

А.С. АВДОНИН

ПРИКЛАДНЫЕ
МЕТОДЫ
РАСЧЕТА
ОБОЛОЧЕК
И ТОНКОСТЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ

МАШИНОСТРОЕНИЕ • 1969

А. С. АВДОНИН

539.3

A-18

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ
РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК
И ТОНКОСТЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ

49214



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1969

В книге рассмотрен широкий круг задач по расчету оболочек вращения и элементов тонкостенных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при различных видах силового воздействия. Многие из этих задач возникли за последние годы в связи с развитием новой техники. К числу таких задач относятся, например, расчеты всевозможных торовых оболочек, нагруженных внутренним давлением, сферических оболочек, нагруженных локальными нагрузками, и т. д.

Задачи устойчивости оболочек в книге даются в новой постановке, в основу которой лежит тот факт, что на контуре ямок и выпучия, образующихся в результате потери устойчивости, имеют место естественные граничные условия. Эти условия на контуре полуволи определяются условиями нагружения и предполагаемой формой потери устойчивости.

Новый подход к этим задачам уточняет и расширяет представление об устойчивости оболочек и дает возможность решать практически важные задачи.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров авиационной и других отраслей промышленности и может быть полезна студентам вузов.

Табл. 14. Иллюстр. 233. Библ. 30 назв.

Рецензент д-р техн. наук, проф. С. Н. Кан

Редактор канд. техн. наук А. И. Свердлов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в распоряжении инженера-расчетчика имеется ряд фундаментальных трудов по теории пластин, тонких упругих оболочек и тонкостенных пространственных систем, авторами которых являются известные советские ученые (В. З. Власов, В. В. Новожилов, И. Ф. Образцов, С. Н. Кан, В. И. Феодосьев, А. С. Вольмир и др.).

В этих трудах изложены не только общие принципы и методы расчета пластин, оболочек и тонкостенных конструкций, но и приведены решения многих практически важных задач, с которыми сталкивается инженер в процессе проектирования и расчета летательного аппарата.

Настоящая книга содержит решения многочисленных новых задач, возникших за последние годы в связи с развитием конструкций летательных аппаратов. Для некоторых из них, в основном задач по прочности и устойчивости оболочек вращения, найти рациональные решения в рамках существующей теории оболочек весьма затруднительно. Для получения эффективного инженерного решения необходимо использовать некоторые дополнительные упрощения, вытекающие из анализа действительной работы конструкции. Конечно, введение таких упрощений делает решение сложной задачи менее строгим, но зато дает возможность использовать его непосредственно в процессе проектирования. А это именно та основная цель, которую преследовал автор. Приведенные в книге решения некоторых наиболее сложных задач получены без оценок точности величин компонентов напряженного и деформированного состояния конструкций.

Вопросы теории в книге затрагиваются лишь в том ограниченном объеме, в каком они необходимы для пояснения решений тех или иных задач.

Для получения численных результатов в книге широко показывается энергетический метод, эффективность которого показана на многочисленных примерах.

Книга состоит из трех разделов. В небольшом разделе «Прочность и устойчивость стержней и пластин» читатель знакомится с наиболее распространенными прикладными методами решения типичных задач строительной механики, которые иллюстри-

руются примерами расчета стержней и пластин. В дальнейшем эти методы используются в остальных разделах книги при решении задач прочности и устойчивости оболочек. Кроме того, в этом разделе приведены некоторые новые результаты по расчету круглых и квадратных мембран.

Раздел «Прочность оболочек» посвящен расчетам на прочность и жесткость гладких и подкрепленных оболочек вращения при различных видах силовых воздействий. В этом же разделе приведены решения некоторых задач расчета на прочность тонкостенных пространственных систем.

Последний раздел посвящен вопросам устойчивости оболочек. При рассмотрении этих вопросов автор основывался на своей трактовке проблемы устойчивости оболочек. Некоторым читателям, привыкшим к традиционным методам исследования задач устойчивости, эта трактовка может показаться спорной. Однако многочисленные экспериментальные результаты, полученные в последнее время при испытании моделей цилиндрических оболочек отечественными и зарубежными исследователями, удовлетворительно согласуются с результатами расчетов, полученными на основании теоретических предпосылок автора.

Автор с благодарностью примет все замечания читателей, направленные на улучшение книги. Направлять их следует в адрес издательства (Москва, К-51, Петровка, 24).

Автор выражает благодарность А. Н. Елпатьевскому и А. И. Свердлову за ценные замечания, сделанные ими при просмотре и редактировании рукописи.

Раздел I

ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

Глава I

ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И МЕМБРАН

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН МАЛОГО ПРОГИБА

Под пластинами малого прогиба понимают такие пластины, прогибы которых, отсчитываемые от срединной плоскости¹, малы по сравнению с толщиной пластины. В таких пластинах мембранными напряжениями в срединной поверхности² можно пренебречь в сравнении с напряжениями изгиба.

В основе исследования этих пластин в пределах упругих деформаций лежит следующее дифференциальное уравнение:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (1.1)$$

где w — искомый прогиб в любой точке пластины;
 q — интенсивность внешней нагрузки;

$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины;
 δ — толщина пластины;
 μ — коэффициент Пуассона.

Изгибающие и крутящие моменты определяются по формулам³

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$
$$M_{xy} = -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

¹ Плоскость, разделяющая толщину пластины пополам, называется срединной.

² Срединная плоскость после изгиба пластины называется срединной поверхностью.

³ В этих формулах прогиб считается положительным, если он направлен в сторону вогнутости срединной поверхности пластины.

Наибольшие значения нормальных напряжений имеют место у поверхности пластины и равны

$$\sigma_{x \max} = \pm \frac{6M_x}{z^2}, \quad \sigma_{y \max} = \pm \frac{6M_y}{z^2}, \quad \sigma_{xy \max} = \pm \frac{6M_{xy}}{z^2}.$$

При решении уравнения (1.1) необходимо задать четыре граничных условия в направлении каждой оси координат. Эти условия могут быть следующими.

1. Край свободно оперт (рис. 1).

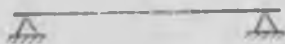


Рис. 1.



Рис. 2.

В этом случае на краю пластины должны быть равны нулю прогиб w и изгибающий момент M_x (или M_y):

$$w=0, \quad M_x=0 \quad (\text{или} \quad M_y=0).$$

2. Край жестко заделан (рис. 2).

В этом случае должны быть равны нулю прогиб и угол поворота:

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad (\text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0).$$

3. Край свободен (рис. 3).

В этом случае на краю должны обращаться в нуль изгибающий момент и перерезывающие усилия:

$$M_x=0 \quad (\text{или} \quad M_y=0),$$

$$V_x=0 \quad (\text{или} \quad V_y=0).$$

Перерезывающие усилия через прогиб выражаются следующими формулами:

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right],$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right].$$

4. Край упруго оперт на балку с жесткостью на изгиб EJ и жесткостью на кручение C . В этом случае граничные условия на краю $x=a$ будут (рис. 4):

$$EJ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = (V_x)_{x=a} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right].$$

Второе условие будет состоять в равенстве изгибающего момента пластины и крутящего момента балки:

$$C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = (M_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a}.$$

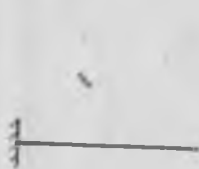


Рис. 3.

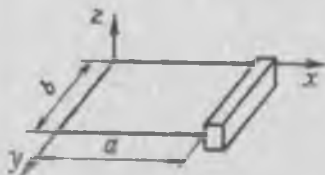


Рис. 4.

Аналогично, если край $x=0$ упруго оперт,

$$EJ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_{x=0} = (V_x)_{x=0} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0},$$

$$C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0} = (M_x)_{x=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0}.$$

§ 2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Метод двойных тригонометрических рядов

Этот метод особенно удобен для свободно опертых по контуру пластин. Искомый прогиб пластины разыскивается в норме двойного тригонометрического ряда, каждый член которого удовлетворяет граничным условиям задачи и снабжен неопределенным коэффициентом.

В аналогичный ряд раскладывается и действующая на пластину нагрузка, причем в практически встречающихся случаях никаких ограничений на характер нагрузки не накладывается, т. е. она может быть как распределенной, так и в виде сосредоточенных сил.

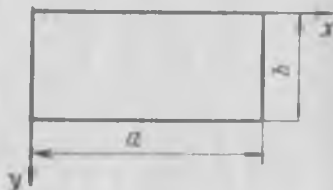


Рис. 5.

После подстановки принятого выражения для прогиба w и представленного двойным рядом действующей на пластину нагрузки в уравнение (1.1) можно определить все коэффициенты в w .

Например, для свободно опертой по всему контуру пластины

со сторонами a и b , находящейся под действием равномерной нагрузки q (рис. 5), примем

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Составим от этого выражения необходимые производные и подставим их в уравнение (1.1). Тогда

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q. \quad (1.2)$$

Теперь разложим в ряд по синусам правую часть этого уравнения

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Для определения коэффициентов B_{mn} умножим правую и левую части последнего выражения на $\sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy$ и проинтегрируем по всей площади пластины. Учитывая при этом ортогональность тригонометрических функций на интервале интегрирования

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{при } m=m' \\ 0 & \text{при } m \neq m' \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{b}{2} & \text{при } n=n' \\ 0 & \text{при } n \neq n', \end{cases}$$

получим

$$B_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn}.$$

Тогда

$$q = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Если бы нагрузка была приложена на ограниченном участке поверхности пластины, то интегрирование в левой части разложения q необходимо было бы производить только в пределах этого участка, так как вне его всюду $q \equiv 0$.

Из уравнения (1.2) получим выражение для коэффициентов A_{mn} .

$$A_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 D m n \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}.$$

Тогда выражение для прогиба примет вид

$$w = \frac{16q}{\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}.$$

Подставляя соответствующие производные от прогиба в выражения для моментов, можно определить напряжения σ_x и σ_y в любой точке пластины. При этом полученные ряды будут сходиться медленнее, чем ряд исходный. Например, ряды для напряжений в точке приложения сосредоточенной силы будут даже расходящимися.

Суммирование двойных рядов производят для заданного значения $x=a_1$, $y=b_1$ следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a_1}{a} \sin \frac{n\pi b_1}{b}}{m n \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} =$$

$$= U_{11} + U_{12} + U_{13} + \dots + U_{21} + U_{22} + \dots + U_{31} + U_{32} + U_{33} + \dots$$

Метод Бубнова—Галеркина

Для решения уравнения (1.1) методом Бубнова—Галеркина задаются подходящим выражением для прогиба в форме ряда функций с неопределенными коэффициентами

$$w = A_1 \varphi_1(x, y) + A_2 \varphi_2(x, y) + \dots, \quad (1.3)$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, ... — линейно-независимые функции, удовлетворяющие всем граничным условиям задачи и более или менее правильно отображающие форму деформированной поверхности пластины.

Неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots$ определяются из уравнения

$$\iint_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \varphi_i dx dy = 0 \quad (1.4)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Интегрирование в уравнении (1.4) производится по всей площади пластины. При этом получается столько уравнений, сколько неопределенных коэффициентов A_i . Результат решения задачи будет тем точнее, чем больше членов в выражении (1.3).

Пример. Рассмотрим изгиб жестко заделанной прямоугольной пластины постоянной нагрузкой q (рис. 6).

Граничным условиям задачи можно удовлетворить, если для прогиба w принять выражение

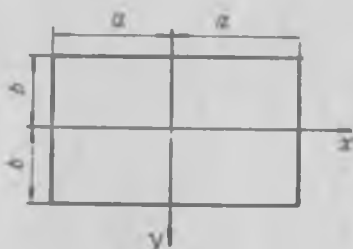


Рис. 6.

$$w = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + \dots,$$

где

$$\varphi_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2,$$

$$\varphi_2 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^3$$

$$\dots$$

$$\dots$$

Ограничиваясь первым приближением, примем

$$w = A_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

Составим от этого выражения соответствующие производные и подставим их в уравнение Бубнова—Галеркина (1.4):

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \{ 8DA_1 [3(x^2 - a^2)^2 + 4(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2) + 3(y^2 - b^2)^2] - q \} \times \\ \times (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy = 0.$$

После интегрирования получим следующее выражение для A_1 :

$$A_1 = \frac{7q}{128D \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right)}$$

Тогда для прогиба w будем иметь

$$w = \frac{7q (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{128D \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right)}$$

В рассмотренной задаче функция w должна была удовлетворять только геометрическим граничным условиям. Поэтому ее легко было подобрать. В случае смешанных условий на границе такую функцию подобрать трудно, поэтому целесообразно пользоваться обобщенным уравнением метода Бубнова—Галеркина в следующем виде:

$$\iint_D \left(D \nabla^2 \nabla^2 w - g \right) \delta w dx dy + \int \left[M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dy + \\ + \int \left[M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx + \int (V_x \delta w) dy + \int (V_y \delta w) dx = 0,$$

где одинарные интегралы берутся вдоль границы области. При пользовании этим уравнением необходимо удовлетворять всем геометрическим и необязательно всем силовым граничным условиям задачи, так как приведенное уравнение выражает собою равенство нулю первой вариации полной энергии, а на основании начала возможных перемещений этого вполне достаточно для равновесия любой механической системы. Об этом более подробно см. § 3.

Метод Канторовича—Власова

Этот метод более точный, чем метод Бубнова—Галеркина, и состоит он в следующем. Чтобы избежать интегрирования уравнений в частных производных, решение разыскивают в форме произведения двух функций

$$w = X(x) Y(y),$$

когда одна из них подбирается заранее так, чтобы были удовлетворены граничные условия задачи. При этом для определения второй функции подставляют принятое выражение для w в уравнение (1.1). Умножают его на выбранную функцию и интегрируют в пределах изменения данной функции. Например, при выбранной функции $Y(y)$ указанное уравнение примет следующий вид, аналогичный по форме уравнениям метода Бубнова—Галеркина:

$$\int [D \{X^{IV}(x) Y(y) + 2X''(x) Y''(y) + X(x) Y^{IV}(y)\} - q] Y(y) dy = 0. \quad (1.5)$$

Отсюда после интегрирования получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $X(x)$.

Принятое выражение для искомой функции w можно подставить и в функционал полной потенциальной энергии данной задачи. После интегрирования этого функционала по переменной выбранной функции и применения к нему после этого известных правил вариационного исчисления можно получить уравнение для определения неизвестной функции $X(x)$.

Пример. Пусть имеется пластина, нагруженная равномерно распределенным давлением с жестко зашпеленными двумя противоположными сторонами, а две другие стороны как угодно заделаны.

Возьмем для решения этой задачи первое приближение, использованное нами при иллюстрации метода Бубнова—Галеркина. В методе Канторовича—Власова выражение для прогиба можно взять в виде двух форм:

$$w = W(x) (y^2 - b^2)^2$$

или

$$w = (x^2 - a^2)^2 W(y).$$

Примем первое из этих выражений, которое удовлетворяет условию жесткой заделки по концам $y = \pm b$.

Составим необходимые производные от этого выражения и подставим их в уравнение (1.5):

$$\int_{-b}^b \{D(y^2 - b^2)^2 W^{IV}(x) + 8(3y^2 - b^2) W^{II}(x) + 24W(x) - q\} (y^2 - b^2) dy = 0.$$

После интегрирования этого уравнения в указанных пределах получим

$$\frac{16b^4}{63} W^{IV}(x) - \frac{32}{63} b^2 W^{II}(x) + 8W(x) = \frac{q}{3D}.$$

Это уравнение уже решается точно.

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что общий интеграл неоднородного уравнения состоит из частного решения, соответствующего правой части W_0 , и общего интеграла $\bar{W}$ однородного уравнения. В нашем случае это будет

$$\frac{16b^4}{63} W^{IV}(x) - \frac{32b^2}{63} W^{II}(x) + 8W(x) = 0,$$

т. е.

$$W = W_0 + \bar{W}.$$

Если $q = \text{const}$, то $W_0 = A$ и

$$A = \frac{q}{24D}.$$

Тогда

$$W = \frac{q}{24D} + A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x},$$

где λ_i — корни характеристического уравнения

$$\frac{16b^4}{63} \lambda^4 - \frac{32b^2}{63} \lambda^2 + 8 = 0.$$

Произвольные постоянные интегрирования будут определены из граничных условий на концах $x = \pm a$.

Таким образом, находим окончательное выражение для прогиба w :

$$w = \left(\frac{q}{24D} + A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + A_4 e^{\lambda_4 x} \right) (y^2 - b^2)^2.$$

Метод конечных разностей

Метод конечных разностей основан на замене исходного дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях. Для этой цели необходимо перейти от дифференциальных операций в исходном уравнении к операциям в конечных разностях. Для вывода этих соотношений будем в основном исходить из возможности разложения искомой функции в ряд Тейлора.

Если известно значение некоторой функции в точке x , то значение этой функции в точке $(x+h)$ будет

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

Пусть нам известно значение функции f в точке k (рис. 7) на прямой Ox . Значение функции в точке l будет

$$f_l = f_k + \frac{h_1}{1!} f'_k + \frac{h_1^2}{2!} f''_k + \frac{h_1^3}{3!} f'''_k + \dots$$

Из этого разложения можно получить выражение для первой производной в точке k :

$$f'_k = \frac{f_l - f_k}{h_1} - \left(\frac{h_1}{2!} f''_k + \frac{h_1^2}{3!} f'''_k + \frac{h_1^3}{4!} f^{IV}_k + \dots \right). \quad (1.6)$$

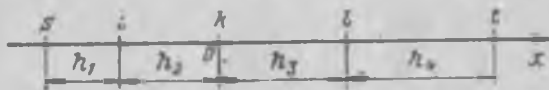


Рис. 7.

Первый член в правой части этого выражения представляет собой тангенс угла наклона хорды AB к оси x (рис. 8).

Аналогично можно получить значение функции f в точке l , для чего в ряд Тейлора необходимо поставить $(-h_2)$. В этом случае для производной функции f в точке k получим выражение

$$f'_k = \frac{f_k - f_l}{h_2} + \left(\frac{h_2}{2!} f''_k - \frac{h_2^2}{3!} f'''_k + \frac{h_2^3}{4!} f^{IV}_k - \dots \right). \quad (1.7)$$

В этом разложении первый член правой части представляет собой тангенс угла наклона хорды CA к оси x .

Таким образом, для производной в точке k получим два выражения — (1.6) и (1.7).

Отбрасывая в этих выражениях члены, заключенные в скобки, получим приближенные выражения для производной от функции f в точке k справа и слева:

$$f'_k = \frac{f_l - f_k}{h_1} + O(h),$$

$$f'_k + \frac{f_k - f_l}{h_2} + O(h).$$

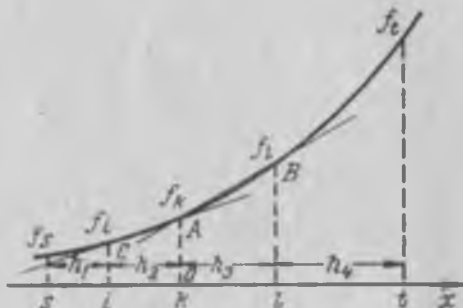


Рис. 8.

Точность этих формул будет оцениваться первым наиболее крупным отброшенным членом.

Более точное выражение для первой производной в точке k будет равно среднеарифметическому выражений (1.6) и (1.7):

$$f'_k = \frac{1}{2} \left(\frac{f_l - f_k}{h_1} + \frac{f_k - f_l}{h_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h_1 - h_2}{2!} f''_k - \frac{h_1^2 + h_2^2}{3!} f'''_k + \dots \right). \quad (1.8)$$

Отбрасывая в этом выражении члены во второй скобке справа, получим приближенное выражение усредненной первой производной в точке k :

$$f'_k = \frac{1}{2} \left(\frac{f_l - f_k}{h_1} + \frac{f_k - f_l}{h_2} \right) + O(h). \quad (1.9)$$

Точность этой формулы будет порядка h . Если положить, что $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, то для первой производной получим выражение

$$f'_k = \frac{f_l - f_l}{2h} + O(h^2).$$

Точность этой формулы будет выше. Наиболее крупный из отброшенных членов здесь имеет порядок h^2 .

Для получения выражения второй производной в точке k исключим из разложений (1.6) и (1.7) f'_k :

$$f''_k = \frac{2}{h_2 + h_3} \left(\frac{f_l - f_k}{h_3} - \frac{f_k - f_l}{h_2} \right) - 2 \left[\frac{h_3^2 - h_2^2}{3!(h_3 + h_2)} f'_k + \frac{h_3^3 + h_2^3}{4!(h_3 + h_2)} f''_k + \dots \right]$$

Отбрасывая здесь члены, заключенные в квадратные скобки, получим приближенное выражение для второй производной в точке k с точностью порядка h :

$$f''_k = \frac{2}{h_2 + h_3} \left(\frac{f_l - f_k}{h_3} - \frac{f_k - f_l}{h_2} \right) + O(h).$$

Если $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, то получим более точное выражение для второй производной

$$f''_k = \frac{2}{h^2} \left(\frac{f_l + f_l}{2} - f_k \right) + O(h^3).$$

Таким образом, мы получили выражения для первой и второй производных функции f в точке k через значения этой функции в прилегающих точках справа и слева.

Используем эти формулы для получения производных более высокого порядка в точке k :

$$\begin{aligned} f'''_k &= \frac{d}{dx} (f'_k) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{2}{h_2 + h_3} \left(\frac{f_l - f_k}{h_3} - \frac{f_k - f_l}{h_2} \right) - \right. \\ &- 2 \left[\frac{h_3^2 - h_2^2}{3!(h_3 + h_2)} f'_k + \frac{h_3^3 + h_2^3}{4!(h_3 + h_2)} f''_k + \dots \right] \Big\} = \\ &= \frac{2}{(h_2 + h_3)h_3} \left(\frac{df}{dx} \right)_l + \frac{2}{(h_2 + h_3)h_2} \left(\frac{df}{dx} \right)_l - \frac{2}{h_2h_3} \left(\frac{df}{dx} \right)_k - \\ &- 2 \frac{d}{dx} \left[\frac{h_3^2 - h_2^2}{3!(h_3 + h_2)} f'_k + \frac{h_3^3 + h_2^3}{4!(h_3 + h_2)} f''_k + \dots \right]. \end{aligned}$$

Применяя к первым производным в точках l , i и k разностную операцию по формуле (1.9), получим с точностью до h выражение для третьей производной

$$\begin{aligned} f'''_k &- f'_k \left[\frac{1}{h_2 + h_3} \left(\frac{1}{h_3^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) - \frac{1}{h_2h_3} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right) \right] + \\ &+ f'_i \left[\frac{1}{h_2(h_2 + h_3)} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{1}{h_2^2h_3} \right] + \end{aligned}$$

$$+ f_l \left[\frac{1}{h_3(h_2 + h_3)} \left(\frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4} \right) - \frac{1}{h_2 h_3} \right] -$$

$$- \frac{f_k}{h_1 h_2 (h_2 + h_3)} + \frac{f_l}{h_3 h_4 (h_2 + h_3)} + O(h).$$

Аналогично можно получить и выражения для производных по переменной y , заменив в полученных формулах l на n , i на m , s на u , t на v и расстояния h с соответствующим подстрочным номером на расстояния b (рис. 9):

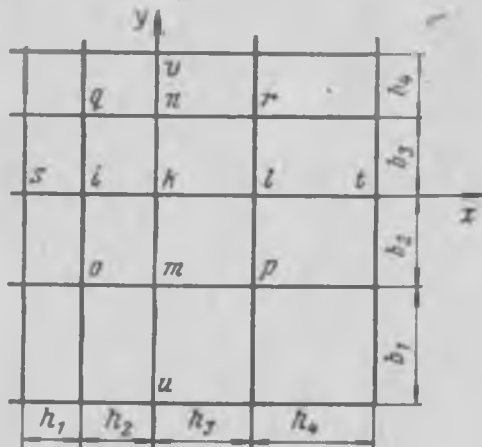


Рис. 9.

$$f'_k = \frac{1}{2} \left(\frac{f_n - f_k}{b_3} + \frac{f_k - f_m}{b_2} \right) + O(b), \quad (1.10)$$

$$f''_k = \frac{f_n - f_m}{2b} + O(b^2),$$

$$f''_k = \frac{2}{b_2 + b_3} \left(\frac{f_n - f_k}{b_3} - \frac{f_k - f_m}{b_2} \right) + O(b),$$

$$f'''_k = \frac{2}{b^2} \left(\frac{f_m + f_n}{2} - f_k \right) + O(b^2).$$

Покажем, как можно получить смешанные производные в точке k . Например,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_k = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{f_l - f_o}{h_3} + \frac{f_k - f_i}{h_2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_3}{2!} f''_k - \frac{h_2^2 + h_3^2}{3!} f'''_k + \dots \right) \left. \right] = \frac{1}{2h_3} \left(\frac{df}{dy} \right)_l - \frac{1}{2h_2} \left(\frac{df}{dy} \right)_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right) \left(\frac{df}{dy} \right)_k + \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left(\frac{h_2 - h_3}{2!} f''_k - \frac{h_2^2 + h_3^2}{3!} f'''_k + \dots \right).$$

Применяя к производным в точках l , i и k разностную операцию по формуле (1.10), получим

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{f_k}{4} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) + \frac{f_l}{4h_3} \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) - \\ - \frac{f_n}{4b_3} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) - \frac{f_m}{4b_2} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) + \frac{f_o}{4h_2 h_2} - \frac{f_q}{4h_2 b_3} + \frac{f_r}{4h_3 b_3} - \frac{f_p}{4h_3 b_2}.$$

Точность этой формулы может быть порядка $O(h)$ или $O(b)$ в зависимости от того, в каком порядке брались производные.

Аналогично можно получить и любую другую производную. Все необходимые в дальнейшем производные выписаны ниже:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_k = \frac{1}{2} \left(-\frac{f_l}{h_2} + \frac{f_l}{h_3}\right) + \frac{1}{2} f_k \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right),$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_k = \frac{1}{2} \left(-\frac{f_m}{b_2} + \frac{f_n}{b_3}\right) + \frac{1}{2} f_k \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_k = \frac{2}{h_2 + h_3} \left(\frac{f_l - f_o}{h_3} - \frac{f_k - f_l}{h_2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)_k = \frac{2}{b_2 + b_3} \left(\frac{f_n - f_k}{b_3} - \frac{f_k - f_m}{b_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_k = \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) f_k - \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) \left(\frac{f_l}{h_2} - \frac{f_l}{h_3}\right) - \\ - \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) \left(\frac{f_m}{b_2} - \frac{f_n}{b_3}\right) + \frac{1}{h_2} \left(\frac{f_o}{b_2} - \frac{f_q}{b_3}\right) - \frac{1}{h_3} \left(\frac{f_p}{b_2} - \frac{f_r}{b_3}\right),$$

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_k = \left[\frac{1}{h_2 + h_3} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_3^2}\right) - \frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)\right] f_k + \\ + \left[\frac{1}{h_3(h_2 + h_3)} \left(\frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4}\right) - \frac{1}{h_2 h_3^2}\right] f_l + \left[\frac{1}{h_2(h_2 + h_3)} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_2^2 h_3}\right] f_i - \frac{1}{h_2 + h_3} \left(\frac{f_r}{h_1 h_2} - \frac{f_l}{h_3 h_4}\right),$$

$$\left(\frac{d^3 f}{dy^3}\right)_k = \left[\frac{1}{b_2 + b_3} \left(\frac{1}{b_2^2} - \frac{1}{b_3^2}\right) - \frac{1}{2b_2 b_3} \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right)\right] f_k + \\ + \left[\frac{1}{b_3(b_2 + b_3)} \left(\frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_4}\right) - \frac{1}{b_2 b_3^2}\right] f_n + \left[\frac{1}{b_2(b_2 + b_3)} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{b_2^2 b_3}\right] f_m - \frac{1}{b_2 + b_3} \left(\frac{f_u}{b_1 b_2} - \frac{f_v}{b_3 b_4}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_k = \left[-\frac{1}{b_2 h_3} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)\right] f_k + \left[\frac{1}{h_2(h_2 + b_3)} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)\right] f_m +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{b_3(b_2 + b_3)} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right) \right] f_n + \left[\frac{1}{h_2 h_3 (b_2 + b_3)} \right] f_p + \left[\frac{1}{b_2 h_3 (b_2 + b_3)} \right] f_r + \\
& + \left[\frac{1}{h_2 b_2 b_3} \right] f_l - \left[\frac{1}{h_3 b_2 b_3} \right] f_l - \left[\frac{1}{h_2 b_3 (b_2 + b_3)} \right] f_q - \left[\frac{1}{h_2 b_2 (b_2 + b_3)} \right] f_0. \\
& \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_k = - \left[\frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} \right) \right] f_k + \left[\frac{1}{h_2 (h_2 + h_3)} \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} \right) \right] f_l + \\
& + \left[\frac{1}{h_3 (h_2 + h_3)} \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} \right) \right] f_l + \left[\frac{1}{h_2 b_3 (h_2 + h_3)} \right] f_q + \\
& + \left[\frac{1}{h_3 b_3 (h_2 + h_3)} \right] f_r + \left[\frac{1}{b_2 h_2 h_3} \right] f_m - \left[\frac{1}{b_3 h_2 h_3} \right] f_n - \\
& - \left[\frac{1}{b_2 h_3 (h_2 + h_3)} \right] f_p - \left[\frac{1}{b_2 h_2 (h_2 + h_3)} \right] f_0. \\
& \frac{1}{4} (h_2 + h_3) (b_2 + b_3) \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_k = \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) f_k - \\
& - \frac{1}{h_2} \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) f_l - \frac{1}{h_3} \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) f_l - \frac{1}{b_2} \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) f_m - \\
& - \frac{1}{h_3} \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) f_n + \frac{f_0}{h_2 b_2} + \frac{f_q}{h_2 b_3} + \frac{f_p}{h_3 b_2} + \frac{f_r}{h_3 b_3}. \\
& \frac{1}{4} (h_2 + h_3) \left(\frac{d^4 f}{dx^4} \right)_k = \left[\frac{1}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_1 + h_2} + \frac{1}{h_3} \right) + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3 + h_4} \right) \right] f_k - \\
& - \left[\frac{1}{h_1 + h_2} \left(\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + \frac{1}{h_2^2 h_3} \right] f_l - \left[\frac{1}{h_3 + h_4} \left(\frac{1}{h_3 h_4} + \frac{1}{h_3^2} \right) + \frac{1}{h_2 h_3^2} \right] f_l + \\
& + \left[\frac{1}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} \right] f_s + \left[\frac{1}{h_3 h_4 (h_3 + h_4)} \right] f_t. \\
& \frac{1}{4} (b_2 + b_3) \left(\frac{d^4 f}{dy^4} \right)_k = \left[\frac{1}{b_2^2} \left(\frac{1}{b_1 + b_2} + \frac{1}{b_3} \right) + \frac{1}{b_2^2} \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3 + b_4} \right) \right] f_k - \\
& - \left[\frac{1}{b_1 + b_2} \left(\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2^2} \right) + \frac{1}{b_2^2 b_3} \right] f_m - \left[\frac{1}{b_3 + b_4} \left(\frac{1}{b_3 b_4} + \frac{1}{b_3^2} \right) + \frac{1}{b_2 b_3^2} \right] f_n + \\
& + \left[\frac{1}{b_1 b_2 (b_1 + b_2)} \right] f_u + \left[\frac{1}{b_3 b_4 (b_3 + b_4)} \right] f_v.
\end{aligned}$$

Полагая в этих выражениях $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b$, получим

$$\left. \begin{aligned}
\left(\frac{df}{dx} \right)_k &= \frac{1}{2h} (f_l - f_l), \\
\left(\frac{df}{dy} \right)_k &= \frac{1}{2b} (f_n - f_m),
\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_k &= \frac{1}{h^2} (f_l + f_l - 2f_k), \\
 \left(\frac{d^2 f}{dy^2} \right)_k &= \frac{1}{b^2} (f_n + f_m - 2f_k), \\
 \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_k &= \frac{1}{2h^3} (f_l - f_s + 2f_l - 2f_l), \\
 \left(\frac{d^3 f}{dy^3} \right)_k &= \frac{1}{2b^3} (f_v - f_u + 2f_m - 2f_n), \\
 \left(\frac{d^4 f}{dx^4} \right)_k &= \frac{1}{h^4} (6f_k - 4f_l - 4f_l + f_l + f_s), \\
 \left(\frac{d^4 f}{dy^4} \right)_k &= \frac{1}{b^4} (6f_k - 4f_n - 4f_m + f_v + f_u), \\
 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_k &= \frac{1}{4hb} (f_0 - f_p + f_r - f_q), \\
 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_k &= \frac{1}{2bh^2} (2f_m - 2f_n + f_q - f_0 + f_r - f_p), \\
 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right)_k &= \frac{1}{2hb^2} (2f_l - 2f_l + f_p - f_0 + f_r - f_q), \\
 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_k &= \frac{1}{h^2 b^2} (4f_k - 2f_l - 2f_l - 2f_n - 2f_m + f_0 + f_p + f_r + f_q).
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Заменяя в уравнении (1.1) дифференциальные операции операциями в конечных разностях по формулам (1.11), получим

$$\begin{aligned}
 6W_k \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2 \right) - 4(1 + \xi) (W_l + W_l + \xi W_n + \xi W_m) - \\
 - W_l + W_s + \xi^2 (W_u + W_v) + 2\xi (W_0 + W_p + W_r + W_q) = -\frac{qh^4}{D}, \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

где

$$\xi = \left(\frac{h}{b} \right)^2.$$

Перечисленные выше возможные типы граничных условий также следует представить через конечные разности.

1. Край свободно оперт:

$$\begin{aligned}
 W_k &= 0, \\
 M_x &= -D \left[\frac{W_l + W_l - 2W_k}{h^2} + \mu \frac{W_n + W_m - 2W_k}{b^2} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

2. Край жестко заделан:

$$W_k = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_k = \frac{W_l - W_l}{2h} = 0.$$

3. Край свободен:

$$M_x = -D \left[\frac{W_l + W_l - 2W_k}{h^2} + \frac{W_n + W_m - 2W_k}{h^2} \right] = 0,$$

$$V_x = -D \left[\frac{W_l - W_l + 2W_l - 2W_l}{2h^3} + \frac{2-p}{2hb^2} (2W_l - 2W_l - W_0 + W_p + W_r - W_q) \right] = 0.$$

При решении задач методом конечных разностей на поверхность пластины наносят сетку со сторонами, параллельными осям координат. Точки пересечения линий этой сетки нумеруют. Для каждой из этих узловых точек составляют затем уравнение (1.12). Таких уравнений будет столько, сколько номеров на сетке. Чтобы уменьшить число этих номеров, там, где это возможно, используют условия симметрии задачи. Решив полученную систему уравнений, находят значение прогиба в каждой узловой точке нанесенной сетки. Используя найденные значения прогибов, можно определить в этих точках и изгибающие моменты. Точность решения задач этим методом будет тем выше, чем чаще нанесена сетка.

Одновременно с этим, конечно, растет и трудность решения большого числа совместных уравнений. Можно значительно снизить эту трудность, если воспользоваться экстраполяционными формулами, позволяющими по первым двум-трем приближениям получить уточненное следующее приближение, не решая самой задачи. Наиболее простыми в практическом отношении являются экстраполяционные формулы Ричардсона, которые основаны на следующих рассуждениях. При вычислении производных через усредненные разности в разложении ряда Тейлора мы ограничивались первыми двумя членами и допускали наибольшую погрешность порядка h^2 . Отброшенные члены имели вид

$$\varepsilon = f_1(x) h^2 + f_2(x) h^4 + \dots$$

Следовательно, если мы решили какую-то задачу с помощью приближенных конечно-разностных уравнений и нашли результат, равный A , то этот результат можно было бы уточнить, прибавив к нему отброшенную погрешность ε . Ввиду того что эта погрешность при такой постановке вопроса остается неизвестной, можно поступить следующим образом. Допустим, мы решили данную задачу при двух различных шагах сетки h_1 и h_2 и получили значения искомой функции при данном значении x , соответственно равные A_1 и A_2 . Тогда более точные значения искомой функции в точке x будут

$$A = A_1 + \varepsilon_1 = A_1 + f_1(x) h_1^2 + f_2(x) h_1^4 + \dots$$

$$A = A_2 + \varepsilon_2 = A_2 + f_1(x) h_2^2 + f_2(x) h_2^4 + \dots$$

Ограничиваясь в правой части этих выражений наиболее крупными слагаемыми, можно написать

$$A \approx A_1 + f_1(x) h_1^2, \quad A \approx A_2 + f_1(x) h_2^2.$$

Исключая отсюда $f_1(x)$, получим уточненное значение искомой функции, которую обозначим через $A_{\text{экстр}}$ (экстраполированное):

$$A_{\text{экстр}} = \frac{h_1^2}{h_1^2 - h_2^2} A_2 - \frac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} A_1.$$

Аналогично можно получить уточненное значение искомой функции по первым трем приближениям:

$$A_{\text{уточн}} = \frac{h_2^2 h_3^2}{(h_1^2 - h_2^2)(h_1^2 - h_3^2)} A_1 - \frac{h_1^2 h_3^2}{(h_1^2 - h_2^2)(h_2^2 - h_3^2)} A_2 + \\ + \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^2 - h_3^2)(h_2^2 - h_3^2)} A_3.$$

Полагая в этих формулах



Рис. 10.

$$h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n_1}, \quad h_2 = \frac{a_2 - a_1}{n_2},$$

$$h_3 = \frac{a_2 - a_1}{n_3},$$

где a_1, a_2 — пределы изменения переменной интегрирования x ;
 n_1, n_2, n_3 — числа делений длины $(a_2 - a_1)$,
получим следующие формулы Ричардсона:

$$A_{n_2, n_1} = A_2 \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} - A_1 \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2},$$

$$A_{n_3, n_1, n_2} = A_1 \frac{n_1^4}{(n_1^2 - n_2^2)(n_3^2 - n_1^2)} - A_2 \frac{n_2^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} + \\ + A_3 \frac{n_3^4}{(n_3^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)}.$$

При решении задач методом конечных разностей мы имеем возможность определять значения искомой функции в заранее намеченных точках нанесенной сетки. Для определения значений этой функции в промежуточных точках воспользуемся формулами Лагранжа, которые выводятся следующим образом. Пусть мы нашли значения искомой функции в трех последовательно расположенных точках k, l, l (рис. 10).

С достаточной точностью уравнение кривой, проходящей через три точки, можно заменить параболой второй степени

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Коэффициенты этой параболы найдем из условий

$$x = 0 \quad f(0) = f_k, \quad x = h \quad f(h) = f_l,$$

$$x = -h \quad f(-h) = f_l.$$

Отсюда находим

$$a_0 = f_k, \quad a_1 = \frac{f_l - f_l}{2h}, \quad a_2 = \frac{f_l + f_l - 2f_k}{2h^2}.$$

Тогда получим следующую интерполяционную формулу Лагранжа по трем точкам:

$$f(x) = f_k + \frac{f_l - f_l}{2h} x + \frac{f_l + f_l - 2f_k}{2h^2} x^2.$$

Аналогичные формулы можно получить и для большего числа точек. По этим формулам можно определить значения искомой функции в любой промежуточной точке x по значениям этой функции в смежных точках.

Покажем применение метода конечных разностей к задаче об изгибе прямоугольной пластины равномерной нагрузкой при различных, но симметрично расположенных граничных условиях (рис. 11).

Первое приближение:

$$h_1 = \frac{a}{2}, \quad b_1 = \frac{c}{2},$$

$$\xi = \left(\frac{h_1}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

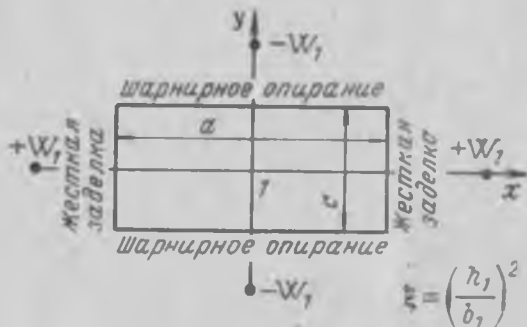


Рис. 11.

Составим уравнение (1.12) для точки I:

$$6W_1 \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2\right) - 4(1 + \xi)(0 + 0 + 0 + 0) + W_1 + W_1 + \\ + \xi^2(-W_1 - W_1) + 2\xi(0 + 0 + 0 + 0) = \frac{q h_1^4}{D}.$$

Отсюда получаем значение прогиба в точке I:

$$W_1 = \frac{q a^4}{64(2 + 2\xi + \xi^2)D}.$$

Если пластина квадратная, $\xi = 1$, то

$$W_1 = 0,0341 \frac{q a^4}{E b^3}.$$

Второе приближение (рис. 12):

$$h_2 = \frac{a}{3}, \quad b_2 = \frac{c}{3}, \quad \xi = \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

В этом случае в силу симметрии прогиба относительно середины пластины все узловые точки помечены одной и той же цифрой 1. Составим уравнение (1.12)* для любой из этих точек:

$$6W_1 \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2 \right) - 4(1 + \xi)(0 + W_1 + 0 + \xi W_1) + W_1 + 0 + \\ + \xi^2(-W_1 + 0) + 2\xi(0 + W_1 + 0 + 0) = \frac{qh_2^4}{D}.$$

Отсюда получаем

$$W_1 = \frac{qa^4}{81(3 + 2\xi + \xi^2)D}$$

При $\xi = 1$ будем иметь

$$W_1 = 0,0224 \frac{qa^4}{Eb^3}.$$

Пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, найдем значение прогиба в точке m :

$$W_m = W_1 + \frac{(W_1 - 0)0,5b}{2b} + \frac{(W_1 + 0 - 2W_1)0,25b^2}{2b^2} = 1,125W_1.$$

Для того чтобы определить значение прогиба в центре пластины в точке O , необходимо применить еще один раз интерполяцию по точкам m . При очень высоком требовании к точности решения задачи такое двойное интерполирование может привести к ошибкам. В данном случае мы не ставим себе цель получить точное решение, а иллюстрируем метод, поэтому позволяем двойное интерполирование:

$$W_0 = W_m + \frac{(W_m - 0)0,5h}{2h} + \frac{(W_m + 0 - 2W_m)0,25h^2}{2h^2} = 1,125W_m$$

или

$$W_0 = 1,125 \cdot 1,125W_1 = 0,0284 \frac{qa^4}{Eb^3}.$$

Определим уточненное значение прогиба в центре пластины по полученным первым двум приближениям, пользуясь экстраполяцией:

$$W_{\text{экстр}} = (-0,8; 0,0341 + 1,8; 0,0284) \frac{qa^4}{Eb^3} = 0,0239 \frac{qa^4}{Eb^3}.$$

Точное решение данной задачи дает для прогиба в центре пластины коэффициент 0,0209. Таким образом, погрешность приближенного решения равна 14%.

§ 3 ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ИЗГИБА ПЛАСТИН. МЕТОД РИТЦА

Начало возможных перемещений является одним из основных принципов механики, который утверждает, что если тело находится в состоянии равновесия, то сумма работ всех сил, при-

ложенных к этому телу, на любых дозволённых связяхи весьма малых (виртуальных) перемещениях равна нулю.

При рассмотрении деформируемых тел это начало применяют к полному выражению потенциальной энергии системы. Под потенциальной энергией системы понимают ту работу, которую совершают силы системы как внутренниие, так и внешние при переводе системы из деформированного состояния в недеформированное.

Под внутренними силами системы понимают те силы, которые возникают между частицами тела при его деформировании. Это силы упругости.

Сумма этих работ численно равна потенциальной энергии системы:

$$\mathcal{E} = V + T,$$

где V — энергия деформации или работа внутренних сил;

T — работа или потенциал внешних сил.

Поскольку рассматриваемая система находится в равновесии, то согласно началу возможных перемещений

$$\delta \mathcal{E} = \delta V + \delta T = 0,$$

где δ указывает на возможное изменение координат точек тела от положения равновесия.

Этим уравнением пользуются при решении многих практически важных задач при расчете на прочность различных конструкций.

Полная потенциальная энергия для пластин, выраженная через прогиб w , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{D}{2} \iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + T, \end{aligned}$$

где $D = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)}$ — жесткость пластины на изгиб.

Для решения конкретной задачи необходимо подобрать подходящее выражение для w , удовлетворяющее заданным граничным условиям, с неопределёнными параметрами,

$$w = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \dots$$

и подставить его в $\mathcal{E}$. Неопределённые параметры a_i определяются из условия

$$\delta \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots = 0,$$

которое является полным дифференциалом функции многих переменных. В данном случае, исходя из начала возможных перемещений, этот дифференциал должен равняться нулю.

Так как вариации $\delta a_1, \delta a_2, \dots$ являются произвольными и неравными нулю, то для выполнения условия $\delta \mathcal{E} = 0$ необходимо положить

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0, \dots$$

Каждое из этих уравнений представляет собой не что иное, как равенство нулю суммы работ при варьировании того или иного параметра.

Эти уравнения дают возможность определить все неизвестные параметры, входящие в выражение прогиба.

Пример. Изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины равномерной нагрузкой (рис. 13). Подходящее выражение для прогиба, удовлетворяющее заданным граничным условиям, в данном случае можно взять в форме двойного ряда по косинусам:

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} [A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}].$$

Подставляя принятое выражение для w в выражение для $\mathcal{E}$ и интегрируя в пределах $(-a, +a)$ и $(-b, +b)$, получим

$$\mathcal{E} = \frac{Dab}{2} A_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 + T.$$

Работа нагрузки q будет

$$T = -q \int_{-a}^a \int_{-b}^b w dx dy = \frac{16abq}{\pi^2} \frac{A_{mn}}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{Dab}{2} A_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 - \frac{16abq}{\pi^2} \frac{A_{mn}}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Неизвестные параметры A_{mn} находим из уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_{mn}} = Dab A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 - \frac{16abq}{\pi^2} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn} = 0,$$

откуда

$$A_{mn} = \frac{16q \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{D\pi^2 mn \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2}.$$

Тогда

$$w = \frac{16q}{D\pi^2} \sum_{m=1,3,5\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}}{mn \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2}$$

Если бы на пластину действовала сосредоточенная сила P в точке $x=a_1$, $y=b_1$ (рис. 14), то работа внешних сил была бы

$$T = P(w)_{x=a_1, y=b_1} = P \sum_{m=1,3,5\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} A_{mn} \cos \frac{m\pi a_1}{2a} \cos \frac{n\pi b_1}{2b}$$

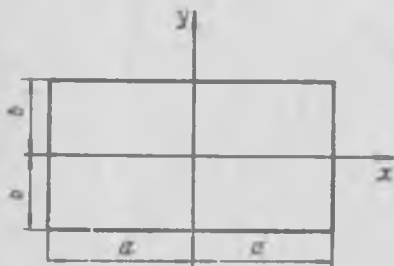


Рис. 13.

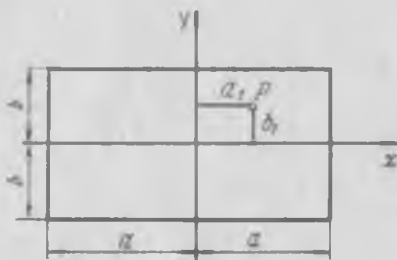


Рис. 14.

Тогда для w получим выражение

$$w = \frac{P}{Dab} \sum_{m=1,3\dots} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{\cos \frac{m\pi a_1}{2a} \cos \frac{n\pi b_1}{2b} \cos \frac{m\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b}}{\left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2}$$

Полученные ряды сходятся достаточно быстро, и два-три члена в разложении дают хороший результат.

§ 4. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН БОЛЬШОГО ПРОГИБА

Если прогиб пластины соизмерим с ее толщиной, то уже нельзя пренебрегать напряжениями в ее срединной поверхности, как это имело место при выводе уравнения (1.1). Эти напряжения будут соизмеримы с напряжениями изгиба. Дифференциальное уравнение равновесия такой пластины имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

В правой части этого уравнения наряду с поперечной нагрузкой q появились вертикальные составляющие от усилий, дейст-

вующих в срединной поверхности. Для определения этих усилий необходимо иметь дополнительные уравнения, которые можно получить из условия равновесия элемента пластины в касательной плоскости.

Из условия равновесия сил по направлению осей x и y (рис. 15) получим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0.$$

Из условия равенства нулю моментов всех сил относительно оси z найдем, что

$$N_{xy} = N_{yx}.$$

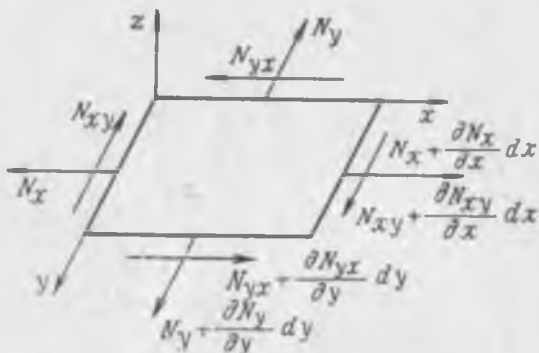


Рис. 15.

Тогда уравнения равновесия сил в касательной плоскости окончательно примут вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (1.14)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных функций (w , N_x , N_y , N_{xy}) мы имеем три совместных уравнения. Четвертое, недостающее уравнение можно получить на основании следующих соображений.

Для двухосного напряженного состояния закон Гука записывается в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy}. \quad (1.15)$$

С другой стороны, для компонентов деформации ε_x , ε_y , ε_{xy} можно получить выражения через компоненты перемещения u , v и w точек срединной поверхности пластины. Из рис. 16 видно, что точки A , B и C после деформации перешли в положения A_1 , B_1 и C_1 . Стороны элемента dx , dy изменили свою длину и стали

равны $(1+\varepsilon_x)dx$ и $(1+\varepsilon_y)dy$. С осями координат x, y, z они образовали углы, косинусы которых соответственно равны l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 .

Спроектируем замкнутые пространственные многоугольники $Oaa'A_1B_1b'bB$ и $Oaa'A_1C_1C'cC$ на оси x, y, z . Поскольку эти многоугольники замкнуты, то проекции их сторон на эти оси будут равны нулю. Снабдим стороны этих многоугольников стрелками

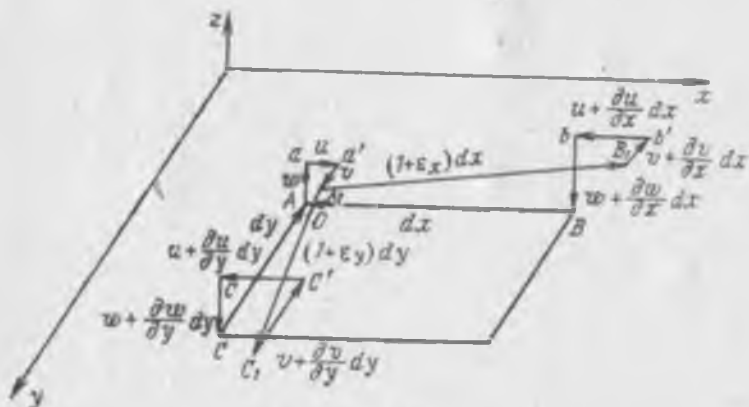


Рис. 16.

по направлению обхода. Проекции сторон многоугольника $Oaa'A_1B_1b'bB$ на оси x, y, z будут

$$-dx + u + (1+\varepsilon_x)l_1dx - u - \frac{\partial u}{\partial x}dx = 0,$$

$$v + (1+\varepsilon_x)m_1dx - v - \frac{\partial v}{\partial x}dx = 0,$$

$$w + (1+\varepsilon_x)n_1dx - w - \frac{\partial w}{\partial x}dx = 0.$$

Отсюда получаем

$$(1+\varepsilon_x)l_1 = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1+\varepsilon_x)m_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1+\varepsilon_x)n_1 = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Возведем правые и левые части этих равенств в квадрат и сложим. Тогда при $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ получим

$$2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Пренебрегая величиной ε_x^2 по сравнению с ε_x , будем иметь

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right].$$

Обычно для получения приближенных выражений для компонентов деформации квадратами производных от функций u и v пренебрегают в сравнении с $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$. Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (1.16)$$

Аналогично можно получить

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (1.17)$$

Для получения деформации ε_{xy} , характеризующей изменение прямого угла между отрезками dx и dy , воспользуемся следующей формулой, известной из аналитической геометрии для косинуса угла между двумя прямыми:

$$\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Подставим сюда

$$l_1 = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}, \quad m_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}, \quad n_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}$$

и аналогичные выражения для l_2, m_2, n_2 :

$$l_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \varepsilon_y}, \quad m_2 = \frac{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}{1 + \varepsilon_y}, \quad n_2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{1 + \varepsilon_y}.$$

Тогда будем иметь

$$\cos \varphi = \cos (90 - \varepsilon_{xy}) = \sin \varepsilon_{xy} \approx \varepsilon_{xy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.18)$$

Исключая из полученных выражений для $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_{xy} производные от функций u и v , получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Подставим сюда вместо компонентов деформации их выражения по закону Гука. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{E\beta} \left[\left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} \right) - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} \right] = \\ = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим четвертое недостающее уравнение, которое называется уравнением совместности деформаций.

Для решения полученной системы уравнений с четырьмя неизвестными функциями можно поступить следующим образом.

Введем новую неизвестную пока функцию φ , так чтобы она удовлетворяла уравнениям (1, 14). Для этого достаточно положить

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Подстановкой этих выражений в уравнения (1, 14) можно убедиться, что они тождественно удовлетворяются. Таким образом, из системы четырех уравнений останутся лишь два следующих совместных уравнения относительно функций φ и w :

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = E \Delta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

Если жесткость пластины на изгиб мала, то такую пластину называют мембраной. В этом случае уравнения принимают вид ($D=0$)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = E \Delta \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (1.19)$$

Несмотря на то, что выписанные уравнения известны более 50 лет, точные методы решения их почти не разработаны. Поэтому в практических случаях для решения задач чаще всего пользуются началом возможных перемещений, применяя его к полному выражению потенциальной энергии пластины или мембраны. Иногда для интегрирования этих уравнений можно с успехом применить метод Бубнова—Галеркина или метод конечных разностей.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МЕМБРАН

Пусть мембрана находится под действием распределенной нагрузки q . Тогда полная потенциальная энергия ее

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_s (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy + T,$$

где через T обозначен потенциал нагрузки q и интегрирование ведется по всей площади мембраны. Коэффициентом $1/2$ учитывается то обстоятельство, что усилия в мембране возрастают от нуля до их конечной величины по линейному закону (закон Гука) и работа этих сил на соответствующих перемещениях будет равна площади треугольника.

Заменяя в подынтегральном выражении усилия N_x , N_y , N_x , их выражениями через компоненты деформации по формулам закона Гука (1.15), а компоненты деформации по формулам (1.16) — (1.18) через компоненты перемещения, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right] + \frac{1-\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx dy - \iint_S q w dx dy. \end{aligned}$$

Применим это выражение к задаче о квадратной мембране (рис. 17) со стороной $2a$, нагруженной постоянным давлением q .

Исходя из того, что прогиб w должен быть четной функцией относительно центра мембраны, примем для него следующее выражение, которое обращается в нуль на контуре:

$$w = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}.$$

Для выбора подходящих выражений для перемещений u и v будем руководствоваться следующими соображениями. Если принятое выражение

для w подставить в правую часть уравнения (1.19), то получим уравнение для функции φ с известной правой частью. Частное решение такого уравнения можно искать в форме, соответствующей его правой части. Определив таким образом структуру функции φ , затем по формулам закона Гука можно определить и структуру функций u и v . Описанный только что прием определения структуры функции u и v чрезвычайно громоздок, и его можно обойти следующим образом. В выражении для $\mathcal{E}$ имеются следующие произведения функций u и w :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.20)$$

Оказывается, что структура функции u будет совпадать с этим результатом, если определять ее из условий

$$u_1 = \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad u_2 = \int \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx, \quad u_3 = \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

которые получаются из произведений (1.20). Постоянные интегрирования здесь опущены. Складывая полученные после интегрирования значения u_1, u_2, u_3 и снабдив каждый член неопределенным пока коэффициентом, получим общую структуру для функции u . Таким образом, будем иметь

$$u = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} + A_2 \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Аналогично

$$v = B_1 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + B_2 \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Граничные условия для этих перемещений примем следующими: при $x = \pm a, y = \pm a$ должно быть $u = 0, v = 0$. Из этих условий получаем

$$A_1 = A_2 = A, \quad B_1 = B_2 = B.$$

Тогда окончательно

$$u = A \left(1 + \cos \frac{\pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$v = B \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{a}.$$

Теперь полная потенциальная энергия мембраны будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\mu^2)}{\pi^2 E h^3} \mathcal{E} &= \frac{7-\mu}{2} (A^2 + B^2) + (1+\mu) AB - \\ &- \frac{\pi(2-\mu)}{8a} (A+B) C^2 + \frac{5\pi^3 C^4}{25a^2} - q_0 a C. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$q_0 = \frac{32(1-\mu^2) q a}{\pi^4 E h^3}.$$

Для определения параметров A, B и C применим к полученному выражению полной энергии начало возможных перемещений. Это даст нам следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C} = 0.$$

Из решения этих уравнений находим

$$A = B = \frac{\pi(2-\mu)}{64a} C^2, \quad C = \frac{16a^3}{\pi^2} \sqrt{\frac{(1-\mu^2) q a}{[10 - (2-\mu)^2] E h^3}}.$$

Имея выражения для A , B и C , по формулам (1.15) — (1.17) можно получить выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{b} = \frac{8}{\pi^2} \sqrt[3]{\frac{Eq^2a^2}{(1-\mu^2)[10-(2-\mu)^2]2b^2}} \times$$

$$\times \left[(2+\mu) \left(\cos^2 \frac{\pi y}{2a} + \mu \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \right) - 2\mu(1+\mu) \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2a} \right],$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{b} = \frac{8}{\pi^2} \sqrt[3]{\frac{Eq^2a^2}{(1-\mu^2)[10-(2-\mu)^2]2b^2}} \times$$

$$\times \left[(2+\mu) \left(\cos^2 \frac{\pi x}{2a} + \mu \cos^2 \frac{\pi y}{2a} \right) - 2\mu(1+\mu) \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2a} \right].$$

Для перемещений будем иметь

$$u = \frac{8(2-\mu)a}{\pi^3} \sqrt[3]{\frac{(1-\mu^2)^2 q^2 a^2}{[10-(2-\mu)^2]^2 E^2 b^2}} \cos^2 \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$v = \frac{8(2-\mu)a}{\pi^3} \sqrt[3]{\frac{(1-\mu^2)^2 q^2 a^2}{[10-(2-\mu)^2]^2 E^2 b^2}} \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

$$w = \frac{16a}{\pi^2} \sqrt[3]{\frac{(1-\mu^2) qa}{[10-(2-\mu)^2]^2 E^3}} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}.$$

Наибольшие напряжения и наибольший прогиб будут в центре мембраны. При $\mu=0,3$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0,499 \sqrt[3]{\frac{Eq^2a^2}{b^2}}, \quad w = 0,82a \sqrt[3]{\frac{qa}{E^3}}.$$

Глава II

ПРОЧНОСТЬ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН И МЕМБРАН

§ 6. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН МАЛОГО ПРОГИБА

Дифференциальное уравнение равновесия круглых пластин получим из уравнения (1.1) путем преобразования его в полярные координаты.

Пусть мы на пластине имеем точку M (рис. 18). Прямоугольные координаты x , y этой точки связаны с полярными координатами α , r следующими равенствами:

$$x = r \cos \alpha = \varphi(\alpha, r), \quad y = r \sin \alpha = \psi(\alpha, r).$$

Имея связь старых координат с новыми, по известным формулам дифференциального исчисления можно перейти от дифференцирования по переменным x, y к дифференцированию по переменным α, r по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

Но

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -r \sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = r \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \alpha.$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = -r \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial r} + r \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Из этих выражений находим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Вторые и смешанные производные можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \cos \alpha \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \\ &- \frac{1}{r} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\cos \alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = \\ &= \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin 2\alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial r} + \\ &+ \frac{1}{r} \sin^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}. \end{aligned}$$

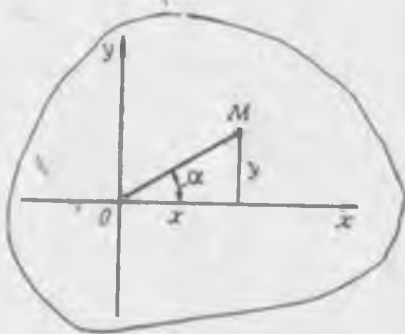


Рис. 18.

Аналогично

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial r} + \\ &+ \frac{1}{r} \cos^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \sin 2\alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \\ &- \frac{1}{r^2} \cos^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial r} - \frac{1}{r} \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial r} - \\ &- \frac{1}{2r} \sin 2\alpha \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{2r^2} \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением симметричного изгиба круглых пластин. В этом случае все производные по углу α должны обратиться в нуль. При этом получим

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{2r} \sin 2\alpha \frac{\partial w}{\partial r}.\end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Так как угол α выбран произвольно, то если поменять наименование старых осей, т. е. ось x обозначить через y , а ось y через x , то правые части выражений (2.1) не должны измениться. Структура правых частей этих выражений не будет изменяться только в том случае, если положить $\alpha=0$. Тогда окончательно получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Теперь уравнение (1.1) для круглой пластины можно записать так:

$$\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q}{D},$$

или после выполнения указанных операций дифференцирования

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^3} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}.$$

Это уравнение для удобства интегрирования иногда записывают в такой форме:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}. \quad (2.2)$$

Выражения для изгибающих моментов будут иметь вид

$$M_{\varphi} \sim M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$M_{\theta} \sim M_{\alpha} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right).$$

Выражение для перерезывающей силы можно найти из уравнения (2.2):

$$q = D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\}.$$

Перерезывающая сила Q_r на единицу длины

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \int_0^r q r \, du \, dr = \\ &= -\frac{D}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} r \, dr \, du = \\ &= -\frac{D}{2\pi r} 2\pi \int_0^r d \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \\ &= -\frac{D}{r} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \\ &= D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (2.2) можно интегрировать в такой последовательности.

Предварительно введем новую безразмерную величину ϱ по формуле

$$\varrho = \frac{r}{R},$$

где R — наружный радиус пластины.

Следовательно, $0 \leq \varrho \leq 1$ и $dr = R d\varrho$.

Тогда уравнение (2.2) перепишем в виде

$$\frac{d}{d\varrho} \left\{ \varrho \frac{d}{d\varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) \right] \right\} = \frac{q R^4 \varrho}{D}.$$

Интегрируя, получим

$$\varrho \frac{d}{d\varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) \right] = \frac{R^4}{D} \int q \varrho \, d\varrho + C_1,$$

$$\frac{d}{d\varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) \right] = \frac{R^4}{D} \frac{1}{\varrho} \int q \varrho \, d\varrho + \frac{C_1}{\varrho},$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) &= \frac{R^4}{D} \int \left(\frac{1}{\varrho} \int q \varrho d\varrho \right) d\varrho + C_1' \ln \varrho + C_2', \\
\frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) &= \frac{R^4}{D} \varrho \int \left(\frac{1}{\varrho} \int q \varrho d\varrho \right) d\varrho + C_1' \ln \varrho + C_2', \\
\varrho \frac{dw}{d\varrho} &= \frac{R^4}{D} \int \left[\varrho \int \left(\frac{1}{\varrho} \int q \varrho d\varrho \right) d\varrho \right] d\varrho + C_1' \int \varrho \ln \varrho d\varrho + \frac{1}{2} C_2' \varrho^2 + C_3', \\
\frac{dw}{d\varrho} &= \frac{R^4}{D} \frac{1}{\varrho} \int \left[\varrho \int \left(\frac{1}{\varrho} \int q \varrho d\varrho \right) d\varrho \right] d\varrho + \\
&\quad + C_1' \frac{1}{\varrho} \int \varrho \ln \varrho d\varrho + \frac{1}{2} C_2' + \frac{C_3'}{\varrho}, \\
w &= \frac{R^4}{D} \int \left\{ \frac{1}{\varrho} \int \left[\varrho \int \left(\frac{1}{\varrho} \int q \varrho d\varrho \right) d\varrho \right] d\varrho \right\} d\varrho + \\
&\quad + C_1' \int \left(\frac{1}{\varrho} \int \varrho \ln \varrho d\varrho \right) d\varrho + \frac{1}{4} C_2' \varrho^2 + C_3' \ln \varrho + C_4',
\end{aligned}$$

или окончательно

$$\begin{aligned}
w &= \frac{R^4}{D} \int \left\{ \frac{1}{\varrho} \int \left[\varrho \int \left(\frac{1}{\varrho} \int q \varrho d\varrho \right) d\varrho \right] d\varrho \right\} d\varrho + \\
&\quad + C_1' \varrho^2 \ln \varrho + C_2' \varrho^2 + C_3' \ln \varrho + C_4'.
\end{aligned}$$

Постоянные интегрирования в этом выражении определяются в каждом конкретном случае расчета из граничных условий; два граничных условия будут на внешнем контуре и два — на внутреннем, если пластина имеет отверстие, или из условий в центре пластины, вытекающих из физической сущности задачи, если пластина не имеет отверстия в центре.

