МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

В. И. Л Е О Н О В

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В ВИДЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

У т в е р ж д е н о
редакционно-издательским
советом института
в качестве учебного пособия

КУЙБЫШЕВ 1987

УДК 539.3:629.7.023

Л е о н о в В. И. Строительная механика элементов конструкций летательных аппаратов в виде оболочек вращения : Учебное пособие.- Куйбышев: КуАИ, 1987. - с. 88.

Излагается безмоментная и моментная теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Даются выводы основных дифференциальных уравнений и рассмотрены методы их решения как точные, так и приближенные. Наряду с аналитическими методами рассмотрено приложение метода конечных элементов к расчету оболочек вращения. Предназначено для студентов дневного обучения, изучающих курс „Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости".

Иллюстраций - 59, библиогр. - II назв.

Р е ц е н з е н т ы : к.т.н., доцент А. Н. Б е л и к о в
к.т.н., доцент В. В. Г о р б а т е н к о

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии излагаются вопросы теории и методы расчета на прочность тонкостенных конструкций летательных аппаратов в виде оболочек вращения. Оболочки вращения находят широкое применение в силовых конструкциях летательных аппаратов благодаря своей эффективности в весовом отношении. В процессе эксплуатации на оболочку действуют локальные и распределенные нагрузки, а также температурные поля. Все это делает актуальным изучение теории оболочек и методов их расчета на прочность и жесткость.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс „Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости" и состоит из четырех частей. В первой части рассматривается безмоментная теория оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Получены основные соотношения безмоментной теории, указаны условия существования безмоментного напряженного состояния, рассмотрены различные примеры расчета оболочек.

Вторая часть посвящена моментной теории цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении. Рассмотрен вывод дифференциального уравнения осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки, приведены примеры расчета оболочек при силовом и температурном нагружении.

Третья часть посвящена расчету краевого эффекта в оболочках вращения при осесимметричном нагружении. Получены уравнения Мейсснера и приведены различные приближенные способы их интегрирования для сферических оболочек. Для произвольных оболочек вращения изложен приближенный метод расчета, называемый методом Штаермана-Геккелера. На ряде примеров продемонстрирована высокая эффективность этого метода.

В четвертой части рассмотрено применение метода конечных элементов к расчету подкрепленных шпангоутами оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Получена матрица жесткости изопараметрического конечного элемента оболочки вращения, имеющего вид усеченного конуса. Рассмотрен также конечный элемент кругового шпангоута. Эффективность предложенных конечных элементов и сходимость решения к точному продемонстрирована на примере кольцевой пластины и сферической оболочки.

I. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

I.I. Основные определения, гипотезы и геометрические характеристики поверхности вращения

О б о л о ч к о й называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами тела. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей, называется с р е д и н н о й п о в е р х н о с т ь ю оболочки. Если в произвольной точке срединной поверхности восстановить перпендикуляр, то его отрезок, заключенный между поверхностями, называется т о л щ и н о й оболочки, а его длину в дальнейшем будем обозначать буквой h .

Виды оболочек весьма разнообразны и различаются они формой срединной поверхности. В дальнейшем будем рассматривать оболочки, срединная поверхность которы[redacted] поверхность вращения.

При построении теории оболочек [redacted]ются те же гипотезы, что и при построении теории пластин /5/:

- гипотеза прямой нормали;
- гипотеза об отсутствии давления между слоями.

Существенной особенностью оболочки является то, что из-за ее большой кривизны нельзя пренебрегать силами, возникающими в срединной поверхности Часто именно эти силы определяют прочность, а изгибными напряжениями можно пренебречь, т.е. можно считать напряжения не изменяющимися по толщине.

Рассмотрим произвольную оболочку вращения, срединная поверхность которой представлена на рис.I.I. Линии, образующиеся при пересечении поверхности с плоскостями, проходящими через ось вращения, называются меридианами. Один из меридианов показан на рисунке и обозначен буквами АМВ. Линии, перпендикулярные меридианам, представляют собой окружности и называются параллелями.

Каждая точка поверхности может быть задана как точка пересечения некоторого меридиана и некоторой параллели. Так например, чтобы задать положение точки М, достаточно задать угол φ , отсчитываемый от некоторого нулевого меридиана, и расстояние S , измеряемое от края оболочки вдоль меридиана. Иногда вместо координаты S более удобно использовать угловую координату θ , представляющую собой угол между осью вращения x и нормалью к срединной поверхности оболочки. Углы θ и φ, характеризующие положение произвольной точки на поверхности, обычно называют широтой и долготой. В некоторых случаях применяют также цилиндрические координаты φ, x, r (x отсчитывается вдоль оси оболочки; r - радиус параллели).

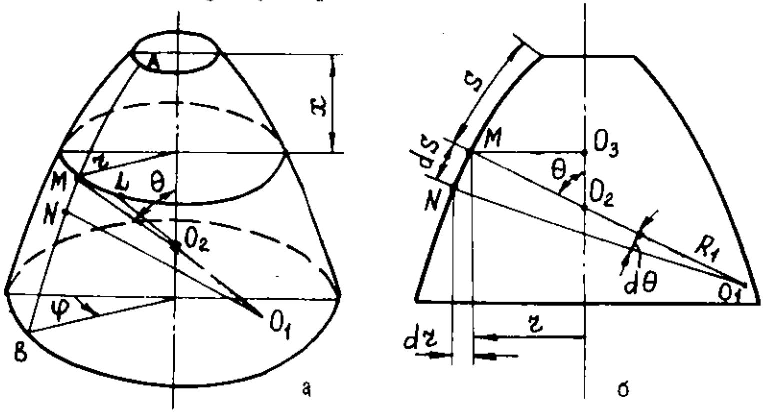

Рис.I.I. Срединная поверхность оболочки вращения
а - общий вид; б - сечение по меридиану AB

Рассмотрим меридиональное сечение оболочки (рис.I.I б). Радиус кривизны меридиана в точке M обозначим через R_1. На рисунке этот радиус изображается отрезком O_1M. Радиус кривизны поверхности в направлении, перпендикулярном меридиану, обозначим через R_2. Этот радиус для оболочки вращения равен отрезку нормали O_2M, заключенному между рассматриваемой точкой M и осью вращения. Действительно, если на параллели взять две рядом расположенные точки M и L (рис.I.I а) и восстановить нормали к поверхности в этих точках, то они пересекутся на оси вращения в точке O_2. Следовательно, последняя будет центром кривизны. Радиусы R_1 и R_2 называются главными радиусами кривизны поверхности вращения. Эти радиусы обладают свойством экстремальности; это значит, что радиус кривизны поверхности в любом другом направлении, наклоненном к меридиану, принимает значение, находящееся между R_1 и R_2.

Кроме радиусов кривизны поверхности R_1 и R_2 нам в дальнейшем потребуется еще радиус параллели, проходящей через рассматриваемую точку. Этот радиус $r = O_3M$ связан с радиусом кривизны R_2

зависимостью (рис.I.I б)

$$r = R_2 \sin\theta. \tag{I.I}$$

Радиусы R_1 , R_2 и угол θ являются функциями S (или r). Для того, чтобы эти величины в совокупности определяли поверхность вращения, необходимо, чтобы они подчинялись определенной зависимости. Из рис.I.I б следует:

$$dr = ds \cdot \cos\theta$$

или, учитывая равенство (I.I):

$$\frac{d(R_2 \sin\theta)}{ds} = \cos\theta \tag{I.2}$$

Если в качестве независимой переменной используется угол θ , то дифференцирование по S необходимо заменить дифференцированием по θ , используя соотношение $dS = R_1 d\theta$.

Тогда равенство (I.2) можно записать в виде

$$\frac{d(R_2 \sin\theta)}{d\theta} = R_1 \cos\theta \tag{I.3}$$

Соотношение (I.3) представляет собой частный случай общих соотношений Кодацци-Гаусса, которым должны удовлетворять радиусы кривизны любой поверхности, и является условием неразрывности (сплошности) поверхности вращения.

Оболочки разделяются на тонкие и толстые. Граница между тонкими и толстыми оболочками условна и обычно определяется отношением $h/R_{min} \approx$ I/20, где R_{min} - минимальное значение одного из главных радиусов кривизны срединной поверхности. Подавляющее большинство оболочек, встречающихся в конструкциях летательных аппаратов, имеет параметр h/R_{min} , намного меньший, чем I/20. Именно такие оболочки и будут являться предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

I.2. Безмоментное напряженное состояние. Условия существования безмоментного напряженного состояния

При нагружении оболочек возможно появление различных видов напряженного состояния. В оболочке может возникать только растяжение или сжатие без изгиба (безмоментное состояние); растяжение совместно с изгибом (смешанное состояние) или только изгиб без растяжения (чисто моментное состояние).

Характерной особенностью безмоментного состояния является то, что напряжения, возникающие в сечениях оболочки, по толщине не изменяются. Примером безмоментного состояния может служить напряженное состояние, возникающее в сферической оболочке под действием равномерного внутреннего давления.

Преимущества оболочки как конструктивного элемента реализуются в том случае, когда она работает на растяжение (сжатие) в условиях безмоментного напряженного состояния или состояния, близкого к безмоментному. Моментное состояние целесообразно только в том случае, когда оболочка используется в качестве гибкого элемента, получающего в процессе работы значительные упругие деформации (например, сильфоны).

Для реализации безмоментного напряженного состояния в оболочке необходимо удовлетворение следующим условиям /6, I0/:

I. Форма оболочки должна быть плавной, т.е. без скачкообразного изменения радиусов кривизны и толщины оболочки.

2. Нагрузки должны быть равномерными или плавно изменяющимися, без сосредоточенных сил или моментов.

3. Края оболочки закрепляются таким образом, чтобы реактивные силы не имели значительной поперечной составляющей, а также чтобы не возникали реактивные моменты.

Следует заметить, что даже если эти условия не полностью соблюдаются и в оболочке возникает растяжение и изгиб, безмоментная теория не теряет своего значения, так как уже на небольшом расстоянии от зоны изгиба (от места приложения сосредоточенных сил или скачкообразного изменения радиусов кривизны или толщины оболочки) напряженное состояние обычно можно рассматривать как безмоментное.

На рис.I.2 показаны четыре зоны, в которых нарушаются условия существования безмоментного напряженного состояния.

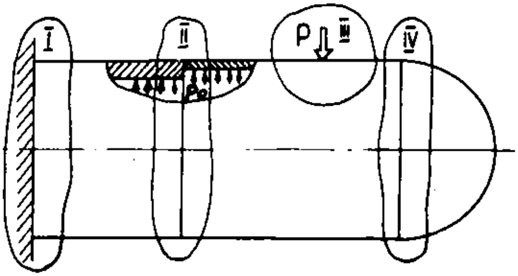

Рис.I.2. Участки оболочки, в которых нарушаются условия существования безмоментного напряженного состояния

Оболочки, воспринимающие нагрузку за счет растяжения (т.е. испытывающие безмоментное состояние), являются наиболее легкими. Поэтому при создании несущих тонкостенных конструкций всегда стремятся обеспечить их работу в основном как безмоментных оболочек. Этим и определяется большое практическое значение безмоментной теории.

Существенно также отметить, что при увеличении нагрузки на оболочки, выполненные из пластического материала, роль изгибных напряжений снижается за счет пластической деформации, и в предельном состоянии напряженное состояние рационально спроектированной оболочки мало отличается от безмоментного.

I.3. Расчет безмоментных оболочек вращения при осесимметричном нагружении

Рассмотрим произвольную оболочку вращения, нагруженную симметрично относительно оси вращения (рис.I.3). Распределенную поверхностную нагрузку представим в виде двух составляющих P_n и P_t, действующих вдоль нормали n к поверхности и по касательной t к меридиану, причем в силу осевой симметрии нагрузка будет являться только функцией угла θ и не будет зависеть от угла φ.

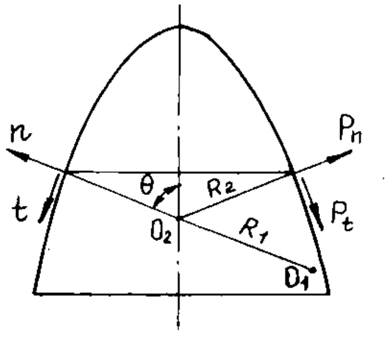

Рис.I.3. Сечение оболочки вращения

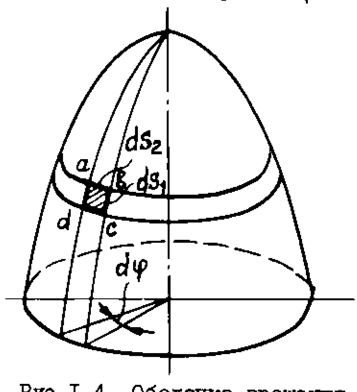

Рис.I.4. Оболочка вращения

Выделим бесконечно малый элемент оболочки a, b, c, d, ограниченный двумя близкими меридиональными сечениями и двумя коническими сечениями, нормальными к срединной поверхности (рис.I.4). Длины сторон ab и bc обозначим через ds_2 и ds_1 соответственно, причем

$$ds_1 = R_1\, d\theta, \qquad ds_2 = R_2\, d\varphi \sin\theta. \qquad (I.4)$$

В сечениях оболочки ab и bc возникают нормальные напряжения σ_{11} и σ_{22} соответственно. Касательные напряжения σ_{12} и σ_{21} в силу осесимметричного характера нагружения будут равны нулю. Введем нормальные погонные силы в меридиональном и окружном направлениях N_1 и N_2, которые выражаются через нормальные напряжения по формулам:

$$N_1 = \sigma_{11} h, \qquad N_2 = \sigma_{22} h. \qquad (I.5)$$

Тогда в сечении ab элемента оболочки будет действовать сила $N_1 ds_2$ (см.рис.I.5). На грани cd сила получит приращение, обусловленное как изменением напряжений, так и длиной стороны. Эту силу запишем как $N_1 ds_2 + d(N_1 ds_2)$. На гранях ad и bc в силу осесимметричности напряженного состояния действующие силы будут одинаковы и равны $N_2 ds_1$. Кроме рассмотренных внутренних усилий на выделенный элемент действует также и поверхностная нагрузка, которая дает составляющие на нормаль к срединной поверхности и на касательную к меридиану $p_n ds_1 ds_2$ и $p_t ds_1 ds_2$ соответственно.

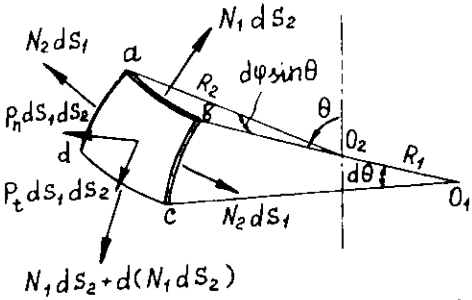

Рис.I.5. Бесконечно малый элемент оболочки вращения

Составим уравнение равновесия элемента $abcd$ в проекции на нормаль к срединной поверхности оболочки в центре элемента. С этой целью покажем на рис.I.6 проекции элемента на плоскости, перпендикулярные касательным к параллели и меридиану. Проектируя все силы на нормаль n, будем иметь

$$-N_1 ds_2 \frac{d\theta}{2} - [N_1 ds_2 + d(N_1 ds_2)]\frac{d\theta}{2} - 2N_2 ds_1 \frac{d\varphi}{2} \sin\theta + p_n ds_1 ds_2 = 0.$$

Отбросив бесконечно малые третьего порядка малости и учитывая соотношения $d\theta = \frac{ds_1}{R}$ и $\sin\theta\, d\varphi = \frac{ds_2}{R_2}$, получим после сокращения на $ds_1 ds_2$:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = p_n \qquad (I.6)$$

Уравнение (I.6) известно под названием уравнения Лапласа. Оно содержит две неизвестных величины: меридиональное усилие N_1 и окружное – N_2. Второе уравнение равновесия можно получить, составив проекцию всех сил на касательную к меридиану t. Однако можно поступить и иначе. Выделим часть оболочки от полюса до произвольного сечения, характеризуемого углом θ (рис. I.7), и рассмотрим равновесие этой отсеченной части в проекции на ось вращения. Равнодействующую всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части оболочки, обозначим через $\Phi(\theta)$. Под действием внешних сил и внутренних усилий N_1, возникающих в сечении с углом θ, отсеченная часть оболочки вращения находится в равновесии. Это позволяет записать следующее уравнение равновесия:

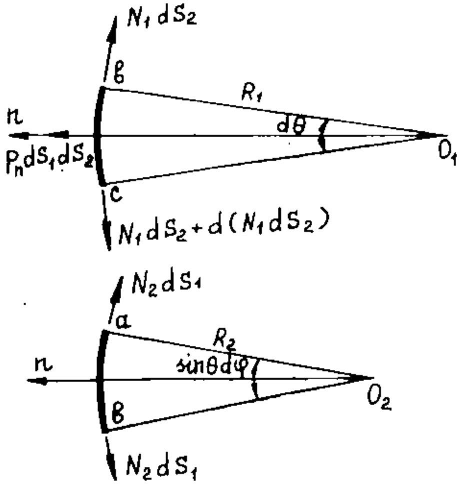

Рис. I.6. Проекции бесконечно малого элемента оболочки вращения

$$\Phi(\theta) = 2\pi r N_1 \sin\theta$$

или

$$N_1 = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi r \sin\theta} \qquad (I.7)$$

Так как $r = R_2 \sin\theta$, то

$$N_1 = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi R_2 \sin^2\theta} \qquad (I.8)$$

Таким образом, задача расчета оболочки вращения является статически определимой; для нахождения двух неизвестных величин N_1 и N_2 мы располагаем двумя уравнениями: уравнением Лапласа

(I.6) и уравнением равновесия отсеченной части оболочки в форме (I.7) или (I.8).

Рассмотрим вычисление функции $\Phi(\theta)$ для некоторых частных случаев нагружения.

Для оболочки вращения, нагруженной сосредоточенной силой P в полюсе (рис.I.8 а), величина Φ, очевидно, не зависит от угла θ и имеет вид:

$$\Phi(\theta) = P \qquad (I.9)$$

Для оболочки, замкнутой в вершине, нагруженной равномерным давлением (рис.I.8 б), функция $\Phi(\theta)$ вычисляется как произведение давления p на площадь круга радиуса r:

$$\Phi(\theta) = \pi r^2 p. \qquad (I.10)$$

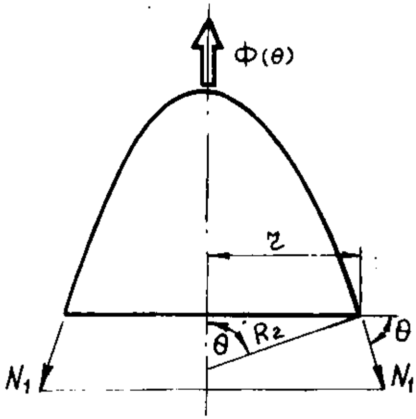

Рис.I.7. Отсеченная часть оболочки вращения

Это становится очевидным, если мысленно заменить гладкую поверхность оболочки совокупностью сколь угодно малых цилиндрических участков с кольцевыми участками плоских пластин.

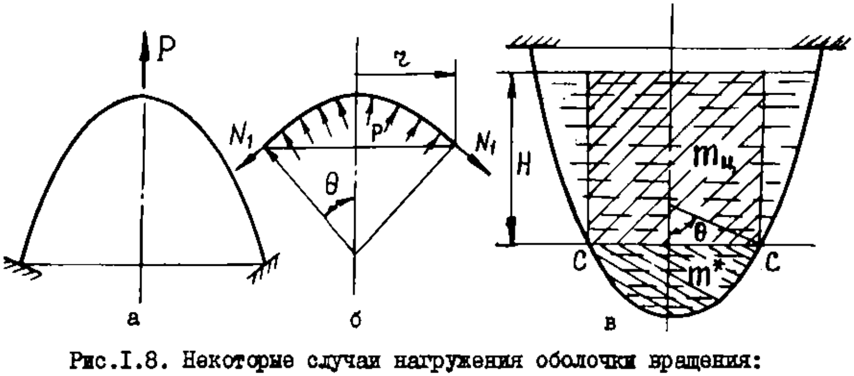

Рис.I.8. Некоторые случаи нагружения оболочки вращения: а – сосредоточенная сила; б – внутреннее давление; в – гидростатическое давление

Для оболочки, заполненной жидкостью (рис.I.8 в), функция $\Phi(\theta)$ складывается на основании законов гидростатики из веса жидкости, заключенной в объеме отсеченной части – gm^*, и веса жидкости $gm_ц$, заключенной в объеме цилиндра, основание которого совпадает с рассматриваемым сечением с – с, а высота равна глубине H. Тогда будем иметь:

$$\Phi(\theta) = g(m^* + m_ц) \qquad (I.II)$$

Рассмотрим оболочку вращения, нагруженную произвольной осесимметричной поверхностной нагрузкой. Выделим из оболочки сечением, характеризуемым углом θ (рис.I.9), конечный участок. Для общности будем считать, что вершина оболочки срезана и по верхнему краю действует нагрузка, равнодействующую которой обозначим через Φ_0. На бесконечно малый пояс, принадлежащий рассматриваемому участку оболочки, будут действовать нагрузки p_n и p_t, равнодействующая которых на ось симметрии может быть вычислена как

$$(p_n \cos\vartheta - p_t \sin\vartheta)\, 2\pi\rho\, dS_1 .$$

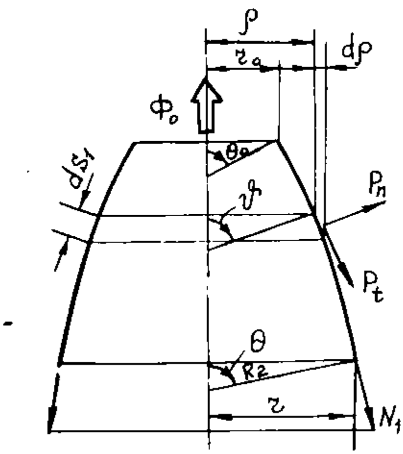

Рис.I.9. К определению равнодействующих всех внешних сил, приложенных к отсеченной части оболочки

Здесь через ρ и ϑ обозначены текущие значения радиусов параллели и широты, изменяющихся в диапазоне

$$r_0 \le \rho \le r; \qquad \theta_0 \le \vartheta \le \theta .$$

Суммируя вклады всех участков оболочки в равнодействующую внешних сил и учитывая составляющую Φ_0 на верхнем срезе, получим для функции $\Phi(\theta)$ следующее выражение:

$$\Phi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} (p_n \cos\vartheta - p_t \sin\vartheta)\, 2\pi\rho\, dS_1 + \Phi_0 . \qquad (I.I2)$$

Производя подстановку $dS_1 = \dfrac{d\rho}{\cos\vartheta}$, формулу (I.I2) можно привести к виду

$$\Phi(\theta) = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} (p_n - p_t \,tg\,\vartheta)\, \rho\, d\rho + \Phi_0 . \qquad (I.I3)$$

Для оболочки, замкнутой в вершине и не нагруженной сосредоточенной нагрузкой, $\theta_o = 0$, $\Phi_0 = 0$, и тогда формула (I.13) может быть записана как

$$\Phi(\theta) = 2\pi \int_0^{\theta} (p_n - p_t \, tg\, \vartheta)\rho\, d\rho \qquad (I.14)$$

Следует иметь в виду, что для практического вычисления в формулах (I.13) и (I.14) следует выразить либо ρ через ϑ, либо ϑ через ρ, т.е. записать $\rho = \rho(\vartheta)$ либо $\vartheta = \vartheta(\rho)$.

