся течении f и g — постоянны, а решение принимает вид

$$\varphi_1 = \frac{A}{4\pi r'} = \frac{A}{4\pi \sqrt{g_{\alpha\alpha} x^\alpha x^\alpha + \kappa^2 (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma)}}. \quad (4.1.2)$$

Если источник находится в точке x_0^α , то

$$\varphi_1 = \frac{A}{4\pi \sqrt{g_{\alpha\alpha} (x^\alpha - x_0^\alpha) (x^\alpha - x_0^\alpha) + \kappa^2 [g_{\beta\gamma} (x^\beta - x_0^\beta) (x^\gamma - x_0^\gamma)]}}. \quad (4.1.3)$$

При сверхзвуковом течении ($M > 1$) основное уравнение (2.1.32) имеет тот же вид, что и при дозвуковом течении, его фундаментальное решение определено соотношением (4.1.2) за исключением того, что $\kappa = im$, причем $m^2 > 0$, $i^2 = -1$. Сверхзвуковое течение по характеру принципиально отличается от дозвукового течения и течения несжимаемой жидкости. Так, при установившемся течении потенциал скорости

$$\varphi_1 = \frac{A}{4\pi \sqrt{g_{\alpha\alpha} x^\alpha x^\alpha - m^2 (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma)}}$$

и его производная будут действительными и физически определенными не во всем пространстве, как в случае дозвукового течения, а только внутри конуса Маха, т. е.

$$g_{\alpha\alpha} x^\alpha x^\alpha \geq m^2 (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma),$$

где $\beta, \gamma \neq \alpha$. Для угла конусности χ характерно $\operatorname{ctg} \chi = \sqrt{M^2 - 1} = m$. Если источник находится в точке x_0^α , то

$$\varphi_1 = \frac{A}{4\pi \sqrt{g_{\alpha\alpha} (x^\alpha - x_0^\alpha) (x^\alpha - x_0^\alpha) - m^2 [g_{\beta\gamma} (x^\beta - x_0^\beta) (x^\gamma - x_0^\gamma)]}}. \quad (4.1.4)$$

В силу линейности уравнения (2.1.32) сумма выражений (4.1.3) или (4.1.4) для разных x_0^α и A будет решением уравнения (2.1.32); решениями будут также функции, получающиеся путем дифференцирования или интегрирования по координатам x^α . Если φ_1 является потенциалом источника, то производная от φ_1 по любой координате дает диполь.

Распределение мощности источника по линии приводит к *линейному источнику*, а распределение мощности источника по

поверхности — к *поверхностному источнику*. Поместим во всех точках x_0^α поверхности обтекаемого тела источники с потенциалами (4.1.3), считая $A(x_0^\alpha)$, и составим потенциал скорости

$$\varphi_1 = \int_S \frac{A(x_0^\alpha) dS}{4\pi \sqrt{g_{\alpha\alpha}(x^\alpha - x_0^\alpha)(x^\alpha - x_0^\alpha) + x^2 [g_{\beta\gamma}(x^\beta - x_0^\beta)(x^\gamma - x_0^\gamma)]}}, \quad (4.1.5)$$

распространенный по всей поверхности тела, так как подкоренное выражение в (4.1.5) положительно во всем пространстве при $M < 1$. Вид функции $A(x_0^\alpha)$ определяется из граничного условия на обтекаемой твердой стенке

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0 + \varphi_1) = 0, \quad (4.1.6)$$

где $\varphi_0 = v_0 x^\alpha$ — потенциал скорости невозмущенного течения, которое с точностью до первого порядка малости может быть записано в виде $v_0 n_\alpha + \nabla_\alpha \varphi_1 = 0$.

В качестве примера рассмотрим задачу об обтекании тела вращения потоком жидкости, направление которого совпадает с осью x^α . Для возможности применения линеаризации предположим, что тело сильно вытянуто и задано уравнением $r = R(x^\alpha)$, причем R и dR/dx^α — малы. Поле такого течения можно найти, если задать распределение источников вдоль оси тела x^α с плотностью $A(\xi) d\xi$ в точке $x^\alpha = \xi$, $x^\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$). Интегрируя по всем источникам вдоль оси x^α , получим результирующий потенциал скоростей возмущенного потока

$$\varphi_1 = \int_{-\infty}^{x^\alpha - mr} \frac{A(\xi) d\xi}{V(x^\alpha - \xi)^2 - m^2 r^2}. \quad (4.1.7)$$

Пределы интегрирования в (4.1.7) устанавливаем исходя из следующих соображений. Если вычислить потенциал φ_1 в точке пространства (x^α, r) , где $r = \sqrt{g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma}$ — расстояние от оси x^α , при верхнем пределе $\xi_1 = x^\alpha - mr$, то для $\xi > \xi_1$ приращение потенциала φ_1 в интервале (ξ_1, ξ) будет мнимым, т. е. отсутствует влияние на точки (x^α, r) источников, распределенных на (ξ_1, ξ) . Возмущение $A(\xi)$, вызываемое заостренным узким телом, равно нулю для $\xi \geq 0$, поэтому нижний предел интеграла (4.1.7) можно считать равным нулю.

Пользуясь преобразованием $\xi = x^\alpha - mr \operatorname{ch} \delta$, запишем интеграл (4.1.7) в виде

$$\varphi_1(x^\alpha, r) = \int_0^\infty A(\xi) d\delta = \int_0^\infty A(x^\alpha - mr \operatorname{ch} \delta) d\delta,$$

тогда компоненты вектора скорости будут равны

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^\alpha} = \int_0^\infty A' (x^\alpha - mr \operatorname{ch} \delta) d\delta = \\ &= \int_0^{x^\alpha - mr} \frac{dA}{dx_0^\alpha} \frac{dx_0^\alpha}{\sqrt{(x^\alpha - x_0^\alpha)^2 - m^2 r^2}}; \\ v_r &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = - \int_0^\infty m \operatorname{ch} \delta A' (x^\alpha - mr \operatorname{ch} \delta) d\delta = \\ &= - \frac{1}{r} \int_0^{x^\alpha - mr} \frac{dA}{dx_0^\alpha} \frac{(x^\alpha - x_0^\alpha)}{\sqrt{(x^\alpha - x_0^\alpha)^2 - m^2 r^2}} dx_0^\alpha. \end{aligned}$$

Функция $A(\xi)$ определяется из граничных условий (4.1.6), которые эквивалентны интегральному уравнению

$$v_0 R \frac{dR}{dx^\alpha} + \left[\int_0^{x^\alpha - mr} \frac{x^\alpha - \xi}{\sqrt{(x^\alpha - \xi)^2 - m^2 r^2}} \frac{dA}{d\xi} d\xi \right]_{r=l} = 0. \quad (4.1.8)$$

По известной функции $A(\xi)$ с помощью соотношения

$$v_0 \nabla_\alpha \varphi_1 + p' / \rho = 0 \quad (4.1.9)$$

можно найти давление p' возмущенного потока, а затем и силу P , действующую на обтекаемое тело:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^l p' |_{r=R} R \frac{dR}{dx^\alpha} dx^\alpha = \\ &= -2\pi \rho_0 v_0 \int_0^l \left[\int_0^{x^\alpha - mr} \frac{dA}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(x^\alpha - \xi)^2 - m^2 r^2}} \right]_{r=R} R \frac{dR}{dx^\alpha} dx^\alpha, \end{aligned}$$

где l — длина тела.

Пусть тело вращения находится в потоке жидкости, движущемся со скоростью v_0 и направленном под углом β к оси симметрии. Разложим скорость потока v_0 на две составляющие: $v_{||}$ — параллельную оси и $v_{\perp}$ — перпендикулярную оси, тогда

$$v_{||} = v_0 \cos \beta \simeq v_0; \quad v_{\perp} = -v_0 \sin \beta \simeq -v_0 \beta,$$

причем $v_{||}$ — конечная величина, а $v_{\perp}$ — малая величина в силу малости угла β . Поместим начало координат в вершине тела и направим ось вдоль оси симметрии. Потенциал скорости φ_1 запишем в виде $\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_1'' + \varphi_1'''$, причем потенциал $\varphi_1' =$

$=v_{\perp}r \cos \theta \simeq v_0 \beta r \cos \theta$ представляет собой плоскопараллельный поток, бегущий с малой скоростью параллельно плоскости, проходящей через направление v_0 и через ось тела; φ_1'' — потенциал осесимметричного обтекания тела потоком со скоростью v_{∞} ; φ_1''' — потенциал, не обладающий осевой симметрией и возникающий из-за наличия составляющей скорости $v_{\perp}$. Потенциал φ_1'' находим в форме (4.1.7):

$$\varphi_1'' = \int_0^{x^{\alpha}-mr} \frac{A_1(\zeta)}{\sqrt{(x^{\alpha}-\zeta)^2 - m^2 r^2}} d\zeta,$$

где $A_1(\zeta)$ — функция, определяемая уравнением (4.1.8). Потенциал φ_1''' можно представить в виде $\varphi_1''' = \cos \Phi$, тогда $\Phi = \partial \varphi_1'' / \partial r$ и потенциал скорости

$$\varphi_1''' = -\frac{\cos \theta}{r} \int_0^{x^{\alpha}-mr} \frac{A_2(\zeta)(x^{\alpha}-\zeta)}{\sqrt{(x^{\alpha}-\zeta)^2 - m^2 r^2}} d\zeta,$$

где $A_2(\zeta)$ — подлежащая определению функция.

Граничные условия (4.1.6) с точностью до малых первого порядка можно записать в форме

$$v_0 n_{\alpha} + v_0 \beta \cos \theta (\partial \varphi_1'' / \partial r)_{r=R} + (\partial \varphi_1''' / \partial r)_{r=R} = 0,$$

откуда

$$v_0 n_{\alpha} + (\partial \varphi_1'' / \partial r)_{r=R} = 0; \quad v_0 \beta \cos \theta + (\partial \varphi_1''' / \partial r)_{r=R} = 0.$$

Эти условия приводят к двум уравнениям

$$v_0 R \frac{dR}{dx^{\alpha}} + \left[\int_0^{x^{\alpha}-mr} \frac{(x^{\alpha}-\zeta)}{\sqrt{(x^{\alpha}-\zeta)^2 - m^2 r^2}} \frac{dA_1}{d\zeta} d\zeta \right]_{r=R} = 0;$$

$$v_0 \beta = - \left[\frac{1}{r} \int_0^{x^{\alpha}-mr} \frac{(x^{\alpha}-\zeta)^2}{\sqrt{(x^{\alpha}-\zeta)^2 - m^2 r^2}} \frac{dA_2}{d\zeta} d\zeta \right]_{r=R},$$

решения которых определяют функции $A_1(\zeta)$.

Давление p' находим с помощью соотношения (4.1.9):

$$p' = p_1' + p_2' \cos \theta.$$

Здесь

$$p_1' = \rho_0 v_0 \int_0^{x^{\alpha}-mr} \frac{dA_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(x^{\alpha}-\zeta)^2 - m^2 r^2}};$$

$$p_2' = -\rho_0 v_0 m \int_0^{x^{\alpha}-mr} \frac{dA_2}{d\zeta} \frac{(x^{\alpha}-\zeta) d\zeta}{\sqrt{(x^{\alpha}-\zeta)^2 - m^2 r^2}}.$$

Найденному давлению p' соответствуют продольная сила

$$P_{\text{пр}} = 2\pi\rho_0 v_0 \int_0^l R \frac{dR}{dx^\alpha} \left[\int_0^{x^\alpha - mr} \frac{dA_1}{d\xi} \frac{d\xi}{V(x^\alpha - \xi)^2 - m^2 r^2} \right]_{r=R} dx^\alpha,$$

поперечная сила

$$P_{\text{поп}} = -\pi\rho_0 v_0 m \int_0^l R \left[\int_0^{x^\alpha - mr} \frac{dA_2}{d\xi} \frac{(x^\alpha - \xi) d\xi}{V(x^\alpha - \xi)^2 - m^2 r^2} \right]_{r=R} dx^\alpha$$

и момент относительно вершины тела

$$M = -\pi\rho_0 v_0 m \int_0^l x^\alpha R \left[\int_0^{x^\alpha - mr} \frac{dA_2}{d\xi} \frac{(x^\alpha - \xi) d\xi}{V(x^\alpha - \xi)^2 - m^2 r^2} \right]_{r=R} dx^\alpha.$$

Пусть v_{0j} — компоненты вектора скорости невозмущенного потока, v_j — компоненты вектора скорости возмущенного потока и w_j — компоненты вектора скорости, характеризующего возмущение потока массы, тогда

$$\rho_0 (w_j + v_{0j}) = \rho (v_{0j} + v_j),$$

где ρ_0 , ρ — плотность невозмущенного и возмущенного потоков соответственно. В этом случае уравнения поля имеют вид

$$\Lambda_j^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta = 0; \quad g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha w_\beta = 0,$$

а для линейного приближения

$$w_j = v_j - v_0^\alpha v_\alpha v_{0j} / c_0^2; \quad p' = -\rho_0 v_0^\alpha v_\alpha.$$

Если v_j и w_j удовлетворяют линеаризованному уравнению и являются ограниченными и непрерывными на замкнутой поверхности S и внутри нее, то легко показать, что интеграл

$$\int_S (v_j w_k n^k - 0,5 v^k w_k n_j) dS = 0, \quad (4.1.10)$$

где n_j — компоненты вектора внешней нормали к поверхности S .

Пусть $v_j^{(1)}$, $w_k^{(1)}$ и $v_j^{(2)}$, $w_k^{(2)}$ соответствуют двум различным линеаризованным течениям, тогда из (4.1.10) имеем

$$\int_S (v_j^{(1)} w_k^{(2)} n^k + w_j^{(2)} w_k^{(1)} n^k - v^{(1)k} w_k^{(2)} n_j) dS = 0. \quad (4.1.11)$$

Опираясь на тождество (4.1.11), установим *теорему об обратном течении*. С этой целью рассмотрим две граничные поверхности тонких тел, имеющих одинаковую среднюю поверхность $\langle S \rangle$. Пусть $v_j^{(1)}$ и $v_j^{(2)}$ — компоненты векторов скорости возмущенных потоков соответственно для v_{0j} и $-v_{0j}$. Граничные условия на средней поверхности опреде-

лены равенствами $n^\alpha v_\alpha^{(1)} = -v_{0\alpha} n^{(1)\alpha}$ и $n^\alpha v_\alpha^{(2)} = v_{0\alpha} n^{(2)\alpha}$. Умножая (4.1.11) скалярно на v_{0j} и используя условия ограниченности $v_j^{(1)}$ и $v_j^{(2)}$, получим равенство

$$\int_{\langle S \rangle} (v_0^\alpha v_\alpha^{(1)} w_\beta^{(2)} n^\beta + v_0^\alpha v_\alpha^{(2)} w_\beta^{(1)} n^\beta - v^{(1)\alpha} w_\alpha^{(2)} n_\beta v_0^\beta) dS = \\ = v_0^\alpha \int_{\langle S \rangle} (p'_{(1)} n_\alpha^{(2)} + p'_{(2)} n_\alpha^{(1)}) dS = 0,$$

которое выражает теорему для обращенных течений. В частности, когда тела одинаковы и $n_j^{(1)} = n_j^{(2)} = n_j$, имеем

$$v_0^\alpha \int_{\langle S \rangle} p'_{(1)} n_\alpha dS = -v_0^\alpha \int_{\langle S \rangle} p'_{(2)} n_\alpha dS. \quad (4.1.12)$$

Равенство (4.1.12) указывает, что в этих двух течениях силы лобового сопротивления имеют одну и ту же величину. Сформулированная теорема справедлива для тел, имеющих одинаковую среднюю поверхность, но не обязательно абсолютно одинаковую форму.

При решении ряда задач течения идеальной сжимаемой жидкости необходим учет более сильной нелинейности, чем допускает метод линеаризации разрешающих уравнений. В таких случаях решение возможно *методом характеристик*, сущность которого рассмотрим применительно к общему квазилинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$a^{jk} \varphi_{jk}'' - b = 0, \quad (4.1.13)$$

где a^{jk} и b — коэффициенты, являющиеся функциями x^j , φ , φ_j' ; $\varphi_j' = \partial\varphi/\partial x^j$ и $\varphi_{jk}'' = \partial^2\varphi/\partial x^j \partial x^k$ — производные; j и k — индексы, по которым идет суммирование; $\varphi(x^j)$ — искомая функция переменных x^j ($j = 1, 2, 3$). Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$x^j = x^j(\beta_1, \beta_2), \quad (4.1.14)$$

где β_1 и β_2 — параметры, определяющие поверхность, и предположим, что величины φ и φ_j' существуют во всех точках на этой поверхности, тогда во всех точках поверхности имеют место уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \varphi_j' = \varphi_{jk}'' \frac{\partial x^k}{\partial \beta_1}; \quad \frac{\partial}{\partial \beta_2} \varphi_j' = \varphi_{jk}'' \frac{\partial x^k}{\partial \beta_2}, \quad (4.1.15)$$

причем только пять из них будут независимыми. Решив совместно любые пять уравнений (4.1.15) вместе с уравнением (4.1.13), получим частные производные φ_{jk}'' во всех точках поверхности (4.1.14) в виде функций от первоначально заданных величин. Введем в рассмотрение объекты

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial x^2}{\partial \beta_1} \frac{\partial x^1}{\partial \beta_2} - \frac{\partial x^1}{\partial \beta_1} \frac{\partial x^2}{\partial \beta_2}; & L_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \beta_1} \frac{\partial x^1}{\partial \beta_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial x^1}{\partial \beta_2}; \\ L_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \beta_1} \frac{\partial x^2}{\partial \beta_2} - \frac{\partial x^2}{\partial \beta_1} \frac{\partial x^1}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

тогда из соотношений (4.1.15) следуют равенства

$$\begin{aligned} \Phi_{13}'' L_2 - \Phi_{12}'' L_3 &= L_2(\Phi_1') - L_3(\Phi_1') = X_{11}; \\ \Phi_{11}'' L_3 - \Phi_{13}'' L_1 &= L_3(\Phi_1') - L_1(\Phi_1') = X_{12}; \\ \Phi_{12}'' L_1 - \Phi_{11}'' L_2 &= L_1(\Phi_1') - L_2(\Phi_1') = X_{13}; \\ \Phi_{23}'' L_2 - \Phi_{22}'' L_3 &= L_2(\Phi_2') - L_3(\Phi_2') = X_{21}; \\ \Phi_{21}'' L_3 - \Phi_{23}'' L_1 &= L_3(\Phi_2') - L_1(\Phi_2') = X_{22}; \\ \Phi_{22}'' L_1 - \Phi_{21}'' L_2 &= L_1(\Phi_2') - L_2(\Phi_2') = X_{23}; \\ \Phi_{33}'' L_2 - \Phi_{32}'' L_3 &= L_2(\Phi_3') - L_3(\Phi_3') = X_{31}; \\ \Phi_{31}'' L_3 - \Phi_{33}'' L_1 &= L_3(\Phi_3') - L_1(\Phi_3') = X_{32}; \\ \Phi_{32}'' L_1 - \Phi_{31}'' L_2 &= L_1(\Phi_3') - L_2(\Phi_3') = X_{33}. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Независимыми из девяти соотношений (4.1.17) будут только пять, так как величины X_{jk} удовлетворяют тождествам

$$L_1 X_{j1} + L_2 X_{j2} + L_3 X_{j3} = 0; \quad X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0, \quad \text{где } j=1, 2, 3.$$

Следует отметить, что запись $L_j(\Phi_k')$ означает действие L_j на Φ_k' которое получается заменой переменной x_k на Φ_k' в выражениях (4.1.16). Решение уравнений (4.1.17) определяет производные $\Phi_{jk}'' = Y_{jk}/Z$, где Y_{jk} и Z — миноры матрицы шестого порядка с шестью строками и семью столбцами. Если Z не стремится к нулю, то производные Φ_{jk}'' определены во всех точках поверхности (4.1.14), третья и высшие производные от Φ также могут быть определены, следовательно, функция Φ голоморфная и задача Коши с начальными условиями имеет решение. При стремлении Z к нулю во всех точках поверхности (4.1.14) все значения Y_{jk} должны стремиться к нулю, если существует нетривиальное решение. Это соответствует дополнительному условию

$$Z = a^{ik} L_i L_k = 0, \quad (4.1.18)$$

с помощью которого матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & -L_3 & \dot{X}_{11} \\ L_3 & 0 & 0 & 0 & -L_1 & 0 & \dot{X}_{12} \\ 0 & -L_3 & 0 & L_2 & 0 & 0 & \dot{X}_{21} \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & \dot{X}_{23} \\ 0 & 0 & -L_1 & 0 & L_3 & 0 & \dot{X}_{32} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & 2a_{33} & 2a_{31} & 2a_{12} & b \end{pmatrix}$$

сводится к матрице пятого порядка. Уравнение (4.1.18) указывает на то, что нормаль (L_1, L_2, L_3) к поверхности (4.1.14) должна лежать на конической поверхности. Если выражение (4.1.14) везде положительное или везде отрицательное (конус мнимый), то дифференциальное уравнение (4.1.13) относится к эллиптическому типу; если выражение (4.1.18) является полным квадратом в любой точке (конус вырождается в две совпадающие плоскости), то уравнение (4.1.13) относится к параболическому типу; если уравнение (4.1.18) дает действительный конус возможных нормалей, то уравнение (4.1.13) относится к гиперболическому типу. Для гиперболического уравнения нормаль (L_1, L_2, L_3) к поверхности (4.1.14) в любой точке лежит на конусе. Касательная плоскость

$$L_1(x^1 - x_0^1) + L_2(x^2 - x_0^2) + L_3(x^3 - x_0^3) = 0$$

в точке x_0^j имеет огибающую

$$A_{jk}(x^j - x_0^j)(x_k - x_0^k) = 0, \quad (4.1.19)$$

где A_{jk} — алгебраическое дополнение элемента a^{jk} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{vmatrix}.$$

Действительный конус (4.1.19) называется *характеристическим конусом* в точке x_0^j . Смещение dx^j вдоль поверхности (4.1.14) образует огибающую, задаваемую уравнением

$$A_{jk}dx^jdx^k = 0 \quad (4.1.20)$$

и называемую *характеристическим коноидом*. Нормаль (L_1, L_2, L_3) к общей характеристической поверхности в любой точке лежит на местном конусе (4.1.19), при этом общие характеристические поверхности, проходящие через какую-либо точку, касаются местного характеристического коноида (4.1.20), который является особым видом характеристической поверхности, связанной с точкой.