В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно-опертой пластины равномерной нагрузкой $q = \text{const}$. В этом случае выражение для w принимает вид

$$w = \frac{q R^4 \varrho^4}{64 D} + C_1 \varrho^2 \ln \varrho + C_2 \varrho^2 + C_3 \ln \varrho + C_4.$$

Для определения постоянных интегрирования имеем следующие граничные условия при $\varrho = 1$:

$$w = 0, \quad M_r = 0,$$

$$\frac{dw}{d\varrho} = \frac{q R^4 \varrho^3}{16 D} + C_1 (2 \varrho \ln \varrho + \varrho) + 2 C_2 \varrho + \frac{C_3}{\varrho},$$

$$\frac{d^2 w}{d\varrho^2} = \frac{3 q R^4 \varrho^2}{16 D} + C_1 (2 \ln \varrho + 3) + 2 C_2 - \frac{C_3}{\varrho^2},$$

$$\begin{aligned}
M_r = -D \left\{ \frac{(3 + \mu) q R^2 \varrho^2}{16 D} + \frac{C_1}{R^2} [(3 + \mu) + 2 (1 + \mu) \ln \varrho] + \right. \\
\left. + \frac{2 (1 + \mu)}{R^2} C_2 - \frac{(1 - \mu) C_3}{R^2 \varrho^2} \right\}.
\end{aligned}$$

При $q=1$ будем иметь (на контуре)

$$\frac{qR^4}{64D} + C_2 + C_4 = 0,$$

$$\frac{(3+\mu)qR^2}{16D} + \frac{3+\mu}{R^2}C_1 + \frac{2(1+\mu)}{R^2}C_2 - \frac{(1-\mu)}{R^2}C_3 = 0.$$

К этим двум уравнениям, вытекающим из условий задачи при $q=1$, следует присоединить еще два из условий в центре пластины ($q=0$). В центре пластины прогиб и момент должны иметь конечные значения. Для этого необходимо положить $C_1=0$, $C_3=0$. Тогда окончательно

$$C_2 = -\frac{(3+\mu)qR^4}{32(1+\mu)D}, \quad C_4 = \frac{(5+\mu)qR^4}{64(1+\mu)D}.$$

Выражения для прогиба и момента M_r примут вид

$$w = \frac{qR^4}{64D} \left[q^4 - \frac{2(3+\mu)}{1+\mu} q^2 + \frac{5+\mu}{1+\mu} \right],$$

$$M_r = -\frac{(3-\mu)qR^2}{16} (q^2 - 1).$$

Для напряжений σ_r получим

$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{r^2} = \pm \frac{6(3+\mu)qR^2}{16\delta^2} (q^2 - 1).$$

Наибольшие напряжения и прогиб будут в центре пластины ($q=0$):

$$w_{\max} = \frac{(5+\mu)qR^4}{64D}, \quad \sigma_{r\max} = \pm \frac{3(3+\mu)qR^2}{8\delta^2}.$$

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫМ КРУГЛЫМ ПЛАСТИНАМ И МЕМБРАНАМ

Выражение для потенциальной энергии симметрично нагруженной круглой пластины можно получить из соответствующего выражения для прямоугольной пластины (§ 3), если в последнем перейти от переменных x, y к новой переменной r по формулам предыдущего параграфа. При этом получим

$$\mathcal{E} = \frac{D}{2} \iint_s \left[\left(\frac{d^2w}{dr^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 + 2\nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} \right] r dr d\alpha + T.$$

После интегрирования по α

$$\mathcal{E} = \pi D \int_{R_0}^{R_n} \left[\left(\frac{d^2w}{dr^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{2\nu}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} \right] r dr + T,$$

где R_v , R_n — внутренний и наружный радиусы пластины;
 T — работа внешних сил.

В качестве примера рассмотрим изгиб жестко заделанной круглой пластины, нагруженной сосредоточенной силой в центре. В этом случае $R_v = 0$.

Как обычно, для решения задачи этим методом необходимо задаться подходящим выражением для w , удовлетворяющим заданным граничным условиям:

$$w = A_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_n^2}\right)^2 + A_1 \left(1 - \frac{r^4}{R_n^4}\right)^2 + \dots$$

Ограничиваясь первым членом этого ряда, примем

$$w = A_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_n^2}\right)^2. \quad (2.3)$$

Подставляя необходимые производные от этого выражения в $\mathcal{E}$ и проинтегрировав в пределах $0-R_n$, найдем

$$\mathcal{E} = \frac{32\pi D}{3R_n^3} A_0^2 - P A_0.$$

Начало возможных перемещений дает следующее уравнение для определения параметра A_0 :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dA_0} = 0.$$

Из этого условия находим

$$A_0 = \frac{3PR_n^2}{64\pi D}.$$

Тогда

$$w = \frac{3PR_n^2}{64\pi D} \left(1 - \frac{r^2}{R_n^2}\right)^2.$$

Прогиб в центре

$$w = 0,015 \frac{PR_n^2}{D}.$$

Точное решение данной задачи для прогиба в центре дает следующее значение:

$$w = 0,02 \frac{PR_n^2}{D}.$$

Для улучшения приближенного результата необходимо увеличить число членов в выражении для w .

При исследовании симметрично нагруженных круглых мембран также выгодно воспользоваться началом возможных перемещений.

Выражение для потенциальной энергии симметрично нагруженной круглой мембраны можно получить из соответствующего выражения § 5.

В силу симметрии нагружения компонент деформации сдвига в данном случае будет равен нулю, и выражение для полной энергии получит вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_s (N_r \varepsilon_r + N_\theta \varepsilon_\theta) r dr d\alpha + T.$$

Для связи напряжений с компонентами деформации имеем формулы закона Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh} (N_r - \mu N_\theta),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \mu N_r).$$

Выражения для компонентов деформации можно получить из рис. 19 (см. рис. 16).

Спроектируем замкнутый многоугольник AA_1B_1CB на оси r, z и суммы проекций приравняем нулю. Из полученных при этом уравнений найдем

$$(1 + \varepsilon_r) n = \frac{dw}{dr}, \quad (1 + \varepsilon_r) l = 1 + \frac{du}{dr}.$$

Если левые и правые части этих равенств возвести в квадрат и сложить, то, опуская рассуждения, аналогичные сделанным в § 4 при выводе $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ в прямоугольных осях, получим следующее выражение для ε_r :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Компоненту деформации в окружном направлении определим по выражению

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}.$$

Тогда, учитывая формулы закона Гука и полученные только что зависимости для ε_r и ε_θ от перемещений u и w , получим следующее выражение для полной энергии симметрично нагруженной круглой мембраны при постоянном давлении q :

$$\mathcal{E} = \frac{\pi E h}{1 - \mu^2} \int_0^a \left[\left(\frac{du}{dr} \right)^2 + \frac{du}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dw}{dr} \right)^4 + \frac{u^2}{r^2} + \right.$$

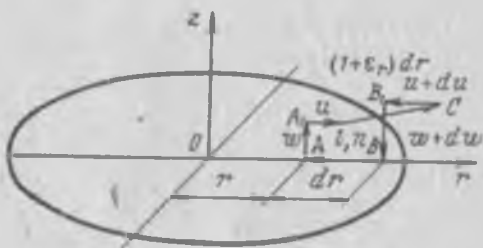


Рис. 19.

$$+ 2\mu \frac{u}{r} \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \Big] r dr - 2\pi q \int_0^a w r dr.$$

Последним членом в этом выражении представлена работа нормального давления q . Имея выражение для полной энергии, можно перейти к выбору подходящих выражений для u и w .

Для прогиба w примем выражение (2.3), которое было нами использовано при исследовании изгиба круглой пластины

$$w = A_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2.$$

Структуру функции u определим, как было оговорено в § 5, исходя из выражения потенциальной энергии:

$$u_1 = \int \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr, \quad u_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Подставляя сюда производные от w , получим

$$u = A_1' r + A_3' r^3 + A_5' r^5 + A_7' r^7.$$

Чтобы данное выражение удовлетворяло условиям на контуре $u=0$ при $r=a$, надо положить

$$A_1' = -a^2 A_3' - a^4 A_5' - a^6 A_7'.$$

Тогда окончательно

$$u = A_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) r + A_2 \left(1 - \frac{r^4}{a^4} \right) r + A_3 \left(1 - \frac{r^6}{a^6} \right) r.$$

После выбора функций w и u можно подсчитать потенциальную энергию мембраны $\mathfrak{E}$ и, пользуясь началом возможных перемещений, определить постоянные A_0, A_1, A_2, A_3 из уравнений

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial A_3} = 0.$$

Решая полученные при этом уравнения, найдем

$$A_0 = a \sqrt{\frac{21(1-\mu^2)qa}{2(23+14\mu-9\mu^2)Eh}},$$

$$A_1 = (3-\mu) \frac{A_0^2}{a^2},$$

$$A_2 = -\frac{2(5-\mu)A_0^2}{3a^2},$$

$$A_3 = \frac{(7-\mu)A_0^2}{6a^2}.$$

Напряжения в мембране σ_r и σ_θ определяются по формулам закона Гука:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r).$$

В развернутом виде эти напряжения будут

$$\sigma_r = E \sqrt{\frac{21^2 (1-\mu^2)^2 q^2 a^2}{4 (23 + 14\mu - 9\mu^2)^2 E^2 b^2}} \left[\frac{5 + 2\mu - 3\mu^2}{6 (1-\mu^2)} - \frac{r^2}{a^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{r^4}{a^4} - \frac{r^6}{6a^6} \right],$$

$$\sigma_\theta = E \sqrt{\frac{21^2 (1-\mu^2)^2 q^2 a^2}{4 (23 + 14\mu - 9\mu^2)^2 E^2 b^2}} \left[\frac{5 - 3\mu}{6 (1-\mu^2)} - \frac{3r^2}{a^2} + \right. \\ \left. + \frac{10r^4}{3a^4} - \frac{7r^6}{6a^6} \right].$$

Полагая $\mu=0,3$, найдем напряжения и прогиб w в центре $r=0$ и на контуре $r=a$ мембраны¹:

$$(\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_\theta)_{r=0} = 0,495E \sqrt[3]{\frac{q^2 a^2}{E^2 b^2}};$$

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0,242E \sqrt[3]{\frac{q^2 a^2}{E^2 b^2}};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = 0,073E \sqrt[3]{\frac{q^2 a^2}{E^2 b^2}};$$

$$(w)_{r=0} = 0,71a \sqrt[3]{\frac{qa}{Eb}}.$$

¹ Числовые коэффициенты в полученных формулах для напряжений несколько отличаются от коэффициентов в аналогичных формулах, приведенных в книге С. П. Тимошенко «Пластины и оболочки». Это различие, по-видимому, является следствием, во-первых, разных методов решения данной задачи и, во-вторых, разного подхода к выбору аппроксимирующих функций для перемещений в касательной плоскости к деформированной мембране.

Второе замечание относится и к формулам, полученным для квадратной мембраны в § 5.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН

Явление потери устойчивости связано с возможностью появления отличных от исходной форм равновесия упругих систем. Если, например, пластину нагрузить сжимающими усилиями, действующими в ее срединной плоскости, то при некотором значении этих усилий исходная прямолинейная поверхность пластины может перестать быть единственно возможной. Наряду с этой формой могут существовать и другие формы равновесия, связанные с искривлением поверхности пластины. Та нагрузка, при которой происходит это явление, называется критической.

В дальнейшем будут рассмотрены только такие случаи, когда нагрузка не изменяет своего направления после потери устойчивости пластины. Такие нагрузки называются консервативными.

Ниже рассмотрены только два метода решения задач устойчивости, которые широко применяются в расчетной практике: метод статический и метод энергетический. Первый метод основан на использовании уравнения (1.1), второй — выражения полной энергии (§ 3).

Начнем с рассмотрения первого метода.

§ 8. СТАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В этом случае дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q.$$

Под поперечной нагрузкой q здесь следует понимать ту фиктивную распределенную нагрузку, которую дают распределенные усилия в срединной поверхности при проектировании их на недеформированную плоскость пластины. Таким образом, можно получить (см. § 4)

$$q = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Тогда уравнение для исследования устойчивости пластин принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -N_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y}.$$

Здесь знаки у N_x и N_y изменены на обратные — сжатие. Выражения для моментов и перерезывающих сил, а также формулировка граничных условий в данном случае остаются такими же, как и при исследовании прочности пластин.

Усилия N_x , N_y , N_{xy} , связанные с действующими контурными силами, в самом общем случае могут быть величинами, переменными в каждой точке пластины. В этом случае вначале необходимо решить плоскую задачу теории упругости о распределении этих усилий по плоскости пластины, а затем уже можно решать задачу устойчивости этой пластины, находящейся под действием заданной системы внешних сил.

Но в наиболее важных случаях и в наиболее часто встречающихся в практике расчетах эти силы можно считать равномерно распределенными по плоскости пластины и совпадающими с распределением их по контуру.

Приведенное уравнение устойчивости точно решить не удастся, и поэтому приходится пользоваться приближенными методами, о которых говорилось выше (§ 2).

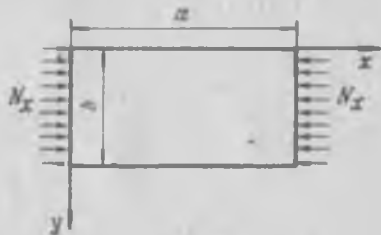


Рис. 20.

Приведем некоторые примеры. Вначале рассмотрим устойчивость равномерно сжатой пластины, шарнирно опертой по контуру (рис. 20).

В этом случае $N_x = \text{const}$ по всей плоскости пластины; $N_y = 0$, $N_{xy} = 0$. Тогда

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

При шарнирном опирании должно быть:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a,$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b.$$

Этим граничным условиям мы удовлетворим, если для прогиба примем

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.1)$$

Конечно, можно было бы принять и другое выражение для прогиба, удовлетворяющее тем же граничным условиям.

Выражение для прогиба (3.1) показывает, что после потери устойчивости поверхность пластины в направлении оси x изогнулась по m полуволнам, а по оси y — по n полуволнам.

Подставляя принятое выражение для w в уравнение равновесия, получим при $A \neq 0$

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 = N_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2.$$

Отсюда найдем

$$N_x = \pi^2 D \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{a} \right)^2}$$

Для целей расчета необходимо найти наименьшее значение сжимающей силы N_x . Из структуры последнего выражения видно, что минимум N_x будет при $n=1$, т. е. когда в направлении оси y пластины будет только одна полу-волна. Тогда

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2.$$

Как видно из этого выражения, при заданных размерах пластины величина сжимающего усилия N_x зависит

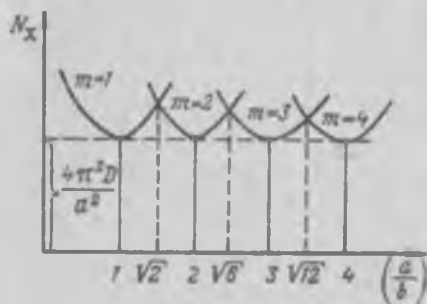


Рис. 21.

от числа полуволн m . В каждом конкретном случае нужно было бы положить $m=1, 2, 3 \dots$ и из всех полученных при этом значений N_x взять наименьшее для расчета. Однако для получения обобщимой конечной формулы будем считать, что пластина достаточно длинная и количество всевозможных значений чисел m также достаточно большое. При таком предположении можно считать, что усилие N_x является непрерывной функцией параметра m . На основании такого предположения приведенное выражение можно дифференцировать. Тогда для отыскания минимума нагрузки имеем уравнение

$$\frac{dN_x}{dm} = 2\pi^2 \frac{D}{b^2} \left[1 - \frac{1}{m^2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \left[m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] = 0.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{a}{b}.$$

Так как числа m должны быть целыми числами натурального ряда, то наименьшие значения для усилия N_x будут при

$$m = \frac{a}{b} = 1; \quad m = \frac{a}{b} = 2; \quad m = \frac{a}{b} = 3 \dots$$

и все эти наименьшие значения будут равны друг другу. Поэтому

$$N_{x \min} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} \right)^2 = \frac{4\pi^2 D}{b^2}.$$

Построим кривые зависимости усилия N_x от отношения a/b при равных значениях m (рис. 21).

Найдем точки пересечения кривых при переходе от m к $m+1$ полуволнам. Из условия равенства критических сил в точках пересечения найдем

$$m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 = m + 1 + \frac{1}{m+1} \left(\frac{a}{b} \right)^2.$$

Из этого уравнения получим

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)}.$$

Давая различные значения параметру m , найдем точки пересечения кривых на рис. 21. При $m=1$ $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, при $m=2$ $\frac{a}{b} = \sqrt{6}$ и т. д. При очень большом m получаем $\frac{a}{b} \approx m$, т. е. достаточно длинные пластины после потери устойчивости делятся примерно на квадратные полуволны. При этом для критического значения усилия N_x получаем

$$N_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}.$$

Если для заданной пластины отношение a/b не очень велико, то, подставив его в выражение для N_x вместо m , можно определить критическое значение сжимающего усилия для данной пластины. Это мы рассмотрели случай шарнирного опирания пластины по контуру. При других граничных условиях необходимо было бы взять и другое выражение для прогиба, удовлетворяющее этим граничным условиям, и воспользоваться другими приближенными методами, описанными в § 2.

Покажем, как можно достаточно просто получить решение задачи устойчивости, пользуясь методом конечных разностей, для пластины, шарнирно опертой с трех сторон и четвертой стороной свободной при равномерном сжатии (рис. 22).

Уравнение устойчивости в конечных разностях в данном случае принимает вид

$$\frac{D}{b^4} [20W_k - 8(W_l + W_l + W_m + W_n) + 2(W_p + W_q + W_r + W_0) + W_l + W_s + W_u + W_v] = -\frac{N_x}{h^2} (W_l + W_l - 2W_k).$$

Граничным условиям мы удовлетворим, если положим

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{при } y=0 \text{ и } y=c,$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0 \quad \text{при } y=c,$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}$$

и на контуре прогиб всюду равен нулю, кроме стороны $y=c$.

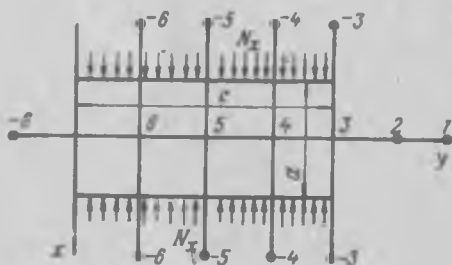


Рис. 22.

В конечных разностях эти граничные условия имеют вид

$$M_y = -D \left(\frac{W_n + W_n - 2W_k}{b^2} + \mu \frac{W_l + W_l - 2W_k}{h^2} \right) = 0,$$

$$V_y = -D \left[\frac{W_v - W_u + 2W_m - 2W_n}{2bh} + (2-\mu) \frac{2W_m - 2W_n + W_q - W_0 + W_r - W_p}{2bh^2} \right] = 0,$$

$$M_x = -D \left(\frac{W_l + W_l - 2W_k}{h^2} + \mu \frac{W_m + W_n - 2W_k}{b^2} \right) = 0.$$

Из этих уравнений для принятой нумерации узлов сетки по рис. 22 получаем

$$\left. \begin{aligned} W_k &= 0 \\ W_l &= -W_l \end{aligned} \right\} \text{длинные стороны} \quad \left. \begin{aligned} W_k &= 0 \\ W_n &= -W_m \end{aligned} \right\} \text{короткая сторона слева}$$

Для короткой стороны справа при $\mu=0,3$ получаем следующие два уравнения, связывающие законтурные точки 1 и 2 с внутриконтурными точками 3, 4, 5:

$$\left. \begin{aligned} V_y &= -D \left(\frac{W_1 - W_5 + 2W_4 - 2W_2}{2b^3} + 1,7 \frac{2W_1 - 2W_2 + 0 - 0 + 0 - 0}{2bh^2} \right) = 0, \\ M_y &= -D \left(\frac{W_2 + W_4 - 2W_3}{b^2} + 0,3 \frac{0 + 0 - 2W_3}{h^2} \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Из приведенных уравнений получаем связь законтурных точек с внутриконтурными. Для внутриконтурных точек получим следующие четыре уравнения равновесия.

Точка 3:

$$\begin{aligned} \frac{D}{b^4} [20W_3 - 8(0+0+W_4+W_2) + 2(0+0+0+0) - W_3 - W_3 + W_1 + W_5] = \\ = -\frac{N_x}{h^2} (0+0-2W_3). \end{aligned}$$

Точка 4:

$$\begin{aligned} \frac{D}{b^4} [20W_4 - 8(0+0+W_3+W_5) + 2(0+0+0+0) - W_4 - W_4 + W_2 + W_6] = \\ = -\frac{N_x}{h^2} (0+0-2W_4). \end{aligned}$$

Точка 5:

$$\begin{aligned} \frac{D}{b^4} [20W_5 - 8(0+0+W_4+W_6) + 2(0+0+0+0) - W_5 - W_5 + W_3 + 0] = \\ = -\frac{N_x}{h^2} (0+0-2W_5). \end{aligned}$$

Точка 6:

$$\frac{D}{h^4} [20W_6 - 8(0+0+W_5+0) + 2(0+0+0+0) - W_6 - W_6 + W_4 - W_6] = \\ = -\frac{N_x}{h^2} (0+0-2W_6).$$

Исключая из этих уравнений W_1 и W_2 с помощью уравнений (3.2), получим следующую однородную систему четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -8W_5 + (17-2k)W_6 &= 0, \\ W_3 - 8W_4 + (18-2k)W_5 - 8W_6 &= 0, \\ -5,4W_3 + (17-2k)W_4 - 8W_5 + W_6 &= 0, \\ (11,24-k)W_3 - 10,8W_4 + 2W_5 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где

$$k = \frac{N_x}{D} \left(\frac{h}{4} \right)^2.$$

В этой системе уравнений всего пять неизвестных величин: в точках 3, 4, 5 и 6 прогибы W_3, W_4, W_5, W_6 и параметр нагрузки k .

Из всех этих неизвестных нас интересует только параметр k . Для его определения можно из второго уравнения определить, например, W_3 и подставить его значение в остальные три. Затем из одного из этих уравнений определить W_4 и подставить его значение в оставшиеся два, в которых уже будут содержаться только W_5 и W_6 . Исключая из этих уравнений, например, W_5 , получим одно уравнение

$$W_6(8k^4 - 297,9k^3 + 3641k^2 - 1662k + 23320) = 0.$$

Так как $W_6 \neq 0$, то должно быть

$$8k^4 - 297,9k^3 + 3641k^2 - 1662k + 23320 = 0. \quad (3.4)$$

К точно такому же результату мы придем, если приравняем нулю определитель уравнений (3.3).

Поскольку нас интересует наименьшее значение нагрузки N_x , нам необходимо определить наименьший корень уравнения (3.4). Путем подбора можно убедиться, что $k_{\min} = 2,55$. Тогда

$$\frac{N_x}{D} \left(\frac{h}{4} \right)^2 = 2,55$$

или

$$N_{кр} = 40,8 \frac{D}{h^2}.$$

Точное решение задачи приводит в этой формуле к коэффициенту 43,4.

Из приведенных примеров задач по устойчивости прямоугольных пластин видно, что формулу для критической нагрузки можно всегда представить в виде

$$N_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{h^2}$$

или при $\mu = 0,3$

$$\sigma_{кр} = k \frac{0,9E}{\left(\frac{h}{b} \right)^2}. \quad (3.5)$$

Числовое значение коэффициента k в этой формуле будет зависеть как от характера действующей на пластину нагрузки, так и от граничных условий задачи. В справочниках по строительной механике имеется достаточное количество этих коэффициентов для различных случаев нагружения и заделки контура пластин.

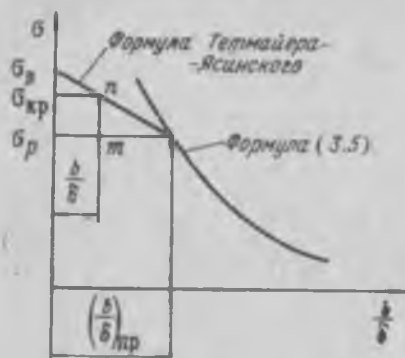


Рис. 23.

Как видно из самой структуры формулы (3.5), она справедлива только в пределах упругости $\sigma_{kp} < \sigma_P$. Если только $\sigma_{kp} > \sigma_P$ (а практически $\sigma_{kp} > \sigma_P$), то приведенной формулой пользоваться нельзя. В этих случаях пользуются формулой Тетмайера—Ясинского, которая хорошо зарекомендовала себя на практике. Эта формула иллюстрируется рис. 23, откуда

$$\sigma_{kp} = \sigma_P + mn \approx \sigma_B + mn$$

или

$$\frac{\sigma_{kp} - \sigma_B}{mn} = \frac{\left(\frac{b}{d}\right)_{np}}{\left(\frac{b}{d}\right)_{np} - \left(\frac{b}{d}\right)}$$

Отсюда получаем формулу Тетмайера — Ясинского

$$\sigma_{kp} = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_P) \frac{\left(\frac{b}{d}\right)}{\left(\frac{b}{d}\right)_{np}},$$

где

$$\left(\frac{b}{d}\right)_{np} = \sqrt{k \frac{0,9E}{\sigma_P}}.$$

Если $\left(\frac{b}{d}\right) > \left(\frac{b}{d}\right)_{np}$, то следует пользоваться формулой (3,5), если же $\left(\frac{b}{d}\right) < \left(\frac{b}{d}\right)_{np}$, то следует пользоваться формулой Тетмайера — Ясинского.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН

В более сложных случаях нагружения пластин для решения вопросов устойчивости с успехом может использоваться энергетический метод, основанный на начале возможных перемещений.

Рассмотрим пластину в деформированном состоянии после потери устойчивости. Полная энергия пластины в этом состоянии будет равна работе внутренних сил упругости и работе внеш-

них сил. Работа сил упругости численно равна энергии изгиба и кручения пластины и выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{упр}} = \frac{D}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

где интеграл распространяется по всей площади пластины.

Упругая энергия, накопленная в пластине до выпучивания, в вопросах исследования устойчивости роли не играет, и мы ее не рассматриваем. Работа внешних сил, действующих в срединной плоскости пластины:

$$T = -\frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy.$$

Полная энергия выпученной пластины после потери устойчивости

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{упр}} + T = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Поскольку пластина в рассматриваемом состоянии находится в равновесии под действием заданных внешних нагрузок, то, применяя к этому состоянию начало возможных перемещений, можно сказать, что сумма работ всех сил на возможных перемещениях будет равна нулю, т. е.

$$\delta \mathcal{E} = 0.$$

Практически при пользовании этим условием предварительно необходимо задаться подходящим выражением для прогиба w , удовлетворяющим обязательно всем геометрическим граничным условиям задачи и необязательно (но желательно) силовым:

$$w = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots,$$

где $f_1, f_2, \dots$ — известные функции, удовлетворяющие граничным условиям;

a_1, a_2 — неизвестные коэффициенты (параметры).

Подставив эту функцию прогиба в выражение энергии и проинтегрировав его по площади всей пластины, получим, что пол-

ная энергия будет выражена в функции неизвестных параметров $a_1, a_2, \dots$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_1, a_2, \dots).$$

Начало возможных перемещений приводит к уравнениям (§ 3)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad (3.6)$$

Таких уравнений будет столько, сколько неизвестных параметров a_i .

Полученные при этом уравнения будут однородными. Решением такой системы уравнений будет равенство нулю определителя. Приравнявая нулю определитель, получим одно уравнение, из которого определится критическое значение внешнего усилия.

Возьмем в качестве примера задачу об устойчивости прямоугольной шарнирно опертой пластины, находящейся под действием сжимающей нагрузки N_x , равномерно распределенной по сторонам $x=0$ и $x=a$ (см. рис. 20).

В качестве выражения для прогиба w примем

$$w = a_1 xy \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) + a_2 x^2 y^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2.$$

Для простоты выкладок ограничимся первым членом

$$w = a_1 xy \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Данное выражение удовлетворяет только одному условию $w=0$ по контуру и не удовлетворяет силовым граничным условиям, тем не менее этим выражением можно пользоваться для приближенного решения задачи. Полное выражение для потенциальной энергии будет иметь вид

$$\mathcal{E} = \frac{Da b a_1^2}{15} \left(\frac{8}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right) - \frac{N_x a b^3 a_1^2}{180}.$$

Условия (3.6) в данном случае приводят к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = \frac{2Da b a_1}{15} \left(\frac{8}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right) - \frac{2N_x a b^3 a_1}{180} = 0.$$

Отсюда получаем

$$N_{xp} = \frac{12 D}{b^2} \left(\frac{8}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Эту формулу можно записать в таком виде:

$$N_{xp} = \frac{k_1 \pi^2 D}{b^2},$$

где

$$k_1 = 1,22 \left(\frac{8}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Точное решение данной задачи приводит к следующему значению этого коэффициента:

$$k_{\text{точн}} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^2.$$

В табл. 1 приведены для сравнения значения этих коэффициентов для некоторых отношений a/b .

Таблица 1

$\frac{a}{b}$	0,2	1	1,41
k_1	33,7	4,48	3,87
$k_{\text{точн}}$	27	4	4,49

Из этой таблицы видно, что наибольшая ошибка приближенного решения получается для малых значений a/b . Достаточно увеличить число членов в выражении для прогиба, как ошибка приближенного решения уменьшится. Однако несколько лучшего результата можно добиться, если взять для прогиба такое выражение, которое по возможности будет удовлетворять и силовым граничным условиям. Например, возьмем

$$w = a_1 x \left(1 - \frac{x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Опуская все промежуточные выкладки, приведем готовый результат для коэффициента k_1 (табл. 2).

Таблица 2

$\frac{a}{b}$	0,2	1,0	1,4
k_1	32,44	4,2	4,56
$k_{\text{точн}}$	27	4	4,49

Во всех случаях можно получить надежный результат, если подходящее выражение удовлетворяет всем граничным условиям задачи. Например, выражение

$$w = A(x^4 - 2ax^3 + a^3x) \sin \frac{\pi y}{b}$$

удовлетворяет всем условиям шарнирного опирания. В этом случае для коэффициента k_1 получаем следующие значения (табл. 3).

Таблица 3

$\frac{a}{b}$	0,2	1,0	1,4
k_1	27,2	3,98	4,43
$k_{\text{точн}}$	27	4	4,49

Глава IV

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

§ 10. ЭЙЛЕРОВА ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ

Критические нагрузки для стержней, так же как и для пластин, могут быть определены как из решения дифференциального уравнения задачи, так и энергетическим методом.

Дифференциальное уравнение равновесия изогнутого стержня, как известно, имеет вид

$$EJy'' = M.$$

В случае нагружения стержня по рис. 24 выражение для изгибающего момента в произвольном сечении стержня будет

$$M = P(\delta - y).$$

Тогда

$$EJy'' = P(\delta - y)$$

или

$$y'' + k^2 y = \frac{P\delta}{EI},$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EI}.$$

Решение этого дифференциального уравнения будет состоять из решения однородного уравнения (без правой части) и решения уравнения с правой частью (частное решение):

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \delta.$$

Для определения постоянных интегрирования имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad y=0, \quad y'=0,$$

$$\text{при } x=l \quad y=\delta.$$

Из этих граничных условий находим

$$B=0,$$

$$A=-\delta.$$

Тогда $y = \delta(1 - \cos kx)$.

Это выражение для прогиба должно быть справедливым на всей длине стержня. Чтобы получить значение прогиба на свободном конце $x=l$, равное $y=\delta$, необходимо положить $(\cos kx)_{x=l}=0$, т. е. должно быть

$$kl = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

или

$$k = \frac{(2n+1)\pi}{2l} = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

откуда

$$P = \frac{\pi^2 EI (2n+1)^2}{4l^2}.$$

Наименьшее значение для силы P будет при $n=0$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Это эйлера критическая сила для стержня.

При других граничных условиях числовой коэффициент в приведенной формуле будет другим. В общем случае можно написать

$$P_{кр} = C \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (4.1)$$



Рис. 24.

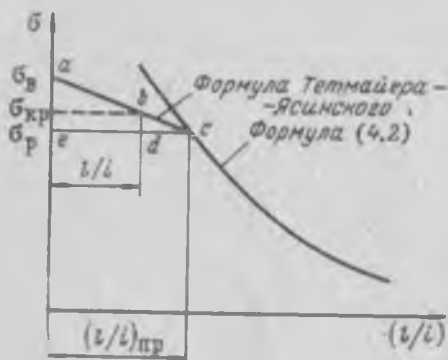
где C — зависящий от граничных условий числовой коэффициент (табл. 4).

Таблица 4

Характер граничных условий	Один жестко заделан, другой свободный	Оба конца шарнирно оперты	Один жестко заделан, другой шарнирно	Оба конца жестко заделаны
C	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	4

Установим пределы применимости формулы (4.1).

Поделив $P_{кр}$ на площадь поперечного сечения стержня, получим критическое напряжение



$$\sigma_{кр} = \frac{C\pi^2 E I}{l^2 F}$$

или

$$\sigma_{кр} = \frac{C\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad (4.2)$$

где

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}}.$$

Формула (4.2) применима, если

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_p.$$

В предельном случае

$$\frac{C\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \sigma_p,$$

откуда

$$\left(\frac{l}{i}\right)_{кр} = \sqrt{\frac{C\pi^2 E}{\sigma_p}}.$$

Если $\left(\frac{l}{i}\right) < \left(\frac{l}{i}\right)_{кр}$, то формула (4.2) становится неприменимой, так как критическое напряжение получается выше σ_p . В этом случае следует пользоваться формулой Тетмайера—Ясинского (рис. 25).

Из подобия треугольников bcd и ace находим

$$\sigma_{кр} = \sigma_b - (\sigma_b - \sigma_p) \frac{\frac{b}{l}}{\left(\frac{l}{l}\right)_{пр}}.$$

После умножения $\sigma_{кр}$ на площадь сечения стержня получим выражение для критической силы за пределом пропорциональности.

§ 11. МЕСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ¹

Если стержень состоит из отдельных пластинчатых элементов (рис. 26), то, кроме рассмотренной в § 10 формы потери устой-

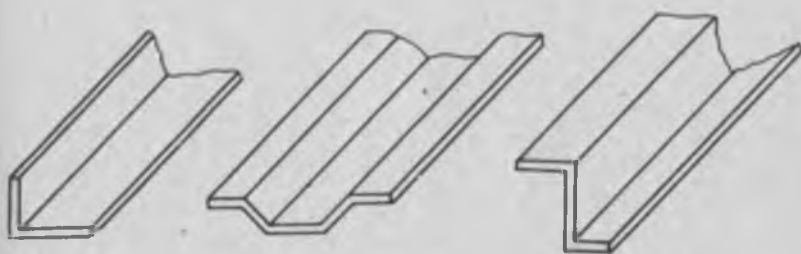


Рис. 26.

чивости, сопровождаемой общим изгибом оси, может быть еще местная потеря устойчивости полок или стенок как пластины. Величину критических напряжений для полок и стенок профиля можно определить по формуле (3.5). Эта формула была получена для длинной прямоугольной пластины, сжатой в направлении длинной стороны и теряющей устойчивость с образованием квадратных полуволн, причем по ширине такой пластины образуется только одна полуволна.

Величину коэффициента k в (3.5) следует брать в зависимости от граничных условий на контуре полуволны. Например, рассчитывается профиль постоянной толщины, изображенной на рис. 27

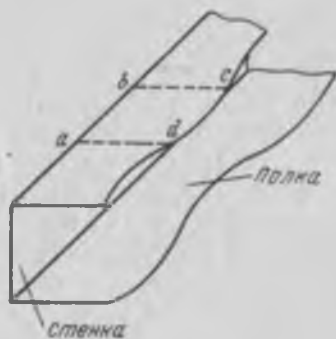


Рис. 27.

¹ Здесь, так же как и в § 10, предполагается, что стержень при сжатии не закручивается. Такая расчетная схема не противоречит экспериментальным результатам для авиационных прокатных профилей.

(верхняя полка показана после потери устойчивости; пунктирными линиями показаны границы полуволн). Каждую полуволну верхней полки рассматриваем как квадратную пластину со стороной, равной ширине полки. Граничные условия для нее будут следующие: сторона ab — шарнирно опертая, стороны ad и bc — шарнирно опертые, сторона dc — свободная.

В этом случае коэффициент $k=1,44$.

При определении критических напряжений для стенки коэффициент $k=4$ как для шарнирно опертой квадратной пластины со стороной, равной ширине стенки.

Для того чтобы рассматриваемый профиль был равнопрочен как по общей, так и по местной устойчивости, необходимо, чтобы критические напряжения в обоих случаях были равны друг другу:

для пластины

$$\sigma_{кр} = k \frac{0,9E}{\left(\frac{b}{l}\right)^2}; \quad (4.3)$$

для стержня

$$\sigma_{кр} = \frac{C\pi^2 E}{\left(\frac{l}{I}\right)^2}.$$

Из условия равенства критических напряжений получаем связь всех геометрических параметров профиля с коэффициентами k и C :

$$\frac{\frac{b}{l}}{\frac{l}{I}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{0,9k}{C}}. \quad (4.4)$$

Профиль, удовлетворяющий условию (4.4), будет наимыгоднейшим.

Формулы (4.3) и (4.4) будут справедливы, если критические напряжения в профиле не превосходят предел упругости. Если критические напряжения в профиле, подсчитанные по формулам (4.3), (4.4), выше предела упругости, то следует пользоваться соответствующими формулами Тетмайера—Ясинского.

Для определения критических напряжений в стенке и полке имеем формулу Тетмайера—Ясинского

$$\sigma_{кр} = \sigma_s - (\sigma_s - \sigma_s) \frac{\frac{b}{l}}{\left(\frac{b}{l}\right)_{кр}},$$

где

$$\left(\frac{b}{l}\right)_{кр} = \sqrt{k \frac{0,9E}{\sigma_s}}.$$

Из условия равнопрочности профиля по местной и общей устойчивости получаем

$$\sigma_x - (\sigma_x - \sigma_x) \frac{\frac{b}{\delta}}{\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{пр}}} = \sigma_x - (\sigma_x - \sigma_x) \frac{\frac{l}{i}}{\left(\frac{l}{i}\right)_{\text{пр}}},$$

откуда

$$\frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)_{\text{пр}}}{\left(\frac{l}{i}\right)_{\text{пр}}} = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)}{\left(\frac{l}{i}\right)}$$

или

$$\frac{\frac{b}{\delta}}{\frac{l}{i}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{0,9k}{C}}.$$

Таким образом, условия равнопрочности профиля как в упругой, так и в неупругой областях совпадают, т. е. профиль, наимыгоднейший в упругой зоне, остается наимыгоднейшим и в неупругой зоне работы материала.

§ 12. ЭФФЕКТИВНАЯ ШИРИНА ОБШИВКИ, РАБОТАЮЩЕЙ СОВМЕСТНО СО СТЕРЖНЕВЫМ НАБОРОМ

Если пластина, прикрепленная по периметру к профилю, потеряла устойчивость от сжатия, то она выключается из дальнейшей работы и только небольшие узкие полоски, прилегающие к профилям, продолжают воспринимать дополнительную нагрузку.

Такое явление будет наблюдаться в том случае, если критическое напряжение пластины меньше критического напряжения профиля. На рис. 28 показана подкрепленная по контуру пластина после потери устойчивости. Центральная часть пластины после потери устойчивости условно обведена волнистой линией. Прилегающие к профилям полоски пластины шириной c с каждой стороны, которые продолжают воспринимать нагрузку, приближенно можно определить из следующих рассуждений.

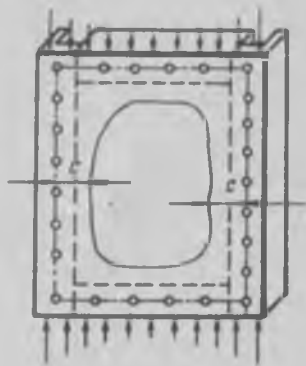


Рис. 28.

Рассмотрим пластину шириной $2c$ как свободно опертую и

применим для определения ее критического напряжения формулу (3.5) при $k=4$:

$$\sigma_{кр} = 3,6 \frac{E}{\left(\frac{b}{\delta}\right)^2}.$$

Подставив сюда вместо b размер $2c$, получим

$$\sigma_{кр} = 3,6 \frac{E}{\left(\frac{2c}{\delta}\right)^2}.$$



Рис. 29.

откуда найдем

$$2c = 19\delta \sqrt{\frac{E}{\sigma_{кр}}}. \quad (4.5)$$

Это так называемая формула Кармана. Полоска пластины размером c , прилегающая к профилю, называется эффективной шириной.

Из условия совместности деформаций прилегающей полосы и профиля

$$\frac{3,6}{\left(\frac{2c}{\delta}\right)^2} = \frac{\sigma_{кр.стр}}{E}$$

получим

$$2c = 1,9\delta \sqrt{\frac{E}{\sigma_{кр.стр}}}, \quad (4.6)$$

где $\sigma_{кр.стр}$ — критическое напряжение стрингера.

Размер c обычно отсчитывают от места прикрепления профиля к пластине в сторону пластины (рис. 29).

Подсчитанная по формуле (4.6) эффективная ширина c учитывается затем при определении площади поперечного сечения профиля при его расчете на сжатие. Формулой (4.6) пользуются и при расчете искривленных панелей.

Раздел II

ПРОЧНОСТЬ ОБОЛОЧЕК

Глава V

БЕЗМОМЕНТНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В данном разделе рассмотрены некоторые вопросы расчета оболочек, широко применяемых в различных конструкциях. В гл. V остановимся на расчете безмоментных оболочек вращения. Под безмоментной оболочкой принято понимать такую оболочку, напряженное состояние которой определяется в основном мембранными («цепными») напряжениями. Напряжения изгиба в таких оболочках обычно бывают малы в сравнении с мембранными. Формулы, вытекающие из безмоментной теории, играют основную роль в расчетах на прочность тонкостенных сосудов и емкостей на внутреннее давление. Безмоментное напряженное состояние в таких конструкциях обычно нарушается или в местах закрепления краев оболочки, или в местах скачкообразного изменения толщины, или в местах сочленения оболочек различной геометрической формы, а также в местах скачкообразного изменения нагрузки. Задачи этого типа рассмотрены в гл. VI.

§ 13 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ОБОЛОЧЕК

В дальнейшем будем рассматривать только оболочки вращения. Под оболочкой вращения принято понимать тело, образованное вращением двух плоских кривых вокруг оси, лежащей в их плоскости и не пересекающей эти кривые. Расстояние между этими кривыми образует толщину оболочки.

Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной.

Задавая форму срединной поверхности и толщину оболочки, мы исчерпывающим образом определяем оболочку в геометрическом отношении. В дальнейшем будем рассматривать только оболочки постоянной толщины.

След пересечения оболочки с плоскостью, проходящей через ось вращения, называется меридианом (рис. 30). Меридианы совпадают с образующими оболочки. След пересечения оболочки

с плоскостью, перпендикулярной оси оболочки, называется параллелью или параллельным кругом.

Радиус меридиана называется первым главным радиусом кривизны и обозначается R_1 .



Рис. 30.

Радиус кривизны кривой, полученной от пересечения меридиана плоскостью, перпендикулярной к этому меридиану, называется вторым главным радиусом и обозначается R_2 .

Оба радиуса лежат на одной прямой, являющейся нормалью к меридиану. Точка пересечения этой нормали с осью оболочки k_2 и точка k_1 конца нормали являются центрами кривизны поверхности в данной точке. Угол между нормалью к меридиану и осью оболочки φ называется углом широты рассматриваемой точки.

§ 14. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Рассмотрим условия равновесия оболочки, нагруженной симметрично относительно ее оси.

На рис. 31 показана оболочка, из которой мысленно вырезан элемент $s_1 s_2$ двумя меридиональными сечениями под углом $d\theta$ одно к другому и двумя коническими сечениями под углом $d\varphi$, к которому для равновесия приложены внутренние неизвестные пока усилия N_φ и N_θ , а также внешняя нагрузка интенсивностью q . Составим уравнение равновесия выделенного элемента в направлении радиуса кривизны меридиана (рис. 32):

$$N_\theta R_1 d\varphi d\theta \sin \varphi + (N_\varphi + dN_\varphi)(r + dr) d\theta d\varphi + q R_1 r d\theta d\varphi = 0.$$

Пренебрегая в этом уравнении бесконечно малыми величинами dr и dN_φ и сокращая на $d\theta d\varphi$, получим

$$N_\theta R_1 \sin \varphi + N_\varphi r + q R_1 r = 0.$$

Согласно рис. 31 имеем

$$r = R_2 \sin \varphi.$$

Тогда

$$N_\theta R_1 + N_\varphi R_2 + q R_1 R_2 = 0.$$

Поделим это равенство на $R_1 R_2$. Тогда

$$\frac{N_\varphi}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = -q. \quad (5.1)$$

Это и есть уравнение Лапласа.

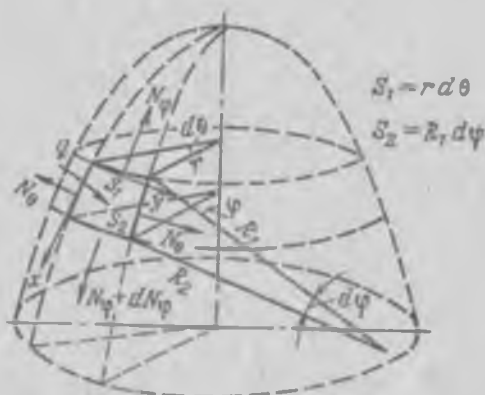


Рис. 31.

В уравнении (5.1) два неизвестных — N_φ и N_θ . Для получения второго уравнения рассмотрим равновесие части оболочки, расположенной над параллельным кругом, определяемым углом φ (рис. 33):

$$2\pi r N_\varphi \sin \varphi + Q = Q,$$



Рис. 32.

откуда

$$N_\varphi = -\frac{Q}{2\pi r \sin \varphi} = -\frac{Q}{2\pi R_2 \sin^2 \varphi}, \quad (5.2)$$

где Q — равнодействующая всей нагрузки, расположенной выше рассматриваемого сечения.

Из уравнений (5.1) и (5.2) можно определить оба мембранных усилия при осесимметричном нагружении оболочки вращения. Рассмотрим некоторые частные случаи применения этих уравнений.

На рис. 34, а приведена сферическая оболочка, нагруженная внутренним равномерным давлением q .

В этом случае

$$N_\varphi = N_\theta = N, \quad R_1 = R_2 = R,$$

$$\frac{2N}{R} - q = 0, \quad N = \frac{qR}{2}, \quad z = \frac{qR}{2\delta},$$

где δ — толщина оболочки.

Сферическая оболочка под нагрузкой, меняющейся по закону $q = q_0 \cos^2 \varphi$, приведена на рис. 34, б.

В данном случае для равнодействующей силы Q имеем выражение

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} q R d\varphi r d\theta \cos \varphi.$$

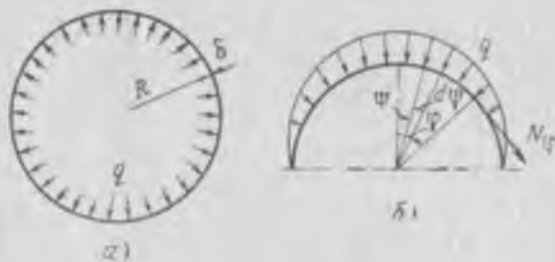


Рис. 34.

Тогда

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{Q}{2\pi R \sin^2 \varphi} = \\ &= -\frac{q_0 R}{\sin^2 \varphi} \int_0^{\pi} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi = -\frac{q_0 R}{4} (1 + \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Из уравнения Лапласа получим

$$N_\theta = -\frac{q_0 R}{4} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Из этих выражений видно, что усилие N_ϕ всюду сжимающее, а усилие N_θ меняет свой знак. При угле $\varphi \approx 55^\circ$ оно обращается в нуль, а при $\varphi > 55^\circ$ будет растягивающим.

В случае цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним равномерным давлением (рис. 35), имеем $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, где R — радиус цилиндра. Тогда

$$\frac{N_\phi}{R} - q = 0, \quad N_\phi = qR, \quad \sigma_\phi = \frac{qR}{\delta}.$$



Рис. 35.

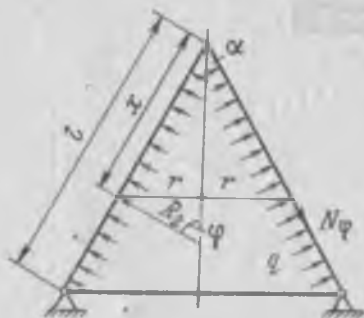


Рис. 36.

Меридиональные напряжения определим из уравнения (5.2):

$$N_\phi = \frac{\pi R^2 q}{2\pi R} = \frac{qR}{2}, \quad \sigma_\phi = \frac{qR}{2\delta}.$$

В случае конической оболочки под внутренним равномерным давлением q (рис. 36)

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$N_\phi = qR_\phi = qx \operatorname{tg} \alpha, \quad \sigma_\phi = \frac{qx \operatorname{tg} \alpha}{\delta}.$$

Меридиональные напряжения определим из уравнения (5.2):

$$N_\phi = \frac{\pi r^2 q}{2\pi r \cos \alpha}$$

или

$$\sigma_\phi = \frac{qx \operatorname{tg} \alpha}{2\delta}.$$

На рис. 37 приведена эллипсоидальная торовая оболочка, нагруженная внутренним равномерным давлением. В данном слу-

чае из условия равновесия участка оболочки AB в направлении оси y получим

$$2\pi r N_\varphi \sin \varphi = \pi (r^2 - r_0^2) q,$$

откуда для меридионального усилия

$$N_\varphi = \frac{(r^2 - r_0^2) q}{2r \sin \varphi}. \quad (5.3)$$

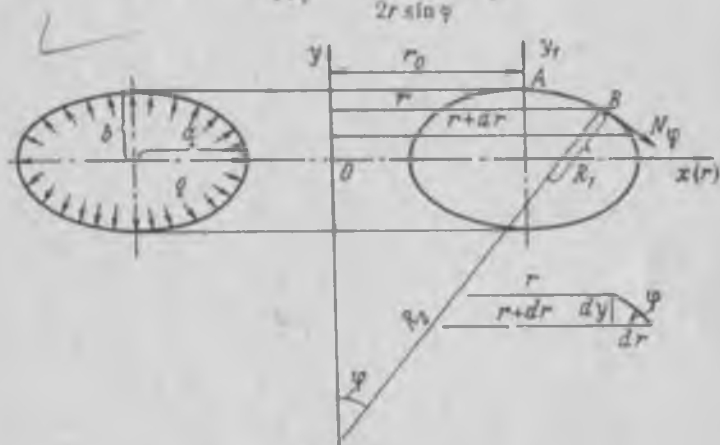


Рис. 37.

Выражение для окружного сечения N_θ получим из уравнения Лапласа, подставив в него найденное значение N_φ :

$$N_\theta = q R_2 \left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2 R_1 r \sin \varphi} \right). \quad (5.4)$$

В формулах (5.3) и (5.4) удобнее всего главные радиусы кривизны R_1 и R_2 , а также $\sin \varphi$ выразить в функции r .

Для R_1 имеем следующее выражение из аналитической геометрии:

$$R_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 r}{dy^2}}.$$

По рис. 37

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}.$$

По этому же рисунку находим

$$\frac{dy}{dr} = -\operatorname{tg} \varphi$$

или

$$\frac{dr}{dy} = -\operatorname{ctg} \varphi.$$

Пусть нам задано уравнение эллипса в осях x, y :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Это уравнение в осях r, y будет иметь вид

$$\frac{(r-r_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

откуда

$$r = r_0 + \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Найдем от этого выражения первую и вторую производные:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dy} &= -\frac{a \sqrt{a^2 - (r-r_0)^2}}{b(r-r_0)}, \\ \frac{d^2r}{dy^2} &= -\frac{a^4}{b^2(r-r_0)^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, первую и вторую производные мы выразили в функции радиуса r . Теперь для главных радиусов кривизны R_1 и R_2 , а также для $\sin \varphi$ получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{[(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}, \\ R_2 &= \frac{r [(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4]^{\frac{1}{2}}}{b(r - r_0)}, \\ \sin \varphi &= \frac{b(r - r_0)}{[(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Если подставить выражения (5.5) в (5.3) и (5.4), получим формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q(r+r_0)}{2rb\delta} \sqrt{(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4}, \\ \sigma_\theta &= \frac{q}{2b\delta} \frac{2r(b^2 - a^2)(r - r_0) + a^4}{\sqrt{(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Из этих формул видно, что напряжение σ_r будет всегда положительным, если на оболочку действует внутреннее давление. Что же касается напряжения σ_θ , то оно при некотором значении r проходит через нуль и меняет свой знак.

Например, если действует внутреннее давление, то при $r < r_0$ кольцевое напряжение σ_θ будет растягивающим, при $r > r_0$ — сжимающим. Поэтому эта часть торовой оболочки при некотором значении таких напряжений может потерять устойчивость.

Для круглого тора (рис. 38), нагруженного постоянным внутренним давлением q , при $a=b$ выражения (5.6) для напряжений принимают вид

$$\sigma_r = \frac{q(r + r_0)a}{2r^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{qa}{2b}. \quad (5.7)$$

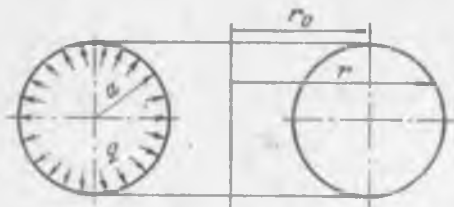


Рис. 38.

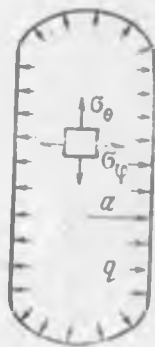


Рис. 39.

Из (5.7) для круглого тора можно получить соответствующие формулы для цилиндрической и сферической оболочек. Вторая из приведенных формул не связана с характерным параметром тора радиусом r_0 и поэтому сразу может быть использована для подсчета осевых напряжений в цилиндрической оболочке (рис. 39).

Формулу для напряжений σ_r перепишем в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{qa}{2b} \left(1 + \frac{r_0}{r} \right).$$

При увеличении радиуса r_0 одновременно с ним увеличивается и текущий радиус r . Тогда в пределе

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r_0}{r} \right) = 1.$$

Поэтому можно записать

$$\sigma_r = \frac{qa}{2b} \left[1 + \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r_0}{r} \right) \right] = \frac{qa}{b}.$$

Этой формулой определяются окружные напряжения в цилиндрической оболочке при постоянном внутреннем давлении q .

В случае сферы в формулах (5.7) необходимо положить $r_0=0$.

В случае эллипсоидальной оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением, в формулах (5.6) необходимо положить $r_0=0$. Тогда выражения для напряжений в этой оболочке (рис. 40) будут иметь вид

$$\sigma_r = \frac{q}{2bh} \sqrt{r^2(b^2 - a^2) + a^4},$$

$$\sigma_\theta = \frac{q}{2bh} \frac{2r^2(b^2 - a^2) + a^4}{\sqrt{r^2(b^2 - a^2) + a^4}}. \quad (5.8)$$

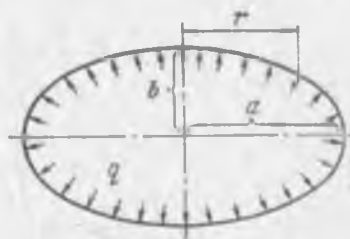


Рис. 40.

Из этих формул также видно, что напряжение σ_r всюду будет одного знака при любом значении r ; напряжение σ_θ при некотором значении r переходит через нуль и меняет свой знак в такой точке, которую можно найти из уравнения

$$2r^2(b^2 - a^2) + a^4 = 0,$$

откуда

$$r = \sqrt{-\frac{a^4}{2(b^2 - a^2)}}, \quad (a > b).$$

§ 15. НАПРЯЖЕНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ОТ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Все жидкие тела в отличие от твердых принимают форму того сосуда, в котором они находятся.

Давление внутри жидкости складывается из давления на свободной поверхности (q_n) и давления столба жидкости высотой от рассматриваемой точки до свободной поверхности. По рис. 41 сила давления на площадку F внутри жидкости

$$P = \gamma h F + q_n F,$$

где γ — удельный вес жидкости.

Поделив это выражение на F , получим суммарное удельное давление в данной точке:

$$q = \frac{P}{F} = \gamma h + q_n.$$

Давление жидкости на площадку F называется гидростатическим давлением. Гидростатическое давление в данной точке жидкости совпадает с нормальным напряжением внутри жидкости. Нор-

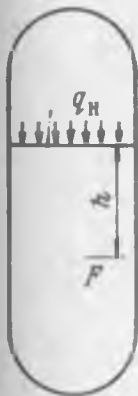


Рис. 41.

мальное напряжение в данной точке жидкости одинаково по всем направлениям (закон Паскаля).

Гидростатическое давление направлено всегда нормально к той поверхности, на которую оно действует. Величина гидростатического давления в данной точке измеряется высотой столба жидкости над этой точкой и не зависит от формы сосуда, в котором находится эта жидкость.

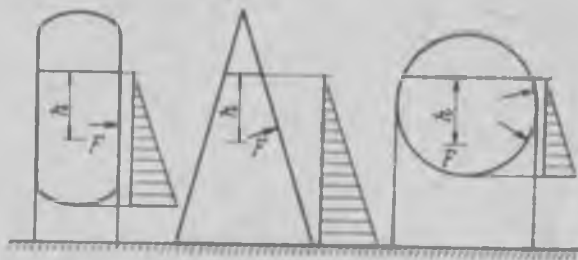


Рис. 42.

На рис. 42 приведены примеры эпюр давления для некоторых сосудов.

Для определения мембранных напряжений в оболочках вращения от гидростатического давления используются уравнения (5.1) и (5.2). В эти уравнения необходимо подставить значение гидростатического давления, выраженного в зависимости от высоты столба жидкости.

В случае цилиндрической оболочки (рис. 43)

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = R, \quad q = -(H - x)\gamma.$$

Из уравнения Лапласа следует, что

$$\frac{N_\theta}{R} = (H - x)\gamma$$

или

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma(H - x)R}{\delta}.$$

В данном случае $N_\varphi = 0$.

В случае конической оболочки (рис. 44, а) имеем $R_1 = \infty$, $R_2 = x \operatorname{tg} \alpha$:

$$q = -\gamma[x \cos \alpha - (l - H)],$$

$$N_\theta = -qR_2 = \gamma x[x \cos \alpha - (l - H)] \operatorname{tg} \alpha.$$

Для определения усилий N_φ рассмотрим рис. 44, б.

Из условия равновесия этой части конуса в направлении его оси получим

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{l-H}{\cos \alpha}}^x q d\xi \sin \alpha r d\theta = 2\pi r_1 N_\varphi \cos \alpha.$$

Подставив сюда

$$q = \gamma [\xi \cos \alpha - (l - H)],$$

$$r = \xi \sin \alpha, \quad r_1 = x \sin \alpha,$$

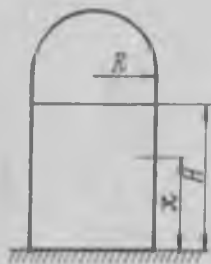


Рис. 43.

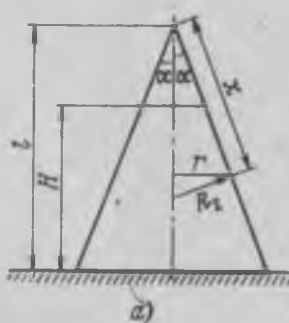


Рис. 44.



после интегрирования получим

$$N_\varphi = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{6x} \left[\frac{(l-H)^3}{\cos^2 \alpha} + 2x^3 \cos \alpha - 3(l-H)x^2 \right].$$

В приведенных формулах значения x лежат в пределах

$$\frac{l}{\cos \alpha} > x > \frac{l-H}{\cos \alpha}.$$

Наибольшие значения усилия N_0 и N_φ получают при $x = \frac{l}{\cos \alpha}$:

$$N_{0 \max} = \frac{\gamma l H \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha},$$

$$N_{\varphi \max} = \frac{\gamma H^2 (3l - H) \operatorname{tg} \alpha}{6l \cos \alpha}.$$

Если конус полностью залит жидкостью, то $H = l$. Тогда выражения для усилий получат следующий вид:

$$N_\varphi = \frac{1}{3} \gamma x^2 \sin \alpha, \quad N_0 = \gamma x^2 \sin \alpha.$$

Рассмотрим случай нагружения конической оболочки, приведенной на рис. 45:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$q = -\gamma(H - x \cos \alpha),$$

$$N_\theta = -qR_2 = \gamma(H - x \cos \alpha) x \operatorname{tg} \alpha.$$

Для определения меридиональных усилий N_φ рассмотрим равновесие нижней части конуса, определяемой расстоянием x от его вершины (рис. 45, б). Из условия равновесия всех сил,

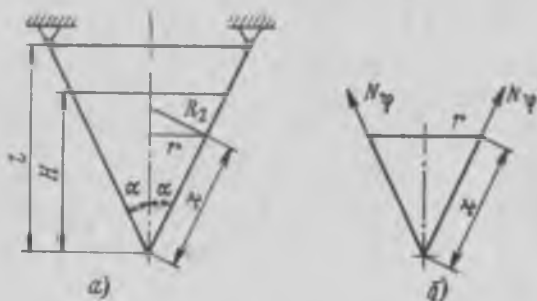


Рис. 45.

действующих на эту часть оболочки в направлении на ее ось, получим

$$2\pi r N_\varphi \cos \alpha = V\gamma,$$

где V — объем уравниваемой части жидкости;

$V\gamma$ — вес этой жидкости.

Объем жидкости

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 x \cos \alpha + \pi r^2 (H - x \cos \alpha).$$

Учитывая, что $r = x \sin \alpha$, и используя приведенное значение для V , окончательно получим формулу для усилия N_φ :

$$N_\varphi = \gamma x \left(\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} x \cos \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

Это усилие достигает наибольшей величины при $x = \frac{3H}{4 \cos \alpha}$:

$$(N_\varphi)_{\max} = \frac{3\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{16 \cos \alpha}.$$

Как легко убедиться, наибольшее значение кольцевого усилия N_θ будет при $x = \frac{H}{2 \cos \alpha}$:

$$(N_\theta)_{\max} = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \alpha}.$$

Если коническая оболочка в форме дна бака будет нагружена согласно рис. 46, то для усилий N_φ и N_θ имеем следующие выражения:

$$N_\varphi = \frac{1}{2} \gamma x \left(h + l - \frac{2}{3} x \cos \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$N_\theta = \gamma x (h + l - x \cos \alpha) \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим нижнее днище, выполненное в форме торовой оболочки эллипсоидального сечения, нагруженное гидростатическим давлением. Вес заштрихованной части жидкости (рис. 47) будет

$$G = \gamma \int_H^h (\pi r^2 - \pi r_0^2) dy + \gamma (\pi r^2 - \pi r_0^2) (H + y) =$$

$$= \pi \gamma \int_y^b (r^2 - r_0^2) dy + \pi \gamma (r^2 - r_0^2) (H + y).$$

Подставляя в подынтегральное выражение значение r^2 по формуле $r = r_0 + a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ и интегрируя в указанных пределах, получим

$$G = \pi \gamma \left[\frac{1}{2} \pi r_0 a b - r_0 a y \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} - r_0 a b \arcsin \frac{y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} a^2 b - a^2 y + \frac{1}{3} \frac{a^2 y^3}{b^2} + (r^2 - r_0^2) (H + y) \right].$$

Заменим здесь y его выражением через r по формуле

$$y = b \sqrt{1 - \frac{(r - r_0)^2}{a^2}}.$$

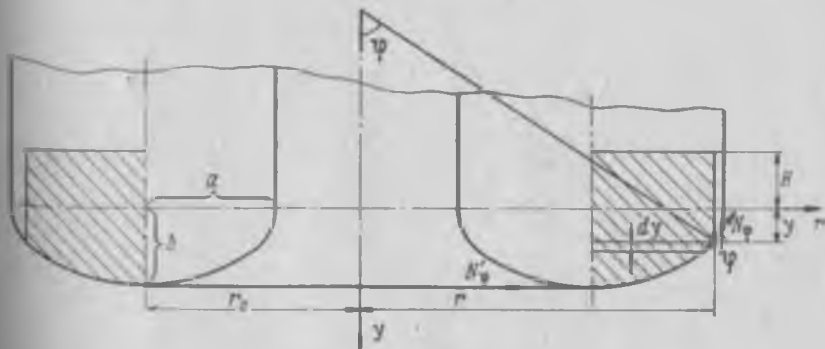


Рис. 47.

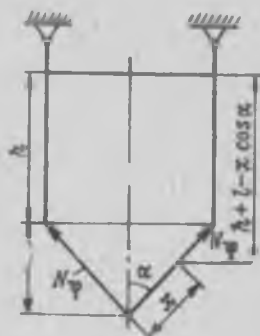


Рис. 46.