Рассмотрим более подробно вопрос о расчете замкнутых сосудов, находящихся под действием равномерного внутреннего давления. В этом случае $p_n = p = const$, $p_t = 0$ и

$$\Phi(\theta) = \pi r^2 p = \pi R_2^2 \sin^2\theta\, p.$$

Из уравнения равновесия отсеченной части оболочки (I.8) и уравнения Лапласа (I.6) найдем меридиональные и окружные усилия

$$N_1 = \frac{p R_2}{2} \qquad (I.15)$$

$$N_2 = p R_2 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1}\right) \qquad (I.16)$$

Формулы (I.15) и (I.16) справедливы для сосуда любой формы при условии, что меридиональное сечение имеет односвязный контур.

Для цилиндрической оболочки $R_1 = \infty$, $R_2 = R$. Тогда из (I.15) и (I.16) имеем

$$N_1 = \frac{pR}{2}; \qquad N_2 = pR$$
$$\sigma_{11} = \frac{pR}{2h}; \qquad \sigma_{22} = \frac{pR}{h} \qquad (I.17)$$

Для сферического сосуда $R_1 = R_2 = R$, усилия и напряжения соответственно будут равны

$$N_1 = N_2 = \frac{pR}{2}; \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{pR}{2h} \qquad (I.18)$$

Из сопоставления формул (I.17) и (I.18) видно, что при одинаковом давлении и при одинаковых радиусах и толщинах максимальное нормальное напряжение в сферическом сосуде будет в два

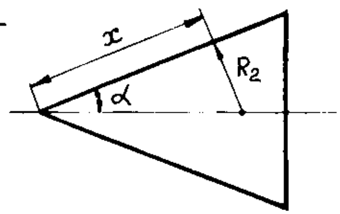

Рис.I.10. Коническая оболочка

раза меньше, чем в цилиндрическом.

Для конического сосуда $R_1 = \infty$, $R_2 = x\,tg\,\alpha$, где x - расстояние от произвольной точки меридиана до вершины (рис.1.10), 2α - угол раствора конуса. При этом усилия и напряжения будут равны

$$N_1 = \frac{px\,tg\,\alpha}{2}; \quad N_2 = px\,tg\,\alpha$$
$$\sigma_{11} = \frac{px\,tg\,\alpha}{2h}; \quad \sigma_{22} = \frac{px\,tg\,\alpha}{h}. \tag{1.19}$$

1.4. Расчет эллипсоидальной торовой оболочки на действие внутреннего давления

Рассмотрим эллипсоидальную торовую оболочку, нагруженную равномерным внутренним давлением (рис.1.11). Меридиональное сечение такой оболочки представляет собой эллипс, большую и малую полуоси которого обозначим через a и b. Введем декартову систему координат x, y, начало которой поместим в центре правого эллипса O на расстоянии r_0 от оси вращения (рис.1.11).

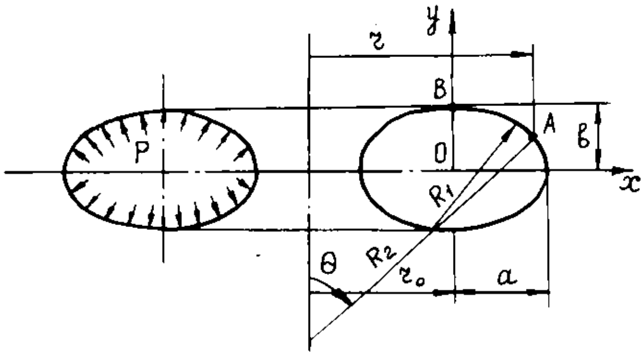

Рис.1.11. Эллипсоидальная торовая оболочка

Каноническое уравнение эллипса в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Положение произвольной точки эллипса A можно задать с помощью координат x и y либо r и y , где $x = r - r_0$. Используя формулы аналитической геометрии, можно найти выражения для главных радиусов кривизны R_1 и R_2 рассматриваемой оболочки. Для этого предварительно введем безразмерную координату ρ и квадрат эксцентриситета эллипса ε :

$$\rho = \frac{r}{a}; \qquad \varepsilon = 1 - \frac{b^2}{a^2} \tag{I.20}$$

Тогда для эллипсоидальной торовой оболочки будем иметь

$$R_1 = \frac{a^2}{b}\alpha^3, \qquad R_2 = \frac{a^2}{b}\alpha\frac{\rho}{\rho-\rho_0}, \quad \sin\theta = \frac{b}{a}\frac{\rho-\rho_0}{\alpha}, \tag{I.2I}$$

где

$$\rho_0 = \frac{r_0}{a}; \qquad \alpha = \sqrt{1-\varepsilon(\rho-\rho_0)^2}$$

Для определения меридионального усилия N_1 , в соответствии с формулой (I.8), необходимо выделить такой участок оболочки, чтобы внутренние усилия на одном из его краев не давали проекции на ось симметрии. Легко заметить, что таким краем является сечение, проходящее через точку B . Выражение для равнодействующей всех внешних сил, приложенных к кольцевому участку оболочки AB (рис.I.I2), будет иметь вид

$$\Phi(\theta) = p(\pi r^2 - \pi r_0^2) = \pi p a^2(\rho^2 - \rho_0^2) \tag{I.22}$$

Подставляя (I.22) в (I.8) и учитывая соотношения (I.2I), получим

$$N_1 = \frac{pa^2}{2b}\frac{\rho+\rho_0}{\rho}\alpha. \tag{I.23}$$

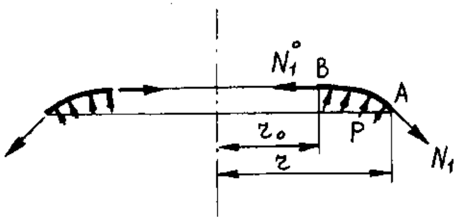

Рис.I.I2. Отсеченная часть эллипсоидальной торовой оболочки

Из уравнения Лапласа (I.6) запишем выражение для окружных усилий N_2 :

$$N_2 = pR_2 - N_1\frac{R_2}{R_1}.$$

Внося сюда (I.23) и (I.2I), определим

$$N_2 = \frac{pa^2}{2b}\frac{1-2\rho\varepsilon(\rho-\rho_0)}{\alpha} \tag{I.24}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) К р у г о в о й т о р. Для кругового тора $a = b = R$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$. Тогда из (1.23) и (1.24) имеем:

$$N_1 = \frac{pR}{2}\left(1 + \frac{r_0}{r}\right); \qquad N_2 = \frac{pR}{2}. \tag{1.25}$$

Отсюда видно, что для кругового тора окружные и меридиональные усилия всегда положительны при действии внутреннего давления.

б) Э л л и п с о и д в р а щ е н и я. Для эллипсоида вращения $\rho_0 = 0$, $\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon\rho^2}$. Из (1.23) и (1.24) с учетом этого получим:

$$N_1 = \frac{pa^2}{2b}\alpha; \qquad N_2 = \frac{pa^2}{2b}\,\frac{1 - 2\rho^2\varepsilon}{\alpha} \tag{1.26}$$

В вершине оболочки при $\rho = 0$ окружные и меридиональные усилия будут одинаковы и равны:

$$N_{1(0)} = N_{2(0)} = \frac{pa^2}{2b}$$

На экваторе оболочки $\rho = 1$, и тогда

$$N_{1(1)} = \frac{pa}{2}; \qquad N_{2(1)} = \frac{pa}{2}\left(2 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Характер эпюр меридиональных и окружных усилий в эллипсоидальной оболочке вращения показан на рис.1.13.

Из анализа полученных формул видно, что меридиональное усилие N_1 всегда положительно. Что же касается окружного усилия N_2, то оно при некотором значении r переходит через нуль и изменяет свой знак на противоположный, если $a > \sqrt{2}\,b$. В такой оболочке при действии внутреннего давления будут возникать нежелательные с точки зрения устойчивости сжимающие напряжения.

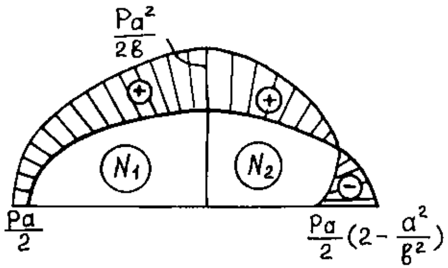

Рис.1.13. Характер изменения меридиональных и окружных усилий в эллипсоиде вращения

1.5. Примеры расчета оболочек по безмоментной теории

1.5.1. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса R , толщиной h , опертую по экватору и нагруженную нормальным давлением $p_n = -p$ по части поверхности, ограниченной углом β (рис.1.14). Для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R$. В силу характера внешней нагрузки расчет усилий будем проводить для двух участков оболочки.

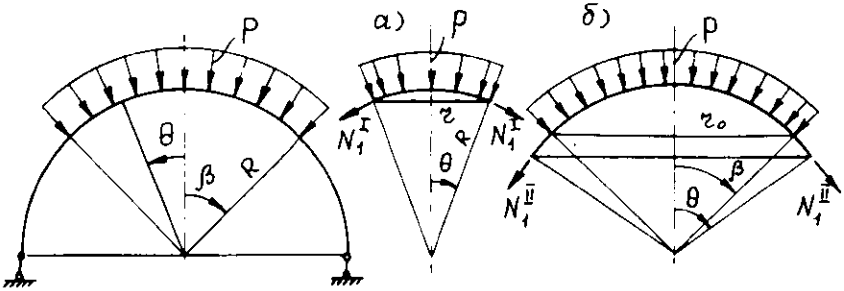

Рис.1.14. Сферическая оболочка под действием нагрузки, приложенной по части поверхности

Рассмотрим первый участок оболочки, для которого $0 \leq \theta \leq \beta$. На этом участке $p_n = -p$. Проекция равнодействующей внешней нагрузки на ось вращения для отсеченной части оболочки (рис.1.14а) будет иметь вид:

$$\Phi^{I}_{(\theta)} = -\pi p r^2 = -\pi p R^2 \sin^2\theta,$$

тогда из уравнения равновесия (1.8) получим выражение для меридионального усилия

$$N_1^{I} = -\frac{pR}{2}$$

Из уравнения Лапласа (1.6) на первом участке оболочки будем иметь:

$$N_2^{I} = -\frac{pR}{2}$$

Рассмотрим второй участок оболочки, для которого $\beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $p_n = 0$ (рис.1.14 б), Для этого участка функция $\Phi(\theta)$ запишется так:

$$\Phi^{II}_{(\theta)} = -\pi p r_o^2 = -\pi p R^2 \sin^2\beta = const$$

При этом

$$N_1^{\overline{II}} = \frac{\Phi^{\overline{II}}_{(\theta)}}{2\pi R \sin^2\theta} = -\frac{pR}{2}\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}$$

$$N_2^{\overline{II}} = -N_1^{\overline{II}} = \frac{pR}{2}\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta}$$

График изменения меридиональных и окружных усилий по меридиану оболочки представлен на рис.I.I5. В качестве характерной особенности следует отметить, что на участке оболочки, свободной от поверхностной нагрузки, окружное усилие N_2 является растягивающим, а на границе приложения нагрузки, т.е. при $\theta = \beta$, изменяется скачком.

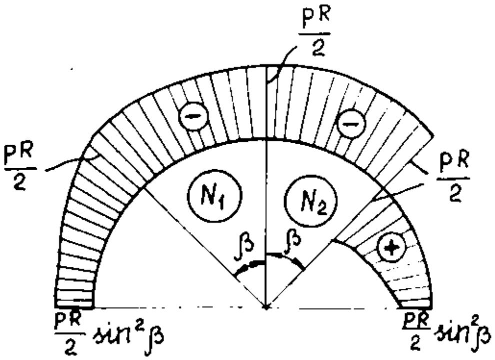

Рис.I.I5. Изменение усилий N_1 и N_2 вдоль меридиана сферической оболочки

I.5.2. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса R и толщины h, свободно опертую по экватору и находящуюся под действием собственного веса (рис.I.I6). Плотность материала, из которого изготовлена оболочка, обозначим через γ.

От сил тяжести на единицу площади поверхности оболочки будет приходиться сила, равная $p_к = \gamma g h$ и направленная вниз.

Здесь g – ускорение свободного падения тела. Проектируя эту составляющую на направление нормали к поверхности оболочки и касательную к меридиану (рис.I.I6), найдем

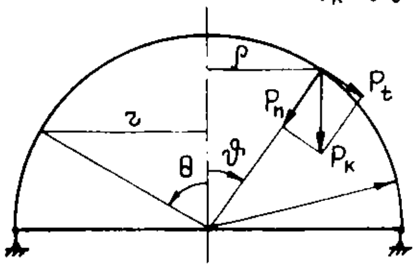

Рис.I.I6. Сферическая оболочка под действием собственного веса

$$p_n = -\gamma g h \cos\vartheta$$

$$p_t = \gamma g h \sin\vartheta.$$

Выражение для проекции на ось вращения равнодействующей внешней нагрузки для отсеченной части оболочки с учетом того, что $\rho = R\sin\vartheta$, а $d\rho = R\cos\vartheta\, d\vartheta$, запишется так:

$$\Phi(\theta) = 2\pi R^2 \int_0^\theta (p_n - p_t\, tg\,\vartheta)\sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta .$$

Подставляя сюда выражения для p_n и p_t и проводя некоторые преобразования, получим

$$\Phi(\theta) = 2\pi\gamma g h R^2 \int_0^\theta \sin\vartheta\, d\vartheta = -2\pi\gamma g h R^2 (1-\cos\theta)$$

Тогда из уравнений равновесия (I.6) и (I.8) получим выражения для меридиональных и окружных усилий:

$$N_1 = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi R\sin^2\theta} = -\gamma g h R\,\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta} = -\gamma g h R\,\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$N_2 = p_n R - N_1 = -\gamma g h R\left(\cos\theta - \frac{1}{1+\cos\theta}\right).$$

График распределения усилий N_1 и N_2 вдоль меридиана оболочки показан на рис.I.17. Меридиональное усилие N_1 – всюду сжимающее и увеличивается по мере роста угла θ. Окружные усилия N_2 при малых углах θ также сжимающие. При $\theta = 51{,}827^\circ$ усилие N_2 изменяет знак и с последующим увеличением θ становится положительным.

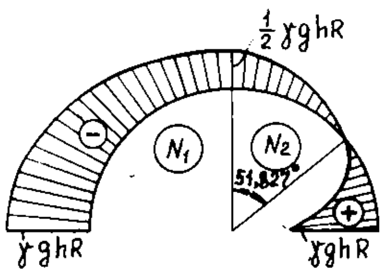

Рис.I.17. Распределение усилий в сферической оболочке под действием собственного веса

I.5.3. Рассмотрим бак, состоящий из цилиндрической оболочки и сферических днищ радиуса R. Стык днищ с обечайкой осуществляется при $\theta = \beta$ (рис.I.18). Бак опирается на опорное кольцо по стыку нижнего днища с обечайкой и находится под действием гидростатического давления и наддува p_o. Высота столба жидкости в баке – H, плотность жидкости – γ. Найдем усилия, возникающие в рассматриваемом баке.

Сначала рассмотрим нижнее днище. Давление на поверхность нижнего днища может быть записано в таком виде:

$$p_n = p_o + \gamma g H + \gamma g R(\cos\theta - \cos\beta) = p + \gamma g R(\cos\theta - \cos\beta),$$

где через p обозначено давление жидкости на уровне стыка днища с обечайкой:

$$p = p_o + \gamma g H.$$

При этом функция $\Phi(\theta)$, в соответствии с (I.14), запишется так:

$$\Phi(\theta) = \pi p R^2 \sin^2\theta + 2\pi \gamma g R^3 \int_0^\theta (\cos\vartheta - \cos\beta)\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Вычисляя интеграл, будем иметь

$$\Phi(\theta) = \pi p R^2 \sin^2\theta + 2\pi\gamma g R^3 \left(\frac{1-\cos^3\theta}{3} - \frac{\cos\beta\sin^2\theta}{2}\right)$$

Тогда меридиональное усилие N_1 в нижнем днище, на основании (I.8), примет вид:

$$N_1 = \frac{\Phi(\theta)}{2\pi R\sin^2\theta} = \frac{pR}{2} + \gamma g R^2\left(\frac{1-\cos^3\theta}{3-\sin^2\theta} - \frac{\cos\beta}{2}\right).$$

Из уравнения Лапласа (I.6) найдем окружное усилие N_2 в днище

$$N_2 = p_n R - N_1 = \frac{pR}{2} + \frac{\gamma g R^2}{3}\left(2\cos\theta - \frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{3}{2}\cos\beta\right).$$

В нижней точке днища ($\theta = 0$) усилия N_1 и N_2 достигают своих наибольших значений:

$$N_{1(0)} = N_{2(0)} = \frac{R}{2}\left[p + \gamma g R(1-\cos\beta)\right].$$

Легко заметить, что выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой давление в самой нижней точке бака.

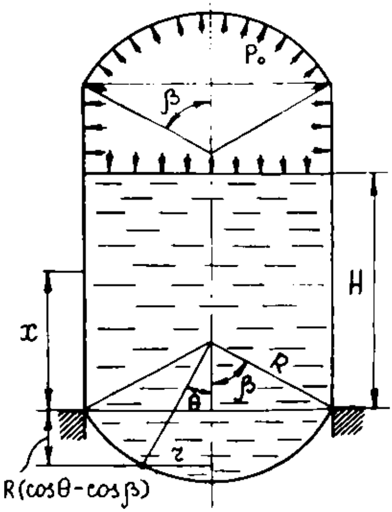

Рис.I.18. Цилиндрический бак со сферическими днищами

Верхнее днище нагружено постоянным давлением наддува p_o, и усилия в нем могут быть вычислены по формулам (I.18):

$$N_1 = N_2 = \frac{p_o R}{2}$$

В цилиндрической обечайке меридиональные усилия определяются давлением наддува бака:

$$N_1 = \frac{p_o R_o}{2}$$

Здесь R_o - радиус обечайки, $R_o = R\sin\beta$.

Окружные усилия определяются давлением $p_n = p_o + \gamma g(H-x)$ и вычисляются по формуле:

$$N_2 = p_n R_o = [p_o + \gamma g(H-x)] R\sin\beta.$$

I.6. Определение перемещений в безмоментных оболочках вращения

Рассмотрим оболочку вращения и возьмем на ее срединной поверхности произвольную точку A. Пусть вследствие каких-либо осесимметричных нагрузок оболочка деформируется и рассматриваемая точка перейдет в новое положение A_1 (рис.I.I9). Через u и W обозначим проекции полного перемещения Δ точки срединной поверхности оболочки на направление, касательное к меридиану в данной точке, и на направление внешней нормали. Обозначим через ε_{11} и ε_{22} деформации срединной поверхности оболочки, характеризующие удлинения элементов поверхности вдоль меридиана и параллели.

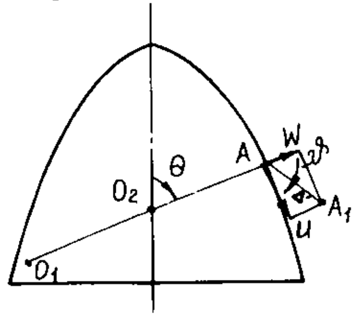

Рис.I.I9. Положительные направления перемещений точек срединной поверхности оболочки вращения

Эти деформации, а также углы поворота внешней нормали к срединной поверхности оболочки относительно касательной к параллели – ϑ (рис.I.I9) представим в виде суммы двух величин, одна из которых обусловлена только перемещением $u(\theta)$, а вторая только $W(\theta)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^{u} + \varepsilon_{11}^{W} \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22}^{u} + \varepsilon_{22}^{W} \\ \vartheta &= \vartheta^{u} + \vartheta^{W}. \end{aligned} \tag{I.27}$$

Угол поворота нормали ϑ будем считать положительным, если нормаль поворачивается в сторону увеличения угла θ.

Установим связь между компонентами деформации и перемещениями срединной поверхности оболочки при осесимметричном нагружении. Для этого рассмотрим деформацию бесконечно малого элемента меридиана AB, длина которого $dS_1 = R_1 d\theta$. Первоначально будем предполагать, что в результате деформирования точка A получила только перемещение $u(\theta)$, а $W = 0$ (рис.I.20 а).

В этом случае удлинение в меридиональном направлении будет равно:

$$\varepsilon_{11}^{u} = \frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} = \frac{dS_1 + du - dS_1}{dS_1} = \frac{du}{dS_1} = \frac{1}{R_1}\frac{du}{d\theta}.$$

Перемещение $U(\theta)$ вызывает изменение первоначального радиуса параллельного круга r на величину $\Delta r = U\cos\theta$. Следовательно, относительное удлинение в окружном направлении будет (рис.I.20а):

$$\varepsilon_{22}^{u} = \frac{2\pi(r+\Delta r)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{U\cos\theta}{R_2\sin\theta} = \frac{1}{R_2}U\,ctg\,\theta .$$

Угол поворота внешней нормали к срединной поверхности, обусловленный перемещением точки А вдоль меридиана (рис.I.20 а), можно записать так:

$$\vartheta^{u} = \frac{U}{R_1} .$$

Далее рассмотрим деформирование оболочки, вызванное перемещением $W(\theta)$. В этом случае точки меридиана А и В после деформации остаются лежать на нормали к первоначально недеформированной поверхности (рис.I.20 б).