Итак, при двух независимых переменных существуют два семейства характеристических кривых (характеристик), тогда как при трех независимых переменных имеем бесконечное множество семейств характеристических поверхностей, зависящих от произвольных функций. Если задана произвольная поверхность, которая не пересекает характеристических конусов, и если задано семейство кривых k на этой поверхности, то существуют два семейства характеристических поверхностей, проходящих через кривые k (бихарактеристические кривые), которые образуют характеристические коноиды, исходящие из кривой k . Обращение в нуль всех Y_{jk} при $Z=0$ эквивалентно выполнению равенств

$$a_{jj}L_jX_{jk}-a_{kk}L_kX_{kl}+a_{ll}(L_kX_{lk}-L_lX_{jj})+ \\ +2a_{kl}L_kX_{kk}-2a_{lj}L_jX_{jj}+L_jL_kb=0,$$

справедливых вдоль любой характеристической поверхности, удовлетворяющей условию (4.1.18) в каждой точке ($j, k, l=1, 2, 3$ и $j \neq k \neq l$).

Для установившегося сверхзвукового течения сжимаемой жидкости без циркуляции в качестве функции φ можно принять потенциал скорости. Уравнение (4.1.13) для φ имеет вид

$$(v^jv_j-c^2)\varphi''_{jj}+v^jv^k\varphi''_{jk}=0, \quad (4.1.21)$$

где v_j — компоненты вектора скорости частиц жидкости. Нормаль (L_1, L_2, L_3) к характеристической поверхности удовлетворяет условию

$$(v^jv_j-c^2)L_j^2+v^jv^kL_jL_k=0, \quad (4.1.22)$$

а условием, при котором (4.1.22) является квадратичной формой, будет неравенство $v^jv_j < c^2$, где c — местная скорость звука. Очевидно, что уравнение (4.1.21) относится к эллиптическому типу, если течение дозвуковое, к параболическому типу, если течение звуковое, и к гиперболическому типу, если течение сверхзвуковое.

Характеристический конус с вершиной в точке x_0^j , с осью v_j и полууглом при вершине, равном углу Маха $\chi = \arcsin(c/\sqrt{v^jv_j})$, описывается уравнением

$$\Sigma(v^kv_k+v^lv_l-c^2)(x^j-x_0^j)^2-v_jv_k(x^j-x_0^j)(x^k-x_0^k)=0,$$

характеристический коноид — уравнением

$$\Sigma(v^kv_k+v^lv_l-c^2)(dx^j)^2-v_jv_kdx^jdx^k=0,$$

а дифференциальное соотношение $Y_{12}=0$ имеет вид

$$(v^1v_1-c^2)L_1X_{13}-(v^2v_2-c^2)L_2X_{23}+(v^3v_3-c^2)(L_2X_{22}- \\ -L_3X_{11})+2v^2v^3L_2X_{22}-2v^3v^1L_1X_{11}=0.$$

Пусть n_j — компоненты вектора внешней нормали, выбранные так, чтобы они были положительными в направлении, имеющем с направлением течения жидкости угол $(\pi/2+\chi)$. Тогда уравнение (4.1.22) принимает вид $v^jn_j=0$, причем $v^1=v_0 \sin \theta \cos \varphi$; $v^2=v_0 \sin \theta \sin \varphi$; $v^3=v_0 \cos \theta$, где v_0 — скорость; θ и φ — углы, определяющие направление течения жидкости. Следовательно, уравнение $v^jn_j=0$ можно представить в виде

$$n_1 \sin \theta \cos \varphi + n_2 \sin \theta \sin \varphi + n_3 \cos \theta = -\sin \chi.$$

Введем угол между диаметральной плоскостью характеристического конуса, проходящей через бихарактеристику, и плоскостью, проходящей через ось x^1 . Введение тригонометрических функций угла δ

$$\cos \delta = \frac{n_1 \cos \theta \cos \psi + n_2 \cos \theta \sin \psi - n_3 \sin \theta}{\cos \chi};$$

$$\sin \delta = \frac{n_2 \cos \psi - n_1 \sin \psi}{\cos \chi}$$

позволяет выразить все n_j в виде функций параметра δ .

Если бихарактеристики рассматривать как параметрические кривые $\beta_2 = \text{const}$, а их ортогональные траектории как параметрические кривые $\beta_1 = \text{const}$, то уравнение $Y_{12} = 0$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta_1} + \sin \chi \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} \right) - \left(\frac{\cos \delta}{v} \frac{\partial v}{\partial \beta_1} - \frac{\sin \chi \sin \delta}{v} \frac{\partial v}{\partial \beta_2} \right) &= 0; \\ \operatorname{tg} \chi \left(\sin \chi \frac{\partial \theta}{\partial \beta_2} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \beta_1} \right) + \left(\frac{\sin \chi \cos \delta}{v} \frac{\partial v}{\partial \beta_2} + \frac{\sin \delta}{v} \frac{\partial v}{\partial \beta_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Соотношения (4.1.23) служат основой для численного расчета характеристик течения.

Неустановившееся осесимметричное течение сжимаемой жидкости также можно изучать методом характеристик с тремя независимыми переменными x^j ($j=1, 2$), t . При потенциальном течении потенциал скорости φ выражается соотношениями

$$v_j = \nabla_j \varphi; \quad v_3 = \partial \varphi / \partial t = -[0,5 v^j v_j + c^2 / (k-1)]; \quad k = c_p / c_v$$

и подчиняется уравнению

$$\sum_{j=1}^2 (v^j v_j - c^2) \varphi''_{jj} + \varphi''_{tt} + 2 \left(\sum_{j=1}^2 v^j \varphi''_{jt} + v^1 v^2 \varphi''_{12} \right) = 0.$$

Нормаль (L_1, L_2, L_3) к характеристической поверхности удовлетворяет уравнению

$$\sum_j (v^j v_j - c^2) L_j^2 + L_3^2 + 2 \left(\sum_j v^j L_j L_3 + v^1 v^2 L_1 L_2 \right) = 0,$$

которое будет гиперболическим при $c \neq 0$. Характеристический конус в точке (x_0^j, t_0) описывается уравнением

$$\sum_j [(x^j - x_0^j)^2 - 2 v_j (x^j - x_0^j)(t - t_0)] + \left(\sum_j v^j v_j - c^2 \right) (t - t_0)^2 = 0,$$

характеристический коноид — уравнением

$$\sum_j (dx^j - v^j dt)^2 = (cdt)^2,$$

а дифференциальное соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} (v^1 v_1 - c^2) L_1 X_{13} - (v^2 v_2 - c^2) L_2 X_{23} + L_2 X_{32} - L_3 X_{11} + \\ + 2(v^2 L_2 X_{22} - v^1 L_1 X_{11}) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Если параметр δ выбрать так, что

$$L_1/\sin \delta = L_2/\cos \delta = -L_2/(v_1 \sin \delta + v_2 \cos \delta + c),$$

то бихарактеристическим будет направление $(v_1 + c \sin \delta, v_2 + c \cos \delta, 1)$. Если бихарактеристики выбраны так, что $\beta_2 = \text{const}$, а кривые пересечения с плоскостью $t = \text{const}$ так, что $\beta_1 = \text{const}$, то дифференциальное соотношение (4.1.24) принимает вид уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \beta_1} - \frac{\partial v_2}{\partial \beta_2} \right) + \frac{2}{k-1} \left(\sin \delta \frac{\partial c}{\partial \beta_1} + \cos \delta \frac{\partial c}{\partial \beta_2} \right) &= 0; \\ \left(\frac{\partial v_1}{\partial \beta_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \beta_1} \right) + \frac{2}{k-1} \left(\cos \delta \frac{\partial c}{\partial \beta_1} - \sin \delta \frac{\partial c}{\partial \beta_2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

которые лежат в основе численных расчетов рассматриваемого течения жидкости. При $v_1 = 0$ и $\delta = 0$ соотношения (4.1.25) сводятся к инварианту Римана для одномерного течения $v_2 \pm \pm 2c/(k-1) = \text{const}$ вдоль характеристики $dx^2/dt = (v_2 \pm c)$.

Поскольку метод характеристик при трех независимых переменных является громоздким, целесообразно использовать метод линеаризации. Дифференциальное уравнение потенциала скорости Φ для неустановившегося течения невязкой сжимаемой жидкости без циркуляции в трехмерном пространстве можно записать в форме

$$\square^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (g^{jk} \nabla_j \Phi \nabla_k) \right] (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi), \quad (4.1.26)$$

причем скорость звука c связана здесь с потенциалом скорости соотношением

$$c_0^2 - c^2 = (k-1) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi \right] = \frac{k p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Пусть имеется однородный поток, обтекающий со скоростью v_0 в направлении оси x тонкое тело. Тогда потенциал скорости можно записать как

$$\Phi = v_0 x + \varepsilon v_0 l \varphi_1(\xi, \eta, \varsigma, \tau),$$

где φ_1 — безразмерное возмущение потенциала скорости; l — характеристическая длина тела вдоль оси; $\xi = x/l$; $\eta = \lambda y/l$; $\varsigma = \mu z/l$; $\tau = \gamma v_0 T/l$, причем параметры $\lambda, \mu, \gamma, \varepsilon$ должны быть определены так, чтобы функция φ_1 и все ее производные были порядка единицы. Компоненты вектора скорости заданы формулами

$$v_1 = v_0(1 + \varepsilon \varphi'_{1\xi}); \quad v_2 = v_0 \varepsilon \lambda \varphi'_{1\eta}; \quad v_3 = v_0 \varepsilon \mu \varphi'_{1\varsigma},$$

а если возмущение скорости мало, то

$$\varepsilon \ll 1; \quad \varepsilon \lambda \ll 1; \quad \varepsilon \mu \ll 1. \quad (4.1.27)$$

Условие малости коэффициента давления

$$c_p = \frac{p - p_0}{0.5 \rho_0 v_0^2} = \frac{2}{k M^2} \left[\left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2k}{k-1}} - 1 \right]$$

приводит к сильным неравенствам

$$\epsilon M^2 \ll 1; \epsilon \gamma M^2 \ll 1; \epsilon \lambda M \ll 1; \epsilon \mu M \ll 1. \quad (4.1.28)$$

С учетом условий (4.1.27) и (4.1.28) получим эффективное уравнение для φ_1

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{M^2} \varphi_{1\eta\eta}'' + \frac{\mu^2}{M^2} \varphi_{1\xi\xi}'' &= \gamma^2 \varphi_{1\tau\tau}' + 2\gamma \varphi_{1\xi\tau}' + \\ &+ [(1 - M^{-2}) + \epsilon(k+1) \varphi_{1\xi}'] \varphi_{1\xi\xi}', \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

где коэффициент давления c_p определяется выражением

$$c_p = -2\epsilon [\varphi_{1\xi}' + \gamma \varphi_{1\tau}' + 0.5\epsilon (\lambda^2 \varphi_{1\eta}'' + \mu^2 \varphi_{1\xi}')] .$$

В уравнении поверхности тонкого тела $z = \delta g l(\xi, \eta, \zeta)$ величины $g=0$ (1) и $\delta \ll 1$, тогда $\lambda \delta < 1$, и граничные условия при $\xi = \mu \delta g$ задаются равенством

$$(\varphi_{1z}) = (\delta / \mu \epsilon) [\gamma g_{\tau}' + (1 + \epsilon \varphi_{1\xi}') g_{\xi}' + \epsilon \lambda^2 \varphi_{1\eta}' g_{\eta}'], \quad (4.1.30)$$

причем μ и ϵ определяются из граничного условия (4.1.30) и уравнения (4.1.29).

Достаточными условиями линеаризации уравнения (4.1.26) в окрестности тонкого тела будут сильные неравенства $\delta \ll 1$; $\gamma \delta \ll 1$; $M \delta \ll 1$; $\gamma M \delta \ll 1$, а также любое из следующих: $|M-1| \gg \delta^{2/3}$; $\gamma \gg \delta^{2/3}$. Если эти условия удовлетворяются, то линеаризованное уравнение имеет вид

$$c_0^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi,$$

и выражение для давления

$$p - p_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi,$$

в противном случае уравнение для потенциала скорости возмущенного течения будет нелинейным.

Для линеаризации разрешающих уравнений механики несжимаемой вязкой жидкости при отсутствии теплового воздействия (2.1.36) можно использовать критерии подобия, к которым относятся числа Эйлера $E = p / \rho v^2$, Фруда $Fr = v^2 / gl$, Струхала $St = l / Tv$, Рейнольдса $Re = vl / \nu$, где $\nu = \mu / \rho$. Уравнения движения в безразмерных величинах с помощью критериев подобия могут быть представлены в виде

$$St Re \frac{\partial v_j}{\partial t} + Re v^k \nabla_k v_j = \frac{Re}{Fr} F_j - E Re \nabla_j p + \nabla^2 v_j, \quad (4.1.31)$$

где при квадратичных членах инерции находится множитель в виде одного числа Re . Следовательно, если число Re считать малым ($Re \ll 1$), то квадратичными членами инерции в левых частях уравнений (4.1.31) можно пренебречь. Однако требование $Re \ll 1$ является только достаточным, но не необходимым, чтобы считать квадратичные члены инерции малыми величинами. Они могут быть малыми и в том случае, когда число Re не является малым, но траектории частиц близки к параллельным прямым или концентрическим окружностям. Для сохранения в уравнениях (4.1.31) остальных слагаемых, содержащих множитель Re , необходимо предположить, что по порядку величин имеют место неравенства $St Re > 1$; $Re/Fr > 1$; $E Re > 1$. Из последнего неравенства следует условие $\rho > \mu v/l$, которое указывает, что при отбрасывании в уравнениях (4.1.31) квадратичных членов инерции давление находится в прямой зависимости от коэффициента сдвиговой вязкости μ и характерной скорости v в первой степени. В результате отбрасывания квадратичных членов инерции уравнения (4.1.31) принимают вид

$$St Re \frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{Re}{Fr} F_j - E Re \nabla_j p + \nabla^2 v_j.$$

Система разрешающих уравнений (2.1.36) может быть записана в форме

$$\nabla_j v^j = 0; \quad \partial v_j / \partial t = F_j - \nabla_j (p/\rho) + \nu \nabla^2 v_j \quad (4.1.32)$$

и представляет собой систему *приближенных уравнений Стокса* механики вязкой несжимаемой жидкости.

Дифференцируя (4.1.32) по координатам x^j и учитывая при этом уравнение неразрывности, получаем уравнение для вычисления давления $\nabla^2 p = \rho g^{kj} \nabla_k F_j$; при отсутствии объемных сил ($F_j = 0$) или их постоянстве это уравнение представляет собой гармоническую функцию $\nabla^2 p = 0$. При отсутствии объемных сил ($F_j = 0$) путем дифференцирования (4.1.32) по координатам получим для компонент вектора вихря уравнения $\partial \omega_j / \partial t = \nu \nabla^2 \Phi_j$, совпадающие по своей структуре с уравнением, описывающим процессы свободной теплопроводности, где $j = 1, 2, 3$.

Считая вязкую жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const}$), течение установившимся ($\partial v_j / \partial t = 0$) и плоскопараллельным ($v_3 = 0$, $\partial v_1 / \partial z = \partial v_2 / \partial z = 0$), а также пренебрегая действием объемных сил ($F_j = 0$) и квадратичными членами инерции по Стоксу, из (4.1.32) получим уравнения

$$\partial p / \partial x = \mu \nabla^2 v_1; \quad \partial p / \partial y = \mu \nabla^2 v_2; \quad \partial v_1 / \partial x + \partial v_2 / \partial y = 0. \quad (4.1.33)$$

Введем функцию тока ψ , полагая $v_1 = \partial \psi / \partial y$, $v_2 = -\partial \psi / \partial x$, тогда величина вихря

$$\omega = 0,5 (\partial v_2 / \partial x - \partial v_1 / \partial y) = -0,5 \nabla^2 \psi.$$

Первые два уравнения (4.1.33) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla^2 \psi) = \frac{\partial}{\partial y} (-2\mu\omega); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla^2 \psi) = -\frac{\partial}{\partial x} (-2\mu\omega)$$

и представляют собой соотношения Коши—Римана. Следовательно, можно ввести функцию $f(z) = p - i2\mu\omega$ комплексного переменного $z = x + iy$, а, исключив из приведенных равенств давление p , получить для функции тока ψ бигармоническое уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0. \quad (4.1.34)$$

Таким образом, изучение плоскопараллельного установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению бигармонического уравнения (4.1.34) для функции тока ψ , если исключить квадратичные члены инерции.

Известно, что любую бигармоническую функцию двух переменных x, y можно представить с помощью двух функций комплексного переменного z в виде

$$2\psi = \bar{z}\Phi(z) + z\bar{\Phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (4.1.35)$$

где черта сверху указывает на сопряжение переменной z и функций Φ, χ . Дифференцируя (4.1.35) по x, y , находим

$$\begin{aligned} v_1 + i v_2 &= -i [\Phi(z) + z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})]; \\ p - i2\mu\omega &= f(z) = p_0 + i4\mu\Phi'(z), \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

причем $\omega = -\Phi'(z) + \bar{\Phi}'(\bar{z})$; $p = i2\mu(\Phi'(z) - \bar{\Phi}'(\bar{z})) + p_0$.

Используем изложенные соображения для решения задачи о поступательном движении круглого цилиндра радиусом a в вязкой несжимаемой жидкости параллельно оси x с постоянной скоростью v_0 . Считая течение жидкости установившимся, пренебрегая действием объемных сил и квадратичными членами инерции, получим для функции тока ψ уравнение (4.1.34), т. е. для компонент вектора скорости частиц жидкости в полярных координатах (r, θ) находим

$$v_r = (1/r) \partial\psi/\partial\theta; \quad v_\theta = -\partial\psi/\partial r.$$

Из условия прилипания частиц жидкости к стенке следуют граничные условия при $r=a$:

$$(1/r) \partial\psi/\partial\theta = v_0 \cos \theta; \quad -\partial\psi/\partial r = -v_0 \sin \theta. \quad (4.1.37)$$

Из предположения, что возмущения, вызываемые движением цилиндра, будут малыми на некотором конечном расстоянии b , устанавливаем дополнительные граничные условия при $r=b$:

$$\partial\psi/\partial\theta = 0; \quad \partial\psi/\partial r = 0. \quad (4.1.38)$$

Вид граничных условий (4.1.37) разрешает искать решение уравнения (4.1.34) в виде $\psi = \sin \theta f(r)$, тогда

$$\nabla^2 f = \sin \theta (f'' + f'/r - f/r^2) = \sin \theta F(r);$$

$$\nabla^2 \nabla^2 f = \sin \theta (F'' + F'/r - F/r^2).$$

Решение дифференциального уравнения

$$F'' + F'/r - F/r^2 = 0$$

можно представить в виде

$$F = Ar + B/r,$$

тогда

$$2\omega = -\sin \theta (Ar + B/r), \quad p - p_0 = \mu \cos \theta (Ar - B/r),$$

т. е.

$$p - i 2\mu\omega = p_0 + \mu (Az - B/z). \quad (4.1.39)$$

Определение компонент вектора скорости требует решения дифференциального уравнения

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f = \frac{d}{dr} \left(f' + \frac{f}{r} \right) = Ar + \frac{B}{r},$$

интегрируя которое, находим

$$f' + f/r = 0,5 Ar^2 + B \ln r + C;$$

$$f = 0,125 Ar^3 + 0,5 Br (\ln r - 0,5) + Cr + D/r.$$

Итак, функции тока и компоненты вектора скорости определяются выражениями

$$\psi = \sin \theta [0,125 Ar^3 + 0,5 Br (\ln r - 0,5) + Cr + D/r];$$

$$v_r = \cos \theta [0,125 Ar^2 + 0,5 B (\ln r - 0,5) + C + D/r^2];$$

$$v_\theta = -\sin \theta [0,375 Ar^2 + 0,5 B (\ln r + 0,5) + C - D/r^2].$$

С помощью граничных условий (4.1.37) и (4.1.38) устанавливаем уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$0,125 A a^2 + 0,5 B (\ln a - 0,5) + C + D/a^2 = v_0;$$

$$0,375 A a^2 + 0,5 B (\ln a + 0,5) + C - D/a^2 = v_0;$$

$$0,125 A b^2 + 0,5 B (\ln b - 0,5) + C + D/b^2 = 0;$$

$$0,375 A b^2 + 0,5 B (\ln b + 0,5) + C - D/b^2 = 0.$$

Исключая C и D , находим уравнения

$$0,5 A (b^2 - a^2) + B \ln (b/a) = -2v_0; \quad 0,5 A (b^2 + a^2) + B = 0,$$

решение которых определяет величины

$$A = \frac{4v_0}{a^2} \frac{1}{(k^2 + 1) \ln k - (k^2 - 1)}; \quad B = -2v_0 \frac{k^2 + 1}{(k^2 + 1) \ln k - (k^2 - 1)},$$

где $k = b/a$.