Окончательно

$$G = \pi \gamma \left\{ \frac{1}{2} \pi r_0 a b + \frac{2}{3} a^2 b + H (r^2 - r_0^2) - r_0 a b \arcsin \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} - \frac{1}{3} b \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} [2(a^2 - r^2) + r_0(r_0 + r)] \right\}.$$

Теперь составим условие равновесия веса жидкости в заштрихованном объеме и меридиональных усилий N_φ на ось оболочки. Имеем

$$2\pi r N_\varphi \sin \varphi = G,$$

откуда

$$N_\varphi = \frac{G}{2\pi r \sin \varphi}.$$

После замены $\sin \varphi$ в последнем выражении его значением по формуле (5.5) получим

$$N_\varphi = \frac{\gamma}{2br(r-r_0)} \left\{ \frac{1}{2} \pi r_0 a b + \frac{2}{3} a^2 b + H (r^2 - r_0^2) - \right. \\ \left. - r_0 a b \arcsin \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} b \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} [2(a^2 - r^2) + r_0(r_0 + r)] \right\} \times \\ \times \sqrt{(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4}. \quad (5.9)$$

Выражение для усилий N_θ найдется из уравнения Лапласа

$$N_\theta = - \left(q + \frac{N_\varphi}{R_1} \right) R_2,$$

где

$$q = -\gamma(H + y) = -\gamma \left[H + b \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} \right].$$

Подставляя в формулу для N_θ значения R_1 и R_2 по формулам (5.5) и найденное выше значение N_φ , получим

$$N_\theta = \frac{\gamma H [2r(b^2 - a^2)(r - r_0) + a^4]}{2b \sqrt{(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4}} + \\ + \frac{\gamma \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}}}{2(r-r_0)^2 \sqrt{(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4}} \left\{ 2r(r - r_0) [(b^2 - a^2)(r - r_0)^2 + a^4] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} a^4 [2(a^2 - b^2) + r_0(r_0 + r)] \right\} -$$

$$-\frac{\gamma a^5}{2(r-r_0)^2 \sqrt{(b^2-a^2)(r-r_0)^2+a^4}} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \pi r_0 + \frac{2}{3} a - r_0 \arcsin \sqrt{1 - \frac{(r_0-r)^2}{a^2}} \right]. \quad (5.10)$$

Приведенные выражения для N_r и N_θ при $r=r_0$ дают неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя к ним правило Лопиталя, при $r=r_0$ получим

$$N_r = \frac{\gamma H a^2}{b}, \quad N_\theta = \frac{1}{2} \gamma a^2 \left(1 + \frac{H}{b} \right).$$

Рассмотрим нижнее днище, выполненное в форме эллипсоида вращения, нагруженное гидростатическим давлением. Подставляя в формулы значение $r=0$, получим (рис. 48)

$$N_r = \frac{\gamma}{2br^2} \left[\frac{2}{3} a^2 b + H r^2 - \frac{2}{3} b (a^2 - r^2) \times \right. \\ \times \left. \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right] \sqrt{(b^2 - a^2) r^2 + a^4}, \\ N_\theta = \frac{\gamma H [2(b^2 - a^2) r^2 + a^4]}{2b \sqrt{(b^2 - a^2) r^2 + a^4}} + \\ + \gamma \frac{\left\{ r^2 [(b^2 - a^2) r^2 + a^4] + \frac{1}{3} a^4 (a^2 - r^2) \right\} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \frac{1}{3} a^6}{r^2 \sqrt{(b^2 - a^2) r^2 + a^4}}. \quad (5.11)$$

Выполняя в этих формулах предельный переход при $r=0$, найдем

$$N_r = \frac{1}{2} \gamma a^2 \left(1 + \frac{H}{b} \right), \quad N_\theta = \frac{1}{2} \gamma a^2 \left(1 + \frac{H}{b} \right).$$

Из формул (5.11) при $a=b$ можно получить формулы для полусферы (рис. 49)

$$N_r = \frac{\gamma a}{2r^2} \left[H r^2 + \frac{2}{3} a^3 - \frac{2}{3} a (a^2 - r^2) \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right], \\ N_\theta = \frac{\gamma a H}{2} + \gamma \frac{(2a^2 r^2 + a^4) \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} - a^4}{3r^2}.$$

При $r=0$ в пределе будем иметь

$$N_r = \frac{\gamma a (a + H)}{2}, \quad N_\theta = \frac{\gamma a (a + H)}{2}.$$

При $r=a$ получим

$$N_{\varphi} = \frac{1}{2} \gamma a \left(H + \frac{2}{3} a \right), \quad N_{\theta} = \frac{1}{2} \gamma a \left(H - \frac{2}{3} a \right).$$

Из последнего выражения видно, что при $H = \frac{2}{3} a$ кольцевое усилие будет равно нулю. При $H < \frac{2}{3} a$ это усилие становится сжимающим, и при $H=0$ оно достигает своего максимума

$$N_{\theta \max} = -\frac{1}{3} \gamma a^2.$$

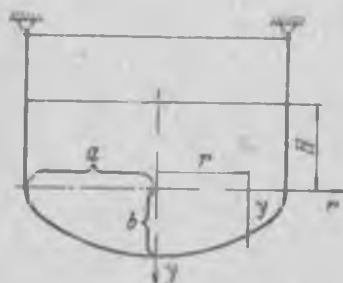


Рис. 48.

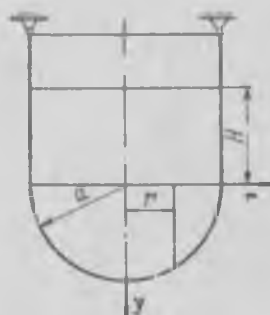


Рис. 49.

Если нижнее днище выполнено в форме кругового тора, то, полагая в формулах (5.9) и (5.10) $a=b$ (рис. 50), получим

$$\begin{aligned} N_{\varphi} = & \frac{\gamma a}{2r(r-r_0)} \left\{ \frac{1}{2} \pi r_0 a^2 + \frac{2}{3} a^3 + H(r^2 - r_0^2) - \right. \\ & - r_0 a^2 \arcsin \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} - \\ & - \frac{1}{3} a [2(a^2 - r^2) + r_0(r_0 + r)] \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} \Big\}, \\ N_{\theta} = & \frac{\gamma H a}{2} + \frac{\gamma}{2(r_0 - r)^2} \left\{ \frac{1}{3} a^2 (4r^2 - 5r_0 r + \right. \\ & + 2a^2 + r_0^2) \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} - a^3 \left[\frac{1}{2} \pi r_0 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} a - r_0 \arcsin \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Формулы (5.12) для усилий при $r=r_0$ дают неопределенность $\frac{0}{0}$. Путем предельного перехода было получено:

$$N_{\varphi} = \gamma H a, \quad N_{\theta} = \frac{1}{2} \gamma a^2 \left(1 + \frac{H}{a} \right).$$

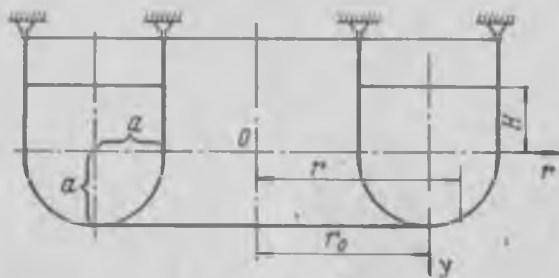


Рис. 50.

§ 16. РАСЧЕТ ВЕРХНИХ ДНИЩ БАКОВ ОТ ДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Выше рассматривались задачи расчета нижних днищ емкостей, нагруженных внутренним гидростатическим давлением.

В данном случае рассмотрим расчет верхних днищ, когда они подвергаются действию внутреннего гидростатического давления. Так же как и ранее, решение поставленной задачи начнем с рассмотрения эллипсоидального торового днища (рис. 51).

Уравнение равновесия в направлении оси y для верхней части тора $n-n$ будет иметь вид

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{H-y} q_{\theta} r_{\theta} \cos \varphi_{\theta} d\theta ds = \int_0^{2\pi} r_y N_{\varphi} \sin \varphi_y d\theta, \quad (5.13)$$

где $q_{\theta} = \gamma(H - (y + \xi))$ — гидростатическое давление в сечении $(y + \xi)$, отсчитываемое от точки O_1 ;

H — высота уровня жидкости, отсчитываемая от основания тора;

γ — удельный вес жидкости.

Остальные обозначения ясны из рис. 51.

Для текущих радиусов r_{θ} и r_y имеются уравнения:

$$\frac{(r_y - r_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(r_{\theta} - r_0)^2}{a^2} + \frac{(y + \xi)^2}{b^2} = 1,$$

а также следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{d\xi}{\sin \varphi_\xi}, \\ \operatorname{tg} \varphi_y &= -\frac{dy}{dr_y}, & \operatorname{ctg} \varphi_y &= -\frac{dr_y}{dy}, \\ \operatorname{tg} \varphi_\xi &= -\frac{d\xi}{dr_\xi}, & \operatorname{ctg} \varphi_\xi &= -\frac{dr_\xi}{d\xi}. \end{aligned}$$

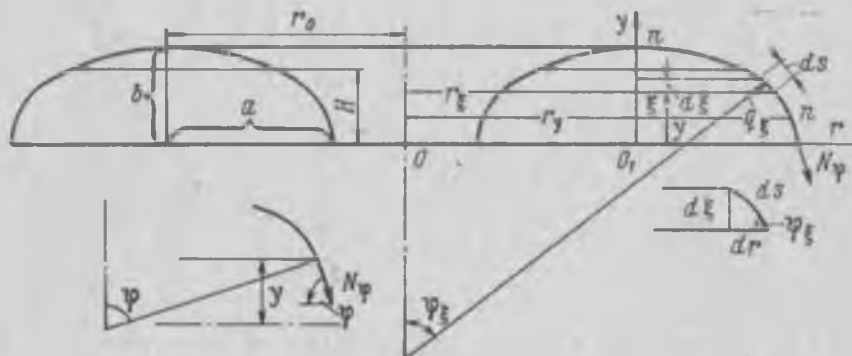


Рис. 51.

Используя приведенные соотношения при вычислении интегралов в уравнении (5.13), получим следующее выражение для усилия N_φ :

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\gamma a V (b^2 - a^2) (r - r_0)^2 + a^4}{b^3 r (r - r_0)} \left\{ \frac{a H^3}{6} + r_0 b^2 \times \right. \\ &\times \left[H - \frac{1}{2} b \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} \right] \frac{r - r_0}{a} - a b^2 \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} b \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} \right] \left[1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2} \right] - \\ &- \frac{1}{2} H r_0 b^2 \sqrt{1 - \frac{H^2}{b^2}} - \frac{1}{2} r_0 b^3 \left[\arcsin \frac{H}{b} - \right. \\ &\left. \left. - \arcsin \sqrt{1 - \frac{(r_0 - r)^2}{a^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Усилие N_0 определяется из уравнения Лапласа

$$\frac{N_\varphi}{R_1} + \frac{N_0}{R_2} = \gamma (H - y),$$

где R_1, R_2 даются формулами (5.5).

В развернутом виде для N_0 получаем формулу

$$\begin{aligned}
 N_0 = & \frac{\gamma r}{b(r-r_0)} \left[H - b \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} \right] \sqrt{(b^2 - a^2)(r-r_0)^2 + a^4} + \\
 & + \frac{\gamma a^5}{b^3(r-r_0)^2 \sqrt{(b^2 - a^2)(r-r_0)^2 + a^4}} \left\{ \frac{1}{2} r_0 b^3 \left[\arcsin \frac{H}{b} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \arcsin \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} \right] + \frac{1}{2} H r_0 b^2 \sqrt{1 - \frac{H^2}{b^2}} + \right. \quad (5.15) \\
 & \left. + a b^2 \left[\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} b \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} \right] \left[1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2} \right] - \right. \\
 & \left. - r_0 b^2 \left[H - \frac{1}{2} b \sqrt{1 - \frac{(r-r_0)^2}{a^2}} \right] \frac{r-r_0}{a} - \frac{a H^3}{6} \right\}.
 \end{aligned}$$

Из формул (5.14) и (5.15) можно получить различные частные формулы для других форм оболочек, находящихся под воздействием гидростатического давления. Например, при $r_0=0$ получаем формулы для эллипсоида вращения

$$\begin{aligned}
 N_\varphi = & \frac{\gamma a^2}{b^3 r^2} \left[\frac{1}{6} H^3 - b^2 \left(\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \times \\
 & \times \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}, \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_0 = & \frac{\gamma}{6} \left(H - b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4} + \\
 & + \frac{\gamma a^6}{b^3 r^2 \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}} \times \\
 & \times \left[b^2 \left(\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - \frac{1}{6} H^3 \right]. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Полагая в этих формулах $r=a$, получим выражения для усилий на экваторе эллипсоида вращения

$$N_\varphi = \frac{\gamma a H^3}{6 b^2}, \quad N_0 = \gamma a H \left(1 - \frac{a^2 H^2}{6 b^4} \right).$$

При $H = \frac{b^2}{a} \sqrt{2}$ это усилие получает наибольшее значение

$$N_{0 \max} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \gamma b^2.$$

В случае сферической оболочки в формулах (5.16) и (5.17) следует положить $a=b=R$. Тогда

$$N_\varphi = \frac{\gamma R}{r^2} \left[\frac{1}{6} H^3 - R^2 \left(\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right],$$

$$N_0 = \gamma R \left(H - R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) + \\ + \frac{\gamma R}{r^2} \left[R^2 \left(\frac{1}{2} H - \frac{1}{3} R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{H^3}{6} \right].$$

При $r=R$

$$N_\varphi = \frac{\gamma H^3}{6R}, \quad N_0 = \gamma R H \left(1 - \frac{H^2}{6R^2} \right).$$

Если уровень жидкости будет равен радиусу сферы $H=R$, то для усилий на экваторе получим следующие значения:

$$N_\varphi = \frac{1}{6} \gamma R^2, \quad N_0 = \frac{5}{6} \gamma R^2.$$

В случае круглого тора в формулах (5.14) и (5.15) следует положить $a=b$. Тогда при $r=r_0+a$ получим значения усилий на экваторе

$$N_\varphi = \frac{\gamma}{r_0+a} \left[\frac{1}{6} H^3 + r_0 a H \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{H^2}{a^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} r_0 a^2 \left(\arcsin \frac{H}{a} - \pi \right) \right], \\ N_0 = \gamma H (r_0 + a) + \frac{\gamma}{a} \left[\frac{1}{2} r_0 a^2 \left(\arcsin \frac{H}{a} - \pi \right) - \right. \\ \left. - r_0 a H \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{H^2}{a^2}} \right) - \frac{1}{6} H^3 \right].$$

При $r=r_0-a$ получим формулы для усилий на внутренней стороне тора

$$N_\varphi = \frac{\gamma}{r_0-a} \left[-\frac{1}{6} H^3 + r_0 a H \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{H^2}{a^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} r_0 a^2 \left(\arcsin \frac{H}{a} - \pi \right) \right], \\ N_0 = -\gamma H (r_0 - a) + \frac{\gamma}{a} \left[-\frac{1}{6} H^3 + r_0 a H \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{H^2}{a^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} r_0 a^2 \left(\arcsin \frac{H}{a} - \pi \right) \right].$$

**§ 17. НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ,
ОПЕРТОЙ ПО НЕКОТОРОМУ ПОПЕРЕЧНОМУ СЕЧЕНИЮ
И НАГРУЖЕННОЙ ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ**

Из рис. 52 видно, что интенсивность гидростатического давления

$$q = -\gamma R (\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Из условия равновесия части сферы, определяемой углом α в направлении на ось оболочки, получим

$$\int_0^{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha} q R^2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \, d\theta + 2\pi R N_{\varphi} \sin^2 \alpha = 0,$$

Подставим сюда выражение для q и проинтегрируем. Тогда

$$N_{\varphi} = \frac{\gamma R^2}{6 \sin^2 \alpha} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) [2 \cos^2 \alpha - (\cos \alpha_0 + \cos \alpha) \cos \alpha_0]. \quad (5.18)$$

Выражение для усилия N_{θ} получим из уравнения Лапласа

$$N_{\theta} = -qR - N_{\varphi}$$

или

$$N_{\theta} = \gamma R^2 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) \left[1 - \frac{2 \cos^2 \alpha - (\cos \alpha_0 + \cos \alpha) \cos \alpha_0}{6 (1 - \cos^2 \alpha)} \right]. \quad (5.19)$$

Выражения (5.18), (5.19) справедливы в том случае, если $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Теперь получим выражения для усилий при $\alpha > \alpha_1$ (рис. 53). Выражение для давления остается прежним.

Из условия равновесия части сферы под углом α найдем

$$\int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} q R^2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \, d\theta + 2\pi R N_{\varphi} \sin^2 \alpha = 0.$$

После подстановки в подынтегральное выражение значения q и интегрирования получим

$$N_{\varphi} = \frac{1}{6} \gamma R^2 \left(3 \cos \alpha_0 + 2 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right). \quad (5.20)$$

Выражение для усилия N_{θ} определяется из уравнения Лапласа

$$N_{\theta} = -qR - N_{\varphi}$$

или

$$N_{\theta} = \frac{1}{6} \gamma R^2 \left(3 \cos \alpha_0 - 2 - 6 \cos \alpha - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right). \quad (5.21)$$

При $\alpha_0=0$ формулы (5.20), (5.21) несколько упрощаются и принимают вид, удобный для исследования:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{1}{6} \gamma R^2 \left(1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right), \\ N_{\theta} &= \frac{1}{6} \gamma R^2 \left(5 - 6 \cos \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right), \end{aligned} \right\} 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \quad (5.22)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{1}{6} \gamma R^2 \left(5 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \\ N_{\theta} &= \frac{1}{6} \gamma R^2 \left(1 - 6 \cos \alpha - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \alpha_1 \leq \alpha \leq \pi \quad (5.23)$$



Рис. 52.

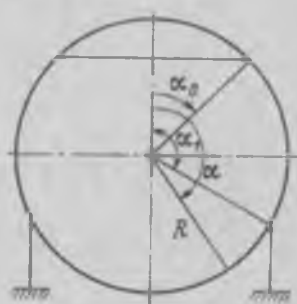


Рис. 53.

Если в (5.22) и (5.23) положить $\alpha = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, то получим следующие выражения для усилий:

над опорой (верх)

$$N_{\varphi}^* = \frac{1}{6} \gamma R^2, \quad N_{\theta}^* = \frac{5}{6} \gamma R^2,$$

под опорой (низ)

$$N_{\varphi}^* = \frac{5}{6} \gamma R^2, \quad N_{\theta}^* = \frac{1}{6} \gamma R^2.$$

Из сравнения полученных выражений для усилий N_{φ} над опорой и под опорой видно, что они в месте опирания оболочки изменяются скачкообразно на величину вертикальной реакции по опорному сечению. Из сравнения выражений для N_{θ} видно, что они также изменяются скачкообразно. Таким образом, мембранная теория не удовлетворяет требованиям непрерывности усилий по опорному сечению, и в этой зоне должен возникнуть изгиб оболочки.

Рассмотрим далее случай, когда $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Будем иметь следующие выражения для усилий:

$$N_{\varphi} = \frac{1}{3} \gamma R^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right),$$

$$N_{\theta} = -\frac{1}{3} \gamma R^2 \left(1 + 3 \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right).$$

Из этих выражений видно, что усилие N_{φ} будет всюду растягивающим, усилие N_{θ} — сжимающим. Наибольшее его значение будет при $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$N_{\theta \max} = -\frac{1}{3} \gamma R^2.$$

§ 18. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

На рис. 54 представлена схема нагружения полусферической оболочки аэродинамической нагрузкой, изменяющаяся по закону

$$q = q_0 \frac{(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2}{(1 - \cos \varphi_0)^2}.$$

Чтобы получить выражения для внутренних усилий N_{φ} , рассмотрим равновесие части сферы, определяемой углом φ . Составим условия равновесия всех сил на ось оболочки:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} q R r \cos \varphi d\varphi d\theta + \\ + \int_0^{2\pi} N_{\varphi} r \sin \varphi d\theta = 0, \end{aligned}$$

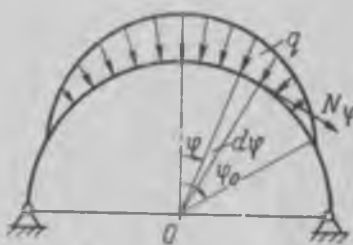


Рис. 54.

где $r = R \sin \varphi$.

После подстановки выражения для q и интегрирования получим

$$\begin{aligned} N_{\varphi} = -\frac{q_0 R}{(1 - \cos \varphi_0)^2 \sin^2 \varphi} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} (1 - \cos^3 \varphi) \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Выражение для кольцевого усилия N_θ определяется из уравнения Лапласа

$$N_\theta = \frac{q_0 R}{(1 - \cos \varphi_0)^2} \left\{ -(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi - \frac{2}{3} (1 - \cos^3 \varphi) \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi \right] \right\}. \quad (5.25)$$

Формулы (5.24), (5.25) справедливы, если $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Для получения формул, справедливых при $\varphi > \varphi_0$, необходимо рассмотреть равновесие ненагруженной части оболочки. При этом было найдено

$$N_\varphi = -\frac{N_\varphi^0 \sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi}, \quad N_\theta = -N_\varphi.$$

Здесь $N_\varphi^0 = (N_\varphi)_{\varphi=\varphi_0}$, N_φ дается формулой (5.24).

§ 19. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Вопрос об определении перемещений в безмоментных оболочках вращения целесообразно начать с рассмотрения круговой цилиндрической оболочки. На рис. 55 изображен элемент этой оболочки с размерами dx , dy в положении до и после приложе-

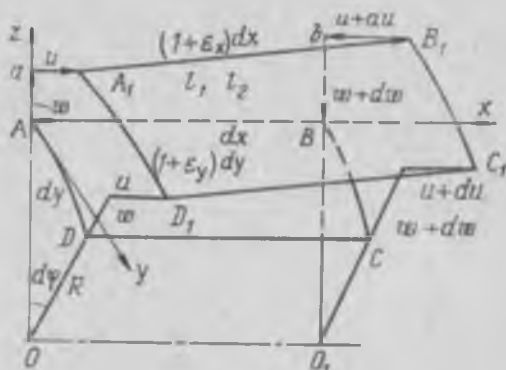


Рис. 55.

ния к цилиндру осесимметричной нагрузки. Здесь u и w компоненты полного перемещения в направлении осей x и z соответственно;

l_1, l_2 — значения косинусов углов элемента $A_1 B_1$ после деформации с осями x и z ;

ε_x — относительное удлинение элемента AB после деформации;

ε_y — то же элемента AD .

Для определения ε_x можно спроектировать замкнутый многоугольник AaA_1B_1bB на оси x и z . Стрелки по концам сторон этого многоугольника указывают порядок обхода:

$$u + dx(1 + \varepsilon_x)l_1 - u - du - dx = 0,$$

$$w + dx(1 + \varepsilon_x)l_2 - w - dw = 0.$$

Отсюда имеем

$$(1 + \varepsilon_x)l_1 = 1 + \frac{du}{dx}, \quad (1 + \varepsilon_x)l_2 = \frac{dw}{dx}.$$

Возводя эти выражения в квадрат и складывая, получим

$$(1 + \varepsilon_x)^2 (l_1^2 + l_2^2) = \left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2,$$

или при $l_1^2 + l_2^2 = 1$

$$1 + 2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 = 1 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2.$$

Пренебрегая здесь малой величиной ε_x (по сравнению с 2), получим

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right].$$

Ограничимся в этом выражении первым линейным членом

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}.$$

Компонент деформации в окружном направлении

$$\varepsilon_y = \frac{2\pi(R + w) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{w}{R}.$$

Кроме того, компоненты деформации можно выразить через напряжения по закону Гука для двухосного напряженного состояния:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x).$$

Тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \frac{w}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x).$$

Например, в случае нагружения бака давлением наддува, гидростатическим давлением и осевой силой сжатия (рис. 56) для напряжений будем иметь следующие выражения:

$$\sigma_x = \frac{q_n R}{2b} - \frac{P}{2\pi R b}, \quad \sigma_y = \frac{q_n R}{b} + \frac{\gamma(H - x)R}{b}.$$

Для определения перемещения u будем иметь уравнение

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{Eb} \left\{ \frac{q_n R}{2} - \frac{P}{2\pi R} - \mu [\gamma R (H - x) + q_n R] \right\}.$$

После интегрирования этого уравнения получим

$$u = \frac{x}{Eb} \left\{ \left(\frac{q_n R}{2} - \frac{P}{2\pi R} \right) - \mu \left[\gamma R \left(H - \frac{1}{2} x \right) + q_n R \right] \right\} + C. \quad (5.26)$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия $u=0$ при $x=0$ и должна быть равна нулю.

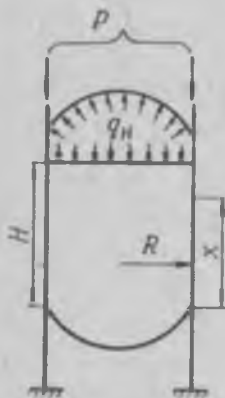


Рис. 56.

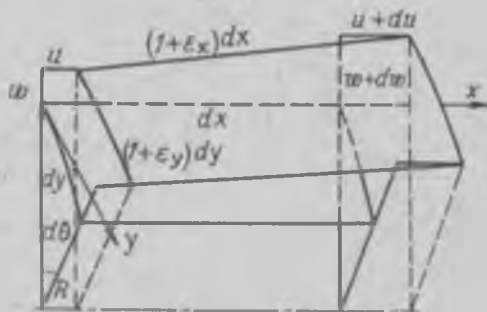


Рис. 57.

Выражение для w получает вид

$$w = \frac{R}{Eb} \left[\gamma R (H - x) + q_n R - \frac{\mu}{2} \left(q_n R - \frac{P}{\pi R} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Применим выражения (5.26), (5.27) для определения опускания уровня жидкости в результате деформации бака от действия указанных на рис. 56 нагрузок.

Выражение для приращения объема бака можно получить из рис. 57. Приращение объема dV рассматриваемого элемента будет равно разности его объемов до и после деформации. Таким образом, с точностью до малых членов первого порядка получим

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{2} (1 + \epsilon_y) dy (R + w) (1 + \epsilon_x) dx - \frac{1}{2} dy R dx = \\ &= \left(w + \frac{1}{2} R \frac{du}{dx} \right) R dx d\theta. \end{aligned}$$

Полное приращение объема для заполненной части бака

$$\Delta V = \int_0^{2\pi} \int_0^H \left(w + \frac{1}{2} R \frac{du}{dx} \right) R dx d\theta = 2\pi R \int_0^H \left(w + \frac{1}{2} R \frac{du}{dx} \right) dx.$$

После подстановки сюда выражений u и w и интегрирования получим

$$\Delta V = \frac{2\pi R^2 H}{E\delta} \left[\left(\frac{5}{4} - \mu \right) q_0 R + \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \mu \right)}{2} \gamma R H - \frac{1 - 2\mu}{4\pi} \frac{P}{R} \right].$$

Опускание уровня жидкости

$$\Delta H = \frac{\Delta V}{\pi R^2} = \frac{2H}{E\delta} \left[\left(\frac{5}{4} - \mu \right) q_0 R + \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \mu \right)}{2} \gamma R H - \frac{1 - 2\mu}{4\pi} \frac{P}{R} \right]. \quad (5.28)$$

Если толщина оболочки будет переменной, то можно поступить следующим образом. Разделить длину оболочки на участки с одинаковой толщиной и применить формулу (5.28) к каждому из этих участков. За высоту столба жидкости для каждого участка следует брать расстояние от рассматриваемого сечения до зеркала жидкости. Полное опускание уровня жидкости будет равно сумме ΔH , полученных для указанных участков.

§ 20. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Выражения для компонентов деформации конической оболочки можно получить из рис. 58, где l_1 , l_2 — направляющие косинусы элемента dx в деформированном состоянии с осями x и z .

Поступая так же, как и в случае цилиндрической оболочки, получим

$$u + (1 + \varepsilon_\varphi) dx l_1 - u - du - dx = 0,$$

$$w + (1 + \varepsilon_\varphi) dx l_2 - w - dw = 0.$$

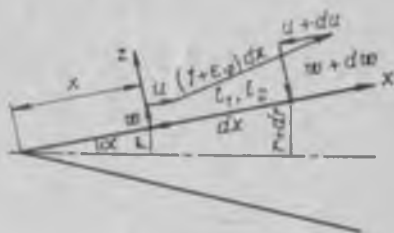


Рис. 58.

Из этих уравнений найдем величину ε_φ с точностью до линейных членов:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{du}{dx}.$$

Компонента деформации в окружном направлении

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi (r + w \cos \alpha + u \sin \alpha) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{w}{r} \cos \alpha + \frac{u}{r} \sin \alpha.$$

Но так как $r = x \sin \alpha$, то

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{x} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{u}{r}.$$

Исключим из полученных выражений перемещение u . Тогда

$$\frac{dw}{dx} = \left[\frac{d(x\varepsilon_0)}{dx} - \varepsilon_0 \right] \operatorname{tg} \alpha.$$

Интегрируя это выражение, найдем, что

$$w = \operatorname{tg} \alpha \int \left[\frac{d(x\varepsilon_0)}{dx} - \varepsilon_0 \right] dx + C. \quad (5.29)$$

Согласно закону Гука компоненты деформации можно выразить через усилия в виде

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E\delta} (N_\varphi - \mu N_0), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{E\delta} (N_0 - \mu N_\varphi).$$

Имея в каждом конкретном случае выражения для усилий N_φ и N_0 , можно определить перемещения u и w .

Применим изложенную теорию к определению приращения объема конического днища бака (рис. 59). Выражения для усилий N_φ и N_0 в данном случае имеют вид

$$N_\varphi = \frac{q_0 x \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{\gamma x}{2} \left[(h+l) - \frac{2}{3} x \cos \alpha \right] \operatorname{tg} \alpha,$$

$$N_0 = q_0 x \operatorname{tg} \alpha + \gamma x \left[(h+l) - x \cos \alpha \right] \operatorname{tg} \alpha.$$

При этом для компонентов деформации получаются выражения

$$\varepsilon_\varphi = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{E\delta} \left\{ (0,5 - \mu) q_0 + \gamma \left[(0,5 - \mu)(h+l) + \left(\mu - \frac{1}{3} \right) x \cos \alpha \right] \right\},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{E\delta} \left\{ \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) q_0 + \gamma \left[\left(1 - \frac{\mu}{2} \right) (h+l) - \left(1 - \frac{\mu}{3} \right) x \cos \alpha \right] \right\}.$$

После подстановки этих выражений в (5.29) и интегрирования получим для w

$$w = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{E\delta} \left\{ \frac{3}{4} q_0 + \gamma \left[\frac{3}{4} (h+l) - \frac{8}{9} x \cos \alpha \right] \right\} + C.$$

Перемещение u найдем из уравнения

$$\begin{aligned} u &= x\varepsilon_0 - w \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= \frac{x^2 \operatorname{tg} \alpha}{E\delta} \left\{ \frac{1-2\mu}{4} q_0 + \gamma \left[\frac{1-2\mu}{4} (h+l) - \frac{1-3\mu}{9} x \cos \alpha \right] \right\} - C \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Для определения постоянной интегрирования C имеем условие $u=0$ при $x = \frac{l}{\cos \alpha}$, из которого

$$C = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{E\delta} \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^2 \left[\frac{1-2\mu}{4} q_0 + \gamma \left(\frac{1-2\mu}{4} h + \frac{5-6\mu}{36} l \right) \right].$$

Тогда

$$u = \frac{1g^2 a}{Eh} \left\{ \frac{1-2\mu}{4} \left(x^2 - \frac{l^2}{\cos^2 \alpha} \right) [q_n - (h+l)\gamma] - \right. \\ \left. - \frac{1-3\mu}{9} \gamma \left(x^3 \cos \alpha - \frac{l^3}{\cos^2 \alpha} \right) \right\}. \quad (5.30)$$

Для перемещения w получим

$$w = \frac{1g^2 a}{Eh} \left\{ \left[\frac{l}{4} x^2 + \frac{1-2\mu}{4} \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^2 \right] [q_n + (h+l)\gamma] - \right. \\ \left. - \gamma \left[x^3 \cos \alpha + \frac{1-3\mu}{9} l \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.31)$$

Из выражения (5.30) видно, что при $x=0$ и $\gamma=0$ самая нижняя точка конической оболочки при нагружении только внутренним давлением q_n стремится приподняться вверх. Формулы (5.30), (5.31) не отвечают всем граничным условиям задачи, связанным с закреплением конуса, что является следствием безмоментной теории, которой мы пользовались при получении этих формул. Поэтому на них надо смотреть как на приближенные.

Применим эти формулы для определения опускания уровня жидкости в конической оболочке.

Прежде всего необходимо получить выражения для приращения элементарного объема. На рис. 60 элемент $dx dy$ представлен в положении до и после деформации. Для вычисления объема призмы $OABCD O_1$ применим формулу для усеченного конуса

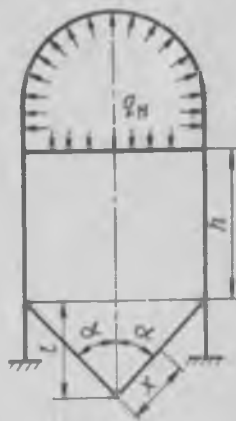


Рис. 59.

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

После деления правой части этой формулы на 2π и умножения на $d\theta$ она может быть использована для определения объема клинообразной конической призмы.

Объем до деформации (рис. 61)

$$r = x \sin \alpha, \quad R = (x + dx) \sin \alpha, \quad h = dx \cos \alpha,$$

$$V_0 = \frac{dx \cos \alpha}{6} [(x + dx)^2 \sin^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha + x(x + dx) \sin^2 \alpha].$$

Объем после деформации (см. рис. 61)

$$r = x \sin \alpha + w \cos \alpha + u \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned}
 R &= (x+dx) \sin \alpha + (w+dw) \cos \alpha + (u+du) \sin \alpha, \\
 h &= (dx+du) \cos \alpha, \\
 V &= \frac{(dx+du) \cos \alpha}{6} \{ [(x+dx) \sin \alpha + (w+dw) \cos \alpha + \\
 &+ (u+du) \sin \alpha]^2 + (x \sin \alpha + w \cos \alpha + u \sin \alpha)^2 + \\
 &+ [(x+dx) \sin \alpha + (w+dw) \cos \alpha + (u+du) \sin \alpha] \times \\
 &\times (x \sin \alpha + w \cos \alpha + u \sin \alpha) \}.
 \end{aligned}$$

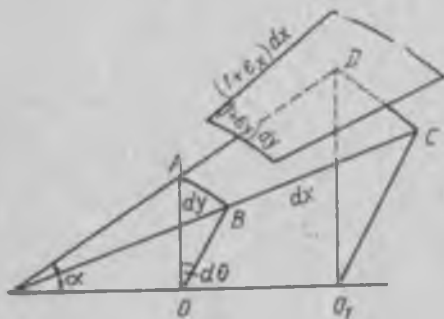


Рис. 60.

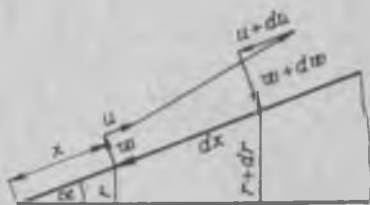


Рис. 61.

Разность объемов с точностью до величин второго порядка малости

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{x \cos \alpha}{2} (w \sin 2\alpha + 2u \sin^2 \alpha) dx d\theta.$$

Полное приращение объема конуса

$$\Delta V_k = \frac{1}{2} \cos \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{l/\cos \alpha} (w \sin 2\alpha + 2u \sin^2 \alpha) x dx d\theta.$$

После подстановки сюда выражений (5.30), (5.31) и интегрирования получим

$$\begin{aligned}
 \Delta V_k &= \frac{2\pi \sin^2 \alpha}{E_0} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^4 \left[\left(1 - \frac{\mu}{2} \right) q_n - \frac{1+\mu}{2} (h+l) \gamma \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{1-2\mu}{4} \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^4 (h+l) \gamma - \frac{10-3\mu}{45} \gamma \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^5 \cos \alpha \right\}.
 \end{aligned}$$

Используем полученное значение ΔV_k для определения опускания уровня жидкости, находящейся в конусе.

Так как объем конуса увеличился на ΔV_k , то уровень жидкости опустится на величину $(l-l')$ (рис. 62). Для того чтобы сохранить в конусе прежний уровень, в него следует добавить

количество жидкости, равное ΔV_k . Тогда по формуле для усеченного конуса

$$\frac{\pi h}{3} (R_k^2 + R_k R'_k + R_k'^2) = \Delta V_k,$$

где

$$h = l - l',$$

$$R'_k = R_k - h \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{3} [R_k^2 + R_k(R_k - h \operatorname{tg} \alpha) + \\ + (R_k - h \operatorname{tg} \alpha)^2] = \Delta V_k. \end{aligned}$$

Так как величина снижения уровня h всегда существенно меньше, чем R_k , то приближенно можно записать

$$\frac{\pi h}{3} 3R_k^2 \approx \Delta V_k.$$

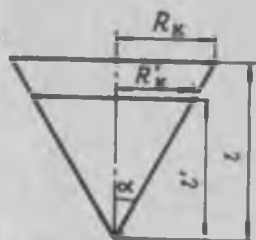


Рис. 62.

Отсюда получаем следующее выражение для снижения уровня жидкости в конической оболочке:

$$h = \frac{\Delta V_k}{\pi R_k^2}.$$

§ 21. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

Если оболочка вращения описывается произвольной поверхностью вращения (рис. 63), то выражения для компонентов деформации можно получить точно так же, как это было сделано ранее (см. § 20).

Проектируя замкнутый многоугольник на оси x и z , получим

$$u + (1 + \epsilon_\varphi) dx l_1 - u - du - (w + dw) \frac{dx}{R_1} - dx = 0,$$

$$w + (1 + \epsilon_\varphi) dx l_2 + (u + du) \frac{dx}{R_1} - w - dw = 0.$$

Отсюда

$$(1 + \epsilon_\varphi)^2 (l_1^2 + l_2^2) = \left(1 + \frac{du}{dx} + \frac{w}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} - \frac{u}{R_1}\right)^2.$$

Учитывая, что $l_1^2 + l_2^2 = 1$, и пренебрегая малой величиной ϵ_φ по сравнению с 2, получим

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{w}{R_1} \right)^2 + 2 \frac{w}{R_1} \frac{du}{dx} - 2 \frac{u}{R_1} \frac{dw}{dx} \right].$$

В дальнейшем ограничимся только линейной частью этого выражения

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx} + \frac{w}{R_1}. \quad (5.32)$$

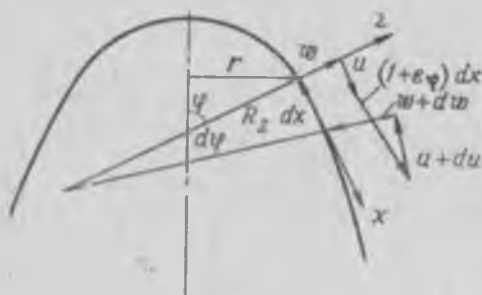


Рис. 63.

Выражение для компоненты деформации в окружном направлении получим из отношения

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r + w \sin \varphi + u \cos \varphi) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{w}{r} \sin \varphi + \frac{u}{r} \cos \varphi.$$

Учитывая, что $r = R_2 \sin \varphi$, окончательно найдем

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{R_2} + \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (5.33)$$

Имея выражения для компонент деформации (5.32), (5.33), можно определить перемещения u и w .

Из (5.32)

$$w = R_1 \varepsilon_r - R_1 \frac{du}{dx}.$$

Тогда для ε_θ найдем

$$\varepsilon_\theta = \frac{R_1}{R_2} \varepsilon_r - \frac{R_1}{R_2} \frac{du}{dx} + \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Так как $dx = R_1 d\varphi$, то

$$\varepsilon_\theta = \frac{R_1}{R_2} \varepsilon_r - \frac{du}{R_1 d\varphi} + \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi,$$

или

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi = R_1 \varepsilon_r - R_2 \varepsilon_\theta,$$

или

$$\sin \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u}{\sin \varphi} \right) = R_1 \varepsilon_\varphi - R_2 \varepsilon_\theta.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$u = \sin \varphi \left[\int \frac{R_1 \varepsilon_\varphi - R_2 \varepsilon_\theta}{\sin \varphi} d\varphi + C \right]. \quad (5.34)$$

Здесь компоненты деформации ε_φ и ε_θ должны быть выражены через напряжения σ_φ и σ_θ согласно закону Гука для случая двухосного напряженного состояния:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\varphi).$$

В качестве примера определим перемещения u и w для эллипсоида вращения, находящегося под внутренним равномерным давлением.

В этом случае для напряжений были получены формулы

$$\sigma_\varphi = \frac{q}{2b\delta} \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4},$$

$$\sigma_\theta = \frac{q}{2b\delta} \frac{2r^2(b^2 - a^2) + a^4}{\sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}}.$$

Кроме того, выражения для R_1 , R_2 и $\sin \varphi$ даются формулами (5.5).

Эти формулы для эллипсоида выражены через переменную r . Поэтому в выражении (5.34) необходимо перейти от интегрирования по φ к интегрированию по r . Из рис. 64 имеем

$$(R_1 d\varphi)^2 = (dy)^2 + (dr)^2, \quad R_1 d\varphi = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dr} \right)^2} dr,$$

$$d\varphi = \frac{1}{R_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dr} \right)^2} dr.$$

Кроме того, ранее было получено

$$\frac{dy}{dr} = - \frac{br}{a \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Учитывая все приведенные формулы и подставляя их в выражение (5.34), будем иметь

$$u = \frac{br}{\sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}} \left\{ \frac{q(b^2 - a^2)}{2E\delta b^2 a} \int \left[\frac{(1 - 2\mu)r \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{a^4 r}{\sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4} \sqrt{a^2 - r^2}} \right] dr + C \right\}.$$

После интегрирования этого выражения с помощью подстановки $r = a \sin \xi$ получим

$$u = \frac{qa^2b(b^2 - a^2)r}{2E\delta b^2 \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}} \left\{ \left[1 - \frac{1-2\mu}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times \ln \left[\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^2} \right] - \\ \left. - \frac{1}{2} (1-2\mu) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^2} \right\} + \\ + \frac{brC}{\sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}}.$$

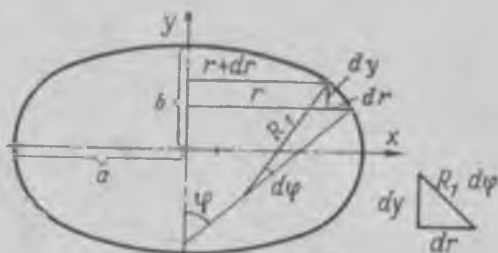


Рис. 64.

Постоянную интегрирования найдем из условия $u = C$ при $r = a$:

$$C = - \frac{qa^2(b^2 - a^2)}{2E\delta b^2} \left[1 - \frac{1-2\mu}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \ln \frac{b}{a}.$$

Тогда

$$u = \frac{qa^2(b^2 - a^2)r}{2E\delta b^2 \sqrt{(b^2 - a^2)r^2 + a^4}} \left\{ \left[1 - \frac{1-2\mu}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times \left(\ln \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{a} \right)^2} \right] - \ln \frac{b}{a} \right) - \\ \left. - \frac{1-2\mu}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{a} \right)^2} \right\}.$$

Выражения для w найдем из соотношения (5.33)

$$w = R_{21} - u \operatorname{ctg} \varphi,$$

где

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a \sqrt{a^2 - r^2}}{br},$$

$$\begin{aligned} \frac{2Ebh^2}{q} w = & (2 - \mu) (b^2 - a^2) r^2 + (1 - \mu) a^4 - \\ & - \frac{a^3 (b^2 - a^2) \sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{(b^2 - a^2) r^2 + a^4}} \left\{ \left[1 - \frac{1 - 2\mu}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \times \left(\ln \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{a} \right)^2} \right] - \right. \\ & \left. \left. - \ln \frac{b}{a} \right) - \frac{1 - 2\mu}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2} \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{a} \right)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Перемещения на полюсе и на экваторе эллипсоида будут соответственно:

на полюсе при $r=0$

$$u_n = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{2Ebh^2 w_n}{q} = & (1 - \mu) a^4 - a^2 (b^2 - a^2) \left\{ \left[1 - \frac{1 - 2\mu}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \times \left. \left(\ln \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} + 1 \right] - \ln \frac{b}{a} \right) - \frac{1 - 2\mu}{2} \right\}; \end{aligned}$$

на экваторе при $r=a$

$$u_s = 0, \quad w_s = \frac{qa^2}{2Eh} \left(2 - \mu - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

При

$$\frac{a}{b} = 2, \quad \mu = 0,3 \quad \text{получим}$$

$$w_n = 3 \frac{qa^2}{Eh}, \quad w_s = -1,15 \frac{qa^2}{Eh},$$

т. е. эллипсонд вытягивается в направлении оси вращения и сжимается по экватору.

В случае сферы при $a=b$ для экватора и для полюса получаем одно и то же значение w , равное

$$w = \frac{(1 - \mu) qa^2}{2Eh}.$$

§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНИЖЕНИЯ УРОВНЯ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ БАКАХ ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Задача определения опускания уровня жидкости в сферических баках в точной постановке (с позиций безмоментной теории) приводит к очень сложным формулам, неудобным для прак-

тического использования. Здесь дается приближенное решение этой задачи.

Пусть имеется сферический бак, уровень жидкости в котором определяется углом α_0 . Бак опирается по окружности, определяемой углом α_1 (рис. 65). Для определения приращения объема бак разбивается на зоны. Для каждой зоны вычисляются напряжения σ_r и σ_θ (по верхнему и нижнему сечениям каждой зоны) по соответствующим формулам § 17.

Затем определяются компоненты деформации в меридиональном и окружном направлениях:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta)_{\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r)_{\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2}$$

После этого приращение объема усеченного конуса можно определить по выражению

$$\begin{aligned} \Delta V = & -\frac{\pi(h+\Delta h)}{3} [(r_2+\Delta r_2)^2 + (r_1+\Delta r_1)^2 + (r_1+\Delta r_1)(r_2+\Delta r_2)] - \\ & -\frac{\pi h}{3} (r_2^2 + r_1^2 + r_1 r_2) = \frac{\pi}{3} [r_1 h (2\Delta r_1 + \Delta r_2) + \\ & + r_2 h (2\Delta r_2 + \Delta r_1) + \Delta h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)]. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$r_1 = R \sin \varphi_1, \quad r_2 = R \sin \varphi_2, \quad \Delta r_1 = r_1 (\varepsilon_r)_{\varphi=\varphi_1} = R (\varepsilon_r)_{\varphi=\varphi_1} \cdot \sin \varphi_1,$$

$$\Delta r_2 = r_2 (\varepsilon_r)_{\varphi=\varphi_2} = R (\varepsilon_r)_{\varphi=\varphi_2} \cdot \sin \varphi_2,$$

$$h = l \cos \left(90^\circ - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right), \quad \Delta h = h \varepsilon_\varphi^{\text{cp}},$$

$$\varepsilon_\varphi^{\text{cp}} = \frac{1}{2} [(\varepsilon_\varphi)_{\varphi=\varphi_1} + (\varepsilon_\varphi)_{\varphi=\varphi_2}];$$

R — радиус сферы;

l — длина хорды, определяемая углом $(\varphi_2 - \varphi_1)$;

h — высота зоны.

Остальные обозначения ясны из рис. 65.

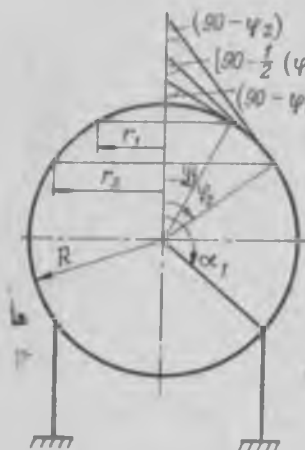


Рис. 65.

Имея выражение для увеличения объема каждой зоны, можно определить суммарное приращение объема всего бака:

$$\Delta V_c = \sum_{i=1}^n \Delta V_i,$$

где n — число зон.

Величину опускания уровня жидкости можно определить из условия, если объем деформированного бака дополнить объемом жидкости, равным ΔV_c , и поднять уровень жидкости до первоначального. Из этого условия по аналогии с § 21 приближенно получим величину опускания уровня

$$H = \frac{\Delta V_c}{\pi R^2 \sin^2 \alpha_0}.$$

§ 23. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ НАГРУЗКУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В данном параграфе рассмотрены некоторые практически важные задачи, связанные с расчетом оболочек вращения на произвольную неосесимметричную нагрузку. В общем случае такие оболочки следует рассчитывать с учетом работы их на изгиб. В данном случае эти оболочки будут рассмотрены только

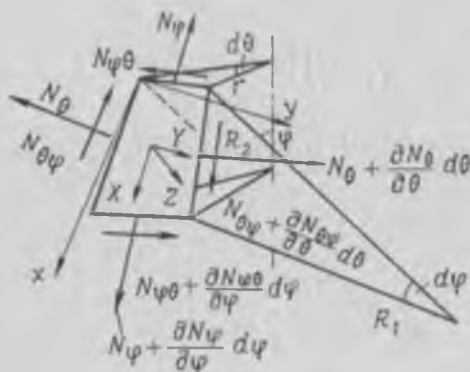


Рис. 66.

с позиций безмоментной теории. Поэтому на полученные в дальнейшем результаты следует смотреть как на приближенные.

Обратимся к рис. 66, где представлен элемент оболочки со сторонами $R_2 d\theta$ и $R_1 d\varphi$ и компонентами внешней нагрузки X, Y, Z , положительные направления которых совпадают с направлением местных осей координат x, y, z . По сторонам выделенного элемента приложены внутренние усилия $N_\varphi, N_\theta, N_{\varphi\theta}$ и $N_{\varphi\theta} + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} d\theta$, выражающие влияние отброшенной части оболочки. Составим суммы

проекций всех сил, действующих на выделенный элемент оболочки, на оси x, y, z подвижной системы координат.

На ось x

$$\begin{aligned} & -N_{\varphi} r d\theta + \left(N_{\varphi} + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r + \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta - N_{\theta\varphi} R_1 d\varphi + \\ & + \left(N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta \right) R_1 d\varphi - \\ & - \left(N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) R_1 d\varphi d\theta \cos \varphi + X r d\theta R_1 d\varphi = 0. \end{aligned}$$

На ось y

$$\begin{aligned} & -N_{\theta\varphi} r d\theta + \left(N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r + \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta - N_{\theta} R_1 d\varphi + \\ & + \left(N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) R_1 d\varphi + \\ & + \left(N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta \right) R_1 d\varphi d\theta \cos \varphi + Y r d\theta R_1 d\varphi = 0. \end{aligned}$$

На ось z

$$\begin{aligned} & \left(N_{\varphi} + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r + \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta d\varphi + \\ & + \left(N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) R_1 d\varphi d\theta \sin \varphi + Z r d\theta R_1 d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений с точностью до величин первого порядка малости получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_2 N_{\varphi} \sin \varphi) + R_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - R_1 N_{\theta} \cos \varphi + X R_1 R_2 \sin \varphi = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_1 N_{\theta\varphi} \sin \varphi) + N_{\theta\varphi} R_1 \cos \varphi + R_1 \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + Y R_1 R_2 \sin \varphi = 0, \\ & \frac{N_{\varphi}}{R_1} + \frac{N_{\theta}}{R_2} + Z = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}.$$

Кроме того, из закона парности касательных напряжений следует, что $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$.

Уравнения (5.35) относятся к типу линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с переменными коэффициентами. Исключив из этих уравнений усилие N_{θ} , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (R_2 N_{\varphi})}{\partial \varphi} + 2R_2 N_{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{R_1}{\sin \varphi} \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + Z R_1 R_2 \operatorname{ctg} \varphi + X R_1 R_2 = 0, \\ & \frac{\partial (R_2 N_{\theta\varphi})}{\partial \varphi} + (R_1 + R_2) N_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R_2}{\sin \varphi} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \theta} - \frac{R_1 R_2}{\sin \varphi} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + Y R_1 R_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для дальнейшего упрощения этих уравнений введем новые неизвестные функции по формулам

$$R_2 N_{\varphi} = U, \quad R_2 N_{\theta\varphi} = V.$$

Тогда уравнения (5.36) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) V \operatorname{ctg} \varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{R_1 R_2}{\sin \varphi} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + Y R_1 R_2 = 0, \\ & \frac{\partial U}{\partial \varphi} + 2U \operatorname{ctg} \varphi + \frac{R_1}{R_2 \sin \varphi} \frac{\partial V}{\partial \theta} + Z R_1 R_2 \operatorname{ctg} \varphi + X R_1 R_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Одним из общих методов решения этих уравнений является метод, основанный на разложении искомых функций в ряды Фурье. Для этой цели необходимо вначале разложить внешние нагрузки в ряды Фурье по координате θ . Пусть эти разложения имеют вид

$$X = \sum X_n \cos n\theta, \quad Y = \sum Y_n \sin n\theta, \quad Z = \sum Z_n \cos n\theta.$$

В соответствии с этим решение полученных уравнений имеем в форме

$$V = \sum V_n \sin n\theta, \quad U = \sum U_n \cos n\theta.$$

После подстановки указанных разложений в уравнения они примут более простой вид

$$\begin{aligned} & \frac{dV_n}{d\varphi} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) V_n \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} U_n + \frac{n R_1 R_2}{\sin \varphi} Z_n + Y_n R_1 R_2 = 0, \\ & \frac{dU_n}{d\varphi} + 2U_n \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n R_1}{R_2 \sin \varphi} V_n + Z_n R_1 R_2 \operatorname{ctg} \varphi + X_n R_1 R_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Несмотря на кажущуюся простоту структуры этих уравнений, они допускают не всегда простое решение. Поэтому рассмотрим наиболее простые формы оболочек с простейшими видами нагружения.

Нагружение полусферической оболочки ветровой нагрузкой.
В этом случае $R_1=R_2=R$. Тогда уравнения (5.38) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dV_n}{d\varphi} + 2V_n \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} U_n + \frac{nR^2}{\sin \varphi} Z_n + Y_n R^2 &= 0, \\ \frac{dU}{d\varphi} + 2U_n \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} V_n + Z_n R^2 \operatorname{ctg} \varphi + X R^2 &= 0,\end{aligned}$$

После сложения и вычитания этих уравнений и введения новых неизвестных функций

$$P_n = V_n - U_n, \quad Q_n = V_n + U_n \quad (5.39)$$

получим два следующих независимых уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dP_n}{d\varphi} + \left(2\operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi}\right) P_n - Z_n R^2 \left(\operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi}\right) - (X_n - Y_n) R^2 &= 0, \\ \frac{dQ_n}{d\varphi} + \left(2\operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi}\right) Q_n + Z_n R^2 \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi}\right) + (X_n + Y_n) R^2 &= 0.\end{aligned} \quad (5.40)$$

Эти уравнения относятся к типу дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными следующего типа:

$$y' + q(x)y + f(x) = 0.$$

Решением этого уравнения, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет выражение

$$y = e^{-\int q(x)dx} \left[C_1 - \int f(x) e^{\int q(x)dx} dx \right]. \quad (5.41)$$

В нашем случае для первого уравнения (5.40)

$$q(x) = 2\operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi},$$

$$f(x) = -Z_n R^2 \left(\operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi}\right) - (X_n - Y_n) R^2.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}e^{-\int q(x)dx} &= e^{-\int \left(2\operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi}\right) d\varphi} = e^{\ln \frac{\operatorname{tg}^{n/2} 0,5\varphi}{\sin^2 \varphi}} = \frac{\operatorname{tg}^{n/2} 0,5\varphi}{\sin^2 \varphi}, \\ e^{\int q(x)dx} &= e^{\int \left(2\operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi}\right) d\varphi} = e^{\ln \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^{n/2} 0,5\varphi}} = \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^{n/2} 0,5\varphi}.\end{aligned}$$

Тогда из (5.39) для Q_n и P_n получим следующие выражения:

$$P_n = \frac{\operatorname{tg}^{n/2} 0,5\varphi}{\sin^2 \varphi} \left\{ C_1 + R^2 \int \left[Z_n \left(\operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi}\right) + (X_n - Y_n) \right] \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^{n/2} 0,5\varphi} d\varphi \right\}.$$

Аналогично

$$Q_n = \frac{\operatorname{ctg}^n 0,5\varphi}{\sin^2 \varphi} \left\{ C_2 - R^2 \int \left[Z_n \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} \right) + (X_n + Y_n) \right] \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{ctg}^n 0,5\varphi} d\varphi \right\}.$$

После определения P_n и Q_n легко определяются искомые усилия:

$$N_{\theta\varphi} = \frac{P_n + Q_n}{2R} \sin n\theta, \quad N_\varphi = \frac{Q_n - P_n}{2R} \cos n\theta,$$

$$N_\theta = -RZ_n - N_\varphi.$$

Рассмотрим случай действия ветровой нагрузки на полусферу по закону

$$Z = Z_0 \sin \varphi \cos \theta, \quad n=1, \quad Z_n = Z_0 \sin \varphi,$$

$$X=0, \quad Y=0.$$

Для усилий N_φ , $N_{\theta\varphi}$ в этом случае получим следующие выражения:

$$N_\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin^3 \varphi} \left[\frac{C_2 - C_1}{2R} + \frac{C_2 + C_1}{2R} \cos \varphi + Z_0 R \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos^4 \varphi \right) \right],$$

$$N_{\theta\varphi} = \frac{\sin \theta}{\sin^3 \varphi} \left[\frac{C_1 + C_2}{2R} + \frac{C_2 - C_1}{2R} \cos \varphi + Z_0 R \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right].$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть определены из граничных условий. Будем считать, что полусфера прикреплена к неподвижному основанию (рис. 67). Тогда граничные условия будут следующими:

1) проекция касательных усилий $N_{\theta\varphi}$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ на направление $\theta=0$ равна проекции ветровой нагрузки на то же направление:

$$\int_0^{2\pi} (N_{\theta\varphi})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} R \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z_0 R r \sin \varphi \cos \theta d\varphi d\theta = 0;$$

2) сумма моментов усилий N_φ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ относительно диаметра полусферы $\theta = \frac{\pi}{2}$ равна моменту ветровой нагрузки относительно того же диаметра:

$$\int (N_\varphi)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \theta d\theta = 0.$$

Момент ветровой нагрузки равен нулю, так как давление Z имеет радиальное направление.

Из первого условия получаем

$$\frac{C_1 + C_2}{2} = -\frac{2}{3} Z_0 R^2.$$

Второе условие дает

$$C_1 - C_2 = 0.$$

Тогда для усилий N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ получим следующие выражения:

$$N_\varphi = -\frac{Z_0 R \cos \varphi \cos \theta}{3 \sin^2 \varphi} (2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi),$$

$$N_\theta = \frac{Z_0 R \cos \theta}{3 \sin^3 \varphi} (2 \cos \varphi - 3 \sin^2 \varphi - 2 \cos^4 \varphi),$$

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{Z_0 R \sin \theta}{3 \sin^3 \varphi} (2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi).$$



Рис. 67.

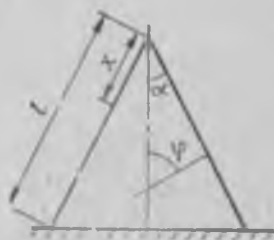


Рис. 68.

Если бы мы определяли постоянные C_1 и C_2 из того условия, что при $\varphi=0$ должны обращаться в нуль усилия N_φ и $N_{\theta\varphi}$, то мы обнаружили бы, что они получают те же самые значения, что и приведенные выше.

Нагружение конической оболочки нагрузкой типа ветровой. В этом случае (рис. 68)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad R_1 = \infty, \quad R_1 d\varphi = dx, \quad R_2 = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда уравнения (5.35) примут вид

$$\frac{\partial (x N_\varphi)}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - N_\theta + X x = 0,$$

$$\frac{\partial (x N_{\theta\varphi})}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \theta} + N_{\theta\varphi} + Y x = 0,$$

$$N_\theta = -Z x \operatorname{tg} \alpha.$$

После исключения из этих уравнений усилия N_θ и проведе-

ния с ними аналогичных преобразований, как и для случая сферы, получим

$$\begin{aligned}\frac{dU_n}{dx} + \frac{n}{x \sin \alpha} V_n + Z_n x \operatorname{tg} \alpha + X_n x &= 0, \\ \frac{dV_n}{dx} + \frac{1}{x} V_n + \frac{nx}{\cos \alpha} Z_n + Y_n x &= 0,\end{aligned}\quad (5.42)$$

где

$$\begin{aligned}X &= X_n \cos n\theta, \quad Y = Y_n \sin n\theta, \quad Z = Z_n \cos n\theta, \\ xN_\varphi &= U_n \cos n\theta, \quad xN_{\theta\varphi} = V_n \sin n\theta.\end{aligned}$$

Применим уравнения (5.42) для случая ветровой нагрузки, изменяющейся по закону

$$Z = Z_0 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \cos \theta,$$

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad n = 1.$$

В этом случае уравнения (5.42) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dU_1}{dx} + \frac{1}{x \sin \alpha} V_1 + Z_0 x \left(\frac{x}{l} \right)^2 \operatorname{tg} \alpha &= 0, \\ \frac{dV_1}{dx} + \frac{1}{x} V_1 + \frac{Z_0 x}{\cos \alpha} \left(\frac{x}{l} \right)^2 &= 0.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Второе уравнение интегрируется по формуле (5.41)

$$V_1 = \frac{1}{x} \left(C_1 - \frac{Z_0 x^5}{5l^2 \cos \alpha} \right).$$

После подстановки V_1 в первое уравнение (5.43) и интегрирования найдем

$$U_1 = \frac{Z_0}{4l^2} \left(\frac{2}{5 \sin 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) x^4 + \frac{C_1}{x \sin \alpha} + C_2.$$

При этом для усилий получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \left[\frac{Z_0}{4l^2} \left(\frac{2}{5 \sin 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) x^3 + \frac{C_1}{x^2 \sin \alpha} + \frac{C_2}{x} \right] \cos \theta, \\ N_{\theta\varphi} &= \left(\frac{C_1}{x^2} - \frac{Z_0 x^3}{5l^2 \cos \alpha} \right) \sin \theta.\end{aligned}$$

Постоянные C_1 и C_2 в данном случае надо взять равными нулю, чтобы избежать неопределенности в значениях усилий при $x=0$. Тогда окончательно получим

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \frac{Z_0}{4l^2} \left(\frac{2}{5 \sin 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) x^3 \cos \theta, \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{Z_0 \operatorname{tg} \alpha}{l^2} x^3 \cos \theta, \quad N_{\theta\varphi} = -\frac{Z_0 x^3}{5l^2 \cos \alpha} \sin \theta.\end{aligned}$$

Нагружение конической оболочки изгибающим моментом и поперечной силой. Вначале рассмотрим нагружение конической оболочки изгибающим моментом (рис. 69).

В этом случае уравнения (5.35) при $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{x} N_{\varphi} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial x} + \frac{2}{x} N_{\theta\varphi} &= 0, \quad N_{\theta} = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Интегрируем второе уравнение (5.44). После разделения переменных получим

$$N_{\theta\varphi} = \frac{C(\theta)}{x^2}, \quad (5.45)$$

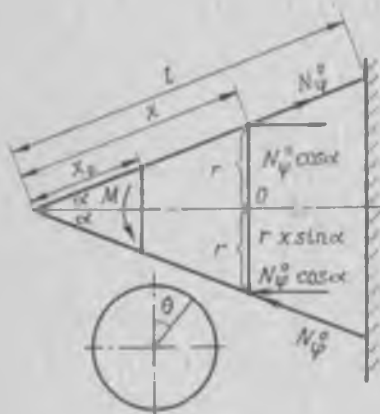


Рис. 69.

где $C(\theta)$ — произвольная функция угла θ .

Прежде чем проинтегрировать первое уравнение, определим усилие N_{φ} . Для этой цели на расстоянии x от вершины конуса проведем сечение, по периметру которого приложим внутренние усилия N_{φ} , распределенные по закону косинуса.

Из условия равенства нулю суммы моментов всех сил, приложенных к отсеченной части конуса относительно оси, проходящей

через точку O , перпендикулярную чертежу, получим

$$\int_0^{2\pi} N_{\varphi}^0 \cos \alpha \cos \theta r d\theta r \cos \theta = M.$$

Отсюда

$$N_{\varphi}^0 = \frac{M}{\pi x^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha},$$

где N_{φ}^0 — меридиональное усилие в наиболее удаленном волокне.

Меридиональное усилие при произвольном угле θ будет

$$N_{\varphi} = N_{\varphi}^0 \cos \theta = \frac{M \cos \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Подставив полученное выражение N_{φ} в первое уравнение (5.44), получим

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} = \frac{M \cos \theta}{\pi x^2 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

После интегрирования этого уравнения найдем, что

$$N_{\theta\varphi} = \frac{M \sin \theta}{\pi x^2 \sin \alpha \cos \alpha} + C_1(x), \quad (5.46)$$

где $C_1(x)$ — произвольная функция x .

Таким образом, для усилия $N_{\theta\varphi}$ получены выражения (5.45) и (5.46). Из условия их равенства

$$C(\theta) = \frac{M \sin \theta}{\pi \sin \alpha \cos \alpha} + x^2 C_1(x).$$

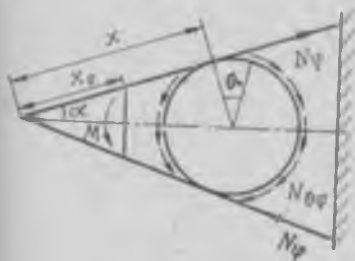


Рис. 70.

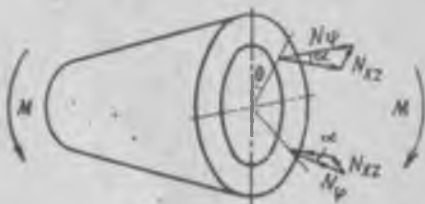


Рис. 71.

Так как функция $C_1(x)$ не зависит от угла θ , то из последнего выражения вытекает, что $C_1(x) = 0$. Тогда для функции $C(\theta)$ получаем

$$C(\theta) = \frac{M \sin \theta}{\pi \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Касательное усилие $N_{\theta\varphi}$ определим из формулы (5.46)

$$N_{\theta\varphi} = \frac{M \operatorname{tg} \alpha \sin \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha}.$$

Распределение усилий $N_{\theta\varphi}$ и N_{φ} показано на рис. 70.

Как видно из этого рисунка, касательные усилия $N_{\theta\varphi}$ дают равнодействующую поперечную силу

$$Q_1 = \int_0^{2\pi} N_{\theta\varphi} r d\theta \sin \theta = \frac{M \operatorname{tg} \alpha}{x \sin \alpha}.$$

Так как

$$M = \pi x^2 \sin^2 \alpha N_{\varphi}^0 \cos \alpha,$$

то

$$Q_1 = \pi N_{\varphi}^0 x \sin^2 \alpha.$$

Эта сила уравновешивается в сечении равнодействующей касательных усилий N_{xz} (рис. 71), равной

$$Q_2 = \int_0^{2\pi} N_{\varphi} \sin \alpha r d\theta \cos \theta = \pi N_{\varphi}^0 x \sin^2 \alpha.$$

Из сравнения правых частей выражений для Q_1 и Q_2 видно, что они равны. Следовательно, $Q_1 = Q_2$. Как следует из рис. 70 и 71, усилия Q_1 и Q_2 направлены по вертикальному диаметру в прямо противоположные стороны и лежат в плоскости действия изгибающего момента.

Рассмотрим далее нагружение конической оболочки поперечной силой Q (рис. 72).

Дифференциальные уравнения задачи в данном случае остаются в форме (5.44). Функцию $C(\theta)$ в выражении (5.45) для касательного усилия $N_{\theta\varphi}$ найдем из условия

$$(N_{\theta\varphi})_{x=x_0} = N_{\theta\varphi}^0 \sin \theta$$

или

$$\frac{C(\theta)}{x_0^2} = N_{\theta\varphi}^0 \sin \theta,$$

где

$$N_{\theta\varphi}^0 = -\frac{Q}{\pi x_0 \sin \alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_{\theta\varphi} &= \frac{C(\theta)}{x^2} = \frac{N_{\theta\varphi}^0 x_0^2 \sin \theta}{x^2} = \\ &= -\frac{Q x_0 \sin \theta}{\pi x^2 \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Подставив найденное значение $N_{\theta\varphi}$ в первое уравнение (5.44), получим

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial x} + \frac{N_{\varphi}}{x} = \frac{Q x_0 \cos \theta}{\pi x^2 \sin \alpha}.$$

В результате интегрирования этого уравнения определим усилие N_{φ} :

$$N_{\varphi} = -\frac{Q x_0 \cos \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha} + \frac{D(\theta)}{x},$$

где $D(\theta)$ — произвольная функция угла θ .