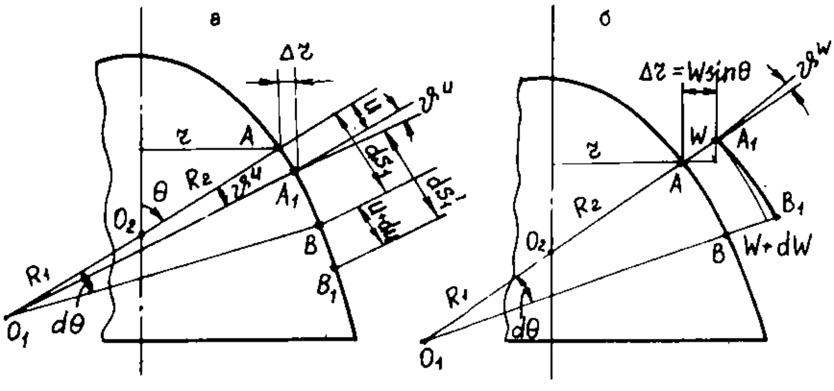

Рис.I.20. К определению геометрических соотношений для срединной поверхности оболочки вращения

Относительное удлинение элемента АВ при этом будет происходить за счет изменения радиуса кривизны R_1 на величину $W(\theta)$. С точностью до бесконечно малых высшего порядка малости можно записать

$$\varepsilon_{11}^{W} = \frac{1}{R_1}W .$$

Относительное удлинение в окружном направлении, как и в предыдущем случае, связано с изменением первоначального радиуса параллельного круга на величину $\Delta r = W\sin\theta$ (рис.I.20 б):

$$\varepsilon_{22}^{W} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{W\sin\theta}{R_2\sin\theta} = \frac{1}{R_2}W .$$

И,наконец, угол поворота внешней нормали к срединной поверхности оболочки обусловлен поворотом касательной к меридиану за счет появления прогиба $W(\theta)$:

$$\vartheta^{W} = -\frac{1}{R_1}\frac{dW}{d\theta}.$$

Суммируя все полученные выражения в соответствии с (I.27), получим:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{dU}{d\theta} + W\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{R_2}\left(U\, ctg\,\theta + W\right) \qquad (I.28)$$

$$\vartheta = \frac{1}{R_1}\left(U - \frac{dW}{d\theta}\right). \qquad (I.29)$$

С другой стороны, меридиональные и окружные деформации срединной поверхности оболочки можно выразить с помощью закона Гука через компоненты напряжения

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}\right) \qquad (I.30)$$

$$\varepsilon_{12} = 0.$$

Учитывая, что

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h}\ ; \qquad \sigma_{22} = \frac{N_2}{h}\ ,$$

соотношения (I.30) можно представить в таком виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh}\left(N_1 - \mu N_2\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh}\left(N_2 - \mu N_1\right). \qquad (I.3I)$$

Усилия N_1 и N_2 находятся из решения уравнений равновесия (I.6) и (I.8).

Считая деформации (I.3I) известными, из уравнений (I.28) можно найти перемещения. Для этого прежде всего исключим из уравнений (I.28) перемещение W :

$$\frac{dU}{d\theta} - U\, ctg\,\theta = R_1\varepsilon_{11} - R_2\varepsilon_{22}. \qquad (I.32)$$

Компоненты деформации, стоящие в правой части (I.32), определяются по формулам (I.31). Представим уравнение (I.32) в виде

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u}{\sin\theta}\right) = R_1\varepsilon_{11} - R_2\varepsilon_{22}$$

и проинтегрируем его. В результате получим:

$$u = \sin\theta\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_1\varepsilon_{11} - R_2\varepsilon_{22}}{\sin\theta}\,d\theta + C\right). \qquad (I.33)$$

Здесь C – постоянная интегрирования. Перемещение $W(\theta)$ определяется из второго соотношения (I.28):

$$W = R_2\varepsilon_{22} - u\,ctg\,\theta \qquad (I.34)$$

или после подстановки сюда (I.33):

$$W = R_2\varepsilon_{22} - \cos\theta\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_1\varepsilon_{11} - R_2\varepsilon_{22}}{\sin\theta}\,d\theta + C\right). \qquad (I.35)$$

Постоянную интегрирования C можно определить из условия закрепления оболочки на каком-либо краю. Чтобы выяснить ее физический смысл, предположим, что $\varepsilon_{11} = 0$ и $\varepsilon_{22} = 0$ (оболочка не деформируется). Тогда из (I.33) и (I.35) находим

$$u = C\sin\theta \qquad W = -C\cos\theta.$$

Это компоненты перемещения для недеформируемой оболочки, т.е. перемещения u и W, соответствующие смещению оболочки как жесткого целого вдоль оси вращения.

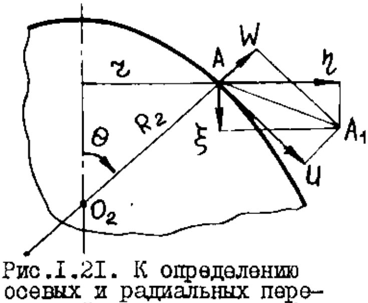

Рис.I.21. К определению осевых и радиальных перемещений точек срединной поверхности оболочки вращения

Следовательно, постоянная интегрирования C характеризует перемещение оболочки как жесткого целого вдоль оси вращения.

Для практического решения некоторых задач бывает удобно вычислить не нормальные к срединной поверхности и касательные к меридиану перемещения W и u, а радиальные η и осевые ξ (рис.I.21).

Проектируя компоненты перемещения на эти направления, будем иметь:

$$\xi = u \sin\theta - w \cos\theta$$
$$\eta = u \cos\theta + w \sin\theta. \qquad (I.35)$$

В частности, для радиального перемещения η после подстановки (I.34) получим

$$\eta = u\cos\theta + (R_2 \varepsilon_{22} - u \operatorname{ctg}\theta)\sin\theta = R_2 \varepsilon_{22} \sin\theta$$

или

$$\eta = r\,\varepsilon_{22}. \qquad (I.36)$$

Рассмотрим теперь расчет перемещений по безмоментной теории для цилиндрического бака с полусферическим днищем (рис.I.22), находящегося под действием постоянного внутреннего давления p. Толщины обечайки и днища одинаковы и равны h.

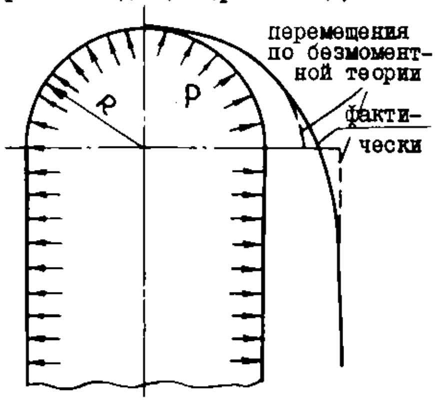

Рис.I.22. Радиальные перемещения в районе стыка обечайки с полусферическим днищем

Напряженное состояние сферического днища определяется по формулам (I.I8), а цилиндрической обечайки - по (I.I7).

Вычислим радиальное перемещение η оболочки в районе стыка цилиндра с днищем. Для этого воспользуемся формулой (I.36), вычислив окружную деформацию ε_{22} для днища и цилиндра в соответствии с (I.3I), (I.I7) и (I.I8).

Для днища будем иметь

$$\eta_{дн} = \frac{pR^2}{2Eh}(1-\mu), \qquad (I.37)$$

а для цилиндрической оболочки

$$\eta_{ц} = \frac{pR^2}{2Eh}(2-\mu). \qquad (I.38)$$

Таким образом, по безмоментной теории получается, что радиальное перемещение оболочки в зоне стыка цилиндрической обечайки со сферическим днищем изменяется скачком (рис.I.22), чего в действительности быть не может в силу совместности деформаций оболочки. Следовательно, в месте стыка этих оболочек устранение разрыва в перемещениях (I.37) и (I.38) осуществляется за счет возникновения изгибающих моментов и перерезывающих сил, т.е. напряженное состояние в зоне стыка уже не будет безмоментным. Из приведенного примера видно, что для существования безмоментного состояния необходимо, чтобы кривизна меридиана оболочки, также как и ее толщина, изменялась плавно, без скачков.

2. МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h с радиусом срединной поверхности R . Будем предполагать, что нормальная к срединной поверхности оболочки нагрузка осесимметрична, т.е. $p_n = p_{(x)}$ $\left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi}=0\right)$, а продольная поверхностная нагрузка отсутствует, $p_x = 0$. Кроме того, оболочка находится под действием установившегося осесимметричного температурного поля, изменяющегося вдоль образующей оболочки и по толщине $T = T(x, z)$. Оси координат расположим так, как это показано на рис.2.I.

Ввиду полной осевой симметрии напряженно-деформированное состояние оболочки не будет зависеть от окружной координаты φ .

Через W и u_o будем обозначать перемещения точек срединной поверхности оболочки в радиальном и осевом направлениях (рис.2.I). Причем в силу осевой симметрии эти величины будут являться функциями только координаты x .

При построении теории осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки используются гипотеза прямых нормалей и гипотеза об отсутствии надавливания между слоями, т.е. предполагается, что $\sigma_{zz} = 0$.

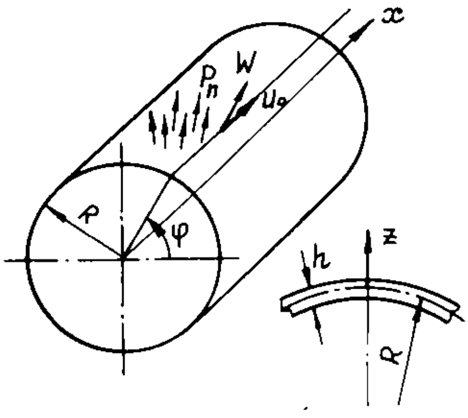

Рис.2.I. Цилиндрическая оболочка

2.I. Геометрические соотношения

Исследуем перемещения и деформации, возникающие в цилиндрической оболочке при осесимметричной нагрузке. Для этого рассмотрим часть оболочки, выделенную двумя осевыми сечениями (рис.2.2). Обозначим через mn элемент дуги сечения, находящийся на расстоянии z от срединной поверхности оболочки. Длина dS_2 этого элемента равна произведению радиуса на центральный угол $d\varphi$:

$$dS_2 = (R + z)\, d\varphi .$$

Пусть вследствие деформации оболочки элемент mn переместился по нормали к срединной поверхности на величину W и занял положение $m_1 n_1$ (рис.2.2). Тогда новая длина элемента mn будет равна $(R + z + W)\, d\varphi$, а удлинение его может быть вычислено так:

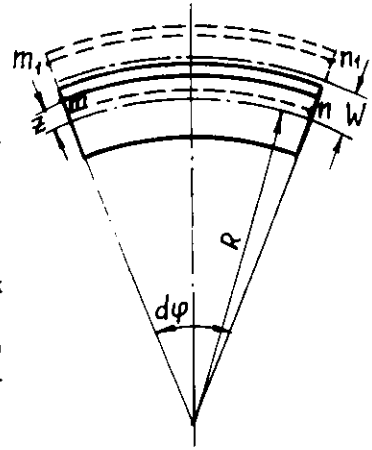

Рис.2.2. Деформация сечения оболочки в окружном направлении

$$\varepsilon_{22} = \frac{\overline{m_1 n_1} - \overline{mn}}{\overline{mn}} = \frac{W}{R + z} = \frac{W}{R\left(1 + \frac{z}{R}\right)} \quad (2.I)$$

Мы рассматриваем тонкие оболочки, для которых $\frac{h}{R} < \frac{1}{20}$. В этом случае в (2.I) можно пренебречь членом $\frac{z}{R}$ по сравнению с единицей, так как $z \leq \frac{h}{2}$. Тогда окончательно будем иметь:

$$\varepsilon_{22} = \frac{W}{R} . \qquad (2.2)$$

Обратимся теперь к перемещениям и деформациям вдоль образующей. Рассмотрим сечение оболочки плоскостью, проходящей через ось x (рис.2.3), и точку a в этом сечении, отстоящую на расстоянии z от срединной поверхности. В результате деформирования точка O , лежащая на срединной поверхности оболочки, получит перемещения U_o и W . Согласно гипотезе прямых нормалей отрезок Oa , нормальный к срединной поверхности до деформации, займет после деформации положение $O_1 a_1$ и останется прямым и нормальным к деформированной срединной поверхности оболочки. При этом он окажется повернутым относительно первоначального положения на угол ϑ , который вследствие малости прогибов будем считать равным производной от прогиба W :

$$\vartheta = \frac{dW}{dx}$$

Учитывая сказанное, можно записать выражение для перемещения произвольной точки a в осевом направлении (рис.2.3):

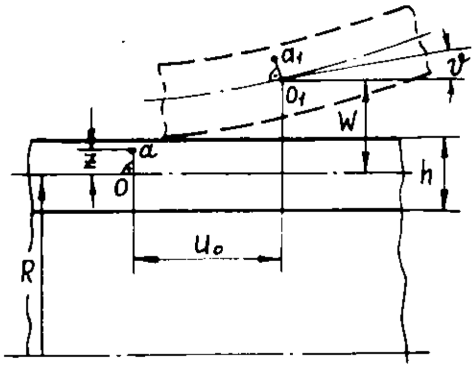

Рис.2.3. Деформация сечения оболочки в меридиональном направлении

$$U = U_o - z\,\frac{dW}{dx}. \qquad (2.3)$$

Используя соотношения Коши, получим относительную деформацию оболочки в осевом направлении:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU_o}{dx} - z\,\frac{d^2W}{dx^2}$$

или

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon^{o}_{11} - z\,\frac{d^2W}{dx^2}, \qquad (2.4)$$

где через $\varepsilon^{o}_{11} = \frac{dU_o}{dx}$ обозначено относительное удлинение срединной поверхности в осевом направлении.

2.2. Физические зависимости

Будем предполагать, что температура в оболочке изменяется в таких пределах, при которых коэффициенты упругости и линейного расширения материала не изменяются; удлинения пропорциональны температуре и по всем направлениям одинаковы.

При сделанных предположениях можно считать, что полные деформации в каждой точке нагретого тела состоят из двух частей. Первая часть - это равномерное расширение, пропорциональное повышению температуры T . Вторая часть представляет собой деформации, необходимые для сохранения непрерывности тела, а также деформации, возникающие под действием внешних нагрузок. С учетом гипотезы о ненадавливании слоев полные деформации в осевом и окружном направлениях равны сумме этих двух частей и связаны с напряжениями и температурой посредством следующих зависимостей:

$$\varepsilon_{11} = \alpha T + \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{22} = \alpha T + \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}), \qquad (2.5)$$

где α - коэффициент линейного расширения материала оболочки.

Разрешая соотношения (2.5) относительно напряжений, будем иметь

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T$$
$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T \qquad (2.6)$$

Подставляя в (2.6) выражения (2.2) и (2.4), получим:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{11}^{\circ} - z\frac{d^2W}{dx^2} + \mu\frac{W}{R}\right) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T$$
$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{W}{R} + \mu\varepsilon_{11}^{\circ} - \mu z\frac{d^2W}{dx^2}\right) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T. \qquad (2.7)$$

Касательное напряжение $\sigma_{12} = 0$ в силу осевой симметрии напряженного состояния.

Рассмотрим, какие усилия создаются напряжениями (2.7) в сечениях оболочки, нормальных к ее срединной поверхности. На рис.2.4 изображен бесконечно малый элемент оболочки, вырезанный четырьмя сечениями.

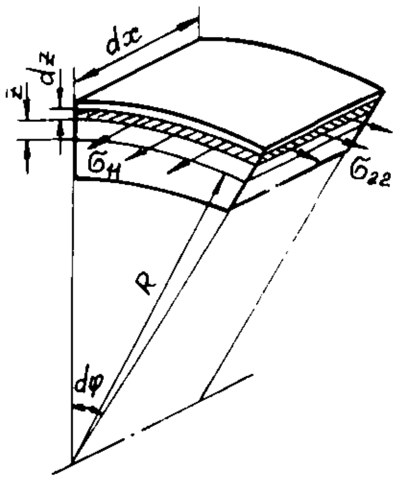

Рис.2.4. Бесконечно малый элемент цилиндрической оболочки

Обозначим через N_1 и N_2 погонные, т.е. приходящиеся на единицу длины сечения, осевую и окружную нормальные силы. Они определяются через сумму проекций на соответствующие направления элементарных усилий в рассматриваемых сечениях.

В осевом направлении проектируется нормальное напряжение σ_{11}. Равнодействующее элементарное усилие на бесконечно малой площадке $dS\,dz$ равно $\sigma_{11}\,dz\,dS$, где $dS = (R+z)d\varphi = R(1+\frac{z}{R})d\varphi \approx R\,d\varphi$. При этом на единицу длины сечения срединной поверхности приходится сила $\sigma_{11}\,dz$. Аналогично, на единицу длины срединной поверхности в окружном направлении действует сила $\sigma_{22}\,dz$. Суммируя эти силы по всей толщине оболочки, получим выражения для погонных нормальных сил:

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}\,dz \qquad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22}\,dz$$

Используя выражения (2.7), будем иметь:

$$N_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\Big[\Big(\varepsilon^{\circ}_{11} + \mu\frac{W}{R}\Big)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz - \frac{d^2W}{dx^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz\Big] - \frac{E}{1-\mu}\alpha\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T\,dz$$

$$N_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\Big[\Big(\frac{W}{R} + \mu\varepsilon^{\circ}_{11}\Big)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz - \mu\frac{d^2W}{dx^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz\Big] - \frac{E}{1-\mu}\alpha\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T\,dz$$

Замечая, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz = 0 \qquad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = h$$

и вводя обозначения

$$T_{\circ} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T\,dz\,, \tag{2.8}$$

получим окончательно, что

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}\Big(\varepsilon^{\circ}_{11} + \mu\frac{W}{R}\Big) - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha T_{\circ} \tag{2.9}$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}\Big(\frac{W}{R} + \mu\varepsilon^{\circ}_{11}\Big) - \frac{Eh}{1-\mu}\alpha T_{\circ}\,. \tag{2.10}$$

Отсюда легко получить связь между N_1 и N_2 :

$$N_2 = \frac{Eh}{R}W + \mu N_1 - Eh\alpha T_{\circ}\,. \tag{2.11}$$

Далее определим погонные изгибающие моменты в осевом и окружном сечениях, которые мы будем обозначать через M_1 и M_2 соответственно. Изгибающий момент в осевом сечении обусловлен напряжениями σ_{11}. Элементарное усилие, создаваемое этими напряжениями на площадке единичной ширины и высоты dz, равно $\sigma_{11}\,dz$, а изгибающий момент - $\sigma_{11}\,z\,dz$. Аналогично, изгибающий момент в окружном сечении будет равен $\sigma_{22}\,z\,dz$. Суммируя моменты элементарных усилий на всех таких площадках по толщине оболочки, получим выражения для погонных изгибающих моментов:

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}\, z\, dz \qquad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22}\, z\, dz \tag{2.12}$$

Подставляя сюда выражения для напряжений (2.7) и имея в виду, что $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = h^3/12$, получим формулы для погонных изгибающих моментов:

$$M_1 = -D\left[\frac{d^2W}{dx^2} + \alpha(1+\mu)\,T_1\right]$$

$$M_2 = -D\left[\mu\,\frac{d^2W}{dx^2} + \alpha(1+\mu)\,T_1\right], \tag{2.13}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$T_1 = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T z\, dz. \tag{2.14}$$

Положительные направления погонных усилий и изгибающих моментов показаны на рис.2.5. Выражение для погонной перерезывающей силы Q_1, возникающей в осевом сечении, будет получено далее.

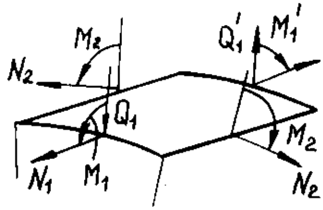

Рис.2.5.Положительные направления внутренних силовых факторов

2.3. Дифференциальное уравнение равновесия

Выделим из цилиндрической оболочки бесконечно малый элемент с размерами h и $dx\,dS$, где $dS = R\,d\varphi$, и покажем действующие на него силы (рис.2.6 а).

Рассматриваемый элемент оболочки находится в равновесии. Записывая сумму проекций всех сил на ось x, получим, что

$$dN_1 = 0,$$

т.е. погонная меридиональная сила N_1 не изменяется вдоль оболочки (при $p_x = 0$).

Составим далее сумму проекций всех сил на ось z . Из рассмотрения рис.2.6б видно, что нормальное давление p_n и окружные усилия N_2 дают суммарную проекцию на ось z , равную:

$$(p_n - p_1)\, dx\, ds,$$

где через p_1 обозначено $p_1 = \frac{N_2}{R}$, или, если воспользоваться формулой (2.II):

$$p_1 = \frac{\mu N_1}{R} + \frac{Eh}{R^2} W - \frac{Eh}{R} \alpha T_o . \qquad (2.15)$$

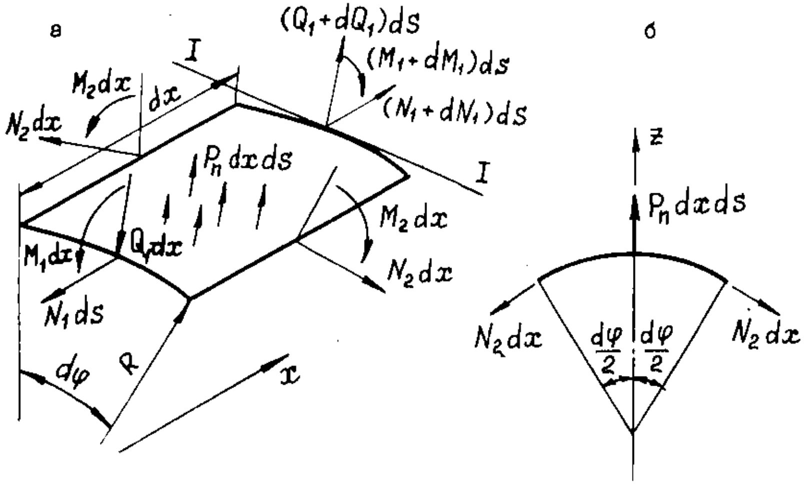

Рис.2.6. К выводу дифференциального уравнения равновесия цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении

Добавив проекцию на ось z перерезывающих сил Q_1 , получим:

$$\frac{dQ_1}{dx} + p_n - p_1 = 0 . \qquad (2.16)$$

Подставляя сюда значение p_1 , согласно формуле (2.15), будем иметь

$$-\frac{dQ_1}{dx} + \frac{Eh}{R^2} W = p_n + \frac{Eh}{R} \alpha T_o - \mu \frac{N_1}{R} \qquad (2.17)$$

Запишем уравнение равновесия моментов всех сил относительно оси I-I, касательной к направляющей срединной поверхности оболочки (рис.2.6 а). Опуская величины второго порядка малости, получим

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dx},$$

что с учетом (2.I3) дает окончательное выражение для погонной перерезывающей силы

$$Q_1 = -D\left[\frac{d^3W}{dx^3} + \alpha(1+\mu)\frac{dT_1}{dx}\right] \qquad (2.18)$$

Остальные уравнения равновесия выполняются тождественно в силу осевой симметрии напряженного состояния оболочки.