Сопоставление выражений (4.1.39) с (4.1.36) приводит к соотношению

$$i4\mu\Phi'(z) = \mu(Az - B/z),$$

откуда следует

$$4\Phi(z) = -i(0,5Az^2 - B \ln z + K),$$

где K — произвольная постоянная. Тогда для результирующего воздействия на цилиндр имеем соотношение

$$R_x + iR_y = 2\pi\mu B,$$

следовательно,

$$R_x = -\frac{4\pi\mu v_0 (k^2 + 1)}{(k^2 + 1) \ln k - (k^2 - 1)},$$

т. е. сопротивление жидкости пропорционально коэффициенту сдвиговой вязкости μ и скорости v_0 поступательного движения в первой степени.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, входящие в систему разрешающих уравнений (2.1.36), имеют вид

$$\partial v_j / \partial t + v^k \nabla_k v_j = F_j - (1/\rho) \nabla_j p + \nu \nabla^2 v_j,$$

при этом координаты x^k рассматриваются для фиксированной точки пространства по отношению к неподвижной системе координат, множители $v^k = dx^k/dt$ представляют собой компоненты вектора скорости абсолютного движения фиксированной частицы жидкости. В подвижной системе координат, имеющей поступательное движение со скоростью v_0 и мгновенное вращение с угловой скоростью Ω , множители $v^k = dx^k/dt$ представляют собой компоненты вектора относительной скорости $v_{(r)}^k$ фиксированной частицы жидкости, причем абсолютную v^k , переносную $v_{(e)}^k = v_0^k + \Lambda_{\beta}^{k\alpha} \Omega_{\alpha} x^{\beta}$ и относительную $v_{(r)}^k$ скорости связывает зависимость $v^k = v_{(e)}^k + v_{(r)}^k$.

Уравнения абсолютного движения вязкой несжимаемой жидкости, отнесенные к подвижной системе координат, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial v_j / \partial t + (v^k - v_0^k - \Lambda_{\beta}^{k\alpha} \Omega_{\alpha} x^{\beta}) \nabla_k v_j = F_j - (1/\rho) \nabla_j p + \\ + \nu \nabla^2 v_j. \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Если система координат имеет только поступательное движение, совпадающее с поступательным движением рассматриваемого тела, то уравнения (4.1.40) упрощаются:

$$\partial v_j / \partial t + (v^k - v_0^k) \nabla_k v_j = F_j - (1/\rho) \nabla_j p + \nu \nabla^2 v_j.$$

Предполагая число Рейнольдса малым, можно аналогично линеаризации по Стоксу квадратичные члены инерции, содержащие компоненты v^k вектора переменной скорости, считать малыми, т. е. $v^k \nabla_k v_j \approx 0$. Тогда уравнения (4.1.40) могут быть представлены в форме

$$\partial v_j / \partial t - v_0^k \nabla_k v_j = F_j - (1/\rho) \nabla_j p + \nu \nabla^2 v_j,$$

которая была предложена Озееном и называется *обобщенными уравнениями Стокса*. В результате система разрешающих уравнений (2.1.36) принимает вид

$$\partial v_j / \partial t + v_0^k \nabla_k v_j = F_j + \nu \nabla^2 v_j - (1/\rho) \nabla_j p; \quad \nabla_j v^j = 0. \quad (4.1.41)$$

Сопоставляя уравнения (4.1.41) с уравнениями (4.1.32), приходим к заключению, что обобщенные уравнения Стокса частично учитывают квадратичные члены инерции.

Для установившегося течения жидкости без учета действия объемных сил уравнения (4.1.41) упрощаются:

$$v_0^k \nabla_k v_j = - (1/\rho) \nabla_j p + \nu \nabla^2 v_j; \quad \nabla_j v^j = 0. \quad (4.1.42)$$

Дифференцируя уравнения (4.1.42) по координатам x^j и проводя операцию суммирования по индексу j приходим к уравнению Лапласа $\nabla^2 p = 0$. Предположим, что компоненты вектора скорости можно представить в виде суммы

$$v_j = \nabla_j \varphi + v_j^{(2)}, \quad (4.1.43)$$

причем потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (4.1.44)$$

Подставив (4.1.43) в уравнения (4.1.42), получим

$$\nabla_j (v_0^k \nabla_k \varphi + p/\rho) + v_0^k \nabla_k v_j^{(2)} = \nu \nabla^2 v_j^{(2)},$$

но потенциал скоростей φ и давление p — произвольные гармонические функции, которые можно связать, положив $p = -\rho v_0^k \nabla_k \varphi$, тогда уравнения (4.1.42) представляются в виде

$$g^{jk} \nabla_j v_k^{(2)} = 0; \quad -\nu \nabla^2 v_j^{(2)} + v_0^k \nabla_k v_j^{(2)} = 0. \quad (4.1.45)$$

Пусть поступательное движение происходит в направлении координатной оси x^1 со скоростью v_0 , тогда $v_0^1 = v_0$, $v_0^2 = v_0^3 = 0$, а уравнения (4.1.45) принимают вид

$$g^{jk} \nabla_j v_k^{(2)} = 0; \quad -\nu \nabla^2 v_j^{(2)} + v_0 \nabla_1 v_j^{(2)} = 0. \quad (4.1.46)$$

Полагая $v_2^{(2)} = (v/v_0) \nabla_2 \chi$, $v_3^{(2)} = (v/v_0) \nabla_3 \chi$, приведем уравнения (4.1.46) к виду

$$\begin{aligned} \nabla_1 \left(v_1^{(2)} - \frac{v}{v_0} \nabla_1 \chi \right) + \frac{v}{v_0} \nabla^2 \chi &= 0; \\ \nabla_2 \left(\frac{v}{v_0} \nabla^2 \chi - \nabla_1 \chi \right) &= 0; \quad \nabla_3 \left(\frac{v}{v_0} \nabla^2 \chi - \nabla_1 \chi \right) = 0. \end{aligned}$$

Пусть функция χ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_1 \chi - \frac{v}{v_0} \nabla^2 \chi = 0, \quad (4.1.47)$$

тогда имеем соотношение

$$\nabla_1 \left(v_1^{(2)} + \chi - \frac{v}{v_0} \nabla_1 \chi \right) = 0,$$

которое выполняется при

$$v_1^{(2)} = -\chi + \frac{v}{v_0} \nabla_1 \chi.$$

Итак, для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости без учета объемных сил решения обобщенных уравнений Стокса определены соотношениями

$$v_3 = \nabla_3 \varphi + (v/v_0) \nabla_3 \chi; \quad v_2 = \nabla_2 \varphi + (v/v_0) \nabla_2 \chi; \quad (4.1.48)$$

$$v_1 = \nabla_1 \varphi - \chi + (v/v_0) \nabla_1 \chi; \quad p = -\rho v_0 \nabla_1 \varphi,$$

причем функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа (4.1.44), а функция χ — уравнению (4.1.47). Компоненты вектора вихря будут равны

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = -0,5 \nabla_3 \chi; \quad \omega_3 = 0,5 \nabla_2 \chi,$$

т. е. решения (4.1.48) могут иметь место только тогда, когда все вихревые линии располагаются в плоскостях, перпендикулярных к скорости потока на бесконечности, что имеет место для плоскопараллельного и осесимметричного течения жидкости. Следовательно, для этих видов течения можно строить решения обобщенных уравнений Стокса (4.1.41) в форме (4.1.48).

Условия прилипания частиц жидкости к поверхности S , ограниченной контуром Γ неподвижного тела, запишем как

$$\nabla_1 \varphi - \chi + (v/v_0) \nabla_1 \chi = 0; \quad \nabla_2 \varphi + (v/v_0) \nabla_2 \chi = 0;$$

$$\nabla_3 \varphi + (v/v_0) \nabla_3 \chi = 0,$$

при этом компоненты вектора вихря на поверхности S равны

$$2\omega_2 = (v_0/v) \nabla_3 \Phi; \quad 2\omega_3 = -(v_0/v) \nabla_2 \Phi.$$

Если принять

$$\chi = e^{v\tau/v_0} Y(x^j),$$

то уравнение (4.1.47) приводится к уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 Y - (v_0/2v)^2 Y = 0$$

для функции Y .

4.2. Метод последовательных приближений в нелинейной теории упругости

В задачах теории упругости нелинейность может быть геометрической, когда имеют место конечные деформации

$$\varepsilon_{jk} = 0,5(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j + \nabla_j u^\alpha \nabla_k u_\alpha), \quad (4.2.1)$$

и физической, когда определяющие уравнения упругой среды имеют форму

$$\sigma = 3K\kappa^*(\varepsilon)\varepsilon; \quad (D_\sigma) = 2G\gamma^*(\varepsilon_i)(D_\varepsilon),$$

где $\kappa^*(\varepsilon)$ и $\gamma^*(\varepsilon_i)$ — функции объемной и сдвиговой деформации, определяемые экспериментально. В частности, для линейно-упругой среды $\kappa^*(\varepsilon) = 1$, $\gamma^*(\varepsilon_i) = 1$. В дальнейшем функции $\kappa^*(\varepsilon)$, $\gamma^*(\varepsilon_i)$ целесообразно представить в виде

$$\kappa^*(\varepsilon) = 1 + \kappa(\varepsilon); \quad \gamma^*(\varepsilon_i) = 1 + \gamma(\varepsilon_i),$$

а определяющие уравнения записать в форме

$$\sigma = 3K[1 + \kappa(\varepsilon)]\varepsilon; \quad (D_\sigma) = 2G[1 + \gamma(\varepsilon_i)](D_\varepsilon). \quad (4.2.2)$$

Уравнениям (4.2.2) соответствуют соотношения

$$\sigma_{jk} = G[(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) + (m-1)\nabla_\beta u^\beta g_{jk}] + \sigma_{jk}^{(n)}, \quad (4.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{(n)} = & G\{\gamma(\varepsilon_i)(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) + (2/3)A(\varepsilon, \varepsilon_i)\nabla_\beta u^\beta g_{jk} + \\ & + [1 + \gamma(\varepsilon_i)]\nabla_j u^\alpha \nabla_k u_\alpha + 0,5[(m-1) + \\ & + (2/3)A(\varepsilon, \varepsilon_i)]g^{\alpha\beta}\nabla_\beta u^\alpha \nabla_\delta u_\delta g_{jk}\}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Величина $A(\varepsilon, \varepsilon_i) = 0,5(3m-1)\kappa(\varepsilon) - \gamma(\varepsilon_i)$ для линейно-упругой среды равна нулю, так как $\kappa(\varepsilon) = 0$, $\gamma(\varepsilon_i) = 0$. В частных случаях для линейно-упругой среды при малых деформациях $\sigma_{jk}^{(n)} = 0$; для линейно-упругой среды при конечных деформациях (геометрическая нелинейность)

$$\sigma_{jk}^{(n)} = G[\nabla_j u^\alpha \nabla_k u_\alpha + 0,5(m-1)g^{\beta\delta} \nabla_\beta u^\alpha \nabla_\delta u_\alpha g_{jk}];$$

для нелинейно-упругой среды при малых деформациях (физическая нелинейность)

$$\sigma_{jk}^{(n)} = G[\gamma(\varepsilon_i)(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) + (2/3)A(\varepsilon, \varepsilon_i) \nabla_\beta u^\beta g_{jk}].$$

В общем случае при конечных деформациях необходимо введение обобщенных объемных и поверхностных сил

$$F_j^* = D(F_j + g_j^\alpha \nabla_\alpha u^\beta F_\beta); \quad p_j^{*(n)} = D \sqrt{d^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta} p_j^{(n)}, \quad (4.2.5)$$

а также тензора обобщенных напряжений (σ_*) и вектора обобщенных скоростей v_* с компонентами

$$\sigma_{jk}^* = \sigma_{j\alpha} (g_k^\alpha + g_k^\gamma \nabla_\gamma u^\alpha); \quad v_j^* = v_k (g_j^k + g^{k\alpha} \nabla_\alpha u_j). \quad (4.2.6)$$

$$\text{где } D = \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_{(11)} & \varepsilon_{(12)} & \varepsilon_{(13)} \\ \varepsilon_{(12)} & 1+2\varepsilon_{(22)} & \varepsilon_{(23)} \\ \varepsilon_{(13)} & \varepsilon_{(23)} & 1+2\varepsilon_{(33)} \end{vmatrix}; \quad d^{jk} = \sqrt{g^{ij} g^{kk}} \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{(jk)}}.$$

Указанные компоненты связаны между собой уравнениями равновесия, неразрывности и движения на поверхности S :

$$\sigma_{jk}^* (S) n^k = p_j^{*(n)}; \quad \partial \rho / \partial t + \nabla_j (\rho v_j^*) = 0;$$

$$\rho dv_i^* / dt = F_j^* + g^{ka} \nabla_a \sigma_{jk}^*.$$

Компоненты тензора обобщенных напряжений σ_{jk}^* и компоненты вектора перемещений u_j связаны между собой соотношениями (4.2.3) и (4.2.4) при условии совпадения главных осей напряжений и деформаций, что выполняется в большинстве случаев.

Так как в теории упругости используются материальные (лагранжевы) координаты, то $dv_j^* / dt = \partial^2 u_j / \partial t^2$ и уравнения движения можно записать в форме

$$\rho \partial^2 u_j / \partial t^2 = g^{ak} \nabla_a \sigma_{jk}^* + F_j^*.$$

Подставив сюда производную

$$g^{ak} \nabla_a \sigma_{jk}^* = G(\nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha) + g^{ak} \nabla_a \sigma_{jk}^{(n)},$$

получим

$$\frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha + g^{ak} \nabla_a \frac{\sigma_{jk}^{(n)}}{G} + \frac{F_j^*}{G}.$$

С учетом обозначений $G/\rho = a^2$, $\sigma_{jk}^{(n)}/G = \bar{\sigma}_{jk}^{(n)}$, $F_j^*/\sigma = \bar{F}_j^*$ уравнения движения принимают вид

$$\nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \bar{F}_j^{(*)} = 0,$$

где

$$\bar{F}_j^{(*)} = \bar{F}_j^* + g^{\alpha k} \nabla_\alpha \bar{\sigma}_{jk}^{(n)} \quad (4.2.7)$$

— фиктивные объемные силы, причем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{jk}^{(n)} = & \gamma(\varepsilon_i)(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) + (2/3) A(\varepsilon, \varepsilon_i) \nabla_\beta u^\beta g_{jk} + \\ & + [1 + \gamma(\varepsilon_i)] \nabla_j u^\alpha \nabla_k u_\alpha + \\ & + 0,5 [(m-1) + (2/3) A(\varepsilon, \varepsilon_i)] g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u^\alpha \nabla_\delta u_\delta g_{jk}. \end{aligned}$$

Итак, система разрешающих уравнений нелинейной теории упругости в перемещениях имеет вид

$$\begin{aligned} \square^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha + \bar{F}_j^{(*)} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j \left(\rho \frac{\partial u^j}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Системе уравнений (4.2.8) соответствуют следующие начальные условия при $t=0$:

$$\rho = \rho_0; \quad u_j = u_j^0; \quad \partial u_j / \partial t = v_j^0. \quad (4.2.9)$$

Граничные условия заданы в перемещениях на части S_1 поверхности:

$$u_j(S) = u_{js} \quad (4.2.10)$$

и в напряжениях на части S_2 поверхности:

$$[(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) + (m-1) \nabla_\beta u^\beta g_{jk}]_S n^k = \bar{p}_j^{*(n)}, \quad (4.2.11)$$

где фиктивные поверхностные силы

$$\bar{p}_j^{*(n)} = p_j^{*(n)} / G - \bar{\sigma}_{jk}^{(n)} n^k|_S. \quad (4.2.12)$$

Решение краевой задачи (4.2.8) — (4.2.11) строим методом последовательных приближений отдельно для геометрической и физической нелинейностей. Исходным этапом решения служит решение задачи линейной теории упругости с разрешающими уравнениями

$$\begin{aligned} \square^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha + \bar{F}_j &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j \left(\rho \frac{\partial u^j}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

которым соответствуют начальные и граничные условия (4.2.9) — (4.2.11), где $\bar{F}_j = F_j / G$; $\bar{p}_j^{*(n)} = p_j^{*(n)} / G$. Решение этой задачи обозначим символами $\rho^{(e)}$, $u_j^{(e)}$ ($j = 1, 2, 3$) и считаем его известным.

Учет геометрической нелинейности проводим с помощью процедуры последовательных приближений, причем исходным считаем решение задачи (4.2.13). Первое приближение строим в следующем порядке. По известному решению $\rho^{(e)}$, $u_j^{(e)}$ и формуле

$$\bar{\sigma}_{jk}^{(n)(e)} = \nabla_j u_{(e)}^\alpha \nabla_k u_\alpha^{(e)} + 0,5(m-1)g^{\delta\beta} \nabla_\beta u_{(e)}^\alpha \nabla_\delta u_\alpha^{(e)} g_{jk}$$

определяем величины $\bar{\sigma}_{jk}^{(n)(e)}$. С помощью геометрических соотношений (4.2.1) вычисляем компоненты $\varepsilon_{jk}^{(e)}$ тензора деформаций, затем определитель $D^{(e)}$ и значения $d_{(e)}^{jk}$. По формулам (4.2.5) находим

$$F_j^{*(e)} = D^{(e)} (F_j + \nabla_j u_{(e)}^\alpha F_\alpha); \quad p_j^{*(n)(e)} = D^{(e)} \sqrt{d_{(e)}^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta} p_j^{(n)},$$

а также $\bar{F}_j^{*(e)}$ и $\bar{p}_j^{*(n)(e)}$. Затем в соответствии с (4.2.7) составляем фиктивные объемные силы

$$F_j^{*(1)} = F_j^{*(e)} + g^{\alpha k} \nabla_\alpha \bar{\sigma}_{jk}^{(n)(e)},$$

а по формулам (4.2.12) — фиктивные поверхностные силы

$$\bar{p}_j^{*(n)(1)} = \bar{p}_j^{*(n)(e)} - \bar{\sigma}_{jk}^{(n)(e)} n^k |_S.$$

Подстановка полученных значений $\bar{F}_j^{*(1)}$ в уравнения (4.2.8) и $\bar{p}_j^{*(n)(1)}$ в граничные условия (4.2.10), (4.2.11) приводит к краевой задаче первого приближения, решение которой определяет $\rho^{(1)}$ и $u_j^{(1)}$.

Второе приближение строим так же как и первое. По формуле

$$\bar{\sigma}_{jk}^{(n)(1)} = \nabla_j u_{(1)}^\alpha \nabla_k u_\alpha^{(1)} + 0,5(m-1)g^{\delta\beta} \nabla_\beta u_{(1)}^\alpha \nabla_\delta u_\alpha^{(1)} g_{jk}$$

определяем значения $\bar{\sigma}_{jk}^{(n)(1)}$. С помощью соотношений (4.2.1) вычисляем компоненты $\varepsilon_{jk}^{(1)}$ тензора деформаций, затем определитель $D^{(1)}$ и $d_{(1)}^{jk}$. По формулам (4.2.5) находим $F_j^{*(1)}$ и $p_j^{*(n)(1)}$, а также $\bar{F}_j^{*(1)}$ и $\bar{p}_j^{*(n)(1)}$. С помощью (4.2.7) определяем фиктивные объемные силы $\bar{F}_j^{*(2)}$, а по (4.2.12) — фиктивные поверхностные силы $\bar{p}_j^{*(n)(2)}$. Подстановка найденных фиктивных сил в уравнения (4.2.8) и граничные условия (4.2.10), (4.2.11) приводит к краевой задаче второго приближения, решение которой определяет $\rho^{(2)}$ и $u_j^{(2)}$. Третье и последующие приближения строим аналогично.