Для определения этой функции служит условие

$$(N_{\varphi})_{x=x_0} = 0,$$

выражающее отсутствие нормальных напряжений в сечении, где приложена сила Q .

Используя это условие, находим

$$D(\theta) = \frac{Q \cos \theta}{\pi \sin^2 \alpha}.$$

Тогда для N_φ получим окончательно выражение

$$N_\varphi = \frac{Q(x - x_0) \cos \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha}.$$

Легко убедиться, что момент усилий N_φ в заделанном сечении конуса относительно его горизонтального диаметра равен моменту силы Q . Действительно,

$$\int_0^{2\pi} (N_\varphi)_{x=l} R^2 \cos \alpha \cos \theta d\theta = Q(l - x_0) \cos \alpha.$$

Суммарные напряжения в конической оболочке при одновременном ее нагружении изгибающим моментом и поперечной силой будут

$$N_\varphi = \frac{M \cos \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha} + \frac{Q(x - x_0) \cos \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha},$$

$$N_{\theta\varphi} = \frac{Q x_0 \sin \theta}{\pi x^2 \sin \alpha} - \frac{M \operatorname{tg} \alpha \sin \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha}.$$

Из последнего выражения видно, что при некоторых соотношениях входящих в него величин можно получить $N_{\theta\varphi} = 0$. Действительно, имеем

$$\frac{Q x_0 \sin \theta}{\pi x^2 \sin \alpha} - \frac{M \operatorname{tg} \alpha \sin \theta}{\pi x^2 \sin^2 \alpha} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{Q x_0 \cos \alpha}{M} = 1.$$

Из этого условия можно сделать вывод, что если в некотором сечении конической оболочки приложены поперечная сила и изгибающий момент, причем момент силы Q относительно вершины конуса равен приложенному моменту M , то касательные напряжения в оболочке всюду будут равны нулю.

Если изменить направление изгибающего момента, то нормальные напряжения от M и Q будут вычитаться, а касательные — складываться.

Нагружение цилиндрической оболочки ветровой нагрузкой. В этом случае $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $R_1 d\varphi = dx$. Тогда исходные уравнения (5.35) примут вид

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{R \partial \theta} + X = 0, \quad \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + Y = 0,$$

$$N_\theta = -ZR.$$

Подставив сюда $X=0$, $Y=0$, $Z=Z_0 \cos \theta$, из третьего уравнения получим

$$N_\theta = -Z_0 R \cos \theta.$$

Из остальных двух уравнений найдем

$$N_{\theta r} = -Z_0 x \sin \theta + f_1(\theta),$$

$$N_r = \frac{Z_0 x^2}{2R} \cos \theta - x \frac{\partial f_1(\theta)}{R \partial \theta} + f_2(\theta).$$

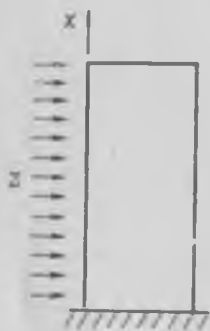


Рис. 73.

Здесь $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ — произвольные функции угла θ , структуру которых следует установить из следующих граничных условий.

1. Сумма проекций всех сил $N_{\theta r}$ при $x=0$ на направление $\theta=0$ должна равняться равнодействующей силе ветра в том же направлении (рис. 73):

$$\int_0^{2\pi} (N_{\theta r})_{x=0} R d\theta \sin \theta - \int_0^{2\pi} \int_0^l Z R d\theta dx \cos \theta = 0.$$

Из этого условия находим

$$f_1(\theta) = Z_0 l \sin \theta.$$

2. Момент сил N_r при $x=0$ относительно диаметра $\theta = \frac{\pi}{2}$ должен быть равен моменту сил ветра относительно того же диаметра:

$$\int_0^{2\pi} (N_r)_{x=0} R d\theta R \cos \theta = \int_0^{2\pi} \int_0^l Z R d\theta dx \cos \theta x,$$

откуда

$$f_2(\theta) = \frac{Z_0 l^2}{2R} \cos \theta.$$

Тогда для усилий N_r , N_θ , $N_{\theta r}$ получим следующие выражения:

$$N_r = \frac{Z_0}{2R} (x-l)^2 \cos \theta, \quad N_\theta = -Z_0 R \cos \theta,$$

$$N_{\theta r} = Z_0 l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \theta.$$

Изгиб цилиндрической оболочки моментом на конце. В этом случае дифференциальные уравнения (5.35) будут иметь вид

$$\frac{\partial N_r}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta r}}{R \partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial N_{\theta r}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} = 0, \quad N_\theta = 0. \quad (5.47)$$

Из второго уравнения (5.47)

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial x} = 0, \quad N_{\theta\varphi} = C_1(\theta),$$

где $C_1(\theta)$ — неизвестная функция угла θ . Подставив найденное значение $N_{\theta\varphi}$ в первое уравнение, получим

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial C_1(\theta)}{R \partial \theta} = 0. \quad (5.48)$$

Выражение для усилия N_{φ} можно получить по известной из курса сопротивления материалов формуле

$$N_{\varphi} = \sigma_{\varphi} \delta = \frac{M \delta y}{J},$$

где δ — толщина оболочки;

J — момент инерции сечения оболочки;

y — расстояние от горизонтального диаметра до рассматриваемого волокна.

Для момента инерции J имеем выражение

$$J = \int_0^{2\pi} dF y^2 = R^3 \delta \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi R^3 \delta,$$

$$y = R \cos \theta,$$

$$dF = \delta ds = \delta R d\theta.$$

Тогда

$$N_{\varphi} = \frac{M \delta R}{\pi R^3 \delta} \cos \theta = \frac{M \cos \theta}{\pi R^2 \delta}. \quad (5.49)$$

Из этого выражения видно, что нормальные напряжения в поперечном сечении оболочки распределяются по закону косинуса.

В случае нагружения оболочки моментом (рис. 74) нормальные напряжения не зависят от продольной координаты x . Поэтому в (5.48) следует положить

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial x} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial C_1(\theta)}{R \partial \theta} = 0,$$

откуда

$$C_1(\theta) = C_2 = \text{const}$$

и

$$N_{\theta\varphi} = C_2.$$

Постоянная интегрирования C_2 должна быть равна нулю, так как крутящего момента к оболочке не приложено.

Следовательно, при нагружении оболочки чистым изгибом в ней возникают только нормальные усилия N_φ , определяемые формулой (5.49).

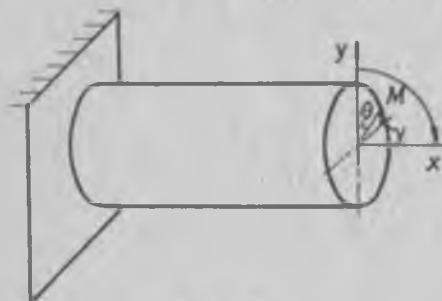


Рис. 74.

Нагружение цилиндрической оболочки поперечной силой. В данном случае выражения для внутренних усилий получим из уравнений (5.47). Из второго уравнения этой системы

$$N_{\theta\varphi} = C_1(\theta).$$

Кроме того, для меридиональных усилий остается в силе формула (5.49), в которую следует подста-

вить выражение изгибающего момента через силу Q (рис. 75)

$$M = Q(l - x).$$

Тогда

$$N_\varphi = \frac{Q(l - x) \cos \theta}{\pi R^2}.$$

При этом уравнение (5.48) примет вид

$$-\frac{Q \cos \theta}{\pi R^2} + \frac{\partial C_1(\theta)}{R \partial \theta} = 0,$$

откуда получаем выражение для $C_1(\theta)$:

$$C_1(\theta) = \frac{Q \sin \theta}{\pi R} + C_3.$$

Следовательно,

$$N_{\theta\varphi} = C_1(\theta) = \frac{Q \sin \theta}{\pi R} + C_3.$$

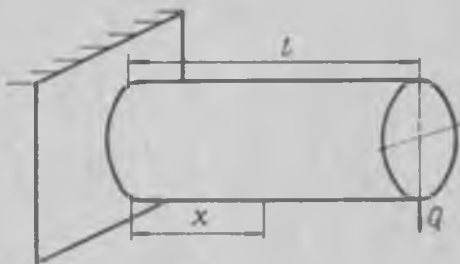


Рис. 75.

Постоянную C_3 в данном случае следует положить равной нулю, так как к рассматриваемой оболочке внешнего крутящего момента не приложено. Поэтому для касательных усилий в цилиндрической оболочке, нагруженной поперечной силой на конце, имеем формулу

$$N_{\theta\varphi} = \frac{Q \sin \theta}{\pi R}.$$

Распределение нормальных N_φ и касательных усилий $N_{\theta\varphi}$ по поперечному сечению оболочки показано на рис. 76.

Напряженное состояние опертой по концам цилиндрической оболочки от веса залитой в нее жидкости. Схема нагружения приведена на рис. 77. Исходные уравнения (5.35) в этом случае будут иметь вид

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{R \partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{R \partial \theta} = 0, \quad N_{\theta} = -ZR, \quad (5.50)$$

где

$$Z = -\gamma h = -\gamma R (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

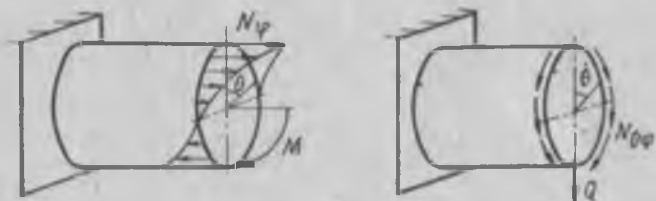


Рис. 76.

Из последнего уравнения следует

$$N_{\theta} = \gamma R^2 (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Тогда второе уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial x} = \gamma R \sin \theta.$$

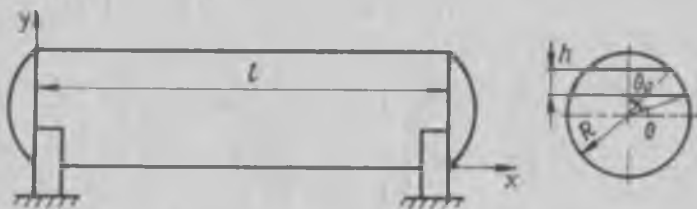


Рис. 77.

В результате интегрирования этого уравнения имеем

$$N_{\theta\varphi} = \gamma R x \sin \theta + C_1(\theta).$$

Подставим найденное значение $N_{\theta\varphi}$ в первое уравнение (5.50):

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial x} = -\gamma x \cos \theta - \frac{\partial C_1(\theta)}{R \partial \theta}.$$

После интегрирования по x получим

$$N_{\varphi} = -\frac{1}{2} \gamma x^2 \cos \theta - x \frac{\partial C_1(\theta)}{R \partial \theta} + C_2(\theta).$$

Неизвестные функции $C_1(\theta)$ и $C_2(\theta)$ найдем из следующих граничных условий:

$$N_{\varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x=0, \\ x=l. \end{matrix}$$

Тогда

$$C_2(\theta) = 0, \quad -\frac{1}{2} \gamma l \cos \theta - \frac{\partial C_1(\theta)}{R \partial \theta} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial C_1(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \gamma R l \cos \theta.$$

Интегрируя, получим

$$C_1(\theta) = -\frac{1}{2} \gamma R l \sin \theta + C.$$

Тогда для касательного усилия $N_{\theta\varphi}$ будем иметь выражение

$$N_{\theta\varphi} = \gamma R x \sin \theta - \frac{1}{2} \gamma R l \sin \theta + C.$$

Постоянную C следует положить равной нулю, так как к концам оболочки касательных усилий не приложено.

Тогда окончательно получим следующие формулы:

$$N_{\varphi} = -\frac{1}{2} \gamma l x \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \theta,$$

$$N_{\theta} = \gamma R^2 (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

$$N_{\theta\varphi} = \gamma R l \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right) \sin \theta.$$

§ 24. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАСТИЛЬЯНО К ЗАДАЧАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ОБОЛОЧКАХ

В некоторых случаях для определения перемещений в оболочках может оказаться полезной теорема Кастильяно. Согласно этой теореме перемещение, соответствующее данному обобщенному силовому фактору, равно частной производной от потенциальной энергии по данной обобщенной силе:

$$\delta_p = \frac{d\mathcal{E}}{dP}.$$

При этом потенциальная энергия данной упругой системы должна быть выражена в функции внешних сил.

В случае безмоментной оболочки потенциальная энергия деформации

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_F (N_\varphi \varepsilon_\varphi + N_\theta \varepsilon_\theta + N_{\theta\varphi} \varepsilon_{\theta\varphi}) dF.$$

Заменяя здесь компоненты деформации через усилия по закону Гука, получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2E\delta} \iint_F [N_\varphi^2 + N_\theta^2 - 2\mu N_\varphi N_\theta + 2(1+\mu) N_{\theta\varphi}^2] dF. \quad (5.51)$$

Рассмотрим некоторые задачи, имеющие практический интерес.

Перемещение точки приложения радиальной сосредоточенной силы, действующей на сферический сегмент. Пусть на оболочку в виде сферического сегмента действует сосредоточенная сила P , приложенная через жесткую шайбу. Тогда из условия равновесия верхней части сегмента (рис. 78), определяемой углом $\psi + \varphi_0$, получим

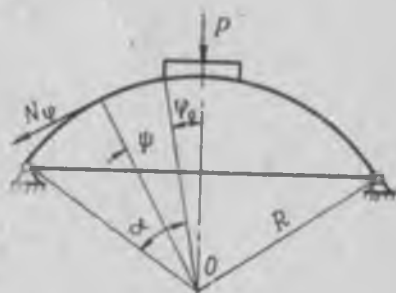


Рис. 78.

$$N_\varphi = - \frac{P}{2\pi R \sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

Выражение для усилия N_θ получим из уравнения Лапласа

$$N_\theta = -N_\varphi = \frac{P}{2\pi R \sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

В силу симметрии нагружения касательное усилие в оболочке $N_{\theta\varphi} = 0$.

Для энергии деформации получим выражение

$$\mathcal{E} = \frac{(1+\mu) P^2}{4\pi^2 E \delta} \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi d\theta}{\sin^3(\varphi_0 + \psi)}.$$

После интегрирования найдем

$$\mathcal{E} = \frac{(1+\mu) P^2}{4\pi E \delta} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{\sin(\varphi_0 + \alpha)} \right].$$

Пользуясь теоремой Кастильяно, получим перемещение точки приложения силы P :

$$\delta_p = \frac{\partial}{\partial P} = \frac{(1+\mu)P}{2\pi E\delta} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \alpha)}{\sin (\varphi_0 + \alpha)} \right].$$

Определение угла поворота жесткой шайбы, скрепленной со сферическим сегментом и нагруженной изгибающим моментом. Для определения внутренних упругих усилий N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} [N_\varphi \sin (\varphi_0 + \psi)] + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - N_\theta \cos (\varphi_0 + \psi) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} [N_{\theta\varphi} \sin (\varphi_0 + \psi)] + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{\theta\varphi} \cos (\varphi_0 + \psi) = 0,$$

$$N_\theta + N_\varphi = 0,$$

полученные из уравнений (5.35) путем замены φ на $\varphi_0 + \psi$.

После исключения из этих уравнений усилия N_θ будем иметь

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial \psi} + 2N_\varphi \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) + \frac{1}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \psi} + 2N_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) - \frac{1}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Решение этих уравнений можно искать в форме

$$N_\varphi = S_\varphi \cos \theta, \quad N_{\theta\varphi} = S_{\theta\varphi} \sin \theta.$$

Тогда

$$\frac{dS_\varphi}{d\psi} + 2S_\varphi \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) + \frac{1}{\sin (\varphi_0 + \psi)} S_{\theta\varphi} = 0,$$

$$\frac{dS_{\theta\varphi}}{d\psi} + 2S_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) + \frac{1}{\sin (\varphi_0 + \psi)} S_\varphi = 0.$$

Сначала сложим оба эти уравнения, а затем вычтем из первого второе. При этом получим

$$\frac{dU_1}{d\psi} + \left[2 \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) + \frac{1}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \right] U_1 = 0,$$

$$\frac{dU_2}{d\psi} + \left[2 \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) - \frac{1}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \right] U_2 = 0,$$

где обозначено

$$U_1 = S_\varphi + S_{\theta\varphi}, \quad U_2 = S_\varphi - S_{\theta\varphi}.$$

Полученные уравнения допускают разделение переменных и поэтому интегрируются просто:

$$\ln U_1 = \ln C_1 - \int \left[2 \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) + \frac{1}{\sin(\varphi_0 + \psi)} \right] d\psi,$$

$$\ln U_2 = \ln C_1 - \int \left[2 \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) - \frac{1}{\sin(\varphi_0 + \psi)} \right] d\psi.$$

После интегрирования этих уравнений получим

$$U_1 = \frac{C_1}{\sin^2(\varphi_0 + \psi) \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}},$$

$$U_2 = \frac{C_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}}{\sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

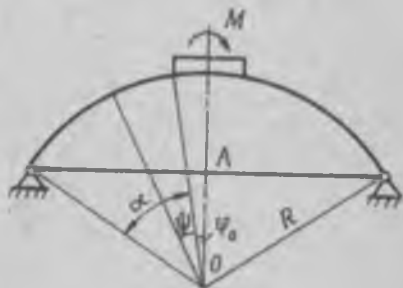


Рис. 79.

Теперь можно написать выражения для внутренних усилий

$$N_\varphi = \frac{\cos \theta}{2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{C_1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + C_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right),$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{\sin \theta}{2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{C_1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} - C_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right),$$

$$N_\theta = -N_{\theta\theta}. \quad (5.52)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 используем условия:

1) момент усилий N_φ при $\psi = \alpha$ (рис. 79) относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку A , равен заданному моменту:

$$M = \int_0^{2\pi} [N_\varphi ds \sin(\varphi_0 + \psi) R \sin(\varphi_0 + \psi) \cos \theta]_{\psi=\alpha};$$

2) сумма проекций усилий $N_{\theta\theta}$ и N_φ при $\psi = \alpha$ на линию пересечения плоскости действия момента с плоскостью основания сегмента должна быть равна нулю:

$$\int_0^{2\pi} (N_\varphi)_{\psi=\alpha} ds \cos(\varphi_0 + \alpha) \cos \theta - \int_0^{2\pi} (N_{\theta\theta})_{\psi=\alpha} ds \sin \theta = 0.$$

Из этих условий следует, что

$$C_1 = C_2 = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Тогда усилия N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ определяются по выражениям

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{M \cos \theta}{2\pi R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right), \\ N_\theta &= -N_\varphi, \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{M \sin \theta}{2\pi R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Теперь можно подсчитать потенциальную энергию деформации рассматриваемого сегмента при нагружении его изгибающим моментом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{1}{2E\delta} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [N_\varphi^2 + N_\theta^2 - 2\mu N_\varphi N_\theta + 2(1+\mu)N_{\theta\varphi}^2] \times \\ &\quad \times R^2 \sin(\varphi_0 + \psi) d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения (5.53) для усилий N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ и проинтегрировав в указанных пределах, получим

$$\mathfrak{D} = \frac{(1+\mu)FM^2}{2\pi R^2 E\delta}.$$

Отсюда по теореме Кастильяно найдем угол поворота шайбы:

$$\gamma = \frac{d\mathfrak{D}}{dM} = \frac{(1+\mu)FM}{\pi R^2 E\delta}.$$

Здесь обозначено

$$F = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin^3 \varphi_0} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{2 \sin \varphi_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + 2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{\sin^3(\varphi_0 + \alpha)} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{2 \sin(\varphi_0 + \alpha)}.$$

Если внутри сферического сегмента действует внутреннее давление интенсивностью q , то для определения усилий N_φ и N_θ получаются выражения:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{qR}{2} + \frac{M \cos \theta}{2\pi R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right), \\ N_\theta &= \frac{qR}{2} - \frac{M \cos \theta}{2\pi R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения для усилий и значение для $N_{0\varphi}$ (5.53) в выражение (5.51), можно убедиться, что внутреннее давление в сегменте не влияет на угол поворота, возникающий от действия момента M . Такой результат получается вследствие того, что рассматривается безмоментное состояние оболочки.

Определение угла поворота жесткой шайбы, скрепленной со сферическим сегментом и нагруженной крутящим моментом. Из условия равновесия части сегмента, лежащей выше параллельного круга, определяемого углом $\varphi_0 + \psi$ (рис. 80), найдем

$$N_{0\varphi} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

В данном случае остальные усилия безмоментного состояния в оболочке равны нулю.

Выражение для потенциальной энергии деформации будет иметь вид

$$\mathfrak{D} = \frac{1+\mu}{E\delta} \int_0^{\varphi_0 + \psi} \int_0^{2\pi} N_{0\varphi}^2 dF.$$

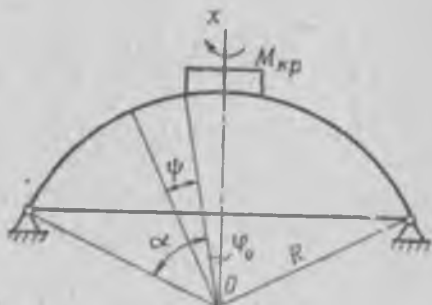


Рис. 80.

После подстановки сюда значений $N_{0\varphi}$ и $dF = R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi) d\psi d\theta$ и интегрирования в указанных пределах получим

$$\mathfrak{D} = \frac{(1+\mu) M_{кр}^2}{4\pi R^2 E\delta} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{\sin(\varphi_0 + \alpha)} \right].$$

Угол поворота шайбы вокруг оси Ox будет

$$\theta = \frac{d\mathfrak{D}}{dM_{кр}} = \frac{(1+\mu) M_{кр}}{2\pi R^2 E\delta} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin \varphi_0} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{\sin(\varphi_0 + \alpha)} \right].$$

Перемещение точки приложения касательной сосредоточенной силы, приложенной к жесткой шайбе, которая прикреплена к сферическому сегменту в его полюсной части. Эту задачу можно решить, используя результаты, которые были получены при нагружении сферического сегмента изгибающим моментом. Напряжения в этих обоих случаях определяются выражениями

$$N_\varphi = S_\varphi \cos \theta; \quad N_{\theta\varphi} = S_{\theta\varphi} \sin \theta.$$

Следовательно, для усилий N_φ , N_θ , $N_{\theta\varphi}$ можно воспользоваться формулами (5.52).

Для определения постоянных интегрирования в данном случае имеем следующие условия:

1) момент усилий N_φ при $\psi = \alpha$ относительно оси, проходящей через точку пересечения вертикального диаметра сегмента с плоскостью его основания, будет равен моменту силы P относительно той же оси:

$$PR [\cos \varphi_0 - \cos (\varphi_0 + \alpha)] = \int_0^{2\pi} (N_\varphi)_{\psi=\alpha} ds \sin (\varphi_0 + \alpha) r \cos \theta;$$

2) равнодействующая проекций упругих усилий N_φ и $N_{\theta\varphi}$ при $\psi = \alpha$ на направление силы P равняется этой силе:

$$\int_0^{2\pi} (N_\varphi)_{\psi=\alpha} ds \cos (\varphi_0 + \alpha) \cos \theta - \int_0^{2\pi} (N_{\theta\varphi})_{\psi=\alpha} ds \sin \theta = P.$$

Подставляя сюда $ds = R \sin (\psi_0 + \alpha)$ и $r = R \sin (\varphi_0 + \alpha)$, после несложных вычислений для постоянных интегрирования получим следующие значения:

$$C_1 = -\frac{2P}{\pi R} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad C_2 = \frac{2P}{\pi R} \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}.$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в формулы (5.52), получим следующие формулы для внутренних усилий в сферическом сегменте при нагружении его силой, действующей в плоскости шайбы:

$$N_\varphi = \frac{P \cos \theta}{\pi R \sin^2 (\varphi_0 + \psi)} \left(\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} \right),$$

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{P \sin \theta}{\pi R \sin^2 (\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right),$$

$$N_\theta = -N_\varphi.$$

Теперь можно подсчитать потенциальную энергию деформации:

$$\mathcal{E} = \frac{(1 + \mu) R^2}{E\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (N_\varphi^2 + N_{\theta\varphi}^2) \sin (\varphi_0 + \psi) d\psi d\theta.$$

После подстановки сюда значений для N_φ и $N_{\theta\varphi}$ и вычисления интегралов получим следующее выражение для энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{(1 + \mu) K P^2}{\pi E\delta}.$$

Перемещение по направлению силы P будет

$$\delta_p = \frac{2(1+\mu)KP}{\pi E\delta}$$

Здесь обозначено

$$K = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \varphi_0) \left[\frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin^3 \varphi_0} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{2 \sin \varphi_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{\sin^3(\varphi_0 + \alpha)} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \alpha)}{2 \sin(\varphi_0 + \alpha)} \right] + \\ + \left[\frac{1}{\sin^4(\varphi_0 + \alpha)} - \frac{1}{\sin^4 \varphi_0} \right] \cos \varphi_0.$$

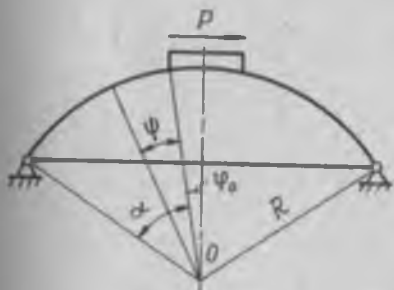


Рис. 81.

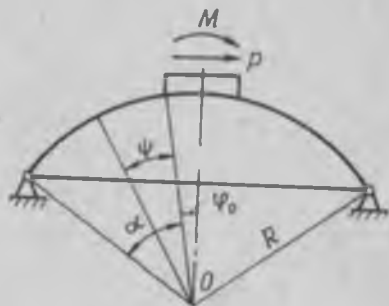


Рис. 82.

Остальные обозначения видны из рис. 81.

Линейные и угловые перемещения жесткой шайбы, скрепленной со сферическим сегментом и нагруженной изгибающим моментом и касательной силой. В этом случае выражения для внутренних усилий можно получить путем наложения решений, полученных при нагружении сегмента силой P и моментом M (рис. 82):

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} = & \frac{M \cos \theta}{2\pi R^2 \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right) - \\ & - \frac{P \cos \theta}{\pi R \sin^2(\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} - \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\psi} &= \frac{M \sin \theta}{2\pi R^2 \sin^2 (\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right) - \\ &- \frac{P \sin \theta}{\pi R \sin^2 (\varphi_0 + \psi)} \left(\frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

$$N_{\theta} = -N_{\varphi}.$$

Для потенциальной энергии деформации имеем выражение

$$\mathcal{E} = \frac{(1+\mu) R^2}{E\delta} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (N_{\psi}^2 + N_{\theta}^2) \sin(\varphi_0 + \psi) d\psi d\theta.$$

После подстановки в выражение для $\mathcal{E}$ величин усилий [см (5.54)] и подсчета интегралов получим

$$\mathcal{E} = \frac{(1+\mu)}{4\pi R^2 E\delta} \left[\left(M - 2PR \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right)^2 (F_1 - F_2) + \right. \\ \left. + \left(M + 2PR \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \right)^2 (F_1 + F_2) \right].$$

Для определения перемещения по соответствующему направлению необходимо взять частные производные от потенциальной энергии по усилию P или M .

Перемещение по направлению силы P

$$\delta_P = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} = \frac{1+\mu}{\pi R^2 E\delta} \{ M(F_1 \cos \varphi_0 + F_2) + \\ + 2PR \left[\frac{1}{2} F_1 (1 + \cos^2 \varphi_0) + F_2 \cos \varphi_0 \right] \}.$$

Угол поворота по направлению момента M будет

$$\theta = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M} = \frac{1+\mu}{\pi R^2 E\delta} [MF_1 + PR(F_1 \cos \varphi_0 + F_2)].$$

В приведенных формулах обозначено:

$$F_1 = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{\sin^3 \varphi_0} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_0}{2 \sin \varphi_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} - \\ - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 - \alpha)}{\sin^3 (\varphi_0 + \alpha)} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \alpha)}{2 \sin (\varphi_0 + \alpha)}, \\ F_2 = \frac{1}{\sin^4 (\varphi_0 + \alpha)} - \frac{1}{\sin^4 \varphi_0}.$$

ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННЫЕ МЕСТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОГОННОЙ НАГРУЗКОЙ

Приведенные в предыдущей главе формулы, полученные по безмоментной теории, точно определяют напряженное и деформированное состояние тонкостенных оболочек в тех зонах, где нагрузка изменяется плавно. Если нагрузка претерпевает разрыв, т. е. изменяется скачкообразно, то на этих участках будет иметь место изгиб оболочки. Изгиб оболочки возникает в том случае, если скачкообразно изменяется сечение, а также в местах сопряжения оболочек разной геометрической формы.

В указанных случаях изгиб будет носить местный характер, и область его распространения будет сравнительно небольшой. Для этих участков приведенные в гл. V формулы безмоментной теории оказываются недостаточными. Необходимо рассмотреть изгиб оболочки и сложить напряжения от изгиба с напряжениями безмоментного состояния. Однако здесь же следует оговориться, что несущая способность оболочек во многих случаях будет определяться безмоментным напряженным состоянием, а местный изгиб существенной роли играть не будет. Поэтому в практических расчетах изгибные напряжения часто не определяются и весь расчет ведется по безмоментной теории.

Однако без знания основ моментной теории в некоторых случаях нельзя правильно понять работу конструкции и решать вопросы конструирования. Поэтому в следующих параграфах будут даны основные предпосылки для расчета оболочек на местный изгиб.

§ 25. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим оболочку вращения, нагруженную, как показано на рис. 83, усилием Q_0 и моментом M_0 .

Вырежем из этой оболочки бесконечно малый элемент $Rd\varphi rd\theta$, приложим к его граням неизвестные нам пока внутренние упругие усилия и составим уравнения его равновесия.

Для равновесия тела в пространстве необходимо иметь шесть уравнений статики. В данном случае из этих шести уравнений останутся только три. Остальные три уравнения будут тождественно удовлетворяться.

Составив сумму моментов всех сил, действующих на элемент, вокруг оси y , получим

$$\frac{d}{d\varphi} (R_2 M_\varphi \sin \varphi) - Q_\varphi R_1 R_2 \sin \varphi - M_0 R_1 \cos \varphi = 0. \quad (6.1)$$

Из условия равновесия сил, действующих на элемент, в направлении оси z будем иметь

$$\frac{d}{d\varphi}(R_2 Q_\varphi \sin \varphi) + N_\theta R_1 \sin \varphi + N_\varphi R_2 \sin \varphi = 0. \quad (6.2)$$

Для получения третьего уравнения рассмотрим равновесие отсеченной части оболочки под углом φ (рис. 84). Спроектируем погонные усилия N_φ и Q_φ на вертикаль:

$$\int_0^{2\pi} N_\varphi r d\theta \sin \varphi + \int_0^{2\pi} Q_\varphi r d\theta \cos \varphi = 0.$$

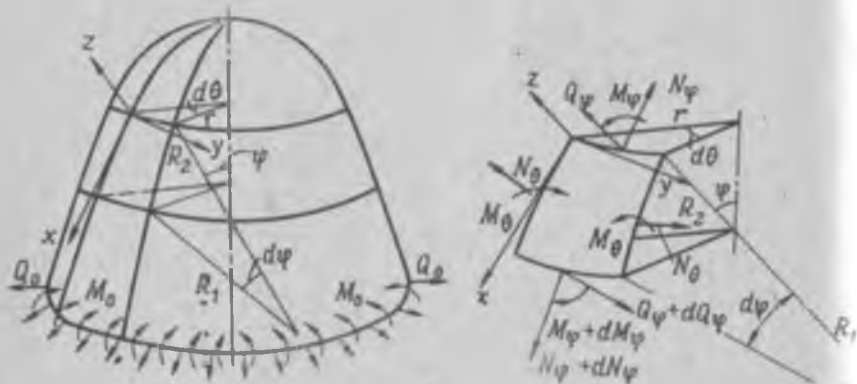


Рис. 83.

Отсюда для N_φ получим выражение

$$N_\varphi = -Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi. \quad (6.3)$$

Таким образом, мы имеем три уравнения, в которые входят пять неизвестных внутренних усилий N_φ , N_θ , Q_φ , M_φ , M_θ .

Исключив с помощью выражения (6.3) усилие N_φ из уравнения (6.2), получим

$$\frac{d}{d\varphi}(R_2 Q_\varphi \sin \varphi) + N_\theta R_1 \sin \varphi - Q_\varphi R_2 \cos \varphi = 0. \quad (6.4)$$

Обозначим произведение $R_2 Q_\varphi$ в виде $V = R_2 Q_\varphi$. Тогда уравнение (6.4) можно записать в форме

$$\frac{d}{d\varphi}(V \sin \varphi) + N_\theta R_1 \sin \varphi - V \cos \varphi = 0.$$

После дифференцирования из этого уравнения получим

$$N_\theta = -\frac{dV}{R_1 d\varphi}.$$

При этом уравнения (6.1) и (6.3) будут иметь вид

$$N_{\varphi} = -\frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\frac{d}{d\varphi} (R_2 M_{\varphi} \sin \varphi) - V R_1 \sin \varphi - M_0 R_1 \cos \varphi = 0. \quad (6.5)$$

Имея выражения для N_0 и N_{φ} и используя закон Гука, получим

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E\delta} (N_{\varphi} - \mu N_0), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{E\delta} (N_0 - \mu N_{\varphi}).$$

Кроме того, для компонентов деформации были получены формулы (5.32) и (5.33):

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{du}{R_1 d\varphi} + \frac{w}{R_1},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{w}{R_2}.$$

Подставив эти выражения для ε_{φ} и ε_0 в формулы закона Гука, получим

$$w + \frac{du}{d\varphi} = \frac{R_1}{E\delta} (N_{\varphi} - \mu N_0),$$

$$w + u \operatorname{ctg} \varphi = \frac{R_2}{E\delta} (N_0 - \mu N_{\varphi}). \quad (6.6)$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi = \frac{R_1}{E\delta} (N_{\varphi} - \mu N_0) - \frac{R_2}{E\delta} (N_0 - \mu N_{\varphi}). \quad (6.7)$$

Продифференцируем второе выражение (6.6):

$$\frac{dw}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{u}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{E\delta} \frac{d}{d\varphi} [R_2 (N_0 - \mu N_{\varphi})].$$

Исключая из этого выражения производную $\frac{dw}{d\varphi}$ с помощью соотношения (6.7), получим

$$\begin{aligned} -\left(u - \frac{dw}{d\varphi}\right) &= \frac{1}{E\delta} \frac{d}{d\varphi} [R_2 (N_0 - \mu N_{\varphi})] - \\ &= \frac{1}{E\delta} [R_1 (N_{\varphi} - \mu N_0) - R_2 (N_0 - \mu N_{\varphi})] \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Обозначим

$$u - \frac{dw}{d\varphi} = R_1 U, \quad (6.9)$$

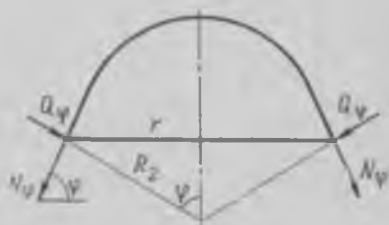


Рис. 84.

где U — новая неизвестная функция, выражающая собой угол поворота сечения оболочки.

Тогда уравнение (6.8) после подстановки в него N_φ и N_θ окончательно получит вид

$$\frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] \frac{dV}{d\varphi} + \left(p - \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \right) V = E h R_1 U. \quad (6.10)$$

Таким образом, вместо уравнений (6.2) и (6.3) получим одно уравнение (6.10) с двумя неизвестными функциями V и U . Для

получения еще одного уравнения, связывающего эти функции, можно использовать уравнение (6.5). Предварительно запишем выражения для моментов через изменения кривизны

$$M_\varphi = -D(\chi_\varphi + \mu\chi_\theta),$$

$$M_\theta = -D(\chi_\theta + \mu\chi_\varphi).$$

Выразим компоненты изменения кривизны через компоненты перемещений u и w ¹.

В нашем случае угол смежности между касательными, проведенными через точки 1 и 2 (рис. 85), в положении после деформации будет равен разности углов поворота сечений, проходящих через эти точки:

$$\left[\left(\frac{u}{R_1} - \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) + d \left(\frac{u}{R_1} - \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) \right] - \left(\frac{u}{R_1} - \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right) = d \left(\frac{u}{R_1} - \frac{dw}{R_1 d\varphi} \right).$$

Учитывая обозначение (6.9), найдем, что угол смежности будет равен dU . Поэтому для изменения кривизны меридиана получаем формулу

$$\chi_\varphi = \frac{dU}{R_1 d\varphi}. \quad (6.11)$$

Выражение для кривизны будет

$$\chi_\theta = \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2}.$$

¹ Под кривизной кривой понимают отношение угла смежности к длине дуги, когда последняя стремится к нулю.

Из рис. 85 имеем

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad R_2' = \frac{r + \Delta r}{\sin(\varphi + U)}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{\sin(\varphi + U)}{r + \Delta r} - \frac{\sin \varphi}{r} \approx \frac{\sin(\varphi + U)}{r} - \frac{\sin \varphi}{r} = \\ &= \frac{\sin \varphi + U \cos \varphi}{r} - \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{U \cos \varphi}{r} = \frac{U}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Тогда выражения для моментов примут вид

$$M_r = -D \left(\frac{dU}{R_1 d\varphi} + \mu \frac{U}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi \right),$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{U}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi + \mu \frac{dU}{R_1 d\varphi} \right).$$

Подставив эти выражения для моментов в (6.5), получим

$$\frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] \frac{dU}{d\varphi} - \left(\mu + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \right) U = -\frac{VR_1}{D}. \quad (6.12)$$

Два полученных совместных уравнения (6.10) и (6.12) полностью решают задачу расчета оболочки вращения, нагруженной краевыми усилиями Q_0 и M_0 . Однако в практических расчетах в своей полной форме эти уравнения применяются очень редко в виду сложности их решения. Чаще всего приходится пользоваться приближенными уравнениями краевого эффекта. Эти приближенные уравнения получаются из уравнений (6.10) и (6.12), если отбросить в их левых частях подчеркнутые члены.

В основе этого упрощения лежит принцип Сен-Венана, согласно которому действие самоуравновешенной краевой радиальной или моментной нагрузки носит быстро затухающий характер. Это подтверждено и теоретическими исследованиями некоторых частных задач, в которых было обнаружено, что указанный процесс в оболочках носит, кроме того, и колебательный характер. Функции, описывающие такие процессы, имеют вид $e^{-kx} f(x)$, где $f(x)$ — ограниченная периодическая функция. Со множитель e^{-kx} определяет быстроту затухания; для оболочек показатель затухания k — величина большая. Из свойств таких функций следует, что их первая производная всегда больше самой функции, вторая производная больше первой производной и т. д. Поэтому в указанных уравнениях отбрасываются слабые, содержащие первую производную и самую функцию в сравнении со второй производной.

Таким образом, упрощенные уравнения краевого эффекта будут иметь вид

$$\frac{R_2}{R_1^2} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} = E\gamma U, \quad \frac{R_2}{R_1^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = -\frac{V}{D}. \quad (6.13)$$

Применим эти уравнения к решению некоторых частных задач.

§ 26 ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, НАГРУЖЕННАЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И МОМЕНТОМ НА КОНЦЕ

В этом случае $R_1 = \infty$, $\varphi = 90^\circ$, $R_2 = R$, $R_1 d\varphi = dx$. Тогда уравнения (6.13) примут вид

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{E\gamma}{R} U, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{V}{DR}.$$

Исключая из этих уравнений, например, функцию V , получим

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + 4k^4 U = 0,$$

где

$$k^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \gamma^2}. \quad (6.14)$$

Кроме того, в данном случае

$$\begin{aligned} V &= -DR \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad U = -\frac{dw}{dx}, \quad Q_\varphi = \frac{V}{R} = -D \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad N_\varphi = 0, \\ N_\theta &= DR \frac{d^3 U}{dx^3}, \quad M_\varphi = -D \frac{dU}{dx}, \quad M_\theta = -\mu M_\varphi, \quad z_\varphi = -\frac{\mu DR}{E\gamma} \frac{d^3 U}{dx^3}, \\ z_\theta &= \frac{DR}{E\gamma} \frac{d^3 U}{dx^3}, \quad z_\theta = \frac{w}{R}, \quad z_\varphi = \frac{dw}{dx}, \quad \chi_\varphi = \frac{dU}{dx}, \quad \chi_\theta = 0. \end{aligned}$$

Этими формулами полностью описывается напряженное и деформированное состояние цилиндрической оболочки при ее нагружении краевой распределенной осесимметричной нагрузкой.

Решение уравнения (6.14) имеет вид

$$U = e^{kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx). \quad (6.15)$$

Применим это выражение к расчету оболочки, нагруженной по рис. 86.

По физическому смыслу данной задачи функция U по мере удаления от места приложения усилий должна убывать. Поэтому в выражении (6.15) следует положить

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Тогда

$$U = e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx).$$

Постоянные C_3 и C_4 должны быть найдены из граничных условий.

При $x=0$ должно быть

$$(Q_x)_{x=0} = Q_0, \quad (M_x)_{x=0} = M_0.$$

Эти условия нам дают

$$2Dk^2 C_1 = Q_0,$$

$$Dk(-C_3 + C_4) = M_0,$$

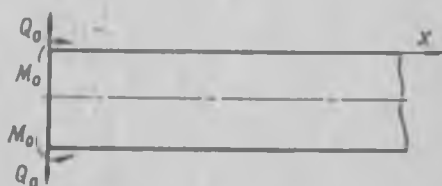


Рис. 86.

откуда

$$C_3 = \frac{M_0}{Dk} + \frac{Q_0}{2Dk^2}, \quad C_4 = \frac{Q_0}{2Dk^2}.$$

Тогда

$$U = e^{-kx} \left[\frac{Q_0}{2Dk^2} (\cos kx + \sin kx) + \frac{M_0}{Dk} \cos kx \right],$$

$$Q_x = e^{-kx} [Q_0 (\cos kx - \sin kx) - 2kM_0 \sin kx],$$

$$N_x = 2Rke^{-kx} [Q_0 \cos kx + kM_0 (\cos kx - \sin kx)],$$

$$M_x = e^{-kx} \left[M_0 (\cos kx + \sin kx) + \frac{Q_0}{k} \sin kx \right],$$

$$M_3 = \mu M_x,$$

$$\varepsilon_x = \frac{2Rk}{E\eta} e^{-kx} [kM_0 (\cos kx - \sin kx) + Q_0 \cos kx], \quad (6.16)$$

$$w = \frac{2k^2 k}{E\eta} e^{-kx} [kM_0 (\cos kx - \sin kx) + Q_0 \cos kx],$$

$$\frac{dw}{dx} = -e^{-kx} \left[\frac{Q_0}{2Dk^2} (\cos kx + \sin kx) + \frac{M_0}{Dk} \cos kx \right].$$

Прогиб и угол поворота при $x=0$ будут

$$w = \frac{2k^2 k}{E\eta} (kM_0 + Q_0), \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2Dk^2} (2kM_0 + Q_0).$$

Функции, через которые выражаются компоненты напряженного и деформированного состояния, затубулированы, и их можно найти в справочниках по математике. В табл. 5 приведены некоторые комбинации этих функций, встречающиеся в формулах (6.16).

Таблица 5

kx	e^{-kx} ($\cos kx + \sin kx$)	e^{-kx} ($\cos kx - \sin kx$)	e^{-kx} $\sin kx$	e^{-kx} $\cos kx$	kx
0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0
0,1	0,9907	0,8100	0,0503	0,9003	0,1
0,2	0,9651	0,6398	0,1627	0,8024	0,2
0,3	0,9267	0,4888	0,2189	0,7077	0,3
0,4	0,8784	0,1564	0,2610	0,6174	0,4
0,5	0,8231	0,2415	0,2908	0,5323	0,5
0,6	0,7628	0,1431	0,3099	0,4530	0,6
0,7	0,6997	0,0599	0,3199	0,3798	0,7
0,8	0,6354	-0,0093	0,3223	0,3131	0,8
0,9	0,5712	-0,0657	0,3185	0,2527	0,9
1,0	0,5083	-0,1108	0,3096	0,1988	1,0
1,1	0,4476	-0,1457	0,2967	0,1510	1,1
1,2	0,3899	-0,1716	0,2807	0,1091	1,2
1,3	0,3355	-0,1897	0,2626	0,0729	1,3
1,4	0,2849	-0,2011	0,2430	0,0419	1,4
1,5	0,2384	-0,2088	0,2226	0,0158	1,5
1,6	0,1959	-0,2077	0,2018	-0,0059	1,6
1,7	0,1576	-0,2047	0,1812	-0,0235	1,7
1,8	0,1234	-0,1985	0,1610	-0,0376	1,8
1,9	0,0932	-0,1899	0,1415	-0,0484	1,9
2,0	0,0667	-0,1794	0,1230	-0,0563	2,0
2,1	0,0439	-0,1675	0,1057	-0,0618	2,1
2,2	0,0244	-0,1548	0,0295	-0,0652	2,2
2,3	0,0080	-0,1416	0,0748	-0,0668	2,3
2,4	-0,0056	-0,1282	0,0613	-0,0669	2,4
2,5	-0,0166	-0,1149	0,0492	-0,0658	2,5
2,6	-0,0254	-0,1019	0,0383	-0,0636	2,6
2,7	-0,0320	-0,0895	0,0287	-0,0608	2,7
2,8	-0,0369	-0,0777	0,0204	-0,0573	2,8
2,9	-0,0403	-0,0666	0,0132	-0,0534	2,9
3,0	-0,0423	-0,0563	0,0071	-0,0493	3,0
3,1	-0,0431	-0,0469	0,0019	-0,0450	3,1
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0024	-0,0407	3,2
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0058	-0,0364	3,3
3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0085	-0,0323	3,4
3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0106	-0,0283	3,5
3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0121	-0,0245	3,6
3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0131	-0,0210	3,7
3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0137	-0,0177	3,8
3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0140	-0,0147	3,9
4,0	-0,0258	+0,0019	-0,0139	-0,0120	4,0

Из этой таблицы видно, что функции, через которые выражаются компоненты напряженного и деформированного состояния оболочки в краевых задачах, носят быстро затухающий характер. Это свойство, как было сказано выше, и лежит в основе упрощения исходных уравнений (6.10) и (6.12). Быстро затухающие функции краевого эффекта обладают тем свойством, что их низшие производные малы по сравнению с высшими производными, а сама функция меньше, чем ее первая производная.

Подчеркнутые члены в указанных уравнениях отброшены на этом основании.

Применим изложенную выше теорию к решению некоторых частных задач.

Бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, нагруженная распределенной радиальной кольцевой нагрузкой.

Для определения неизвестных краевых усилий Q_0 и M_0 имеем условия (рис. 87)

$$(Q_r)_{x=0} = \frac{P}{2}, \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

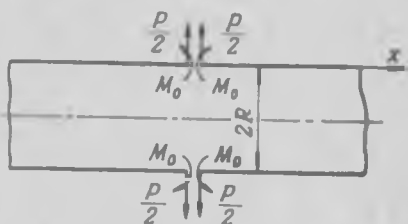


Рис. 87.

откуда

$$Q_0 = \frac{P}{2}, \quad \frac{Q_0}{2k} + M_0 = 0.$$

Тогда для этого случая получаем формулы

$$Q_r = \frac{P}{2} e^{-kx} \cos kx,$$

$$N_\theta = \frac{PRk}{2} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx),$$

$$M_r = -\frac{P}{4k} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx),$$

$$M_\theta = \nu M_r,$$

$$w = \frac{PR^2 k}{2E^2} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx).$$

Бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, нагруженная распределенным моментом по кольцу. В данном случае для определения краевых усилий Q_0 и M_0 имеем условия (рис. 88)

$$(M_r)_{x=0} = \frac{m}{2}, \quad (w)_{x=0} = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{1}{2} m, \quad Q = -\frac{1}{2} km.$$

Тогда

$$Q_\varphi = -\frac{1}{2} k m e^{-kx} \cos kx,$$

$$N_0 = R k^2 m e^{-kx} \sin kx,$$

$$M_\varphi = \frac{1}{2} m e^{-kx} \cos kx,$$

$$M_0 = \mu M_\varphi,$$

$$w = -\frac{R^2 k^2 m}{E \delta} e^{-kx} \sin kx.$$

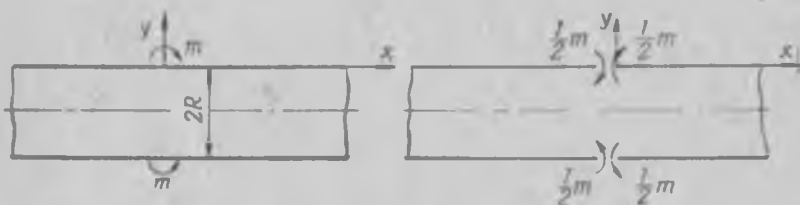


Рис. 88.

Бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, одно из сечений которой повернуто на угол θ_0 . В данном случае для определения неизвестных внутренних упругих усилий Q_0 и M_0 имеем условия (рис. 89)

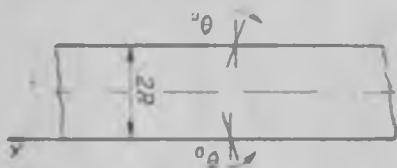


Рис. 89.

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \theta_0, \quad (w)_{x=0} = 0,$$

откуда

$$Q_0 = 2Dk^2 \theta_0, \quad M_0 = -2Dk \theta_0.$$

Тогда

$$Q_\varphi = 2Dk^2 \theta_0 e^{-kx} (\cos kx + \sin kx),$$

$$N_0 = 4Dk^3 R \theta_0 e^{-kx} \sin kx,$$

$$M_\varphi = -2Dk \theta_0 e^{-kx} \cos kx,$$

$$M_0 = \mu M_\varphi,$$

$$w = \frac{4R^2 k^3 D \theta_0}{E \delta} e^{-kx} \sin kx.$$

**§ 27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
МЕЖДУ ШПАНГОУТОМ И СТЕНКОЙ БАКА
ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ**

Изложенная в предыдущем параграфе теория краевого эффекта цилиндрической оболочки может быть использована для определения усилия взаимодействия между шпангоутом и стенкой бака, когда последний находится, например, под действием внутреннего давления.

Рассмотрим два сечения шпангоута — прямоугольное и z-образное.

Шпангоут прямоугольного сечения. Под действием внутреннего давления радиус бака увеличится на (см. § 19)

$$\Delta_1 = \frac{(2 - \mu) q_n R^2}{2E\delta}.$$

В результате этого перемещения в стыке между шпангоутом и стенкой бака возникает сила взаимодействия P (рис. 90). Уменьшение радиуса бака от действия сил P будет

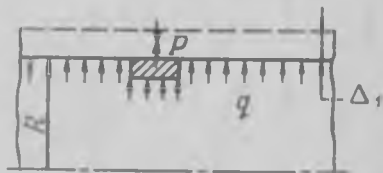


Рис. 90.

$$\Delta_2 = (w)_{x=0} = -\frac{PR^2 k}{2E\delta}.$$

Увеличение радиуса шпангоута под действием силы P будет

$$\Delta_3 = \frac{PR^2}{EF},$$

где F — площадь сечения шпангоута.

Составим условие равенства радиальных перемещений бака и шпангоута:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3.$$

Из этого уравнения найдем

$$P = \frac{(2 - \mu) q_n R^2}{2 \left(1 + \frac{kF}{2\delta} \right)}, \quad (6.17)$$

Шпангоут z-образного сечения. Увеличение радиуса бака от внутреннего давления

$$\Delta_1 = \frac{(2 - \mu) q_n R^2}{2E_1 \delta_1}.$$

Уменьшение радиуса бака от сил взаимодействия P

$$\Delta_2 = -\frac{PR^2 k_1}{2E_1 \delta_1}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению перемещений шпангоута. Под действием сил P радиус шпангоута увеличится на

$$\Delta_2 = \frac{PR^2}{E_2 F},$$

где F — площадь сечения шпангоута.

Вследствие того что силы P приложены к шпангоуту эксцентрично, сечение шпангоута повернется на угол (рис. 91)

$$\alpha = \frac{M_t R^2}{E_2 J_y},$$

где $M_t = Pa$;

J_y — момент инерции шпангоута относительно оси $y-y$.

От этого поворота точка приложения силы P получит линейное перемещение, равное

$$\Delta_4 = \alpha a = \frac{Pa^2 R^2}{E_2 J_y}.$$

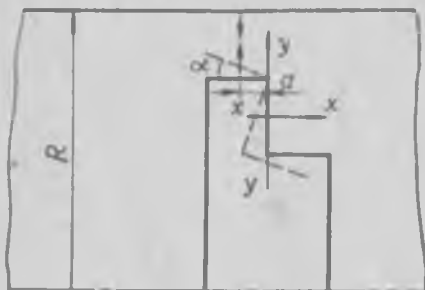


Рис. 91.

Кроме того, сила P вызовет изгиб полки шпангоута.

При этом прогиб под силой можно определить как для балки-полоски единичной ширины:

$$\Delta_5 = \frac{Pa^3}{3(1-\mu^2)E_2 J},$$

где $J = \frac{b_2^3}{12}$ — момент инерции балки-полоски.

При этом сечение балки-полоски под силой повернется на угол

$$\gamma = \frac{6Pa^2}{(1-\mu^2)E_2 b_2^3}.$$

В действительности этого поворота не должно быть. Рассматривая балку-полоску как консоль с неповорачивающимся концом, для ликвидации указанного поворота к ней под силой необходимо приложить момент

$$M = \frac{Pa}{2}.$$

Этот момент вызовет уменьшение прогиба балки-полоски под силой на

$$\Delta_6 = - \frac{3Pa^3}{(1-\mu^2)E_2 b_2^3}.$$

Кроме того, момент M вызовет уменьшение угла поворота шпангоута α

$$\Delta\alpha = \frac{MR^2}{E_2 J_y} = \frac{PaR^2}{2E_2 J_y}$$

и соответственно уменьшится прогиб точки приложения силы P на величину

$$\Delta_7 = -a\Delta\alpha = -\frac{Pa^2 R^2}{2E_2 J_y}$$

Теперь имеются все необходимые данные для составления условия неразрывности системы оболочка—шпангоут. Это условие будет иметь вид

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7.$$

В развернутом виде это условие будет

$$\begin{aligned} \frac{(2-\mu) q_n R^2}{2E_1 \delta_1} - \frac{PR^2 k_1}{2E_1 \delta_1} = & \frac{PR^2}{E_2 F} + \frac{Pa^2 R^2}{E_2 J_y} + \frac{Pa^3}{3(1-\mu^2) E_2 J} - \\ & - \frac{3Pa^3}{(1-\mu^2) E_2 \delta_2^3} - \frac{Pa^2 R^2}{2E_2 J_y} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$P = \frac{\frac{2-\mu}{k_1} q_n}{1 + \frac{2E_1 \delta_1}{E_2 F k_1} \left\{ 1 + \frac{Fa^2}{J_y} \left[0,5 + \frac{aJ_y}{(1-\mu^2) R^2 \delta_2^3} \right] \right\}}. \quad (6.18)$$

Сравнивая формулы (6.17) и (6.18), можно видеть, что в последнем случае сила взаимодействия P будет меньше, чем в первом случае, так как z-образный шпангоут менее жесткий, чем прямоугольный, при одной и той же площади поперечного сечения. Это явление благоприятно сказывается на работе сварных точек, которыми шпангоут приваривается к стенке бака.

Если дополнительно к давлению наддува прибавить давление от гидростатического столба жидкости, то получим формулу, позволяющую определить силу взаимодействия от суммарного внутреннего давления в баке

$$P_0 = \frac{\frac{1}{k_1} [(2-\mu) q_n + 2\gamma H]}{1 + \frac{2E_1 \delta_1}{E_2 F k_1} \left\{ 1 + \frac{a^2 F}{J_y} \left[0,5 + \frac{aJ_y}{(1-\mu^2) R^2 \delta_2^3} \right] \right\}},$$

где γ — удельный вес жидкости;

H — высота столба жидкости над рассматриваемым шпангоутом.

Пользуясь этим выражением, можно подсчитать погонную силу взаимодействия между оболочкой и шпангоутом.

Если шпангоут приварен к оболочке точечной сваркой, то усилие на одну точку будет



$$Q = P_0 t,$$

где t — шаг точек.

Зная силу Q и силу, при которой разрушается сварная точка, можно определить запас прочности сварного соединения

$$\eta = \frac{Q_{\text{раз}}}{Q}.$$

Рис. 92.

Для сварных точек в данном случае можно принять $Q_{\text{раз}} = (0,3 \div 0,4) Q_{\text{отр}}$, где $Q_{\text{отр}}$ — усилие отрыва для сварной точки, полученное на образцах, нагруженных по схеме рис. 92.

§ 28. РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЕМ В ПОЛЮСЕ

В этом случае $R_1 = R_2 = R$. Тогда исходные уравнения краевого эффекта (6.13) примут вид ¹

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = E\delta R U, \quad \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = -\frac{VR}{D}.$$

Исключая из этих уравнений функцию V , получим

$$\frac{d^4 U}{d\varphi^4} + 4\beta^4 U = 0, \quad (6.19)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)R^2}{8D}}.$$

Решение этого уравнения также известно и имеет вид

$$U = e^{\beta\varphi} (C_1 \cos \beta\varphi + C_2 \sin \beta\varphi) + e^{-\beta\varphi} (C_3 \cos \beta\varphi + C_4 \sin \beta\varphi).$$

Применим это решение к сферической оболочке, нагруженной, как показано на рис. 93. Для удобства в дальнейшем целесообразно ввести новую переменную по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \psi.$$

¹ Эти уравнения применимы к рассматриваемой задаче в том случае, если угол φ_0 (рис. 93) не менее 15° . В противном случае надо пользоваться уравнениями (6.10) и (6.12).

Тогда решение для U будет иметь вид

$$U = e^{\beta(\varphi_0 + \psi)} [C_1 \cos \beta(\varphi_0 + \psi) + C_2 \sin \beta(\varphi_0 + \psi)] + e^{-\beta(\varphi_0 + \psi)} [C_3 \cos \beta(\varphi_0 + \psi) + C_4 \sin \beta(\varphi_0 + \psi)].$$

Опуская первое слагаемое, как не удовлетворяющее смыслу данной задачи, после некоторых преобразований получим

$$U = e^{-\beta\psi} (D_1 \cos \beta\psi + D_2 \sin \beta\psi).$$

В этом выражении переменная ψ отсчитывается уже от края отверстия.

Для усилий и перемещений будем иметь выражения

$$N_\varphi = \frac{D}{R^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \operatorname{ctg} \varphi, \quad N_\theta = \frac{D}{R^2} \times \\ \times \frac{d^3 U}{d\varphi^3}, \quad Q_\varphi = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2}, \\ M_\varphi = -\frac{D}{R} \frac{dU}{d\varphi}.$$

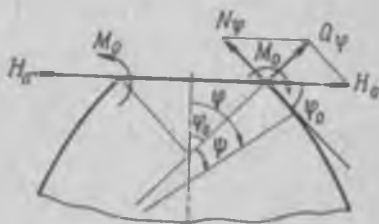


Рис. 93.

$$M_\theta = \mu M_\varphi, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{4\beta^2} \frac{d^3 U}{d\varphi^3},$$

$$\frac{u}{R} - \frac{d\varpi}{R d\varphi} = U.$$

Через новую переменную эти же выражения будут иметь вид ($d\varphi = d\psi$)

$$N_\varphi = \frac{D}{R^2} \frac{d^2 U}{d\psi^2} \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi), \\ N_\theta = \frac{D}{R^2} \frac{d^3 U}{d\psi^3}, \quad G_\varphi = -\frac{D}{R^2} \frac{d^3 U}{d\psi^3}, \quad M_\varphi = -\frac{D}{R} \frac{dU}{d\psi}, \quad M_\theta = \mu M_\varphi, \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{4\beta^2} \frac{d^3 U}{d\psi^3}, \quad \frac{u}{R} - \frac{d\varpi}{R d\psi} = U.$$

Постоянные интегрирования D_1 и D_2 найдем из условий

$$(N_\varphi)_{\psi=0} = -H_0 \cos \varphi_0, \quad (M_\varphi)_{\psi=0} = M_0,$$

откуда

$$D_1 = \frac{R}{D\beta^2} \left(M_0 + \frac{RH_0 \sin \varphi_0}{2\beta} \right),$$

$$D_2 = \frac{R^2 H_0 \sin \varphi_0}{2D\beta^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= \frac{2\beta e^{-\beta\psi}}{R} \left[\frac{RH_0}{2\beta} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) - M_0 \sin \beta\psi \right] \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi), \\
 N_{\theta} &= \frac{2\beta e^{-\beta\psi}}{R} \{ \beta M_0 (\cos \beta\psi - \sin \beta\psi) + H_0 R \sin \varphi_0 \cos \beta\psi \}, \\
 Q_{\varphi} &= \frac{2\beta e^{-\beta\psi}}{R} \left[\frac{RH_0 \sin \varphi_0}{2\beta} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) - M_0 \sin \beta\psi \right], \\
 M_{\varphi} &= e^{-\beta\psi} \left[M_0 (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) + \frac{RH_0 \sin \varphi_0}{\beta} \sin \beta\psi \right], \\
 M_{\theta} &= \mu M_{\varphi}, \\
 \varepsilon_{\theta} &= \frac{Re^{-\beta\psi}}{2D\beta^2} \left[M_0 (\cos \beta\psi - \sin \beta\psi) + \frac{HR \sin \varphi_0}{\beta} \cos \beta\psi \right], \\
 U &= \frac{u}{R} - \frac{dw}{Rd\psi} = \\
 &= \frac{Re^{-\beta\psi}}{D\beta} \left[\frac{H_0 R \sin \varphi_0}{2\beta} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) + M_0 \cos \beta\psi \right].
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Приведенная теория позволяет обследовать ряд практически важных случаев нагружения сферической оболочки. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Через ось цилиндрического бака, имеющего сферические днища, проходит тоннельная цилиндрическая труба (рис. 94). Бак находится под действием внутреннего давления. Обследовать напряженное и деформированное состояние в области стыка днища с тоннельной трубой.

В данном случае поставлена задача расчета оболочек различной геометрической формы при их совместной работе, нагруженных распределенным давлением q . Поскольку у этих оболочек в месте их сопряжения деформации будут различными, то в этом месте должны возникнуть дополнительные внутренние усилия. Задача расчета состоит в определении этих усилий и вызванных ими деформаций.

При рассмотрении подобного рода задач на применение теории краевого эффекта вначале необходимо решить соответствующую статически определимую безмоментную задачу оболочек, определив линейные и угловые перемещения в месте их стыка. Затем в этом же стыке приложить неизвестные внутренние упругие усилия H_0 и M_0 и найти от них линейные и угловые перемещения. После этого можно составить условия неразрывности линейных и угловых перемещений и из этих уравнений определить H_0 и M_0 .

Рассмотрим вначале безмоментную задачу для днища (рис. 95).

Из условия равновесия сил на ось днища получим

$$N_{\varphi}^I = \frac{qR_c [\sin^2(\varphi_0 + \psi) - \sin^2\varphi_0]}{2\sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

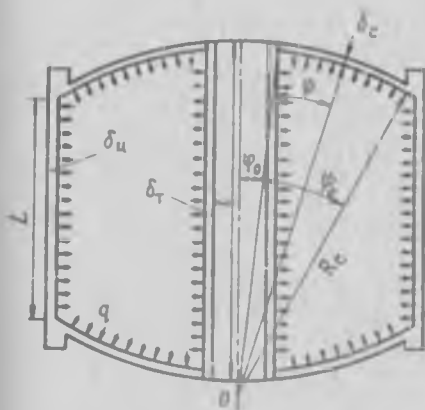


Рис. 94.

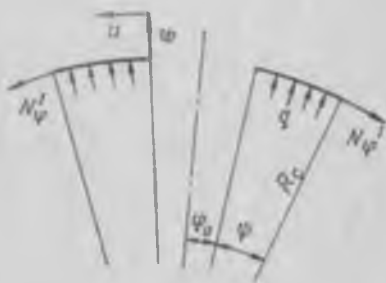


Рис. 95.

Выражение для кольцевого усилия N_{θ} определим из уравнения Лапласа

$$N_{\theta}^I - qR_c - N_{\varphi}^I = \frac{qR_c [\sin^2(\varphi_0 + \psi) + \sin^2\varphi_0]}{2\sin^2(\varphi_0 + \psi)},$$

где R_c — радиус сферы.