После подстановки (2.I8) в (2.I7) получим дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении:

$$D\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}W = p_n - \mu\frac{N_1}{R} + \frac{Eh}{R}\alpha T_0 - \alpha(1+\mu)\frac{d^2T_1}{dx^2}. \qquad (2.19)$$

2.4. Решение дифференциального уравнения изгиба цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении

Решение уравнения (2.I9) будем искать в виде:

$$W = W^{\circ} + W^{*} \qquad (2.20)$$

Здесь W^{*} - частное решение неоднородного уравнения (2.I9), зависящее от нагрузок p_n, N_1 и параметров температурного поля T_0 и T_1; W° - общее решение однородного уравнения

$$D\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}W = 0$$

или

$$\frac{d^4W}{dx^4} + 4k^4W = 0, \qquad (2.21)$$

где

$$4k^4 = \frac{Eh}{R^2 D}, \qquad k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{1}{\sqrt{Rh}}$$

Если ввести параметр $\lambda = \frac{R}{h}$, характеризующий тонкостенность оболочки, то выражение для k можно записать иначе:

$$k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{R} \qquad (2.22)$$

Для дифференциального уравнения (2.21) характеристическое уравнение $r^4 = 4k^4 = 0$ можно преобразовать к виду

$$(r^2 + 2kr + 2k^2)(r^2 - 2kr + 2k^2) = 0$$

и записать его корни как

$$r_{1,2} = k(1 \pm i); \qquad r_{3,4} = -k(1 \pm i).$$

Тогда общее решение однородного уравнения (2.21) можно представить в форме:

$$\overset{o}{W}(x) = e^{-kx}(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx) + e^{kx}(B_3 \cos kx + B_4 \sin kx). \quad (2.23)$$

Характерной особенностью решения (2.23) является то, что оно состоит из двух частей. Первая часть решения, содержащая произвольные постоянные B_1 и B_2, является быстро затухающей функцией аргумента x; вторая часть – быстро возрастающая функция аргумента x.

Используя формулу $e^{\pm kx} = ch\,kx \pm sh\,kx$, решение (2.23) иногда записывают иначе:

$$\overset{o}{W}(x) = C_1 ch\,kx \cos kx + C_2 sh\,kx \sin kx + C_3 ch\,kx \sin kx + C_4 sh\,kx \cos kx. \quad (2.24)$$

Такая форма записи решения удобна для коротких оболочек.

Если поверхностная нагрузка p_n, а также T_o и $\frac{d^2 T_1}{dx^2}$ представляют собой полиномиальные функции, то частное решение уравнения (2.19) можно взять в виде полинома, коэффициенты которого находятся путем подстановки его в уравнение (2.19).

Произвольные постоянные, входящие в решение (2.23) и (2.24), находятся из граничных условий, количество которых равно двум на каждом торце оболочки.

Рассмотрим основные виды граничных условий, встречающихся при расчете оболочек (2.7).

В случае жесткого защемления торца оболочки (рис.2.7 а) имеем:

$$W = 0, \qquad \frac{dW}{dx} = 0$$

В случае свободного (шарнирного) опирания (рис.2.7 б)

$$W = 0, \quad M_1 = 0 \qquad \text{или} \qquad W = 0, \quad \frac{d^2W}{dx^2} = 0.$$

Для свободного, ненагруженного края оболочки (рис.2.7 в)

$$M_1 = 0, \quad Q_1 = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2W}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3W}{dx^3} = 0.$$

В случае стыка двух оболочек (рис.2.7 г) должно быть:

$$W^{I} = W^{II}, \quad \frac{dW^{I}}{dx} = \frac{dW^{II}}{dx}, \quad M_x^{I} = M_x^{II}, \quad Q_x^{I} = Q_x^{II}.$$

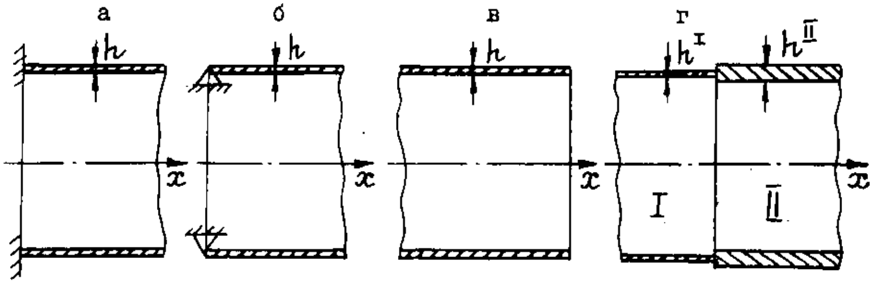

Рис.2.7. Различные виды граничных условий для цилиндрической оболочки (а - жесткое защемление; б - свободное опирание; в - свободный край; г - стык двух оболочек)

В качестве примера рассмотрим задачу о деформации оболочки под действием равномерного внутреннего давления $p_n = const$ (рис.2.8). Длина оболочки ℓ, торцы оболочки будем считать жестко защемленными. Частное решение уравнения (2.19) в нашем случае можно взять как

$$W^{*} = \frac{p_n R^2}{Eh}.$$

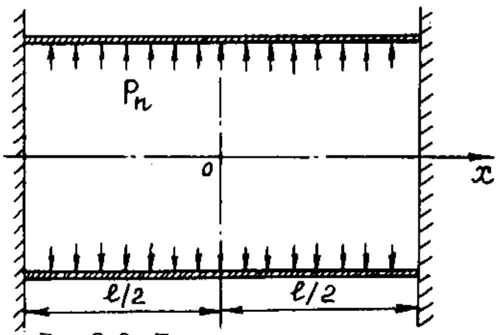

Рис.2.8. Жестко защемленная цилиндрическая оболочка под действием внутреннего давления

Поместим начало координат в середину оболочки, т.е. на расстояние $\frac{\ell}{2}$ от обоих торцов и возьмем решение однородного дифференциального уравнения изгиба оболочки в форме (2.24). Тогда в силу симметрии конструкции относительно начала координат в (2.24) следует удержать только четные функции, т.е. положить $C_3 = C_4 = 0$. Полное решение в нашем случае будет иметь вид:

$$W = \frac{p_n R^2}{Eh} + C_1 \operatorname{ch} kx \cos kx + C_2 \operatorname{sh} kx \sin kx.$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть найдены из граничных условий

$$\text{при} \quad x = \pm \ell/2 \quad W = 0, \quad \frac{dW}{dx} = 0.$$

Проделав соответствующие вычисления, получим:

$$C_1 = -\frac{P_n R^2}{Eh} \frac{ch\beta \sin\beta + sh\beta\cos\beta}{\sin\beta\cos\beta + ch\beta\, sh\beta}$$

$$C_2 = -\frac{P_n R^2}{} \frac{ch\beta \sin\beta - sh\beta\cos\beta}{\sin\beta\cos\beta + ch\beta\, sh\beta},$$

где

$$\beta = \frac{K\ell}{2}.$$

2.5. Расчет цилиндрического сосуда, заполненного жидкостью. Понятие о краевом эффекте

Рассмотрим решение задачи об определении напряженного состояния в вертикальном цилиндрическом баке, полностью заполненном жидкостью с плотностью ρ. Нижний торец бака заделан в жесткое основание, верхний торец свободный (рис.2.9). Бак, представляющий собой круговую цилиндрическую оболочку, имеет следующие размеры: радиус срединной поверхности оболочки R = I м, высота бака $H = 4R$, толщина оболочки h = 0,0I м, материал - сталь, E =2·I0^5 МПа, μ = 0,3. Плотность жидкости ρ = I·I0^3 кг/м^3. Как известно из гидростатики, давление жидкости пропорционально глубине. Если координату x отсчитывать от дна бака, то

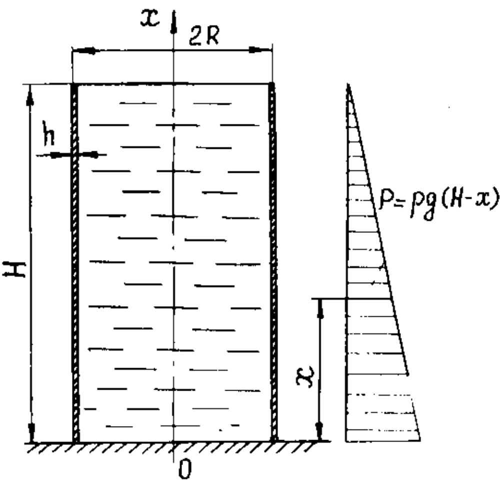

Рис.2.9. Цилиндрический бак, заполненный жидкостью

$$P_n = \rho g (H - x) \qquad (2.25)$$

При этом, если пренебречь собственным весом бака, меридиональное усилие $N_1 = 0$, и тогда уравнение (2.19) примет вид:

$$D\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}W = P_n \qquad (2.26)$$

Частное решение этого уравнения, соответствующее нагрузке (2.25), имеет вид:

$$W^* = \frac{\rho g R^2}{Eh}(H - x)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (2.26) возьмем в форме (2.23). Тогда

$$W(x) = \frac{\rho g R^2}{Eh}(H-x) + e^{-kx}(B_1\cos kx + B_2\sin kx) + e^{kx}(B_3\cos kx + B_4\sin kx) \qquad (2.27)$$

Для нахождения произвольных постоянных $B_1, \ldots, B_4$ рассмотрим граничные условия. Нижний край оболочки жестко защемлен, следовательно, на этом крае имеем следующие условия:

$$\text{при} \quad x = 0 \qquad W = 0 \qquad \frac{dW}{dx} = 0. \qquad (2.28)$$

Верхний край оболочки свободен от закрепления, поэтому для него имеем:

$$\text{при} \quad x = H \qquad \frac{d^2W}{dx^2} = 0 \qquad \frac{d^3W}{dx^3} = 0. \qquad (2.29)$$

На основании этих условий можно составить четыре уравнения для определения четырех произвольных постоянных.

Однако для тонких длинных оболочек решение можно упростить. Для этого рассмотрим значения функции (2.27) на верхнем крае при $x = H$:

$$W(H) = e^{-kH}(B_1\cos kH + B_2\sin kH) + e^{kH}(B_3\cos kH + B_4\sin kH). \qquad (2.30)$$

Для рассматриваемой нами оболочки

$$\lambda = \frac{R}{h} = 100, \quad H = 4R, \quad k \approx \frac{1{,}28\sqrt{\lambda}}{R} = \frac{12{,}8}{R}, \quad kH \approx 51.$$

Таким образом, первое слагаемое в (2.30) – величина малая, порядка e^{-51} , а второе слагаемое порядка e^{51} . Поскольку прогибы оболочки малы, то очевидно, что произвольные постоянные B_3 и B_4 должны быть величинами малыми, порядка e^{-51}. На основании этого при исследовании напряженного состояния в окрестности сечения $x = 0$ можно положить $B_3 = B_4 = 0$, т.е. отбросить возрастающую часть решения и записать решение (2.27) в виде:

$$W(x) = \frac{\rho g R^2}{Eh}(H - x) + e^{-kx}(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx). \tag{2.31}$$

Для отыскания постоянных B_1 и B_2 имеем два граничных условия на нижнем торце (2.28), что приводит нас к двум уравнениям:

$$\frac{\rho g R^2 H}{Eh} + B_1 = 0$$

$$-\frac{\rho g R^2}{Eh} + K(-B_1 + B_2) = 0,$$

откуда

$$B_1 = -\frac{\rho g R^2 H}{Eh} \qquad B_2 = B_1\left(1 - \frac{1}{KH}\right)$$

При этом граничные условия на другом торце оболочки никак не будут сказываться на напряженном состоянии вблизи заделки.

В выражении для B_2 вторым слагаемым в круглых скобках можно пренебречь по сравнению с первым, что приводит к погрешности менее 2 %, и тогда

$$B_2 \approx B_1 .$$

С учетом этого окончательное решение задачи будет иметь вид:

$$W(x) = \frac{\rho g R^2}{Eh}\left[H - x - He^{-kx}(\cos Kx + \sin Kx)\right] \tag{2.32}$$

По формулам (2.11) и (2.13) можно найти погонные усилия и изгибающие моменты, возникающие в оболочке:

$$N_2 = \rho g R(H - x) - \rho g R H e^{-kx}(\cos kx + \sin kx)$$

$$M_1 = -\frac{\rho g H}{2K^2} e^{-kx}(\cos kx - \sin kx)$$

$$M_2 = \mu M_1 . \tag{2.33}$$

Строго говоря, полученное решение является справедливым вблизи нижнего торца бака. Если нужно исследовать функцию прогиба W в области верхнего торца, то следует перенести начало координат к верхнему торцу, направить ось x вниз и соответствующим образом изменить краевые условия, а затем отбросить возрастающую часть решения. Полученная таким образом затухающая функция $W(x)$ даст возможность весьма точно определить напряженное состояние цилиндрической оболочки и в окрестности второго края.

Изложенный прием отбрасывания возрастающей части функции $W(x)$ и исследование оставшейся затухающей части решения в области рассматриваемого края позволяет во многих случаях исследовать особенности напряженного состояния (или, как говорят, краевой эффект) на обоих торцах оболочки независимо друг от друга. Быстро затухающее напряженное состояние вблизи края оболочки носит название к р а е в о г о   э ф ф е к т а.

Ясно, что этот метод может применяться только в том случае, если длина оболочки H настолько велика, что величиной $e^{-\alpha H}$ можно пренебречь по сравнению с $e^{\alpha H}$.

На рис.2.10 для рассматриваемой задачи приведены эпюры окружного усилия N_2 и изгибающего момента M_1, построенные вдоль образующей оболочки. Из рис.2.10 видно, что изгибающий момент имеет наибольшее значение в заделке и быстро уменьшается по мере удаления от дна бака. Растягивающее окружное усилие N_2 в заделке равно нулю, и сначала оно быстро возрастает, а затем убывает по линейному закону. Уравнение этой прямой легко найти из (2.33). При достаточно больших значениях x

$$W = \frac{\rho g R^2}{Eh}(H - x)$$

$$N_2 = \rho g R(H - x). \qquad (2.34)$$

Существенно заметить, что выражения (2.34), соответствующие частному решению неоднородного дифференциального уравнения (2.26), совпадают с тем, что дает расчет по безмоментной теории оболочек. Действительно, из уравнения Лапласа (1.6) с учетом (2.25) и $N_1 = 0$ имеем

$$N_2 = \rho g R(H - x).$$

Следовательно, на достаточно большом расстоянии от заделки расчет напряженного состояния по изложенной выше теории может быть заменен расчетом по безмоментной теории.

Скорость затухания краевого эффекта определяется поведением функции $e^{-\kappa x}$. Значения этой функции для различных значений $\bar{x} = \frac{x}{H}$ и параметров тонкостенности оболочки $\lambda = \frac{R}{h}$ при $H = 4R$ представлены в таблице. Из анализа приведенных результатов видно, что чем более тонкостенной является оболочка, тем быстрее затухает краевой эффект. Для рассматриваемого нами примера значение изгибающего момента на расстоянии 5 % длины от нижнего торца составляет 7 % от наибольшего, а на расстоянии 10 % длины - 0,5 %.

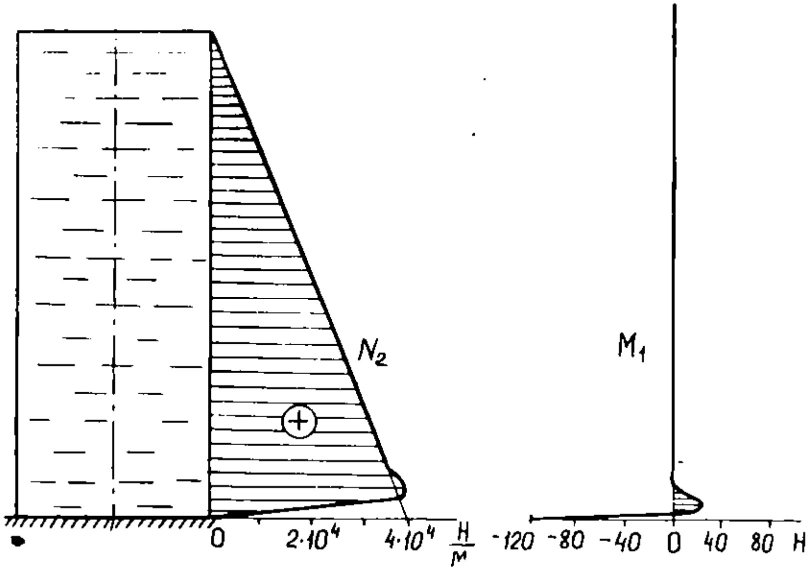

Рис.2.10. Распределение внутренних усилий в вертикальном цилиндрическом сосуде

Таблица 2.1

Значения функции e^{-kx}

λ \ $\bar{x}$	0	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,15
50	1	0,6923	0,3988	0,159	0,0634	0,0253	0,004
100	1	0,5945	0,2725	0,074	0,0202	0,0055	0,0004
200	1	0,4793	0,1591	0,0253	0,0040	0,0006	0,00002
500	1	0,3126	0,0546	0,0030	0,0002	0,00001	
1000	1	0,1231	0,0164	0,0003			

Таким образом, если правая часть дифференциального уравнения (2.19) меняется вдоль координаты x не слишком быстро, то напряженное состояние тонкой цилиндрической оболочки можно вычислить как сумму безмоментного решения (частное решение неоднородного уравнения) и краевого эффекта.

2.6. Примеры расчета цилиндрических оболочек на температурные воздействия

2.6.I. Рассмотрим длинную цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием установившегося температурного поля, постоянного по толщине и изменяющегося скачком вдоль образующей (рис.2.II а).

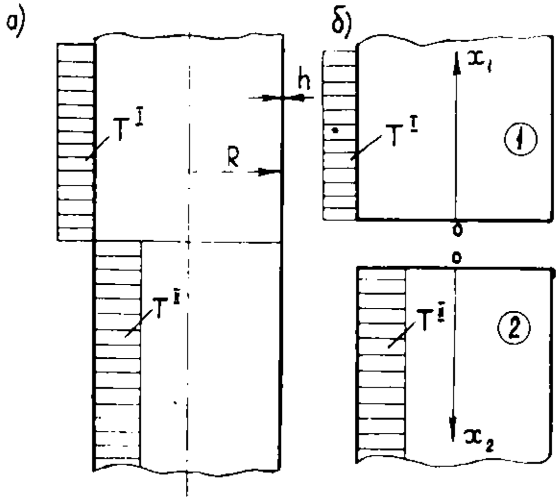

Рис.2.II. Цилиндрическая оболочка со скачкообразным изменением температуры

На одном участке, назовем его первым, температуру оболочки обозначим через T^{I}, на втором – T^{II}. Такой температурный режим возможен, если оболочка частично заполнена холодной или горячей жидкостью.

Начало координат поместим на границе участков и направим ось x для первого участка вверх, а для второго – вниз (рис.2.II б), обозначив их соответственно x_1 и x_2.

По формуле (2.8) можно вычислить значения функции T_o для обоих участков оболочки:

$$T_o^{I} = T^{I}; \quad T_o^{II} = T^{II}$$

Функция T_1 будет равна нулю на обоих участках оболочки, так как температура не изменяется по толщине.

Прогибы на каждом из участков оболочки должны удовлетворять дифференциальным уравнениям изгиба:

$$D\frac{d^4W_1}{dx_1^4}+\frac{Eh}{R^2}W_1=\frac{Eh}{R}\alpha T^{I}$$

$$D\frac{d^4W_2}{dx_2^4}+\frac{Eh}{R^2}W_2=\frac{Eh}{R}\alpha T^{II} \qquad (2.35)$$

Решения дифференциальных уравнений (2.35) после отбрасывания возрастающей части запишутся как:

$$W_1(x_1)=e^{-kx_1}(B_1\cos kx_1+B_2\sin kx_1)+R\alpha T^{I}$$

$$W_2(x_2)=e^{-kx_2}(A_1\cos kx_2+A_2\sin kx_2)+R\alpha T^{II}. \qquad (2.36)$$

Для определения четырех произвольных постоянных, входящих в (2.36), используем условия сопряжения участков оболочки. На общей границе участков необходимо иметь одинаковыми: перемещения W, углы поворота нормали к срединной поверхности $\frac{dW}{dx}$, изгибающие моменты M_1 и перерезывающие силы Q_1. С учетом принятых направлений координатных осей x_1 и x_2 эти условия можно записать в виде:

$$W_{1\,(x_1=0)}=W_{2\,(x_2=0)}$$

$$\frac{dW_1}{dx_1}_{(x_1=0)}=-\frac{dW_2}{dx_2}_{(x_2=0)}$$

$$\frac{d^2W_1}{dx_1^2}_{(x_1=0)}=\frac{d^2W_2}{dx_2^2}_{(x_2=0)}$$

$$\frac{d^3W_1}{dx_1^3}_{(x_1=0)}=-\frac{d^3W_2}{dx_2^3}_{(x_2=0)} \qquad (2.37)$$

Подстановка решений (2.36) в граничные условия (2.37) приводит к системе четырех алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных:

$$B_1-A_1=R\alpha\Delta T$$

$$B_1-B_2+A_1-A_2=0$$

$$B_2-A_2=0$$

$$B_1+B_2+A_1+A_2=0,$$

где $\Delta T = T^{II} - T^{I}$.

Решение этой системы имеет вид:

$$B_1 = R\alpha\frac{\Delta T}{2}; \qquad A_1 = -R\alpha\frac{\Delta T}{2}; \qquad B_2 = A_2 = 0$$

Используя соотношения (2.II), (2.I3) и (2.36), окончательное решение задачи можно записать для обоих участков оболочки следующим образом:

$$W_1(x_1) = R\alpha\left[T^{I} + \frac{\Delta T}{2} e^{-kx_1}\cos kx_1\right]$$

$$W_2(x_2) = R\alpha\left[T^{II} - \frac{\Delta T}{2} e^{-kx_2}\cos kx_2\right]$$

$$N_2^{I}(x_1) = Eh\alpha\frac{\Delta T}{2} e^{-kx_1}\cos kx_1$$

$$N_2^{II}(x_2) = -Eh\alpha\frac{\Delta T}{2} e^{-kx_2}\cos kx_2$$

$$M_1^{I}(x_1) = -Dk^2 R\alpha\Delta T e^{-kx_1}\cos kx_1$$

$$M_1^{II}(x_1) = Dk^2 R\alpha\Delta T e^{-kx_2}\cos kx_2$$

$$M_2^{I}(x_1) = \mu M_1^{I}(x_1); \qquad M_2^{II}(x_2) = \mu M_1^{II}(x_2).$$

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, у которой R = I м, h = 0,0I м, $E = 2\cdot 10^5$ МПа, μ = 0,3, $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ I/град, $T^{I} = 80^{\circ}$ С, $T^{II} = -100^{\circ}$ С. Для этой оболочки распределение прогибов W , окружных усилий N_2 и меридиональных изгибающих моментов M_1 вдоль образующей представлено на рис.2.I2. Наибольшие окружные и меридиональные напряжения в этом случае в оболочке равны

$$\sigma_{22} = 216 \text{ МПа}; \qquad \sigma_{11} = 123 \text{ МПа}.$$

Следует отметить, что на расстоянии порядка $\frac{R}{2}$ от сечения, где реализуется скачок температуры, краевой эффект, обусловленный этим скачком, фактически затухает.