Учет физической нелинейности проводим для каждого приближения с учетом результатов решения задачи о геометрической нелинейности для рассматриваемого приближения. Пусть имеем для l -го приближения решение задачи по учету

геометрической нелинейности, которое обозначим $\tilde{\rho}^{(l)}$ и $\tilde{u}_j^{(l)}$. С помощью геометрических соотношений (4.2.1) вычисляем компоненты $\tilde{\varepsilon}_{jk}^{(l)}$ тензора деформаций, затем находим среднюю деформацию $\tilde{\varepsilon}^{(l)} = \Gamma_1(\tilde{\varepsilon})/3$ и интенсивность деформаций $\tilde{\varepsilon}_i^{(l)} = (\sqrt{2}/3) \sqrt{3\Gamma_2(\tilde{\varepsilon}) - \Gamma_1^{(2)}(\tilde{\varepsilon})}$, где $\Gamma_1(\tilde{\varepsilon}) = g^{jk} \tilde{\varepsilon}_{jk}^{(l)}$; $\Gamma_2(\tilde{\varepsilon}) = \tilde{\varepsilon}_{(i}^{jk} \tilde{\varepsilon}_{j)k}^{(l)}$. По известным значениям $\tilde{\varepsilon}^{(l)}$, $\tilde{\varepsilon}_i^{(l)}$ и данным эксперимента определяем функции $\chi^{(l)}(\varepsilon)$ и $\gamma^{(l)}(\varepsilon_j)$, а также функцию $A^{(l)}(\varepsilon, \varepsilon_i)$ для рассматриваемой среды. По формуле

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{jk}^{(n)(l)} = & \gamma^{(l)}(\varepsilon_i) (\nabla_j \tilde{u}_k^{(l)} + \nabla_k \tilde{u}_j^{(l)} + \nabla_j \tilde{u}_\alpha^{(l)} \nabla_k \tilde{u}_\alpha^{(l)}) + \\ & + (1/3) A^{(l)}(\varepsilon, \varepsilon_i) (2\nabla_\beta \tilde{u}_{(i}^{(l)} + g^{\delta\beta} \nabla_\beta \tilde{u}_{(i}^{(l)} \nabla_\delta \tilde{u}_{\alpha}^{(l)}) g_{jk} \end{aligned}$$

находим величины $\bar{\sigma}_{jk}^{(n)(l)}$. Обозначив фиктивные силы для l -го приближения задачи об учете геометрической нелинейности соответственно через $\tilde{F}_j^{(*)^{(l)}}$ и $\tilde{p}_j^{*(n)(l)}$, с помощью формул

$$\tilde{F}_j^{(*)^{(l)}} = \tilde{F}_j^{(*)^{(l)}} + g^{\alpha k} \nabla_\alpha \bar{\sigma}_{jk}^{(n)(l)}; \quad \tilde{p}_j^{*(n)(l)} = \tilde{p}_j^{*(n)(l)} - \bar{\sigma}_{jk}^{(n)(l)} n^k |_s$$

вычисляем фиктивные объемные и поверхностные силы, которые затем подставляем соответственно в уравнения (4.2.8) и граничные условия (4.2.10), (4.2.11). В результате приходим к краевой задаче, решение которой определяет неизвестные $\rho^{(l)}$ и $u^{(l)}$ для рассматриваемого приближения. По найденным компонентам u_j вектора перемещений и геометрическим соотношениям (4.2.1) определяем компоненты ε_{jk} тензора деформаций. С помощью формул (4.2.4) и (4.2.3) вычисляем $\sigma_{jk}^{(n)}$ и компоненты σ_{jk}^* тензора обобщенных напряжений, а затем по формулам (4.2.6) — компоненты σ_{jk} тензора напряжений упругой среды.

При решении технических задач достаточно ограничиться двумя приближениями. Оценка погрешности приближенных решений и сходимости их к точному требует особых исследований, которые здесь не рассматриваются, так как процесс считается сходящимся *a priori*.

4.3. Методы решения задач пластичности

По своей природе задачи пластичности являются нелинейными. Их нелинейность связана прежде всего со свойством пластичности среды (физическая нелинейность), а также с наличием больших деформаций (геометрическая нелинейность), которые необходимо учитывать в равной мере. В силу нелинейности задач пластичности построение точных решений сопряжено с большими трудностями, а в большинстве случаев невозможно, поэтому возникает необходимость в приближенных решениях этих задач. В основу методов построения приближенных решений задач пластичности положены различные виды процедуры последова-

тельных приближений, согласованные с постановкой рассматриваемой задачи пластичности.

Рассмотрим статическую задачу пластичности в перемещениях, приняв за основные неизвестные $\rho, \Delta T, u_j$ ($j=1, 2, 3$). Для статической задачи из уравнения неразрывности находим $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Система разрешающих уравнений (1.4.17) и (1.5.11) имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Delta T = 0; \quad \nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha - (3m-1) \alpha \nabla_j \Delta T + \\ + F_j/G = R_j(\omega), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

а граничные условия на поверхности заданы равенствами

$$\begin{aligned} u_j(S) = u_{js} \text{ на } S_1; \\ G[\nabla_j u_k + \nabla_k u_j + (m-1) \nabla_\alpha u^\alpha g_{jk}]_S n^k = \\ = p_j^{(n)} + q_j^{(n)} \text{ на } S_2; \\ \Delta T(S) = \Delta T_S \text{ или } \partial \Delta T / \partial n|_S = q/\Lambda \text{ на } S. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Формулы для определения величин $R_j(\omega)$ и $q_j^{(n)}$ входящих в уравнения (4.3.1) и граничные условия (4.3.2), имеют вид

$$\begin{aligned} R_j(\omega) = \omega \left(\nabla^2 u_j + \frac{5}{3} \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha \right) + \frac{2}{3} \nabla_\alpha u^\alpha \nabla_j \omega + \\ + (\nabla_j u^\alpha + g^{k\alpha} \nabla_k u_j) \nabla_\alpha \omega; \\ q_j^{(n)} = [q_{jk}(S) + (3m-1) \alpha (\Delta T g_{jk})_S] n^k \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

— для малых деформаций и

$$\begin{aligned} R_j(\omega) = \omega \left(\nabla^2 u_j + \frac{5}{3} \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha \right) + \frac{2}{3} \nabla_\alpha u^\alpha \nabla_j \omega + \\ + (\nabla_j u^\alpha + g^{k\alpha} \nabla_k u_j) \nabla_\alpha \omega + \nabla_k \{ (1-\omega) \nabla_j u^\alpha g^{k\delta} \nabla_\delta u^\alpha + \\ + \frac{1}{2} \left[(m-1) + \frac{2}{3} \omega \right] \nabla_\alpha u^\alpha g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u_l g_{jk} \}; \\ q_j^{(n)} = [q_{jk}(S) + \eta_{jk}(S) + (3m-1) \alpha (\Delta T g_{jk})_S] n^k \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

— для конечных деформаций,

$$\begin{aligned} \text{где} \quad q_{jk}(S) = G \omega \left(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j + \frac{2}{3} \nabla_\alpha u^\alpha g_{jk} \right)_S; \quad \eta_{jk}(S) = \\ = G \left\{ (1-\omega) \nabla_j u^\alpha \nabla_k u_\alpha + \frac{1}{2} \left[(m-1) + \frac{2}{3} \omega \right] \nabla_\alpha u^\alpha g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u_l g_{jk} \right\}_S. \end{aligned}$$

Приближенное решение разрешающих уравнений (4.3.1) с граничными условиями (4.3.2) будем искать методом *упругих*

решений, предложенным А. А. Ильюшиным. Для реализации метода введем фиктивные объемные и поверхностные силы

$$\begin{aligned} F_j^* &= R_j(\omega) + (3m-1)\alpha \nabla_j \Delta T - F_j/G; \\ p_j^{*(n)} &= p_j^{(n)} + q_j^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

с помощью которых упрощается запись уравнений (4.3.1) и граничных условий (4.3.2). В результате приходим к решению задачи теории упругости (линейной) с неизвестными фиктивными объемными и поверхностными силами, которое требует применения процедуры последовательных приближений, когда каждое приближение является решением соответствующей краевой задачи теории упругости с известными внешними объемными и поверхностными силами.

В исходном приближении полагаем деформации малыми, а функцию пластичности $\omega(\varepsilon_i) = 0$, тогда $R_j(\omega) = 0$; $q_{jk}(S) = 0$; $\eta_{jk}(S) = 0$, а фиктивные силы

$$\begin{aligned} F_j^{*(e)} &= (3m-1)\alpha \nabla_j \Delta T - F_j/G, \\ p_j^{*(n)(e)} &= p_j^{(n)} + (3m-1)\alpha (\Delta T g_{jk})_S n^k. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Разрешающие уравнения (4.3.1) принимают вид

$$\nabla^2 \Delta T = 0; \quad \nabla^2 u_j^{(e)} + m \nabla_j \nabla_\alpha u_\alpha^{(e)} = F_j^{*(e)},$$

а граничные условия (4.3.2) задаются равенствами

$$\begin{aligned} u_j^{(e)}(S) &= u_{jS}^{(e)} \text{ на } S_1; \\ G [\nabla_j u_k^{(e)} + \nabla_k u_j^{(e)} + (m-1) \nabla_\alpha u_\alpha^{(e)} g_{jk}]_S n^k &= \\ = p_j^{*(n)(e)} \text{ на } S_2; \\ \Delta T(S) &= \Delta T_S \text{ или } \partial \Delta T / \partial n|_S = q/\Lambda \text{ на } S. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

В результате решения такой краевой задачи ранее изложенными методами определяем ΔT и $u_j^{(e)}$.

Построение первого приближения начинаем с вычисления компонент тензора малых или конечных деформаций:

$$\begin{aligned} e_{jk}^{(e)} &= 0,5 (\Delta_j u_k^{(e)} + \nabla_k u_j^{(e)}); \\ \varepsilon_{jk}^{(e)} &= 0,5 (\nabla_j u_k^{(e)} + \nabla_k u_j^{(e)} + \nabla_j u_\alpha^{(e)} \nabla_k u_\alpha^{(e)}). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Затем вычисляем среднюю деформацию и интенсивность деформаций:

$$\begin{aligned} e^{(e)} &= \Gamma_1(e)/3 \text{ или } \varepsilon^{(e)} = \Gamma_1(\varepsilon)/3; \\ e_i^{(e)} &= (V/2/3) \sqrt{3\Gamma_2(e) - \Gamma_1^2(e)} \text{ или } \varepsilon_i^{(e)} = \\ &= (V/2/3) \sqrt{3\Gamma_2(\varepsilon) - \Gamma_1^2(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

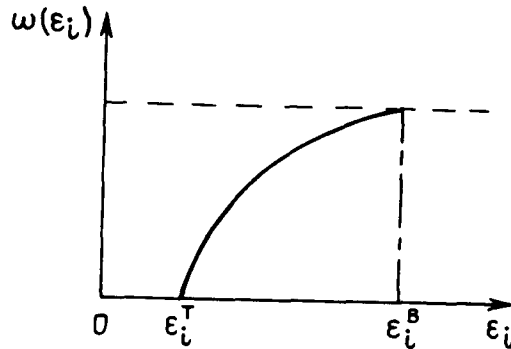


Рис. 4.1. Функция пластичности

С помощью истинной $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграммы среды для интервала $(\varepsilon_i^T, \varepsilon_i^B)$ строим функцию пластичности $\omega(\varepsilon_i)$ (рис. 4.1), по которой для вычисленных значений $\varepsilon_i^{(e)}$ находим значения $\omega(\varepsilon_i^{(e)})$. Затем по известным значениям $u_j^{(e)}$, ΔT , $\omega(\varepsilon_i^{(e)})$ с помощью формул (4.3.3), (4.3.4) последовательно вычисляем $R_j^{(e)}$, $q_{jk}^{(e)}$, $\eta_{jk}^{(e)}$, а по формулам (4.3.5) находим фиктивные объемные и поверхностные силы, соответствующие первому приближению. В результате система разрешающих уравнений (4.3.1) принимает вид

$$\nabla^2 \Delta T = 0; \quad \nabla^2 u_j^{(1)} + m \nabla_j \nabla_\alpha u_{(1)}^\alpha = F_j^{*(1)},$$

а граничные условия (4.3.2) задаются равенствами

$$\Delta T(S) = \Delta T_s \text{ или } \partial \Delta T / \partial n|_S = q/\Lambda \text{ на } S; \quad u_j^{(1)}(S) = u_{js} \text{ на } S_1;$$

$$G[\nabla_j u_k^{(1)} + \nabla_k u_j^{(1)} + (m-1) \nabla_\alpha u_{(1)}^\alpha g_{jk}]_S n^k = p_j^{*(n)(1)} \text{ на } S_2.$$

В результате решения краевой задачи теории упругости известными методами определяем неизвестные компоненты вектора перемещений.

Аналогично проводим построение l -го приближения по известному $(l-1)$ -му приближению с помощью формул (4.3.3) — (4.3.5), (4.3.8), (4.3.9), которые дают возможность записать систему разрешающих уравнений (4.3.1) и граничные условия (4.3.2) для l -го приближения и определить неизвестные компоненты u_j^l вектора перемещений. Доказательство сходимости метода упругих решений применительно к пластинам и оболочкам при условиях $1 > \omega + \varepsilon_i d\omega/d\varepsilon_i > \omega \geq 0$ и $0 < \nu < 0,5$, которые обеспечивают эллиптичность разрешающих уравнений (4.3.1) с учетом (4.3.5), дано В. М. Панферовым.

При постановке задачи в напряжениях (основные неизвестные ρ , ΔT и (σ)), как и в предыдущем случае, из уравнения неразрывности имеем $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Распределение температуры ΔT в пластической среде можно получить в результате решения уравнения теплопроводности (1.4.17) с граничными усло-

виями (1.4.19) на поверхности S . Определение тензора напряжений (σ) пластической среды, как показано в п. 2.4, основано на использовании общего решения уравнений равновесия, которое выражает компоненты σ^{jk} тензора напряжений через компоненты $\Pi^{\beta l}$ тензора функций напряжений (Π) при отсутствии или наличии объемных сил:

$$\begin{aligned}\sigma^{jk} &= \Lambda_l^{jn} \Lambda_\beta^{ka} \nabla_n \nabla_a \Pi^{\beta l}; \\ \sigma^{jk} &= 2e^{jk}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\beta p^\beta + \tilde{\varphi})g^{jk} + \Lambda_l^{nj} \Lambda^{\beta lk} \nabla_n \nabla_\beta \psi + \\ &+ \Lambda_l^{jn} \Lambda_\beta^{ka} \nabla_n \nabla_a \Pi^{\beta l}.\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

При этом функции напряжений $\Pi^{\beta l}$ подчинены уравнениям

$$\nabla^2[(1+\varphi)(\Pi^{\beta l} - \Pi g^{\beta l})] = 0 \quad (4.3.11)$$

и граничным условиям

$$u_j(S) = u_{jS} \text{ на } S_1; \quad \nabla^2[(\Pi^{\beta l} - 3\Pi g^{\beta l})n_l]_S = -3p_{(n)}^\beta \text{ на } S_2. \quad (4.3.12)$$

Скалярная функция ψ подчинена уравнению

$$\nabla^2\psi = -2P, \quad (4.3.13)$$

где $P = (M\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi})/(\varphi/3 + M)$; $M = (m+1)/(3m-1)$, и граничным условиям на поверхности

$$\nabla^2\psi = 3[(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}) - e^{ik}(\mathbf{p})n_in_k]_S. \quad (4.3.14)$$

Уравнения (4.3.11) с граничными условиями (4.3.12) и уравнение (4.3.13) с граничным условием (4.3.14) решаем с помощью процедуры последовательных приближений. Исходному приближению при $\varphi=0$ (упругое решение) соответствуют уравнения

$$\nabla^2(\Pi_{(e)}^{\beta l} - \Pi_{(e)}g^{\beta l}) = 0$$

с граничными условиями (4.3.12) и уравнение $\nabla^2\psi_{(e)} = -2P_{(e)}$

с граничным условием (4.3.14), где $P_{(e)} = \nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}/M$.

Решение указанных уравнений с учетом соответствующих граничных условий определяет функции напряжений $\Pi_{(e)}^{\beta l}$ и скаляр $\psi_{(e)}$. Подстановка их в (4.3.10) приводит к компонентам $\sigma_{(e)}^{jk}$ тензора упругих напряжений ($\sigma_{(e)}$), по известным компонентам которого с помощью формулы

$$\sigma_i = (1/\sqrt{2}) \sqrt{3\Gamma_2(\sigma) - \Gamma_1^2(\sigma)} \quad (4.3.15)$$

находим значения интенсивности упругих напряжений $\sigma_i^{(e)}$.

С помощью $(\sigma_i - e_i)$ -диаграммы среды для различных значений σ_i , задаваемых произвольно, строим кривую функции пластичности $\varphi(\sigma_i)$, а затем по найденным значениям $\sigma_i^{(e)}$ определяем значения функции пластичности $\varphi(\sigma_i^{(e)})$ и интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sigma_i^{(e)} / [1 + \varphi(\sigma_i^{(e)})]. \quad (4.3.16)$$

Построение первого приближения выполняем в следующем порядке. По известным значениям $\varphi(\sigma_i^{(e)})$ устанавливаем уравнения (4.3.11) с граничными условиями (4.3.12) и уравнение (4.3.13) вида

$$\nabla^2 \psi_{(1)} = -2P^{(1)}$$

с граничными условиями (4.3.14), где $P^{(1)} = (M \nabla_\alpha p^\alpha + \varphi) / [\varphi(\sigma_i^{(e)})/3 + M]$.

Решение указанных уравнений с учетом соответствующих граничных условий определяет функции напряжений $\Pi_{(1)}^{B_I}$ и скаляр $\psi_{(1)}$ для первого приближения. Подставляя их в (4.3.10), получаем компоненты $\sigma_{(1)}^{jk}$ тензора напряжений ($\sigma^{(1)}$), откуда с помощью формулы (4.3.15) находим значения интенсивности напряжений $\sigma_i^{(1)}$. Затем по формуле (4.3.16) определяем интенсивность напряжений σ_i в первом приближении, а также значения функции пластичности $\varphi(\sigma_i^{(1)})$.

Пусть известно $(n-1)$ -е приближение, для которого найдены $\sigma_i^{(n-1)}$ и $\varphi(\sigma_i^{(n-1)})$. Тогда для n -го приближения можно использовать порядок решения, аналогичный первому приближению. В результате вычисляем компоненты $\sigma_{(n)}^{jk}$ тензора напряжений ($\sigma^{(n)}$), значения интенсивности напряжений $\sigma_i^{(n)}$ и σ_i , а также функцию пластичности $\varphi(\sigma_i^{(n)})$ в n -м приближении. Затем с помощью физических соотношений

$$e_{jk} = \frac{1}{2G} \left[\left(\sigma_{jk} - \frac{m-1}{3m-1} 3\sigma g_{jk} \right) + \varphi(\sigma_{jk} - \sigma g_{jk}) \right]$$

определяем компоненты e_{jk} тензора деформаций в n -м приближении.

Таким образом, применение процедуры последовательных приближений позволяет построить приближенное решение статической задачи пластичности, сформулированной в перемещениях или напряжениях и основанной на физических соотношениях деформационной теории, с любой степенью точности. При решении конкретных задач пластичности обычно достаточно двух приближений.

Применение физических соотношений теории пластического течения, как показано в п. 2.4, сводит решение статической задачи пластичности, записанной в напряжениях, к определению функций напряжений Π^{B_I} , подчиняющихся уравнениям

$$\nabla^2 [(\dot{\Pi}^{B_I} - \dot{\Pi} g^{B_I}) + 2G\dot{\lambda}(\Pi^{B_I} - \Pi g^{B_I})] = 0 \quad (4.3.17)$$

с граничными (4.3.12) и начальными ($\Pi^{B_I} = 0$ при $t=0$) условиями. Кроме того, необходимо вычисление скаляра φ с помощью уравнения

$$\nabla^2 \dot{\varphi} = 2(\nabla_\alpha \dot{p}^\alpha + 2\dot{\varphi}/m) \quad (4.3.18)$$

при соответствующих граничных (4.3.14) и начальных ($\psi=0$ при $t=0$) условиях. Подстановка функции напряжений $\Pi^{\beta l}$ и скаляра ψ в общее решение (4.3.10) определяет компоненты σ^{ik} тензора напряжений пластической среды.

Для решения уравнений (4.3.17) и уравнения (4.3.18) с соответствующими начальными и граничными условиями воспользуемся процедурой последовательных приближений. В исходном приближении полагаем $\lambda=0$, тогда уравнения (4.3.17) принимают вид

$$\nabla^2 (\dot{\Pi}^{\beta l} - \dot{\Pi} g^{\beta l}) = 0,$$

решение которых с учетом начальных и граничных условий определяет функции напряжений $\Pi_{(e)}^{\beta l}$. Уравнение (4.3.18) с учетом начального условия в исходном приближении имеет вид

$$\nabla^2 \psi = 2(\nabla_\alpha p^\alpha + 2\tilde{\varphi}/m).$$

Решая его совместно с граничными условиями (4.3.14), находим скаляр ψ . Подставив найденные функции напряжений $\Pi_{(e)}^{\beta l}$ и скаляр ψ в общее решение (4.3.10), устанавливаем компоненты тензора напряжений ($\sigma_{(e)}$), а интенсивность напряжений $\sigma_i^{(e)}$ вычисляем с помощью формулы (4.3.15).