Имея выражения для усилий N_{φ}^I и N_{φ}^{II} , можно определить компоненты деформации:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E\delta_c} (N_{\varphi}^I - \mu N_{\theta}^I), \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E\delta_c} (N_{\theta}^I - \mu N_{\varphi}^I).$$

Увеличение радиуса отверстия

$$\Delta_{\varphi}^I = (w_{\varphi})_{\varphi=0} \sin \varphi_0 + (u_{\varphi})_{\varphi=0} \cos \varphi_0.$$

Перемещение точки края отверстия днища в направлении оси бака от давления q будет

$$\Delta_{\varphi}^{II} = (w_{\varphi})_{\varphi=0} \cos \varphi_0 - (u_{\varphi})_{\varphi=0} \sin \varphi_0.$$

Перемещения u и w найдем из уравнений (5.32) и (5.33). При $R_1 = R_2 = R_c$

$$\frac{dw}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi = R_c (\varepsilon_{\varphi} - \varepsilon_{\theta}), \quad (6.21)$$

$$w = R_c \varepsilon_{\theta} - u \operatorname{ctg} \varphi.$$

Правая часть первого уравнения в данном случае будет иметь вид

$$R_z(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\theta) = - \frac{(1 + \mu) q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{E \lambda_c \sin^2 (\varphi_0 + \psi)}$$

Тогда при $\varphi = \varphi_0 + \psi$ получим

$$\frac{du}{d\psi} - u \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) = - \frac{(1 + \mu) q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{E \lambda_c \sin^2 (\varphi_0 + \psi)}$$

Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\left[\frac{u}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \right]' = - \frac{(1 + \mu) q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{E \lambda_c \sin^3 (\varphi_0 + \psi)}$$

Интеграл этого уравнения будет

$$u = \left[C - \frac{(1 + \mu) q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{E \lambda_c} \int \frac{d\psi}{\sin^3 (\varphi_0 + \psi)} \right] \sin (\varphi_0 + \psi),$$

или

$$u = \left\{ C - \frac{(1 + \mu) q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{2 E \lambda_c} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi)}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \right] \right\} \sin (\varphi_0 + \psi).$$

Для определения постоянной C имеется условие: $u = 0$ при $\psi = \psi_0$ (см. рис. 94). Тогда окончательно

$$u_q = \frac{(1 + \mu) q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{2 E \lambda_c} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi)}{\sin (\varphi_0 + \psi)} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi_0)}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)} \right] \sin (\varphi_0 + \psi).$$

Выражение для прогиба w найдем из уравнения (6.21):

$$w = R_c \varepsilon_\theta - u \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi).$$

После подстановки сюда значений ε_θ и u получим

$$w_q = \frac{q R_c^2}{2 E \lambda_c} \left\{ \frac{(1 - \mu) \sin^2 (\varphi_0 + \psi) + (1 + \mu) \sin^2 \varphi_0}{\sin^2 (\varphi_0 + \psi)} - (1 + \mu) \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi)}{\sin (\varphi_0 + \psi)} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi_0)}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)} \right] \sin^2 \varphi_0 \cos (\varphi_0 + \psi) \right\}.$$

В результате нагружения бака внутренним давлением в месте стыка трубы с днищем возникнут силы взаимодействия, направленные вдоль оси трубы. Под действием этих сил труба будет удлиняться, а днище прогибаться. Напряжения и перемещения от сил взаимодействия между трубой и днищем можно определить следующим образом (рис. 96). Из условия равновесия сил на ось бака получим

$$N_{\varphi}^{II} = P \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 (\varphi_0 + \psi)}. \quad (6.22)$$

Для кольцевого усилия N_{ψ}^{II} из уравнения Лапласа найдем

$$N_{\psi}^{II} = -N_{\varphi}^{II} = -P \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 (\varphi_0 + \psi)}. \quad (6.23)$$

По выражениям (6.22) и (6.23) можно определить компоненты деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \frac{(1 + \mu) P \sin \varphi_0}{E \delta_c \sin^2 (\varphi_0 + \psi)}, \\ \varepsilon_{\psi} &= -\frac{(1 + \mu) P \sin \varphi_0}{E \delta_c \sin^2 (\varphi_0 + \psi)}. \end{aligned}$$

Для определения перемещения u имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi) &= \\ &= \frac{2(1 + \mu) P R_c \sin \varphi_0}{E \delta_c \sin^2 (\varphi_0 + \psi)}. \end{aligned}$$

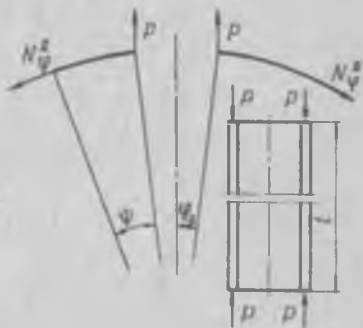


Рис. 96.

Интеграл этого уравнения

$$u = \left[B + \frac{(1 + \mu) P R_c \sin \varphi_0}{E \delta_c} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi)}{\sin (\varphi_0 + \psi)} \right] \right] \sin (\varphi_0 + \psi).$$

Постоянную B найдем из условия $u=0$ при $\psi=\psi_0$. Тогда окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} u_p &= -\frac{(1 + \mu) P R_c}{E \delta_c} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi)}{\sin (\varphi_0 + \psi)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi_0)}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)} \right] \sin \varphi_0 \sin (\varphi_0 + \psi). \end{aligned}$$

Для прогиба w в данном случае получаем выражение

$$w = \frac{(1 + \mu) P R_c \sin \varphi_0}{E b_c} \left\{ \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi)}{\sin (\varphi_0 + \psi)} - \frac{\operatorname{ctg} (\varphi_0 + \psi_0)}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)} \right] \times \right. \\ \left. \times \cos (\varphi_0 + \psi) - \frac{1}{\sin^2 (\varphi_0 + \psi)} \right\}.$$

Увеличение радиуса отверстия от сил P

$$\Delta_P^{III} = (w_P)_{\psi=0} \sin \varphi_0 + (u_P)_{\psi=0} \cos \varphi_0.$$

Перемещение края отверстия вдоль оси бака будет

$$\Delta_P^{IV} = (w_P)_{\psi=0} \cos \varphi_0 - (u_P)_{\psi=0} \sin \varphi_0.$$

Теперь рассмотрим перемещения трубы и цилиндрической части бака.

Под действием внутреннего давления q радиус трубы уменьшится на

$$\Delta_q^V = -\frac{q R_T^2}{E b_T} = -\frac{q R_c^2 \sin^2 \varphi_0}{E b_T}.$$

Под действием сил P радиус трубы увеличится на

$$\Delta_P^{VI} = \frac{\mu P R_c \sin \varphi_0}{E b_T}.$$

Под действием этих же сил длина трубы укоротится на

$$\Delta_P^{VII} = -\frac{P l_T}{E b_T},$$

где l_T — длина трубы.

Под действием давления q длина трубы увеличится на

$$\Delta_q^{VIII} = \frac{\mu q R_c l_T \sin \varphi_0}{E b_T}.$$

Кольцевое усилие в стенке бака определим из уравнения Лапласа

$$N_\theta^{III} = q R_u = q R_c \sin (\varphi_0 + \psi_0).$$

Теперь можно определить удлинение бака в осевом направлении от внутреннего давления q и усилий P :

$$\Delta_{qP}^{IX} = \varepsilon_\varphi L = \frac{L}{E b_u} (N_\varphi^{III} - \mu N_\theta^{III}) = \\ = \frac{L}{E b_u} \left[q R_c \frac{(1 - 2\mu) \sin^2 (\varphi_0 + \psi_0) - \sin^2 \varphi_0}{2 \sin (\varphi_0 + \psi_0)} + \frac{P \sin \varphi_0}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)} \right].$$

Здесь L — длина цилиндрической части бака.

$$N_{\varphi}^{\text{III}} = \frac{qR_c}{2} \frac{\sin^2(\varphi_0 + \psi_0) + \sin^2 \varphi_0}{\sin(\varphi_0 + \psi_0)} + \frac{P \sin \varphi_0}{\sin(\varphi_0 + \psi_0)}.$$

Определим перемещения u и w для днища от действия краевых усилий H_0 и M_0 .

В данном случае дифференциальное уравнение для u будет иметь вид

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) = \frac{(1 + \mu) R_c}{E b_c} (N_{\varphi} - N_0).$$

Подставив сюда выражения для усилий N_{φ} и N_0 через функцию U , получим

$$\frac{du}{d\psi} - u \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) = \frac{(1 + \mu) D}{E b_c R_c} \left[\frac{d^2 U}{d\psi^2} \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) - \frac{d^3 U}{d\psi^3} \right].$$

Такое уравнение можно упростить, отбросив в нем низшие производные по сравнению с высшими и искомую функцию по сравнению с ее первой производной. Это допустимо здесь на том же основании, как и при получении упрощенных уравнений краевой задачи.

Таким образом,

$$\frac{du}{d\psi} = - \frac{(1 + \mu) D}{E b_c R_c} \frac{d^3 U}{d\psi^3}.$$

После подстановки сюда функции U будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\psi} = - \frac{(1 + \mu) R_c}{E b_c} \left[- \frac{2M_0 \beta^2}{R} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) + \right. \\ \left. + 2H_0 \beta \sin \varphi_0 e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

В результате интегрирования уравнения (6.24) получим

$$u_{H_0, M_0} = - \frac{(1 + \mu) R_c}{E b_c} \left[\frac{2M_0 \beta}{R} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi + H_0 \sin \varphi_0 e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) \right].$$

Постоянная интегрирования в данном случае будет равна нулю, так как должно быть $u=0$ при $\psi \rightarrow \infty$.

Для перемещения w имеем уравнение

$$\begin{aligned} w_{H_0, M_0} = R_c \varepsilon_0 - u \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) = \frac{M_0 R_c^2}{D} \left[- \frac{e^{-\beta\psi}}{2\beta^2} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) + \right. \\ \left. + \frac{2(1 + \mu) \beta D}{E b_c R_c^2} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) \right] + \frac{H_0 R_c^2}{D} \left[\frac{\sin \varphi_0}{2\beta^3} e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi + \right. \\ \left. + \frac{(1 + \mu) D}{E b_c R_c^2} e^{-\beta\psi} \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) \right] \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Составляющая полученных перемещений u и w в направлении оси бака

$$\Delta_{H_0, M_0}^x = (w_{H_0, M_0})_{\psi=0} \cos \varphi_0 - (u_{H_0, M_0})_{\psi=0} \sin \varphi_0.$$

Соответственно перпендикулярно к оси бака

$$\Delta_{H_0, M_0}^{xI} = (w_{H_0, M_0})_{\psi=0} \sin \varphi_0 + (u_{H_0, M_0})_{\psi=0} \cos \varphi_0.$$

Перемещение w конца трубы под действием краевых сил H_0 и M_0 можно определить по формуле (6.16), если в нее подставить $Q_0 = -H_0$ и у M_0 поменять знак на обратный:

$$\Delta_{H_0, M_0}^{xII} = (w)_{x=0} = -\frac{2k_c^2 k_T \sin^2 \varphi_0}{E l_T} (k_T M_0 + H_0).$$

Теперь определим углы поворота края отверстия и конца трубы. Край отверстия днища получит угловые перемещения от действия внутреннего давления q , краевых сил H_0 , M_0 и усилия взаимодействия трубы с днищем P .

Углы поворота от указанных сил будут определяться по формуле

$$\theta = U = \frac{u}{R_c} - \frac{dw}{R_c d\psi},$$

применяя которую получим

$$\theta_q^I = \left(\frac{u_q}{R_c} \right)_{\psi=0} - \left(\frac{dw_q}{R_c d\psi} \right)_{\psi=0},$$

$$\theta_P^{II} = \left(\frac{u_P}{R_c} \right)_{\psi=0} - \left(\frac{dw_P}{R_c d\psi} \right)_{\psi=0},$$

$$\theta_{H_0, M_0}^{III} = \left(\frac{u_{H_0, M_0}}{R_c} \right)_{\psi=0} - \left(\frac{dw_{H_0, M_0}}{R_c d\psi} \right)_{\psi=0}.$$

Для трубы поворот концевое сечения будет происходить только от краевых сил H_0 и M_0 :

$$\theta_{H_0, M_0}^{IV} = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \frac{1}{D_T k_T} \left(M_0 + \frac{1}{2k_T} H_0 \right).$$

Теперь составим условия неразрывности деформаций днища и трубы по месту их сочленения.

При составлении условий неразрывности необходимо обращать внимание на знаки соответствующих перемещений.

За положительное направление нормального перемещения w принято направление по внешней нормали к оболочке. Для угловых перемещений следует руководствоваться следующими соображениями. При выводе выражения для изменения кривизны χ_0 (6.11) перемещение w увеличивалось с возрастанием угловой

координаты φ . При этом элемент меридиана $R_1 d\varphi$ поворачивался по часовой стрелке. Это угловое перемещение принимается за положительное.

При переходе к отсчету угловой координаты со стороны экватора в сторону полюса указанное направление поворота элемента меридиана не изменится, т. е. будет направленным по часовой стрелке.

Все сказанное относительно направления перемещений совершенно не зависит от направления приложенных к оболочке сил.

Условия совместности линейных и угловых перемещений будут иметь вид

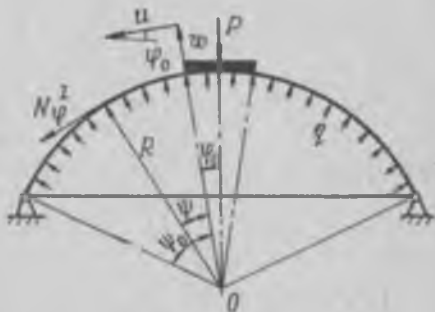


Рис. 97.

$$\Delta_q^I + \Delta_P^{III} + \Delta_{H_0, M_0}^{XI} = \Delta_q^V + \Delta_P^{VII} + \Delta_{H_0, M_0}^{XII},$$

$$\Delta_q^{II} + \Delta_P^{IV} + \frac{1}{2} \Delta_{q, P}^I + \Delta_{H_0, M_0}^X = \frac{1}{2} \Delta_P^{VI} + \frac{1}{2} \Delta_q^{VIII},$$

$$\theta_q^I + \theta_P^{II} + \theta_{H_0, M_0}^{III} = \theta_{H_0, M_0}^{IV}.$$

Эти уравнения в общем виде решить не удастся, и лучше всего решать их численно. Из этого решения будут определены неизвестные усилия P , H_0 и M_0 . Затем можно определить напряженное и деформированное состояние трубы и днища по соответствующим формулам, приведенным выше. Результирующие напряжения будут равны сумме соответствующих напряжений от внутреннего давления q и краевых сил P , H_0 и M_0 .

2. В качестве второго примера расчета сферической оболочки, имеющей отверстие в полюсе, рассмотрим рис. 97.

Как видно из этого рисунка, сферическая оболочка нагружена внутренним давлением q и силой P , приложенной к оболочке через жесткую плиту. Определим напряженное и деформированное состояние этой оболочки.

Из условия равновесия части сферы, определяемой углом $\varphi_0 + \psi$, находим

$$N_\varphi = - \frac{P}{2\pi R \sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

* Числовым коэффициентом $1/2$ в этом уравнении учитывается то обстоятельство, что полные удлинения трубы и цилиндрической части поровну распределяются относительно середины бака.

Выражение для окружного усилия найдем из уравнения Лапласа

$$N_{\varphi} = -N_r = \frac{P}{2\pi R \sin^2(\varphi_0 + \psi)}.$$

Имея выражение для внутренних усилий, можно перейти к определению перемещений. Для перемещения u имеем уравнение

$$\frac{du}{d\psi} - u \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) = -\frac{(1+\mu)P}{\pi E \delta \sin^2(\varphi_0 + \psi)},$$

интеграл которого нам известен и равен

$$u = \left[C - \frac{(1+\mu)P}{2\pi E \delta} \left[\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi)}{\sin(\varphi_0 + \psi)} \right] \right] \sin(\varphi_0 + \psi).$$

Постоянная интегрирования C определится из условия $u=0$ при $\psi=\psi_0$. Тогда окончательно

$$u_P = \frac{(1+\mu)P}{2\pi E \delta} \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi)}{\sin(\varphi_0 + \psi)} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi_0)}{\sin(\varphi_0 + \psi_0)} \right] \sin(\varphi_0 + \psi).$$

Выражение для w найдем из уравнения (6.21):

$$w_P = \frac{(1+\mu)P}{2\pi E \delta} \left\{ \frac{1}{\sin^2(\varphi_0 + \psi)} - \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \psi}{2}} + \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi)}{\sin(\varphi_0 + \psi)} - \frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi_0)}{\sin(\varphi_0 + \psi_0)} \right] \cos(\varphi_0 + \psi) \right\}.$$

Определим угол поворота от силы P . Имеем

$$\theta = \frac{u}{R} - \frac{dw}{R d\psi}.$$

После подстановки сюда u и $\frac{dw}{d\psi}$ получим

$$\theta_P = \frac{(1+\mu)P}{2\pi E \delta R} \left[\frac{\operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi)}{\sin^2(\varphi_0 + \psi)} + \operatorname{ctg}(\varphi_0 + \psi) + \operatorname{ctg}^3(\varphi_0 + \psi) \right].$$

Проекция перемещений u и w при $\psi=0$ на направление, перпендикулярное силе P ,

$$\Delta_P = (w_P)_{\psi=0} \sin \varphi_0 + (u_P)_{\psi=0} \cos \varphi_0 = \frac{(1+\mu)P}{2\pi E \delta \sin \varphi_0}.$$

Определим компоненты перемещения от внутреннего давления q при $\psi=0$. В данном случае отличаться от нуля будет только нормальное перемещение

$$w = \frac{(1-\mu) q R^2}{2E\delta}.$$

Перемещение u и угол поворота θ будут равны нулю. Это следует из того, что правая часть уравнения для u при нагружении постоянным давлением q обращается в нуль. Следовательно, решением этого уравнения будет $u=0$.

Горизонтальная проекция перемещения w

$$\Delta_q = \frac{(1-\mu) q R^2}{2E\delta} \sin \varphi_0.$$

Вследствие линейных и угловых перемещений оболочки по месту стыка ее с плитой, которая принимается абсолютно жесткой, получается разрыв непрерывности. Вследствие этого по месту их сочленения должны возникать внутренние усилия H_0 и M_0 , компенсирующие этот разрыв непрерывности (рис. 98).

Перемещение от этих усилий по направлению H_0 будет ($\psi=0$)

$$\Delta_{H_0, M_0} = (\varepsilon \theta_{H_0, M_0})_{\psi=0} R \sin \varphi_0 = \frac{R^2}{2D\delta^2} \left(M_0 + \frac{H_0 R}{\beta} \sin \varphi_0 \right) \sin \varphi_0.$$

Аналогично для угла поворота при $\psi=0$

$$\theta_{H_0, M_0} = \frac{R}{D\delta} \left(M_0 + \frac{H_0 R}{2\delta} \right).$$

Для определения неизвестных краевых усилий H_0 и M_0 имеем следующие два уравнения неразрывности деформаций:

$$\Delta_q + \Delta_p + \Delta_{H_0, M_0} = 0,$$

$$\theta_p + \theta_{H_0, M_0} = 0.$$

После решения этой системы уравнений и определения H_0 , M_0 можно определить все внутренние усилия и деформации в оболочке по формулам (6.20).

§ 29. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БАКА. РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК БЕЗ ОТВЕРСТИЯ В ПОЛЮСЕ

Рассмотрим порядок решения краевой задачи для цилиндрического бака, имеющего сферические днища. Прежде чем перейти к такой задаче, приведем формулы для компонентов на-

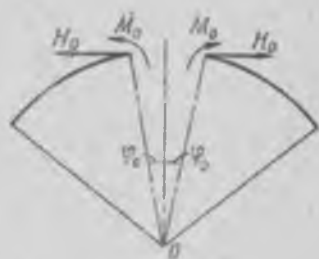


Рис. 98.

пряжений и деформаций сферической оболочки, нагруженной по краю распределенными усилиями H_0 и M_0 (см. рис. 100). При получении этих формул отсчет угла в уравнениях (6.13) целесообразно вести не от полюса, а как показано на рис. 99:

$$\varphi = \varphi_0 - \psi.$$

Кроме того, имеем

$$R_1 = R_2 = R.$$

Тогда решением исходного уравнения (6.19) в соответствии со смыслом задачи будет функция

$$U = e^{-\beta\psi} (D_1 \sin \beta\psi + D_2 \cos \beta\psi).$$



Рис. 99.

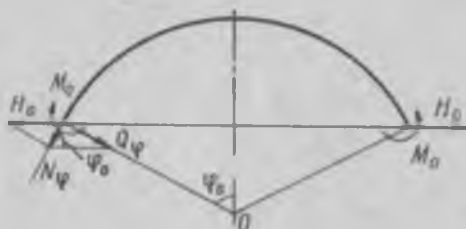


Рис. 100.

Для усилий и деформаций получим выражения

$$N_\psi = \frac{D}{R^2} \frac{d^2 U}{d\psi^2} \operatorname{ctg} (\varphi_0 - \psi),$$

$$N_\theta = -\frac{D}{R^2} \frac{d^3 U}{d\psi^3}, \quad Q_\psi = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 U}{d\psi^2},$$

$$M_\psi = \frac{D}{R} \frac{dU}{d\psi}, \quad M_\theta = \mu M_\psi, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{1}{4\beta^4} \frac{d^3 U}{d\psi^3}.$$

После подстановки сюда соответствующих производных от функции U получим

$$N_\psi = \frac{2D\beta^2 e^{-\beta\psi}}{R^2} (D_2 \sin \beta\psi - D_1 \cos \beta\psi) \operatorname{ctg} (\varphi_0 - \psi),$$

$$N_\theta = -\frac{2D\beta^3 e^{-\beta\psi}}{R^2} [(D_1 - D_2) \sin \beta\psi + (D_1 + D_2) \cos \beta\psi],$$

$$Q_\psi = -\frac{2D\beta^2 e^{-\beta\psi}}{R^2} (D_2 \sin \beta\psi - D_1 \cos \beta\psi),$$

$$M_\psi = \frac{D\beta e^{-\beta\psi}}{R} [-(D_1 + D_2) \sin \beta\psi + (D_1 - D_2) \cos \beta\psi],$$

$$\epsilon_0 = -\frac{e^{-\beta\psi}}{2\beta} [(D_1 - D_2) \sin \beta\psi + (D_1 + D_2) \cos \beta\psi].$$

Для определения постоянных интегрирования имеем условия (рис. 100)

$$(N_r)_{\psi=0} = H_0 \cos \varphi_0, \quad (M_r)_{\psi=0} = M_0.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} N_r &= e^{-\beta\psi} \left[H_0 \sin \varphi_0 (\cos \beta\psi - \sin \beta\psi) - \frac{2M_0\beta}{R} \sin \beta\psi \right] \operatorname{ctg} (\varphi_0 - \psi), \\ N_0 &= -2\beta e^{-\beta\psi} \left[\frac{M_0\beta}{R} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) - H_0 \sin \varphi_0 \cos \beta\psi \right], \\ Q_r &= e^{-\beta\psi} \left[H_0 \sin \varphi_0 (\cos \beta\psi - \sin \beta\psi) - \frac{2M_0\beta}{R} \sin \beta\psi \right], \\ M_r &= \frac{R}{\beta} e^{-\beta\psi} \left[\frac{M_0\beta}{R} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) + H_0 \sin \varphi_0 \sin \beta\psi \right], \\ \tau_0 &= -\frac{R^3 e^{-\beta\psi}}{2D\beta^3} \left[\frac{M_0\beta}{R} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) - H_0 \sin \varphi_0 \cos \beta\psi \right], \\ U &= -\frac{R^2 e^{-\beta\psi}}{2D\beta^2} \left[H_0 \sin \varphi_0 (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) + \frac{2M_0\beta}{R} \cos \beta\psi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

В дальнейшем эти формулы будут использованы при решении поставленной в этом параграфе задачи.

Сделаем несколько замечаний о так называемых распорных силах в оболочках. Рассмотрим сосуд, составленный из двух оболочек (рис. 101), который находится под действием внутреннего давления наддува. Если мысленно разрезать этот сосуд по линии стыка оболочек (рис. 102) и уравновесить действующую на них нагрузку усилиями S_1 и S_2 , направленными по касательной к срединной поверхности, то из условия равновесия этих сил на ось сосуда получим

$$S_1 \cos \varphi_1 = S_2 \cos \varphi_2,$$

т. е. вертикальные проекции этих сил взаимно уравниваются друг друга. Проекция этих сил на плоскость стыка оболочек будут $S_1 \sin \varphi_1$ и $S_2 \sin \varphi_2$.

Из рис. 102 видно, что эти проекции направлены в одну и ту же сторону и поэтому они друг друга не уравнивают. Каждая из распорных сил, приложенная к одной из оболочек, может существовать только в том случае, если со стороны другой оболочки будет иметь место реактивная сила противоположного направления. Так как тонкие оболочки слабо сопротивляются изгибу от распорных сил, то для восприятия последних в конструкциях баков обычно ставят кольца (шпангоуты).

Распорные силы в сосудах будут отсутствовать лишь в том случае, когда $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$. Примером такого сосуда является цилиндрический бак с полусферическим или эллипсондальным днищем.

Теперь перейдем к решению поставленной задачи. Сначала рассмотрим решение безмоментной задачи для бака (рис. 103).

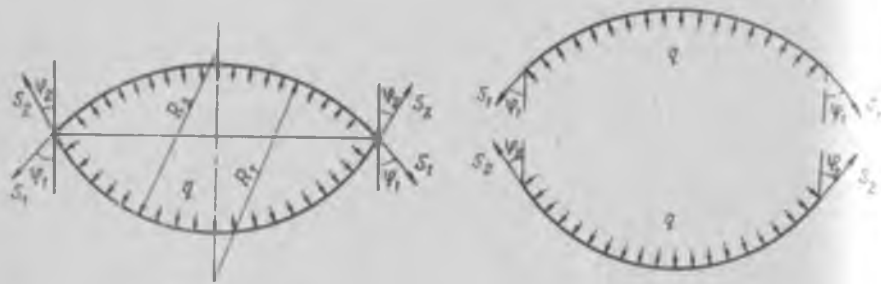


Рис. 101.



Рис. 102.

Для днища:

— перемещение точки A днища по направлению H_1 от внутреннего давления

$$\Delta_1^{(1)} = \frac{R_1 \sin \varphi_0}{E \delta_1} (N_1 - \mu N_2) = \frac{(1-\mu) q R_1^2 \sin \varphi_0}{2 E \delta_1};$$

— перемещение той же точки A по направлению H_1 от краевых сил H_1 и M_1 будет

$$\Delta_1^{(1)} = (\varepsilon_0)_{\varphi=0} R_1 \sin \varphi_0 = \frac{R_1^2 \sin \varphi_0}{2 D_1^3} \left(\frac{M_1^3}{R_1} + H_1 \sin \varphi_0 \right);$$

— угол поворота краевого сечения днища от усилий H_1 и M_1

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{R_1^2}{2 D_1^3} \left(H_1 \sin \varphi_0 + \frac{2 M_1^3}{R_1} \right);$$

— угол поворота того же сечения от действия внутреннего давления равен нулю.

Для цилиндра:

— перемещение точки B цилиндра по направлению H_2 от действия внутреннего давления и сжимающих сил N

$$\Delta_1^{(2)} = \varepsilon_0 R_2 = \frac{R_2}{E \delta_2} (N_1 - \mu N_2) = \frac{R_2}{E \delta_2} \left[q R_2 - \mu \left(\frac{q R_2}{2} - N \right) \right];$$

— перемещение точки B от действия краевых сил H_2 и M_2

$$\Delta_2^{(2)} = \frac{2 R_2^3 k}{E \delta_2} (k M_2 + H_2);$$

— угол поворота краевого сечения от сил, действующих в этом сечении:

$$\theta_1^{(2)} = -\frac{1}{2 D_2 k^2} (2 k M_2 + H_2);$$

— угол поворота рассматриваемого сечения от внутреннего давления и сжимающих сил N будет равен нулю.

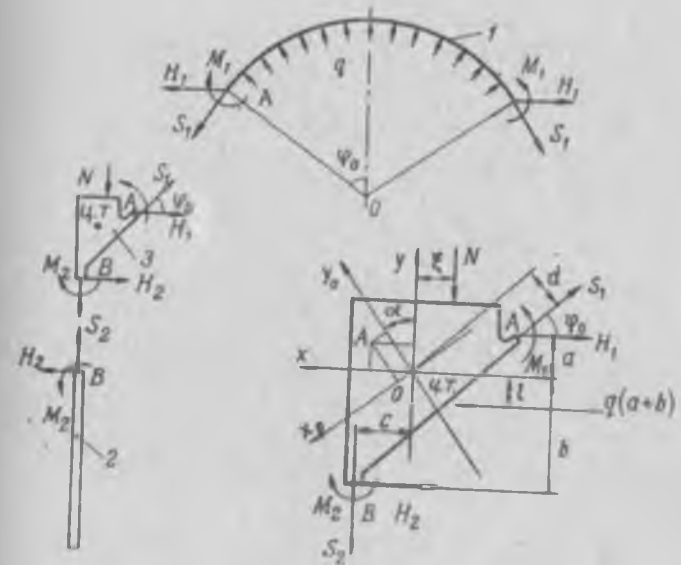


Рис. 103.

Для шпангоута:

— поворот сечения шпангоута от скручивающего момента M будет выражаться формулой

$$\theta_1^{(3)} = \frac{M R_3^2}{E J_x},$$

где

$$M = -M_1 + M_2 - S_1 d - S_2 c + H_1 a - H_2 b + N z + q(a+b)l;$$

N — погонная осевая сжимающая сила;

— перемещение центра тяжести сечения шпангоута под действием равнодействующей силы P

$$\Delta_1^{(3)} = -\frac{P R_3^2}{E F},$$

где

$$P = S_1 \cos \varphi_0 + H_1 + H_2 - q(a+b);$$

F — площадь поперечного сечения шпангоута;
 — перемещение точки A шпангоута по направлению силы H_1 от поворота сечения

$$\Delta_2^{(3)} = -\theta_1^{(3)} a;$$

— аналогично для точки B

$$\Delta_3^{(3)} = \theta_1^{(3)} b.$$

Для определения неизвестных краевых усилий H_1, H_2, M_1, M_2 в результате получим следующие уравнения совместности деформаций системы днище—шпангоут, шпангоут—цилиндр:

$$\Delta_1^{(1)} + \Delta_2^{(1)} = \Delta_1^{(3)} + \Delta_2^{(3)}, \quad \theta_1^{(1)} = \theta_1^{(3)},$$

$$\Delta_1^{(2)} + \Delta_2^{(2)} = \Delta_1^{(3)} + \Delta_3^{(3)}, \quad \theta_1^{(2)} = \theta_1^{(3)}.$$

Эту систему уравнений необходимо решать численно, так как в общем виде решение получается чрезвычайно громоздким. После определения неизвестных усилий можно подсчитать по соответствующим формулам настоящего параграфа напряжения в днище, шпангоуте и в цилиндрической части бака.

При определении напряжений в шпангоуте необходимо определить положение его главных осей инерции. Имеем (см рис. 103)

$$x_0 = -y \sin \alpha + x \cos \alpha, \quad y_0 = y \cos \alpha + x \sin \alpha.$$

Главные моменты инерции относительно осей x_0, y_0 будут равны

$$J_{x_0} = \int_F y_0^2 dF = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{y_0} = \int_F x_0^2 dF = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{x_0 y_0} = \frac{1}{2} (J_y - J_x) + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

В главных осях центробежный момент инерции должен быть равен нулю:

$$J_{x_0 y_0} = 0.$$

Из этого условия получаем выражение для угла α :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Тогда напряжения в шпангоуте

$$\sigma = \pm \frac{M_{x_0} u_y}{J_{x_0}} \pm \frac{M_{y_0} x_0}{J_{y_0}} - \frac{PR_3}{F},$$

где

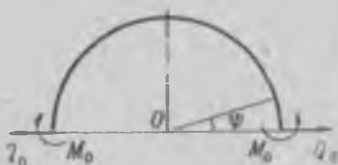
$$M_{x_0} = MR_3 \cos \alpha,$$

$$M_{y_0} = MR_3 \sin \alpha.$$

§ 30. ПОЛУСФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, НАГРУЖЕННАЯ ПО КРАЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ И МОМЕНТОМ

Выражения для внутренних усилий и деформаций получим из формул (6.25), если в них подставить $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (рис. 104):

Рис. 104.



$$N_{\psi} = \frac{2D\beta^2 e^{-\beta\psi}}{R^2} (D_2 \sin \beta\psi - D_1 \cos \beta\psi) \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_{\theta} = -\frac{2D\beta^2 e^{-\beta\psi}}{R^2} [(D_1 - D_2) \sin \beta\psi + (D_1 + D_2) \cos \beta\psi],$$

$$Q_{\psi} = -\frac{2D\beta^2 e^{-\beta\psi}}{R^2} (D_2 \sin \beta\psi - D_1 \cos \beta\psi),$$

$$M_{\psi} = \frac{D\beta e^{-\beta\psi}}{R} [-(D_1 + D_2) \sin \beta\psi + (D_1 - D_2) \cos \beta\psi],$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{e^{-\beta\psi}}{2\beta} [(D_1 - D_2) \sin \beta\psi + (D_1 + D_2) \cos \beta\psi],$$

$$U = e^{-\beta\psi} (D_1 \sin \beta\psi + D_2 \cos \beta\psi).$$

Для определения постоянных D_1 и D_2 имеем условия

$$(Q_{\psi})_{\psi=0} = Q_0, \quad (M_{\psi})_{\psi=0} = M_0,$$

Тогда

$$N_{\psi} = e^{-\beta\psi} \left[Q_0 (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) - \frac{2M_0\beta}{R} \sin \beta\psi \right] \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_{\theta} = -2\beta e^{-\beta\psi} \left[Q_0 \cos \beta\psi + \frac{M_0\beta}{R} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) \right],$$

$$Q_{\varphi} = -e^{-\beta\varphi} \left[Q_0 (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) - \frac{2M_0\beta}{R} \sin \beta\psi \right],$$

$$M_{\varphi} = -\frac{R}{\beta} e^{-\beta\varphi} \left[Q_0 \sin \beta\psi - \frac{M_0\beta}{R} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \right],$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{2\beta}{Eh} e^{-\beta\varphi} \left[Q_0 \cos \beta\psi + \frac{M_0\beta}{R} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi) \right],$$

$$U = \frac{R^2 e^{-\beta\varphi}}{2D\beta^2} \left[Q_0 (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) - \frac{2M_0\beta}{R} \cos \beta\psi \right].$$



Рис. 105.



Рис. 106.

Применим эти выражения к некоторым частным случаям нагружения сферической оболочки.

Нагружение сферической оболочки распределенной по экватору кольцевой нагрузкой. В этом случае для определения неизвестных усилий Q_0 и M_0 имеются условия (рис. 105)

$$(Q_{\varphi})_{\varphi=0} = \frac{P_0}{2}, \quad (U)_{\varphi=0} = 0.$$

Тогда для внутренних усилий и деформаций получим следующие выражения:

$$N_{\varphi} = -\frac{P_0}{2} e^{-\beta\varphi} \cos \beta\psi \operatorname{tg} \psi;$$

$$N_{\theta} = -\frac{P_0}{2} e^{-\beta\varphi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$Q_{\varphi} = \frac{P_0}{2} e^{-\beta\varphi} \cos \beta\psi,$$

$$M_{\varphi} = -\frac{P_0 R}{4\beta} e^{-\beta\varphi} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi),$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{P_0 \beta}{2Eh} e^{-\beta\varphi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi).$$

Нагружение сферической оболочки погонным моментом
В этом случае для определения усилий Q_0 и M_0 имеем условия (рис. 106)

$$(M_\varphi)_{\varphi=0} = -\frac{1}{2} m, \quad (\varepsilon_\theta)_{\varphi=0} = 0,$$

тогда

$$N_\varphi = -\frac{m\beta}{2R} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_\theta = -\frac{m\beta^2}{R} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi,$$

$$Q_\varphi = \frac{m\beta}{2R} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$M_\varphi = \frac{1}{2} m e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi,$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{m\beta^2}{E\beta R} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi.$$

Сферическая оболочка, одно сечение которой повернуто на угол θ_0 . Для определения неизвестных Q_0 и M_0 имеем следующие условия (см. рис. 106):

$$(U)_{\varphi=0} = -\theta_0, \quad (\varepsilon_\theta)_{\varphi=0} = 0.$$

Тогда

$$N_\varphi = -\frac{2D\beta^2\theta_0}{R^2} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_\theta = -\frac{4D\beta^3\theta_0}{R^2} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi,$$

$$Q_\varphi = \frac{2D\beta^2\theta_0}{R^2} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$M_\varphi = \frac{2D\beta\theta_0}{R} e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi,$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{4D\beta^3\theta_0}{E\beta R^2} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi.$$

§ 31. РАСЧЕТ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ТОРОВЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ ПОГОННУЮ НАГРУЗКУ

В случае торовых оболочек, нагруженных погонной осесимметричной нагрузкой (рис. 107), также можно воспользоваться упрощенными уравнениями краевого эффекта для получения приближенных решений. Имеем

$$\frac{d^4 U}{d\varphi^4} + 4\beta^4 U = 0,$$

где

$$\mu^2 = \frac{3(1-\mu^2)R_1^4}{R_2^2 \delta^2}$$

В этом уравнении удобно вести отсчет угла от экватора $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$. Опуская все промежуточные выкладки, выпишем основные формулы для внутренних усилий и деформаций:

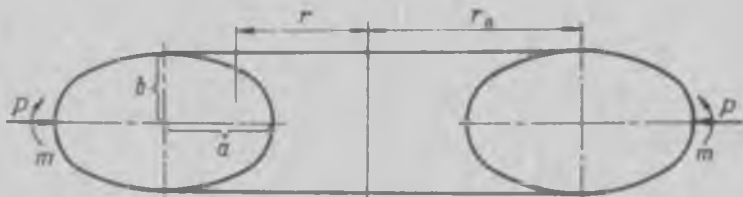


Рис. 107.

$$N_\varphi = \frac{2D\delta^2 e^{-\beta\psi}}{R_1^2} (D_1 \sin \beta\psi - D_2 \cos \beta\psi) \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_\theta = -\frac{2DR_2 \delta^2 e^{-\beta\psi}}{R_1^2} [(-D_1 + D_2) \sin \beta\psi + (D_1 + D_2) \cos \beta\psi],$$

$$Q_\varphi = -\frac{2D\delta^2 e^{-\beta\psi}}{R_1^2} (D_1 \sin \beta\psi - D_2 \cos \beta\psi),$$

$$M_\varphi = \frac{E\delta e^{-\beta\psi}}{R_1} [(-D_1 + D_2) \cos \beta\psi - (D_1 + D_2) \sin \beta\psi],$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{2DR_2 \delta^2 e^{-\beta\psi}}{E\delta R_1^2} [(-D_1 + D_2) \sin \beta\psi + (D_1 + D_2) \sin \beta\psi],$$

$$U = \theta = e^{-\beta\psi} (D_1 \cos \beta\psi + D_2 \sin \beta\psi),$$

причем будем считать, что в зоне приложения нагрузок радиусы кривизны R_1 и R_2 являются постоянными и равными их значениям на экваторе. Такое допущение вполне приемлемо для узкой зоны краевого эффекта. Применим выписанные формулы для решения некоторых задач.

Нагружение эллипсоидальной торовой оболочки погонной кольцевой нагрузкой. В этом случае постоянные интегрирования определяются из условий (см. рис. 107)

$$(Q_\varphi)_{\psi=0} = \frac{P}{2}, \quad (\theta)_{\psi=0} = 0.$$

Тогда для усилий и деформаций получим формулы

$$N_{\varphi} = -\frac{P}{2} e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_{\theta} = -\frac{PR_2^2 e^{-\beta\psi}}{2R_1} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$Q_{\varphi} = \frac{Pe^{-\beta\psi}}{2} \cos \beta\psi,$$

$$M_{\varphi} = \frac{PR_1 e^{-\beta\psi}}{4\beta} (\cos \beta\psi - \sin \beta\psi),$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{PR_2^2 e^{-\beta\psi}}{2EbR_1} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$U = \theta = \frac{RR_1^2 e^{-\beta\psi}}{4D\beta^2} \sin \beta\psi.$$

Нагружение эллипсоидальной торовой оболочки распределенным моментом. Для определения постоянных интегрирования в этом случае имеем условия (см. рис. 107)

$$(M_{\varphi})_{\psi=0} = \frac{1}{2} m, \quad (\varepsilon_{\theta})_{\psi=0} = 0.$$

Тогда

$$N_{\varphi} = -\frac{m\beta}{2R_1} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_{\theta} = -\frac{mR_2^2 \beta^2}{R_1^2} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi,$$

$$Q_{\varphi} = \frac{m\beta}{2R_1} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$M_{\varphi} = \frac{1}{2} m e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi,$$

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{mR_2^2 \beta^2}{EbR_1^2} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi,$$

$$U = \theta = \frac{mR_1}{4D\beta} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi).$$

Эллипсоидальная торовая оболочка, экваториальное сечение которой повернуто на угол η_0 . В этом случае постоянные интегрирования находим из условий (рис. 108)

$$(U)_{\psi=0} = -\theta_0, \quad (\varepsilon_{\theta})_{\psi=0} = 0.$$

Тогда

$$N_{\varphi} = -\frac{2D\beta^2\theta_0}{K_1^3} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \lg \psi,$$

$$N_{\theta} = -\frac{4D\beta^2\theta_0}{K_1^3} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi,$$

$$Q_{\varphi} = \frac{2D\beta^2\theta_0}{K_1^3} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

$$M'_{\varphi} = \frac{2D\beta^2\theta_0}{R_1} e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi,$$

$$\varepsilon_{\psi} = -\frac{4DR_2\beta^3\theta_0}{EbK_1^3} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi,$$

$$U = \theta = \theta_0 e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi - \cos \beta\psi).$$

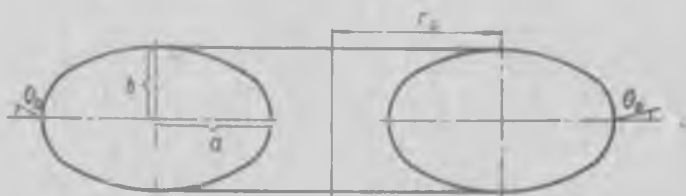


Рис. 108.

В заключение отметим, что после решения соответствующей краевой задачи следует получить оценку прочности данной конструкции оболочки. Обычно этот процесс сводится к суммированию соответствующих напряжений и сравнению этого суммарного напряжения с разрушающим напряжением, т. е.

$$\sigma_1 = \left(\frac{N_{\varphi}}{b}\right)_{\varphi} + \left(\frac{N_{\varphi}}{b}\right)_{\theta} + \left(\frac{N_{\varphi}}{b}\right)_{H} + \left(\frac{N_{\varphi}}{b}\right)_{M} \pm \frac{6M_{\varphi}}{t^2},$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{N_{\theta}}{b}\right)_{\varphi} + \left(\frac{N_{\theta}}{b}\right)_{\theta} + \left(\frac{N_{\theta}}{b}\right)_{H} + \left(\frac{N_{\theta}}{b}\right)_{M} \pm \frac{6M_{\theta}}{t^2}.$$

Опыт эксплуатации конструкций, выполненных из пластичных материалов, показывает, что составляющими напряжения от моментов M_{φ} и M_{θ} следует пренебрегать в этой оценке и запас прочности выводить только по отношению к мембранным напряжениям. Таким образом, запас прочности будет равен отношению $\sigma_{разр}$ к наибольшему мембранному напряжению.

Выше рассмотрены краевые задачи для цилиндра, сферы и тора. В расчетной практике могут встретиться оболочки и других геометрических форм. В этих случаях с достаточной для

практики точностью можно пользоваться формулами, полученными для сферы, если рассматриваемую оболочку разделить на несколько мелких участков и к каждому из них применить эти формулы.

В пределах каждого такого участка радиус кривизны можно считать постоянной величиной, равной среднему радиусу участка. При этом напряжения на границе каждого участка будут являться начальными условиями для последующего, т. е. расчет такой оболочки будет совершаться последовательными переходами от одного участка к другому до тех пор, пока напряжения краевого эффекта не станут малыми. Для практических целей достаточно разбить оболочку не более чем на 3—4 участка.

Глава VII

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК

В этой главе рассматриваются вопросы расчета оболочек без каких-либо упрощающих предположений относительно напряженного состояния и характера действующей нагрузки. Полученные здесь дифференциальные уравнения применимы к решению широкого круга задач, встречающихся в практических расчетах.

Для вывода уравнений равновесия использован аппарат вариационного исчисления.

§ 32. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление является математической дисциплиной, занимающейся отысканием максимальных или минимальных значений функционалов, отвечающих заданным граничным условиям данной физической задачи.

В этом смысле задачи вариационного исчисления формально аналогичны задачам отыскания максимумов и минимумов функций в дифференциальном исчислении.

Если решается задача об экстремуме данной функции, то все сводится к определению тех значений независимых переменных, при которых эта функция получает максимум или минимум. В случае функции одной переменной для этого необходимо решить уравнение

$$y'(x) = 0,$$

корни которого и определяют экстремум.

В данном случае функция $y(x)$ нам известна и требуется определить только ее экстремальные значения. Вариационное же исчисление имеет дело с так называемыми функционалами.

Под функционалом понимают определенный интеграл от сложной функции, вид которой нам известен. Задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы определить то дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Полученное уравнение будет обладать тем свойством, что функция, удовлетворяющая ему, обращает заданный функционал в максимум или минимум, т. е. в данном случае экстремальные значения функционала определяются не координатами отдельных точек, как это было для заданной функции в дифференциальном исчислении, а целым дифференциальным уравнением.

В качестве простейшего примера найдем дифференциальное уравнение для прогиба балки, нагруженной равномерной нагрузкой. Полная потенциальная энергия для прямой балки имеет вид

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx, \quad (7.1)$$

где первое слагаемое выражает работу деформации изгиба, а второе — работу внешних сил.

В данном случае мы имеем дело с функционалом в виде интеграла полной потенциальной энергии. Требуется определить то дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y(x)$, обращающая данный интеграл в экстремум.

Применим к этому выражению полной энергии начало возможных перемещений (принцип Лагранжа).

Применяя начало возможных перемещений, допустим, что прогибы балки получили бесконечно малые приращения. Тогда изменение энергии деформации балки должно быть равно работе внешних сил на тех же приращениях прогиба. Это условие можно записать следующим образом:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \int_0^l \left[\frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = 0,$$

где значок δ обозначает бесконечно малое приращение кривой прогибов от ее равновесного состояния и называется вариацией. Понятие вариации идентично понятию дифференциала в анализе. Поэтому справедливы записи

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y),$$

$$\delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left[\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = \frac{d^2}{dx^2} (\delta y).$$

Таким образом, имеем

$$\delta \int_0^l \left[\frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - qy \right] dx = \int_0^l \left[EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) - q \delta y \right] dx = 0.$$

Проинтегрируем по частям выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx &= \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx = \\ &= \int_0^l \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{dy}{dx} \right) dx = \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l - \\ &- \int_0^l \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l - \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \delta y \right]_0^l + \int_0^l \frac{d^4 y}{dx^4} \delta y dx. \end{aligned}$$

Тогда для вариации $\delta \mathcal{E}$

$$\delta \mathcal{E} = \left[EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l - \left[EJ \frac{d^3 y}{dx^3} \delta y \right]_0^l + \int_0^l \left(EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q \right) \delta y dx = 0,$$

где два первых слагаемых относятся к концевым сечениям балки и определяют граничные условия, а третье слагаемое определяет вид дифференциального уравнения, решения которого обращают в экстремум интеграл полной потенциальной энергии балки.

Поскольку все три слагаемых в полученном выражении не зависят друг от друга в силу произвольности вариаций δy и $\delta y'$, то каждое из них должно быть равно нулю. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \left[EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l &= 0, \\ \left[EJ \frac{d^3 y}{dx^3} \delta y \right]_0^l &= 0, \\ \int_0^l \left(EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q \right) \delta y dx &= 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

При произвольности вариации δy из последнего выражения получаем известное уравнение изгиба балки с прямой осью

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - q = 0,$$

а первые два выражения определяют граничные условия на ее концах.

Таким образом, методы вариационного исчисления в приложении к задачам строительной механики позволяют, минуя обычный прием составления дифференциальных уравнений из условия равновесия бесконечно малого элемента, получить их чисто формальным путем.

В более общей форме приведенные выкладки можно было бы представить следующим образом.

Имеем функционал

$$J = \int_0^l F(x, y, y'') dx, \quad (7.3)$$

вариация которого будет равна нулю в случае экстремума:

$$\delta J = \int_0^l \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx = 0.$$

Здесь F — подынтегральная функция выражения (7.3);

$\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y''}$ — производные от функции F по y и y'' .

Проинтегрируем по частям слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx &= \int_0^l \frac{\partial F}{\partial y''} \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{dy}{dx} \right) dx = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l - \left[\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y \right]_0^l + \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l - \left[\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y \right]_0^l + \int_0^l \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y dx = 0.$$

Отсюда получаем равносильные с (7.2) выражения

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l &= 0, & \left[\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y \right]_0^l &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

из которых два первых относятся к концевым сечениям балки и определяют граничные условия, а последнее является уравнением Эйлера данной вариационной задачи.

Приведенные рассуждения можно распространить и на такие случаи, когда функционал зависит от нескольких функций многих переменных. К таким функционалам, например, приводятся все задачи теории упругости, теории пластин, теории оболочек.

§ 33. ВЫРАЖЕНИЕ ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК

Под полной потенциальной энергией упругой системы понимают ту работу, которую совершают силы системы при переводе ее из деформированного состояния в недеформированное. При этом внутренние упругие усилия совершают работу на тех упругих перемещениях, которые были вызваны этими усилиями.

В случае тонких оболочек элементарное значение для полной энергии

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} = & \frac{1}{2} N_x dy \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} N_y dx \varepsilon_y dy + \frac{1}{2} N_{xy} dy \gamma_{xy} dx + \\ & + \frac{1}{2} N_{yx} dx \gamma_{yx} dy + \frac{1}{2} M_x dy \chi_x dx + \frac{1}{2} M_y dx \chi_y dy + \\ & + \frac{1}{2} M_{xy} dy \chi_{xy} dx + \frac{1}{2} M_{yx} dx \chi_{yx} dy - q_x dx dy u - \\ & - q_y dx dy v - q_z dx dy w. \end{aligned}$$

Первыми четырьмя слагаемыми представлена работа мембранных усилий, равномерно распределенных по толщине стенки оболочки. Вторая группа четырех слагаемых дает работу изгибающих и крутящих моментов. Последние три слагаемых выражают работу внешней нагрузки на соответствующих перемещениях.

Работа всех внутренних усилий берется с коэффициентом $1/2$, так как по определению потенциальной энергии внутренние усилия возрастают от нуля до конечного своего значения постепенно по линейному закону. Поэтому работа каждого внутреннего усилия будет выражаться площадью треугольника. На рис. 109 представлены внутренние и внешние усилия, приложенные к элементу оболочки площадью $dx dy$, и соответствующие им перемещения. Поскольку для бесконечно малого элемента все кривые линии можно заменить прямыми отрезками, то на рис. 109 кривизна оболочки не указана.

Для дальнейшего удобно выразить все внутренние силовые факторы через соответствующие деформации по закону Гука. Для двухосного напряженного состояния закон Гука имеет вид

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ N_{xy} &= G \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{xy}. \end{aligned}$$

$$M_x = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} (\gamma_x + \mu\gamma_y),$$

$$M_y = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} (\gamma_y + \mu\gamma_x),$$

$$M_{xy} = (1-\mu) \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \gamma_{xy} = (1-\mu) \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \gamma_{yx}.$$

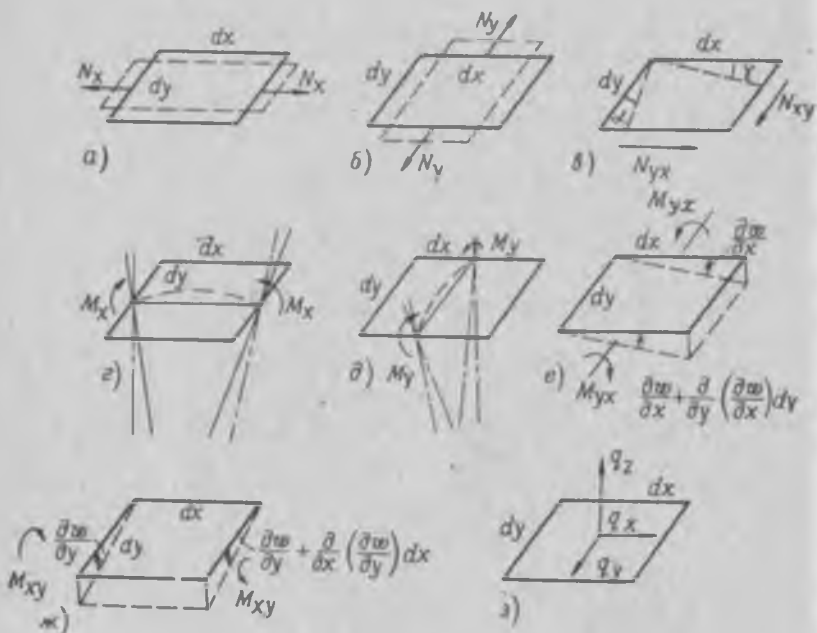


Рис. 109.

Справедливость последнего равенства вытекает из равенства углов поворота по рис. 109, е, ж.

Выразим компоненты деформации и изменений кривизны через перемещения u , v и w , направленные по осям x , y , z подвижного трехгранника (рис. 110, 111).

Для этой цели выделим из оболочки элемент $dx dy$, стороны которого направлены по линиям главных кривизн, и представим положения сторон этого элемента в деформированном состоянии. Выражения для компонентов деформации можно получить, если спроектировать замкнутый пространственный многоугольник 1—2—3—4—5—6—7—8—1 на ось x , а многоугольник 4—9—10—11—12—1—2—3—4 на ось y .

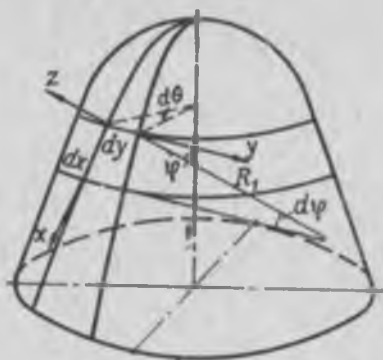


Рис. 110.

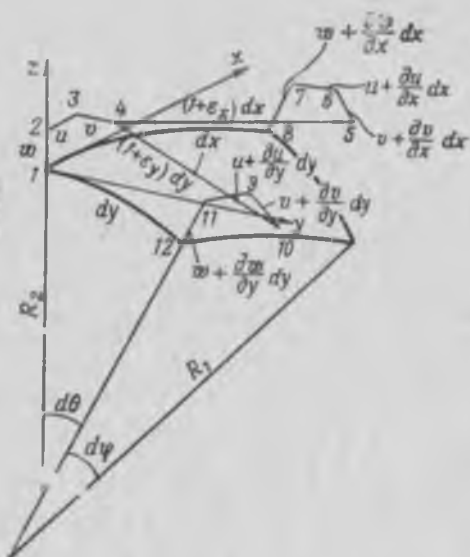


Рис. 111.

Таким образом, получим

$$u + (1 + \varepsilon_x) dx - u - \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx - \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{R_1} = 0,$$

$$v + (1 + \varepsilon_y) dy - v - \frac{\partial v}{\partial y} dy - dy - \left(w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{R_2} = 0.$$

При составлении этих уравнений принималось

$$\cos d\varphi \approx 1, \quad \cos [dx, (1 + \varepsilon_x) dx] \approx 1,$$

$$\cos d\psi \approx 1, \quad \cos [dy, (1 + \varepsilon_y) dy] \approx 1.$$

Для изменения угла между направлениями dx и dy в деформированном состоянии имеем выражение

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \varepsilon_x) dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{(1 + \varepsilon_y) dy}.$$

Здесь следует положить $1 + \varepsilon_x \approx 1$, $1 + \varepsilon_y \approx 1$, так как для металлов деформация ε_x , $\varepsilon_y \approx 0,003 \div 0,005$.

Таким образом, с точностью до малых первого порядка получаем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Получим формулы для изменения кривизны оболочки.

В плоскости меридиана

$$\chi_x = - \frac{\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] - \frac{\partial w}{\partial x}}{(1 + \varepsilon_x) dx} + \left(\frac{1}{R_1 + w} - \frac{1}{R_1} \right),$$

где первое слагаемое дает отношение угла смежности между касательными к элементу dx в его деформированном состоянии к длине этого элемента¹; второе слагаемое дает изменение кривизны элемента вследствие нормального перемещения w . Разложив в ряд по формуле бинома Ньютона дробь $\frac{1}{R_1 + w}$, с точностью до малых величин первого порядка получим

$$\frac{1}{R_1 + w} = \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{w}{R_1} \right).$$

¹ Знак минус перед этой дробью указывает на то, что поворот элемента dx при переходе из недеформированного состояния в деформированное совершается в направлении, противоположном положительному направлению отсчета угла $d\varphi$ (см. рис. 111).

Тогда для изменения кривизны χ_x получим выражение

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{R_1^2}.$$

Аналогично в плоскости, перпендикулярной меридиану:

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R_2^2}.$$

В результате кручения изменяются углы наклона касательных, проведенных к противоположным сторонам элемента $dx dy$. Для изменения кривизны кручения получим выражения

$$\begin{aligned}\chi_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \chi_{yx} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Выражения для усилий и моментов выразим через компоненты перемещения:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right], \\ N_y &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right], \\ N_{xy} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ M_x &= D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \right], \\ M_y &= D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \right], \\ M_{xy} &= (1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Здесь $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Имея эти выражения для внутренних усилий, потенциальную энергию оболочки можно записать в функции компонентов перемещений. Предварительно перепишем выражение для $\mathcal{E}$ в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \epsilon_{xy}) dx dy +$$

$$+\frac{1}{2}\iint_s (M_x\chi_x + M_y\chi_y + 2M_{xy}\chi_{xy}) dx dy - \\ - \iint_s (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy.$$

Здесь два первых двойных интеграла распространяются на всю поверхность оболочки; последний интеграл распространяется только на те участки оболочки, на которые действуют компоненты внешней нагрузки.

Выразим потенциальную энергию через компоненты деформации и изменения кривизны:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} B \iint_s \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right) dx dy + \\ & + \frac{1}{2} D \iint_s \left[\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\mu \chi_x \chi_y + 2(1-\mu) \chi_{xy}^2 \right] dx dy - \\ & - \iint_s (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $B = \frac{E\delta}{1-\mu^2}$ — жесткость на растяжение.

Если подставить сюда выражения для $\varepsilon_x, \dots, \chi_x, \dots$, то получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} B \iint_s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right)^2 + \right. \\ & + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left. \right] dx dy + \\ & + \frac{1}{2} D \iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right] dx dy - \\ & - \iint_s (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy. \end{aligned}$$

§ 34. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Полученное в предыдущем параграфе выражение для полной потенциальной энергии оболочки представляет собой функционал от функций u, v и w и их производных. Пользуясь этим

функционалом и применяя к нему методы вариационного исчисления, можно получить дифференциальные уравнения и граничные условия, необходимые для решения задач. Для удобства выкладок перепишем выражение для энергии в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \iint_s F(u, u_x, x_y, v, v_x, v_y, w, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}) dx dy,$$

где

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Поскольку выражение полной энергии записано для оболочки, находящейся в равновесном деформированном состоянии, то сумма работ всех сил на возможных перемещениях будет равна нулю:

$$\delta \mathcal{E} = \iint_s \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v_x + \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v_y + \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} + \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta w_{yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \delta w_{xy} \right) dx dy = 0.$$

Принтегрируем каждое слагаемое последнего выражения по частям и сложим результаты. Покажем выполнение таких операций для некоторых слагаемых, входящих в это выражение. Пусть $a-b$, $c-d$ — границы области интегрирования. Тогда

$$\iint_s \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x dx dy = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx dy = \\ = \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right]_a^b dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u dx dy; \\ \iint_s \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} dx dy = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\ = \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_a^b dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) dx dy = \\ = \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_a^b dy - \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w \right]_a^b dy + \\ + \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w dx dy.$$

После аналогичного преобразования каждого слагаемого вариации полной энергии получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right]_a^b dy + \int_c^d \left[\frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v \right]_a^b dy + \int_c^d \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)_a^b dy + \\ & + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right]_c^d dx + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v \right]_c^d dx + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]_c^d dx - \\ & - \int_c^d \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w \right]_a^b dy - \\ & - \int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w \right]_c^d dx + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right)_a^b \delta w \right]_c^d - \\ & - \iint_s \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{\partial F}{\partial u} \right) \delta u \, dx \, dy - \\ & - \iint_s \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial F}{\partial v} \right) \delta v \, dx \, dy + \\ & + \iint_s \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial w} \right) \delta w \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

Первые девять слагаемых этого уравнения относятся к границам области интегрирования и характеризуют граничные условия данной задачи. Остальные три слагаемых, стоящих под знаками двойных интегралов, должны быть распространены на всю область интегрирования.

Эта вариация полной энергии согласно началу возможных перемещений будет равна нулю при любом сочетании входящих в нее слагаемых. Однако можно поставить следующие требования: 1) все контурные интегралы, входящие в выражение вариации полной энергии в любой произвольной точке границы области, должны быть равны нулю; это требование в дальнейшем надо выполнить при решении частных задач, исходя из граничных условий; 2) в силу произвольности вариации δu , δv , δw сумма последних трех слагаемых может быть равной нулю и в том случае, если каждая функция, стоящая под знаком двойного интеграла в круглой скобке, в произвольной точке области будет равна нулю. В силу сказанного получим следующие три группы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \\
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial w} = 0, \\
& \left. \begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u = 0, \\
& \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v = 0, \\
& \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\
& \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w = 0.
\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при} \\ x = a \\ x = b \end{array} \\
& \left. \begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u = 0, \\
& \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v = 0, \\
& \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \\
& \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w = 0.
\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при} \\ y = c \\ y = d \end{array}
\end{aligned}$$

Первая группа дает уравнения равновесия оболочки. Две другие группы уравнений определяют граничные условия, которые должны быть выполнены при решении конкретных задач.

Каждое из уравнений последних двух групп представляет собой произведение силового фактора на соответствующее ему перемещение. Поэтому на контуре должен быть равен нулю силовой фактор или соответствующее ему перемещение.

Значения частных производных от функции F имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= -q_x, \\
\frac{\partial F}{\partial u_x} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] = N_x, \\
\frac{\partial F}{\partial u_y} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = N_{xy}, \\
\frac{\partial F}{\partial v} &= -q_y, \\
\frac{\partial F}{\partial v_x} &= \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = N_{xy},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v_y} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_2} \right) \right] = N_y, \\
\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \right] = M_x, \\
\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \right] = M_y, \\
\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} &= 2(1-\mu) \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2M_{xy}, \\
\frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{E\delta}{(1-\mu^2)R_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \frac{E\delta}{(1-\mu^2)R_2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)R_1^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)R_2^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \right] - \\
&\quad - q_x = \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} + \frac{M_x}{R_1^2} + \frac{M_y}{R_2^2} - q_x.
\end{aligned}$$

Представим граничные условия и уравнения равновесия в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} N_x \delta u &= 0, \\ N_{xy} \delta v &= 0, \\ M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w &= 0, \\ N_y \delta v &= 0, \\ N_{xy} \delta u &= 0, \\ M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при} \\ &x=a, \quad x=b \end{aligned} \\
&\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{R_1} \right) + \\ + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{R_2} \right) &= - \frac{(1-\mu^2) q_x}{E\delta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{R_2} \right) + \\ + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{R_1} \right) &= - \frac{(1-\mu^2) q_y}{E\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{R_1} \right) = - \frac{(1 - \mu^2) q_y}{E \delta}, \\
 & D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{w}{R_1^2} + \mu \frac{w}{R_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{w}{R_2^2} + \mu \frac{w}{R_1^2} \right) + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{R_1^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) \right] + \frac{1}{R_2^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \right. \\
 & \quad + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \left. \right] \left. \right] + B \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] \right\} = q_z.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Из этих уравнений легко могут быть получены уравнения как плоской задачи теории упругости ($w=0$), так и уравнения изгиба пластинки при $R_1=\infty$, $R_2=\infty$, $u=0$, $v=0$, а также изгиба балок.

Если компоненты поверхностной нагрузки q_x и q_y отсутствуют и радиусы кривизны оболочки не зависят от x и y , то приведенные три уравнения допускают значительные упрощения. Введем для этого случая функцию напряжений по формулам

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{E \delta}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\
 N_y &= \frac{E \delta}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\
 N_{xy} &= \frac{E \delta}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Если подставить эти выражения в (7.5), то первые два из них будут удовлетворены, а третье примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \right. \\
 & \quad + 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\mu}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\mu}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{R_1^4} + \frac{1}{R_1^2 R_2^2} + \frac{1}{R_2^4} \right) \varphi \left. \right] = q_z.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Решение многих конкретных задач показывает, что удельный вес подчеркнутых слагаемых, стоящих в квадратных скобках, по сравнению с остальными слагаемыми сравнительно мал. Поэтому для упрощения (7.7) можно отбросить эти слагаемые и уравнение заменить приближенным:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) = q_z. \tag{7.8}$$

Второе уравнение, связывающее функции φ и w , можно получить из выражений (7.6) путем исключения из них перемещений u и v :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = E h \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (7.9)$$

Запишем уравнения (7.8) и (7.9) в символической форме:

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 w &= q_z, \\ \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= E h \nabla_k^2 w, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \nabla_k^2 &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Применим к первому из полученных уравнений операцию $\nabla^2 \nabla^2$, а ко второму — ∇_k^2 , а затем из первого уравнения вычтем второе. Тогда получим одно разрешающее уравнение восьмого порядка¹

$$E h \nabla_k^2 \nabla_k^2 w + D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^2 \nabla^2 q_z.$$

С введением функции напряжений граничные условия для мембранных усилий и касательных перемещений примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \delta u &= 0, & \left. \begin{aligned} &\text{при} \\ &x = a \\ &x = b \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \delta v &= 0, & \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta v &= 0, & \left. \begin{aligned} &\text{при} \\ &y = c \\ &y = d \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \delta u &= 0. & \end{aligned}$$

Уравнения (7.7) и (7.9) вместе с соответствующими граничными условиями позволяют решить обширный круг практически важных задач по прочности и устойчивости оболочек. Однако следует отметить, что эти уравнения только в некоторых частных случаях допускают точное решение в пределах гипотез прикладной теории оболочек. В большинстве случаев они могут быть решены или известными приближенными методами или с применением ЭБЦМ.

Рассмотрим некоторые частные задачи, в которых показано использование уравнений (7.10).

¹ Это уравнение впервые было получено В. Э. Власовым.

§ 35. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОТ ДЕЙСТВИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ

Рассмотрим расчет цилиндрической оболочки, закрытой с обоих концов днищами, к которой через жесткую бобышку, вделанную в стенку оболочки, приложен сосредоточенный момент M (рис. 112). Предполагается также, что концы оболочки имеют шарнирное опирание. Определим напряженное и деформированное состояние оболочки для указанного случая.

При $R_1 = \infty$, $R_2 = R$ дифференциальные уравнения (7.8) и (7.9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= \frac{E\delta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) &= q_x. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Решение этих уравнений будем искать в форме двойных тригонометрических рядов, поместив начало координат (рис. 112) на левом конце оболочки:

$$w_1 = \sum_n \sum_m A_{1mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$\varphi_1 = \sum_n \sum_m B_{1mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta.$$

Эти функции удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ M_x &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при} \\ &x=0 \\ &x=l \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= 0, \\ N_x = \frac{\partial \varphi}{R \partial \theta^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при} \\ &x=0 \\ &x=l \end{aligned}$$

Кроме того, при $\theta = 0$ прогиб и функция напряжений, как это следует из характера нагружения, обращаются в нуль и являются нечетными функциями угла θ .