2.5.2. В качестве второго примера рассмотрим длинную цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием установившегося температурного поля, изменяющегося по толщине оболочки по линейному

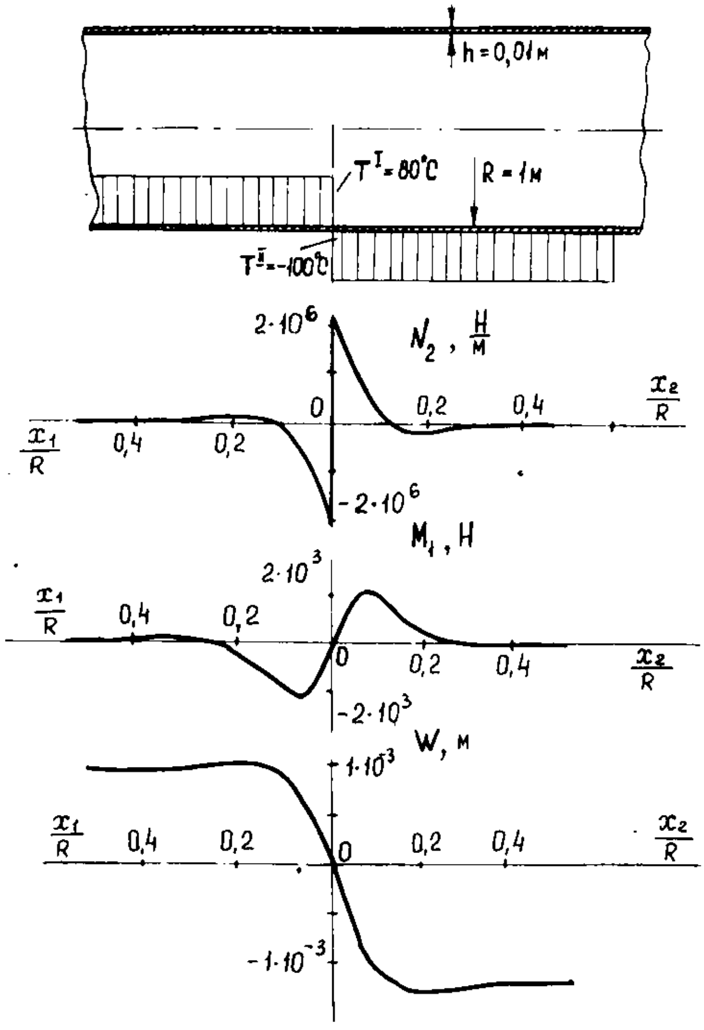

Рис.2.12. Распределение прогибов и внутренних усилий в цилиндрической оболочке со скачкообразным изменением температуры

закону и не изменяющегося вдоль образующей. Температуру оболочки на внутренней поверхности обозначим через $T_в$, а на наружной поверхности – $T_н$. Торец оболочки будем предполагать заделанным в ненагретый массивный шпангоут (рис.2.13). Функции T_0 и T_1 в этом случае могут быть вычислены по формулам:

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_н + T_в)$$

$$T_1 = \frac{1}{h}(T_н - T_в). \qquad (2.38)$$

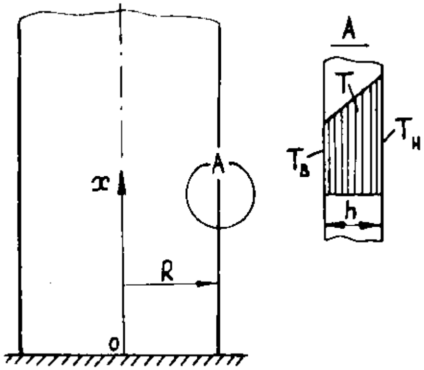

Рис.2.13. Цилиндрическая оболочка при действии температуры, линейно изменяющейся по толщине

Дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки (2.19) имеет вид:

$$D\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}W = \frac{Eh}{R}\alpha T_0. \qquad (2.39)$$

Поместив начало координат в торце оболочки, запишем решение уравнения (2.39) следующим образом:

$$W(x) = e^{-kx}(B_1\cos kx + B_2 \sin kx) + R\alpha T_0. \qquad (2.40)$$

Произвольные постоянные B_1 и B_2 найдем из граничных условий на торце оболочки:

$$\text{при} \quad x = 0, \quad W = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dW}{dx} = 0.$$

В результате получим $B_1 = B_2 = -R\alpha T_0$.

Окончательные выражения для прогибов и внутренних силовых факторов запишутся:

$$W(x) = R\alpha T_0[1 - e^{-kx}(\cos kx + \sin kx)]$$

$$N_2(x) = -Eh\alpha T_0 e^{-kx}(\cos kx + \sin kx)$$

$$M_1(x) = -2Dk^2R\alpha T_0 e^{-kx}(\cos kx - \sin kx) - D(1+\mu)\alpha T_1$$

$$M_2(x) = -2Dk^2\mu R\alpha T_0 e^{-kx}(\cos kx - \sin kx) - D(1+\mu)\alpha T_1.$$

Здесь величины T_0 и T_1 подсчитываются по формулам (2.38).

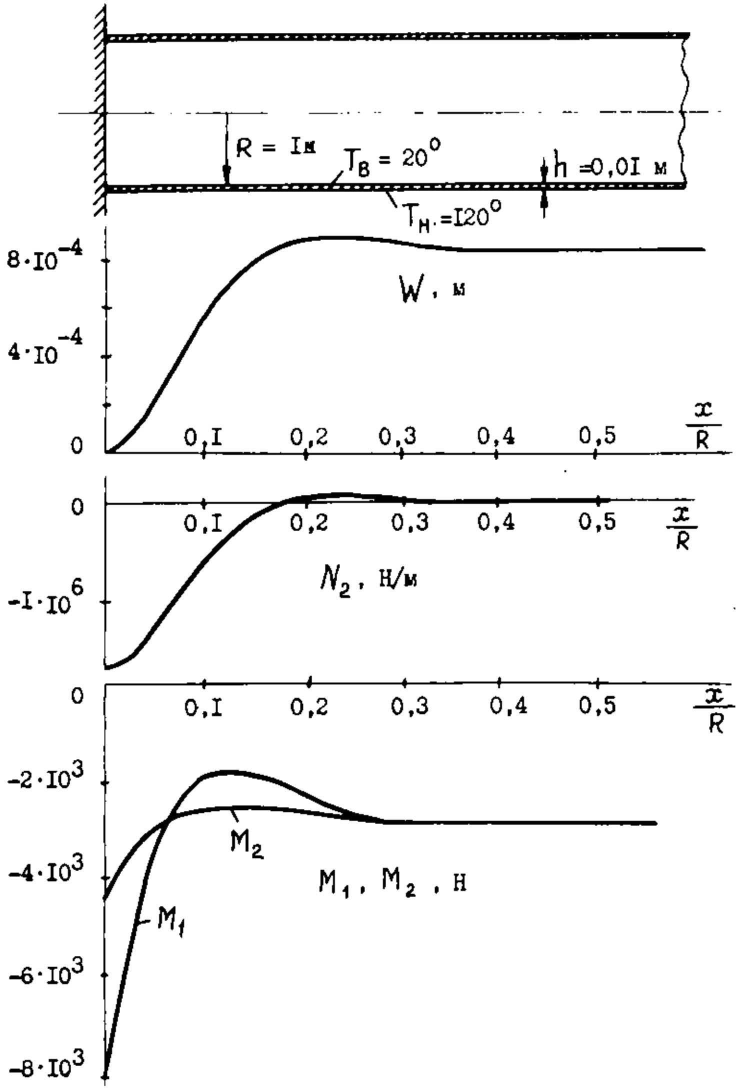

Рис.2.I4. Распределение прогибов и внутренних усилий в цилиндрической оболочке при действии температуры, линейно изменяющейся по толщине

Для оболочки с параметрами $R = 1$ м, $h = 0{,}01$ м, $E = 2\cdot10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$, $\alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}$ 1/град, $T_в = 20^\circ$ С, $T_н = 120^\circ$ С распределение прогибов W, окружных усилий N_2 и изгибающих моментов M_1 и M_2 вдоль образующей представлено на рис.2.14.

Так же, как и в предыдущей задаче, краевой эффект от заделки торца оболочки затухает на расстоянии $\frac{R}{2}$.

3. МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

3.1. Основные соотношения моментной теории оболочек вращения при осесимметричных деформациях

В общем случае осесимметричного нагружения оболочек вращения она испытывает как растяжение, так и изгиб. Как уже отмечалось ранее, при рассмотрении безмоментной теории оболочек изгиб возникает около мест нарушения плавности приложения поверхностных сил или приложения сосредоточенных нагрузок, а также там, где скачкообразно изменяются радиусы кривизны или толщина оболочки. Характер изгибной деформации может быть различным. При нагружении сосредоточенными силами изгиб оказывает решающее влияние на прочность, так как в этом случае с увеличением нагрузки изгибная деформация растет вплоть до исчерпания несущей способности конструкции.

В местах сопряжения оболочки с другими элементами или в местах скачкообразного изменения радиусов кривизны изгиб имеет другой характер; здесь изгиб развивается лишь в той мере, в какой это необходимо для условия сопряжения. При пластическом материале оболочки изгибные напряжения этого типа с увеличением нагрузки обычно снижаются и практически не влияют на несущую способность. При хрупком материале оболочки напряжения изгиба остаются пропорциональными нагрузке вплоть до разрушения и могут привести к значительному снижению прочности конструкции.

При выводе уравнений моментной теории оболочек вращения используются гипотезы Кирхгофа-Лява (см.раздел 1.1).

Рассмотрим перемещения и деформации точек срединной поверхности оболочки вращения, возникающие при ее осесимметричном нагружении. В силу симметрии нагрузки в оболочке отсутствуют перемещения в окружном направлении, и следовательно, угловая деформация в касательной плоскости равна нулю. Остальные перемещения и деформации представляют собой функции лишь одной независимой переменной – угла θ .

Сохраним обозначения перемещений и деформаций срединной поверхности оболочки такими же, как и при рассмотрении безмоментной теории (рис.3.I).

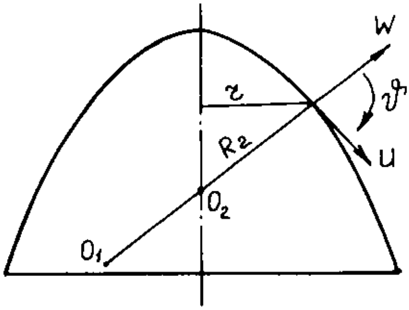

Рис.3.I. Положительные направления перемещений точки срединной поверхности оболочки

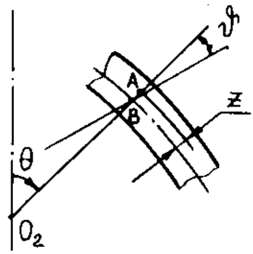

Рис.3.2. К определению перемещений слоя, отстоящего на расстоянии z от срединной поверхности

Выражения для деформаций срединной поверхности, а также для угла поворота нормали (I.28) и (I.29), полученные нами применительно к безмоментной оболочке, останутся полностью справедливыми. Перепишем их:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{du}{d\theta} + W\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{R_2}\left(u\,ctg\,\theta + W\right) \qquad (3.I)$$

$$\vartheta = \frac{1}{R_1}\left(u - \frac{dW}{d\theta}\right). \qquad (3.2)$$

Перейдем к определению деформаций в произвольном слое оболочки, расположенном на расстоянии z от срединной поверхности (рис.3.2) (эквидистантного слоя). Все величины, относящиеся к этому слою, будем обозначать верхним индексом z в скобках. Главные радиусы кривизны эквидистантного слоя можно записать так:

$$R_1^{(z)} = R_1 + z = R_1\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)$$

$$R_2^{(z)} = R_2 + z = R_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right).$$

Для тонких оболочек, а именно такие оболочки мы будем рассматривать в дальнейшем, членами $\frac{z}{R_1}$ и $\frac{z}{R_2}$ по сравнению с единицей можно пренебречь, и тогда

$$R_1^{(z)} \approx R_1 \qquad R_2^{(z)} \approx R_2. \qquad (3.3)$$

В силу гипотез прямых нормалей и с ненадавливании между слоями перемещения точки A, отстоящей на расстоянии z от срединной поверхности (рис.3.2), можно записать:

$$u^{(z)} = u + z\vartheta$$

$$W^{(z)} = W. \qquad (3.4)$$

Для нахождения деформаций слоя, отстоящего на расстоянии z от срединной поверхности, можно воспользоваться формулами (3.I), подставив в них (3.3) и (3.4):

$$\varepsilon_{11}^{(z)} = \frac{1}{R_1^{(z)}}\left(\frac{du^{(z)}}{d\theta} + W^{(z)}\right) = \varepsilon_{11} + z\varkappa_1$$

$$\varepsilon_{22}^{(z)} = \frac{1}{R_2^{(z)}}\left(u^{(z)}\operatorname{ctg}\theta + W^{(z)}\right) = \varepsilon_{22} + z\varkappa_2, \qquad (3.5)$$

где введены обозначения

$$\varkappa_1 = \frac{1}{R_1}\frac{d\vartheta}{d\theta} \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{R_2}\vartheta\operatorname{ctg}\theta. \qquad (3.6)$$

Величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ называются изменениями кривизны срединной поверхности оболочки.

Перейдем от деформаций к напряжениям. По формулам обобщенного закона Гука

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{11}^{(z)} + \mu\varepsilon_{22}^{(z)}\right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{22}^{(z)} + \mu\varepsilon_{11}^{(z)}\right). \qquad (3.7)$$

По напряжениям можно вычислить внутренние погонные силовые факторы:

меридиональные и окружные нормальные силы

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}\,dz, \qquad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22}\,dz;$$

изгибающие моменты

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} z\, dz, \qquad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} z\, dz.$$

В результате подстановки выражений (3.7) и интегрирования получим

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22})$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11})$$

$$M_1 = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2)$$

$$M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), \tag{3.8}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Кроме нормальных напряжений σ_{11} и соответствующих им силовых факторов N_1, M_1 в осевых сечениях оболочки возникают еще касательные напряжения σ_{13}, перпендикулярные поверхности оболочки. Им соответствует поперечная сила

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}\, dz.$$

На срединной поверхности касательные напряжения σ_{13} достигают максимума, а при $z = \pm\frac{h}{2}$ обращаются в нуль. Эти напряжения не имеют существенного значения при расчете оболочки на прочность, однако их равнодействующая - поперечная сила Q_1 - играет важную роль в уравнениях равновесия элемента оболочки.

Напряженное состояние осесимметрично нагруженной оболочки вращения будем представлять в виде суммы двух состояний: безмоментного напряженного состояния, обусловленного распределенными поверхностными нагрузками p_n и p_z, и смешанного напряженного состояния, обусловленного краевым эффектом. Безмоментная теория рассмотрена нами в главе I, поэтому в дальнейшем будем рассматривать напряженно-деформированное состояние оболочки, вызванное самоуравновешенными силами и моментами, приложенными к краю оболочки.

На рис.3.3 изображен элемент оболочки с действующими на него силами и моментами. В силу сказанного выше, поверхностная нагрузка на элемент оболочки принята равной нулю. Приравняв нулю сумму проекций всех сил на нормаль к поверхности оболочки и на касательную

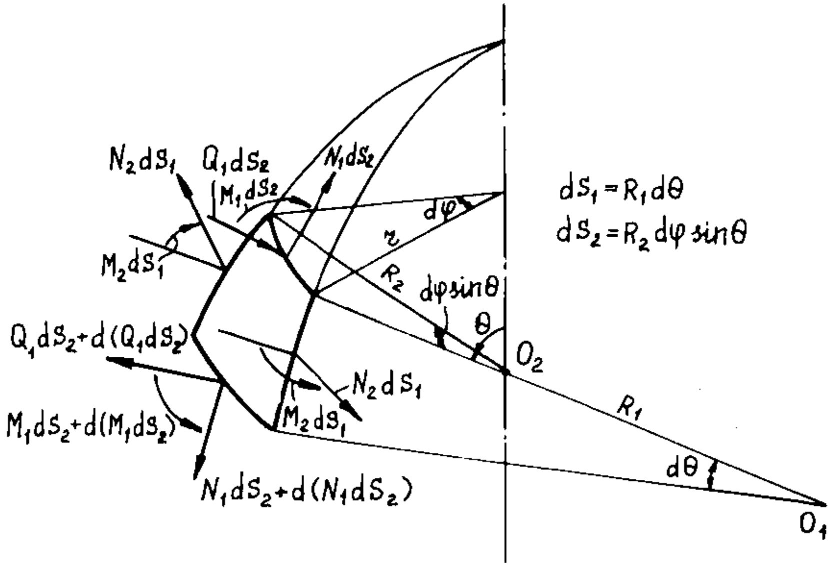

Рис.3.3. Бесконечно малый элемент оболочки вращения

к меридиану, а также сумму моментов относительно оси, касательной к параллельной окружности, получим следующие три уравнения:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin\theta} \frac{d(Q_1 R_2 \sin\theta)}{d\theta} - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} = 0 \qquad (3.9)$$

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin\theta}\left[\frac{d(N_1 R_2 \sin\theta)}{d\theta} - \frac{d(R_2 \sin\theta)}{d\theta} N_2\right] + \frac{Q_1}{R_1} = 0 \qquad (3.10)$$

$$Q_1 = \frac{1}{R_1 R_2 \sin\theta}\left[\frac{d(M_1 R_2 \sin\theta}{d\theta} - \frac{d(R_2 \sin\theta)}{d\theta} M_2\right]. \qquad (3.11)$$

Однако как и в безмоментной теории вместо уравнения(3.I0) будем использовать уравнение равновесия зоны (конечной части оболочки) в проекции на ось вращения (рис.3.4). В силу отсутствия поверхностной нагрузки это уравнение имеет вид:

$$Q_1 \cos\theta \cdot 2\pi r - N_1 \sin\theta \cdot 2\pi r = 0.$$

Откуда

$$N_1 = Q_1 \operatorname{ctg}\theta. \qquad (3.12)$$

Мы имеем три уравнения равновесия, содержащие пять неизвестных силовых факторов, т.е. задача является статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся уравнением неразрывности деформированной поверхности оболочки.

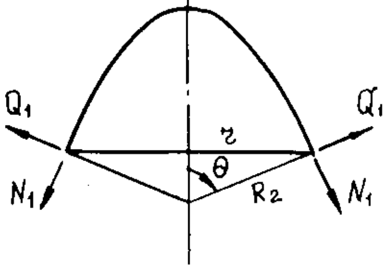

Рис.3.4. К выводу уравнения равновесия зоны оболочки

Все величины, относящиеся к деформированному состоянию, будем в дальнейшем обозначать звездочкой сверху. Запишем применительно к деформированному состоянию тождественное уравнение

$$dr = dS_1 \cdot \cos\theta, \qquad (3.13)$$

из которого ранее было получено соотношение Кодацци-Гаусса (I.3):

$$dr^* = dS_1^* \cos\theta^*. \qquad (3.14)$$

При этом будем иметь в виду, что

$$r^* = r(1+\varepsilon_{22})$$
$$dS_1^* = dS_1(1+\varepsilon_{11})$$
$$\theta^* = \theta + \vartheta.$$

Тогда

$$dr + d(r\varepsilon_{22}) = (dS_1 + dS_1\varepsilon_{11})(\cos\theta\cos\vartheta - \sin\theta\sin\vartheta) \quad (3.15)$$

В силу малости угла ϑ полагаем $\cos\vartheta \approx 1$, а $\sin\vartheta \approx \vartheta$. Учитывая (3.13) и сохраняя члены одного порядка малости, из (3.15) имеем

$$d(r\varepsilon_{22}) = dS_1 \cdot \varepsilon_{11} \cdot \cos\theta - dS_1 \cdot \vartheta \cdot \sin\theta.$$

Подставим сюда $dS_1 = R_1 d\theta$, $r = R_2 \sin\theta$ и разделим обе части на $dS_1 \sin\theta$. В результате получим уравнение неразрывности деформаций в виде:

$$\frac{1}{R_1\sin\theta}\,\frac{d(R_2\varepsilon_{22}\sin\theta)}{d\theta} - \varepsilon_{11}\,ctg\,\theta + \vartheta = 0. \qquad (3.16)$$

Приведем полученную систему уравнений к двум разрешающим уравнениям с двумя неизвестными /I,9/.

Следуя Мейсснеру, в качестве основных неизвестных возьмем две функции (переменные Мейсснера) - угол поворота нормали ϑ и

$$V = Q_1 \cdot R_2 \tag{3.17}$$

Через них выразим все остальные величины. Из (3.12) и (3.9) получим

$$N_1 = V \frac{ctg\,\theta}{R_2} \tag{3.18}$$

$$N_2 = \frac{1}{R_1} \frac{dV}{d\theta} \tag{3.19}$$

По закону Гука можно найти деформации:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh}(N_1 - \mu N_2)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh}(N_2 - \mu N_1) \tag{3.20}$$

Подставим в (3.20) выражения (3.18) и (3.19). В результате будем иметь:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eh}\left(\frac{V}{R_2} ctg\,\theta - \frac{\mu}{R_1}\frac{dV}{d\theta}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh}\left(\frac{1}{R_1}\frac{dV}{d\theta} - \frac{\mu}{R_2} V ctg\,\theta\right) \tag{3.21}$$

Выражения для изгибающих моментов M_1 и M_2 в соответствии с (3.8) и (3.6) будут иметь вид:

$$M_1 = D\left(\frac{1}{R_1}\frac{d\vartheta}{d\theta} + \frac{\mu}{R_2}\vartheta\, ctg\,\theta\right)$$

$$M_2 = D\left(\frac{1}{R_2}\vartheta\, ctg\,\theta + \frac{\mu}{R_1}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right) \tag{3.22}$$

Для получения разрешающих уравнений подставим в уравнения (3.11) и (3.16) соотношения (3.21) и (3.22), а также учтем, что $Q_1 = \frac{V}{R_2}$. В результате приходим к двум уравнениям Мейсснера:

$$\begin{cases} L(V) + \mu V = -EhR_1\vartheta \\ L(\vartheta) - \mu\vartheta = \frac{R_1}{D} V \end{cases} \tag{3.23}$$

Здесь введен дифференциальный оператор L :

$$L(\cdot\cdot) = \frac{R_2}{R_1}\frac{d^2(\ldots)}{d\theta^2} + \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_2}{R_1} ctg\,\theta\right]\frac{d(\cdots)}{d\theta} - \frac{R_1}{R_2} ctg^2\theta(\cdots) \tag{3.24}$$

Система дифференциальных уравнений (3.23) имеет четвертый порядок. В результате ее интегрирования определяются функции ϑ и V с точностью до четырех постоянных интегрирования, которые подлежат отысканию из граничных условий.

Если функции ϑ и V, удовлетворяющие уравнениям (3.23), а также граничным условиям на краях оболочки, будут найдены, то по ним можно легко определить и все остальные величины. Изгибающие моменты вычисляются по формулам (3.22); мембранные усилия - по формулам (3.I8) и (3.I9). Поперечную силу Q_1 определяют на основании равенства $Q_1 = \frac{V}{R_2}$.