Полагая известной истинную $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграмму среды, построим кривую функции пластичности $\Phi(\sigma_i)$ в интервале от σ_τ до σ_b и по значениям $\sigma_i^{(e)}$ установим степень пластического деформирования среды. Работа напряжений на пластических деформациях для упрочняющейся упругопластической среды есть

$$A_p = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i - 0,5\sigma_i^2/3G = \Phi(\sigma_i),$$

а ее производная

$$\begin{aligned} \frac{dA_p}{d\sigma_i} &= \Phi'(\sigma_i) = \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(\int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_i^2}{3G} \right) = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} \left(\int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i \right) - \frac{\sigma_i}{3G} = \\ &= \sigma_i \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} - \frac{1}{3G} \right). \end{aligned}$$

Подстановка $\Phi'(\sigma_i)$ в формулу

$$\dot{\lambda} = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma_i^2} \Phi'(\sigma_i) \dot{\sigma}_i$$

приводит к выражению

$$\dot{\lambda} = 2\sqrt{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{\sigma_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} - \frac{1}{3G} \right). \quad (4.3.19)$$

Если истинную $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ -диаграмму среды задать уравнением $\varepsilon_i = \sigma_i(1 + \varphi)/3G$,

то

$$\partial \varepsilon_i / \partial \sigma_i = (1 + \varphi) / 3G,$$

и формула для $\dot{\lambda}$ принимает вид

$$\dot{\lambda} = \frac{2\sqrt{2}}{3G} \frac{\dot{\sigma}_i}{\sigma_i} \varphi. \quad (4.3.20)$$

Если упругопластическая среда не подвержена упрочнению ($\sigma_i = \sigma_T$), то

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_T}{\sigma_T} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_T} - \frac{2}{3G} \right). \quad (4.3.21)$$

Первое приближение строим в следующем порядке. Для вычисленных значений $\sigma_i^{(e)}$ по кривой $\varphi(\sigma_i)$ находим соответствующие значения функции пластичности $\varphi(\sigma_i^{(e)})$, а по формулам (4.3.19) — (4.3.21) — соответствующие им значения параметра $\dot{\lambda}_{(e)}$. Составляем уравнения (4.3.17) вида

$$\nabla^2 [(\Pi_{(1)}^{\beta l} - \dot{\Pi}_{(1)} g^{\beta l}) + 2G\dot{\lambda}_{(e)} (\Pi_{(1)}^{\beta l} - \Pi_{(1)} g^{\beta l})] = 0,$$

решение которых с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет функции напряжений $\Pi_{(1)}^{\beta l}$. Подстановка $\Pi_{(1)}^{\beta l}$ и ψ в общее решение (4.3.10) определяет компоненты $\sigma_{(1)}^{jk}$ тензора напряжений ($\sigma_{(1)}$) в первом приближении.

Построение n -го приближения основано на использовании известного $(n-1)$ -го приближения. Его выполняют в том же порядке, что и первое приближение. Доказательство сходимости процедуры последовательных приближений требует особых исследований, которые здесь не рассмотрены, однако при решении конкретных задач пластичности достаточно ограничиться двумя приближениями.

При постановке динамических задач пластичности в перемещениях основные неизвестные ρ , ΔT , u_j ($j=1, 2, 3$) подчинены разрешающим уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha - (3m-1) \alpha \nabla_j \Delta T + F_j/G - R_j(\omega) &= \rho dv_j/dt; \\ \dot{\rho} + \nabla_j (\rho v^j) &= 0; \quad \rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\beta T_0 \dot{e}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

которым соответствуют граничные (4.3.2) и начальные (при $t=t_0=0$) условия

$$\rho = \rho_0; \quad u_j = u_j^0; \quad v_j = v_j^0; \quad \Delta T = \Delta T_0. \quad (4.3.23)$$

Во многих задачах пластичности слагаемое $3\beta T_0 \dot{e}$ мало, поэтому им можно пренебречь и рассматривать уравнение теплопроводности в упрощенной форме

$$\rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T.$$

Это позволяет решать задачу теплопроводности независимо от решения задачи пластичности, т. е. считать распределение температуры ΔT в среде известным.

Введем материальные (лагранжевы) координаты, для которых $v_j = \partial u_j / \partial t$, $dv_j / dt = \partial^2 u_j / \partial t^2$, и учитывая соотношения (4.3.3) — (4.3.5) запишем уравнения (4.3.22) в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_\alpha u^\alpha - F_j^* &= (1/a_s^2) \partial^2 u_j / \partial t^2; \\ \dot{\rho} + \nabla_j (\rho \dot{u}^j) &= 0; \quad \rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T - 3\beta T_0 \dot{e}. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Уравнения (4.3.22) решаем при начальных (4.3.23) и граничных (4.3.2) условиях с помощью процедуры последовательных приближений.

В исходном приближении полагаем функцию пластичности $\omega(e_i) = 0$, а слагаемое $3\beta T_0 \dot{e}$ — пренебрежимо малым. Тогда уравнения (4.3.24) упрощаются, а фиктивные силы задаются уравнениями (4.3.6). В результате в совокупности с начальными (4.3.23) и граничными (4.3.2) условиями имеем динамическую задачу термоупругости, решение которой подробно изложено в предыдущей главе. Следовательно, $\rho_{(e)}$, $\Delta T_{(e)}$ и $u_j^{(e)}$ известны в области возмущений, где тензор напряжений ($\sigma_{(e)}$) и тензор деформаций ($e_{(e)}$) могут быть определены по известным $\Delta T_{(e)}$ и $u_j^{(e)}$ с помощью геометрических и физических соотношений термоупругости. Область возмущений ограничена поверхностью среды S и поверхностью S_Φ фронта упругой волны, распространяющейся со скоростями

$$a_e^{(e)*} = G(m+1)/\rho \quad \text{и} \quad a_s^{(e)*} = G/\rho.$$

Построение первого и последующих приближений основано на использовании результатов предыдущего приближения.

Пусть известно $(k-1)$ -е приближение, т. е. известны основные величины $\rho_{(k-1)}$, $\Delta T_{(k-1)}$ и $u_j^{(k-1)}$. Построение k -го приближения будем выполнять в следующем порядке. По решению $(k-1)$ -го приближения вычислим среднюю деформацию $e_{(k-1)}$ и слагаемое $3\beta T_0 e_{(k-1)}$, а затем установим уравнение теплопроводности (4.3.24), которое решим с учетом начальных ($\Delta T = \Delta T_0$ при $t = t_0 = 0$) и граничных на поверхности S условий (4.3.7). В результате определим распределение температуры $\Delta T_{(k)}$ в среде в k -м приближении. По решению $(k-1)$ -го приближения

находим интенсивность деформаций $e_i^{(k-1)}$ в различных точках среды и устанавливаем, в каком состоянии находится среда: если $e_i^{(k-1)} < e_i^{(\tau)}$ — состояние упругое; если $e_i^{(k-1)} > e_i^{(\tau)}$ — упруго-пластическое. По известной $(\sigma_i - e_i)$ -диаграмме среды определяем кривую функции пластичности $\omega(e_i)$ в интервале $(e_i^{(\tau)}, e_i^{(s)})$ и для вычисленных значений $e_i^{(k-1)}$ вычисляем значения функции пластичности $\omega(e_i^{(k-1)})$ и скорости распространения пластических волн:

$$a_e^2 = G(m+1-4\omega/3)/\rho; \quad a_s^2 = G(1-\omega)/\rho. \quad (4.3.25)$$

Затем для данных $(k-1)$ -го приближения и значений $\omega(e_i^{(k-1)})$ функции пластичности по формулам (4.3.3) или (4.3.4) находим $R_j^{(k)}(\omega)$ и $q_j^{(n)(k)}$, а по формулам (4.3.5) — фиктивные объемные и поверхностные силы. Уравнения (4.3.24) принимают вид

$$\nabla^2 u_j + m \nabla_j \nabla_a u^a - F_j^{*(k)} = (1/a_s^{(k)2}) \partial^2 u_j / \partial t^2;$$

$$\dot{\rho} + \nabla_j (\rho \dot{u}^j) = 0$$

и решаются при соответствующих начальных (4.3.23) и граничных (4.3.2) условиях на части S_1 и на части S_2 поверхности. В результате приходим к динамической задаче упругости в перемещениях, решение которой $(\rho_{(k)}$ и $u_j^{(k)})$ считаем известным в области возмущений. Тензор напряжений $(\sigma_{(k)})$ и тензор деформаций $(e_{(k)})$ определяем последовательно с помощью геометрических и физических соотношений термоупругости и физических соотношений деформационной теории пластичности. При решении конкретных задач пластичности достаточно построения двух приближений.

При постановке динамических задач пластичности в напряжениях основные неизвестные ρ , ΔT и (σ) связаны между собой уравнениями неразрывности и теплопроводности (4.3.24), а также уравнениями (2.4.18), которые в совокупности составляют систему разрешающих уравнений при следующих начальных условиях ($t=t_0=0$):

$$\rho = \rho_0; \quad v_j = v_j^0; \quad \Delta T = \Delta T^0; \quad \sigma_{jk} = \sigma_{jk}^0; \quad \dot{\sigma}_{jk} = \dot{\sigma}_{jk}^0. \quad (4.3.26)$$

Граничными условиями являются равенства

$$u_j(S) = u_{js} \text{ на } S_1; \quad \sigma_{jk}(S) n^k = p^{(n)} \text{ на } S_2; \quad (4.3.27)$$

$$\Delta T(S) = \Delta T_s \text{ или } \partial \Delta T / \partial n|_S = q/\Lambda \text{ на } S.$$

В дальнейшем будем считать среду однородной $\nabla_k \rho = 0$, что приводит к упрощению системы разрешающих уравнений, решение которых совместно с начальными (4.3.26) и граничными

(4.3.27) условиями можно построить с помощью процедуры последовательных приближений.

В исходном приближении полагаем функцию пластичности $\varphi(\sigma_i) = 0$, а слагаемое $3\beta T_0 \dot{e}$ в уравнении теплопроводности пренебрежимо малым. Тогда разрешающие уравнения для однородной среды упрощаются:

$$\dot{\rho} + \nabla_j (\rho \dot{u}^j) = 0; \quad \rho_0 c \Delta \dot{T} = \Lambda \nabla^2 \Delta T; \quad \square_e^2 \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + F_{\delta\beta}^{*(e)} = 0,$$

где $F_{\delta\beta}^{*(e)} = \square_e^2 (\nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta + M_{\delta\beta}^{(1)}) - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k) g_{\delta\beta}$, т. е. имеем динамическую задачу термоупругости в напряжениях, решение которой изложено в предыдущей главе, а потому в области возмущений считаем величины $\rho_{(e)}$, $\Delta T_{(e)}$, $v_j^{(e)}$ и $\sigma_{jk}^{(e)}$ известными. Область возмущений ограничена поверхностью среды S и поверхностью S_Φ фронта упругой волны, распространяющейся со скоростями

$$a_e^{(e)*} = G(m+1)/\rho_{(e)} \quad \text{и} \quad a_s^{(e)*} = G/\rho_{(e)}.$$

Построим первое и последующие приближения, используя результаты предыдущего приближения. Пусть $(k-1)$ -е приближение известно, т. е. известны величины $\rho_{(k-1)}$, $\Delta T_{(k-1)}$ и $\sigma_{jk}^{(k-1)}$. По решению $(k-1)$ -го приближения вычисляем среднюю деформацию $e_{(k-1)}$ и слагаемое $3\beta T_0 \dot{e}_{(k-1)}$. Краевую задачу теплопроводности сформулируем на основе уравнения теплопроводности (4.3.24), решение которого определяет распространение температуры $\Delta T_{(k)}$ в среде в k -м приближении. Затем по решению $(k-1)$ -го приближения находим интенсивность напряжений $\sigma_i^{(k-1)}$ в различных точках среды и устанавливаем состояние последней: если $\sigma_i^{(k-1)} < \sigma_\tau$ — состояние упругое; если $\sigma_i^{(k-1)} \geq \sigma_\tau$ — упругопластическое. По известной диаграмме $\sigma_i - e_i$ вычисляем функцию пластичности $\varphi(\sigma_i)$ в интервале $(\sigma_\tau, \sigma_\beta)$ и для найденных значений $\sigma_i^{(k-1)}$ определяем значения функции пластичности $\varphi(\sigma_i^{(k-1)})$. По формулам (4.3.25) с учетом пересчета функций пластичности $\varphi(\sigma_i)$ и $\omega(e_i)$ с помощью соотношения $\varphi(\sigma_i) = \omega(e_i)/(1 - \omega(e_i))$ устанавливаем скорость распространения пластических волн в среде.

Для данных $(k-1)$ -го приближения и значений $\varphi(\sigma_i^{(k-1)})$ функции пластичности, пользуясь формулами (2.4.12), (2.4.17), находим $L_{\delta\beta}^{(1)}(\varphi, \sigma)$ и $M_{\delta\beta}^{(1)}(\Delta T)$, затем определяем

$$F_{\delta\beta}^{*(k)} = \square_e^2 (L_{\delta\beta}^{(1)} + M_{\delta\beta}^{(1)} + \nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta) - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k) g_{\delta\beta} \quad (4.3.28)$$

и записываем разрешающие уравнения в форме

$$\dot{\rho} = \nabla_j (\rho \dot{u}^j) = 0; \quad \square_e^2 \square_s^2 \sigma_{\delta\beta} + F_{\delta\beta}^{*(k)} = 0. \quad (4.3.29)$$

Уравнениям (4.3.29) соответствуют начальные при $t=t_0=0$ и граничные условия:

$$\rho = \rho_0; \quad v_j = v_j^0; \quad \sigma_{jk} = \sigma_{jk}^0; \quad \dot{\sigma}_{jk} = \dot{\sigma}_{jk}^0; \quad (4.3.30)$$

$$u_j(S) = u_{jS} \text{ на } S_1; \quad \sigma_{jk}(S) n^k = p_j^{(n)} \text{ на } S_2.$$

В результате приходим к динамической задаче упругости, решение которой считаем известным. Тензор деформаций $(e_{(k)})$ находим по известному тензору напряжений $(\sigma_{(k)})$ с помощью физических соотношений деформационной теории пластичности. Полагая компоненты $\sigma_{jk}^{(k)}$ тензора напряжений известными, запишем уравнения движения в форме

$$\rho \partial v^j / \partial t = F_{(k)}^{*j}; \quad F_{(k)}^{*j} = \nabla_k \sigma_{(k)}^{jk} + F^j$$

и учтем соотношение $\rho_0 = \rho(1+3e)$, тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial v^j}{\partial t} = \frac{(1+3e)}{\rho_0} F_{(k)}^{*j}.$$

Интегрируя их по времени t с учетом начальных условий (4.3.30), находим

$$v_{(k)}^j = v_0^j + \int_{t_0}^t \frac{1+3e}{\rho_0} F_{(k)}^{*j} dt.$$

Уравнение неразрывности (4.3.29) представим в виде

$$\partial \ln \rho / \partial t = -\nabla_j v^j$$

и проинтегрируем по времени t с учетом начальных условий (4.3.30):

$$\rho_{(k)} = \rho_0 \exp \left(- \int_{t_0}^t \nabla_j v_{(k)}^j dt \right).$$

Итак, определены все основные неизвестные $\rho_{(k)}$, $v_{(k)}^j$, $\sigma_{(k)}^{jk}$ динамической задачи пластичности в k -м приближении для однородной упругопластической среды. Если среда неоднородная ($\nabla_k \rho \neq 0$), то выражение (4.3.28) принимает вид

$$F_{\delta\beta}^* = \square_e^2 (L_{\delta\beta}^{(1)} + M_{\delta\beta}^{(1)} + \nabla_\delta F_\beta + \nabla_\beta F_\delta - \dot{v}_\beta \nabla_\delta \rho - \dot{v}_\delta \nabla_\beta \rho) - \\ - \frac{2m}{m+1} \nabla_\delta \nabla_\beta (\nabla_k F^k - \dot{v}^k \nabla_k \rho) + \frac{m-1}{m+1} \square_s^2 (\nabla_k F^k - \dot{v}^k \nabla_k \rho) g_{\delta\beta}.$$

Сходимость процедуры последовательных приближений здесь не рассматривается. При решении конкретных задач пластичности достаточно ограничиться двумя приближениями.

При формулировке динамической задачи пластичности в напряжениях, основанной на физических соотношениях теории пластического течения, система разрешающих уравнений в соответствии с (2.4.21), (2.4.22) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \nabla_j (\rho v^j) &= 0; \quad g^{kj} \nabla_k \sigma_{j\beta} = F_\beta^{(q)}; \\ \nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_\alpha \nabla_k \dot{\sigma}^{\alpha k} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} &= \dot{P}_{\delta\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_\beta^{(q)} &= \rho \partial v_\beta / \partial t - F_\beta; \quad \dot{F}_\beta^{(q)} = \partial (\rho \partial v_\beta / \partial t) / \partial t - \dot{F}_\beta; \\ \dot{P}_{\delta\beta} &= 3m \nabla_\alpha \dot{F}_{(q)}^\alpha g_{\delta\beta} - 2GL_{\delta\beta}(\dot{\lambda}, \sigma) - \nabla_\delta \dot{F}_\beta^{(q)} - \nabla_\beta \dot{F}_\delta^{(q)}, \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

а величины $L_{\delta\beta}(\dot{\lambda}, \sigma)$ определяются так же, как в формуле (2.4.10). Задаче соответствуют начальные ($t=t_0=0$) и граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0; \quad v_j = v_j^0; \quad \sigma_{jk} = \sigma_{jk}^0; \\ u_j(S) &= u_{jS} \text{ на } S_1; \quad \sigma_{jk}(S) n^k = p_j^{(n)} \text{ на } S_2. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Прежде чем перейти к непосредственному построению приближенного решения сформулированной динамической задачи, рассмотрим уравнения движения и уравнение неразрывности из (4.3.31). Полагая компоненты $\sigma_{\alpha\beta}$ тензора (σ) известными, составим функции

$$F_\beta^* = g^{jk} \nabla_k \sigma_{j\beta} + F_\beta$$

и преобразуем уравнения движения к виду

$$\rho_0 \frac{\partial v_\beta}{\partial t} = F_\beta^* \left(1 + \frac{\Gamma_1(\sigma)}{G(3m-1)} \right).$$

Интегрирование их с учетом начальных условий (4.3.33) приводит к выражениям для компонент вектора скорости

$$v_\beta = v_\beta^0 + \int_{t_0}^t (F_\beta^* / \rho_0) [1 + \Gamma_1(\sigma) / G(3m-1)] dt. \quad (4.3.34)$$

Уравнение неразрывности представим в форме

$$\partial \ln \rho / \partial t = -\nabla_j v^j$$

и проинтегрируем по времени t с учетом начальных условий (4.3.33). В результате получим

$$\rho = \rho_0 \exp \left(-\int_{t_0}^t \nabla_\beta v^\beta dt \right). \quad (4.3.35)$$

Интегрируя компоненты $\dot{\sigma}_{\delta\beta}$ по времени t с учетом начальных условий (4.3.33), находим компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{\delta\beta} = \sigma_{\delta\beta}^0 + \int_{t_0}^t \dot{\sigma}_{\delta\beta} dt. \quad (4.3.36)$$

Как и в предыдущем случае, для приближенного решения уравнений (4.3.31) с начальными и граничными условиями (4.3.33) воспользуемся процедурой последовательных приближений. В исходном приближении полагаем $L_{\delta\beta}(\lambda, \sigma) = 0$, $v_\beta = 0$, что упрощает уравнения (4.3.31). Из формулы (4.3.35) следует $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Уравнения

$$\nabla^2 \dot{\sigma}_{\delta\beta} + \nabla_\alpha \nabla_k \dot{\sigma}^{\alpha k} g_{\delta\beta} + \frac{2m}{3m-1} \nabla_\delta \nabla_\beta 3\dot{\sigma} = \dot{P}_{\delta\beta}^{(e)};$$

$$g^{jk} \nabla_k \dot{\sigma}_{j\beta} = \dot{F}_\beta; \quad \dot{P}_{\delta\beta}^{(e)} = 3m \nabla_\alpha \dot{F}^\alpha g_{\delta\beta} - \nabla_\delta \dot{F}_\beta - \nabla_\beta \dot{F}_\delta$$

с граничными условиями (4.3.33) можно рассматривать как статическую задачу упругости, записанную в напряжениях, с неизвестными компонентами $\dot{\sigma}_{\delta\beta}^{(e)}$ тензора $(\dot{\sigma}_{(e)})$, решение которой подробно изложено в предыдущих главах. Компоненты тензора напряжений $(\sigma_{(e)})$ будем определять по формулам (4.3.36), а интенсивность напряжений $\sigma_{(e)}$ вычислять по формуле (4.3.15). Ее значения укажут состояние, в котором находится среда.

Построение первого приближения проводим в следующем порядке. При известной истинной $(\sigma_i - e_i)$ -диаграмме в интервале (σ_T, σ_B) строим кривую функции пластичности $\phi(\sigma_i)$. Для вычисленных значений $\sigma_i^{(e)}$ по кривой $\phi(\sigma_i)$ определяем соответствующие значения функции пластичности $\phi(\sigma_i^{(e)})$. В зависимости от физико-механических свойств среды по формулам (4.3.19) находим параметр $\dot{\lambda}_{(e)}$. Пользуясь выражением (2.4.10), устанавливаем значения $L_{\delta\beta}^{(1)}(\lambda, \sigma)$. По известным компонентам тензора $(\sigma_{(e)})$ и формулам (4.3.34) находим компоненты вектора скорости $v_{(e)}$, а по формуле (4.3.35) плотность среды $\rho_{(e)}$. По результатам вычислений перечисленных величин с помощью формул (4.3.32) определяем $F_\beta^{(q)(1)}$, $\dot{F}_\beta^{(q)(1)}$, $\dot{P}_{\delta\beta}^{(1)}$. В результате вновь получаем статическую задачу упругости в напряжениях с граничными условиями (4.3.33), где неизвестны компоненты $\dot{\sigma}_{\delta\beta}^{(1)}$ тензора $(\dot{\sigma}_{(1)})$. Решение задачи считаем известным. Компоненты $\sigma_{\delta\beta}^{(1)}$ тензора напряжений определяем по формулам (4.3.36) и т. д. Второе и последующие приближения строим аналогично изложенному по известному предыдущему приближению. При решении конкретных задач пластичности достаточно ограничиться двумя приближениями.