Для определения коэффициентов A_{1mn} и B_{1mn} необходимо выражения w_1 и φ_1 подставить в уравнения (7.11). Прежде чем это сделать, разложим внешнюю действующую нагрузку также в двойные тригонометрические ряды по искомым функциям. В нашем случае внешняя нагрузка представляется в виде сосредоточенного момента, что статически эквивалентно паре сил

с плечом $d = [(2\pi - \beta_2) + \beta_1]R$ (рис. 113). Поэтому можно написать

$$P_1 = \frac{0,5M_{об}}{R\beta_1}, \quad P_2 = \frac{0,5M_{об}}{(2\pi - \beta_2)R}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае внешняя нагрузка представляется в виде двух сосредоточенных сил $|P_1| = |P_2|$. Чтобы привести эту нагрузку к размерности распределенного давления q_z , необходимо ее представить в виде

$$q_z = \frac{P_1}{\Delta F},$$

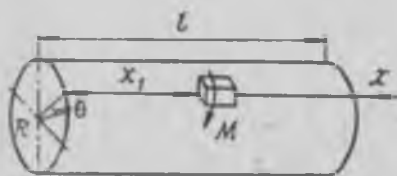


Рис. 112.

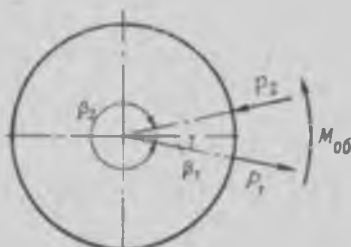


Рис. 113.

где $\Delta F = \Delta s_1 \Delta x_1$ — малая площадку, на которой приложена сила P_1 ;

$\Delta s_1, \Delta x_1$ — размеры этой площадки в окружном и осевом направлениях.

Тогда

$$q_z = \frac{P_1}{\Delta s_1 \Delta x_1} = \sum_n \sum_m C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta.$$

Умножим правую и левую части этого выражения на $\sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta d\theta dx$ и проинтегрируем правую часть по x от 0 до l и по θ от 0 до 2π , а левую часть по x от значения x_1 до $x_1 + \Delta x_1$ и по θ от значения β_1 до $\beta_1 + \Delta \beta_1$. Решая полученное после этого интегрирования уравнение относительно C_{mn} , найдем

$$C_{mn} = \frac{2 P_1}{\pi R l} \frac{l}{\pi m} \left[\cos \frac{m\pi (x_1 + \Delta x_1)}{l} - \cos \frac{m\pi x_1}{l} \right] \times \\ \times \frac{R}{n} [\cos n(\beta_1 + \Delta \beta_1) - \cos n\beta_1].$$

Переходя к пределу при $\Delta s_1 \rightarrow 0, \Delta x_1 \rightarrow 0$ (причем $\Delta \beta_1 = \frac{\Delta s_1}{R}, \beta_1 = \frac{s_1}{R}$), получим

$$C_{mn} = \frac{2P_1}{\pi \cdot mn} \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{m\pi(x_1 + \Delta x_1)}{l} - \cos \frac{m\pi x_1}{l}}{\Delta x_1} \times \\ \times \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{n(s_1 + \Delta s_1)}{R} - \cos \frac{ns}{R}}{\Delta s_1}$$

или

$$C_{mn} = \frac{2P_1}{\pi R l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n\beta_1$$

и

$$q_z = \frac{2P_1}{\pi R l} \sum_n \sum_m \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n\beta_1 \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta.$$

Здесь x_1 и β_1 — координаты точки приложения силы P_1 .

Подставив в уравнения (7.11) соответствующие производные от функций φ_1 и ω_1 и значение внешней нагрузки q_z , получим

$$B_{1mn} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 = -E\delta R A_{1mn} \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2, \\ -\frac{B_{1mn}}{R^3} \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + \frac{D A_{1mn}}{R^4} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 = \frac{2P_1}{\pi R l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n\beta_1.$$

Решая эти уравнения относительно параметров A_{1mn} и B_{1mn} , найдем

$$A_{1mn} = \frac{2P_1 R \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n\beta_1}{\pi E \delta l \left\{ \frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}}, \\ B_{1mn} = -\frac{2P_1 R^2 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n\beta_1}{\pi l \left\{ \frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}}.$$

Подставив в эти выражения значения силы P_1 по формуле $P_1 = \frac{0,5M_{06}}{R\beta_1}$, получим

$$A_{1mn} = \frac{M_{06} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n\beta_1}{\beta_1 \pi E \delta l \left\{ \frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}},$$

$$B_{1mn} = - \frac{M_{06} R \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \frac{\sin n\beta_1}{\beta_1}}{\pi l \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}}$$

Для силы P_2 получим аналогичные выражения, но с обратными знаками и заменой β_1 на β_2 и $n\beta_1$ на $n(2\pi - \beta_2)$, т. е.

$$A_{2mn} = - \frac{M_{06} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \frac{\sin n\beta_2}{2\pi - \beta_2}}{\pi Ebl \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}},$$

$$B_{2mn} = \frac{M_{06} R \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \frac{\sin n\beta_2}{2\pi - \beta_2}}{\pi l \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}} +$$

Переходя в полученных выражениях для A_{1mn} , B_{1mn} , A_{2mn} , B_{2mn} к пределу $\beta_1 \rightarrow 0$, $\beta_2 \rightarrow 2\pi$, имеем

$$A_{1mn} = \frac{M_{06} n \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\pi Ebl \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}},$$

$$A_{2mn} = \frac{M_{06} n \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\pi Ebl \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}},$$

$$B_{1mn} = - \frac{M_{06} R n \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\pi l \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}},$$

$$B_{2mn} = - \frac{M_{06} R n \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l}}{\pi l \left\{ \frac{D}{EbR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}}.$$

Полное решение задачи найдется путем наложения полученных решений

$$w = w_1 + w_2 =$$

$$= \frac{2M_{об}}{\pi E l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta}{\frac{D}{E b R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 =$$

$$= - \frac{2M_{об} R}{\pi l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta}{\frac{D}{E b R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4}$$

Имея выражения для прогиба и функции напряжений, можно получить все внутренние силовые факторы, возникающие в оболочке от момента $M_{об}$:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{R^2 \partial \theta^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{R \partial \theta \partial x},$$

$$M_x = D(\chi_x + \mu \chi_y), \quad M_y = D(\chi_y + \mu \chi_x).$$

В случае действия двух диаметрально противоположных изгибающих моментов (рис. 114) выражения для w и φ принимают вид

$$w = \frac{4M_{об}}{\pi E l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta}{\frac{D}{E b R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$\varphi = - \frac{4M_{об} R^2}{\pi l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta}{\frac{D}{E b R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4}.$$

Эти выражения также получены путем наложения решений, найденных отдельно для двух случаев нагружения (рис. 115).

Иногда в местах крепления лонжеронов к корпусу аппарата последний может иметь различного рода подкрепления в виде стержневых рам или шпангоутов.

В качестве иллюстрации расчета конструкций подобного рода допустим, что рассмотренная выше оболочка подкреплена квадратной или кольцевой рамой (шпангоутом) или прямым стержнем, пропущенным через оболочку по диаметру ее поперечного сечения.

Определим, во-первых, какую часть изгибающего момента берет на себя оболочка и какую часть подкрепление, и, во-вторых, определим силу взаимодействия между указанными подкреплениями и оболочкой, если последняя находится под действием внутреннего давления.

Распределение момента M между оболочкой и подкреплением найдется из уравнений

$$(\psi)_{\text{под}} = \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)_{\theta=0}^{\theta=\pi}, \quad M_{\text{под}} + M_{\text{об}} = M, \quad (7.12)$$

где $(\psi)_{\text{под}}$ — угол поворота узла подкрепления;

$\left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)$ — угол поворота касательной к оболочке в месте приложения момента M ;

$M_{\text{под}}$ — момент, воспринимаемый подкреплением;

$M_{\text{об}}$ — момент, воспринимаемый оболочкой.



Рис. 114.



Рис. 115.

Поворот касательной

$$\left| \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right|_{\theta=0}^{x=x_1} = \left| \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right|_{\theta=\pi}^{x=x_1} =$$

$$= \frac{4 M_{об}}{\pi E b R l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2 \left[\left(\frac{m \pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin^2 \frac{m \pi x_1}{l}}{\frac{D}{E b R^2} \left[\left(\frac{m \pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m \pi R}{l} \right)^4}.$$

Теперь необходимо определить угол поворота $(\psi)_{\text{под}}$. Сначала шпангоут (рис. 116) разрежем мысленно по вертикальному диаметру; в месте разреза приложим силу N и момент m_0 , а нижнее сечение закрепим. Неизвестные внутренние усилия N и m_0 найдем, пользуясь теоремой Кастильяно. Таким образом, имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m_0} = 0, \quad (\psi)_{\text{под}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M_{\text{ш}}}, \quad (7.13)$$

где $\mathcal{E}$ — внутренняя потенциальная энергия полукольца. Для ее подсчета имеем выражение

$$\mathcal{E} = \frac{R}{2 E J} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_1^2 d\beta + \frac{R}{2 E J} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_2^2 d\beta.$$

где момент для участков 1 и 2 шпангоута

$$M_1 = NR(1 - \cos \beta) - m_0;$$

$$M_2 = NR(1 - \cos \beta) - m_0 - M_{ш};$$

J — собственный момент инерции шпангоута относительно оси, параллельной образующей ободочки.

После взятия квадратур в выражении для $\mathcal{E}$ и использования уравнения (7.13) получим

$$N = \frac{2M_{ш}}{\pi R}, \quad m_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) M_{ш},$$

$$(\psi)_{\text{под}}^{\text{ш}} = 0,149 \frac{M_{ш} R}{EJ}.$$



Рис. 116.

Теперь в качестве подкрепляющего элемента рассмотрим квадратную раму (рис. 117). Для данного случая уравнения для определения угла поворота $(\psi)_{\text{под}}^P$ имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m_0} = 0, \quad (\psi)_{\text{под}}^P = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M_P}, \quad (7.14)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2EJ} \int_0^a M_1^2 dx + \frac{1}{2EJ} \int_0^a M_2^2 dx,$$

$$M_1 = -m_0 + Nx,$$

$$M_2 = -m_0 - M_P + Na - Px;$$

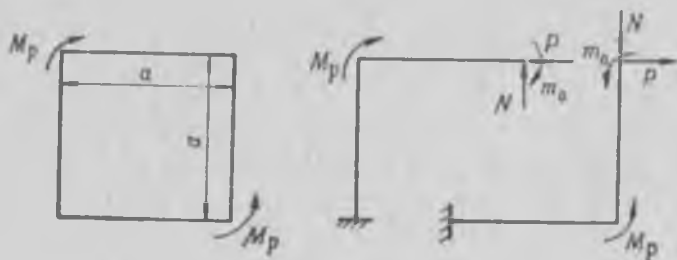


Рис. 117.

J — момент инерции сечения стержня относительно его собственной оси.

Выполнив указанное интегрирование и используя условия (7.14), получим

$$N=P=\frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{M_p}{R}; \quad m_0=\frac{M_p}{4}; \quad (\varphi)_{\text{под}}=\frac{\sqrt{2RM_p}}{8EJ}.$$

Рассмотрим влияние стержневого подкрепления (рис. 118). В этом случае угол поворота определится по формуле

$$(\varphi)_{\text{под}}=\frac{RM_c}{EI}.$$

Сравнивая полученные выражения для углов поворота при различных подкреплениях, можно видеть, что наиболее «жестким» подкреплением является шпангоут.

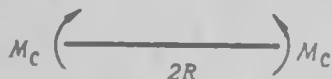


Рис. 118.

Используя условия (7.12), можно получить распределение приложенного момента \$M\$ между оболочкой и подкреплением. Например, в случае подкрепления шпангоутом

$$M_{oc} = \frac{0,149M}{0,149 + \frac{4J}{\pi \delta R^2 l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2 \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin^2 \frac{m\pi x_1}{l}}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4}},$$

$$M_{\text{под}}^{\text{ш}} = M - M_{oc}.$$

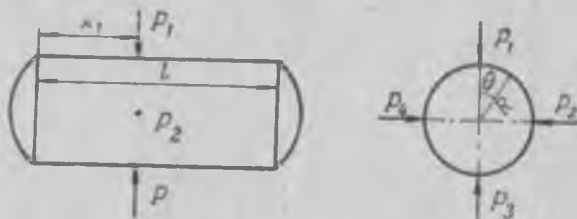


Рис. 119.

Аналогично можно получить выражения для \$M_{об}\$ и \$M_{под}\$ для остальных случаев подкрепления.

Рассмотрим задачу определения сил взаимодействия между подкреплением и оболочкой, когда последняя находится под действием внутреннего давления. Будем считать, что в данном случае оболочка нагружается четырьмя сосредоточенными силами согласно рис. 119. Для удобства в дальнейшем обозначим действующие силы индексами 1, 2, 3, 4.

Для решения этой задачи опять воспользуемся уравнениями (7.11). В данном случае выражения для функции прогиба и функции напряжений должны быть четными относительно угла θ , т. е. $w(+\theta) = w(-\theta)$, $\varphi(+\theta) = \varphi(-\theta)$. Исходя из этого примем

$$w_1 = \sum \sum A_{1mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta,$$

$$\varphi_1 = \sum \sum B_{1mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta.$$

Решение задачи начнем с рассмотрения случая действия одной силы P_1 . Представим внешнюю нагрузку q_z в виде

$$q_z = \frac{P_1}{\Delta s_1 \Delta x_1}$$

и разложим ее в двойной ряд по искомым функциям:

$$q_z = \frac{P_1}{\Delta s_1 \Delta x_1} \sum \sum C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta.$$

Умножим правую и левую части этого выражения на $\sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta dx d\theta$ и проинтегрируем — правую часть в пределах по x от 0 до l , по θ — от 0 до 2π , а левую часть по x в пределах от x_1 до $x_1 + \Delta x_1$ и по θ в пределах от β_1 до $\beta_1 + \Delta\beta_1$. Тогда при $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta\beta_1 \rightarrow 0$ получим

$$C_{mn} = \frac{2P_1}{\pi R l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1.$$

С учетом значения коэффициента C_{mn} для q_z имеем выражение

$$q_z = \frac{2P_1}{\pi R l} \sum \sum \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta.$$

Подставляя выражения для функций φ_1 и w_1 , а также q_z в уравнения (7.11), получим два уравнения для определения параметров A_{1mn} и B_{1mn}

$$B_{1mn} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^3 = -E\delta R A_{1mn} \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2, \\ -\frac{B_{1mn}}{R^3} \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + \frac{DA_{1mn}}{R^4} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 = \frac{2P_1}{\pi R l} \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1.$$

Из этих уравнений найдем

$$A_{1mn} = \frac{2P_1 R \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1}{\pi E \delta l \left\{ \frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}},$$

$$B_{1mn} = - \frac{2P_1 R^2 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1}{\pi l \left\{ \frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 \right\}}$$

Подставив эти значения A_{1mn} и B_{1mn} в выражения для φ_1 и w_1 , получим

$$w_1 = \frac{2P_1 R}{\pi E \delta l} \sum_n \sum_m \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$\varphi_1 = - \frac{2P_1 R^2}{\pi l} \sum_n \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_1 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4}.$$

По аналогии с полученным решением для силы P_1 можно написать выражения для прогиба и функции напряжений для остальных сил путем замены угла β_1 на $\beta_2, \beta_3, \beta_4$:

$$w_2 = \frac{2P_2 R}{\pi E \delta l} \sum_n \sum_m \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_2 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$\varphi_2 = - \frac{2P_2 R^2}{\pi l} \sum_n \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_2 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$w_3 = \frac{2P_3 R}{\pi E \delta l} \sum_n \sum_m \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_3 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$\varphi_3 = - \frac{2P_3 R^2}{\pi l} \sum_n \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_3 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$w_4 = \frac{2P_4 R}{\pi E \delta l} \sum_n \sum_m \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\beta_4 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{E\delta R^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4},$$

$$\varphi_4 = -\frac{2P_4 R^2}{\pi l} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m\pi R}{l}\right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n\theta_4 \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{EhR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l}\right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l}\right)^4}.$$

Окончательные выражения для прогиба и функции напряжений найдем путем наложения полученных решений. Полагая, что оболочка работает в пределах упругости, и принимая $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_3 = \pi$, $\beta_4 = \frac{3\pi}{2}$, найдем

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \\ &= \frac{8PR}{\pi Ehl} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0,4,8,12}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l}\right)^2 + n^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{EhR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l}\right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l}\right)^4}, \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \\ &= -\frac{8PR^2}{\pi l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0,4,8,12}^{\infty} \frac{\left(\frac{m\pi R}{l}\right)^2 \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\theta}{\frac{D}{EhR^2} \left[\left(\frac{m\pi R}{l}\right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{m\pi R}{l}\right)^4}. \end{aligned}$$

Пользуясь полученными выражениями для функций φ и w , можно определить все внутренние усилия в цилиндрической оболочке, находящейся под действием одной, двух, трех и четырех сосредоточенных радиальных сил, используя метод наложения.

Теперь приведем выражения для перемещений в направлении радиуса оболочки рамы, шпангоута и стержня, нагруженных сосредоточенными силами. При рассмотрении шпангоута (рис. 120) как кольцевой рамы было найдено, что радиальное перемещение под силой

$$w_{\text{ш}} = 0,006 \frac{PR^3}{El}.$$

В случае квадратной рамы (рис. 121) было получено

$$w_p = 0,707 \frac{PR}{EF}.$$

В случае растяжения стержня

$$w_c = \frac{PR}{EF}.$$

Увеличение радиуса цилиндра под действием внутреннего давления

$$w_n = \frac{(1 - 0,5\mu) q R^2}{Eh}.$$

Условие совместности деформаций системы цилиндрическая оболочка—подкрепление будет иметь вид

$$w_{\alpha} - (w_{0.6})_{x=x_1} = w'_{\alpha 0.1}.$$

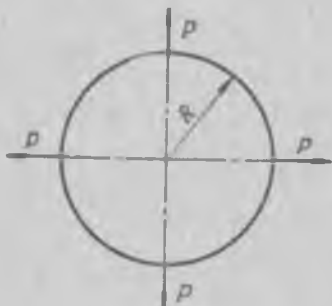


Рис. 120.

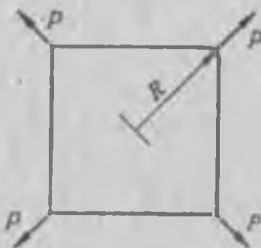


Рис. 121.

Так, например, в случае подкрепления оболочки шпангоутом для силы взаимодействия P получим выражение

$$P = \frac{(1 - 0.5\mu) q R^2}{\frac{0.006 R^3}{J} + \frac{8R}{\pi l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0.4, 8, 12}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{\pi \pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2 \sin^2 \frac{\pi \pi x_1}{l}}{\frac{D}{E \delta R^2} \left[\left(\frac{\pi \pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^4 + \left(\frac{\pi \pi R}{l} \right)^4}}.$$

Аналогично можно получить выражение для силы взаимодействия и при других видах подкреплений, рассмотренных выше.

§ 36. НАГРУЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЛОКАЛЬНЫМИ ОКРУЖНЫМ И ОСЕВЫМ ИЗГИБАЮЩИМИ МОМЕНТАМИ

Рассмотрим нагружение цилиндрической оболочки местными окружными или осевыми изгибающими моментами. С подобного рода задачами приходится встречаться, например, при расчете подвесных баллонов или баков, опирающихся на ряд кронштейнов, или прикрепленной тем или иным способом трубопроводной арматуры (фланцы, патрубки и т. п.).

Как видно из приведенных схем нагружения (рис. 122 и 123), задача сводится к расчету оболочки на распределенное давление q_z , равное удельному давлению на поверхность оболочки со стороны приложенного момента M .

Для расчета можно принять, что давление q_z изменяется по линейному закону, как указано на рис. 122, 123. Разложив эту нагрузку в двойной ряд Фурье по искомым функциям φ и w

и подставив все эти выражения в (7.11), получим искомое решение задачи.

В данном случае мы ограничимся приведением готовых результатов такого расчета¹.

При нагружении оболочки окружным моментом M значения внутренних упругих моментов M_x и M_θ , а также значения внут-

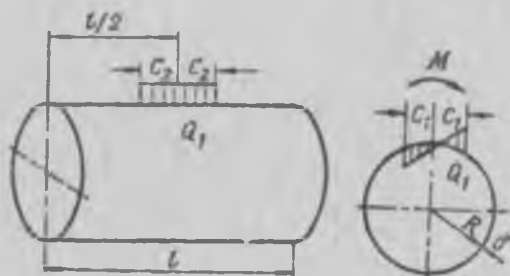


Рис. 122.

ренних мембранных сил N_x и N_θ приведены на рис. 124 и 125. Эти значения подсчитаны для точки Q_1 (см. рис. 122) при квадратных опорных площадках $C_1 = C_2 = C$. Графики справедливы при $l/R \geq 1$.

Из схемы нагружения рис. 122 видно, что в точке Q_1 напряжения от изгибающих моментов будут сжимающими во внешнем волокне; мембранные усилия также вызывают напряжения сжатия.

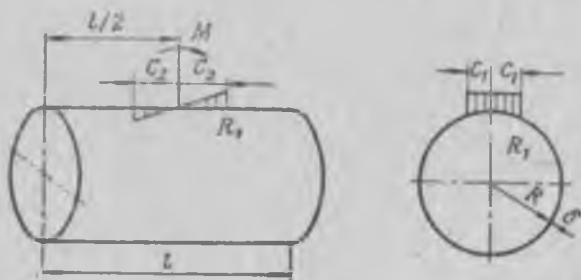


Рис. 123.

На рис. 126 приведены графики углов поворота ψ . Этот угол равен отношению прогиба в точке Q_1 (см. рис. 122) к размеру C_1 . Кривые A, B, C, D построены для $l/R = 4$. При других значениях l/R угол ψ можно определить, пользуясь корректирующей кривой, помещенной в правом нижнем углу рис. 126. Для этой цели

¹ Сб. «Вопросы прочности цилиндрических оболочек», пер. с англ., Оборонгиз, 1960.

вначале определяют угол поворота по кривым A, B, C, D при $l/R=4$. Затем этот угол уточняют, пользуясь корректирующей кривой в процентном отношении по сравнению с $l/R=4$.

Если опорная площадка приложения окружного момента будет прямоугольной, то угол поворота θ , а также изгибающие

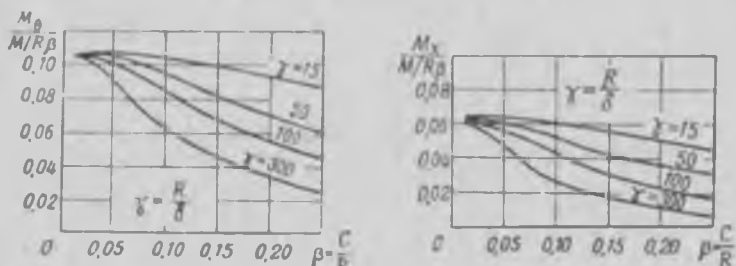


Рис. 124.

моменты M_θ и M_x в точке Q_1 можно определить следующим образом.

Сначала находят величину $\sqrt[3]{\frac{C_1}{R} \frac{C_2}{R}} = \sqrt[3]{\left(\frac{C_1}{R}\right)^2 \left(\frac{C_2}{R}\right)}$ для данной прямоугольной площадки. Затем эту величину умножают на коэффициент k_c и получают величину β , равную

$$\beta = k_c \sqrt[3]{\frac{C_1}{R} \frac{C_2}{R}},$$

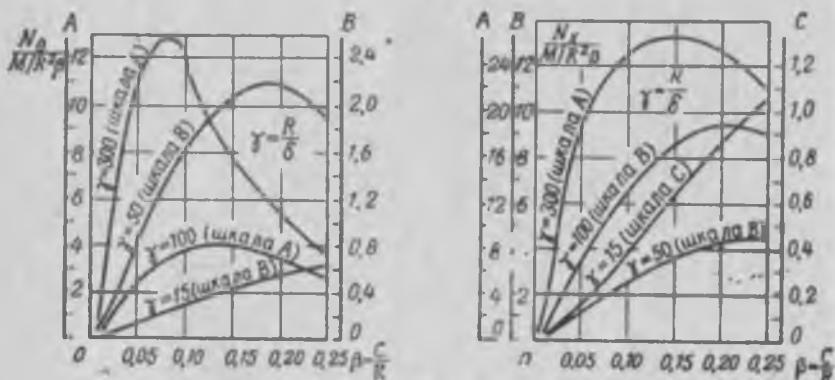


Рис. 125.

где коэффициент k_c берется из табл. 6 для данного отношения C_1/C_2 и R/δ . По полученному значению β по рис. 124 или 126 находят изгибающие моменты или угол поворота.

Таблица 6

C_1/C_2	R/δ	k_c для θ	k_c для M_θ	k_c для M_x	C_c для N_θ	C_c для N_x
1/4	15	1,09	1,31	1,84	0,31	0,49
1/4	50	1,04	1,24	1,62	0,21	0,46
1/4	100	0,97	1,16	1,45	0,15	0,44
1/4	300	0,92	1,02	1,17	0,09	0,46
1/2	15	1,00	1,09	1,36	0,64	0,75
1/2	50	0,98	1,08	1,31	0,57	0,75
1/2	100	0,94	1,04	1,26	0,51	0,76
1/2	300	0,95	0,99	1,13	0,39	0,77
2	15	1,00	1,20	0,97	1,70	1,30
2	100	1,19	1,10	0,95	1,43	1,12
2	300	—	1,00	0,90	1,30	1,00
4	15	1,00	1,47	1,08	1,75	1,31
4	100	1,49	1,38	1,06	1,49	0,84
4	300	—	1,27	0,98	1,35	0,74

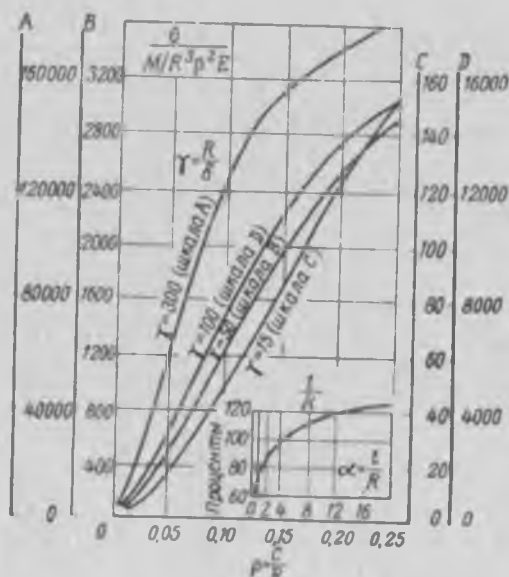


Рис. 126.

При определении мембранных сил N_0 и N_x сначала подсчитывают

$$\beta = \sqrt[3]{\beta_1 \beta_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{C_1}{R}\right)^2 \left(\frac{C_2}{R}\right)}.$$

По полученному значению β на рис. 125 для заданного значения $\gamma = R/\delta$ находят величины N_0 и N_x , которые затем умножают на коэффициент C_0 , указанный в табл. 6.

При нагружении оболочки осевым моментом (см. рис. 123) внутренние усилия и моменты, а также угол поворота опреде-

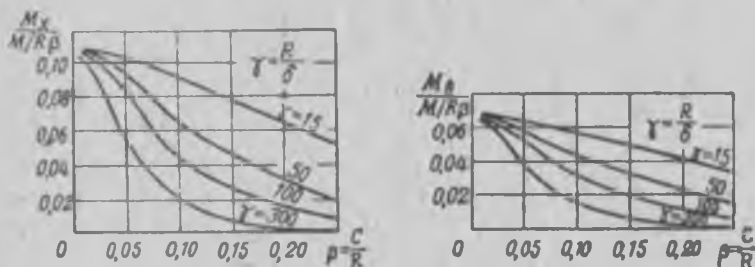


Рис. 127.

ляются по кривым рис. 127, 128, 129. Этими кривыми можно пользоваться, если $l/R \geq 1$.

При подсчете углов поворота (отношение прогиба в точке R к размеру C_2) и изгибающих моментов M_0 и M_x для прямоугольных областей сначала определяют величину

$$\sqrt[3]{\beta_1 \beta_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{C_1}{R}\right) \left(\frac{C_2}{R}\right)},$$

которую затем умножают на коэффициент k_l и получают

$$\beta = k_l \sqrt[3]{\left(\frac{C_1}{R}\right) \left(\frac{C_2}{R}\right)}.$$

По полученной величине β определяют по рис. 127 и 129 угол поворота и изгибающие моменты M_0 и M_x . Коэффициент k_l в данном случае берется из табл. 7. При определении мембранных усилий N_0 , N_x сначала определяют

$$\beta = \sqrt[3]{\beta_1 \beta_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{C_1}{R}\right) \left(\frac{C_2}{R}\right)},$$

а по полученной величине β находят по рис. 128 для заданного значения $\gamma = \frac{R}{\delta}$ усилия N_0 и N_x . Затем эти усилия умножают на коэффициент C_l , взятый из табл. 7.

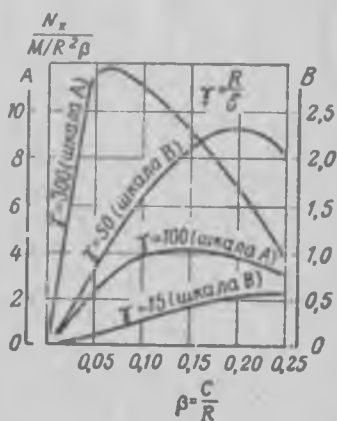
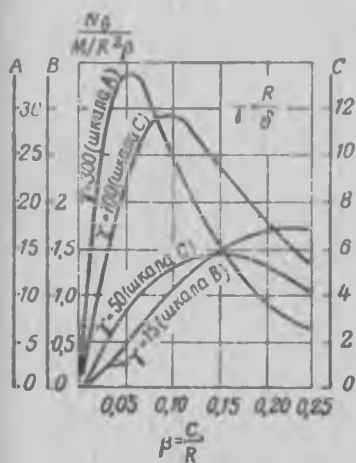


Рис. 128.

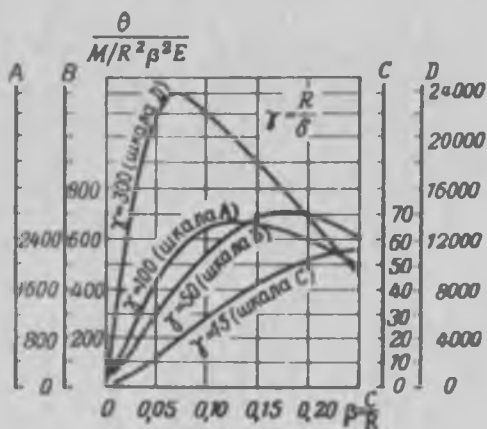


Рис. 129.

Таблица 7

C_1, C_2	R, b	k_I для θ	k_I для M_θ	k_I для M_x	C_I для N_θ	C_I для N_x
1/4	15	1,14	1,80	1,24	0,75	0,43
1/4	50	1,13	1,65	1,16	0,77	0,33
1/4	100	1,18	1,59	1,11	0,80	0,24
1/4	300	1,31	1,56	1,11	0,90	0,07
1/2	15	1,00	1,08	1,04	0,90	0,76
1/2	100	1,00	1,06	1,02	0,97	0,68
1/2	300	1,00	1,05	1,02	1,10	0,60
2	15	—	0,94	1,12	0,87	1,3
2	100	1,09	0,89	1,07	0,81	1,15
2	300	—	0,79	0,90	0,80	1,50
4	15	1,39	0,90	1,24	0,68	1,20
4	100	1,18	0,54	1,12	0,51	1,03
4	300	—	0,64	0,83	0,50	1,33

§ 37. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, нагруженную осесимметричной поперечной нагрузкой.

Дифференциальные уравнения для решения этой задачи можно получить из уравнений (7.11), положив в них все производные по y равными нулю. Тогда, переходя от частных производных к обыкновенным, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \frac{Eb}{R} \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 \varphi}{dx^4} + D \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Запишем первое из этих уравнений в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - Eb \frac{w}{R} \right) = 0.$$

После двукратного интегрирования получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - Eb \frac{w}{R} = C_1 x + C. \quad (7.16)$$

Покажем, что $C_1x + C$ в данном случае равно нулю. Выражение для окружной деформации при осесимметричном нагружении цилиндрической оболочки имеет вид

$$\varepsilon_y = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x).$$

Так как рассматриваемая оболочка нагружена только поперечным давлением, то осевые напряжения $\sigma_x = 0$. Тогда

$$\varepsilon_y = \frac{w}{R} = \frac{\sigma_y}{E}.$$

Поэтому

$$\sigma_y - E \frac{w}{R} = 0.$$

После умножения этого уравнения на толщину оболочки δ и введения функции напряжения получим

$$\frac{d^2 q}{dx^2} - E \delta \frac{w}{R} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (7.16), видим, что $C_1x + C = 0$. Исключая из второго уравнения (7.15) функцию напряжений, имеем

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{q_z}{D}, \quad (7.17)$$

где

$$4k^4 = \frac{E \delta}{DR^2}.$$

При $q_z = 0$ получаем уже известное нам однородное уравнение краевого эффекта для цилиндрической оболочки (6.14), где оно записано относительно функции U , равной углу поворота dw/dx .

Решение уравнения (7.17) будет складываться из решения однородного уравнения и какого-либо частного решения, т. е.

$$w = \bar{w} + e^{kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx).$$

Постоянные интегрирования в каждом конкретном случае должны быть определены из граничных условий. Выражения для внутренних усилий в данном случае будут иметь вид

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = E \frac{w}{R}, \quad M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_y = \mu M_x.$$

Применим полученное решение для случая нагружения оболочки нагрузкой, состоящей из наддува и гидростатического столба жидкости удельного веса γ :

$$q_z = q_n + \gamma(H - x),$$

где H — высота столба жидкости;

x — текущая координата, отсчитываемая от нижнего торца оболочки.

Для данной нагрузки частное решение уравнения (7.17) следует искать в форме

$$\bar{w} = A_0 + A_1 x.$$

После подстановки выражений q_z и $\bar{w}$ в уравнение (7.17) получим

$$4k^4 (A_0 + A_1 x) = \frac{1}{D} [q_n + \gamma (H - x)].$$

Приравнивая в этом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях x , найдем

$$A_0 = \frac{1}{4Dk^4} (q_n + \gamma H), \quad A_1 = -\frac{\gamma}{4Dk^4}.$$

Тогда

$$\bar{w} = \frac{q_n + \gamma (H - x)}{4Dk^4}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (7.17) в данном случае будет иметь вид

$$w = \frac{[q_n + \gamma (H - x)] R^2}{E\delta} + e^{kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx).$$

Положим, что оболочка достаточно длинная и граничные условия по ее концам не влияют друг на друга. В этом случае должно быть $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тогда

$$w = \frac{[q_n + \gamma (H - x)] R^2}{E\delta} + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx).$$

Допустим, что нижний конец оболочки жестко заделан в абсолютно жесткий шпангоут. Тогда граничные условия на этом конце

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

Эти условия приводят к уравнениям

$$C_3 + \frac{(q_n + \gamma H) R^2}{E\delta} = 0,$$

$$k(C_4 - C_3) - \frac{\gamma R^2}{E\delta} = 0.$$

Отсюда находим

$$C_3 = -\frac{(q_n + \gamma H) R^2}{E\delta},$$

$$C_4 = \frac{(1 - Hk) \gamma R^2}{KE\delta} - \frac{q_n R^2}{E\delta}.$$

Тогда выражение для w примет вид

$$w = \frac{[q_n + \gamma (H - x)] R^2}{E\delta} + e^{-kx} \left\{ \left[\frac{(1 - Hk) \gamma R^2}{kE\delta} - \frac{q_n R^2}{E\delta} \right] \sin kx - \frac{(q_n + \gamma H) R^2}{E\delta} \cos kx \right\}.$$

Для окружного усилия N_y и изгибающего момента M_x получим формулы

$$N_y = E\delta \frac{w}{R} = [q_n + \gamma (H - x)] R + e^{-kx} \left\{ \left[\frac{(1 - Hk) \gamma R}{k} - q_n R \right] \sin kx - (q_n + \gamma H) R \cos kx \right\},$$

$$M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{k\delta e^{-kx}}{2\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \left\{ \left[\frac{1 - Hk}{k} \gamma - q_n \right] \cos kx + (q_n + \gamma H) \sin kx \right\}.$$

Пользуясь этими формулами, можно определить напряжения в произвольной точке оболочки. Например, в заделке $x = 0$

$$N_y = 0,$$

$$(M_x)_{x=0} = -\frac{R\delta}{2\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \left[\frac{(1 - Hk) \gamma}{k} - q_n \right].$$

Напряжения от этого момента найдутся из выражения

$$\sigma_x = \pm \frac{6(M_x)_{x=0}}{\delta^2} = \pm \frac{3R\delta}{\sqrt{3}(1 - \mu^2)} \left[\frac{(1 - Hk) \gamma}{k} - q_n \right].$$

§ 38. ПРИМЕНЕНИЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ЗАДАЧАМ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК

Во многих случаях энергетический метод может оказаться полезным для приближенного решения задач прочности и устойчивости оболочек. Общие основы этого метода были изложены в разделе I при рассмотрении стержней и пластин. При расчете оболочек этим методом усложняется только подбор аппроксимирующих функций. Но при наличии некоторого навыка эта трудность легко может быть преодолена. В данном случае выражение полной энергии является функцией трех компонентов перемещения u , v и w , и при решении конкретной задачи необхо-

димо подобрать такие выражения для этих функций, которые удовлетворяли бы заданным граничным условиям и были в согласии с физическим смыслом задачи. Чем полнее будут удовлетворены эти требования, тем точнее будет результат решения поставленной задачи. Снабдив выбранные функции перемещений неопределенными коэффициентами, не зависящими от текущих координат, можно подсчитать полную потенциальную энергию оболочки, которая будет выражена в функции этих коэффициентов. Для определения последних следует составить частные производные по каждому из них и приравнять эти производные нулю. При этом получится число уравнений, соответ-

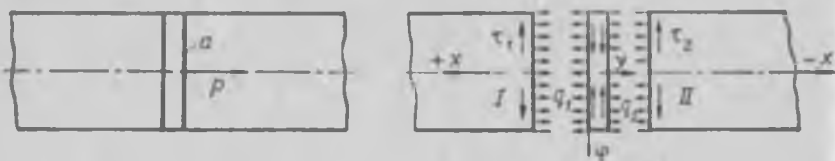


Рис. 130.

ствующее числу неизвестных коэффициентов. После определения коэффициентов можно определить все внутренние силовые факторы по формулам закона Гука. Проиллюстрируем на конкретном примере применение этого метода.

Пусть имеется весьма длинная невесомая цилиндрическая оболочка, один конец которой заделан неподвижно, а второй свободен. Поместим в каком-либо произвольном сечении этой оболочки подкрепляющее кольцо a (рис. 130) прямоугольного поперечного сечения. При этом центр тяжести сечения кольца расположим на срединной поверхности оболочки.

Приложим к этому кольцу сосредоточенную силу P .

Для решения задачи мысленно разрежем оболочку, как показано на рис. 130. Здесь же показана выбранная система координат как для оболочек I , II , так и для кольца a . По местам разрезов приложены неизвестные нормальные силы q_1 , q_2 и касательные усилия τ_1 и τ_2 . Оболочка считается безмоментной.

Начнем с рассмотрения оболочки I . Потенциальная энергия оболочки может быть записана следующим образом:

$$\mathcal{E} = \frac{EhR}{2(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^x \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_\varphi + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right) dx d\varphi - T,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{\partial v}{R \partial \varphi}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

u , v — компоненты перемещения точек срединной поверхности в направлении осей x и φ . Составляющей w/R в ε_φ пока пренебрегаем;

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона;

R, δ — радиус и толщина оболочки;

T — работа сил q_1 и τ_1 ;

l — длина оболочки. Считается, что $l \gg R$.

Далее в соответствии с принятым методом решения необходимо задаться подходящими выражениями u и v с неопределенными коэффициентами и выразить потенциальную энергию в функции этих коэффициентов. В качестве таких подходящих функций примем

$$u = A_0 x + \sum_n (A_{1n} + A_{2n} x) e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi,$$

$$v = \sum_n (B_{1n} + B_{2n} x) e^{-\frac{nx}{R}} \sin n\varphi.$$

Первый член в выражении для u не зависит от угла φ и пропорционален расстоянию x от начала координат; второй член этого выражения быстро затухает с удалением от начала координат и введен для учета местного эффекта от сосредоточенной силы.

В выражении для v взят только быстро затухающий член, так как это перемещение должно уменьшаться с удалением от места приложения силы.

Кроме того, перемещение u должно быть функцией четной относительно координаты φ , а перемещение v — нечетной.

Прежде чем выписать выражение полной энергии, подсчитаем работу сил q_1 и τ_1 . Для удобства определения этих сил в дальнейшем представим их в виде рядов Фурье:

$$q_1 = q'_0 + \sum_n q'_n \cos n\varphi, \quad \tau_1 = \sum_n \tau'_n \sin n\varphi. \quad (7.18)$$

Силы q_1 должны быть функцией четной относительно φ , поэтому разложение взято по косинусам; силы τ_1 должны быть нечетной функцией, поэтому разложение взято по синусам. Причем в первом разложении взят свободный член, который легко определяется из условий статики

$$\int_0^{2\pi} q_1 R d\varphi = P,$$

откуда

$$q'_0 = \frac{P}{2\pi R}. \quad (7.19)$$

Свободный член во втором разложении равен нулю.

Теперь подсчитаем работу сил q_1 и τ_1 :

$$T = \int_0^l \int_0^{2\pi} q_1 \frac{\partial u}{\partial x} dx R d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \tau_1(v)_{x=0} P d\varphi.$$

Знак минус перед вторым слагаемым поставлен потому, что усилие τ_1 и перемещение v направлены в противоположные стороны.

После вычисления указанных интегралов получим

$$T = 2\pi R A_0 q'_0 \int_0^l dx - \pi R q'_1 A_{1n} - \pi R \tau'_1 B_{1n}.$$

Теперь можно выписать выражение для полной потенциальной энергии оболочки I :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\pi R^3 E}{2(1-\mu^2)} \left(2A_0^2 \int_0^l dx + \frac{3-\mu}{4} \frac{n}{R} A_{1n}^2 + \frac{3-\mu}{8} \frac{R}{n} A_{2n}^2 + \right. \\ & + \frac{3-\mu}{4} \frac{n}{R} B_{1n}^2 + \frac{3-\mu}{8} \frac{R}{n} B_{2n}^2 - \frac{1+\mu}{4} A_{1n} A_{2n} + \frac{1+\mu}{4} B_{1n} B_{2n} + \\ & \left. + \frac{1-3\mu}{2} \frac{n}{R} A_{1n} B_{1n} + \frac{1+\mu}{4} A_{2n} B_{1n} - \frac{1+\mu}{4} A_{1n} B_{2n} \right) - \\ & - 2\pi R A_0 q'_0 \int_0^l dx + \pi R q'_1 A_{1n} + \pi R \tau'_1 B_{1n}. \end{aligned}$$

При вычислении интегралов в силу весьма большой длины оболочки принималось

$$\int_0^l e^{-\frac{nx}{R}} dx \approx \frac{R}{n}.$$

Таким образом, потенциальная энергия оболочки I выражена в функции коэффициентов A_0 , A_{1n} , A_{2n} , B_{1n} , B_{2n} . Для их определения составим частные производные от полной энергии $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_0}$, $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_{1n}}$, ..., $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_{2n}}$ и приравняем их нулю. При этом число уравнений будет соответствовать числу неизвестных параметров, которые определяются из решения этой системы уравнений.

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{A_0 E^3}{(1-\mu^2)} - q'_0 \right) \int_0^l dx = 0, \\ & \frac{3-\mu}{2} \frac{n}{R} A_{1n} - \frac{1+\mu}{4} A_{2n} + \frac{1-3\mu}{2} \frac{n}{R} B_{1n} - \frac{1+\mu}{4} B_{2n} + \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(1-\mu^2)}{E\delta} q'_n = 0, \\
 & (1+\mu) A_{1n} - (3-\mu) \frac{R}{n} A_{2n} - (1+\mu) B_{1n} = 0, \\
 & \frac{3-\mu}{2} \frac{n}{R} B_{1n} + \frac{1+\mu}{4} B_{2n} + \frac{1-3\mu}{2} \frac{n}{R} A_{1n} + \frac{1+\mu}{4} A_{2n} + \\
 & + \frac{2(1-\mu^2)}{E\delta} \tau'_n = 0, \\
 & (1+\mu) B_{1n} + (3-\mu) \frac{R}{n} B_{2n} - (1+\mu) A_{1n} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Из первого уравнения (7.20) следует

$$A_0 = \frac{(1-\mu^2) q'_0}{E\delta}.$$

После подстановки сюда значения q'_0 из (7.19) получим

$$A_0 = \frac{(1-\mu^2) P}{2\pi R\delta E}.$$

Из решения остальных уравнений системы (7.20) следует:

$$\begin{aligned}
 A_{1n} &= -\frac{2Rq'_n}{E\delta n} + (1-\mu) \frac{R\tau'_n}{E\delta n}, \\
 B_{1n} &= -\frac{2R\tau'_n}{E\delta n} + (1-\mu) \frac{Rq'_n}{E\delta n}, \\
 A_{2n} &= B_{2n} = -\frac{(1+\mu)(q'_n - \tau'_n)}{E\delta}.
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения постоянных A_0 , A_{1n} , A_{2n} , B_{1n} , B_{2n} в выражения для u и v , найдем

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{(1-\mu^2) Px}{2\pi R\delta_1 E_1} + \frac{R}{E_1\delta_1} \sum_n \frac{q'_n}{n} \left\{ -\left[2 + \frac{(1+\mu)nx}{R} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\tau'_n}{q'_n} \left[1 - \mu + \frac{(1+\mu)nx}{R} \right] \right\} e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi, \\
 v_1 &= -\frac{R}{E_1\delta_1} \sum_n \frac{q'_n}{n} \left\{ -\left[1 - \mu - \frac{(1+\mu)nx}{R} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\tau'_n}{q'_n} \left[2 - \frac{(1+\mu)nx}{R} \right] \right\} e^{-\frac{nx}{R}} \sin n\varphi.
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Индексом 1 обозначены величины, относящиеся к оболочке I, а индексом 2 — к оболочке II.

Имея выражения для перемещений u_1 и v_1 , можно написать выражения для напряжений, используя известные зависимости, вытекающие из закона Гука:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{R \partial \varphi} \right),$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{x\varphi} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Подставляя сюда соответствующие производные от u_1 и v_1 , получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= \frac{P}{2\pi R b_1} + \frac{1}{b_1} \sum_n q'_n \left[1 + \left(1 - \frac{\tau'_n}{q'_n} \right) \frac{nx}{R} \right] e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi, \\ \sigma_{\varphi 1} &= \frac{\mu P}{2\pi R b_1} + \frac{1}{b_1} \sum_n q'_n \left[\left(1 - \frac{2\tau'_n}{q'_n} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\tau'_n}{q'_n} \right) \frac{nx}{R} \right] e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi, \\ \sigma_{x\varphi 1} &= \frac{1}{b_1} \sum_n q'_n \left[\frac{nx}{R} + \frac{\tau'_n}{q'_n} \left(1 - \frac{nx}{R} \right) \right] e^{-\frac{nx}{R}} \sin n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Получив выражения для перемещений и напряжений оболочки I, можно по аналогии, не повторяя промежуточных выкладок, написать соответствующие выражения и для оболочки II, имея при этом в виду, что свободный член в разложении для нормального усилия q_{2n} равен нулю ($q'_0 = 0$) и что координата x отсчитывается от нуля в сторону отрицательных значений. Кроме того, касательное усилие τ'_n направлено в сторону противоположную τ'_n .

Сделав эти замечания, для оболочки II можно написать

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -\frac{R}{E_2 b_2} \sum_n \frac{q'_n}{n} \left\{ -\left[2 - \frac{(1 + \mu) nx}{R} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau'_n}{q'_n} \left[1 - \mu - \frac{(1 + \mu) nx}{R} \right] \right\} e^{\frac{nx}{R}} \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{R}{E_2 b_2} \sum_n \frac{q_n^*}{n} \left\{ - \left[1 - \mu + \frac{(1 + \mu) n x}{R} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\tau_n^*}{q_n^*} \left[2 + \frac{(1 + \mu) n x}{R} \right] \right\} e^{\frac{n x}{R}} \sin n \varphi, \\
 v_{x1} &= - \frac{1}{b_2} \sum_n q_n^* \left[1 - \left(1 + \frac{\tau_n^*}{q_n^*} \right) \frac{n x}{R} \right] e^{\frac{n x}{R}} \cos n \varphi, \\
 v_{\varphi 1} &= - \frac{1}{b_2} \sum_n q_n^* \left[\left(1 + \frac{2 \tau_n^*}{q_n^*} \right) + \left(1 + \frac{\tau_n^*}{q_n^*} \right) \frac{n x}{R} \right] e^{\frac{n x}{R}} \cos n \varphi, \\
 v_{x \varphi 1} &= - \frac{1}{b_2} \sum_n q_n^* \left[- \frac{n x}{R} - \frac{\tau_n^*}{q_n^*} \left(1 + \frac{n x}{R} \right) \right] e^{\frac{n x}{R}} \sin n \varphi.
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

В этих выражениях значения x следует брать с минусом.

Теперь перейдем к рассмотрению напряженного состояния подкрепляющего кольца. При этом будем исходить из обычной теории изгиба балок. Это можно считать вполне допустимым в данной задаче хотя бы потому, что зона влияния сосредоточенной силы в окружном направлении имеет резко выраженный местный характер и концентрация усилий q_n^* , q_n^* , τ_n^* , τ_n^* происходит на сравнительно небольшой части кольца. С учетом этого замечания напомним выражение для полной энергии кольца

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \frac{EJ}{2R^3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dv_\kappa}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi + R \int_0^{2\pi} (q_1 + q_2) v_\kappa d\varphi - \\
 &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} (\tau_1 + \tau_2) R d\varphi \cdot h \frac{dv_\kappa}{R d\varphi} - P(v_\kappa)_{\varphi=0},
 \end{aligned}$$

где J , R — центральный момент инерции и радиус кольца. Момент инерции вычисляется относительно оси, лежащей в плоскости кольца.

Первым членом здесь представлена упругая энергия деформации изгиба кольца. Остальными слагаемыми представлена работа внешних сил: нормальных сил q_1 , q_2 , касательных сил τ_1 , τ_2 и внешней силы P .

Нормальные силы q_1 , q_2 производят работу на прогибах кольца v_κ из его плоскости; касательные силы τ_1 , τ_2 — на удлинении крайних волокон кольца, равного $h \frac{dv_\kappa}{R d\varphi}$, где h — половина высоты кольца; сила P производит работу на перемеще-

нии кольца v_k в точке $\varphi=0$. Знак плюс во втором слагаемом взят потому, что силы q_1, q_2 направлены в сторону, противоположную положительному перемещению v_k . Два последних слагаемых взяты со знаком минус, поскольку направления сил τ_1, τ_2 и P совпадают с соответствующими перемещениями.

Теперь необходимо подобрать подходящее выражение для v_k с неопределенными коэффициентами и затем определить их так же, как при рассмотрении оболочки. Это перемещение можно представить рядом Фурье

$$v_k = \sum_n C_n \cos n\varphi.$$

Свободный член здесь опущен, так как он отражает перемещение кольца как твердого тела.

Подставив выражение для v_k , а также выражения для q_1 и τ_1 и аналогичные им выражения для q_2 и τ_2 , которые могут быть представлены в виде

$$q_2 = \sum_n q_n^* \cos n\varphi, \quad \tau_2 = \sum_n \tau_n^* \sin n\varphi \quad (7.24)$$

(и которые уже использовались при определении перемещений u_2, v_2), в выражение для энергии кольца, после взятия квадрата получим

$$\mathcal{E} = \frac{\pi J E C_n^2 n^4}{2R^3} + \pi R (q_n^* + q_n^*) C_n - \pi h (\tau_n^* + \tau_n^*) n C_n - P C_n.$$

Параметр C_n найдем из условия $\frac{d\mathcal{E}}{dC_n} = 0$:

$$C_n = \frac{[P - \pi R (q_n^* + q_n^*) + \pi h (\tau_n^* + \tau_n^*) n] R^3}{\pi J E n^4}.$$

Подставив C_n в выражение v_k , получим

$$v_k = \frac{R^3}{\pi J E} \sum_n \frac{[P - \pi R (q_n^* + q_n^*) + \pi h (\tau_n^* + \tau_n^*) n] \cos n\varphi}{n^4}. \quad (7.25)$$

Таким образом, получив все необходимые данные для неизвестных усилий q_n^*, q_n^*, τ_n^* и τ_n^* , можно для их определения составить следующие четыре условия сопряжения оболочек I и II с кольцом:

$$\begin{aligned} -(u_1)_{x=0} &= v_k; & -(\varepsilon_{\varphi_1})_{x=0} &= \varepsilon_k; \\ (u_2)_{x=0} &= v_k; & (\varepsilon_{\varphi_2})_{x=0} &= \varepsilon_k, \end{aligned}$$

где ε_k — относительное удлинение наиболее удаленных волокон кольца, которые примыкают к оболочкам I и II.

Первые два условия выражают равенство линейных перемещений оболочек I и II с перемещениями кольца по месту их стыка, вторые же два — равенство относительных деформаций оболочек и кольца.

Выражения для $(\varepsilon_{\varphi_1})_{x=0}$, $(\varepsilon_{\varphi_2})_{x=0}$ и ε_k имеют вид

$$(\varepsilon_{\varphi_1})_{x=0} = \left(\frac{dv_1}{Rd\varphi} \right)_{x=0} = -\frac{1}{E_1 b_1} \sum_n [-(1-\mu) q'_n + 2\tau'_n] \cos n\varphi,$$

$$(\varepsilon_{\varphi_2})_{x=0} = \left(\frac{dv_2}{Rd\varphi} \right)_{x=0} = -\frac{1}{E_2 b_2} \sum_n [-(1-\mu) q'_n - 2\tau'_n] \cos n\varphi,$$

$$\varepsilon_k = \frac{\varphi}{E} = \frac{M}{WE} = \frac{R}{\pi E W} \sum_n \frac{1}{n^2} [P - \pi R (q'_n + q''_n) + \\ + \pi h (\tau'_n + \tau''_n) n] \cos n\varphi,$$

где W — момент сопротивления кольца изгибу.

Последнее выражение получено из известного в теории изгиба балок соотношения

$$M = -EJ \frac{d^2 v_k}{R^2 d\varphi^2}.$$

Знак минус здесь взят потому, что распределенная по кольцу нагрузка направлена в сторону, противоположную принятому положительному направлению координаты y для кольца (см. рис. 130).

Условия сопряжения оболочки и кольца в развернутом виде могут быть записаны следующим образом:

$$-\frac{1}{E_1 b_1} [-2q'_n + (1-\mu) \tau'_n] = \frac{R^2 A}{\pi E_0 J n^3},$$

$$-\frac{1}{E_2 b_2} [-2q'_n - (1-\mu) \tau'_n] = \frac{R^2 A}{\pi E_0 J n^3},$$

$$\frac{1}{E_1 b_1} [-(1-\mu) q'_n + 2\tau'_n] = \frac{RA}{\pi E_0 W n^2},$$

$$\frac{1}{E_2 b_2} [-(1-\mu) q'_n - 2\tau'_n] = \frac{RA}{\pi E_0 W n^2},$$

где

$$A = P - \pi R (q'_n + q''_n) + \pi h (\tau'_n + \tau''_n) n.$$

В этих уравнениях индекс 0 относится к кольцу, остальные индексы объяснены ранее.

Решая полученные уравнения относительно q'_n , q''_n , τ'_n и τ''_n , получим

$$q'_n = \frac{P}{2\pi R \frac{E_0}{E_1} \left[\frac{1}{2} \frac{E_1}{E_0} \left(1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right) + \frac{J n^3}{R^3 \delta_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{E_1 h n}{2 E_0 R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right) \right]},$$

$$q_n = \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} q'_n, \quad \tau'_n = \frac{q'_n}{k}, \quad \tau_n = -\frac{q_n}{k},$$

где

$$k = \frac{1 - \mu + \frac{2RW}{Jn}}{2 + \frac{(1-\mu)RW}{Jn}} = \frac{1 - \mu + \frac{2R}{nh}}{2 + \frac{(1-\mu)R}{nh}},$$

Подставляя найденные значения q'_n , q_n , τ'_n и τ_n в выражения (7.18)–(7.25), будем иметь

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{P}{2\pi R} + \frac{P}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right)}; \\ \tau_1 &= \frac{P}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{k \left[1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right) \right]}; \\ q_2 &= \frac{P E_2 \delta_2}{\pi R E_1 \delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right)}; \\ \tau_2 &= -\frac{P E_2 \delta_2}{\pi R E_1 \delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{k \left[1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right) \right]}; \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$u_1 = \frac{(1-\mu^2) P x}{2\pi R \delta_1 E_1} +$$

$$+ \frac{P}{\pi E_1 \delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left[2 + \frac{(1+\mu) n x}{R} \right] + \frac{1}{k} \left[1 - \mu + \frac{(1+\mu) n x}{R} \right] \right\} e^{-\frac{n x}{R}} \cos n\varphi;$$

$$v_1 = -\frac{P}{\pi E_1 \delta_1} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left[1 - \mu - \frac{(1+\mu) n x}{R} \right] + \frac{1}{k} \left[2 - \frac{(1+\mu) n x}{R} \right] \right\} e^{-\frac{n x}{R}} \sin n\varphi;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_1} &= \frac{P}{2\pi R\delta_1} + \\
&+ \frac{P}{\pi R\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{nx}{R}\right] e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi}{1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)}; \\
\sigma_{x_1} &= \frac{\mu P}{2\pi R\delta_1} + \\
&+ \frac{P}{\pi R\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - \frac{2}{k} - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{nx}{R}\right] e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi}{1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)}; \\
\sigma_{x_{\varphi_1}} &= \frac{P}{\pi R\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{nx}{R} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{nx}{R}\right)\right] e^{-\frac{nx}{R}} \sin n\varphi}{1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)};
\end{aligned}
\tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \\
&= -\frac{P}{\pi E_1\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{-\left[2 - \frac{(1+\mu)nx}{R}\right] + \frac{1}{k}\left[1 - \mu - \frac{(1+\mu)nx}{R}\right]\right\} e^{\frac{nx}{R}} \cos n\varphi}{n \left[1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)\right]}; \\
v_2 &= \frac{P}{\pi E_1\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{-\left[1 - \mu + \frac{(1+\mu)nx}{R}\right] + \frac{1}{k}\left[2 + \frac{(1+\mu)nx}{R}\right]\right\} e^{\frac{nx}{R}} \sin n\varphi}{n \left[1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)\right]}; \\
\sigma_{A_1} &= -\frac{PE_2}{\pi R\delta_1 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{nx}{R}\right] e^{\frac{nx}{R}} \cos n\varphi}{1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)}; \\
\tau_{x_1} &= -\frac{PE_2}{\pi R\delta_1 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - \frac{2}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{nx}{R}\right] e^{\frac{nx}{R}} \cos n\varphi}{1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)}; \\
\sigma_{x_{\varphi_1}} &= -\frac{PE_2}{\pi R\delta_1 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - \frac{nx}{R} + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{nx}{R}\right)\right] e^{\frac{nx}{R}} \sin n\varphi}{1 + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1} + \frac{2JE_0n^3}{R^3\delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\right)};
\end{aligned}
\tag{7.27}$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \frac{2P}{\pi E_1 \delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) \cos n\varphi}{n \left[1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1}\right) \right]}, \\ M &= \frac{2J E_0 P}{\pi R^2 \delta_1 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) \cos n\varphi}{1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1}\right)}. \end{aligned} \right\} (7.27')$$

Наличие в выражении для σ_{φ} первого члена связано с предположением об отсутствии прогиба оболочки ($w=0$) при нагружении ее аксиальной сосредоточенной силой. Предполагается, что оболочка как бы находится под действием не только силы P , но и постоянного внутреннего давления интенсивностью $q = \frac{\mu P}{2\pi R^2}$, от которого и получилась постоянная составляющая напряжения σ_{φ} . В действительности внутреннее давление отсутствует. Поэтому необходимо к полученному выражению для σ_{φ} прибавить кольцевые напряжения от наружного равномерного давления интенсивностью $q = -\frac{\mu P}{2\pi R^2}$ с учетом того, что один конец рассматриваемой оболочки жестко заделан в кольцо.

В этом случае для расчета оболочки будем исходить из дифференциального уравнения (7.17)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{q_z}{D},$$

где

$$4k^4 = \frac{E_1 \delta_1}{D_1 R} = \frac{12(1-\mu^2)}{\delta_1^3 R^2}.$$

Решением данного уравнения в рассматриваемом случае будет

$$w = \frac{q_z}{4k^4 D_1} + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx).$$

Начало координат поместим в сечении, совпадающем с заделкой оболочки. Определяя постоянные C_3 и C_4 из условий

$w=0, \frac{dw}{dx}=0$ при $x=0$, получим

$$w = \frac{q_z}{4k^4 D_1} [1 - e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)].$$

Кольцевые напряжения при этом будут

$$\sigma_{\varphi}^* = E_1 \frac{w}{R} = \frac{E_1 q_z}{4Rk^4 D_1} [1 - e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)].$$

Подставляя сюда $q_z = -\frac{\mu P}{2\pi R^2}$, получим

$$\sigma_{\varphi}^* = -\frac{\mu P}{2\pi R \delta_1} [1 - e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)]. \quad (7.28)$$

Складывая эти напряжения с напряжением σ_{φ_1} , будем иметь

$$\sigma_{\varphi_1} = \frac{\mu P}{2\pi R \delta_1} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) + \\ + \frac{P}{\pi R \delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - \frac{2}{k} - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{nx}{R}\right] e^{-\frac{nx}{R}} \cos n\varphi}{1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2JE_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1}\right)}. \quad (7.29)$$

Формулами (7.26) — (7.29) представлены все компоненты напряженного и деформированного состояния оболочки, а также внутренние усилия в месте стыка оболочки и кольца и изгибающий момент, действующий в кольце.

Как показывают численные расчеты, полученные ряды сходятся довольно быстро, за исключением ряда, входящего в выражение для изгибающего момента кольца.

Получим другое выражение для изгибающего момента кольца, более удобное для практических расчетов. Для этого используем известную дифференциальную зависимость, устанавливающую связь между производной от момента и перерезывающей силой.

В нашем случае это будет

$$Q = \frac{dM}{Rd\varphi},$$

где

$$Q = \int q R d\varphi + D_1.$$

Здесь под q надо понимать распределенную по кольцу нагрузку, т. е.

$$q = q_1 + q_2 + q_3,$$

где

$$q_1 + q_2 = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n^* + q_n^*) \cos n\varphi,$$

а q_3 — проекция касательных усилий τ_1 и τ_2 на направление оси y . Эта составляющая

$$q_3 = \tau_1 \frac{dv_k}{Rd\varphi} - \tau_2 \frac{dv_k}{Rd\varphi} = - \frac{C_n (\tau'_n - \tau''_n) n \sin^2 n\varphi}{R}.$$

Сюда следует подставить абсолютные значения τ'_n и τ''_n , так как их знаки уже учтены при составлении выражения для q_3 . а в выражении C_n их следует брать по формулам (7.26).

Тогда будем иметь

$$q = q'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (q'_n + q''_n) \cos n\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n (\tau'_n - \tau''_n) n \sin^2 n\varphi}{R};$$

$$Q = R \int \left[q'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (q'_n + q''_n) \cos n\varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} C_n n (\tau'_n - \tau''_n) \sin^2 n\varphi \right] d\varphi + D_1.$$

После интегрирования этого выражения получим

$$Q = R \left[q'_0 \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (q'_n + q''_n) \sin n\varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} C_n n (\tau'_n - \tau''_n) \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4n} \sin 2n\varphi \right) \right] + D_1.$$

Постоянную интегрирования D_1 определим из условия, что при $\varphi=0$ должно быть $Q = -\frac{P}{2}$. Тогда

$$Q = R \left[q'_0 \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (q'_n + q''_n) \sin n\varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} C_n n (\tau'_n - \tau''_n) \left(\varphi - \frac{1}{2n} \sin 2n\varphi \right) \right] - \frac{P}{2}.$$

Теперь можно подсчитать изгибающий момент:

$$M = R \int Q d\varphi + D_2.$$

Подставив сюда значение Q и произведя интегрирование, получим выражение

$$M = R \left\{ R \left[\frac{1}{2} q_0' \varphi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (q_n' + \dot{q}_n) \cos n\varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4R} \sum_{n=1}^{\infty} C_n n (\tau_n' - \tau_n) \left(\varphi^2 - \frac{1}{2n^2} \cos 2n\varphi \right) \right] - \frac{1}{2} P\varphi \right\} + D_2.$$

Для определения постоянной интегрирования D_2 используем условие, что при $\varphi=0$ должно быть $M=M_0$, где M_0 — момент в корневом сечении кольца. Из этого условия получаем

$$D_2 = M_0 + R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (q_n' + \dot{q}_n) + \frac{R}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n (\tau_n' - \tau_n)}{n}.$$

Следовательно,

$$M = \frac{1}{2} q_0' R^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} P R \varphi + 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (q_n' + \dot{q}_n) \sin^2 \frac{n\varphi}{2} + \\ + \frac{1}{4} R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} (\tau_n' - \tau_n) (\sin^2 n\varphi - n^2 \varphi^2) + M_0.$$

Момент M_0 пока остается неизвестным. Чтоб определить его, будем исходить из условия, что корневое сечение кольца вследствие симметрии нагружения не поворачивается. Составим для определения этого момента выражение энергии деформации полукольца

$$\mathcal{E} = \frac{R}{2E_0 J} \int_0^{\pi} M^2 d\varphi.$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{R}{2E_0 J} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} q_0' R^2 \varphi^2 - \frac{P R \varphi}{2} + 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (q_n' + \dot{q}_n) \sin^2 \frac{n\varphi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} (\tau_n' - \tau_n) (\sin^2 n\varphi - n^2 \varphi^2) + M_0 \right]^2 d\varphi.$$

Продифференцируем выражение под знаком интеграла по M_0 и производную приравняем нулю:

$$\int_0^\pi \left[\frac{1}{2} q_0 R^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} P R \varphi + 2 R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (q'_n + q_n) \sin^2 \frac{n\varphi}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} (\tau'_n - \tau_n) (\sin^2 n\varphi - n^2 \varphi^2) + M_0 \right] d\varphi = 0.$$

Из этого выражения после интегрирования получим

$$M_0 = \frac{\pi^2 R^2 q_0}{6} + \frac{\pi R P}{4} - R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (q'_n + q_n) - \\ - \frac{1}{4} R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} (\tau'_n - \tau_n) \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2 n^2}{3} \right).$$

Тогда, учитывая приведенные выше выражения для q'_n , q_n , q_0 , τ'_n , τ_n , окончательно

$$M = \frac{\pi R P}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\varphi}{\pi} + \frac{\varphi^2}{2\pi^2} \right) - \\ - \frac{P R \left(1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2 \left[1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right) \right]} \\ - \frac{P^2 \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right)}{4\pi E_1 \delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) \left[\cos 2n\varphi + 2n^2 \left(\varphi^2 - \frac{1}{3} \pi^2 \right) \right]}{n^2 k \left[1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2J E_0 n^3}{R^3 \delta_1 E_1} \left(1 - \frac{1-\mu}{2k} \right) - \frac{h n}{R k} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} \right) \right]}.$$

Как показывают расчеты, в последнем выражении для момента M ряды сходятся быстрее, чем по формуле (7.27').