3.2. Приведение уравнений Мейсснера к одному уравнению относительно комплексной функции для оболочек с постоянной кривизной меридиана

Умножим второе уравнение (3.23) на коэффициент β и сложим его с первым уравнением:

$$L(V+\beta\vartheta)+\mu V-\mu\beta\vartheta=-EhR_1\vartheta+\beta\frac{R_1}{D}V$$

Перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$L(V+\beta\vartheta)+\left(\mu-\beta\frac{R_1}{D}\right)\left(V+\frac{EhR_1-\mu\beta}{\mu-\beta\frac{R_1}{D}}\vartheta\right)=0 \qquad (3.25)$$

Коэффициент β подберем из условия

$$\frac{EhR_1-\mu\beta}{\mu-\beta\frac{R_1}{D}}=\beta,$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно β:

$$\beta^2-\frac{2\mu D}{R_1}\beta+EhD=0$$

Если $R_1 = const$, то решение этого уравнения имеет вид

$$\beta=\frac{\mu D}{R_1}\pm\sqrt{\frac{\mu^2D^2}{R_1^2}-EhD}$$

Можно легко показать, что подкоренное выражение в этой формуле всегда отрицательная величина, следовательно, β - комплексное число:

$$\beta=\frac{D}{R_1}(\mu-i\lambda), \qquad (3.26)$$

где

$$\lambda = \sqrt{12(1-\mu^2)\frac{R_1^2}{h^2} - \mu^2} \tag{3.27}$$

Проанализируем порядок величин, входящих в (3.26) и (3.27). Под радикалом в (3.27) величиной μ^2 по сравнению с первым членом можно пренебречь, так как для тонких оболочек $\left(\frac{R_1}{h}\right)^2 \gg 1$. Тогда можно приближенно записать:

$$\lambda = 2\sqrt{3(1-\mu^2)}\,\frac{R_1}{h} \tag{3.28}$$

В свою очередь, для тонких оболочек в (3.26) членом μ можно пренебречь по сравнению с λ. В результате этого

$$\beta = -i\,\frac{\lambda D}{R_1} \tag{3.29}$$

Если ввести обозначение

$$\sigma = V + \beta\vartheta, \tag{3.30}$$

то уравнение (3.25) можно записать в следующем виде:

$$L(\sigma) + i\lambda\sigma = 0 \tag{3.31}$$

Таким образом, вместо решения системы дифференциальных уравнений четвертого порядка (3.23) для оболочки с постоянной кривизной меридиана можно решать комплексное уравнение второго порядка (3.31).

3.3. Сферическая оболочка. Приближенные методы расчета сферической оболочки

В случае сферической оболочки, когда $R_1 = R_2 = R$, дифференциальный оператор (3.21) упрощается и имеет вид

$$L(\;) = \frac{d^2}{d\theta^2} + ctg\,\theta\frac{d}{d\theta} - ctg^2\theta;$$

при этом уравнение (3.31) превращается в следующее:

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + ctg\,\theta\frac{d\sigma}{d\theta} + (i\lambda - ctg^2\theta)\sigma = 0, \tag{3.32}$$

где

$$\sigma = RQ_1 - i\,\frac{\lambda D}{R}\vartheta \tag{3.33}$$

$$\lambda = 2\sqrt{3(1-\mu^2)}\,\frac{R}{h} \qquad (3.34)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (3.32) запишется так:

$$\sigma = C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2 \qquad (3.35)$$

Здесь C_1 и C_2 – комплексные произвольные постоянные, σ_1 и σ_2 – два частных, линейно независимых решения однородного уравнения (3.32). Выделим действительные и мнимые части в решениях σ_1 и σ_2:

$$\sigma_1 = f_1 + i g_1; \quad \sigma_2 = f_2 + i g_2 \qquad (3.36)$$

Что касается комплексных постоянных C_1 и C_2, то их для дальнейшего удобно представить в виде

$$C_1 = -i\,\frac{\lambda D}{R}(A_1 - iB_1)$$

$$C_2 = -i\,\frac{\lambda D}{R}(A_2 - iB_2), \qquad (3.37)$$

где A_1, A_2, B_1 и B_2 – вещественные постоянные.

Тогда подстановка (3.36) и (3.37) в (3.35) дает

$$\sigma = -i\frac{\lambda D}{R}(A_1 - iB_1)(f_1 + ig_1) - i\frac{\lambda D}{R}(A_2 - iB_2)(f_2 + ig_2)$$

Отделяя действительную и мнимую части, в соответствии с (3.33) получим

$$Q_1 = \frac{\lambda D}{R^2}(A_1 g_1 - B_1 f_1 + A_2 g_2 - B_2 f_2)$$

$$\vartheta = A_1 f_1 + B_1 g_1 + A_2 f_2 + B_2 g_2 . \qquad (3.38)$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 определяются из граничных условий на краях оболочки.

Для пояса оболочки на обоих его краях должны быть заданы по два граничных условия. Если же оболочка замкнута в вершине, то должны быть заданы два условия на крае и два в вершине (условия конечности усилий и перемещений при $\theta = 0$).

На практике могут встретиться следующие варианты граничных условий:

а) край оболочки жестко заделан (рис.3.5 а):

$$\text{при} \quad \theta = \theta_к \qquad \vartheta = 0$$

$$\varepsilon_{22} = 0 \qquad \text{или} \qquad N_2 - \mu N_1 = 0 \ ;$$

б) край оболочки закреплен шарнирно (рис.3.5 б).

В этом случае

$$\text{при} \quad \theta = \theta_к \qquad M_1 = 0$$

$$\varepsilon_{22} = 0 \qquad \text{или} \qquad N_2 - \mu N_1 = 0 \ ;$$

в) край оболочки свободен от закрепления (рис.3.5 в).

Здесь

$$\text{при} \quad \theta = \theta_к \qquad M_1 = 0 \qquad \theta_1 = 0 \ .$$

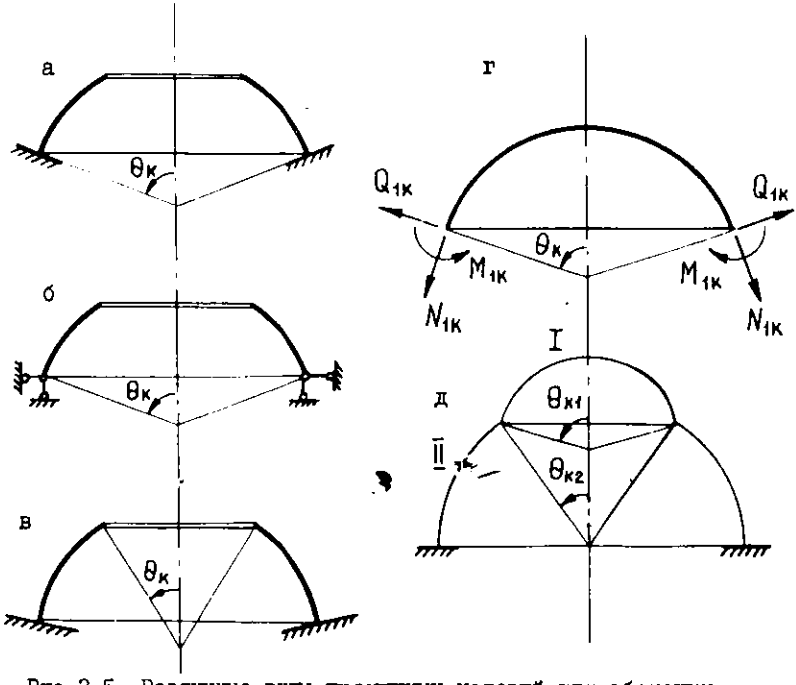

Рис.3.5. Различные виды граничных условий для оболочки вращения

г) край оболочки нагружен краевыми силами N_{1K}, Q_{1K} и моментом M_{1K} (рис.3.5 г). В этом случае

$$\text{при} \quad \theta = \theta_K \qquad M_1 = M_{1K}$$
$$Q_1 = Q_{1K} ;$$

д) при сопряжении двух оболочек (рис.3.5 д) необходимо записать четыре условия. Эти условия состоят в следующем:

$$\vartheta^{I} = \vartheta^{II}, \quad \varepsilon_{22}^{I} = \varepsilon_{22}^{II}, \quad M_1^{I} = M_1^{II}$$
$$N_1^{I} \cos\theta_{K1} + Q_1^{I} \sin\theta_{K1} = N_1^{II} \cos\theta_{K2} + Q_1^{II} \sin\theta_{K2} ;$$

е) если оболочка замкнута в вершине, то при $\theta = 0$ должны выполняться следующие условия:

$$\vartheta = 0, \quad Q_1 = 0 .$$

Уравнение (3.32) можно проинтегрировать точно через гипергеометрические ряды, однако их вычисление связано с целым рядом трудностей. Рассмотрим поэтому приближенные способы интегрирования дифференциального уравнения изгиба сферической оболочки.

Одним из приближенных методов является метод асимптотического интегрирования /I,9/. Осуществим замену переменных

$$y = \sigma \sqrt{\sin\theta} \qquad (3.39)$$

Дифференциальное уравнение (3.32) при этом примет вид:

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \left(i\lambda + \frac{1}{2} - \underline{\frac{3}{4}\, ctg^2\theta}\right) y = 0 \qquad (3.40)$$

Если оболочка не является пологой, то подчеркнутый член в круглых скобках - величина малая по сравнению с λ и им можно пренебречь.

Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению относительно новой переменной y, имеющему вид:

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + i\lambda y = 0 \qquad (3.41)$$

Линейно независимыми частными решениями этого уравнения будут функции

$$y_1 = e^{(1-i)k\theta}, \qquad y_2 = e^{-(1-i)k\theta}, \qquad (3.42)$$

где

$$K = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

В соответствии с (3.39) будем иметь

$$\mathfrak{S}_1 = f_1 + i g_1 = \frac{e^{K\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} \left(\cos K\theta - i \sin K\theta\right)$$

$$\mathfrak{S}_2 = f_2 + i g_2 = \frac{e^{-K\theta}}{\sqrt{\sin\theta}} \left(\cos K\theta + i \sin K\theta\right) \qquad (3.43)$$

Далее, по (3.38) и (3.43) находим

$$Q_1 = -\frac{\lambda D}{R^2}\left[\frac{e^{K\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}(B_1\cos K\theta + A_1 \sin K\theta) + \frac{e^{-K\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}(B_2\cos K\theta - A_2\sin K\theta)\right]$$

$$\vartheta = \frac{e^{K\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}(A_1\cos K\theta - B_1\sin K\theta) + \frac{e^{-K\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}(A_2\cos K\theta + B_2\sin K\theta)] \quad (3.44)$$

Произвольные постоянные, входящие в решение (3.44), как отмечалось ранее, подлежат отысканию из четырех условий на двух краях оболочки.

Из приведенного ранее анализа изгиба цилиндрической оболочки нам известно, что напряжения изгиба, вызванные краевым эффектом, быстро затухают по мере удаления от края. Аналогичная картина наблюдается также и в тонких сферических оболочках. Заметив, что с уменьшением угла θ первые два члена в решении (3.44) уменьшаются, в то время как два последующих увеличиваются, мы приходим к выводу, что в случае сферы без отверстия на полюсе необходимо сохранить в решении (3.44) лишь два первых члена, положив

$$A_2 = B_2 = 0.$$

Если для оболочки $\theta_{K2} - \theta_{K1} > 2\sqrt{\frac{h}{R}}$ (см. рис.3.6), то граничные условия одного края не влияют на напряженное состояние другого края /I/. Такие оболочки называются „длинными", и для них постоянные интегрирования могут быть найдены попарно из граничных условий на соответствующих краях.

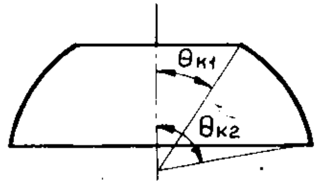

Рис.3.6. Элемент сферической оболочки

В случае пологой сферической оболочки для упрощения уравнения (3.32) запишем разложение котангенса в ряд по степеням аргумента θ

$$ctg\,\theta = \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{45} - \ldots \qquad (3.45)$$

Если угол $\theta \leq 15^\circ$, то в выражении (3.45) с достаточной степенью точности можно отбросить все члены, кроме первого, в результате чего уравнение (3.32) принимает вид

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta}\frac{d\sigma}{d\theta} + \left(i\lambda - \frac{1}{\theta^2}\right)\sigma = 0 \qquad (3.46)$$

Уравнение (3.46) является дифференциальным уравнением типа Бесселя. Его решением являются функции Бесселя и Ганкеля /4/ комплексного аргумента. Действительные и мнимые части этих функций называются функциями Томсона и обозначаются

$$ber\,x, \quad bei\,x, \quad ker\,x, \quad kei\,x,$$

причем функции $ber\,x$, $bei\,x$ являются возрастающими по мере увеличения аргумента, а $ker\,x$, $kei\,x$ - убывающими. Функции Томсона табулированы, а при необходимости их можно вычислить через известные степенные ряды, которые приведены в справочной литературе по специальным функциям /2/.

Таким образом, для пологой сферической оболочки будем иметь

$$f_1 = ber'x, \qquad g_1 = -bei'x$$

$$f_2 = ker'x, \qquad g_2 = -kei'x$$

$$x = \sqrt{\lambda}\,\theta$$

Здесь штрихом обозначена производная по аргументу x.

При рассмотрении оболочки без отверстия в полюсе функции f_2 и g_2 опускаются.

3.4. Приближенный метод расчета произвольной оболочки вращения при осесимметричном нагружении (метод Штаермана-Геккелера)

При рассмотрении цилиндрических и сферических оболочек было установлено, что прогиб и все внутренние силовые факторы могут быть представлены в зависимости от θ при помощи функций двоякого рода - быстро затухающих и столь же быстро возрастающих. Это дает возможность для достаточно длинной оболочки рассматривать деформации и напряжения в окрестности одного края независимо от условий закрепления на другом крае.

Поэтому можно считать, что все функции, характеризующие напряжения и деформации в оболочке около края, а также их первые производные малы по сравнению с их старшими производными. Это допущение основано на том факте, что рассматриваемые функции содержат множитель вида $e^{-k\omega}$, где ω – угол или дуга, отсчитываемая от рассматриваемого края оболочки, k – параметр. При дифференцировании этой функции достаточно большой параметр k выходит каждый раз в виде множителя. На этом основании в системе уравнений (3.23) члены, содержащие сами функции и их первые производные, отбрасываются. В результате разрешающие уравнения (3.23) принимают вид

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{d^2 V}{d\theta^2} = -Eh R_1 \vartheta$$

$$\frac{R_2}{R_1}\frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} = \frac{R_1}{D} V. \tag{3.47}$$

Кроме того, предполагается, что радиусы кривизны R_1 и R_2 около края оболочки изменяются незначительно. Это допущение точно выполняется в случае сферической оболочки. Для оболочек других видов это допущение выполняется тем точнее, чем ближе форма оболочки к сферической.

Приведем систему (3.47) к одному уравнению с одним неизвестным. Продифференцировав первое уравнение (3.47) дважды и подставив $\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$ во второе уравнение, получим разрешающее уравнение краевого эффекта:

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + \frac{R_1^4 Eh}{R_2^2 D} V = 0 \tag{3.48}$$

Обозначим:

$$\frac{R_1^4 Eh}{R_2^2 D} = R_1^4 \frac{12(1-\mu^2)}{R_2^2 h^2} = 4\beta^4$$

или

$$\beta = R_1 \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 h^2}} \tag{3.49}$$

Тогда уравнение (3.48) принимает вид

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + 4\beta^4 V = 0 \tag{3.50}$$

Уравнение (3.50) аналогично однородному уравнению осесимметричной деформации цилиндрической оболочки.

Введем новую независимую переменную ω, представляющую собой угловую координату, отсчитываемую от края оболочки. Если рассматривается нижний край (рис.3.7 а), то

$$\omega = \alpha - \theta$$

Если рассматривается верхний край (рис.3.7 б), то угол ω отсчитывается в обратную сторону, и тогда

$$\omega = \theta - \alpha$$

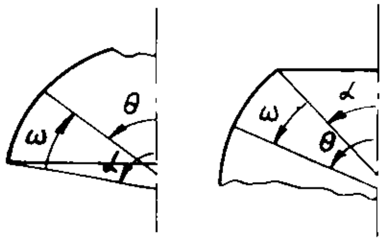

Рис.3.7. К определению угла ω

Так как в обоих этих случаях

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} = \frac{d^4 V}{d\omega^4},$$

то при переходе к новой переменной дифференциальное уравнение (3.50) не изменяет своего вида, т.е.

$$\frac{d^4 V}{d\omega^4} + 4\beta^4 V = 0 \qquad (3.51)$$

Решение дифференциального уравнения (3.51) записывается так же, как и для длинной цилиндрической оболочки:

$$V = e^{-\beta\omega}(C_1\cos\beta\omega + C_2\sin\beta\omega) + e^{\beta\omega}(C_3\cos\beta\omega + C_4\sin\beta\omega) \qquad (3.52)$$

Ввиду того, что функция V с возрастанием угла ω должна затухать, второе слагаемое в выражении (3.52), содержащее множитель $e^{\beta\omega}$, должно быть опущено. Поэтому постоянные C_3 и C_4 следует приравнять нулю, тогда

$$V = e^{-\beta\omega}(C_1\cos\beta\omega + C_2\sin\beta\omega) \qquad (3.53)$$

Точность расчета, выполненного по изложенному методу, тем выше, чем ближе угол наклона нормали на крае оболочки к 90° и чем меньше величина $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Практически этим методом можно пользоваться, если угол на крае $\alpha > 35°$.

В качестве первого примера рассмотрим сферическую оболочку без отверстия на полюсе, нагруженную по краю $\theta = \alpha$ равномерно распределенными моментами M (рис.3.8).

Параметры оболочки следующие: R = 1 м, h = 3 мм, E = = $2\cdot10^5$ МПа, α = 60°, M = 1 Н.

Решение дифференциального уравнения (3.48) запишем в форме (3.53). Для сферической оболочки параметр β , входящий в решение (3.53), будет иметь вид:

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{R}{h}}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны быть найдены из граничных условий на крае оболочки

при $\omega = 0$ $\quad Q_1 = 0;\ M_1 = M$ (3.54)

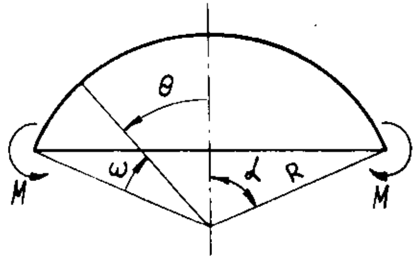

Рис.3.8. Сферическая оболочка, нагруженная по краю изгибающим моментом

Для отыскания угла поворота нормали ϑ можно воспользоваться первым из уравнений системы (3.47), которое с учетом замены переменной дает

$$\vartheta = -\frac{1}{EhR}\frac{d^2V}{d\omega^2} \qquad (3.55)$$

Нормальные погонные усилия N_1 и N_2 и погонная перерезывающая сила Q_1 могут быть записаны с помощью формул (3.18), (3.19) и (3.17) через новую переменную ω в виде:

$$N_1 = \frac{ctg(\alpha-\omega)}{R}V$$

$$N_2 = -\frac{1}{R}\frac{dV}{d\omega}$$

$$Q_1 = \frac{1}{R}V. \qquad (3.56)$$

Изгибающие моменты M_1 и M_2 можно определить, пользуясь соотношениями (3.22). Пренебрегая в (3.22) функцией ϑ по сравнению с ее производной и подставляя туда (3.55), получим:

$$M_1 = \frac{D}{EhR^2}\frac{d^3V}{d\omega^3}$$

$$M_2 = \mu\frac{D}{EhR^2}\frac{d^3V}{d\omega^3} \qquad (3.57)$$

Подставим в граничные условия (3.54) выражения (3.56), (3.57) и (3.53) и найдем значения произвольных постоянных C_1 и C_2

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = 2\beta M .$$

С учетом этого соотношения (3.56) и (3.57) примут вид

$$N_1 = \frac{2\beta M}{R}\, ctg(\alpha - \omega)\, e^{-\beta\omega} \sin\beta\omega$$

$$N_2 = -\frac{2\beta^2 M}{R}\, e^{-\beta\omega} (\cos\beta\omega - \sin\beta\omega)$$

$$Q_1 = \frac{2\beta M}{R}\, e^{-\beta\omega} \sin\beta\omega$$

$$M_1 = M e^{-\beta\omega} (\cos\omega\beta + \sin\omega\beta)$$

$$M_2 = \mu M e^{-\beta\omega} (\cos\omega\beta + \sin\omega\beta). \qquad (3.58)$$

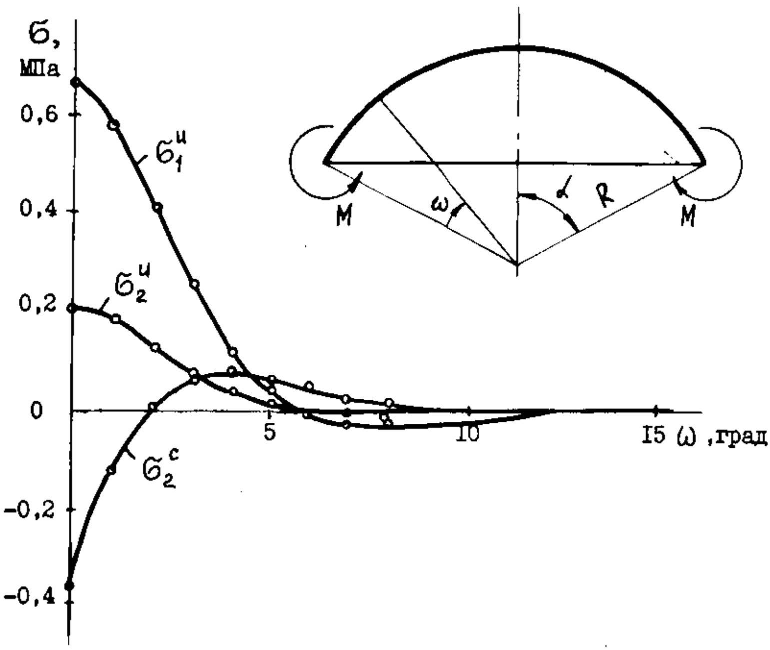

Рис.3.9. Распределение напряжений в сферической оболочке, нагруженной по краю изгибающим моментом

На рис.3.9 показано распределение вдоль меридиана рассматриваемой оболочки мембранных окружных напряжений σ_2^c , а также изгибных меридиональных и окружных напряжений σ_1^u и σ_2^u , вычисляемых по формулам:

$$\sigma_2^c = \frac{N_2}{h}; \quad \sigma_1^u = \frac{6M_1}{h^2}; \quad \sigma_2^u = \frac{6M_2}{h^2}.$$

Сплошные линии соответствуют точному решению задачи, а точками показаны результаты, полученные по формулам (3.58). Для наибольших напряжений σ_1^u и σ_2^c погрешность приближенного решения составляет 0,5 % и 0,2 % соответственно, а для напряжения σ_2^u – около 8 %.

В качестве второго примера рассмотрим ту же самую сферическую оболочку, нагруженную по краю равномерно распределенными погонными радиальными силами N (рис.3.10).

Решение дифференциального уравнения (3.48) так же, как и в предыдущем случае, возьмем в виде (3.35).

Выражения для внутренних усилий и изгибающих моментов, действующих в сферической оболочке, имеют вид (3.56) и (3.57).