Разновидностью метода упругих решений для задач пластичности является *метод переменных параметров упругости*, предложенный И. А. Биргером. В основу метода положено представление физических соотношений деформационной теории в форме соотношений обобщенного закона Гука, в которых параметры упругости зависят от напряженного состояния в точке, а потому различны для разных точек области, занятой средой.

Введем переменные параметры упругости

$$G_* = \sigma_i / 3e_i; \quad K_* = K; \quad m_* = K 3e_i / \sigma_i + 1/3. \quad (4.3.37)$$

Если принять $\sigma_i = 3G e_i (1 - \omega)$, то параметры (4.3.37) будут равны $G_* = G (1 - \omega)$; $m_* = (m - \omega/3) / (1 - \omega)$.

Если принять $e_i = \sigma_i (1 + \varphi) / 3G$, то параметры (4.3.37) будут равны

$$G_* = G / (1 + \varphi); \quad m_* = m + \varphi (m - 1/3).$$

Физические соотношения деформационной теории представим в форме

$$\sigma_{jk} = G_* [e_{jk} + 1,5 (m_* - 1) e g_{jk} - 0,5 (3m_* - 1) \alpha \Delta T g_{jk}]; \quad (4.3.38)$$

$$e_{jk} = \frac{1}{2G_*} \left(\sigma_{jk} - \frac{m_* - 1}{3m_* - 1} 3\sigma g_{jk} + 2G_* \alpha \Delta T g_{jk} \right).$$

При решении упругопластических задач как в перемещениях, так и в напряжениях этим методом используется процедура последовательных приближений. В исходном приближении полагаем $\omega(e_i) = 0$ или $\varphi(\sigma_i) = 0$, а параметры G_* , m_* — соответственно равными G , m . В результате приходим к задаче упругости в перемещениях или в напряжениях, решение которой может быть получено методами, изложенными в предыдущих главах, и приводит к определению $\rho_{(e)}$, $u_j^{(e)}$, $(\sigma_{(e)})$, $(e_{(e)})$. По характеристикам напряженно-деформированного состояния вычисляем интенсивность напряжений $\sigma_i^{(e)}$, интенсивность деформаций $e_i^{(e)}$ и устанавливаем состояние, в котором находится среда. По диаграмме $\sigma_i - e_i$ в интервале (σ_t, σ_b) определяем функцию пластичности $\varphi(\sigma_i)$, а в интервале (e_t, e_b) — функцию пластичности $\omega(e_i)$.

Построение первого приближения основано на использовании результатов исходного приближения. По найденным значениям $\sigma_i^{(e)}$ или $e_i^{(e)}$ с помощью кривых функций пластичности $\varphi(\sigma_i)$ или $\omega(e_i)$ определяем значения $\varphi(\sigma_i^{(e)})$ или $\omega(e_i^{(e)})$, вычисляем значения $G_*^{(1)}$, $m_*^{(1)}$ и составляем физические соотношения (4.3.38). В результате получаем задачу упругости неоднородной среды, для которой параметры упругости в раз-

ных точках области различны. Решение такой задачи возможно методами, изложенными в предыдущих главах, и приводит к определению $\rho_{(i)}$, $u_{j(i)}$, $(\sigma_{(i)})$, $(e_{(i)})$ в первом приближении. В каждой точке области нужно вычислить интенсивность напряжений $\sigma_{(i)}$ и интенсивность деформаций $e_{(i)}$, а по диаграмме $\sigma_i - e_i$ в первом приближении определить σ_i и e_i . Второе и последующие приближения строят аналогично изложенному с использованием результатов предыдущего приближения. Доказательство сходимости процедуры последовательных приближений метода переменных параметров упругости отсутствует, однако практически сходимость существует, причем скорость сходимости значительна. При решении конкретных задач пластичности достаточно двух приближений.

Для гладкого процесса внешнего нагружения с плавным переходом от упругой работы среды к пластической работе деформации решение задачи пластичности может быть построено методом разложения по параметру нагружения, предложенным В. Д. Ключниковым. Метод основан на представлении напряжений и деформаций в виде разложения по параметру нагружения δ для теории пластического течения. Пусть материал среды несжимаем, изотропно упрочняется и для него $d\lambda = (1/2\sigma_i) f'(\sigma_i) d\sigma_i$, причем зависимость $\lambda(\sigma_i)$ предполагается гладкой, а внешнее нагружение таково, что ни в одной из точек среды не происходит разгрузки. В этом случае

$$2Gde_{jk} = dD_{jk}(\sigma) + d\lambda D_{jk}(\sigma); \quad d\sigma_i \geq 0, \quad (4.3.39)$$

где функция $\lambda(\sigma_i)$ может быть определена из опыта на простое растяжение только для $\sigma_i > 0$.

Пусть объемные F_j и поверхностные $p_j^{(n)}$ силы изменяются с ростом параметра нагружения δ :

$$F_j = \sum_k F_j^{(k)} \delta^k; \quad p_j^{(n)} = \sum_k p_j^{(n)(k)} \delta^k.$$

где $F_j^{(k)}$ и $p_j^{(n)(k)}$ — функции координат. В качестве параметра δ можно взять характерное внешнее усилие или его отношение к модулю сдвига G . Поскольку имеют место соотношения (4.3.39), то решение задачи для напряжений следует искать в виде

$$\sigma_{j\beta} = \sum_k \sigma_{j\beta}^{(k)} \delta^k, \quad (4.3.40)$$

которому соответствуют выражения

$$\sigma = \sum_k \sigma^{(k)} \delta^k; \quad D_{j\beta}(\sigma) = \sum_k D_{j\beta}^{(k)}(\sigma) \delta^k,$$

где $\sigma^{(k)} = g^{j\beta} \sigma_{j\beta}^{(k)} / 3$; $D_{j\beta}^{(k)}(\sigma) = \sigma_{j\beta}^{(k)} - \sigma^{(k)} g_{j\beta}$.

Для функции $\lambda(\sigma_i)$ существует разложение

$$\lambda(\sigma_i) = \sum_{n=1} \kappa_n \delta^n / n,$$

так как

$$D_{j\beta}(\sigma) D^{j\beta}(\sigma) = \sum_{k=1} D_{j\beta}^{(k)}(\sigma) \delta^k \sum_{n=1} D_{(n)}^{j\beta}(\sigma) \delta^n = \sum_{n=2} a_n \lambda^n,$$

где

$$\kappa_n = n \sum_{\alpha=1} A_{2\alpha} \sum_{k_1+\dots+k_\alpha=n} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_\alpha}; \quad a_n = \sum_{m=1}^{m=n-1} D_{j\beta}^{(m)}(\sigma) D_{(n-m)}^{j\beta}(\sigma).$$

Учитывая проведенные представления, перепишем (4.3.39) в форме

$$2Ge_{j\beta} = D_{j\beta}^{(1)}(\sigma) \delta + D_{j\beta}^{(2)}(\sigma) \delta^2 + \sum_{k=3} (D_{j\beta}^{(k)}(\sigma) + R_{j\beta}^{(k)}) \delta^k, \quad (4.3.41)$$

где $R_{j\beta}^{(1)} = R_{j\beta}^{(2)} = 0$, $R_{j\beta}^{(k)} = (1/k) \sum_{n=2}^{n=k-1} \kappa_n D_{j\beta}^{k-n}(\sigma)$ — параметры, которые можно записать в виде

$$R_{j\beta}^{(k)} = N_{j\beta}^{(k)} - \Gamma_1(N^{(k)}) g_{j\beta} / 3,$$

если ввести в рассмотрение тензоры $(N^{(k)})$ с компонентами

$$N_{j\beta}^{(1)} = N_{j\beta}^{(2)} = 0; \quad N_{j\beta}^{(k)} = (1/k) \sum_{n=2}^{n=k-1} \kappa_n \sigma_{j\beta}^{(k-n)}.$$

Вводя тензоры $(\bar{\sigma}^{(k)})$ и $(\bar{e}^{(k)})$ с компонентами $\bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)} = \sigma_{j\beta}^{(k)} + N_{j\beta}^{(k)}$ и $2G\bar{e}_{j\beta}^{(k)} = D_{j\beta}^{(k)}(\sigma) + R_{j\beta}^{(k)}$, нетрудно доказать справедливость соотношений

$$2G\bar{e}_{j\beta}^{(k)} = D_{j\beta}^{(k)}(\sigma) = \bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)} - \bar{\sigma}^{(k)} g^{j\beta}$$

и показать, что соотношения (4.3.41) можно привести к виду

$$e_{j\beta} = \sum_k \bar{e}_{j\beta}^{(k)} \delta^k, \quad (4.3.42)$$

причем каждая компонента $\bar{e}_{j\beta}^{(k)}$, входящая в (4.3.42), должна удовлетворять уравнениям совместности, так как компоненты тензора деформаций $e_{j\beta}$ подчинены уравнениям совместности и они должны выполняться при любом значении параметра δ .

Подстановка (4.3.40) в уравнения равновесия и граничные условия, записанные в напряжениях, с учетом представлений

для F_j и $p_j^{(n)}$ приводит к тому, что каждое слагаемое $\sigma_{j\beta}^{(k)}$ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$g^{j\alpha} \nabla_\alpha \sigma_{j\beta}^{(k)} + F_\beta^{(k)} = 0$$

и граничным условиям в напряжениях $\sigma_{j\beta}^{(k)}(S) n^j = p_\beta^{(n)(k)}$. Подставляя сюда выражение $\sigma_{j\beta}^{(k)} = \bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)} - N_{j\beta}^{(k)}$, устанавливаем, что компоненты $\bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)}$ подчинены уравнениям

$$g^{j\alpha} \nabla_\alpha \bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)} + F_\beta^{(k)} = g^{j\alpha} \nabla_\alpha N_{j\beta}^{(k)}$$

в объеме V и соотношениям

$$\bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)}(S) n^j = p_\beta^{(n)(k)} + N_{j\beta}^{(k)} n^j$$

на поверхности S области, занятой материальной средой.

Итак, определение тензоров $\bar{\sigma}_{j\beta}^{(k)}$ и $\bar{e}_{j\beta}^{(k)}$ требует решения задачи упругости при наличии объемных

$$\bar{F}_\beta^{(k)} = F_\beta^{(k)} - g^{j\alpha} \nabla_\alpha N_{j\beta}^{(k)} \quad (4.3.43)$$

и поверхностных

$$\bar{p}_\beta^{(n)(k)} = \bar{p}_\beta^{(n)(k)} + N_{j\beta}^{(k)} n^j \quad (4.3.44)$$

сил, причем

$$g^{j\alpha} \nabla_\alpha N_{j\beta}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{n=k-1} \left(\sigma_{j\beta}^{(k-n)} \frac{\partial \kappa_n}{\partial x^\alpha} g^{j\alpha} - \kappa_n F_\beta^{(k-n)} \right);$$

$$N_{j\beta}^{(k)} n^j = \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{n=k-1} \kappa_n p_\beta^{(k-n)}.$$

Структура выражения для $N_{j\beta}^{(k)}$ указывает на то, что компоненты $N_{j\beta}^{(k)}$ определены через решения с индексом, меньшим k , т. е. применима процедура последовательных приближений. Так как $N_{j\beta}^{(1)} = N_{j\beta}^{(2)} = 0$, то для нахождения $\bar{\sigma}_{j\beta}^{(1)} = \sigma_{j\beta}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{j\beta}^{(2)} = \sigma_{j\beta}^{(2)}$ имеет место задача упругости в напряжениях при $\bar{F}_\beta^{(k)} = F_\beta^{(k)}$ и $\bar{p}_\beta^{(n)(k)} = p_\beta^{(n)(k)}$, которая решается методами, изложенными в предыдущих главах. По найденным решениям вычисляем компоненты $N_{j\beta}^{(3)} = \kappa_2 \sigma_{j\beta}^{(1)} / 3$. Решая задачу упругости при внешних силах, определяемых по формулам (4.3.43) и (4.3.44), находим $\bar{\sigma}_{j\beta}^{(3)}$ и $\bar{e}_{j\beta}^{(3)}$, а также $\sigma_{j\beta}^{(3)} = \bar{\sigma}_{j\beta}^{(3)} - N_{j\beta}^{(3)}$. По известному $\sigma_{j\beta}^{(3)}$ вычисляем компоненты

$$N_{j\beta}^{(4)} = 0,25 (\kappa_2 \sigma_{j\beta}^{(2)} + \kappa_3 \sigma_{j\beta}^{(1)}),$$

а затем процесс вычисления повторяем в указанной последовательности и определяем $\sigma_{j\beta}^{(n)}, \sigma_{j\beta}^{(5)}, \dots$. Следует заметить, что значения $N_{j\beta}^{(m)}$ выражаются через упругое решение с индексом $(m-2)$ и ниже. Таким образом, решение задачи пластичности, основанное на теории пластического течения, сводится к последовательному решению задач упругости с фиктивными внешними силами. Другие возможные аналитические методы, например метод малого параметра, также приводит к использованию процедуры последовательных приближений и не содержат ничего принципиально нового.

4.4. Методы решения задач вязкоупругости

К общим методам решения задач термовязкоупругости следует отнести метод аппроксимации А. А. Ильюшина, экспериментально-теоретические методы, метод усреднения для динамических задач, метод малого параметра для неоднородных задач, метод последовательных приближений для нелинейных задач. Каждый из указанных методов характеризуется своими вполне определенными особенностями, а потому требует отдельного описания.

Метод аппроксимаций Ильюшина основан на том, что решения задач термовязкоупругости в изображениях (3.1.59) получаются из решений задач термоупругости (3.1.58). Запишем решение задачи термоупругости в символической форме

$$\begin{aligned} H &= G\{(P/G)f_1(r_{11}, m) + (m-1/3)[Uf_2(r_{12}, m) + \alpha\Delta Tf_3(r_{13}, m)]\}; \\ V &= \frac{1}{G} \left[\frac{3}{3m-1} P\psi_1(r_{21}, m) + U\psi_2(r_{22}, m) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha\Delta T\psi_3(r_{23}, m) \right], \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

где P — внешняя сила; r ($r_{11}, \dots, r_{33}$) — некоторые совокупности геометрических размеров; U — заданное перемещение какой-либо точки тела. Если задана совокупность сил P и перемещений U , то вследствие принципа суперпозиции искомые величины H и V получаются суммированием решений (4.4.1). Следуя А. А. Ильюшину, функции f_k и ψ_k представим в виде трехчленов:

$$\begin{aligned} f_k(r, m) &= f_k^{(0)}(r) + f_k^{(1)}(r)\omega + f_k^{(-1)}(r)/\omega; \\ \psi_k(r, m) &= \psi_k^{(0)}(r) + \psi_k^{(1)}(r)\omega + \psi_k^{(-1)}(r)/\omega, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

где $\omega = 2/(3m-1)$, а функции $f_k^{(j)}$ и $\psi_k^{(j)}$ ($j=0; 1; -1$) определяются приемами математического приближения. Если воспользоваться приближением по методу наименьших квад-

ратов, то коэффициенты $f_k^{(0)}$, $f_k^{(1)}$, $f_k^{(-1)}$ будут определены соотношениями

$$\begin{aligned} f_k^{(0)} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ J_{1k} \left[\frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - (\omega_2 - \omega_1)^2 \right] - \right. \\ &\quad - J_{2k} \left[\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - (\omega_2 - \omega_1) \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] + \\ &\quad \left. + J_{3k} \left[\frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_2 - \omega_1)}{2} - \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{2} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \right\}; \\ f_k^{(1)} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ J_{1k} \left[\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - (\omega_2 - \omega_1) \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] - \right. \\ &\quad - J_{2k} \left[(\omega_2 - \omega_1) \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] + \\ &\quad \left. + J_{3k} \left[(\omega_2 - \omega_1)^2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \right\}; \\ f_k^{(-1)} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ J_{1k} \left[\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] - \right. \\ &\quad - J_{2k} \left[(\omega_2 - \omega_1)^2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] + \\ &\quad \left. + J_{3k} \left[\frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4} \right] \right\}, \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_2 - \omega_1 & (\omega_2^2 - \omega_1^2)/2 & \ln(\omega_2/\omega_1) \\ (\omega_2^2 - \omega_1^2)/2 & (\omega_2^3 - \omega_1^3)/3 & \omega_2 - \omega_1 \\ \ln(\omega_2/\omega_1) & \omega_2 - \omega_1 & 1/\omega_1 - 1/\omega_2 \end{vmatrix};$$

$$J_{1k} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f_k(r, m) d\omega; \quad J_{2k} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f_k(r, m) \omega d\omega;$$

$$J_{3k} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f_k(r, m) \frac{1}{\omega} d\omega;$$

ω_1 и ω_2 — минимальное и максимальное значения ω в интервале аппроксимации. Решение для H в (4.4.1) с учетом (4.4.2) можно записать в форме

$$\begin{aligned} H &= G \left\{ \frac{P}{G} f_1^{(0)}(r_{11}) + \frac{3m-1}{3} (U f_2^{(0)}(r_{12}) + \alpha \Delta T f_3^{(0)}(r_{13})) + \right. \\ &\quad + \left[\frac{P}{G} f_1^{(1)}(r_{11}) + \frac{3m-1}{3} (U f_2^{(1)}(r_{12}) + \alpha \Delta T f_3^{(1)}(r_{13})) \right] \omega + \\ &\quad + \left[\frac{P}{G} f_1^{(-1)}(r_{11}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3m-1}{3} (U f_2^{(-1)}(r_{12}) + \alpha \Delta T f_3^{(-1)}(r_{13})) \right] \frac{1}{\omega} \Big\}. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Аналогично преобразуются выражения для V в (4.4.1). Область изменения ω устанавливают из следующих соображений. Так как коэффициент Пуассона ν изменяется в пределах $0,5 > \nu_1 \geq \nu \geq \nu_2 > 0$, а параметр m имеет пределы $\infty > m_1 \geq m \geq m_2 > 1$, то $0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 < 1$, где $\omega_1 = 2/(3m_1 - 1)$; $\omega_2 = 2/(3m_2 - 1)$.

Решение задачи термовязкоупругости в изображениях представим в виде

$$H^* = G \left\{ f_1^{(0)}(r_{11}) \frac{P^*}{G} + \frac{3m-1}{3} (f_2^{(0)}(r_{12}) U^* + f_3^{(0)}(r_{13}) \alpha \Delta T^*) + \right. \\ \left. + \left[f_1^{(1)}(r_{11}) \frac{P^*}{G} + \frac{3m-1}{3} (f_2^{(1)}(r_{12}) U^* + f_3^{(1)}(r_{13}) \alpha \Delta T^*) \right] \omega^* + \right. \\ \left. + \left[f_1^{(-1)}(r_{11}) \frac{P^*}{G} + \frac{3m-1}{3} (f_2^{(-1)}(r_{12}) U^* + f_3^{(-1)}(r_{13}) \alpha \Delta T^*) \right] \frac{1}{\omega^*} \right\},$$

где $\omega^* = \frac{\tilde{\Gamma}^*}{G(3m-1)}$; $\frac{1}{\omega^*} = \tilde{R}^* G(3m-1)$. Аналогичное выражение имеет место для V^* . Переходя от изображений к оригиналам, находим выражение для

$$H(t') = f_1^{(0)}(r_{11}) P(t') + \\ + G \frac{3m-1}{3} [f_2^{(0)}(r_{12}) U(t') + f_3^{(0)}(r_{13}) \alpha \Delta T(t')] + \\ + \frac{f_1^{(1)}(r_{11})}{G(3m-1)} \int_0^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') dP(\tau') + \frac{f_2^{(1)}(r_{12})}{3} \int_0^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') dU(\tau') + \\ + \frac{1}{3} f_3^{(1)}(r_{13}) \int_0^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') d\Delta T(\tau') + \\ + G(3m-1) \left\{ f_1^{(-1)}(r_{11}) \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') dP(\tau') + \right. \\ \left. + G \frac{3m-1}{3} \left[f_2^{(-1)}(r_{12}) \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') dU(\tau') + \right. \right. \\ \left. \left. + f_3^{(-1)}(r_{13}) \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') d\Delta T(\tau') \right] \right\},$$

а также аналогичное выражение для $V(t')$. В окончательном решении необходимо от приведенного времени t' перейти к физическому времени t с помощью формулы $t' = \int_0^t (dt/a_\tau)$.

Изложенную аппроксимацию можно обобщить, если принять

$$f_k(r, m) = \frac{1}{\omega} f_k^{(-1)}(r) + \sum_n f_k^{(n)} \omega^n.$$

Тогда решение в изображениях будет содержать операторы типа P^*/ω^* и $\omega^{*n}P^* = P_n^*/(3K)^n$, а при переходе к оригиналам будет использоваться рекуррентная формула

$$P_n(t') = \int_0^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') dP_{n-1}(\tau').$$

Экспериментально-теоретические методы решения задач термовязкоупругости базируются на следующем утверждении А. А. Ильюшина: решение задачи идеальной упругости может быть представлено в символической форме

$$H = f + \omega\varphi + \psi/\omega + \chi_k/(1 + \beta_k\omega), \quad (4.4.4)$$

где f, φ, ψ, χ_k — функции координат, внешних сил, заданных граничных перемещений и температуры соответственно; β_k — постоянные величины. Форма (4.4.4) является обобщением (4.4.3) и отличается от нее последним слагаемым, в котором по индексу k предполагается суммирование.