Структура всех приведенных формул получилась достаточно сложной и поэтому не представляется возможным сделать какие-либо общие выводы о напряженном и деформированном состоянии рассматриваемой системы. Поэтому были проведены расчеты некоторых конструкций. На рис. 131—135 для иллюстрации приведены кривые для напряжений σ_x и σ_r , полученные при расчете оболочки, подкрепленной кольцом, при различных предположениях относительно материала кольца и оболочки, а также с учетом и без учета касательных усилий, действующих в месте стыка кольца с оболочкой. Если касательные

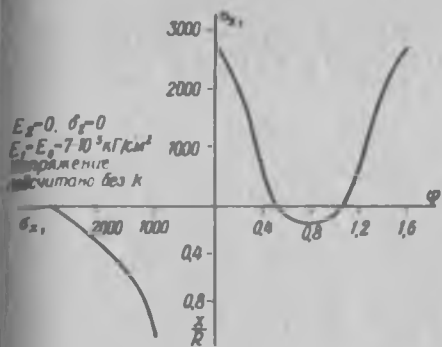


Рис. 131.

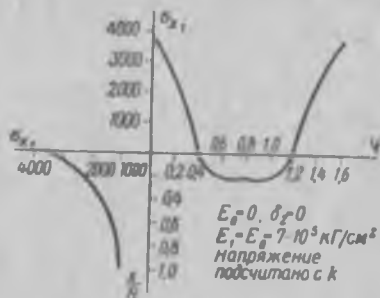


Рис. 132.

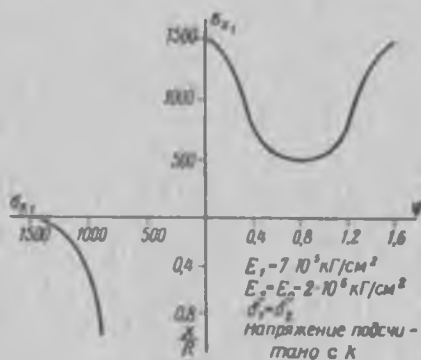


Рис. 133.

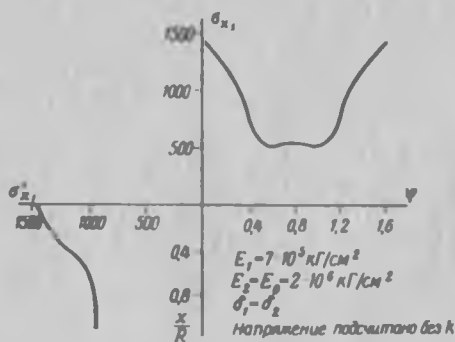


Рис. 134.

усилия не учитываются, то во всех формулах следует отбросить члены, содержащие величину k .

Кривые напряжений построены для случая действия одновременно четырех сил, расположенных под углом 90° друг к другу.

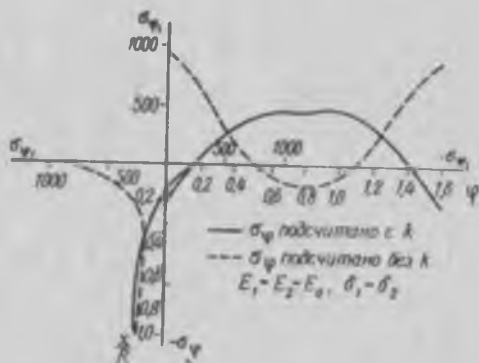


Рис. 135.

Если оболочка II отсутствует ($E_2=0$, $\delta_2=0$) и не учитываются касательные усилия в месте оболочки и кольца, то формулы для оболочки I и для изгибающего момента кольца (7.26) и (7.27) переходят в формулы для балки на упругом основании. Причем в эти формулы следует подставить $R=l/\pi$, $\varphi=\pi y/l$, $\delta_1=1$, где l — половина ширины пластины.

Из приведенных кривых напряжений σ_{x_1} , σ_{φ_1} можно сделать некоторые практические выводы.

1. Наличие оболочки II резко снижает концентрацию мембранных напряжений. Поэтому при наличии в конструкции этой оболочки она должна быть проверена на устойчивость от действия сосредоточенной силы P .

2. Учет касательных усилий в месте стыка кольца с оболочкой существенно сказывается на величине и характере распределения напряжений в оболочке.

3. На расстоянии радиуса от места приложения силы P происходит почти полное выравнивание напряжений по сечению оболочки. Отсюда следует вывод, что полученные формулы применимы и к оболочкам, если их длина удовлетворяет условию $l \geq R$.

РАСЧЕТ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСЕВЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ НАГРУЗКИ

В данной главе рассмотрен порядок расчета цилиндрической оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами и нагруженной изгибающими моментами, осевой и поперечной силами. Будем считать, что обшивка рассматриваемой оболочки достаточно тонкая, способная терять устойчивость задолго до разрушения всей конструкции в целом (элементов силового набора). После потери устойчивости обшивка практически выключается из работы и не воспринимает нормальные напряжения от изгибающих моментов и осевых сил. Только узкие полоски обшивки, прилегающие к стрингерам, будут участвовать в восприятии нормальных напряжений. Однако обшивка будет в состоянии работать на поперечные нагрузки, передавая сдвигающие от них усилия на подкрепляющий набор.

Из сказанного следует, что тонкая обшивка неэффективно используется как несущий элемент конструкции.

Несмотря на это, оболочки с тонкой обшивкой находят применение в технике ввиду того, что, как показывают сравнительные расчеты, подкрепленные оболочки в весовом отношении получаются более выгодными, чем неподкрепленные, с толстой обшивкой.

§ 39. ЭФФЕКТИВНАЯ ШИРИНА ОБШИВКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО СЖАТИЯ И ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

В § 12 была получена формула для эффективной ширины пластины в предположении, что она свободна от поперечной нагрузки.

В данном параграфе выведена аналогичная формула для цилиндрической панели с учетом действия на нее поперечной распределенной нагрузки. Влияние этой нагрузки на приведенную ширину будем учитывать через меридиональные и окружные напряжения, возникающие в цилиндрической оболочке от давления наддува и гидростатического столба жидкости. Для решения поставленной задачи применим уравнения (7.10)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{E\delta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

где

$$N_x^0 = -\frac{q_n R}{2} + N_{кр},$$

$$N_y^0 = -qR, \quad q = q_n + \gamma h,$$

q_n — давление наддува;

h — высота столба жидкости над рассматриваемым сечением;

$N_{кр}$ — критическое значение осевого сжимающего усилия.

Будем предполагать, что обшивка жестко прикреплена к стрингерам в своей плоскости, но может свободно поворачиваться вместе со стрингером вокруг его оси. Этим условиям на контуре панели будут удовлетворять следующие выражения для прогиба и функции напряжений:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi \theta}{\theta_0},$$

$$\varphi = B \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi \theta}{\theta_0},$$

где θ_0 — центральный угол, ограничивающий искомую ширину обшивки, прилегающую к двум смежным стрингерам.

Подставим принятые выражения для w и φ , а также N_x^0 и N_y^0 в исходные уравнения. Из условия равенства нулю определителя этих уравнений было получено

$$N_{кр} = \frac{E\lambda^2}{R^2 \left[\lambda^2 + \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2} + D \frac{\left[\lambda^2 + \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2}{R^2 \lambda^2} + qR \frac{\left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2}{\lambda^2} + \frac{q_n R}{2},$$

где $\lambda = \left(\frac{\pi \pi R}{l} \right)^2$ — параметр волнообразования.

Правая часть полученного выражения состоит из слагаемых, характеризующих энергию растяжения и изгиба оболочки и работу поперечной нагрузки (давления). При рассмотрении узкой полоски панели, прилегающей к стрингеру, ее потенциальная энергия будет в основном состоять из энергии изгиба. Поэтому для приближенного решения задачи представляется возможным отбросить первый член в правой части этого выражения. Тогда

$$N_{кр} = \frac{D}{R^2} \cdot \frac{\left[x + \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2}{x} + qR \frac{\left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2}{x} + \frac{q_n R}{2},$$

где

$$x = \lambda^2.$$

Минимум усилия $N_{кр}$ по параметру x будет

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{\delta} = \frac{2D}{R^2\delta} \left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 + \frac{2D}{R^2\delta} \frac{\pi}{\theta_0} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 + \frac{qR^3}{D}} + \frac{q_n R}{2\delta}.$$

Для определения угла θ_0 имеем условие

$$\varepsilon_{об}^{кр} = \varepsilon_{стр}^{кр},$$

выражающее равенство относительных деформаций стрингера и прилегающей к нему обшивки. В развернутом виде это условие

$$\frac{2D}{R^2\delta} \frac{\pi}{\theta_0} \left[\frac{\pi}{\theta_0} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{\theta_0} \right)^2 + \frac{qR^3}{D}} \right] + \frac{q_n R}{2\delta} = \varepsilon_{стр}^{кр}.$$

Решая полученное уравнение относительно θ_0 , найдем при $\mu=0,3$ следующее значение для эффективной ширины обшивки:

$$R\theta_0 = 2C = 1,9\delta \sqrt{\frac{E}{\sigma_{стр}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{qR}{\delta\sigma_{стр}} - \frac{q_n R}{2\delta\sigma_{стр}}}{1 - \frac{q_n R}{\delta\sigma_{стр}}}}.$$

Полагая в этой формуле $q=0$, $q_n=0$, получим известную формулу эффективной ширины плоской пластины.

§ 40. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЕЕ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ОСЕВОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛАМИ

Расчет цилиндрической подкрепленной оболочки от действия изгибающих моментов и осевой силы (рис. 136) основан на известной формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_x y_I}{J_{x\text{ пр}}} \pm \frac{M_y x_I}{J_{y\text{ пр}}} - \frac{N}{F_{\text{пр}}},$$

где M_x , M_y — изгибающие моменты в сечении относительно главных осей Ox , Oy ;

N — равнодействующая осевая сила в сечении;

$J_{x\text{ пр}}$, $J_{y\text{ пр}}$, $F_{\text{пр}}$ — приведенные моменты инерции и площадь поперечного сечения;

x_I , y_I — координаты центров тяжести элементов сечения относительно главных осей Ox , Oy .

Приведенные площадь и моменты инерции для растянутой зоны сечения определяются по выражениям

$$F_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n F_{\text{пр } i},$$

$$F_{\text{нр } i} = F_{\text{стр } i} + 0,8b_i\delta_i, \quad (8.1)$$

$$J_{x \text{ нр}} = \sum_{i=1}^n F_{\text{нр } i} y_i^2,$$

$$J_{y \text{ нр}} = \sum_{i=1}^n F_{\text{нр } i} x_i^2,$$

где $F_{\text{стр } i}$ — площадь сечения i -го стрингера;
 b_i — расстояние между стрингерами;
 δ_i — толщина обшивки;
 i — порядковый номер стрингера.

Коэффициентом ¹ 0,8 во второй из приведенных формул учитывается то обстоятельство, что обшивка, получив начальные неправильности при изготовлении оболочки, не полностью включается в работу для восприятия действующих нагрузок.

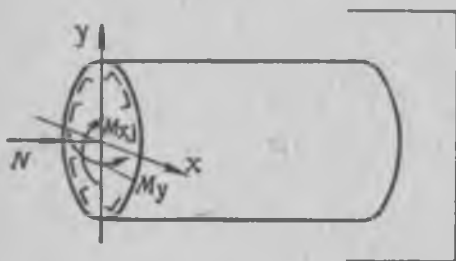


Рис. 136.

В сжатой зоне сечения для приведенной площади и моментов инерции имеем следующие выражения:

$$F_{\text{нр}} = \sum_{i=1}^n F_{\text{нр } i}, \quad F_{\text{нр } i} = F_{\text{стр } i} + (2C)_{\text{нр } i} \delta_{\text{об } i}, \quad (8.2)$$

$$J_{x \text{ нр}} = \sum_{i=1}^n F_{\text{нр } i} y_i^2, \quad J_{y \text{ нр}} = \sum_{i=1}^n F_{\text{нр } i} x_i^2,$$

где $(2C)_{\text{нр } i}$ — эффективная ширина обшивки, которая определяется по последней формуле предыдущего параграфа. Если обшивка в рассматриваемой зоне теряет устойчивость от сдвига, то эффективную ширину обычно уменьшают в 2 раза.

Для того чтобы выполнить приведенный выше расчет, необходимо знать положение главных центральных осей инерции x , y сечения. При расчете в первом приближении вначале определяют сжимающие напряжения в рассматриваемой оболочке от действия нагрузки, равной

$$T_{\text{экр}} = \left(\frac{4M_x}{D} + \frac{4M_y}{D} + N \right) f, \quad (8.3)$$

¹ Величина этого коэффициента установлена экспериментально.

где f — принятый для расчета коэффициент безопасности;
 D — диаметр оболочки.

Тогда напряжение сжатия

$$\sigma_{\text{сж}}^p = \frac{T_{\text{вкн}}^p}{F},$$

где F — полная площадь сечения оболочки.

Учетверенные произведения изгибающих моментов, деленные на диаметр оболочки, стоящие в правой части выражения (8.3), по эффекту в сжатой зоне оболочки эквивалентны равномерным сжимающим силам.

После подсчета напряжения $\sigma_{\text{вкн}}^p$ его сравнивают с критическим напряжением сжатия для цилиндрической панели, которое определяется по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = 0,15E \frac{\delta}{R} + 3,6E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2, \quad (8.4)$$

где δ , R — толщина и радиус оболочки;

b — расстояние между стрингерами.

Эта формула, по-видимому, является полуэмпирической. Она нашла широкое применение при расчетах авиационных конструкций.

Если рассматриваемая оболочка находится под действием внутреннего давления, то для определения критического напряжения сжатия можно получить формулу

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}}^0 + \frac{qR}{\delta} \left(1 - \frac{\frac{qR}{\delta}}{\sigma_x - \sigma_{\text{кр}}^0} \right) + \frac{q_n R}{2\delta},$$

где $\sigma_{\text{кр}}^0$ определяется по выражению (8.4). Остальная часть этой формулы построена на основании теоремы о выпуклых поверхностях устойчивости (см. гл. XVII).

Если на рассматриваемую часть оболочки действуют и касательные напряжения, то в этом случае можно построить гиперплоскость в трехмерном пространстве.

Из сравнения $\sigma_{\text{вкн}}^p$ и $\sigma_{\text{кр}}$ устанавливается возможность потери устойчивости обшивки в сжатой зоне оболочки, после чего определяются координаты центра тяжести всего сечения по формулам

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum_{l=1}^n F_{\text{нр}} l x_l}{\sum_{l=1}^n F_{\text{нр}} l}; \quad y_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum_{l=1}^n F_{\text{нр}} l y_l}{\sum_{l=1}^n F_{\text{нр}} l},$$

где $x_{\text{ц.т.}}$, $y_{\text{ц.т.}}$ — расстояние от геометрического центра сечения оболочки по направлению осей x , y до центра

тяжести сечения после потери устойчивости обшивки;
 F_{np} — площадь сечения оболочки, подсчитываемая по формулам (8.1) — (8.2).

После определения $x_{ц.т.}$, $y_{ц.т.}$ можно приступить к определению напряжений в подкрепленной оболочке при действии на нее изгибающих моментов и осевых сил.

Определение касательных и дополнительных нормальных напряжений в элементах подкрепленной цилиндрической оболочки при нагружении ее поперечной силой. Если обшивка подкрепленной оболочки теряет устойчивость от действия поперечной силы, то происходит дополнительное догружение силового набора нормальными напряжениями.

Для определения касательных напряжений в обшивке подкрепленной оболочки можно воспользоваться дифференциальными уравнениями безмоментной теории оболочек:

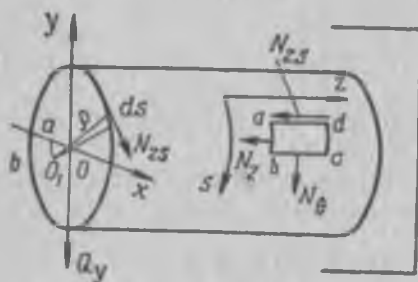


Рис. 137.

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial N_{zs}}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial N_{zs}}{\partial z} + \frac{\partial N_\theta}{\partial s} = 0, \quad (8.5)$$

$$N_\theta = q_y,$$

которые в данном случае записаны в координатах z, s (рис. 137).

Полагая здесь $q = \text{const}$, получим

$$N_{zs} = f(s),$$

где $f(s)$ — некоторая неизвестная функция дуги s .

Из первого уравнения (8.5) следует

$$f(s) = - \int \frac{\partial N_z}{\partial z} ds + N_{zs}^0$$

и

$$N_{zs} = - \int \frac{\partial N_z}{\partial z} ds + N_{zs}^0, \quad (8.6)$$

где N_{zs}^0 — постоянная интегрирования.

Под знаком интеграла в уравнении (8.6) стоит производная от нормального усилия, возникающего в оболочке от действия поперечной силы. Для определения N_z используем формулу, известную из курса сопротивления материалов:

$$N_z = \frac{M_x y_I}{J_{x np}} = \frac{Q_y z \delta y_I}{J_{x np}}.$$

Тогда

$$N_{zs} = - \frac{Q_y}{J_{x \text{ нп}}} \int y ds y_l + N_{zs}^0. \quad (8.7)$$

Это выражение является уравнением равновесия элемента $abcd$ в направлении оси z (см. рис. 137).

Неопределенный интеграл в (8.7) представляет собой статический момент площади abd относительно оси x . Таким образом, можно записать

$$N_{zs} = - \frac{Q_y S_x}{J_{x \text{ нп}}} + N_{zs}^0.$$

Для определения постоянной N_{zs}^0 составим уравнение моментов всех сил в сечении относительно некоторой точки O_1 :

$$Q_y a - \oint N_{zs} \varrho ds = 0$$

или

$$Q_y a + \frac{Q_y}{J_{x \text{ нп}}} \oint S_x \varrho ds - N_{zs}^0 \oint \varrho ds = 0,$$

откуда

$$N_{zs}^0 = \frac{Q_y a + \frac{Q_y}{J_{x \text{ нп}}} \oint S_x \varrho ds}{2F},$$

где $2F = \oint \varrho ds$ — удвоенная площадь, ограниченная средней линией поперечного сечения оболочки.

Так как при составлении уравнения моментов точка O_1 выбирается произвольно, то, помещая эту точку для удобства на линию действия силы Q_y , получим $Q_y a = 0$. Тогда

$$N_{zs}^0 = \frac{Q_y}{2E J_{x \text{ нп}}} \oint S_x \varrho ds.$$

В итоге для текущего значения касательного усилия имеем формулу

$$N_{zs} = \frac{Q_y}{2F J_{x \text{ нп}}} \oint S_x \varrho ds - \frac{Q_y S_x}{J_{x \text{ нп}}}.$$

Аналогичное соотношение можно написать и для случая действия поперечной силы Q_x

$$N'_{zs} = \frac{Q_x}{2F J_{y \text{ нп}}} \oint S_y \varrho ds - \frac{Q_x S_y}{J_{y \text{ нп}}}.$$

Касательные напряжения в оболочке

$$\tau^p = \frac{1}{b} (N_{zs} + N'_{zs}) f,$$

где f — принятый коэффициент безопасности.

При подсчете суммарного напряжения τ необходимо учитывать направления действия сил Q_x и Q_y .

После вычисления касательного напряжения τ^p необходимо сравнить его с критическим напряжением сдвига для данной оболочки. Это напряжение можно определить по полуэмпирической формуле

$$\tau_{кр} = 0,1E \frac{\delta}{R} + 5E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2.$$

Если в рассматриваемой части оболочки действуют нормальные напряжения сжатия от продольной силы и изгибающего момента и внутреннего давления, то их следует учесть при определении $\tau_{кр}$.

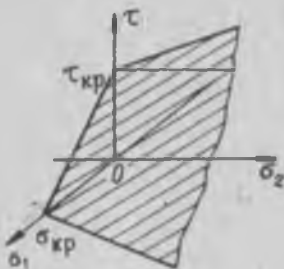


Рис. 138.

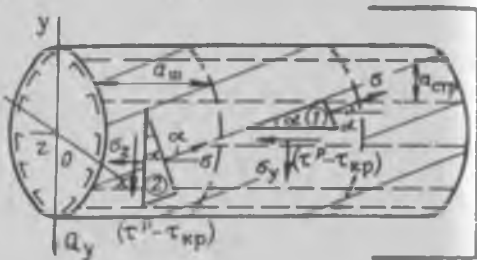


Рис. 139.

лении $\tau_{кр}$, воспользовавшись для этой цели теоремой о выпуклых поверхностях устойчивости (гл. XVII), на основании которой строится гиперплоскость в трехмерном пространстве. На рис. 138. приведенном в качестве примера.

$\sigma_{кр}$ — осевое критическое напряжение сжатия;

σ_2 — кольцевое растягивающее напряжение от внутреннего давления.

На тех участках оболочки, где произошла потеря устойчивости обшивки от сдвига (что видно из сравнения τ^p и $\tau_{кр}$), силовой набор дополнительно нагружается за счет разности касательных напряжений $(\tau^p - \tau_{кр})$. Обшивка «натягивается» по стрингерам и шпангоутам и дополнительно нагружает их. При этом оболочка в зоне сдвига будет работать как балка с тонкой стенкой (рис. 139).

Из условия равновесия элемента l в направлении оси x можно получить

$$(\tau^p - \tau_{кр}) \delta l = \sigma \delta l \sin \alpha \cos \alpha,$$

откуда для растягивающего напряжения в обшивке

$$\sigma = \frac{\tau^p - \tau_{кр}}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Напряжение, подсчитанное по этой формуле, используется при проверке обшивки на прочность. В противоположность этому в стрингерах будут возникать напряжения сжатия. Усилие, сжимающее стрингер, будет

$$Z = a_{\text{стр}} \cos \alpha \cdot \delta \sigma \cos \alpha = a_{\text{стр}} \delta (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда дополнительное напряжение сжатия в стрингере определится по выражению

$$\sigma_{\text{стр}}^z = \frac{Z}{F_{\text{стр}}} = \frac{a_{\text{стр}} \delta (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{ctg} \alpha}{F_{\text{стр}}}.$$

Кроме того, от напряжений σ стрингеры нагружаются и поперечным изгибом. Погонную нагрузку от действия этих напряжений можно определить из условия равновесия элемента 1 в направлении касательной к поперечному сечению оболочки:

$$\sigma_y s \delta = s \sin \alpha \delta \sigma \sin \alpha,$$

откуда

$$\sigma_y = (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha.$$

Аналогично из условия равновесия элемента 2 можно получить

$$\sigma_z = (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Напряжение в шпангоуте

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{a_{\text{ш}} \delta \sigma_y}{F_{\text{ш}}} = \frac{a_{\text{ш}} \delta (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha}{F_{\text{ш}}}.$$

Напряжения σ_y вызывают нагружение и стрингеров. Радиальная составляющая от этих напряжений будет

$$q = \sigma_y \delta \frac{a_{\text{стр}}}{R} = (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \delta \frac{a_{\text{стр}}}{R} \operatorname{tg} \alpha.$$

На рис. 140 представлена схема нагружения стрингеров распределенной нагрузкой q . Для уточнения решения данной задачи следовало бы рассмотреть совместную работу стрингеров и шпангоутов от действия нагрузки q . Однако это уточнение связано с серьезными трудностями вычисления. В практике инженерных расчетов, упрощая эту задачу, упругие опоры стрингеров заменяют шарнирными и схема расчета стрингера на поперечную нагрузку q сводится к элементарной задаче расчета балки на двух опорах (рис. 141). Иногда к расчету стрингера применяют теорему о трех моментах.

Суммарные напряжения в стрингерах

$$\sigma_{\text{стр}}^{\Sigma} = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} + \sigma_N + \sigma_z^q + \sigma_q,$$

где σ_{Mx} , σ_{My} , σ_N — напряжения от изгибающих моментов и осевой силы;
 σ_z , σ_y — дополнительные напряжения от поперечной силы Q_y .

Если на оболочку будет действовать поперечная сила Q_x , то от нее также необходимо определить дополнительные напряжения в стрингерах.

Полученные наибольшие сжимающие напряжения сравниваются с критическими напряжениями для стрингеров, которые обычно подсчитываются по формуле для плоской пластины:

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9kE}{\left(\frac{b}{\delta}\right)^2}$$

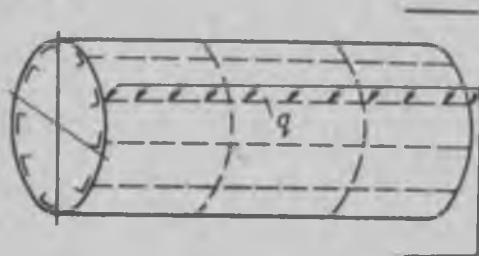


Рис. 140.

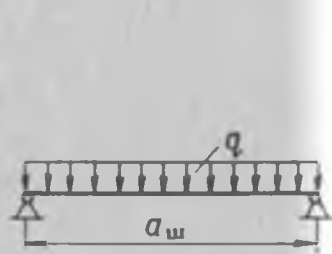


Рис. 141.

Если по этой формуле критические напряжения получаются выше предела пропорциональности, то их подсчет ведется по выражению

$$\sigma_{кр} = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_p) \frac{\frac{b}{\delta}}{\left(\frac{b}{\delta}\right)_{пр}}$$

где

$$\left(\frac{b}{\delta}\right)_{пр} = \sqrt{\frac{0,9kE}{\sigma_p}}$$

b — ширина полки стрингера;

k — коэффициент, зависящий от граничных условий пластинки.

Полученные значения критических напряжений по приведенным формулам при определении запаса прочности несколько уменьшают, учитывая тем самым неблагоприятное влияние на работу стрингера обшивки, потерявшей устойчивость. Это уменьшение критических напряжений на основании опыта можно принимать в следующих пределах:

на 10% при толщине обшивки $\delta = 0,5 \div 1,0$ мм

на 15% при толщине обшивки $\delta = 1,0 \div 1,5$ мм
 » 15—20% » » » $\delta = 1,5 \div 2,0$ »

Напряжения в шпангоутах, возникающие в связи с потерей обшивкой устойчивости, обычно не являются расчетными и не влияют на величину запаса прочности.

Запас прочности для стрингеров

$$\eta = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{стр}} \geq 1.$$

Этот запас прочности должен быть получен с учетом температур обшивки и силового набора. Учет температуры ведется путем соответствующего изменения механических характеристик материала по данным экспериментов.

Все результаты расчета для удобства вычислений и контроля вводятся в таблицу (табл. 8).

Таблица 8

№ стрингера	a_i	y_i	$F_{np i}$	$F_{np i y_i}$	p_i	$F_{np i y_i}^2$	$\Delta S_i = F_{np i} y_i$	$S_i = \sum \Delta S_i$	$ds = b$	$Q ds$	$S_i Q ds$	$\frac{1}{J_{x пр}} \frac{Q_y^p S_i}{J_{x пр}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Продолжение

II		I		I		I		I		I		I	
$\frac{Q_y^p}{2EI_{x пр}} \sum S_i Q ds$	$N_{z пр}^p = 1 - I$	$N_{z пр}^p = \frac{N_{z пр}^p}{\delta}$	$\tau_{стр i}$	σ_{Mx}	σ_N	σ_y^2	σ_z^2	$\sigma_{стр i}^2$	$\sigma_{стр i}^2$	$\sigma_{стр i}^2$	$\sigma_{стр i}^2$	$\sigma_{стр i}^2$	$\sigma_{стр i}^2$
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

$$y_{a, \tau} = \frac{\sum_{i=1}^n F_{np i} y_i}{\sum_{i=1}^n F_{np i}}$$

Для выполнения расчета по приведенным выше зависимостям необходимо знать угол наклона волны α после потери устойчивости обшивки от сдвига. Для определения этого угла воспользуемся энергетическим методом.

Потенциальная энергия деформации отдельно взятой панели прилегающей к ней силовым набором записывается в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\delta}{2E} \int_0^{a_{стр}} \int_0^{a_w} [\sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\sigma_y\sigma_z + 2(1+\mu)\tau^2] dz ds +$$

$$+ \int_0^{a_{\text{ш}}} \frac{N_{\text{стр}}^2 dz}{2EF_{\text{стр}}} + \int_0^{a_{\text{стр}p}} \frac{N_{\text{ш}}^2 ds}{2EF_{\text{ш}}} + \int_0^{a_{\text{ш}}} \frac{M^2 dz}{2EJ_{\text{стр}}}.$$

где первым двойным интегралом определяется энергия деформации обшивки, а вторым и третьим — энергия деформации участков стрингера и шпангоута. Последний интеграл определяет энергию изгиба стрингера распределенной нагрузкой q на участке между шпангоутами.

В приведенное выражение для энергии деформации следует подставить значения напряжений и усилий:

$$\sigma_y = (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha, \quad \sigma_z = (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{ctg} \alpha, \quad \tau = \tau^p - \tau_{\text{кр}},$$

$$N_{\text{стр}p} = (\sigma_M + \sigma_N) F_{\text{стр}p} + a_{\text{стр}p} \delta (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$N_{\text{ш}} = a_{\text{ш}} \delta (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$M = \frac{a_{\text{стр}p} \delta}{2R} (\tau^p - \tau_{\text{кр}}) (a_{\text{ш}} z - z^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

После несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\delta a_{\text{стр}p} a_{\text{ш}}}{2E} (\tau^p - \tau_{\text{кр}})^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + \\ & + \frac{a_{\text{ш}}}{2EF_{\text{стр}p}} \left[(\sigma_M + \sigma_N) F_{\text{стр}p} + \frac{(\tau^p - \tau_{\text{кр}}) a_{\text{стр}p} \delta}{\operatorname{tg} \alpha} \right]^2 + \\ & + \frac{a_{\text{стр}p} a_{\text{ш}}^2 \delta^2}{2EF_{\text{ш}}} (\tau^p - \tau_{\text{кр}})^2 \operatorname{tg}^3 \alpha + \frac{\delta^2 a_{\text{стр}p}^2 a_{\text{ш}}^5}{240EJ_{\text{стр}p} R^2} (\tau^p - \tau_{\text{кр}})^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Переменной величиной в этом выражении является $\operatorname{tg} \alpha$. Подберем его так, чтобы потенциальная энергия стала минимальной. Используя условие

$$\frac{d\mathcal{E}}{d(\operatorname{tg} \alpha)} = 0,$$

получим следующее уравнение для определения угла α :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^4 \alpha - & \frac{(\sigma_M + \sigma_N) \operatorname{tg} \alpha}{(\tau^p - \tau_{\text{кр}}) \left(1 + \frac{a_{\text{ш}} \delta}{F_{\text{ш}}} + \frac{a_{\text{стр}p} \delta a_{\text{ш}}^4}{120J_{\text{стр}p} R^2} \right)} - \\ & - \frac{1 + \frac{a_{\text{стр}p} \delta}{F_{\text{стр}p}}}{1 + \frac{a_{\text{ш}} \delta}{F_{\text{ш}}} + \frac{a_{\text{стр}p} \delta a_{\text{ш}}^4}{120J_{\text{стр}p} R^2}} = 0, \end{aligned}$$

где $J_{\text{стр}p}$ — момент инерции стрингера относительно его собственной оси, параллельной касательной к окружности оболочки.

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ УЗЛОВ И ДЕТАЛЕЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

§ 41. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ОТВЕРСТИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Неподкрепленное отверстие. Рассмотрим сферическую оболочку, нагруженную внутренним постоянным избыточным давлением q . Пусть эта оболочка ослаблена круговым отверстием, определяемым углом φ_0 (рис. 142).

Уравнения равновесия для безмоментной сферической оболочки при осесимметричном нагружении имеют вид

$$\frac{dN_\varphi}{d\varphi} + 2N_\varphi \operatorname{ctg} \varphi = qR \operatorname{ctg} \varphi, \\ N_\theta + N_\varphi = qR. \quad (9.1)$$

Интегрируя первое уравнение этой группы, получим

$$N_\varphi = \frac{C}{\sin^2 \varphi} - \frac{qR}{4} (\operatorname{ctg}^2 \varphi - 1). \quad (9.2)$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что

$$(N_\varphi)_{\varphi=\varphi_0} = 0.$$

Тогда

$$N_\varphi = \frac{qR}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right).$$

Из решения второго уравнения (9.1) получим

$$N_\theta = \frac{qR}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \right),$$

откуда видно, что это усилие достигает наибольшего значения на контуре отверстия:

$$N_{\theta \max} = qR.$$

Следует отметить, что выражение для $N_{\theta \max}$ не зависит от диаметра отверстия.

Отверстие, подкрепленное фланцем (рис. 143). Если сферическая оболочка имеет подкрепленное отверстие, то в месте стыка этого подкрепления (фланца) с оболочкой возникает усилие, величина которого обозначена через N_0 (рис. 143, б). Считается, что усилие в месте стыка направлено по касательной к оболочке.

Распределение усилий в оболочке в данном случае можно

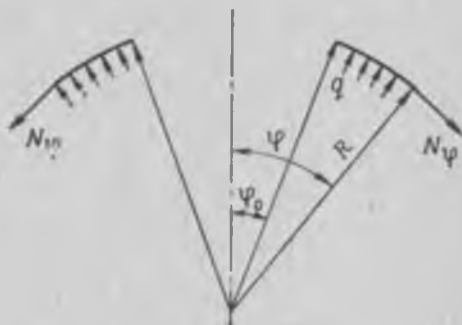


Рис. 142.

определить из выражения (9.2), если в нем положить $q=0$. Тогда

$$N_{\varphi} = \frac{C}{\sin^2 \varphi}$$

При $\varphi = \varphi_0$ должно быть $N_{\varphi} = N_0$. Поэтому

$$C = N_0 \sin^2 \varphi_0.$$

Тогда

$$N_{\varphi} = \frac{N_0 \sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi}.$$

Выражение для N_{θ} имеет вид

$$N_{\theta} = -N_{\varphi} = -\frac{N_0 \sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi}.$$

Для определения неизвестного усилия N_0 составим условие неразрывности перемещений системы оболочка—фланец.

Радиус отверстия от внутреннего давления при $\varphi = \varphi_0$ увеличится на

$$\begin{aligned} \Delta r_1 &= \frac{R \sin \varphi_0}{E \delta} (N_{\theta} - \mu N_{\varphi}) = \\ &= -\frac{q R^2 \sin^2 \varphi_0}{E \delta}. \end{aligned}$$

Уменьшение радиуса отверстия от краевого усилия N_0 будет

$$\begin{aligned} \Delta r_2 &= \frac{R \sin \varphi_0}{E \delta} (N_{\theta} - \mu N_{\varphi}) = \\ &= -\frac{(1 + \mu) N_0 R \sin \varphi_0}{E \delta}. \end{aligned}$$

Увеличение радиуса фланца от усилия N_0 можно найти по выражению

$$\Delta r_3 = \frac{N_0 R^2 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{E F},$$

где F — площадь сечения фланца.

Так как

$$\Delta r_1 + \Delta r_2 = \Delta r_3, \quad (9.3)$$

то, считая, что оболочка и фланец выполнены из одинакового материала, получим выражение, определяющее усилие N_0 :

$$N_0 = \frac{q R^2}{\left[\frac{R^2 \sin^2 \varphi_0}{2F} + \frac{(1 + \mu) R}{\delta} \right] \delta}.$$

Теперь можно подсчитать напряжения в оболочке и фланце.

Напряжения в оболочке будут складываться из напряжений от внутреннего давления и напряжений от краевого усилия N_0 :

$$\sigma_r = \frac{qR}{2b} \left[1 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} + \frac{2 \frac{R}{b} \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi}}{\frac{R^2 \sin 2\varphi_0}{2F} + \frac{(1+\mu)R}{b}} \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{qR}{2b} \left[1 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi} - \frac{2 \frac{R}{b} \frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi}}{\frac{R^2 \sin 2\varphi_0}{2F} + \frac{(1+\mu)R}{b}} \right],$$

Напряжение во фланце

$$\sigma = \frac{qR^3 \sin 2\varphi_0}{2bF \left[\frac{R^2 \sin 2\varphi_0}{2F} + \frac{(1+\mu)R}{b} \right]}.$$

Отверстие, подкрепленное кольцевой пластиной (рис. 144). В данном случае для определения напряжений в подкрепляющей кольцевой пластине можно воспользоваться формулами Ляме:

$$\sigma_r = \frac{N_0 b^2}{h(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{N_0 b^2}{h(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right),$$

где h — толщина пластины.

Выражения для напряжений в оболочке от внутреннего давления q и усилия N_0 будут

$$N_\varphi = \frac{qR}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi} \right), \quad N_\theta = \frac{qR}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi} \right),$$

$$N_r = \frac{N_0 \sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi}, \quad N_\varphi = - \frac{N_0 \sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi}.$$

Для составления уравнения совместности перемещений имеем следующие выражения, полученные на основании закона Гука:

$$\Delta r_1 = \frac{qR^2 \sin \varphi}{Eb},$$

$$\Delta r_2 = - \frac{(1+\mu) N_0 R \sin \varphi_1}{Eb},$$

$$\Delta r_3 = \frac{N_0 b^2}{Eh(b^2 - a^2)} \left[(1-\mu) + (1+\mu) \frac{a^2}{b^2} \right].$$

Тогда из условия (9.3) получим

$$N_0 = \frac{\frac{qR^2 \sin \varphi_1}{b}}{\frac{b^3}{h(b^2 - a^2)} \left[(1-\mu) + (1+\mu) \frac{a^2}{b^2} \right] + \frac{(1+\mu) R \sin \varphi_1}{b}}.$$

После определения усилия N_0 можно подсчитать напряжения в подкрепляющей пластине по формулам Ляме, а напряжения в оболочке — по выражениям

$$\sigma_{\varphi} = \frac{qR}{2b} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{N_0 \sin^2 \varphi_1}{b \sin^2 \varphi},$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{qR}{2b} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi} \right) - \frac{N_0 \sin^2 \varphi_1}{b \sin^2 \varphi}.$$

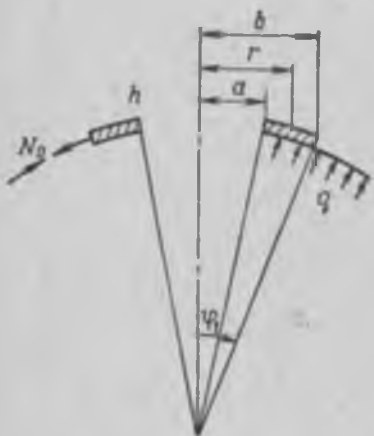


Рис. 144.

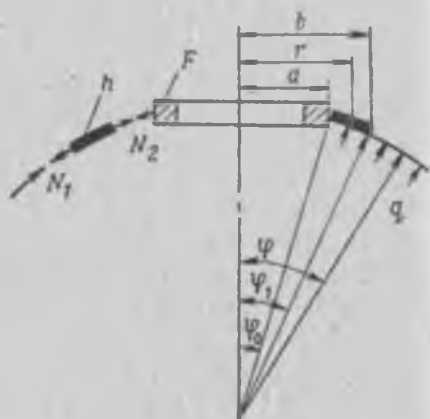


Рис. 145.

Отверстие, подкрепленное кольцевой пластиной и фланцем (рис. 145). В данном случае для определения напряжений в подкрепляющей кольцевой пластине используются следующие формулы Ляме:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (N_2 - N_1)}{h (b^2 - a^2) r^2} + \frac{N_1 b^2 - N_2 a^2}{h (b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{a^2 b^2 (N_2 - N_1)}{h (b^2 - a^2) r^2} + \frac{N_1 b^2 - N_2 a^2}{h (b^2 - a^2)}.$$

Применяя закон Гука, найдем выражения для изменения внутреннего и наружного радиусов пластины:

$$\Delta a_{пл} = \frac{a}{Eh} \left\{ N_1 \frac{2b^2}{b^2 - a^2} - N_2 \left[(1 + \mu) \frac{b^2}{b^2 - a^2} + (1 - \mu) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right] \right\},$$

$$\Delta b_{пл} = \frac{b}{Eh} \left\{ N_1 \left[(1 + \mu) \frac{a^2}{b^2 - a^2} + (1 - \mu) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \right] - N_2 \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \right\}.$$

Изменение радиуса отверстия оболочки будет

$$\Delta b_{об} = -\frac{(1 + \mu) R N_1 \sin \varphi_1}{Eh} + \frac{q R^2 \sin \varphi_1}{Eh}.$$

Изменение радиуса фланца определится по формуле

$$\Delta a_{\phi} = \frac{N_2 R^2 \sin^2 \varphi_0}{EF}.$$

Так как

$$\Delta a_{\phi} = \Delta a_{\text{пл}}, \quad \Delta b_{\phi} = \Delta b_{\text{пл}},$$

то, считая, что материал оболочки, пластины и фланца один и тот же, определим усилия N_1 и N_2 :

$$N_1 = \frac{A_3 (A_1 + A_2) \frac{q R^2 \sin \varphi_1}{b}}{A_3 (A_1 + A_2) (A_4 + A_5) - \frac{a}{b A_3}},$$

$$N_2 = \frac{\frac{q R^2 \sin \varphi_1}{b}}{A_3 (A_1 + A_2) (A_4 + A_5) - \frac{a}{b A_3}},$$

где

$$A_1 = \frac{a}{h} \left[\frac{(1 + \mu) b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(1 - \mu) a^2}{b^2 - a^2} \right],$$

$$A_2 = \frac{R^2 \sin^2 \varphi_0}{F},$$

$$A_3 = \frac{h (b^2 - a^2)}{2 a b^2},$$

$$A_4 = \frac{b}{h} \left[\frac{(1 + \mu) a^2}{b^2 - a^2} + \frac{(1 - \mu) b^2}{b^2 - a^2} \right],$$

$$A_5 = \frac{(1 + \mu) R \sin \varphi_1}{b},$$

После определения усилий N_1 и N_2 можно подсчитать напряжения в оболочке, пластине и фланце.

Напряжения во фланце

$$\sigma_{\phi} = \frac{N_2 R \sin \varphi_0}{F}.$$

Напряжения в оболочке

$$\sigma_r = \frac{q R}{2b} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{N_1 \sin^2 \varphi_1}{b \sin^2 \varphi},$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{q R}{2b} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi} \right) - \frac{N_1 \sin^2 \varphi_1}{b \sin^2 \varphi}.$$

§ 42. РАСЧЕТ ШПАНГОВ ДНИЩ НА СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ СИЛЫ

Рассмотрим шпангоут цилиндрического сосуда, нагруженного двумя диаметрально противоположными сжимающими силами (рис. 146). Поскольку примыкающая к шпангоуту цилиндрическая оболочка слабо сопротивляется радиальным нагрузкам, то в расчете следует учитывать только днище, которое будем считать достаточно пологим.

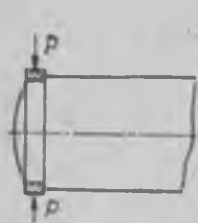
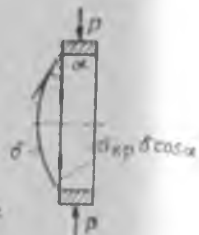


Рис. 146.



Рис. 147.



Расчет шпангоута проведем по предельному состоянию, исходя из диаграммы идеально пластического материала.

На рис. 147 приведена рассматриваемая расчетная схема, подтвержденная экспериментом. Шпангоут имеет прямоугольное сечение.

Процесс разрушения шпангоута при нагружении его силами P будет происходить следующим образом. При укорочении вертикального диаметра одновременно будет удлиняться горизонтальный диаметр шпангоута. При этом днище будет нагружаться сжимающими напряжениями, при критическом значении которых оно потеряет устойчивость. В результате этого на шпангоут со стороны днища будет действовать распределенная нагрузка

$$q = (\sigma_{kp} \delta \cos \alpha) \sin \varphi,$$

где δ — толщина днища;

σ_{kp} — критическое напряжение сжатия для сферической оболочки.

Эта нагрузка направлена перпендикулярно тому диаметру, который получает укорочение.

До момента разрушения шпангоута можно различить две стадии его работы. Первая стадия будет характеризоваться появлением первого пластического шарнира под силами P . После этого шпангоут еще не превратится в механизм и будет в состоянии воспринимать дополнительную нагрузку до момента появления второго пластического шарнира в точках, лежащих на горизонтальном диаметре. После этого шпангоут превратится в механизм, и его несущая способность будет исчерпана.

Предельный момент под силой P будет

$$M'_{np} = 2 \left[\left(\frac{h}{2} - a_1 \right) b \right] \left(\frac{\frac{h}{2} - a_1}{2} + a_1 \right) \sigma_s =$$

$$= \sigma_s b \left(\frac{h^2}{4} - a_1^2 \right) = 2Q \left(\frac{\frac{h}{2} - a_1}{2} + a_1 \right) = 2Q \left(\frac{h}{4} + \frac{a_1}{2} \right),$$

где

$$Q = \left(\frac{h}{2} - a_1 \right) b \sigma_s.$$



Рис. 148.

Силы Q приложены в центре тяжести незаштрихованных площадок (рис. 148).

Кроме M'_{np} , в рассматриваемом сечении будет приложена сила N_1 , распределенная по заштрихованной площадке. Предельное значение этой силы

$$N_1 = 2a_1 b \sigma_s. \quad (9.4)$$

С другой стороны, эту силу можно определить из условия равновесия четверти кольца. Для этой цели составим сумму проекций всех сил на направление N_1 :

$$N_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} q ds \sin \varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma_{кр} b \cos \alpha) \sin \varphi (R d\varphi \sin \varphi) =$$

$$= \sigma_{кр} R b \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \sigma_{кр} R b \cos \alpha. \quad (9.5)$$

Приравнявая выражения (9.4) и (9.5), получим

$$a_1 = \frac{\pi R \sigma_{кр} \cos \alpha}{8 b \sigma_s}.$$

Тогда

$$M'_{np} = \sigma_s b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi R \delta \sigma_{кр} \cos \alpha}{8 b \pi_4} \right)^2 \right],$$

$$N_1 = \frac{\pi}{4} R \delta \sigma_{кр} \cos \alpha.$$

В конце этой стадии нагружения в сечении под углом $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (на горизонтальном диаметре) пластический шарнир развился не полностью и часть сечения продолжает оставаться в упругой стадии. Напряжения текучести начинают появляться сначала в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной осн. Поэтому дальнейшее увеличение силы P возможно только за счет распространения пластической зоны по сечению, находящемуся на горизонтальном диаметре. При этом момент в сечении, расположенном на вертикальном диаметре, достигнет предельного значения и при дальнейшем увеличении силы P он не увеличивается.

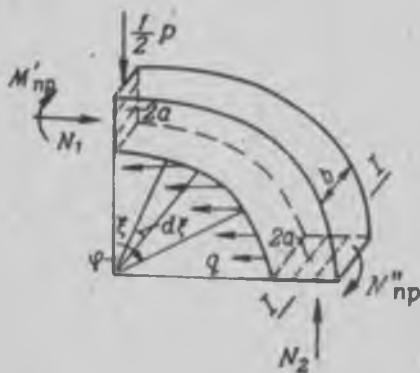


Рис. 149.

Рассмотрим равновесие четверти кольца в его предельном состоянии при наличии пластических шарниров в сечениях по горизонтальному и вертикальному диаметрам (рис. 149).

Сумма моментов относительно оси $I-I$ будет

$$M'_{np} + M''_{np} + N_1 R - \frac{PR}{2} - \left[\int_0^{\varphi} q d\xi \sin \xi (R \cos \xi - R \cos \varphi) \right]_{\varphi=90^\circ} = 0.$$

Отсюда получаем

$$M'_{np} + M''_{np} + N_1 R - \frac{PR}{2} - \frac{1}{3} R^2 \delta \sigma_{кр} \cos \alpha = 0. \quad (9.6)$$

Предельное значение для M'_{np} будет

$$M'_{np} = 2 \left[\left(\frac{h}{2} - a_2 \right) b \right] \left(\frac{\frac{h}{2} - a_2}{2} + a_2 \right) \sigma_s = \sigma_s b \left(\frac{h^2}{4} - a_2^2 \right).$$

Выражение для a_2 можно определить следующим образом. Из условия равновесия четверти кольца в направлении вертикального диаметра получаем

$$N_2 = \frac{P}{2},$$

С другой стороны,

$$N_2 = 2\tau_s a_2 b.$$

Из этих выражений находим

$$a_1 = \frac{P}{4\sigma_s b}.$$

Тогда

$$M_{np}^* = \sigma_s b \left(\frac{h^3}{4} - \frac{P^2}{16\sigma_s^2 b^2} \right).$$

Теперь уравнение (9.6) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_s b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi R \delta \sigma_{кр} \cos \alpha}{8b\sigma_s} \right)^2 \right] + \tau_s b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{P}{4b\sigma_s} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\pi}{4} R^2 \delta \tau_s \cos \alpha - \frac{PR}{2} - \frac{1}{3} R^2 \delta \tau_{кр} \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} P^2 + 8Rb\tau_s P - 8b^2 h^2 \sigma_s^2 + \frac{\pi^2}{4} R^2 \delta^2 \sigma_{кр}^2 \cos^2 \alpha - \\ - 16R^2 b \delta \tau_{кр} \tau_s \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение относительно P , получим

$$\begin{aligned} P = 4Rb\tau_s \left[\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{8} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_s} \right)^2 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \cos^2 \alpha +} \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_s} \right) \left(\frac{h}{b} \right) \cos \alpha - 1 \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, где $x \ll 1$, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} P_{np} = 2Rb\tau_s \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{R} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{8} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_s} \right)^2 \left(\frac{h}{b} \right)^2 \cos^2 \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_s} \right) \left(\frac{h}{b} \right) \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

Эта формула определяет предельное значение сжимающей силы, действующей на шпангоут, подкрепленный пологим сферическим днищем.

Как следует из экспериментов, в этой формуле можно принять

$$\sigma_{\kappa p} = 0,2 E \frac{\delta}{R},$$

где R и δ — радиус и толщина днаща.

§ 43. КРУЧЕНИЕ КОЛЬЦА, ОСЛАБЛЕННОГО ОТВЕРСТИЯМИ

Рассмотрим круговое замкнутое кольцо, ослабленное отверстиями и нагруженное распределенным крутящим моментом.

Размеры поперечного сечения такого кольца будем считать малыми по сравнению с его радиусом. К числу таких деталей относятся всевозможные фланцы, силовые шпангоуты сосудов, которые имеют отверстия для стыковки с ответными узлами сопрягаемых деталей или агрегатов. В некоторых случаях с целью экономии веса фланцы делаются с фигурными вырезами.

Рассмотрим влияние отверстий на прочность кольца при нагружении его крутящим моментом.

Полная потенциальная энергия такого кольца

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iint_F \int_0^{2\pi R} \tau \varepsilon dF ds - \int_0^{2\pi R} M_t \theta ds.$$

Здесь ¹

$$\tau = \frac{E\eta y}{R}; \quad \varepsilon = \frac{\theta y}{R};$$

η — угол поворота сечения кольца;

M_t — погонный скручивающий момент.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{E}{2} \iint_F y^2 dF \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\eta}{R} \right)^2 ds - \int_0^{2\pi R} M_t \eta ds = \\ &= \frac{E}{2} \int_0^{2\pi R} J \left(\frac{\eta}{R} \right)^2 ds - \int_0^{2\pi R} M_t \eta ds. \end{aligned}$$

Допустим, что момент инерции сечения кольца J является величиной переменной ²:

$$J = f(\eta) = J_0 \pm \Delta J_0.$$

¹ С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, ч. II, 1934.

² А. Н. Динник, Продольный изгиб, ГОНТИ, 1939.

Тогда выражение для $\mathcal{E}$ примет вид

$$\mathcal{E} = \frac{EJ_0}{2R^2} \int_0^{2\pi R} \theta^2 ds \pm \frac{E}{2R^2} \int_0^{2\pi R} \Delta J_0 \theta^2 ds - \int_0^{2\pi R} M_t \theta ds.$$

После интегрирования получим

$$\mathcal{E} = \frac{\pi EJ_0 \theta^2}{R} \pm \frac{E \theta^2}{2R^2} \sum \Delta J_0 (\Delta s) - 2\pi R M_t \theta.$$

Здесь под знаком суммы стоит произведение, состоящее из величины, характеризующей изменение момента инерции сечения шпангоута на ту длину осевой линии, на которой изменяется момент инерции. Суммирование производится по всем ослабленным (усиленным) местам шпангоута.

Применим к последнему выражению начало возможных перемещений $\delta \mathcal{E} = 0$.

Решая полученное из последнего условия уравнение относительно θ , найдем, что

$$\theta = \frac{M_t R^2}{EJ_0 \left[1 \pm \frac{\sum \Delta J (\Delta s)}{2\pi R J_0} \right]}.$$

Пользуясь этим выражением, можно оценить влияние ослаблений (усилений) отдельных сечений кольца на его несущую способность.

§ 44 РАСЧЕТЫ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

Рассмотрим расчет кругового кольца, скрепленного с тонкой цилиндрической оболочкой и нагруженного усилиями P , T , M (рис. 150). Указанный на этом рисунке узел является типичным для ряда конструкций.

При нагружении кольца сосредоточенными усилиями P , T , M по линии стыка его с оболочкой возникает поток касательных усилий, закон распределения которых будет зависеть от характера приложенной нагрузки. При этом оболочку считаем безмоментной.

При нагружении кольца сосредоточенным моментом этот поток будет постоянным по периметру кольца, а при действии силы P его наибольшая величина будет на диаметре, перпендикулярном линии действия силы P . При нагружении кольца силой T уравновешивающий поток касательных усилий можно получить путем наложения указанных выше потоков.

При решении задачи будем рассматривать каждый вид нагружения отдельно. На рис. 151 представлено нагружение кольца сосредоточенной силой P . В этом случае закон изменения касательных усилий определяется выражением

$$\tau = \tau_0 \sin \varphi,$$

где

$$\tau_0 = \frac{P}{\pi R}.$$

В этом случае для изгибающего момента в произвольном сечении кольца, определяемом углом φ , можно получить выражение

$$M_\varphi = M_0 - N_0 R (1 - \cos \varphi) + \tau_0 R^2 \left(\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1 \right),$$

где M_0 , N_0 — неизвестные внутренние усилия в поперечном сечении.

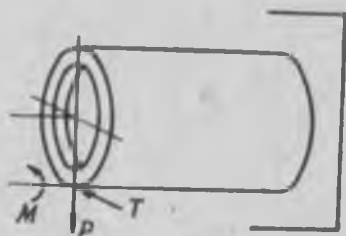


Рис. 150.

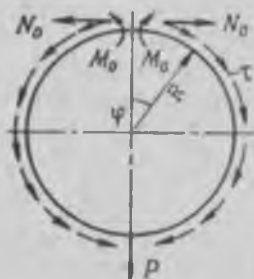


Рис. 151.

Для определения неизвестных внутренних силовых факторов воспользуемся началом наименьшей работы.

Потенциальная энергия деформации полукольца

$$\mathfrak{E} = \frac{R}{2RJ} \int_0^\pi M_\varphi^2 d\varphi.$$

Для определения усилий M_0 и N_0 имеем условия

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial M_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial N_0} = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$M_0 = -\frac{1}{4} \tau_0 R^2, \quad N_0 = -\frac{3}{4} \tau_0 R.$$

Тогда

$$M_\varphi = \frac{PR}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1 \right).$$

Для нормальной и перерезывающей сил в сечении φ получаем следующие выражения:

$$N_P = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right),$$

$$Q_P = \frac{P}{2\pi} \left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right).$$

Функция, определяющая изменение прогибов кольца, найдется из решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{-M_P R^2}{EJ} = \frac{-PR^3}{2\pi EJ} \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1 \right).$$

Здесь положительное направление прогиба принято к центру кольца. Применяя к этому уравнению метод вариации постоянных интегрирования, получим

$$w = A \sin \varphi + B \cos \varphi - \frac{PR^3}{8\pi EJ} (\varphi^2 \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi - \cos \varphi) - \frac{PR^3}{2\pi EJ},$$

где A и B — постоянные, определяемые из граничных условий.

В данном случае граничные условия будут иметь вид

$$\frac{dw}{Rd\varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \quad \varphi = \pi;$$

$$w = -\delta_P \quad \text{при } \varphi = \pi,$$

где δ_P — прогиб оси кольца в точке приложения силы P .

Для определения этого прогиба воспользуемся теоремой Кастильяно. Составляя от приведенного выше выражения потенциальной энергии производную по силе $\frac{1}{2} P$, получим¹

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\left(\frac{P}{2}\right)} = \delta_P$$

или

$$\delta_P = \frac{0,043 PR^3}{EJ}.$$

Значения постоянных A и B будут равны

$$A = 0, \quad B = -0,152 \frac{PR^3}{EJ}.$$

Таким образом, для прогиба w получим выражение

$$w_P = \frac{PR^3}{EJ} (0,16 + 0,04 \varphi^2 \cos \varphi - 0,192 \cos \varphi - 0,08 \varphi \sin \varphi).$$

1. Выражение для энергии должно быть проинтегрировано в пределах $0-\pi$.

Теперь рассмотрим нагружение кольца сосредоточенным моментом (рис. 152). В этом случае касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2}.$$

Текущие значения изгибающего момента, нормальной и сдвигающей сил определяются по выражениям



Рис. 152.

$$M_\varphi = \frac{M}{\pi} \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi \right), \quad N_\varphi = \frac{M}{\pi R} \sin \varphi,$$

$$Q_\varphi = \frac{M}{\pi R} \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right).$$

Как и в предыдущем случае нагружения, для определения прогибов кольца используется дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{MR^2}{\pi EJ} \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi \right).$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$w_\varphi = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \frac{MR^2}{2\pi EJ} \left(\varphi + \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right).$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 поставим следующие граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \pi;$$

$$\frac{dw}{R d\varphi} = \gamma_M \quad \text{при} \quad \varphi = \pi,$$

где γ_M — угол поворота сечения кольца в месте приложения сосредоточенного момента M .

Для определения угла γ_M применим теорему Кастильяно

$$\gamma_M = \frac{d\vartheta}{dM},$$

где

$$\vartheta = \frac{R}{2EJ} \int_{-\pi}^{\pi} M_\varphi^2 d\varphi$$

и

$$\gamma_M = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \frac{MR}{\pi EJ}.$$

Тогда для C_1 и C_2 получаем значения

$$C_1 = -\frac{0,395 MR^2}{\pi EJ}, \quad C_2 = 0.$$

При этом функция прогиба имеет вид

$$w_M = \frac{MR^2}{EJ} (0,5 \varphi + 0,5 \varphi \cos \varphi - 0,645 \sin \varphi).$$

Рассмотрим, наконец, нагружение кольца касательной силой T (рис. 153).

Для получения выражения касательных усилий в данном случае можно поступить следующим образом. Приложим в центре кольца две равные и противоположно направленные силы T , параллельные заданной. Тогда кольцо будет нагружено силой T , проходящей через горизонтальный диаметр, и моментом. Для равновесия такого кольца необходимо наложить касательные усилия, рассмотренные в первых двух случаях, одно на другое, после чего



Рис. 153.

$$\tau = \frac{T}{\pi R} \left(\cos \varphi - \frac{1}{2} \right).$$

Поток этих усилий показан на рис. 153.

Для изгибающего момента, нормальной и перерезывающей сил в данном случае имеем следующие выражения:

$$M_T = \frac{TR}{2\pi} \left(-\frac{3}{2} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \varphi \right),$$

$$N_T = -\frac{T}{2\pi} \left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right),$$

$$Q_T = \frac{T}{2\pi} \left(1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \right).$$

Выражение для прогиба получим из уравнения

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{MR^2}{EJ} = -\frac{TR^3}{2\pi EJ} \left(\frac{3}{2} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \varphi \right),$$

интеграл которого равен

$$w_T = A \sin \varphi + B \cos \varphi - \frac{TR^3}{2\pi EJ} \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi - \varphi \right).$$

Для определения постоянных интегрирования A и B поставим следующие граничные условия:

$$w = -\delta_T \quad \text{при} \quad \varphi = \pi;$$

$$\frac{dw}{R d\varphi} = \gamma_T \quad \text{при} \quad \varphi = \pi,$$

где δ_T — радиальный прогиб от силы T в точке ее приложения; γ_T — угол поворота сечения в месте приложения силы T .

Для определения δ_T и γ_T вновь воспользуемся теоремой Кастильяно:

$$\delta_T = \left(\frac{d\mathcal{E}_{T+P}}{dP} \right)_{P=0}, \quad \gamma_T = \left(\frac{d\mathcal{E}_{T+M}}{dM} \right)_{M=0},$$

где

$$\mathcal{E}_{T+P} = \frac{R}{2EJ} \int_{-\pi}^{\pi} (M_T + M_P)^2 d\varphi,$$

$$\mathcal{E}_{T+M} = \frac{R}{2EJ} \int_{-\pi}^{\pi} (M_T + M_M)^2 d\varphi.$$

Значения M_T , M_P , M_M даются приведенными выше выражениями.

Из этих условий находим

$$A = -0,279 \frac{TR^3}{EJ}, \quad B = 0.$$

Тогда

$$w_T = \frac{TR^3}{EJ} (0,16\varphi + 0,16\varphi \cos \varphi + 0,04\varphi^2 \sin \varphi - 0,36 \sin \varphi).$$

Глава X

РАСЧЕТ БАЛЛОНОВ ИЗ СТЕКЛОВОЛОКНА

В данной главе рассмотрены вопросы расчета на прочность баллонов из стекловолокна, работающих на внутреннее давление. Такие баллоны изготавливаются путем намотки стекловолокна, пропитанного специальной смолой, на оправку или на выплавляемую модель.¹

После окончания намотки полученный сосуд подвергают термической обработке при определенной температуре. При этом смола затвердевает и намотанное стекловолокно получается склеенным по всей толщине стенки.

Несущим элементом полученной конструкции является стеклонить. Смола выполняет роль связующего вещества и ввиду ее низких механических характеристик в расчет не принимается.

¹ Библиографию по этому вопросу см. в [31].

§ 45 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УГЛОВ НАМОТКИ СТЕКЛОНИТЕЙ И ПОТРЕБНОЙ ТОЛЩИНЫ СТЕНОК БАЛЛОНОВ

Вначале рассмотрим цилиндрическую часть сосуда, изготовленную из продольно уложенных и спирально намотанных стеклонитей (рис. 154). Пусть этот баллон находится под действием внутреннего давления. При этом волокна нитей будут работать только на растяжение. Касательные усилия в направлении поперек волокон будут восприниматься смолой. Можно показать, что на площадках, определяемых некоторым значением угла наклона стеклонитей α к оси баллона, скалывающие усилия отсутствуют. По рис. 155, *a* можно получить следующие соотношения между усилиями в прямоугольной и косоугольной системах координат:

$$N_x \sin \beta - S_1 \cos \beta - N_z \cos \alpha - N_{xy} \cos \beta = 0,$$

$$N_y \cos \beta + S_1 \sin \beta + N_z \sin \alpha - N_{yx} \sin \beta = 0,$$

$$N_x \sin \alpha + S_2 \cos \alpha + N_z \cos \beta - N_{xy} \cos \alpha = 0,$$

$$N_y \cos \alpha - S_2 \sin \alpha - N_z \sin \beta - N_{yx} \sin \alpha = 0.$$

В данной задаче грани dx и dy в силу симметрии нагружения будут свободны от касательных напряжений ($N_{xy} = N_{yx} = 0$).

Кроме того, из условия равенства нулю моментов сил, приложенных к выделенному элементу, относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через начало координат, можно получить, что $S_1 = S_2 = S$. Тогда при $\beta = \pi - \alpha$ из приведенных уравнений найдем

$$N_z = N_\eta = \frac{N_x \sin^2 \alpha + N_y \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha},$$

$$S = \frac{N_y \cos^2 \alpha - N_x \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Для случая цилиндрической оболочки имеем

$$N_x = \frac{qR}{2}, \quad N_y = qR.$$

Тогда

$$N_z = N_\eta = \frac{qR (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{2 \sin 2\alpha},$$

$$S = \frac{qR (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2 \sin 2\alpha}.$$

Ввиду того что связующее вещество (смола) обладает весьма низкими разрушающими напряжениями на сдвиг, целесообразно угол намотки стеклонитей α выбирать таким, чтобы сдвигающее

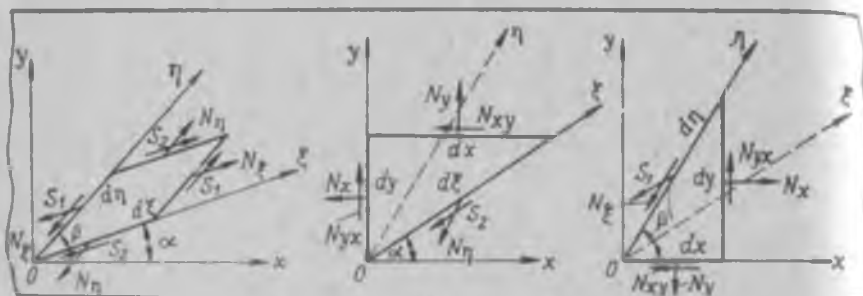


Рис. 154.