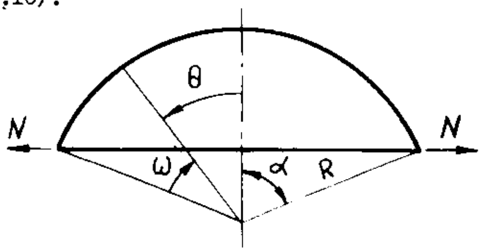

Рис.3.10. Сферическая оболочка, нагруженная по краю радиальными силами

Произвольные постоянные, входящие в решение (3.35), найдем из граничных условий на крае оболочки, которые можно записать в следующем виде:

$$\text{при} \quad \omega = 0 \qquad M_1 = 0, \qquad Q_1 = N \sin\alpha. \tag{3.59}$$

Подставляя (3.56), (3.57) и (3.53) в (3.59), получим

$$C_1 = NR\sin\alpha \qquad C_2 = -C_1.$$

В результате выражения для внутренних усилий и изгибающих моментов, возникающих в рассматриваемой сферической оболочке, запишутся так:

$$N_1 = N\sin\alpha \, \mathrm{ctg}(\alpha-\omega)\, e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega - \sin\beta\omega)$$

$$N_2 = 2N\beta\sin\alpha\, e^{-\beta\omega}\cos\beta\omega$$

$$Q_1 = N \sin\alpha \, e^{-\beta\omega}(\cos\beta\omega - \sin\beta\omega)$$

$$M_1 = -\frac{NR}{\beta} \sin\alpha \, e^{-\beta\omega} \sin\beta\omega$$

$$M_2 = -\mu \frac{NR}{\beta} \sin\alpha \, e^{-\beta\omega} \sin\beta\omega. \qquad (3.60)$$

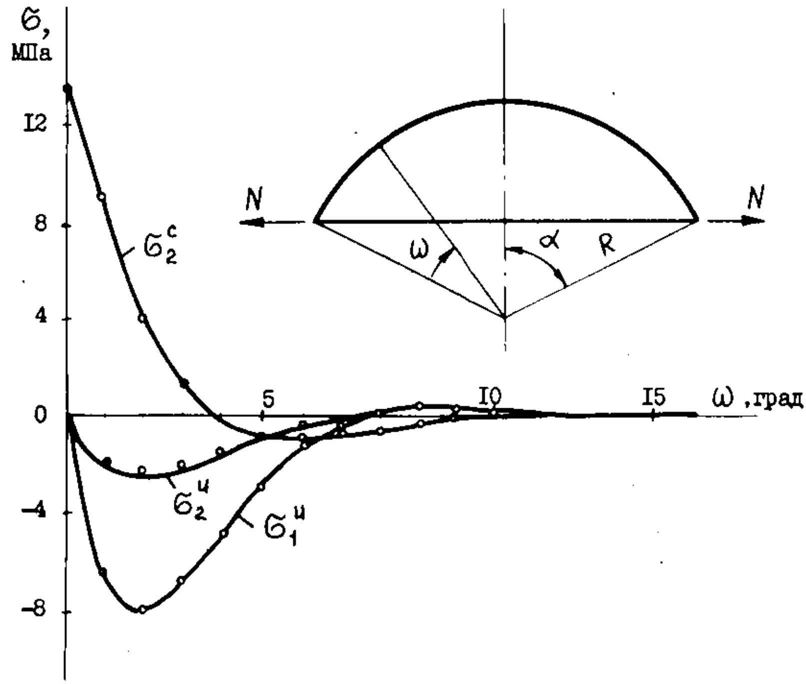

Рис.3.II. Распределение напряжений в сферической оболочке, нагруженной по краю радиальными силами

На рис.3.II показано распределение напряжений в рассматриваемой сферической оболочке для N = I Н/мм. Сплошные линии соответствуют точному решению задачи, а точками показаны результаты вычислений по формулам (3.60), соответствующим приближенной методике, описанной в настоящем параграфе. Погрешность вычислений наибольших напряжений σ_2^c и σ_1^u по сравнению с точным решением составляет 0,5 % и I % соответственно, а для напряжений σ_2^u – 8 %.

Таким образом, два рассмотренных примера демонстрируют достаточно высокую эффективность приближенного метода Штаермана-Геккелера.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

4.I. Дискретизация оболочки

Рассмотрим произвольную оболочку вращения при осесимметричном нагружении (рис.4.I). Произвольный характер изменения кривизны меридиана затрудняет применение аналитических методов расчета, рассмотренных в предыдущей главе. В связи с этим широкое распространение в настоящее время получили численные методы расчета, и в частности, метод конечных элементов /3,7/.

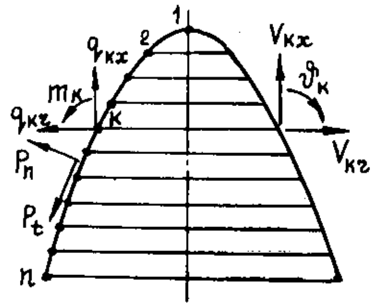

Рис.4.I. Дискретизация оболочки вращения

Рассмотрим применение метода конечных элементов к расчету оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Для этого мысленно разобьем оболочку плоскостями, перпендикулярными оси вращения, на ряд поясов (рис.4.I). Эти пояса и будут являться конечными элементами, а узлами – узловые окружности.

В качестве узловых перемещений выберем осевое перемещение узловой окружности V_{kx}, радиальное V_{kz} и угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки ϑ_k (рис.4.I). Тогда для произвольного узла k будем иметь матрицу узловых перемещений в виде

$$[V_k] = [V_{kx} \; V_{kz} \; \vartheta_k]^T. \tag{4.I}$$

На оболочку могут действовать нагрузки двух типов. Во-первых, распределенные поверхностные силы p_n и p_t, а во-вторых, равномерно распределенные по некоторым окружностям силы q_{kx}, q_{kr} и моменты m_k (рис.4.I). Поверхностную нагрузку, действующую в пределах каждого конечного элемента, следует привести к эквивалентным узловым силам. Равномерно распределенные по окружности силы и моменты будем рассматривать как внешние узловые силы. Кроме того, оболочка может находиться под действием осесимметричного температурного поля.

Оболочка может иметь подкрепление в виде кольцевых шпангоутов, которые рассматриваются как конечные элементы.

Если для каждого из конечных элементов мы будем располагать матрицами жесткости и матрицами эквивалентных узловых сил, то можно сформировать общую матрицу жесткости конструкции с учетом положенных на нее кинематических связей, а также матрицу нагрузок обычным образом, т.е. путем суммирования по всем конечным элементам компонентов, соответствующих перемещениям с одинаковыми индексами.

Перейдем далее к выводу жесткостных характеристик простейшего изопараметрического конечного элемента оболочки вращения и кольцевого шпангоута. Описание других, более сложных конечных элементов можно найти в /3,7/.

4.2. Матрица жесткости конечного элемента оболочки вращения в местной системе координат

Рассмотрим конечный элемент оболочки вращения с двумя узловыми окружностями, имеющий вид усеченного конуса (рис.4.2). Через x_i, r_i, x_j, r_j обозначим координаты узлов i и j. Координата x отсчитывается вдоль оси оболочки от некоторой начальной плоскости. Координаты произвольной точки на образующей оболочки могут быть выражены через значения координат узлов с помощью линейных соотношений

$$x = \sum_{k=i,j} \varphi_k x_k \; ; \qquad r = \sum_{k=i,j} \varphi_k r_k \; , \tag{4.2}$$

где $\varphi_k = \frac{1}{2}(1+\xi_k \xi)$ – так называемая функция формы.

Здесь ξ – безразмерная координата, изменяющаяся от -I до I при движении от узла i к узлу j и связанная с расстоянием S равенством

$$\xi = \frac{2S}{\ell} - 1 \,, \qquad (4.3)$$

где $\ell = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ - длина образующей элемента, ξ_κ - координата соответствующего узла ($\xi_i = -1$, $\xi_j = 1$). Функция $\varphi_\kappa(\xi)$ принимает в узле κ значение, равное единице, и обращается в нуль в другом узле (рис.4.3).

Для рассматриваемого элемента угол θ определяется равенствами

$$\sin\theta = \frac{x_j - x_i}{\ell}$$

$$\cos\theta = \frac{z_j - z_i}{\ell} \qquad (4.4)$$

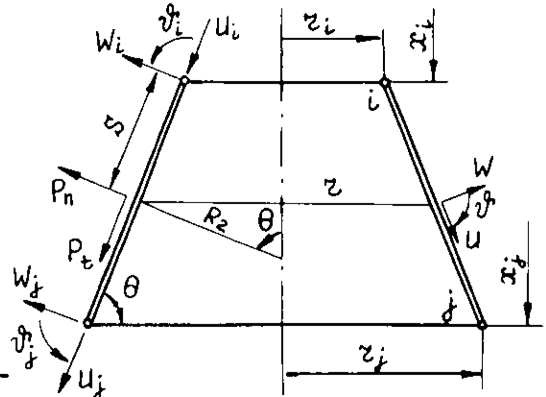

Рис.4.2. Конечный элемент оболочки вращения в форме усеченного конуса

Для построения эффективного конечного элемента в работе /II/ было предложено использовать независимую аппроксимацию для перемещений точек срединной поверхности и углов поворота нормали.

В соответствии с этим перемещения точек срединной поверхности и угол поворота нормали будем аппроксимировать в пределах элемента так же, как и координаты, линейными зависимостями:

$$U = \sum_{\kappa = i,j} \varphi_\kappa U_\kappa$$

$$W = \sum_{\kappa = i,j} \varphi_\kappa W_\kappa$$

$$\vartheta = \sum_{\kappa = i,j} \varphi_\kappa \vartheta_\kappa \,. \qquad (4.5)$$

Здесь U_κ, W_κ, ϑ_κ ($\kappa = i, j$) - узловые перемещения конечного элемента в местной системе координат (рис.4.2).

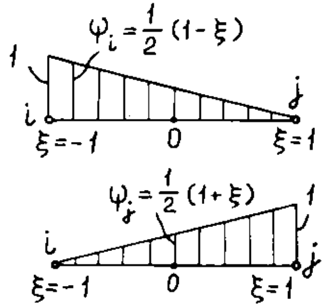

Рис.4.3. Функции формы конечного элемента

Деформации слоя оболочки, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности, в меридиональном и окружном направлениях определяются по формулам (3.5). Входящие в (3.5) деформации и изменения кривизн срединной поверхности оболочки (I.28) и (3.6) с учетом того, что для конуса $R_1=\infty$, $R_1 d\theta = dS$ и $r = R_2 \sin\theta$, могут быть записаны таким образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du}{dS}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r}\left(u\cos\theta + W\sin\theta\right)$$

$$\chi_1 = \frac{d\vartheta}{dS}, \qquad \chi_2 = \frac{1}{r}\,\vartheta\cos\theta \tag{4.6}$$

Помимо удлинений $\varepsilon_{11}^{(2)}$ и $\varepsilon_{22}^{(2)}$ в оболочке возникает также и деформация поперечного сдвига, которую мы обозначим через ε_{13}. Она равна изменению угла между нормалью к срединной поверхности оболочки и касательной к меридиану, и ее можно найти как сумму двух углов, один из которых равен ϑ, а второй есть угол поворота касательной. Через перемещения срединной поверхности угол поворота касательной выражается для конуса как $\frac{dW}{dS}$, так что для ε_{13} будем иметь

$$\varepsilon_{13} = \frac{dW}{dS} + \vartheta \tag{4.7}$$

Подставим (4.5) в (4.6) и (4.7). Переходя на основании равенства $dS = \frac{\ell}{2}d\xi$ к дифференцированию по ξ, получим

$$\varepsilon_{11} = \frac{2}{\ell}\sum_{k=i,j}\varphi_k' u_k, \qquad \varepsilon_{22} = \sum_{k=i,j}\varphi_k\left(\frac{\cos\theta}{r}u_k + \frac{\sin\theta}{r}W_k\right)$$

$$\varepsilon_{13} = \sum_{k=i,j}\left(\frac{2}{\ell}\varphi_k' W_k + \varphi_k\vartheta_k\right)$$

$$\chi_1 = \frac{2}{\ell}\sum_{k=i,j}\varphi_k'\vartheta_k, \qquad \chi_2 = \frac{\cos\theta}{r}\sum_{k=i,j}\varphi_k\vartheta_k . \tag{4.8}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по ξ.
Вводя матрицы

$$[\varepsilon^*] = \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\end{bmatrix} \qquad [\chi] = \begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}$$

$$[\bar{V}_i] = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \vartheta_i \end{bmatrix} \qquad [\bar{V}_j] = \begin{bmatrix} u_j \\ w_j \\ \vartheta_j \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

будем иметь согласно (4.8):

$$[\varepsilon^*] = \sum_{k=i,j} [\beta^*_{\varepsilon k}][\bar{V}_k]$$

$$[\varepsilon_{13}] = \sum_{k=i,j} [\tilde{\beta}_{\varepsilon k}][\bar{V}_k]$$

$$[\varkappa] = \sum_{k=i,j} [\beta_{\varkappa k}][\bar{V}_k], \tag{4.10}$$

где

$$[\beta^*_{\varepsilon k}] = \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{\ell} & 0 & 0 \\ \frac{1+\xi_k\xi}{2r}\cos\theta & \frac{1+\xi_k\xi}{2r}\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\beta}_{\varepsilon k}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\xi_k}{\ell} & \frac{1+\xi_k\xi}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\beta_{\varkappa k}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\xi_k}{\ell} \\ 0 & 0 & \frac{1+\xi_k\xi}{2r}\cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Черта сверху в обозначениях $[\bar{V}_k]$ указывает на то, что узловые перемещения взяты в местной системе координат.

Матрицу деформаций $[\varepsilon] = [\varepsilon^z_{11}\ \varepsilon^z_{22}\ \varepsilon_{13}]^T$, используя соотношения (4.10), можно выразить через узловые перемещения в следующем виде:

$$[\varepsilon] = \sum_{k=i,j} [\beta_k][\bar{V}_k], \tag{4.12}$$

где типовая подматрица $[\beta_k]$ равна

$$[\beta_k] = \begin{bmatrix} \beta^*_{\varepsilon k} \\ \tilde{\beta}_{\varepsilon k} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \beta_{\varkappa k} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Полученную связь между деформациями и узловыми перемещениями можно представить и в стандартной для метода конечных элементов форме $[\varepsilon] = [\beta][\bar{V}]$, если положить $[\bar{V}] = [V_i\, V_j]^T$, $[\beta] = [\beta_i\, \beta_j]$.

Нормальные напряжения могут быть выражены через деформации по формулам (3.7). Касательное напряжение σ_{13} выражается через деформацию сдвига

$$\sigma_{13} = \tilde{G}\,\varepsilon_{13}\,, \tag{4.14}$$

где для учета неравномерности напряжения σ_{13} по толщине оболочки /7/ принимается $\tilde{G} = \frac{5}{6} G$.

Из (3.7) и (4.14) получим связь между матрицей напряжений $[\sigma] = [\sigma_{11}\, \sigma_{22}\, \sigma_{13}]^T$ и деформаций $[\varepsilon]$:

$$[\sigma] = [\text{æ}][\varepsilon]\,, \tag{4.15}$$

где

$$[\text{æ}] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2}\,\text{æ}^* & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix} \qquad [\text{æ}^*] = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости конечного элемента в местной системе координат может быть записана в блочном виде следующим образом:

$$[\bar{K}^e] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix}$$

Для вычисления четырех блоков $[\bar{K}_{KS}]$ ($K, S = i, j$) воспользуемся формулой /3/:

$$[\bar{K}_{KS}] = \int_{\tau^e} [\beta_K]^T [\text{æ}][\beta_S]\, d\tau \tag{4.16}$$

Подставим сюда полученные выражения (4.13) и (4.15). Если положить $d\tau = 2\pi r\, dz\, dS = \pi \ell r\, dz\, d\xi$ и выполнить интегрирование по z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$, где h – толщина оболочки, то получим следующее выражение для $[\bar{K}_{KS}]$:

$$[\bar{K}_{KS}] = [K^*_{KS}] + [\tilde{K}_{KS}] \tag{4.17}$$

$$[K^*_{KS}] = \pi\ell \int_{-1}^{1} (B[\beta^*_{\varepsilon K}]^T [\text{æ}^*][\beta^*_{\varepsilon S}] + D[\beta_{\chi K}]^T [\text{æ}^*][\beta_{\chi S}])\, r\, d\xi \tag{4.18}$$

$$[\tilde{K}_{KS}] = \pi\ell\tilde{G} \int_{-1}^{1} [\tilde{\beta}_{\varepsilon K}]^T [\tilde{\beta}_{\varepsilon S}]\, r h\, d\xi \tag{4.19}$$

Здесь $B=\frac{Eh}{1-\mu^2}$, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ - жесткость оболочки на расстояние и изгиб соответственно.

При вычислении подматриц $[K^*_{ks}]$ и $[\tilde{K}_{rs}]$ по формулам (4.18) и (4.19) целесообразно /7, II/ пользоваться одноточечным интегрированием по схеме Гаусса.

Рассмотрим вопрос о приведении распределенных нагрузок p_t и p_n к эквивалентным узловым силам. Обозначим через $[p]=[p_t\ p_n]^T$ матрицу распределенных нагрузок, а через $[\alpha_u]$ - матрицу функций, аппроксимирующую перемещения $[u]=[u\ W]^T$ через узловые перемещения в соответствии с равенством $[u]=[\alpha_u][V]$. Матрица $[\alpha_u]$ может быть записана в блочной форме:

$$[\alpha_u]=[\alpha_{ui} \vdots \alpha_{uj}],$$

где типовая подматрица $[\alpha_{uk}]$ согласно (4.2) и (4.5) равна

$$[\alpha_{uk}]=\begin{bmatrix} \frac{1+\xi_k\xi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\xi_k\xi}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Отметим, что последний столбец в матрице $[\alpha_{uk}]$ нулевой, поскольку перемещения u и W не зависят от узловых значений угла поворота нормали.

Приравнивая работу эквивалентных узловых сил $[\bar{p}]=[\bar{p}_i\ \bar{p}_j]^T$ на узловых перемещениях $[\bar{V}]$ работе распределенных нагрузок $[p]$ на перемещениях $[u]$, мы придем к следующей формуле для $[\bar{p}]$:

$$[\bar{p}]=2\pi\int_0^{\ell}[\alpha_u]^T[p]\,r\,ds$$

Переходя к интегрированию по ξ и учитывая блочное представление матрицы $[\alpha_u]$, для типового блока $[\bar{p}_k]$ матрицы эквивалентных узловых сил будем иметь

$$[\bar{p}_k]=\pi\ell\int_{-1}^{1}[\alpha_{uk}]^T[p]\,r\,d\xi \tag{4.21}$$

Матрица $[\bar{p}_k]$ состоит из трех сил, действующих в направлении узловых перемещений u_k, W_k и ϑ_k. Как видно из (4.20) и (4.21), отличными от нуля будут лишь первые два компонента, узловые эквивалентные моменты оказываются для рассматриваемого конечного элемента равными нулю. Для вычисления интеграла (4.21) воспользуемся одноточечным интегрированием по Гауссу, которое приводит к следующим значениям матрицы $[\bar{p}_k]$:

$$[\bar{P}_K] = \pi \ell r_o \begin{bmatrix} P_{to} \\ P_{no} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Здесь P_{to}, P_{no} - значение нагрузок P_t и P_n в середине элемента, т.е. при $\xi = 0$, а $r_o = \frac{1}{2}(r_i + r_j)$- радиус соответствующего $\xi = 0$ параллельного круга.

При действии установившегося теплового поля, такого, что температура в оболочке изменяется по закону

$$T = T_{o(\xi)} + z\, T_{1(\xi)} \;,$$

где $T_o(\xi)$ - температура срединной поверхности оболочки, $T_{1(\xi)}$ - градиент температуры по нормали к поверхности, в оболочке возникнут температурные деформации, которые имеют вид:

$$[\varepsilon_T] = \alpha \left(T_{o(\xi)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\, T_{1(\xi)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \qquad (4.22)$$

Здесь α - коэффициент температурного расширения материала оболочки.

Связь между напряжениями и деформациями (4.I5) в этом случае примет вид

$$[\sigma] = [\varkappa]([\varepsilon] - [\varepsilon_T])$$

За счет температурных деформаций в узлах конечного элемента появятся эквивалентные узловые силы, которые для типового блока можно подсчитать / 3 / по формуле:

$$[\bar{P}_{TK}] = \int_{\tau_e} [\beta_K]^T [\varkappa][\varepsilon_T]\, d\tau \qquad (4.23)$$

Подставим в (4.23) выражения (4.I3) и (4.22). Интегрирование по координате z осуществим аналитически, а при интегрировании по координате ξ воспользуемся одноточечным правилом по Гауссу. В результате получим:

$$[\bar{P}_{TK}] = 2\pi \ell r_o \alpha B(1+\mu) \begin{bmatrix} T_o(0) \;\; \left(\frac{\xi_K}{\ell} + \frac{1}{2r_o}\cos\theta\right) \\ T_o(0) \;\; \frac{1}{2r_o}\sin\theta \\ T_1(0) \;\; \frac{h^2}{12}\left(\frac{\xi_K}{\ell} + \frac{1}{2r_o}\cos\theta\right) \end{bmatrix}, \qquad (4.24)$$

где $T_o(0)$, $T_1(0)$ - значения температуры T_o и градиента температуры T_1 в середине конечного элемента, т.е. при $\xi = 0$.

Для нормальных погонных усилий N_1 и N_2 в срединной поверхности оболочки, а также для изгибающих погонных моментов введем следующие матричные обозначения:

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \qquad [M]=\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Эти величины могут быть выражены через узловые перемещения по формулам:

$$[N]=B\left\{[æ^*]\sum_{k=i,j}[\beta^*_{\varepsilon k}][\bar{V}_k]-(1+\mu)\alpha T_0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$[M]=D\left\{[æ^*]\sum_{k=i,j}[\beta_{æk}][\bar{V}_k]-(1+\mu)\alpha T_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad (4.25)$$

Мембранные напряжения в срединной поверхности $[\sigma^c]=[\sigma^c_1\ \sigma^c_2]^T$ и изгибные напряжения на внешней поверхности оболочки $[\sigma^u]=[\sigma^u_1\ \sigma^u_2]^T$ могут быть записаны следующим образом:

$$[\sigma^c]=\frac{1}{h}[N] \qquad [\sigma^u]=\frac{6}{h^2}[M].$$

4.3. Матрица жесткости шпангоута. Преобразование координат

Шпангоут (рис.4.4) будем рассматривать как тонкое круговое кольцо. Поперечное сечение кольца считается недеформируемым: пренебрегается также эффектом надавливания волокон друг на друга.