Решение задачи линейной термовязкоупругости в изображениях с учетом (4.4.4) представим в виде

$$H^* = f^* + \omega^*\varphi^* + \psi^*/\omega^* + g_{\beta}^{*k}\chi_k^*, \quad (4.4.5)$$

где $g_{\beta}^{*k} = (1 + \beta_k\omega^*)^{-1}$. Если обращения операторов g_{β}^{*k} , т. е. функции $g_{\beta}^k(t')$, найдены, то решение задачи линейной термовязкоупругости, согласно (4.4.5), запишем в форме

$$\begin{aligned} H(x^j, t') = & f(x^j, t') + \frac{1}{G(3m-1)} \int_0^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') \frac{\partial \varphi(x^j, \tau')}{\partial \tau'} d\tau' + \\ & + G(3m-1) \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') \frac{\partial \psi(x^j, \tau')}{\partial \tau'} d\tau' + \\ & + \int_0^{t'} g_{\beta}^k(t' - \tau') \frac{\partial \chi_k(x^j, \tau')}{\partial \tau'} d\tau'. \end{aligned}$$

Аналогичное выражение имеем для $V(x^j, t')$.

Построение функции $g_{\beta}^k(t)$ будем проводить экспериментальным методом, предложенным А. А. Ильюшиным и назван-

ным поэтому экспериментально-теоретическим. Введем функции $z(t')$ и $y(t')$, связанные между собой соотношением

$$z(t') = \int_0^{t'} g_{\beta}^k(t' - \tau') dy(\tau') \quad (4.4.6)$$

или в изображениях

$$z^* = g_{\beta}^{*k} y^*.$$

Учитывая введенное обозначение, имеем

$$z^* + \beta_k \omega^* z^* = y^*$$

или в оригиналах

$$z(t') + \beta_k \int_0^{t'} \omega(t' - \tau') dz(\tau') = y(t'). \quad (4.4.7)$$

Таким образом, установлена связь между интегральным уравнением (4.4.7) с ядром $\omega(t)$ и интегральным соотношением (4.4.6) с ядром $g_{\beta}^k(t)$.

Пусть проведен эксперимент на чистый сдвиг при кручении тонкой трубки длиной l и радиусом r_0 , причем к левому торцу трубки прикреплена пружина с постоянной жесткостью на кручение C , т. е. крутящий момент M и угол поворота φ_1 связаны соотношением $M = C\varphi_1$. Если угол поворота правого торца трубки равен φ_2 , то деформация

$$e_{12} = r_0(\varphi_2 - \varphi_1)/2l = r_0\varphi/2l.$$

Среднее напряжение σ и средняя деформация e равны нулю, а потому

$$e_{12}(t') = \int_0^{t'} \tilde{R}(t' - \tau') d\sigma_{12}(\tau'); \quad \sigma_{12}(t') = \int_0^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') de_{12}(\tau').$$

Так как $\sigma_{12} = M/(2\pi r_0^2 h)$, где h — толщина стенки трубки, то из приведенных зависимостей находим

$$\varphi_2 = \varphi + \beta \int_0^{t'} \omega(t' - \tau') d\varphi(\tau'), \quad (4.4.8)$$

где $\beta = \pi h r_0^3 G(3m - 1)/lC$; $\beta = \beta_k$.

Полученное интегральное уравнение полностью совпадает с интегральным уравнением (4.4.7), следовательно, должно иметь место соотношение вида (4.4.6), которое запишем как

$$\varphi(t') = \int_0^{t'} g_{\beta}(t' - \tau') d\varphi_2(\tau'); \quad g_{\beta} \equiv g_{\beta}^k.$$

Пусть в опыте реализуется релаксация при заданном постоянном угле поворота $\varphi_2 = \varphi_2^0$ и измеряется угол поворота $\varphi_1(t') = \varphi_2^0 - \varphi(t')$, тогда из приведенного соотношения следует

$$g_{\beta}(t') = (\varphi_2^0 - \varphi_1(t')) / \varphi_2^0. \quad (4.4.9)$$

Таким образом, определив β из решения задачи идеальной упругости (4.4.4), можно вычислить параметры эксперимента из условия (4.4.8) и соответствующее ядро $g_{\beta}(t')$ по результатам эксперимента (4.4.9).

Если температурное поле $\Delta T(x^j, t)$ неоднородно ($\partial \Delta T / \partial x^j \neq 0$), а вязкоупругие характеристики среды зависят от температуры, то функции релаксации $\tilde{\Gamma}(t' - \tau')$ и ползучести $\tilde{R}(t' - \tau')$ зависят от координат x^j , так как от координат x^j зависит время

$$t' = \varphi(x^j, t) = \int_0^t \frac{dt}{a_T[\Delta T(x^j, t)]}; \quad \tau' = \varphi(x^j, \tau). \quad (4.4.10)$$

В этом случае изложенные методы решения задач линейной термовязкоупругости неприменимы, поэтому возникает потребность в использовании новых методов, одним из которых будет *метод малого параметра*. Воспользуемся уравнениями

$$D_{jk}(\sigma, t) = \int_0^t \tilde{\Gamma}(t' - \tau') dD_{jk}(e, \tau); \quad \sigma(t) = 3K(e - \alpha \Delta T).$$

Следуя Б. Е. Победре, введем малый параметр ε соотношением

$$t' = \varphi_0(t) + \varepsilon[\varphi(x^j, t) - \varphi_0(t)],$$

где $\varphi_0(t) = V^{-1} \int_V \varphi(x^j, t) dV$ — функция $\varphi(x^j, t)$, усредненная по объему. Функция $\tilde{\Gamma}(t)$ может быть разложена в ряд по степеням параметра:

$$\tilde{\Gamma}(t') = \tilde{\Gamma}^{(0)}(t) + \sum_n \varepsilon^n \tilde{\Gamma}^{(n)}(x^j, t). \quad (4.4.11)$$

Воспользуемся уравнениями равновесия

$$g^{ja} \nabla_a D_{jk}(\sigma) + \nabla_k \sigma + F_k = 0. \quad (4.4.12)$$

Здесь

$$D_{jk}(\sigma) = \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{\Gamma}(t' - \tau') d \left(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j - \frac{2}{3} g_{jk} \nabla_\alpha u^\alpha \right);$$

$$\sigma = K(\nabla_\alpha u^\alpha - 3\alpha \Delta T). \quad (4.4.13)$$

Этим уравнениям соответствуют граничные условия

$$u_j(S) = u_{jS} \quad \text{на } S_1;$$

$$\left\{ 0,5 \int_0^t \tilde{\Gamma}(t' - \tau') d [\nabla_j u_k + \nabla_k u_j - (2/3) g_{jk} \nabla_\alpha u^\alpha] + \right.$$

$$\left. + g_{jk} K(\nabla_\alpha u^\alpha - 3\alpha \Delta T) \right\} n^k = p_j^{(n)} \quad \text{на } S_2. \quad (4.4.14)$$

Решение задачи в перемещениях u_j будем строить в виде ряда по степеням ε :

$$u_j(x^\alpha, t) = u_j^{(0)}(x^\alpha, t) + \sum_n \varepsilon^n u_j^{(n)}(x^\alpha, t); \quad (4.4.15)$$

при этом

$$D_{jk}(\sigma, x^\alpha t) = D_{jk}^{(0)}(\sigma, x^\alpha t) + \sum_n \varepsilon^n D_{jk}^{(n)}(\sigma, x^\alpha t);$$

$$\sigma(x^\alpha, t) = \sigma^{(0)}(x^\alpha, t) + \sum_n \varepsilon^n \sigma^{(n)}(x^\alpha, t). \quad (4.4.16)$$

Подстановка соотношений (4.4.11), (4.4.15), (4.4.16) в (4.4.13) и приравнивание величин в левой и в правой частях равенств при одинаковых степенях ε приводит к выражениям

$$D_{jk}^{(0)}(\sigma) = 0,5 \int_0^t \tilde{\Gamma}^{(0)}(t - \tau) d [\nabla_j u_k^{(0)} + \nabla_k u_j^{(0)} - (2/3) g_{jk} \nabla_\alpha u_{(0)}^\alpha];$$

$$D_{jk}^{(1)}(\sigma) = 0,5 \int_0^t \tilde{\Gamma}^{(0)}(t - \tau) d [\nabla_j u_k^{(1)} + \nabla_k u_j^{(1)} - (2/3) g_{jk} \nabla_\alpha u_{(1)}^\alpha] +$$

$$+ \bar{D}_{jk}^{(1)}(\sigma);$$

$$\dots \dots \dots (4.4.17)$$

Очевидно, что дальнейшее построение решения требует применения процедуры последовательных приближений. Для определения исходного приближения $u_j^{(0)}(x^\alpha, t)$ следует решать краевую задачу на основе исходной системы уравнений и соотношений (4.4.12) — (4.4.14), причем функция релаксации $\tilde{\Gamma}^0(t-\tau)$ не зависит от координат x^α . В этом случае имеем однородную задачу термовязкоупругости, решение которой можно построить ранее изложенными методами. Для определения последующих приближений $u_j^{(l)}(x^\alpha, t)$ решаем аналогичную краевую задачу, в которой функция релаксации $\tilde{\Gamma}^{(0)}(t-\tau)$ не зависит от координат, т. е. снова формируем однородную задачу термовязкоупругости при условии отсутствия на части S_1 поверхности перемещений, отсутствия температурного поля, но при наличии дополнительных объемных $g^{j\alpha}\nabla_\alpha \bar{D}_{jk}^{(l)}(\sigma)$ и поверхностных сил $\bar{D}_{jk}^{(l)}(\sigma)n^k$ на части S_2 поверхности. Решение такой задачи строим теми же методами, что и исходное приближение. Искомое решение общей задачи определяем как сумму соответствующих приближений $u_j^{(l)}(x^\alpha, t)$, что следует из (4.4.15) при $\varepsilon = 1$, так как в этом случае (4.4.10) обращается в тождество.

Итак, метод малого параметра сводит решение задачи неоднородной термовязкоупругости к решению задач, в которых функция релаксации или ползучести являются однородными функциями координат при неоднородном температурном поле.

Построение приближенного решения статической задачи нелинейной термовязкоупругости (см. п. 1.6), основанной на соотношениях

$$D_{jk}(\sigma) = 2G\Phi(e_i)D_{jk}(e) - \int_0^t \Gamma(t' - \tau')\Phi(e_i)D_{jk}(e, \tau) d\tau; \quad (4.4.21)$$

$$\sigma = 3K(e - \alpha\Delta T),$$

может быть выполнено методом последовательных приближений. Пусть основными неизвестными будут компоненты вектора перемещений $u_j(x^\alpha, t)$. Представим функцию $\Phi(e_i)$ в виде $\Phi(e_i) = 1 - \omega(e_i)$, тогда при $\omega(e_i) = 0$ соотношения (4.4.21) соответствуют уравнениям линейной термовязкоупругости. В уравнения равновесия

$$g^{j\alpha}\nabla_\alpha D_{jk}(\sigma) + \nabla_k \sigma + F_k = 0$$

подставим соотношения (4.4.21) и, учитывая представление компонент e_{jk} тензора деформаций через компоненты u_j вектора перемещений, после очевидных преобразований получим систему разрешающих уравнений

$$L_k(u) + F_k + F_{\omega k} - 3\alpha K \nabla_k \Delta T = 0. \quad (4.4.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 L_k(u) &= G [\nabla^2 u_k + m \nabla_k (\nabla_\alpha u^\alpha)] - \\
 &- \frac{1}{2} \int_0^t g^{j\alpha} \nabla_\alpha \left[\Gamma(t' - \tau') (\nabla_j u_k + \nabla_k u_j - \frac{2}{3} g_{jk} \nabla_\alpha u^\alpha) \right] d\tau; \\
 F_{\omega k} &= \int_0^t g^{j\alpha} \nabla_\alpha [\Gamma(t' - \tau') \omega(e_i) D_{jk}(e, \tau)] d\tau - \\
 &- 2G g^{j\alpha} \nabla_\alpha [\omega(e_i) D_{jk}(e)].
 \end{aligned}$$

Граничные условия

$$u_j(S) = u_{jS} \text{ на } S_1; \quad D_{jk}(\sigma) n^j + \sigma n_k = p_k^{(n)} \text{ на } S_2 \quad (4.4.23)$$

после аналогичных преобразований принимают вид

$$M_k(u) = p_k^{(n)} + p_{\omega k}^{(n)} + 3\alpha K \Delta T n_k,$$

где

$$\begin{aligned}
 M_k(u) &= G (\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) n^j + G (m - 1) \nabla_\alpha u^\alpha n_k - \\
 &- \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(t' - \tau') \left[(\nabla_j u_k + \nabla_k u_j) n^j - \frac{2}{3} \nabla_\alpha u^\alpha n_k \right] d\tau; \\
 p_{\omega k}^{(n)} &= 2G \omega(e_i) D_{jk}(e) n^j - \int_0^t \Gamma(t' - \tau') \omega(e_i \tau) D_{jk}(e \tau) n^j d\tau.
 \end{aligned}$$

Итак, имеем систему разрешающих уравнений (4.4.22), записанную в перемещениях, которой соответствуют граничные условия (4.4.23). Для решения такой задачи воспользуемся процедурой последовательных приближений.

В исходном приближении $\omega(e_i) = 0$, тогда $F_{\omega k} = 0$ и $p_{\omega k}^{(n)} = 0$, а уравнения (4.4.22) образуют систему разрешающих уравнений линейной термовязкоупругости с граничными условиями (4.4.23). В результате решения этой задачи ранее изложенными методами будут определены компоненты $u_j^{(0)}$ вектора перемещений. Первое приближение строим по найденному исходному $u_j^{(0)}$ приближению. Далее последовательно определяем $e_{jk}^{(0)}$, $e_i^{(0)}$, $\omega(e_i^{(0)})$, $F_{\omega k}^{(0)}$, $p_{\omega k}^{(n)(0)}$ и записываем систему разрешающих уравнений первого приближения с соответствующими граничными условиями. Решение этой задачи может быть найдено методами решения задач линейной термовязкоупругости, в результате определяются компоненты $u_j^{(1)}$ вектора перемещений. Аналогично строится решение любого l -го приближения.

Решение задачи нелинейной термовязкоупругости может быть сведено к отысканию решений соответствующих задач идеальной упругости с дополнительными объемными и поверхностными силами. Рассмотрим соотношения

$$2G\varphi(e_i) D_{jk}(e) = f(\sigma_i) D_{jk}(\sigma) + \int_0^t R(t' - \tau') f(\sigma_i \tau) D_{jk}(\sigma \tau) d\tau; \\ e = \sigma/3K + \alpha \Delta T \quad (4.4.24)$$

или

$$f(\sigma_i) D_{jk}(\sigma)/2G = \varphi(e_i) D_{jk}(e) - \int_0^t \Gamma(t' - \tau') \varphi(e_i \tau) D_{jk}(e \tau) d\tau; \\ \sigma = 3K(e - \alpha \Delta T),$$

для которых справедлива зависимость

$$R(t) = \Gamma(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) R(\tau) d\tau.$$

Функции $f(\sigma_i)$ и $\varphi(e_i)$, входящие в соотношения (4.4.24), характеризуют степень физической нелинейности среды (в области линейности $f=1$, $\varphi=1$). Указанные функции можно определить из опытов на ползучесть. Предположим, что известны кривые ползучести при чистом сдвиге $e_{12}(t)$, соответствующие различным значениям постоянного напряжения $\sigma_{12}^{(0)}$, тогда $\sigma_i = \sqrt{3}\sigma_{12} > 0$; $\sigma = 0$; $e_i = 2e_{12}/\sqrt{3} > 0$; $e = 0$. При чистой ползучести из (4.4.24) следует

$$3G\varphi(e_i(t)) e_i(t)/\sigma_i^{(0)} f(\sigma_i^{(0)}) = \psi(t); \\ \psi(t) = 1 - \int_0^t R(t - \tau) d\tau. \quad (4.4.25)$$

Пользуясь кривой ползучести при $\sigma_i^{(0)} \leq \sigma_i^*$, когда сохраняется линейность ($f=1$, $\varphi=1$), определим функцию $\psi(t)$, а затем и ядро $R(t)$ с помощью соотношения (4.4.24). Кривые ползучести при $\sigma_i^{(0)} > \sigma_i^*$ позволяют построить кривые $f(\sigma_i^{(0)})/\varphi(e_i) \sim t$, соответствующие различным значениям $\sigma_i^{(0)}$. В основу построения указанных кривых положено соотношение (4.4.25), которое при $\sigma_i^{(0)} \leq \sigma_i^*$ принимает вид $3Ge_i(t) = \sigma_i^{(0)}\psi(t)$, причем отношение ординаты точки кривой ползучести, соответствующей $\sigma_i^{(0)} > \sigma_i^*$, к ординате точки кривой ползучести соответствующей

щей $\sigma_i^{(0)} \leq \sigma_i^*$, при одном и том же выбранном времени t_k равно $f(\sigma_i^{(0)})/\varphi(e_i(t_k))$, что согласуется с (4.4.25).

Отношения ординаты точки, выбранной на построенной кривой при заданных значениях t_* и $\sigma_{i(n)}^{(0)}$, к ординатам любых точек на той же кривой $\sigma_{i(n)}^{(0)}$, но соответствующих разным моментам времени t_k , равны $\varphi(e_i(t_k))/\varphi(e_i(t_*))$, т. е. функция $\varphi(e_i)$ известна для любого момента времени t_k с точностью до неизвестной постоянной $C_1 = \varphi(e_i(t_*, \sigma_{i(n)}^{(0)}))$. Однако согласно кривой ползучести, соответствующей $\sigma_{i(n)}^{(0)}$, известно соответствие $e_i \sim t$, а потому становится известной функция $\varphi(e_i)$ с точностью до постоянного множителя C_1 .

Отношение ординат точек, взятых на различных кривых $\sigma_{i(n)}^{(0)}$, но при одном и том же времени t_m , к ординате выбранной точки $(t_m, \sigma_{i(1)}^{(0)})$ определяет функцию $f(\sigma_i^{(0)})$ с точностью до постоянной $C_2 = f(\sigma_{i(1)}^{(0)})$. Действительно, в это отношение входят значения $\varphi(e_i(t_m))$, соответствующие различным $\sigma_{i(k)}^{(0)}$, но соответствие $t_m \sim e_i \sim \sigma_{i(k)}^{(0)}$ известно из кривых ползучести, а функция $\varphi(e_i)$ определена с точностью до множителя C_1 , который не входит в рассматриваемое отношение, поэтому значения $\varphi(e_i(t_m))$ известны.

Отношение C_1/C_2 можно определить, выбрав одну или несколько точек на ранее построенных кривых, так как для них известно отношение $f(\sigma_i^{(0)})/\varphi(e_i)$. Таким образом, функции $f(\sigma_i)$ и $\varphi(e_i)$ будут известны с точностью до общего постоянного множителя, который несуществен, так как отношения (4.4.24) однородны по f и φ .

Статической задаче нелинейной термовязкоупругости соответствует исходная система уравнений и соотношений (1.1.4), (1.1.6), (4.4.24) с граничными условиями (1.2.1) и (1.2.3). Решение такой задачи ищем методом последовательных приближений, для чего функции $f(\sigma_i)$ и $\varphi(e_i)$ представим в виде

$$f(\sigma_i) = 1 + \omega_1(\sigma_i); \quad \varphi(e_i) = 1 - \omega_2(e_i),$$

причем в области физической линейности $\omega_1(\sigma_i) = 0$, $\omega_2(e_i) = 0$. В исходном приближении принимаем $\omega_1(\sigma_i) = 0$, $\omega_2(e_i) = 0$, тогда исходные уравнения определяют линейную задачу термовязкоупругости, решение которой возможно ранее изложенными методами.

Динамические задачи термовязкоупругости, в которых возникает необходимость учета инерционных сил, лучше решать методом усреднения, основанном на усреднении функций, входящих в уравнения. Средним значением функции $f(t)$ называется величина

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Для функции двух и более переменных, например t и x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), можно вычислять среднее значение по какой-либо переменной, например $\bar{f}_t, \bar{f}_{x^\alpha}$.

При динамическом нагружении задачи вязкоупругости известными методами могут быть сведены к системе интегродифференциальных уравнений относительно x^α вида

$$g_{k\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = f_k(x^\alpha, t) + \varepsilon \varphi_k(x^\alpha, t) + \varepsilon \int_0^t \psi_k(x^\alpha(\eta), \eta, t) d\eta, \quad (4.4.26)$$

где f_k, φ_k, ψ_k — известные функции своих аргументов; ε — малый параметр; $k, \alpha = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим систему уравнений

$$g_{k\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = f_k(x^\alpha, t),$$

решение которой задано в форме

$$x^k = g^{kl} \kappa_l(C_\alpha, t). \quad (4.4.27)$$

Считая величины C_α функциями времени $C_\alpha(t)$, соотношения (4.4.27) можно использовать для перехода от переменных x^k к новым переменным $C_\alpha(t)$, при этом система уравнений (4.4.26) принимает вид

$$g_{kl} \frac{\partial \kappa_l}{\partial C_\alpha} \frac{dC_\alpha}{dt} = \varepsilon \left[\varphi_k(\kappa_\alpha(C_\alpha, t), t) + \int_0^t \psi_k(\kappa_\alpha(C_\alpha(\eta), \eta), \eta, t) d\eta \right],$$

аналогичный уравнениям

$$g_{k\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = \varepsilon F_k(x^\alpha, t) + \varepsilon \int_0^t \Phi_k(x^\alpha(\eta), \eta, t) d\eta. \quad (4.4.28)$$

С целью применения метода усреднения к системе уравнений (4.4.28) вычислим интеграл

$$\int_0^t \Phi(x, \eta, t) d\eta = \Phi_0(x, t)$$

по переменной η , считая x и t параметрами. Усредним по t функцию $F(x, t) + \Phi_0(x, t)$, т. е. определим

$$Z_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F(x, t) + \Phi_0(x, t)] dt.$$

Системе уравнений (4.4.28) вида

$$dx/dt = \varepsilon F(x, t) + \varepsilon \int_0^t \Phi(x(\eta), \eta, t) d\eta; \quad x(0) = x_0$$

поставим в соответствие усредненную систему уравнений

$$d\xi/dt = \varepsilon Z_0(\xi); \quad \xi(0) = x_0; \quad \xi = \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n. \quad (4.4.29)$$

Можно показать, что при определенных ограничениях, накладываемых на функции $F(x, t)$, $\Phi(x, t)$ и $Z_0(x)$, решение $\xi^k(t)$ усредненной системы уравнений (4.4.29) близко к решению $x^k(t)$ исходной системы уравнений (4.4.28). С этой целью сформулируем условия, при выполнении которых решения $x(t)$ и $\xi(t)$ достаточно близки.

1. Пусть функции $F(x, t)$ и $\Phi(x, \eta, t)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по x :

$$|F(x', t) - F(x'', t)| \leq \lambda |x' - x''|;$$

$$|\Phi(x', \eta, t) - \Phi(x'', \eta, t)| \leq \mu |x' - x''|.$$

Пусть также условию Липшица удовлетворяет предел

$$|Z_0(x') - Z_0(x'')| \leq \nu |x' - x''|,$$

если считать функцию $Z_0(x)$ ограниченной, т. е. $|Z_0(x)| \leq M$. Тогда для любых выбранных $\chi > 0$, $L > 0$ можно указать такое ε_0 , зависящее от χ и L , что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1/2}$ будет выполняться неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \chi. \quad (4.4.30)$$

2. Пусть функции $F(x, t)$ и $\Phi(x, \eta, t)$ удовлетворяют условию Липшица по x , а исходная система уравнений (4.4.28) не имеет особых точек. Пусть также равномерно относительно t существует предел

$$Z_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [F(x, \tau) + \Phi_0(x, \tau)] d\tau,$$

удовлетворяющий условию Липшица и условию ограниченности, а решение $\xi = \xi(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ усредненной системы (4.4.29) устойчиво. Тогда для любого $\chi > 0$ можно указать такое ε_0 , зависящее от χ , что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ для всех $t \geq 0$ будет выполняться неравенство (4.4.30).

Таким образом, метод усреднений сводит задачу нахождения решения системы интегродифференциальных уравнений (4.4.28) к значительно более простой задаче решения дифференциальных уравнений (4.4.29), для которой во многих случаях можно по-

строить эффективное решение. Точность решения, получаемого на основе метода усреднения, может быть повышена путем построения высших приближений. Разность $|x(t) - \xi(t)|$ зависит от величины малого параметра ε , однако параметр ε — величина вполне определенная, которую нельзя уменьшить так, как требуется для решения задачи, т. е. в изложенном методе нет возможности улучшить аппроксимацию. Такая возможность существует, если воспользоваться построением высших приближений. С этой целью решение системы уравнений (4.4.26) аппроксимируем выражением

$$x = \xi + \sum_j \varepsilon^j u_j(\xi, t), \quad (4.4.31)$$

а задачу сведем к отысканию функций $\xi(t)$, $u_j(\xi, t)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Для вычисления функции $\xi(t)$ воспользуемся уравнением

$$d\xi/dt = \sum_j \varepsilon^j \psi_j(\xi), \quad (4.4.32)$$

где $\psi_j(\xi)$ — неизвестные функции. Функция $x(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$dx/dt = \varepsilon[F(x, t) + \Phi_0(x, t)], \quad (4.4.33)$$

причем сумма $F(x, t) + \Phi_0(x, t)$ может быть разложена в ряд с учетом (4.4.31). Подставляя ряд (4.4.31) и ряд для функции $F(x, t) + \Phi_0(x, t)$ в уравнение (4.4.33), учитывая (4.4.32) и приравнявая выражения при одинаковых степенях параметра ε , получим для искомых функций следующие соотношения: в первом и во втором приближении соответственно:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \bar{F} + \bar{\Phi}_0; \quad \partial u_1 / \partial t = F + \Phi_0 - \bar{F} - \bar{\Phi}_0; \\ \psi_2 &= -\bar{\psi}_1 \partial u_1 / \partial \xi + u_1 \partial \bar{F} / \partial \xi + \bar{\Phi}_0; \\ \partial u_2 / \partial t &= \bar{\psi}_1 \partial u_1 / \partial \xi - \psi_1 \partial u_1 / \partial \xi - (\partial \bar{F} / \partial \xi) u_1 + \\ &+ (\partial F / \partial \xi) u_1 + Z_1 - \bar{Z}_1, \end{aligned}$$

где $Z_1(\xi, t) = \int_0^t \frac{\partial \Phi(\xi, \eta, t)}{\partial \xi} u_1(\xi, \eta) d\eta$. Аналогично можно записать для последующих приближений.

4.5. Задачи ползучести и вязкопластичности, методы их решения

Задачи ползучести, как и задачи пластичности, по своей природе являются нелинейными и связаны с реономными свойствами среды. Решение задачи ползучести может быть только при-

лиженным, построение его основано на использовании различных процедур последовательных приближений.

Задачу ползучести, как показано в п. 1.5, целесообразно решать в напряжениях, с помощью системы разрешающих уравнений

$$\begin{aligned} g^{kn} \nabla_n \sigma_{jk} + F_j &= 0; \\ \Lambda_\delta^{lj} \Lambda_\beta^{nk} \nabla_l \nabla_n (\dot{\epsilon}_{jk}^{(0)} + 1,5 f D_{jk}(\sigma)) &= 0, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

где при установившейся ползучести $\dot{\epsilon}_{jk}^{(0)} = 0$. Выполнение уравнений равновесия, входящих в (4.5.1), будет обеспечено, если компоненты σ_{jk} тензора напряжений представить в форме общего решения этих уравнений

$$\begin{aligned} \sigma^{jk} &= 2e^{jk}(\mathbf{p}) - 2(\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi}) g^{jk} + \Lambda_l^{nk} \Lambda^{\beta l j} \nabla_n \nabla_\beta \psi + \\ &+ \Lambda_l^{nk} \Lambda_\beta^{ja} \nabla_n \nabla_\alpha \Pi^{\beta l}, \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

которое выражает компоненты тензора напряжений через компоненты тензора функций напряжений (Π) и скаляр ψ .

Функции напряжений $\Pi^{\beta l}$, как показано в п. 2.4, удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 [D^{\beta l}(\Pi) + 1,5 f D^{\beta l}(\Pi)] = 0, \quad (4.5.3)$$

а при наличии пластических деформаций — уравнениям

$$\nabla^2 [D^{\beta l}(\Pi) + (2G\lambda + 1,5f) D^{\beta l}(\Pi)] = 0. \quad (4.5.4)$$

Для установившейся ползучести выражения (4.5.3), (4.5.4) упрощаются:

$$\nabla^2 (f D^{\beta l}(\Pi)) = 0. \quad (4.5.5)$$

Уравнениям (4.5.3) — (4.5.5) соответствуют граничные условия

$$\nabla^2 [D^{\beta l}(\Pi) - 2\Pi g^{\beta l}]_s n_l = -3p_{(s)}^{\beta},$$

где $p_{(s)}^{\beta}$ — поверхностные силы, действующие на тело, а уравнениям (4.5.3), (4.5.4) дополнительно начальные условия при $t=0$

$$D^{\beta l}(\Pi) = D_{(0)}^{\beta l}(\Pi). \quad (4.5.6)$$

Скаляр ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi = 2(\nabla_\alpha p^\alpha + 2\tilde{\varphi}/m),$$

которое решается при граничном условии

$$\nabla^2 \psi|_s = 3[\nabla_\alpha p^\alpha + \tilde{\varphi} - e_{jk}(\mathbf{p}) n^j n^k]_s,$$

где $\tilde{\varphi}$ — потенциал; $\mathbf{p}$ — вектор-потенциал объемных сил, действующих на тело. Однако объемные внешние силы в основном являются потенциальными ($\mathbf{p}=0$), поэтому в дальнейшем принимаем, что скаляр ψ внутри рассматриваемой области подчинен уравнениям

$$\nabla^2 \psi = 4\tilde{\varphi}/m; \quad \nabla^2 \psi = 3\tilde{\varphi} \quad (4.5.7)$$

на ограничивающей эту область поверхности.

Для полного определения компонент тензора напряжений достаточно трех функций напряжений. Выберем их такими, чтобы инвариант $\Pi=0$. Этому требованию удовлетворяет решение (4.5.2) в форме Морера с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_1 & 0 & \Pi_3 \\ \Pi_2 & \Pi_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

где $\Pi_1 = \Pi^{12} = \Pi^{21}$; $\Pi_2 = \Pi^{13} = \Pi^{31}$; $\Pi_3 = \Pi^{23} = \Pi^{32}$. При этом

$$D^{\beta l}(\Pi) = \Pi^{\beta l} - \Pi g^{\beta l} = \Pi^{\beta l}, \quad \beta \neq l;$$

$$\Pi = g_{\beta l} \Pi^{\beta l} / 3 = (g_{11} \Pi^{11} + g_{22} \Pi^{22} + g_{33} \Pi^{33}) = 0.$$

Вводя обозначения при неустановившейся и при установившейся ползучести соответственно

$$\begin{aligned} S^{\beta l}(\Pi) &= D^{\beta l}(\dot{\Pi}) + (2G\dot{\lambda} + 1,5f) D^{\beta l}(\Pi), \\ S^{\beta l}(\Pi) &= f D^{\beta l}(\Pi), \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

запишем уравнения (4.5.3) — (4.5.5) в единой форме

$$\nabla^2 S^{\beta l}(\Pi) = 0. \quad (4.5.9)$$

На поверхности тела S

$$\nabla^2 D^{\beta l}(\Pi) |_{Sn} = -3p_{(n)}^{\beta}. \quad (4.5.10)$$

Из (4.5.8) находим для установившейся ползучести

$$D^{\beta l}(\Pi) = S^{\beta l}(\Pi) / f, \quad (4.5.11)$$

а для неустановившейся ползучести с учетом начальных условий (4.5.6)

$$D^{\beta l}(\Pi) = e^{-\kappa(t)} \left(D_{(0)}^{\beta l}(\Pi) + \int_0^t e^{\kappa(\tau)} S^{\beta l}(\Pi) d\tau \right), \quad (4.5.12)$$

где

$$\kappa(t) = \int_0^t (2G\dot{\lambda} + 1,5f) dt. \quad (4.5.13)$$

Итак, решение задачи ползучести в напряжениях сводится к решению уравнений (4.5.7) при определении скаляра ψ и решению уравнений (4.5.9) с учетом (4.5.10) при определении функций напряжений Π^{Bl} . Применение формул (4.5.11) и (4.5.12) основано на использовании процедуры последовательных приближений. Исходным приближением при решении задачи ползучести является решение соответствующих задач упругости или пластичности, построенное ранее указанными методами, т. е. при $\dot{f}(\sigma_i \Delta T, t) = 0$.

По известному решению $u_j^{(0)}$ или $\sigma_{jk}^{(0)}$ исходного приближения находим интенсивность напряжений $\sigma_i^{(0)}$, параметр λ и выбираем кривую ползучести по значениям $\sigma_i^{(0)}$ и ΔT . Первое приближение решения задачи ползучести строим по данным исходного приближения. Для значений $\sigma_i^{(0)}$ и ΔT по кривой ползучести устанавливаем функцию $f_1(\sigma_i^{(0)} \Delta T, t)$. Для установившейся ползучести по формулам (4.5.11) и известной функции $f_1(\sigma_i^{(0)} \Delta T, t)$ находим функции напряжений $\Pi_{(1)}^{Bl} = S^{Bl}(\Pi)/f_1$, которые подставляем вместе со скаляром ψ в общее решение (4.5.2) и определяем компоненты $\sigma_{(1)}^{jk}$ тензора напряжений в первом приближении. Для неустановившейся ползучести по формуле (4.5.13) и известной функции $f_1(\sigma_i^{(0)} \Delta T, t)$ определяем функцию

$$\kappa_1(t) = \int_0^t (2G\dot{\lambda} + 1,5 f_1) dt,$$

а затем по формулам (4.5.12), учитывая выражение $\kappa_1(t)$, находим функции напряжений

$$\Pi_{(1)}^{Bl} = e^{-\kappa_1} \left(D_{(0)}^{Bl}(\Pi) + \int_0^t e^{\kappa_1} S^{Bl}(\Pi) d\tau \right).$$

Подстановка найденных функций напряжений $\Pi_{(1)}^{Bl}$ и скаляра ψ в общее решение (4.5.2) определяет компоненты $\sigma_{(1)}^{jk}$ тензора напряжений в первом приближении. Построение n -го приближения задачи ползучести выполняется по известному $(n-1)$ -му приближению в том же порядке.

Таким образом, приближенное решение задачи ползучести может быть построено с любой степенью точности. Сходимость процедуры последовательных приближений не рассматривается. При решении конкретных задач ползучести достаточно ограничиться двумя приближениями.

Задачи вязкопластичности, как и задачи ползучести, нелинейные, поэтому они имеют только приближенное решение, по-

строение которого основано на использовании процедуры последовательных приближений. Если задача вязкопластичности поставлена в скоростях и основными неизвестными являются $\dot{\epsilon}_i$, ρ , v_j , то, как показано в п. 2.5, система разрешающих уравнений с соответствующими начальными условиями имеет вид (2.5.4), а граничные условия подчиняются соотношениям (2.5.5) — (2.5.7).

В исходном приближении считаем $\tau_i(\dot{\gamma}_i) = 0$, что соответствует вязкой жидкости, для которой согласно (2.5.3) и (2.5.7) $D_j(v) = 0$ и $q_{jk} = 0$. Разрешающие уравнения (2.5.4) и граничные условия (2.5.5) переходят соответственно в разрешающие уравнения и граничные условия задачи механики вязкой жидкости. Ее решение может быть построено методами, изложенными в предыдущих главах и предыдущих параграфах данной главы, так что считаем основные неизвестные ρ , ρ и v_j известными функциями координат и времени. По кинематическим соотношениям

$$\dot{\epsilon}_{jh} = 0,5(\nabla_j v_h + \nabla_h v_j)$$

определяем компоненты тензора скоростей деформаций, а по физическим соотношениям

$$\sigma_{jh} = -p q_{jh} + 2\mu[\dot{\epsilon}_{jh} + (\lambda/2\mu - 1)\dot{\epsilon} g_{jh}]$$

— компоненты тензора напряжений. По известным компонентам тензоров $(\dot{\epsilon})$ и (σ) вычисляем интенсивность скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_i^{(0)}$, среднюю скорость деформации $\dot{\epsilon}^{(0)}$ и интенсивность напряжений $\sigma_i^{(0)}$ исходного приближения.

Первое приближение задачи вязкопластичности строим по известному исходному приближению и при наличии кривой $\tau_i(\dot{\gamma}_i)$ среды. По известным значениям $\sigma_i^{(0)}$ и $\dot{\epsilon}_i^{(0)}$ путем пересчета по формулам $\tau_i = (\sqrt{2}/3)\sigma_i$; $\dot{\gamma}_i = \sqrt{2}\dot{\epsilon}_i$ определяем соответственно $\tau_i^{(0)}$ и $\dot{\gamma}_i^{(0)}$. Затем с помощью кривой $\tau_i(\dot{\gamma}_i)$ устанавливаем функцию $\tau_i^{(1)}(\dot{\gamma}_i^{(0)})$ и определяем ее значения. С помощью формул (2.5.3) и (2.5.7) находим функции $D_j^{(1)}(v)$ и $q_{jk}^{(1)}$, подстановка которых в уравнения (2.5.4) и граничные условия (2.5.5) приводит к задаче механики вязкой жидкости с фиктивными объемными

$$F_j^{*(1)} = F_j + D_j^{(1)}(v)$$

и поверхностными

$$p_j^{*(n)(1)} = p_j^{(n)} + p^{(0)}n_j - q_{jk}^{(1)}n^k$$

внешними силами. Решение задачи механики вязкой жидкости приводит к определению $p^{(1)}$, $\rho^{(1)}$, компонентов $\dot{\epsilon}_{jk}^{(1)}$ и $\sigma_{jk}^{(1)}$, а следовательно, и $\dot{\epsilon}_i^{(1)}$, $\dot{\epsilon}^{(1)}$, $\sigma_j^{(1)}$ в первом приближении. Построение m -го приближения по известному $(m-1)$ -му приближению выполняют в том же порядке.

Таким образом, применение изложенной процедуры последовательных приближений позволяет построить приближенное решение задачи вязкопластичности с любой степенью точности. Сходимость этой процедуры не рассматривается. При решении конкретных задач вязкопластичности достаточно ограничиться двумя приближениями.

Если задача вязкопластичности поставлена в напряжениях и основными неизвестными являются p , ρ , v_j , σ_{jk} , то система разрешающих уравнений, приведенная в п. 2.5, также может быть решена с помощью процедуры последовательных приближений. Исходному приближению вновь будет соответствовать модель вязкой жидкости, т. е. $\tau_i(\dot{\gamma}_i) = 0$. Другие приближения формируют в соответствии с изложенным выше алгоритмом на основе известной кривой $\tau_i(\dot{\gamma}_i)$.

Таким образом, задача вязкопластичности в напряжениях также может быть решена приближенно с любой степенью точности. Сходимость процедуры последовательных приближений не рассматривается. При решении конкретных задач вязкопластичности достаточно ограничиться двумя приближениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: АН СССР, 1963. 272 с.
2. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций: В 3 ч. М.: Высш. шк., 1979—80. Ч. 1. 1979. 384 с.; Ч. 2. 1979. 536 с.; Ч. 3. 1980. 440 с.
4. Ионов В. Н., Селиванов В. В. Динамика разрушения деформируемого тела. М.: Машиностроение, 1987. 272 с.
5. Краснов Н. Ф. Аэродинамика: В 2 ч. М.: Высш. шк., 1980. Ч. I. 495 с.; Ч. II. 416 с.
6. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961. 204 с.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
8. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
9. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
11. Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 328 с.

12. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
 13. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. В 2 т. М.: Наука, Т. 1. 1970. 492 с.; Т. 2. 1973. 584 с.
 14. *Толоконников Л. А.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1979. 318 с.
 15. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 400 с.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Общие теоремы и постановка задач механики сплошной среды	4
1.1. Общие принципы и законы сохранения	4
1.2. Основы постановки задач механики сплошной среды	13
1.3. Механика жидкости и газа	17
1.4. Упругость и термоупругость	33
1.5. Пластичность и ползучесть	50
1.6. Вязкоупругость и вязкопластичность	82
Глава 2. Общие решения, их реализация	107
2.1. Решения разрешающих уравнений механики жидкости и газа	107
2.2. Решения разрешающих уравнений статической теории упругости и термоупругости	126
2.3. Общие решения разрешающих уравнений динамической теории упругости и термоупругости	149
2.4. Общие решения разрешающих уравнений теории пластичности и ползучести	160
2.5. Решения разрешающих уравнений вязкоупругости и вязкопластичности	177
2.6. Типовые уравнения, способы их решения	181
Глава 3. Точные методы решения линейных задач	197
3.1. Интегральные преобразования, их применение	197
3.2. Функция Грина, ее приложение	236
3.3. Метод собственных функций, его реализация	254
3.4. Теория потенциала и интегральные уравнения механики жидкости и газа	271
3.5. Интегральные уравнения теории упругости и термоупругости	284
3.6. Метод возмущений и метод усреднения, их сущность	300
Глава 4. Приближенные методы решения нелинейных задач	321
4.1. Задачи о течении жидкости и газа, их линеаризация	321
4.2. Метод последовательных приближений в нелинейной теории упругости	340
4.3. Методы решения задач пластичности	344
4.4. Методы решения задач вязкоупругости	362
4.5. Задачи ползучести и вязкопластичности, методы их решения	376
Литература	381

Учебное издание

Виктор Валентинович Селиванов

Владимир Степанович Зарубин

Валентин Николаевич Ионов

Аналитические методы механики сплошной среды

Редактор *Е. Н. Ставицкая*

Художник *В. Я. Батищев*

Технический редактор *О. В. Рыбина*

Корректор *Л. И. Малютина*

ЛР № 020523 от 23.04.92

Сдано в набор 15.12.93

Подписано в печать 10.05.94 г.

Формат 60×90^{1/16}.

Бумага тип. № 2.

Печать высокая.

Гарнитура литературная.

Усл. печ. л. 24.0

Усл. кр.-отт. 24.0

Уч.-изд. л. 21.6.

Тираж 1000 экз.

Изд. № 89

Заказ 5526

Издательство МГТУ. 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ
140010, г. Люберцы, 10, Октябрьский пр., 403