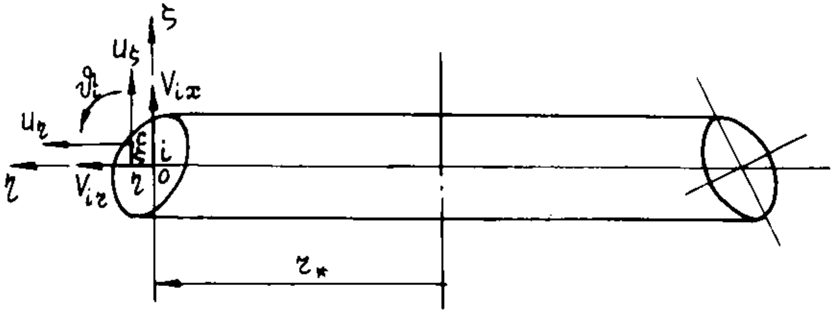

Рис.4.4. Конечный элемент в виде кольца и его поперечное сечение

Обозначим через r_* радиус окружности, проходящей через центр тяжести поперечного сечения кольца, а через F и J_η – соответственно площадь его поперечного сечения и момент инерции сечения относительно центральной оси, лежащей в плоскости кольца. Окружность, проходящую через центр тяжести поперечного сечения шпангоута, будем считать узловой с номером i, а сам шпангоут будем рассматривать как конечный элемент.

Обозначив через V_{ir}, осевое и радиальное перемещения центра тяжести, а через ϑ_i – угол поворота сечения, введем матрицу

$$[V_i] = [V_{ix} \; V_{ir} \; \vartheta_i]^T \tag{4.26}$$

Перемещения u_η, u_ζ произвольной точки C поперечного сечения шпангоута выражаются через V_{ix}, V_{ir} и ϑ_i следующим образом (см. рис.4.4):

$$u_\eta = V_{ir} + \zeta\vartheta_i, \quad u_\zeta = V_{ix} - \eta\vartheta_i \tag{4.27}$$

или в матричной форме:

$$[u] = [\alpha][V_i], \tag{4.28}$$

где

$$[u] = \begin{bmatrix} u_\eta \\ u_\zeta \end{bmatrix} \qquad [\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \zeta \\ 1 & 0 & -\eta \end{bmatrix}$$

Деформация ε в окружном направлении:

$$\varepsilon = \frac{u_\eta}{r_*} = \frac{1}{r_*} V_{ir} + \frac{\zeta}{r_*}\vartheta_i$$

или

$$\varepsilon = [\beta][V_i], \tag{4.29}$$

где

$$[\beta] = [0 \;\; \frac{1}{r_*} \;\; \frac{\zeta}{r_*}] \tag{4.30}$$

Если для произвольного элемента установлена зависимость типа (4.29), то матрица жесткости шпангоута $[K_*]$ может быть вычислена по формуле

$$[K_*] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [E][\beta]\, d\tau, \tag{4.31}$$

где τ^e – объем конечного элемента, $[E]$ – матрица упругости, связывающая матрицу деформаций и напряжений соотношением

$$[\sigma] = [E][\varepsilon]$$

В нашем случае имеет место одноосное напряженное состояние, так что матрицы $[\sigma]$, $[E]$ и $[\varepsilon]$ превращаются в скалярные величины σ, E_* и ε.

Подставляя (4.30) в (4.31) и полагая $d\tau^e = 2\pi r_* dF$, где dF – элемент площади поперечного сечения, находим

$$[K_*] = \frac{2\pi E_*}{r_*}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & J_\eta \end{bmatrix} \qquad (4.32)$$

Для составления общей матрицы жесткости конструкции необходимо перейти к общей системе координат. Узловые перемещения типового узла K конструкции в общей системе координат имеют вид (4.1).

В том месте, где элементы оболочки соединяются со шпангоутом, будем вводить один общий узел, совпадающий с центром тяжести сечения шпангоута (рис.4.5). Узловые перемещения шпангоута согласно (4.26) совпадают с узловыми перемещениями конструкции в общей системе координат. На рис.4.5 показано соединение конечного элемента оболочки со шпангоутом в узле i.

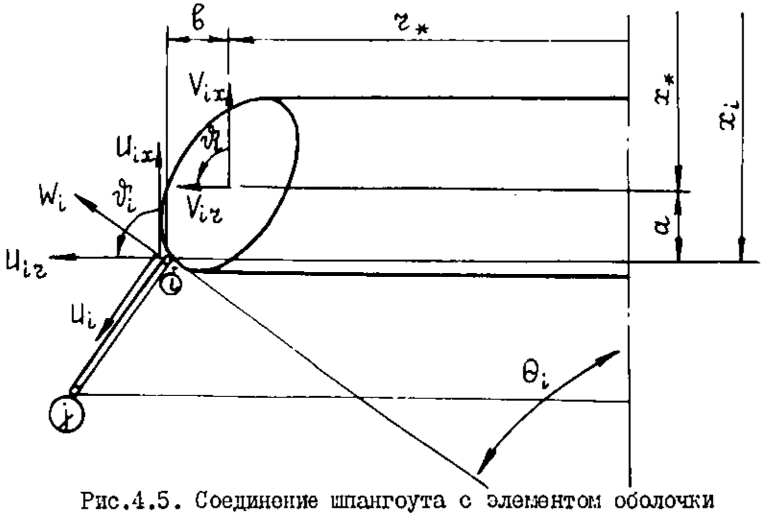

Рис.4.5. Соединение шпангоута с элементом оболочки

Поперечное сечение шпангоута считается недеформируемым, так что угол поворота этого сечения равен углу поворота нормали оболочки в узле i. Обозначим через a и b размеры, характеризующие расстояние узла i конечного элемента оболочки от центра тяжести сечения шпангоута

$$a = x_i - x_*, \quad b = r_i - r_* . \tag{4.33}$$

Осевое u_{ix} и радиальное u_{ir} перемещения узла i элемента оболочки связаны с перемещениями центра тяжести сечения шпангоута соотношениями

$$u_{ix} = V_{ix} - b\vartheta_i , \quad u_{ir} = V_{ir} - a\vartheta_i$$

Спроектировав эти перемещения на касательное и нормальное к меридиану направления, будем иметь

$$u_i = -u_{ix}\sin\theta_i + u_{ir}\cos\theta_i =$$

$$= -V_{ix}\sin\theta_i + b\vartheta_i\sin\theta_i + V_{ir}\cos\theta_i - a\vartheta_i\cos\theta_i ,$$

$$W_i = u_{ix}\cos\theta_i + u_{ir}\sin\theta_i =$$

$$= V_{ix}\cos\theta_i - b\vartheta_i\cos\theta_i + V_{ir}\sin\theta_i - a\vartheta_i\sin\theta_i .$$

Добавив сюда тождество $\vartheta_i = \vartheta_i$, представим эти результаты в таком виде:

$$[\bar V_i] = [\lambda_i][V_i] . \tag{4.34}$$

Матрица $[\lambda_i]$ оказывается при этом равной

$$[\lambda_i] = \begin{bmatrix} -\sin\theta_i & \cos\theta_i & -(a\cos\theta_i - b\sin\theta_i \\ \cos\theta_i & \sin\theta_i & -(a\sin\theta_i + b\cos\theta_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

При отсутствии шпангоута в указанном узле следует в (4.35) считать $a = b = 0$.

Если ввести для конечного элемента оболочки матрицы

$$[\bar V] = [\bar V_i \ \bar V_j]^T \quad \text{и} \quad [V^e] = [V_i \ V_j]^T ,$$

то можно записать

$$[\bar V] = [\lambda][V^e] , \tag{4.36}$$

где

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Типовой блок $[P_\kappa]$ матрицы эквивалентных узловых сил в общей системе координат состоит из трех сил, действующих в направлении $V_{\kappa x}$, $V_{\kappa r}$ и ϑ_κ. Эту матрицу можно выразить так:

$$[P_\kappa] = [\lambda_\kappa]^T [\bar{P}_\kappa] \tag{4.37}$$

Типовой блок матрицы жесткости конечного элемента оболочки (4.17) при переходе к общей системе координат преобразуется следующим образом:

$$[K^e_{\kappa s}] = [\lambda_\kappa]^T [\bar{K}_{\kappa s}][\lambda_s] \tag{4.38}$$

Если помимо рассмотренных выше поверхностных нагрузок P_t, P_n к оболочке приложены также силы и моменты, равномерно распределенные по узловым окружностям, то из них следует дополнительно сформировать матрицу $[\tilde{P}_\kappa]$:

$$[\tilde{P}_\kappa] = 2\pi r_\kappa \begin{bmatrix} q_{\kappa x} \\ q_{\kappa r} \\ m_\kappa \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

При действии на оболочку температурного поля в узлах, где имеются шпангоуты, необходимо добавить радиальную нагрузку

$$q_r = 2\pi\alpha T E_* F,$$

обусловленную температурной деформацией самого шпангоута.

Формирование общих матриц жесткости конструкции $[K]$ и нагрузок $[P]$ осуществляется обычным образом путем суммирования по всем конечным элементам (включая шпангоуты) компонентов, соответствующих перемещениям с одинаковыми индексами.

4.4. Реализация и сходимость расчетов

С использованием вышеописанных конечных элементов на кафедре прочности летательных аппаратов КуАИ разработана программа расчета на ЭВМ подкрепленных шпангоутами оболочек вращения при осесимметричном нагружении /8/. Программа написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН-4, реализована на машинах ЕС-ЭВМ, СМ-4 и БЭСМ-6 и ориентирована на использование только оперативной памяти ЭВМ, что обеспечивает высокое ее быстродействие. Для сокращения объема исходной информации в программе предусмотрено автоматическое разбиение оболочки на конечные элементы. По любым узловым окружностям могут быть приложены силы и моменты, образующие матрицу (4.39), и наложены кинематические связи на узловые перемещения (4.26), заключающиеся в требовании равенства их нулю. Кроме того, на оболочку может действовать нормальное давление p_n либо температурное поле T. Для каждого из конечных элементов на печать выдаются значения узловых перемещений и значения мембранных и изгибных напряжений в средине элемента, т.е. при $\xi = 0$.

Рассмотрим результаты расчетов ряда простейших задач, которые позволят нам оценить сходимость решения по методу конечных элементов к точному. В качестве первого примера возьмем кольцевую пластину, свободно опертую по внешнему контуру и нагруженную по внутреннему контуру поперечной нагрузкой (рис.4.6). При вычислениях были приняты следующие значения параметров: $r_o = 50$ мм, $r_1/r_o = 5$, $h = 3$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $p = 1$ н/мм.

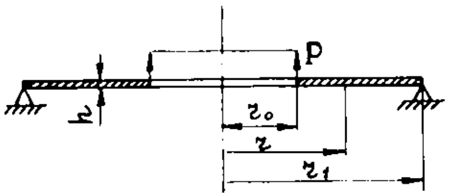

Рис.4.6. Кольцевая пластина

Расчеты проводились для четырех вариантов равномерного разбиения пластины на конечные элементы (табл.4.I) и сравнивались с точным аналитическим решением /9/. На рис.4.7 и 4.8 сплошными линиями показано точное решение задачи, а точками - результаты по методу конечных элементов для четырех различных вариантов разбиения пластины. В таблице 4.I приведены погрешности вычисления максимальных прогибов пластины и изгибающих напряжений σ_2^u. При разбиении пластины на 16 конечных элементов погрешность вычисления наибольших напряжений составляет около 0,5 %. Погрешность вычисления напряжений σ_1^u несколько выше, как это видно из рис.4.7, но сами эти напряжения значительно меньше, чем σ_2^u.

В качестве второго примера рассмотрим оболочку в виде полусферы, нагруженную силой P через жесткий центр в вершине (рис.4.9).

При вычислениях приняты следующие значения параметров: $R = 100$ см, $h = 0,2$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $P = 1$ кН, $\alpha = 10^o$.

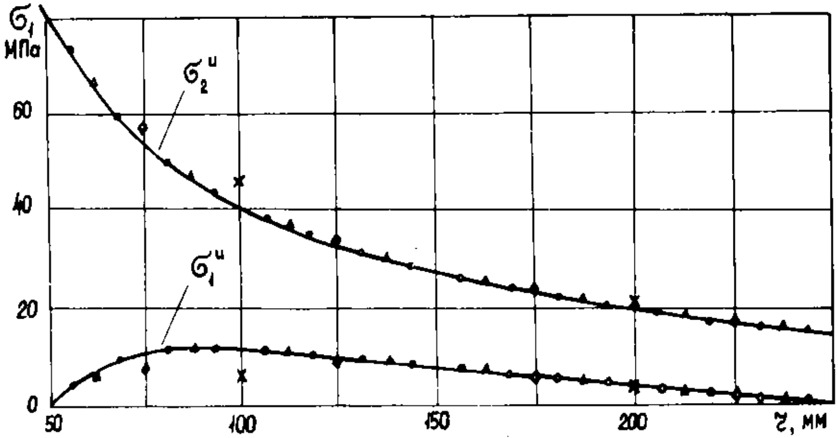

Рис.4.7. Распределение напряжений в кольцевой пластине
——— точное решение; x – 2 конечных элемента;
◊ – 4 конечных элемента; Δ – 8 конечных элементов;
o – I6 конечных элементов

Таблица 4.I

Погрешности расчета кольцевой пластины

№ варианта	Количество конечных элементов	Количество степеней свободы	Погрешность вычисления W_{max}, %	Погрешность вычисления напряжений σ_2^u, %
I	2	8	8,6	27,68
2	4	I4	2,I9	I4,9
3	8	26	0,32	5,6
4	I6	50	0,02	0,5

Расчеты проводились для трех вариантов сетки разбиения оболочки на конечные элементы, характеристика которых приведена в таблице 4.2.

На рис.4.I0 и 4.II сплошными линиями показано распределение изгибающих и мембранных напряжений в сферической оболочке, соответствующее точному решению. Точками на графиках обозначены результаты

Таблица 4.2

Характеристики сетки разбиения

№ варианта	Общее количество к.э.	Количество конечных элементов на участках		
		$10^0 \div 15^0$	$15^0 \div 30^0$	$30^0 \div 90^0$
I	8	2	2	4
2	I6	5	5	6
3	32	I0	I0	I2

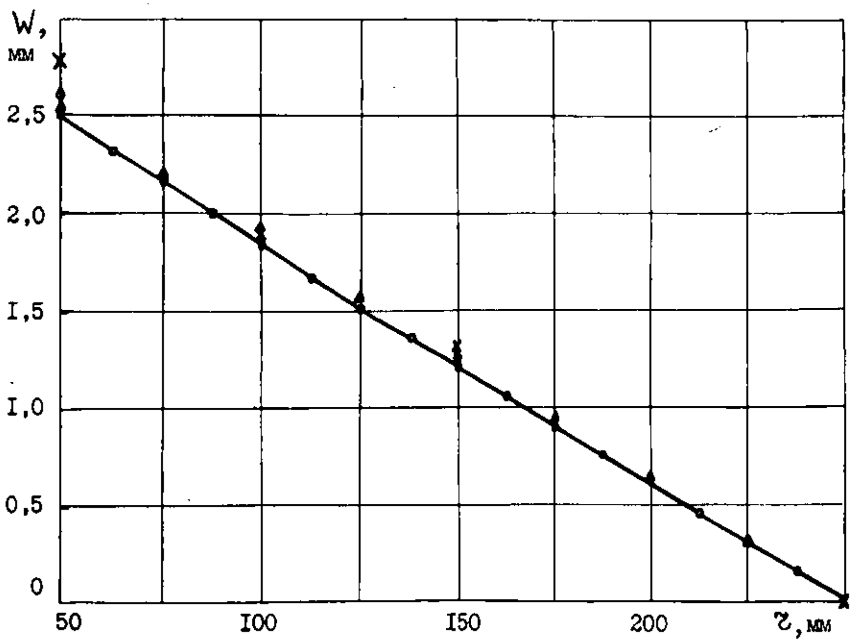

Рис.4.8. Распределение прогиба в кольцевой пластине
——— точное решение; × – 2 конечных элемента; ◊ – 4 конечных элемента; Δ – 8 конечных элементов; о – I6 конечных элементов

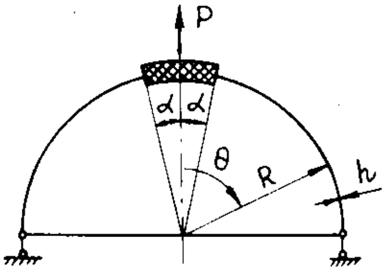

Рис.4.9. Сферическая оболочка

расчетов для указанных выше сеток разбиения. Для рассматриваемой задачи погрешность вычисления смещения жесткого центра составила 1,7 %, 0,28 % и 0,07 % для трех вариантов соответственно (рис.4.12).

Приведенные числовые результаты показывают высокую эффективность рассмотренных конечных элементов, обеспечивающих хорошую сходимость численного расчета к точному.

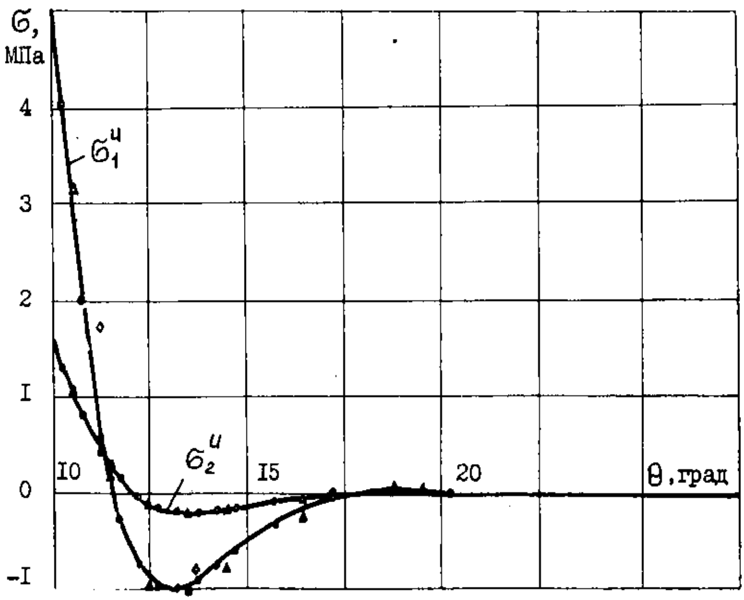

Рис.4.10. Распределение изгибных напряжений в сферической оболочке:
—— точное решение; ◊ – 8 конечных элементов; Δ – 16 конечных элементов; o – 32 конечных элемента

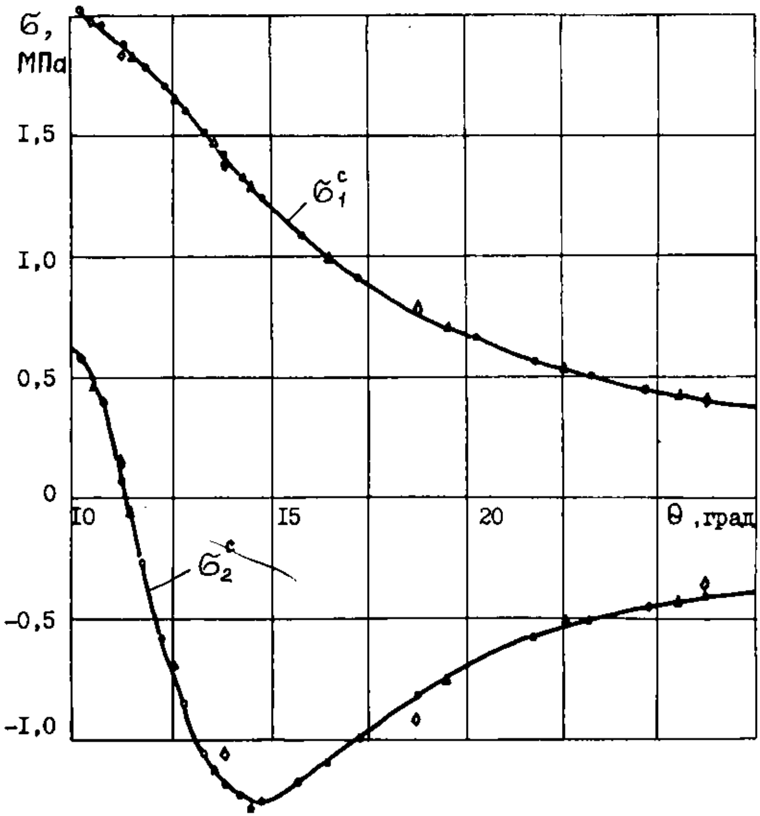

Рис.4.11. Распределение мембранных напряжений в сферической оболочке: ——— точное решение; ● – 32 конечных элемента; ▲ – 16 конечных элементов; ◆ – 8 конечных элементов

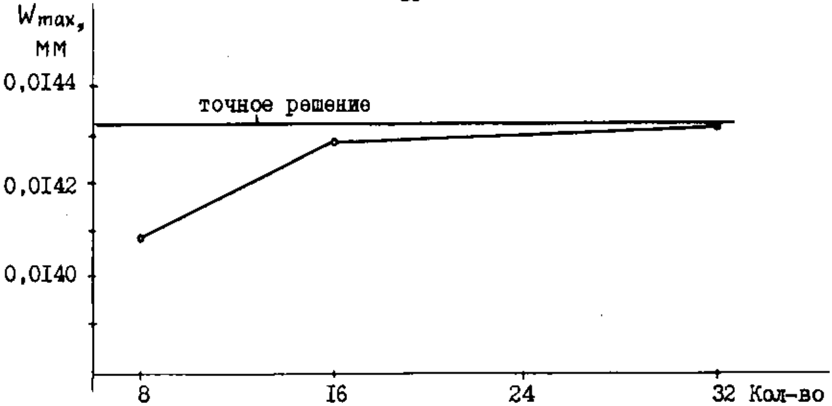

Рис.4.12. Сходимость расчетов по прогибам в зависимости от густоты сетки конечных элементов

Литература

1. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 454 с.

2. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы.– М.: Наука, 1964. – 228 с.

3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Гостехиздат, 1953.

5. Леонов В.И. Расчет элементов авиаконструкций типа ортотропных и трехслойных пластин:Учебное пособие.–Куйбышев:КуАИ,1983.–61с.

6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Суднромгиз, 1962. – 431 с.

7. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.

8. Расчет на ЭВМ круглых пластин и оболочек вращения при осесимметричном нагружении методом конечных элементов: Учебно-метод. указания по курсу строит. мех. лет. аппаратов и теория упругости Автор-составитель В.И.Леонов. – Куйбышев: КуАИ, 1985. – 29 с.

9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.– М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

10. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1975. – 256 с.

11. Zienkiewicz O.C., Bauer J., Morgan K., Onate E. A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells.- Int. Jour. for Numer. Meth. in Engine, 1977, v.11, p.1545-1558.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Св. тем. план 1987, поз.73

ВИКТОР ИВАНОВИЧ ЛЕОНОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В ВИДЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Редактор Л.М.Карпова

Подписано в печать 24.07.87 г. Е006164.
Формат 60x84 1/16. Бумага оберточная белая.
Оперативная печать. Физ. п.л. 5,5.
Усл. п.л. 5,1 . Уч.-изд.л. 5,0 . Тираж 1000 экз.
Заказ № 6990 . Цена 20 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени С.П.Королева
г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, 151

Куйбышевское полиграфическое объединение,
г.Куйбышев, ул.Венцека, 60