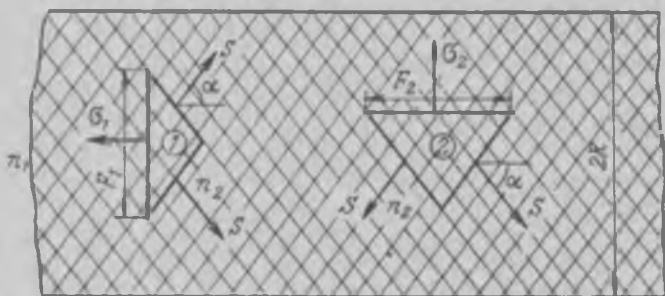
усилие в смоле было минимальным. В предельном случае, когда $S=0$, получаем $\alpha=54^\circ 40'$. При этом для растягивающих усилий в нитях находим значения, равные

$$N_x = N_y = 1,42 \frac{qR}{2} = 0,71 qR,$$

которые будут значительно ниже, чем при других углах наклона стеклонитей (т. е. найденный угол α является наивыгоднейшим)



а)



б)

Рис. 155.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что рассматриваемая конструкция цилиндрического баллона выполнена с углом на клона нитей, близким к оптимальному. Легко убедиться, что для сферического баллона этот угол $\alpha=45^\circ$.

Теперь обратимся к рис. 155, б. Составим условие равновесия элемента 2 в окружном направлении. При этом получим

$$F_2 \delta z_2^p = S n_2 \sin \alpha + S n_2 \sin \alpha = 2 S n_2 \sin \alpha, \quad (10.1)$$

где S — прочность элементов стеклонити в кг ;

n_2 — число элементарных нитей на длине F_2 , уложенных в одном направлении;

$\delta\sigma_1^p$ — погонное расчетное усилие, действующее в окружном направлении;

F_2 — шаг намотки;

α — угол наклона нитей к оси цилиндра.

Из рис. 156 имеем

$$F_1 = F_2 \operatorname{tg} \alpha = 2\pi R.$$

Кроме того,

$$\delta\sigma_1^p = q^p R.$$

Тогда из уравнения (10.1) найдем

$$n_2 = \frac{\pi R^2 q^p \operatorname{ctg} \alpha}{S \sin \alpha}. \quad (10.2)$$

Теперь рассмотрим равновесие элемента l в осевом направлении (см. рис. 155, б):

$$F_1 \delta\sigma_1^p = S n_2 \cos \alpha + S n_2 \cos \alpha + S n_1 = 2 S n_2 \cos \alpha + S n_1. \quad (10.3)$$

Здесь n_1 — число элементарных нитей, продольно уложенных на длине F_1 ;

$\delta\sigma_1^p$ — погонное расчетное усилие в осевом направлении от внутреннего давления;

F_1 — размер выделенного элемента l в окружном направлении.

Соотношение между размерами F_1 и F_2 можно получить из рис. 157:

$$F_1 = F_2 \operatorname{tg} \alpha = 2\pi R.$$

Кроме того, имеем

$$\delta\sigma_1^p = \frac{q^p R}{2}.$$

Тогда из уравнения (10.3), используя выражение (10.2), получим

$$n_1 = \frac{\pi R^2 q^p}{S} (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha). \quad (10.4)$$

Составим отношение числа нитей, уложенных на единицу длины в окружном направлении $\frac{n_1}{F_1}$, к числу нитей, уложенных на единицу длины под углом α $\frac{2n_2}{F_2}$, т. е.

$$\frac{n_1 F_2}{2 F_1 n_2} = (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) \sin \alpha,$$

откуда

$$\frac{n_1}{2 n_2} = (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) \sin \alpha. \quad (10.5)$$

Из уравнения (10.5) можно получить угол наклона намотки в зависимости от отношения числа нитей n_1 к n_2 . При $n_1=0$ получаем конструкцию цилиндрической части баллона, изготовленную только из спирально уложенных нитей. При этом угол намотки будет

$$1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = 0,$$

откуда $\alpha = 54^\circ 40'$.

Как указано выше, при таком угле намотки нитей к оси цилиндра наклонные площадки элементов 1 и 2 (см. рис. 155, б) будут свободны от касательных напряжений. Это является весьма важным фактором в повышении срока службы баллонов, армированных стекловолокном.

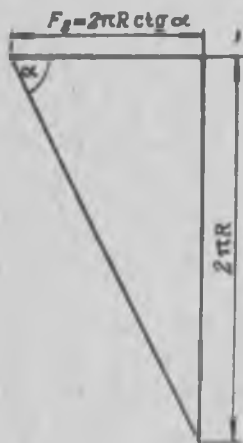


Рис. 156.

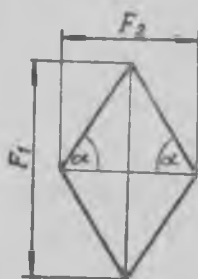


Рис. 157.

По выражениям (10.2) и (10.4) можно определить потребную толщину стенки цилиндрической части баллона.

Общая толщина слоев продольных нитей (рис. 158)

$$\frac{\pi d^2}{4} n_1 = \delta_{np} F_1,$$

где d — диаметр элементарного волокна,

откуда
$$\delta_{np} = \frac{d^2 n_1}{8R}.$$

Общую толщину слоев спирально уложенных нитей можно получить из рис. 159:

$$\frac{\pi d^2}{4} n_2 = F_2 \sin \alpha \frac{\delta_{сп}}{2},$$

откуда

$$\delta_{сп} = \frac{d^2 n_2}{4R \cos \alpha}.$$

Полная толщина стенки цилиндрической части баллона

$$\delta = \delta_{np} + \delta_{cnp} = \frac{d^2}{8R} \left(n_1 + \frac{2n_2}{\sin \alpha} \right).$$

После подстановки сюда выражений для n_1 и n_2 (10.2) и (10.4) получим

$$\delta = \frac{3\pi R d^2 q^p}{8S}. \quad (10.6)$$

Из этой формулы видно, что толщина стенки баллона при совместной укладке продольных и спиральных нитей не зависит от угла наклона последних. Однако из этого еще не следует, что

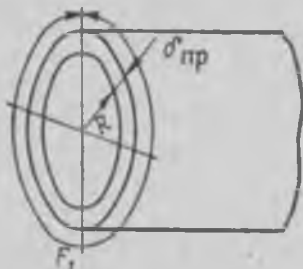


Рис. 158.

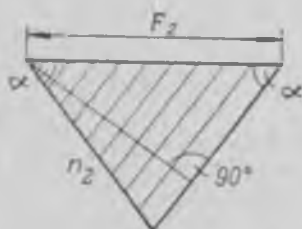


Рис. 159.

можно изготовить цилиндрическую часть сосуда только из одних продольно уложенных нитей. Угол намотки нитей может выбираться произвольно, но при соблюдении соотношения (10.5).

Если в формулу (10.6) подставить

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_n^{ct},$$

где σ_n^{ct} — предел прочности стеклонити на растяжение, то получим

$$\delta = 1,5 \frac{q^p R}{\sigma_n^{ct}}.$$

После подстановки значений n_1 и n_2 в выражения для δ_{np} и δ_{cnp} и замены S через σ_n^{ct} будем иметь

$$\delta_{np} = \frac{q^p R}{2\sigma_n^{ct}} (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha),$$

$$\delta_{cnp} = \frac{q^p R}{\sigma_n^{ct} \sin^2 \alpha}.$$

Если в этих формулах положить $\alpha = 90^\circ$, то

$$\delta_{np} = \frac{q^p R}{2\sigma_n^{ct}}, \quad \delta_{cnp} = \frac{q^p R}{\sigma_n^{ct}}.$$

При $\alpha = 54^\circ 40'$ найдем

$$\delta_{\text{нп}} = 0, \quad \delta_{\text{снп}} = 1,5 \frac{q^p R}{\sigma_{\text{н}}^{\text{ст}}},$$

Из этих примеров видно, что суммарная толщина стенки остается одной и той же.

Подсчитаем погонный вес цилиндрической части баллона:

$$G = 2\pi R \delta l \gamma_{\text{ст}},$$

откуда

$$\left(\frac{G}{l}\right)_{\text{ст}} = \frac{2\pi R^2 \gamma_{\text{ст}} q^p}{\sigma_{\text{н}}^{\text{ст}}}, \quad (10.7)$$

Если цилиндрическая часть будет изготовлена из металла, то для определения погонного веса получим формулу

$$\left(\frac{G}{l}\right)_{\text{м}} = \frac{2\pi R^2 \gamma_{\text{м}} q^p}{\sigma_{\text{н}}^{\text{м}} \gamma_{\text{св}}}, \quad (10.8)$$

где $\gamma_{\text{св}}$ — коэффициент сварного шва¹.

Из сравнения выражений (10.7) и (10.8) найдем, что

$$\eta = \frac{G_{\text{м}}}{G_{\text{ст}}} = \frac{2}{3} \frac{\gamma_{\text{м}}}{\gamma_{\text{ст}}} \frac{\sigma_{\text{н}}^{\text{ст}}}{\sigma_{\text{н}}^{\text{м}} \gamma_{\text{св}}}.$$

Этим отношением можно пользоваться при весовой оценке баллонов, изготовленных из металла и стекловолокна.

Теперь рассмотрим случай сферического сосуда, изготовленного из стеклонитей (рис. 160). Из условия равновесия элементов 1 и 2 получим

$$F_1 \delta \alpha_1 = 2n_1 S \sin \alpha, \quad F_2 \delta \alpha_2 = 2n_2 S \cos \alpha. \quad (10.9)$$

Для сферической оболочки имеем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{q^p R}{2\delta}.$$

Кроме того, положим $F_1 = F_2$. Следовательно, должно быть $n_1 = n_2$. Тогда

$$\sin \alpha = \cos \alpha.$$

Из этого соотношения видно, что для сферического баллона угол намотки $\alpha = 45^\circ$, т. е. нити должны пересекаться под углом 90° .

Потребная толщина стенки

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{q^p R}{2\sigma_{\text{н}}^{\text{ст}}}.$$

¹ Этот коэффициент равен отношению предела прочности при растяжении сварного образца к пределу прочности образца, изготовленного из исходного материала.

Эта формула может быть получена на основании любого из уравнений (10.9) при $\alpha = 45^\circ$.

$$n = \frac{q^p R F}{2 \sqrt{2} S} = \frac{2 q^p R F}{\pi \sqrt{2} d^2 \sigma_{\text{ст}}^p}$$

Так как площадь поперечного сечения грани выделенного элемента 1 или 2

$$F \sin \alpha \delta_{\text{ст}} = \frac{\pi d^2}{4} n,$$

то после исключения из последних двух выражений размера F получим формулу для $\delta_{\text{ст}}$.

Для оценки веса сферического баллона имеем формулу

$$G = 4\pi R^2 \delta \gamma.$$

Отношение весов сферических баллонов, изготовленных из металла и стекловолокна, будет

$$\eta = \frac{\gamma_{\text{м}}}{\gamma_{\text{ст}}} \frac{\sigma_{\text{ст}}^{\text{ст}}}{\sigma_{\text{в}}^{\text{м}} \varphi_{\text{св}}}.$$

В приведенном выше расчете не учитывалась работа внутреннего герметизирующего слоя, без которого вряд ли целесообразно применять емкости, работающие на внутреннее давление.

В качестве герметизирующего слоя могут применяться или специальные резины или тонкие металлические оболочки. Учитывать в приведенном выше расчете герметизирующий слой из резины не имеет смысла, так как несущая способность этого материала будет незначительной по сравнению со стеклонитями. Влияние металлического слоя можно учесть следующим образом. Рассмотрим сначала этот вопрос на примере цилиндрической части баллона. Для относительной деформации этого слоя в окружном направлении в момент разрушения бака можно написать выражение

$$\epsilon_{\text{м}} = \frac{1}{E_{\text{м}}} (\sigma_{2\text{м}} - \mu \sigma_{1\text{м}}) = \frac{(1 - 0,5\mu) q_{\text{м}} R}{E_{\text{м}} b_{\text{м}}}.$$

В этот момент должно выполняться равенство $\epsilon_{\text{м}} = \epsilon_{\text{ст}}$, где $\epsilon_{\text{ст}}$ — относительная деформация стекловолокна при разрушении.

Кроме того, в момент разрушения баллона металлический герметизирующий слой будет находиться в состоянии текучести. Следовательно, $\mu = 0,5$. Тогда металлическая оболочка примет на себя следующее внутреннее давление:

$$q_{\text{м}} = \frac{4 E_{\text{м}} \epsilon_{\text{ст}}}{3 R}.$$

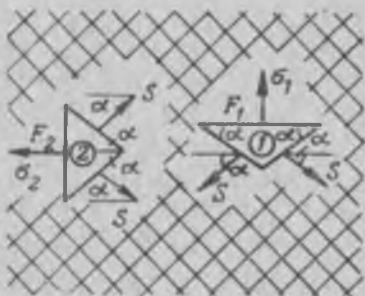


Рис. 160.

Несущая часть конструкции баллона, состоящая из стекловолокна, воспримет на себя давление, равное ($q - q_m$), на которое и следует вести расчет баллона. Значение касательного модуля E (в точке, где $\epsilon_m = \epsilon_{ct}$) надо брать по графику рис. 162. Толщина стенки герметизирующей оболочки должна выбираться из условия устойчивости при ее нагружении внешним давлением со стороны натянутых стеклонитей.

В случае сферического сосуда герметизирующая оболочка будет нагружена внутренним давлением, которое определяется выражением

$$q_m = \frac{4E_m h_m \epsilon_{ct}}{R}.$$

Дальнейший расчет несущей части баллона производится как и для случая цилиндрической оболочки.

§ 46. РАСЧЕТ КОМБИНИРОВАННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БАЛЛОНА, УСИЛЕННОГО СТЕКЛОНИТЯМИ ТОЛЬКО В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Как известно, толщина стенки цилиндрического бака определяется по величине окружных напряжений $\sigma_2 = \frac{qR}{\delta}$. В то же время в осевом направлении бака будут действовать напряжения, в 2 раза меньшие:

$$\sigma_1 = \frac{qR}{2\delta}. \quad (10.10)$$

Таким образом, материал бака в осевом направлении получается недогруженным и конструкция в осевом и окружном направлениях оказывается неравнопрочной.

Для того чтобы сделать конструкцию баллона равнопрочной, необходимо толщину стенки определять исходя из величины напряжений σ_1 , а недостающую толщину стенки в окружном направлении компенсировать намоткой стеклонитей, имеющих более высокую удельную прочность по сравнению с металлом. Такая конструкция более выгодна в весовом отношении.

Расчет баллона этой конструкции должен проводиться в такой последовательности.

Из формулы (10.10) при $\sigma_1 = \sigma_{\text{в}} \varphi_{\text{св}}$ получим выражение для толщины стенки

$$h_m = \frac{q^0 R}{2\sigma_{\text{в}} \varphi_{\text{св}}},$$

где $\varphi_{\text{св}}$ — коэффициент сварного шва.

Для определения потребного количества стеклонитей n_2 в окружном направлении обратимся к рис. 161. Из условия равновесия всех сил в направлении S получим

$$2\sigma_2 \delta_m l + 2S n_2 = 2R l q^P,$$

откуда потребное количество волокон будет

$$n_2 = \frac{R l q^P - \sigma_2 \delta_m l}{S}.$$

По графикам рис. 162 видно, что напряжение σ_2 в момент разрушения будет равно σ_m . Поэтому

$$n_2 = \frac{R l q^P - \sigma_m \delta_m l}{S},$$

где S — разрушающее усилие для элементарной стеклонити.

Последнюю формулу удобно переписать в виде

$$\frac{n_2}{l} = \frac{R q^P - \sigma_m \delta_m}{S}, \quad (10.11)$$

где $\frac{n_2}{l}$ — число стеклонитей, приходящихся на единицу длины бака.

После исключения из (10.11) величин n_2 и S , которые можно получить из соотношений

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_{\text{ст}},$$

$$\frac{\pi d^2}{4} n_2 = l \delta_{\text{ст}},$$

получим выражение для потребной толщины намотки стеклонитей

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{q^P R}{\sigma_{\text{ст}}} \left(1 - \frac{\sigma_m}{2\sigma_m \varphi_{\text{св}}} \right). \quad (10.12)$$

Вес цилиндрической части комбинированного бака будет

$$C_{\text{комб}} = 2\pi R l (\delta_m \gamma_m + \delta_{\text{ст}} \gamma_{\text{ст}}).$$

После подстановки сюда значений δ_m и $\delta_{\text{ст}}$ по формулам (10.11) и (10.12) получим

$$\left(\frac{G}{l} \right)_{\text{комб}} = \frac{\pi R^2 q^P \gamma_m}{\sigma_m \varphi_{\text{св}}} \left(1 + 2 \frac{\sigma_m \varphi_{\text{св}} \gamma_{\text{ст}}}{\sigma_{\text{ст}} \gamma_m} - \frac{\gamma_{\text{ст}} \sigma_m}{\gamma_m \sigma_{\text{ст}}} \right). \quad (10.13)$$

При изготовлении цилиндрической части бака из металла для определения погонного веса была получена формула (10.8)

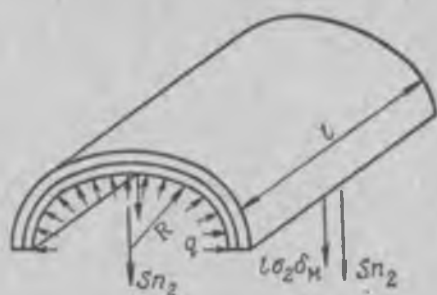


Рис. 161.



Рис. 162.

Составив отношение весов из формул (10.8) и (10.13), получим

$$\eta = \frac{G_m}{G_{\text{комб}}} = \frac{2}{1 + 2 \frac{\sigma_n^{\text{сж}} \gamma_{\text{ст}} \gamma_{\text{ст}}}{\sigma_n^{\text{сж}} \gamma_m} - \frac{\gamma_{\text{ст}} \sigma_m}{\gamma_m \sigma_n^{\text{сж}}}}$$

Пользуясь этим отношением, можно определить, во сколько раз металлический баллон тяжелее комбинированного.

§ 47. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЯ НАТЯЖЕНИЯ СТЕКЛОНИТЕЙ

Для того чтобы стеклонити работали равномерно по толщине стенки баллона при нагружении последнем внутренним давлением, необходимо обеспечить требуемое усилие их натяжения в процессе изготовления сосуда. Для определения этого натяжения рассмотрим конструкцию цилиндрической части сосуда,

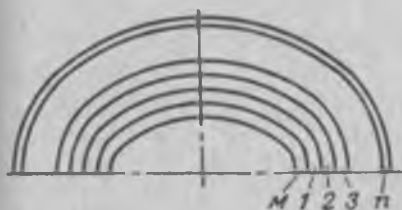


Рис. 163.



Рис. 164.

имеющую по толщине стенки n слоев стеклонитей (рис. 163), причем крайний внутренний слой считается герметизирующим и выполнен из металла (m). Рассмотрим вначале двухслойную конструкцию (рис. 164).

Из условия равновесия сил, действующих в наружном и внутренних слоях, в направлении вертикального диаметра цилиндра получим

$$\sigma_m \delta_m - \sigma_{01} \delta_{01} = 0, \quad (10.14)$$

где δ_m , δ_{01} — толщина металлического слоя и слоя намотки;

σ_{01} — напряжение растяжения в слое намотки;

σ_m — напряжение сжатия в герметизирующем слое.

Из уравнения (10.14) находим

$$\sigma_{01} = \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}}, \quad (10.15)$$

где $\sigma_m^{\text{доп}}$ — допускаемое напряжение сжатия в металлическом слое.

После намотки второго слоя стекловолна будем иметь (рис. 165)

$$(\sigma_m + X_1) \delta_m - (\sigma_{01} + X_1') \delta_{01} - \sigma_{02} \delta_{02} = 0$$

или

$$\sigma_m \delta_m - \sigma_{01} \delta_{01} + X_1 \delta_m - X_1' \delta_{01} - \sigma_{02} \delta_{02} = 0. \quad (10.16)$$

Первые два подчеркнутых члена в уравнении (10.16) на основании уравнения (10.14) равны нулю.

Тогда из (10.16) для неизвестной величины X_1 получим выражение

$$X_1 = X_1' \frac{\delta_{01}}{\delta_m} + \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_m},$$

где X_1 — дополнительное напряжение сжатия в слое металла от намотки второго слоя стекловолокна;

X_1' — дополнительное напряжение в первом слое намотки после намотки второго слоя.

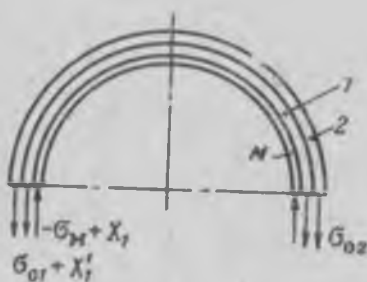


Рис. 165.

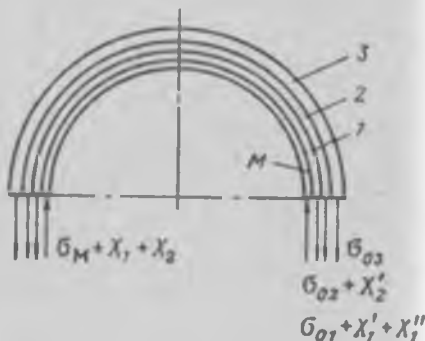


Рис. 166.

Тогда суммарные напряжения в металлическом слое будут

$$\sigma_m^{\Sigma} = \sigma_m + X_1 = \sigma_{01} \frac{\delta_{01}}{\delta_m} + X_1' \frac{\delta_{01}}{\delta_m} + \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_m} = \sigma_m^{\text{доп}}.$$

Отсюда получаем

$$X_1' = \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}} - \sigma_{01} - \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}}. \quad (10.17)$$

Суммарные напряжения в слое 1 намотки

$$\sigma_{01}^{\Sigma} = \sigma_{01} + X_1' = \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}} - \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}}.$$

Допустим, что баллон имеет только два слоя намотки стекловолокна. Поставим требование, чтоб в обоих слоях напряжения были одинаковыми:

$$\sigma_{02} = \sigma_{01}^{\Sigma}.$$

Из этого условия получим величину натяжения во втором слое намотки

$$\sigma_{02} = \frac{\sigma_{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}}}{1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}}}. \quad (10.18)$$

Сравнивая формулы (10.15) и (10.18), можно видеть, что натяжение во втором слое уменьшилось по сравнению с натяжением первого слоя.

Теперь допустим, что конструкция имеет три слоя намотки (1, 2, 3 на рис. 166):

$$(\sigma_m + X_1 + X_2)\delta_m - (\sigma_{01} + X'_1 + X''_1)\delta_{01} - (\sigma_{02} + X_2)\delta_{02} - \sigma_{03}\delta_{03} = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \sigma_m \delta_m - \sigma_{01} \delta_{01} + X_1 \delta_m - X'_1 \delta_{01} - \sigma_{02} \delta_{02} + \\ & + X_2 \delta_m - X'_2 \delta_{01} - X''_2 \delta_{02} - \sigma_{03} \delta_{03} = 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Сумма подчеркнутых членов на основании уравнения (10.16) равна нулю. Из оставшейся части уравнения (10.19) получим

$$X_2 = X'_1 \frac{\delta_{01}}{\delta_m} + X'_2 \frac{\delta_{02}}{\delta_m} + \sigma_{03} \frac{\delta_{03}}{\delta_m}.$$

Суммарные напряжения в слоях будут равны:
в слое металла

$$\begin{aligned} \sigma_m^{\Sigma} &= \sigma_m + X_1 + X_2 = (\sigma_{01} + X'_1 + X''_1) \frac{\delta_{01}}{\delta_m} + \\ & + (\sigma_{02} + X'_2) \frac{\delta_{02}}{\delta_m} + \sigma_{03} \frac{\delta_{03}}{\delta_m} = \sigma_m^{\text{доп}}, \end{aligned}$$

в первом слое намотки

$$\sigma_{01}^{\Sigma} = \sigma_{01} + X'_1 + X''_1 = \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}} - \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + X'_1,$$

во втором слое намотки

$$\sigma_{02}^{\Sigma} = \sigma_{02} + X'_2.$$

Поставим условие равнопрочности слоев:

$$\sigma_{01}^{\Sigma} = \sigma_{02}^{\Sigma}, \quad \sigma_{02}^{\Sigma} = \sigma_{03}, \quad \sigma_m^{\Sigma} = \sigma_m^{\text{доп}}.$$

В развернутом виде эти условия будут иметь вид

$$\sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}} - \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + X'_1 = \sigma_{02} + X'_2,$$

$$\sigma_{02} + X'_2 = \sigma_{03},$$

$$(\sigma_{01} + X'_1 + X''_1) \frac{\delta_{01}}{\delta_m} + (\sigma_{02} + X'_2) \frac{\delta_{02}}{\delta_m} + \sigma_{03} \frac{\delta_{03}}{\delta_m} = \sigma_m^{\text{доп}}.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$X'_2 = \sigma_{03} - \sigma_{02},$$

$$X'_1 = \sigma_{03} + \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} - \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}},$$

$$X'_1 = 2\sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}} - \sigma_{01} - \sigma_{02} \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} - \sigma_{03} \left(1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + \frac{\delta_{03}}{\delta_{01}} \right). \quad (10.20)$$

Из сравнения выражений (10.17) и (10.20) найдем

$$\sigma_{03} = \frac{\sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}}}{1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + \frac{\delta_{03}}{\delta_{01}}}. \quad (10.21)$$

Из сравнения структуры формул (10.15), (10.18), (10.21) можно видеть, что для любого n -го слоя намотки напряжение

$$\sigma_{0n} = \frac{\sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}}}{1 + \frac{\delta_{01}}{\delta_{01}} + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + \dots + \frac{\delta_{0n}}{\delta_{01}}}. \quad (10.22)$$

Таким образом, если напряжения в слоях после намотки будут определяться по формуле (10.22), то в каждом из слоев напряжение будет одинаковым. При этом все слои при нагружении баллона внутренним давлением будут одновременно вступать в работу, что особенно важно для максимального использования материала.

Из формул (10.18) — (10.22) видно, что натяжение в каждом последующем слое должно быть меньше, чем в предыдущем. Если толщина всех слоев одинакова, то можно записать

$$\sigma_{01} = \frac{A}{1}, \quad \sigma_{02} = \frac{A}{2}, \quad \sigma_{03} = \frac{A}{3}, \quad \dots, \quad \sigma_{0n} = \frac{A}{n},$$

где

$$A = \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\delta_{01}}. \quad (10.23)$$

Таким образом, для того чтобы после намотки все слои находились под одинаковым натяжением, необходимо уменьшать натяжение в каждом последующем слое в сравнении с первым в n раз. Сказанное графически представлено на рис. 167.

Натяжение каждого слоя намотки вызывает сжатие внутреннего герметизирующего слоя. Напряжение сжатия в этом слое будет

$$\sigma_m = \frac{q_0 R}{\delta_m} + \frac{1}{2} \frac{q_0 R}{\delta_m} + \frac{1}{3} \frac{q_0 R}{\delta_m} + \dots + \frac{1}{n} \frac{q_0 R}{\delta_m} =$$

$$= \frac{q_0 R}{\delta_m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

где n — порядковый номер слоя намотки.

Допустимое напряжение в металлическом герметизирующем слое можно подсчитать следующим образом.

Кольцевые напряжения в этом слое

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр} R}{\delta_m},$$

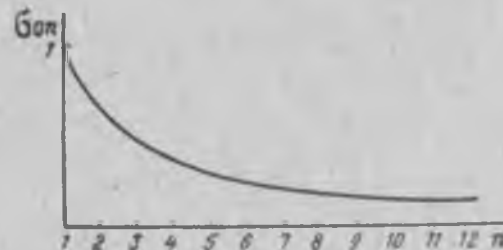


Рис. 167.

где критическое давление определяется по формуле Папковича (11.17)

$$q_{кр} = 0,92 E \frac{\delta_m^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}}.$$

Тогда

$$\sigma_{кр} = 0,92 E \frac{\delta_m}{l} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}}.$$

Из условия

$$\sigma_m = \sigma_m^{\text{доп}} = \frac{\sigma_{кр}}{f},$$

где f — коэффициент безопасности,

найдем выражение для q_0 :

$$\frac{q_0 R}{\delta_m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 0,92 E \frac{\delta_m}{lf} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}},$$

откуда

$$q_0 = \frac{0,92 E}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \frac{\delta_m^2}{Rlf} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}}.$$

Имея выражение для q_0 , можно подсчитать натяжение в слоях при намотке по формулам (10.23), в которых

$$A = \sigma_m^{\text{доп}} \frac{\delta_m}{\epsilon_{01}} = \frac{0,92 E}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \frac{\delta_m^2}{\delta_{01} l f} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}}.$$

Тогда напряжения должны быть: в первом слое

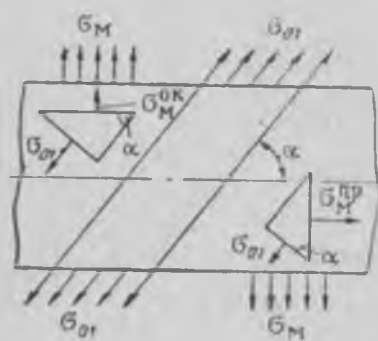


Рис. 168.

$$\sigma_{01} = 0,92 E \frac{\delta_m^2}{\delta_{01} l f} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}},$$

во втором слое

$$\sigma_{02} = \frac{1}{2} \frac{0,92 E}{1 + \frac{1}{2}} \frac{\delta_m^2}{\delta_{01} l f} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}},$$

в третьем слое

$$\sigma_{03} = \frac{1}{3} \frac{0,92 E}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \frac{\delta_m^2}{\delta_{01} l f} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}},$$

в n -м слое

$$\sigma_{0n} = \frac{1}{n} \frac{0,92 E}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \frac{\delta_m^2}{\delta_{01} l f} \sqrt{\frac{\delta_m}{R}}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о натяжении стеклонитей при косой намотке.

В этом случае во внутреннем герметизирующем слое возникает двухосное напряженное состояние сжатия. Величину сжимающих напряжений в осевом и окружном направлениях можно определить по рис. 168. Составим уравнения равновесия выделенных на этом рисунке элементов после намотки первого слоя:

$$\sigma_m^{\text{np}} \delta_m - \sigma_{01} \delta_{01} \cos^2 \alpha = 0,$$

$$\sigma_m^{\text{ок}} \delta_m - \sigma_{01} \delta_{01} \sin^2 \alpha = 0.$$

Из этих уравнений можно определить напряжение натяжения нитей в первом слое намотки

$$\sigma_{01} = \frac{\delta_m}{\delta_{01}} \frac{\sigma_m^{\text{np}}}{\cos^2 \alpha}, \quad \sigma_{01} = \frac{\delta_m}{\delta_{01}} \frac{\sigma_m^{\text{ок}}}{\sin^2 \alpha}.$$

Здесь σ_m^{np} — интенсивность продольных сжимающих напряжений в герметизирующем слое в направлении оси цилиндра;

$\sigma_m^{\text{ок}}$ — то же в окружном направлении.

После намотки второго слоя с наклоном в противоположную сторону по отношению к оси оболочки уравнения равновесия будут иметь вид

$$(\sigma_m^{\text{np}} + X_1) \delta_m - (\sigma_{01} + X_1') \delta_{01} \cos^2 \alpha + \sigma_{02} \delta_{02} \cos^2 \alpha = 0,$$

$$(\sigma_m^{\text{ок}} + Y_1) \delta_m - (\sigma_{01} + Y_1') \delta_{01} \sin^2 \alpha - \sigma_{02} \delta_{02} \sin^2 \alpha = 0.$$

Здесь X_1, X_1', Y_1, Y_1' — дополнительные напряжения в слое металла и в первом слое стеклонитей после намотки второго слоя.

Из этих уравнений при использовании выражений для σ_{01} находим

$$X_1 = \left(\frac{\delta_{01}}{\delta_m} X_1' + \frac{\delta_{02}}{\delta_m} \sigma_{02} \right) \cos^2 \alpha,$$

$$Y_1 = \left(\frac{\delta_{01}}{\delta_m} Y_1' + \frac{\delta_{02}}{\delta_m} \sigma_{02} \right) \sin^2 \alpha.$$

Суммарные напряжения в металле после намотки второго слоя

$$\sigma_{m\Sigma}^{\text{np}} = \sigma_m^{\text{np}} + X_1 = \left(\frac{\delta_{01}}{\delta_m} \sigma_{01} + \frac{\delta_{01}}{\delta_m} X_1' + \frac{\delta_{02}}{\delta_m} \sigma_{02} \right) \cos^2 \alpha,$$

$$\sigma_{m\Sigma}^{\text{ок}} = \sigma_m^{\text{ок}} + Y_1 = \left(\frac{\delta_{01}}{\delta_m} \sigma_{01} + \frac{\delta_{01}}{\delta_m} Y_1' + \frac{\delta_{02}}{\delta_m} \sigma_{02} \right) \sin^2 \alpha.$$

Из этих равенств получим

$$X_1' = \frac{\delta_m}{\delta_{01}} \left(\frac{\sigma_{m\Sigma}^{\text{np}}}{\cos^2 \alpha} - \frac{\delta_{01}}{\delta_m} \sigma_{01} - \frac{\delta_{02}}{\delta_m} \sigma_{02} \right),$$

$$Y_1' = \frac{\delta_m}{\delta_{01}} \left(\frac{\sigma_{m\Sigma}^{\text{ок}}}{\sin^2 \alpha} - \frac{\delta_{01}}{\delta_m} \sigma_{01} - \frac{\delta_{02}}{\delta_m} \sigma_{02} \right).$$

Тогда результирующие напряжения в первом слое намотки можно представить в виде

$$\sigma_{01\Sigma} = \sigma_{01} + X_1' = \frac{\delta_m}{\delta_{01}} \frac{\sigma_{m\Sigma}^{\text{np}}}{\cos^2 \alpha} - \frac{\delta_{01}}{\delta_{01}} \sigma_{01},$$

$$\sigma_{01\Sigma} = \frac{\delta_m}{\delta_{01}} \frac{\sigma_{m\Sigma}^{\text{ок}}}{\sin^2 \alpha} - \frac{\delta_{01}}{\delta_{01}} \sigma_{01}.$$

Приравнявая напряжения в первом и втором слоях

$$\sigma_{02} = \sigma_{01\Sigma},$$

находим, что

$$\sigma_{02} = \frac{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{01}} \frac{\sigma_m^{np}}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_{01}}};$$

$$\sigma_{02} = \frac{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{01}} \frac{\sigma_m^{ок}}{\sin^2 \alpha}}{1 + \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{01}}}.$$

Аналогично можно получить выражения для напряжений в последующих слоях намотки:

$$\sigma_{03} = \frac{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{01}} \frac{\sigma_m^{np}}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_{01}} + \frac{\varepsilon_{03}}{\varepsilon_{01}}};$$

$$\sigma_{03} = \frac{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{01}} \frac{\sigma_m^{ок}}{\sin^2 \alpha}}{1 + \frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_{01}} + \frac{\varepsilon_{03}}{\varepsilon_{01}}}$$

и т. д.

Таким образом, мы получили формулы, связывающие напряжения в металлическом слое с напряжениями в слоях, полученных намоткой нитей. Для определения допустимого натяжения волокон при намотке воспользуемся формулой (17.7)

$$\frac{\sigma_m^{np}}{\sigma_{кр}^{np}} + \frac{\sigma_m^{ок}}{\sigma_{кр}^{ок}} < 1,$$

где

$$\sigma_{кр}^{np} = 0,26E \frac{\varepsilon_m}{R}; \quad \sigma_{кр}^{ок} = \frac{q_{кр}R}{\varepsilon_m}; \quad q_{кр} = 0,92E \frac{\varepsilon_m^2}{Rl} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{R}};$$

R — радиус цилиндра, а l — его длина.

Если подставить в эту формулу значения продольных и окружных напряжений σ_m^{np} и $\sigma_m^{ок}$, возникающих в герметизирующем слое после намотки каждого слоя, то можно получить выражения для определения допустимого натяжения в слоях. Например, после намотки первого слоя имеем

$$\sigma_m^{np} = \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_m} \sigma_{01} \cos^2 \alpha, \quad \sigma_m^{ок} = \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_m} \sigma_{01} \sin^2 \alpha.$$

Тогда

$$\frac{\frac{\delta_{01}}{\delta_M} \sigma_{01} \cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\frac{\delta_{01}}{\delta_M} \sigma_{01} \sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}} < 1.$$

Отсюда находим

$$\sigma_{01} < \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}}}.$$

Для второго слоя получим

$$\sigma_{02} < \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{\left(1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}}\right) \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}}\right)}.$$

Для n -го слоя

$$\sigma_{0n} < \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{\left(1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + \frac{\delta_{03}}{\delta_{01}} + \dots + \frac{\delta_{0n}}{\delta_{01}}\right) \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}}\right)}.$$

Если толщина слоев будет одинаковой, то

$$\begin{aligned} \sigma_{01} &< \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}}}, \\ \sigma_{02} &< \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}}\right)}, \\ \sigma_{03} &< \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{3 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}}\right)} \end{aligned}$$

Если подставить в эти формулы $\frac{\sigma_{кр}^{пр}}{f}$ вместо $\sigma_{кр}^{пр}$, $\frac{\sigma_{кр}^{ок}}{f}$ вместо $\sigma_{кр}^{ок}$, где f — коэффициенты безопасности, то вместо неравенств получим равенства

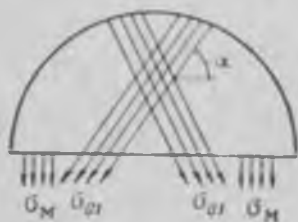


Рис. 169.

$$\sigma_{01} = \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{f \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}} \right)},$$

$$\sigma_{02} = \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}}}{2f \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{пр}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{кр}^{ок}} \right)}$$

и т. д.

В случае сферы при $\alpha = 45^\circ$ (рис. 169)

$$\sigma_M \delta_M - \sigma_{01} \delta_{01} = 0,$$

откуда

$$\sigma_{01} = \frac{\delta_M}{\delta_{01}} (\sigma_M)_{доп}.$$

Аналогично для второго слоя

$$\sigma_{02} = \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}} (\sigma_M)_{доп}}{1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}}}.$$

Для n -го слоя

$$\sigma_{0n} = \frac{\frac{\delta_M}{\delta_{01}} (\sigma_M)_{доп}}{1 + \frac{\delta_{02}}{\delta_{01}} + \frac{\delta_{03}}{\delta_{01}} + \dots + \frac{\delta_{0n}}{\delta_{01}}}.$$

Для сферы в качестве $(\sigma_M)_{доп}$ следует принять

$$(\sigma_M)_{доп} = \frac{\sigma_{кр}}{f} = \frac{0,2 E \frac{\delta_M}{R}}{f},$$

где f — коэффициент безопасности.

Раздел III

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

Глава XI

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В предыдущих главах рассмотрены вопросы, касающиеся расчета оболочек на прочность. Полученные в этих главах формулы дают возможность с достаточной для практики точностью оценить величину и характер распределения напряжений в оболочках различных геометрических форм от заданных внешних нагрузок.

После определения напряжений их следует сравнить с разрушающими: в случае растяжения — с пределом текучести или пределом прочности материала оболочки, в случае сжатия — с критическими напряжениями.

При действии растягивающих напряжений разрушение конструкции связано с нарушением сплошности материала — с образованием трещин.

Если нормальные напряжения будут сжимающими или в конструкции действуют касательные напряжения определенной величины, то в качестве разрушающих могут быть в основном критические напряжения. В данном случае разрушение конструкции связано с изменением ее формы, ее поверхность становится волнообразной. В этом случае говорят, что конструкция «работает на устойчивость».

Если характеристики прочности материала конструкции — предел прочности и предел текучести — получаются из испытаний образцов на растяжение, то критические напряжения могут быть получены только теоретическим путем с последующей их экспериментальной проверкой.

В данной главе рассмотрены различные случаи нагружения оболочек и получены формулы для критических напряжений.

§ 48. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

Тонкостенные оболочки после потери устойчивости обычно покрываются ямками и выпучинами. Напряжение, при котором произошло это явление, называется критическим.

Метод, который в дальнейшем будет применен к решению отдельных частных задач устойчивости оболочек, поясняется

на примере потери устойчивости сжатой в осевом направлении тонкой цилиндрической оболочки¹.

Пусть указанная оболочка при некотором значении сжимающей силы потеряла устойчивость и ее поверхность покрылась регулярной сеткой ямок и выпучин. Выясним, какие граничные условия могут быть на контуре ямок и выпучин. Для этого напишем выражение полной потенциальной энергии для какой-нибудь ямки или выпучины

$$U = \frac{B}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right) dx dy + \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b [\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\mu \chi_x \chi_y + 2(1-\mu) \chi_{xy}^2] dx dy - q \int_0^a \int_0^b w dx dy. \quad (11.1)$$

Выражение (11.1) полностью совпадает с выражением (7.4), если в нем положить $q_x = q_y = 0$.

В приведенном выше интеграле энергии интегрирование распространяется только на поверхность ямки или выпучины. Кроме того, для простоты выкладок внешняя нагрузка q в данном случае считается постоянной, так как вид этой нагрузки не влияет на характер граничных условий.

Кроме того, в приведенном выражении энергии опущены слагаемые, которыми выражена работа внутренних реактивных усилий, распределенных по контуру ямок и выпучин. Можно показать, что работа этих усилий равна нулю. В самом деле, допустим, что в (11.1) должны быть слагаемые, выражающие работу этих усилий. Тогда вместо (11.1) можно написать

$$V = U + A, \quad (11.2)$$

где A — работа реактивных усилий, а U определяется выражением (11.1).

С другой стороны, известно, что если рассматривать всю оболочку в целом, покрытую одинаковыми по площади ямками и выпучинами, то для нее полная энергия будет равна сумме выражений (11.1)

$$\mathcal{E} = U + U + \dots = 2mnU, \quad (11.3)$$

где $2mn$ — общее количество ямок и выпучин;

m — количество ямок и выпучин в осевом направлении;

$2n$ — четное число ямок и выпучин в окружном направлении.

Так как после потери устойчивости оболочка находится в состоянии равновесия, то в состоянии равновесия будет находиться

¹ В данной главе автор излагает свое представление механизма потери устойчивости тонких упругих оболочек. Метод определения критических напряжений, которым автор пользуется, был им разработан впервые и не описывался в известных монографиях по устойчивости упругих систем (Прим. ред.).

и любая ямка или выпучина. На этом основании мы можем применить к выражениям (11.2) и (11.3) принцип возможных перемещений, согласно которому, если любая механическая система, в том числе и упругая, находится в состоянии равновесия, то сумма работ всех сил, приложенных к данной системе, на возможных, согласных со связями произвольно малых перемещениях равна нулю:

$$\delta V = \delta U + \delta A = 0, \quad \delta \mathcal{E} = 2\pi n \delta U = 0. \quad (11.4)$$

Здесь символом δ обозначено возможное перемещение (вариация).

При применении начала возможных перемещений к выражениям полной потенциальной энергии (11.2) и (11.3), как обычно считалось, все заданные внешние силы не изменили ни первоначальной величины, ни направления.

Из второго уравнения системы (11.4) следует, что $\delta U = 0$, а из первого — $\delta A = 0$, т. е. работа реактивных усилий в выражении (11.2) сводится к некоторой постоянной величине A , которая в дальнейшем несущественна и может быть принята равной нулю. Тогда выражение для полной энергии в форме (11.2) совпадает с выражением (11.1). Этим самым доказано, что в (11.1) представлена полная потенциальная энергия для изолированной ямки или выпучины, и поэтому из этого выражения методами вариационного исчисления можно получить как дифференциальные уравнения равновесия, так и граничные условия по контуру ямок и выпучин.

Мы не приводим здесь всех выкладок специально для цилиндрической оболочки, а сразу же оговоримся, что высказанные выше рассуждения будут справедливы для любой замкнутой оболочки вращения, которая после потери устойчивости покрывается одинаковыми ямками и выпучинами. Поэтому можно сразу воспользоваться уравнениями § 34. Только в данном случае они будут отнесены к отдельно взятой ямке или выпучине:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_x^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 w &= q_r, \\ \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= E \delta \nabla_x^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x \delta u &= 0, \\ N_{xy} \delta v &= 0, \\ M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{I} \quad \left. \begin{aligned} N_y \delta v &= 0, \\ N_{xy} \delta u &= 0, \\ M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{II}$$

В столбце I представлены граничные условия на сторонах ямок или выпучин, перпендикулярных меридиональным сечениям оболочки; в столбце II представлены граничные условия на сторонах, перпендикулярных параллелям.

При использовании этих граничных условий в задачах местной устойчивости оболочек следует руководствоваться следующими соображениями. На контуре ямок и выпучин $w=0$, так как на границе ямок и выпучин прогиб оболочки равен нулю. Поэтому последнее условие в столбцах I и II автоматически выполняется.

При выборе граничных условий, содержащихся во второй строке снизу, следует исходить из физически возможного характера волнообразования после потери устойчивости. Поясним это примерами. Если поверхность оболочки после потери устойчивости покроется только ямками, обращенными внутрь оболочки, то на границе этих ямок должны отсутствовать углы поворота. Граничные условия в данном случае будут следующими:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Такая форма волнообразования возможна, например, при осесимметричной потере устойчивости цилиндрической оболочки при ее осевом сжатии.

Если оболочка может терять устойчивость с одновременным образованием ямок и выпучин, то на границе их раздела углы поворота будут отличаться от нуля. В этом случае граничные условия выражаются в форме

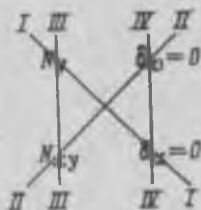
$$M_x=0, \quad M_y=0.$$

Такая форма волнообразования может иметь место при осевом сжатии тонкой цилиндрической оболочки.

Из этих двух примеров видно, что выбор тех или иных граничных условий по моментам и углам поворота должен быть в согласии с ожидаемым характером волнообразования после потери устойчивости.

Из остальных двух строк каждого столбца можно получить граничные условия для мембранных усилий и касательных перемещений.

В данном случае в отличие от предыдущего ожидаемая форма деформированной поверхности оболочки не дает нам никаких сведений о характере распределения этих усилий и перемещений по контуру ямок и выпучин. Поэтому выбор граничных условий по мембранным усилиям и касательным перемещениям необходимо подчинить единственному возможному требованию получения минимального критического напряжения. Схематично выбор этих граничных условий можно представить в следующем виде.



Задавая различные комбинации граничных условий по приведенным схемам при выбранных граничных условиях по моментам и углам поворота, можно обнаружить, что среди всех этих комбинаций есть только одна, которая приводит к наименьшему значению критической силы. В результате таких проб оказалось, что граничные условия III—III дают самое низкое значение для критической силы.

При решении некоторых задач это утверждение будет показано на конкретных примерах.

В уравнениях (11.5), используемых при решении задач устойчивости оболочек, поперечная нагрузка должна быть заменена некоторой фиктивной нагрузкой, равной проекции внутренних сжимающих усилий на нормаль к срединной поверхности оболочки,

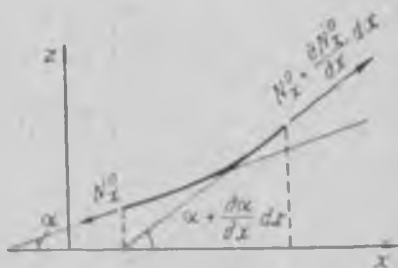


Рис. 170.

$$q_z = -N_x^0 \chi_x - N_y^0 \chi_y - 2N_{xy}^0 \chi_{xy},$$

где $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ — соответствующие изменения кривизны; N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 — интенсивность внутренних усилий в оболочке, критическое значение которых требуется определить.

Тогда первое уравнение системы (11.5) примет вид

$$\nabla^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x^0 \chi_x + N_y^0 \chi_y + 2N_{xy}^0 \chi_{xy} = 0.$$

При этом уравнение совместности деформаций останется без изменений.

Приведенная фиктивная поперечная нагрузка может быть получена следующим образом.

Рассмотрим элемент оболочки $dx dy$ в положении после деформации и составим проекцию меридионального усилия N_x^0 на ось z . Проекция линии действия этого усилия на плоскость xOz подвижной системы координат $x y z$ показана на рис. 170. Сумма проекций на ось z будет равна

$$-N_x^0 dy \alpha + \left(N_x^0 + \frac{\partial N_x^0}{\partial x} dx \right) dy \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right).$$

Раскрыв скобки и отбросив малые величины, получим

$$N_x^0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_x^0}{\partial x} \alpha dx dy,$$

где $\alpha, \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$ — углы наклона касательных к элементу dx .

Аналогично и для усилия N_y^0 получим

$$N_y^0 \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_y^0}{\partial y} \beta dx dy,$$

где $\beta, \beta + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy$ — углы наклона касательных к элементу dy .

Проекции касательных усилий N_{xy}^0 на ось z получим из рис. 171:

$$\begin{aligned} -N_{xy}^0 dx \alpha + \left(N_{xy}^0 + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} dy \right) dx \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \right) = \\ = N_{xy}^0 \frac{\partial \alpha}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} dx dy \alpha. \end{aligned}$$

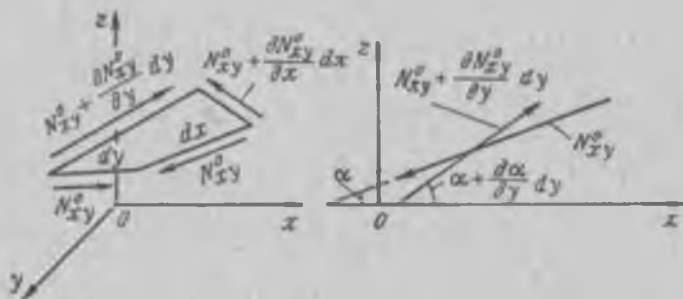


Рис. 171.

Аналогично и для второй пары касательных усилий

$$\begin{aligned} -N_{xy}^0 dy \beta + \left(N_{xy}^0 + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} dx \right) dy \left(\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \right) = \\ = N_{xy}^0 \frac{\partial \beta}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} dx dy \beta. \end{aligned}$$

После сложения всех проекций будем иметь

$$\begin{aligned} \left[N_x^0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial \beta}{\partial y} + N_{xy}^0 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\ + \left(\frac{\partial N_x^0}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} \right) dx dy \alpha + \left(\frac{\partial N_y^0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} \right) dx dy \beta. \end{aligned}$$

Из условия равновесия элемента $dx dy$ в плоскости xOy можно получить такие уравнения:

$$\frac{\partial N_x^0}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y^0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} = 0.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что отношение угла смежности к дифференциалу дуги численно равно кривизне кривой в данной точке. Поэтому

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \gamma_x, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \gamma_y.$$

Кроме того, имеем (см. § 34)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}.$$

Тогда сумма проекций мембранных усилий на ось z , отнесенная к единице поверхности, после изменения знака будет

$$N_x^0 \gamma_x + N_y^0 \gamma_y + 2N_{xy}^0 \gamma_{xy}.$$

В следующих параграфах перейдем к решению конкретных задач.

§ 49. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В этом случае $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, $N_x^0 = 0$, $N_{xy}^0 = 0$, и дифференциальные уравнения задачи принимают вид

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{E b}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (11.6)$$

Покажем на примере этой задачи выбор граничных условий на контуре ямок и выпучин.

Пусть оболочка теряет устойчивость по осесимметричной форме с образованием гофрообразных складок в окружном направлении. Тогда функции напряжений и прогиба будут зависеть только от переменной x . Вследствие этого исходные уравнения значительно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{E b}{R} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + D \frac{d^4 w}{dx^4} + N_x^0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (11.7)$$

Граничные условия на контуре полуволн сводятся к отсутствию изгибающего момента $M_x = 0$, так как угол поворота в точках перегиба отличен от нуля $\left(\frac{dw}{dx} \neq 0\right)$. Этому условию можно удовлетворить, если для прогиба принять выражение

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a},$$

где A — неизвестная амплитуда гофра;
 a — размер полуволны гофра.

Граничные условия для функции напряжений φ вследствие осесимметричной потери устойчивости могут быть только в виде $N_x = 0$. Этому условию может удовлетворить функция, аналогичная прогибу w :

$$\varphi = B \sin \frac{\pi x}{a}.$$

После подстановки принятых выражений для φ и w в уравнения (11.7) получим

$$\left[B \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + A \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{E\delta}{R} \right] \sin \frac{\pi x}{a} = 0,$$

$$\left[-\frac{B}{R} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + DA \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 - N_x^0 A \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi x}{a} = 0.$$

После сокращения на $\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a}$ найдем

$$B \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + A \frac{E\delta}{R} = 0,$$

$$-\frac{B}{R} + A \left[D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - N_x^0 \right] = 0.$$

Так как A и B в этих уравнениях не равны нулю, то из условия равенства нулю определителя этой системы получим

$$N_x^0 = \frac{E\delta}{R^2} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2} + D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2.$$

Рассматривая в этом выражении длину полуволны как параметр, можно определить минимум критического усилия N_x^0 .

Обозначим $\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = \xi$. Тогда

$$N_x^0 = \frac{E\delta}{R^2} \frac{1}{\xi} + D\xi. \quad (11.8)$$

Для определения минимума имеем условие

$$\frac{dN_x^0}{d\xi} = -\frac{E\delta}{R} \frac{1}{\xi^2} + D = 0,$$

откуда

$$\xi = \sqrt{\frac{E\delta}{DR^2}}.$$

Тогда

$$N_{x \min}^0 = 2 \sqrt{\frac{DE\delta}{R^2}} = \frac{E\delta^2}{R \sqrt{\delta(1-\mu^2)}} \approx 0,6E \frac{\delta^2}{R}. \quad (11.9)$$

Следовательно, критическое напряжение сжатия при осесимметричной форме потери устойчивости

$$\sigma_{кр} = 0,6E \frac{h}{R}.$$

Теперь решим эту задачу, исходя из предположения, что оболочка после потери устойчивости покрылась одинаковыми ямами и выпучинами. Такую форму деформированной поверхности оболочки приближенно можно представить следующим выражением для прогиба:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.10)$$

Из (11.10) следует, что по контуру ямок и выпучин прогиб и изгибающий момент равны нулю. Здесь a и b — размеры ямок и выпучин в осевом и окружном направлениях соответственно. Функцию напряжений примем в виде

$$\varphi = B \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Можно убедиться, что принятое выражение для φ удовлетворяет следующим граничным условиям.

При $x=0, x=a$

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -B \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0,$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -B \left(\frac{\pi}{a} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \neq 0.$$

Так как $N_{xy} \neq 0$, то должно быть $v=0$. В этом легко убедиться, если определить перемещение v согласно закону Гука

При $y=0, y=b$

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -B \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0,$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -B \left(\frac{\pi}{a} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \neq 0.$$

Так как $N_{xy} \neq 0$, то должно быть $u=0$, т. е. принятое выражение для функции напряжений удовлетворяет граничным условиям 1—1 (стр. 260).

Подставим необходимые производные от выражений φ и w в уравнения (11.6). Тогда из условия равенства нулю определителя этих уравнений получим

$$N_x^0 = \frac{\frac{E\delta}{R^2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}{\left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2} + D \frac{\left[\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2}.$$

Введем обозначение

$$\xi = \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}.$$

Тогда

$$N_x^0 = \frac{E\delta}{R^2} \xi + \frac{D}{\xi}.$$

Из сравнения этого выражения для N_x^0 с выражением (11.8) видно, что по структуре они полностью совпадают. Следовательно, для критического напряжения в данном случае получим формулу (11.9).

Рассмотрим граничные условия для функции напряжений III—III (стр. 260). При этом выражение для прогиба сохраним в форме (11.10). Граничным условиям III—III будет удовлетворять следующее выражение¹ для φ :

$$\begin{aligned} \varphi = & B_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + B_2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{2\pi y}{b} + \\ & + B_3 \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + B_4 \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \sin^2 \frac{2\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим первое приближение при $B_2=0$, $B_3=0$, $B_4=0$. Составим необходимые производные от выражений φ и w и подставим их в уравнения (11.6). Так как эти функции не удовлетворяют уравнениям (11.6), то решение целесообразно искать, используя метод Бубнова—Галеркина. Согласно этому методу умножим первое уравнение на $\sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy$, а второе — на $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy$, проинтегрируем в пределах $0—a$, $0—b$ и результаты приравняем нулю. При этом получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} B_1 = & - \frac{16E\delta A \left(\frac{a}{\pi}\right)^2}{9\pi^2 R \left[0,75 + 0,5 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,75 \left(\frac{a}{b}\right)^4\right]}, \\ AN_x^0 = & - \frac{64B_1}{9\pi^2 R} + DA \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right], \\ N_x = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

¹ В этом легко убедиться, если составить выражения

Исключая из этих уравнений параметры A и B_1 , найдем

$$\frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x^0}{E^0} = \frac{1024 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2}{81\pi^4 \left[0,75m^4 + 0,5 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2 n^2 + 0,75 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^4 n^4 \right]} + \alpha \frac{\left[m^2 + \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 n^2 \right]^2}{\left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2} \quad (11.11)$$

Здесь обозначено

$$\alpha = \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)R^2};$$

$$m = \frac{l}{a}; \quad n = \frac{\pi R}{b};$$

l — длина оболочки.

Результаты подсчета по этой формуле для оболочки, имеющей $\frac{\pi R}{l} = 1$, $\frac{\delta}{R} = 0,005$, помещены в табл. 9.

Таблица 9

$n=2$	$n=3$	$n=4$
$m=15$ $\sigma_x=0,00134$	$m=15$ $\sigma_x=0,00131$	$m=14$ $\sigma_x=0,00136$
$m=16$ $\sigma_x=0,00127$	$m=16$ $\sigma_x=0,00130$	$m=15$ $\sigma_x=0,00132$
$m=17$ $\sigma_x=0,00127$	$m=17$ $\sigma_x=0,00129$	$m=16$ $\sigma_x=0,00131$
$m=18$ $\sigma_x=0,00129$	$m=18$ $\sigma_x=0,00131$	$m=17$ $\sigma_x=0,00132$

Из этой таблицы видно, что наименьшее значение для критического напряжения

$$\left(\frac{\sigma}{E} \right)_{кр} = 0,00127.$$

Формулу для критического напряжения сжатия представим в форме

$$\sigma_{кр} = kE \frac{b}{R},$$

где k — числовой коэффициент, который при первых наших решениях получался равным 0,6.

В данном случае этот коэффициент

$$\left(\frac{\tau}{E}\right)_{кр} = k \frac{b}{R} = 0,00127,$$

откуда

$$k = 0,00127 \frac{R}{b} = 0,254. \quad (11.12)$$

Таким образом, при реализации на контуре ямок и выпучин граничных условий III—III (стр. 260) получалось более низкое критическое напряжение. Поскольку граничные условия на контуре ямок и выпучин формируются самой оболочкой в процессе потери устойчивости, то эти граничные условия будут такими, при которых критическая нагрузка для данной оболочки будет наименьшей. Снижение критического напряжения при граничных условиях III—III указывает на то, что эти граничные условия, по-видимому, будут реализованы и в эксперименте. Граничные условия на контуре ямок и выпучин должны быть естественными. Всякое произвольное изменение этих граничных условий при решении задачи влечет за собой увеличение критического напряжения.

Увеличивая в последнем решении число членов в выражении для функции напряжений, можно получить более точное значение для критического напряжения¹. При удержании в этом выражении трех слагаемых ($B_4=0$) и четырех было получено одно и то же значение критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = 0,26E \frac{b}{R}. \quad (11.13)$$

При решении данной задачи конечно-разностным методом при граничных условиях вида III—III для функции напряжений и шарнирным опиранием по контуру ямок и выпучин по функции прогиба в последней формуле был получен коэффициент 0,3 (как для прямоугольных, так и для ромбовидных ямок и выпучин). Формулой (11.13) определяется критическое напряжение для случая длинных оболочек. Под длинными оболочками следует понимать такие, на длине которых может свободно уложиться одна полуволна. Если на длине оболочки свободно не укладывается одна полуволна, то коэффициент в формуле увеличится и будет зависеть как от длины, так и от толщины оболочки.

¹ Увеличение числа членов в функции напряжений в первых двух решениях не изменяет величины критического напряжения.

Чтобы получить формулу для коротких оболочек, обратимся к табл. 9. Из нее видно, что минимум критического напряжения получается при сравнительно малых значениях чисел n по сравнению с m . Поэтому представляется возможным в исходном выражении (11.11) отбросить слагаемые, содержащие n . Тогда приближенно при $\mu = 0,3$ получим

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{0,0176}{m^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 + 0,9 \left(\frac{b}{R} \right)^2 \left(\frac{R}{l} \right)^2 m^2.$$

Если в этой формуле обозначить $\xi = m^2 \left(\frac{R}{l} \right)^2$ и определить минимум напряжения, то найдем

$$\sigma_{кр} = 0,251 E \frac{b}{R}.$$

Полученный здесь числовой коэффициент отличается от более точного его значения (11.12) только в третьем знаке.

На рис. 172 приведены кривые критического напряжения в зависимости от длины оболочки при различном значении чисел полуволн в осевом направлении.

Многочисленные экспериментальные результаты исследований по осевому сжатию тонких цилиндрических оболочек лежат весьма близко к тому, что дает формула (11.13). Разброс экспериментальных данных находится в пределах 0,15—0,3. Чем точнее изготовлена оболочка, тем выше для нее коэффициент k . Поэтому в практических расчетах это следует учитывать соответствующим изменением k в (11.13).

Разберем решение этой задачи, исходя из рассмотрения всей оболочки в целом. Граничные условия на контуре ямок и выпучин сохраним в форме III—III (стр. 260). В этом случае можно принять

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$\varphi = B_1 \sin^3 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta + B_2 \sin^5 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta + B_3 \sin^7 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta + \dots$$

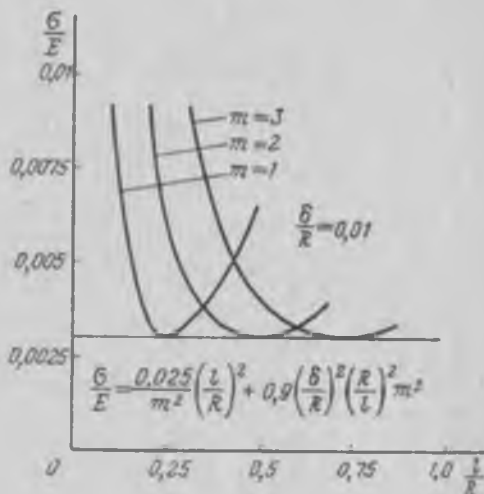


Рис. 172.

Эти функции на концах оболочки и на контуре ямок и выпучин удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$w=0, \quad M_x=0, \quad \sigma_x=0, \quad \sigma_{xy}=0.$$

Рассмотрим первое приближение:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$\varphi = B_1' \sin^3 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta = B_1' \left(3 \sin \frac{m\pi x}{l} - \sin \frac{3m\pi x}{l} \right) \sin n\theta.$$

В результате интегрирования уравнений (11.6) по методу Бубнова—Галеркина имеем

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{9 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2}{90 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 + 36 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 n^2 + 10n^4} + \alpha \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2}, \quad (11.14)$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{12(1-\mu^2)R^2}.$$

Расчеты, проведенные по (11.14), показывают, что наименьшее критическое напряжение получается при малых значениях чисел n , а удельный вес слагаемых, содержащих этот параметр, невелик и без ущерба для точности их можно отбросить. Тогда

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{0,1}{\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2} + \alpha \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2.$$

Минимум этого выражения по параметру m определяет $\sigma_{кр}$ в виде

$$\sigma_{кр} = 0,192E \frac{\delta}{R}.$$

При втором приближении

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$\varphi = B_1' \sin^3 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta + B_2' \sin^5 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta.$$

В этом случае

$$\sigma_{кр} = 0,22E \frac{\delta}{R}.$$

В результате последовательного увеличения числа слагаемых в функции напряжений (вплоть до $\sin^3 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta$) при том же выражении для прогиба было получено

$$\sigma_{кр} = 0,243E \frac{\delta}{R}.$$

Дальнейшее увеличение слагаемых в функции φ не изменило численный коэффициент в этой формуле.

Можно убедиться, что к этим результатам придем, если используем для решения данной задачи энергетический метод.

Полная потенциальная энергия оболочки будет

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2Eh} \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 - 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \right. \\ & + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy + \frac{D}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy + \\ & + N_x^0 \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left[\left(\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Для связи функции напряжений φ с функцией прогиба w имеем уравнение совместности

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (11.15)$$

Выражения для φ и w можно оставить из предыдущего решения. Для первого приближения

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$\varphi = B_1' \sin^3 \frac{m\pi x}{l} \sin n\theta.$$

После интегрирования уравнения (11.15) по методу Бубнова—Галеркина и получения связи между параметрами A и B_1 для полной энергии получим выражение

$$\mathcal{E} = \frac{\pi E h l A^2}{4 R^2} \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 \left\{ \frac{9 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2}{90 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^4 + 36 \left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 n^2 + 10 n^4} + \right.$$

$$+ \alpha \frac{\left[\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left(\frac{m\pi R}{l} \right)^2} - \frac{N_x^0}{E\delta} \Bigg|,$$

где

$$\alpha = \frac{\delta^2}{12(1 - \mu^2)R^2}.$$

Из условия $\delta\mathcal{E}=0$ получаем выражение для критического напряжения, в точности совпадающее с первым приближением по методу Бубнова—Галеркина.

Можно убедиться, что и все последующие приближения в энергетическом методе будут совпадать с соответствующими приближениями предыдущего решения.

Таким образом, идея раздельного рассмотрения ямок и выпучин — это лишь удобный образ для построения приближенного решения, и он совершенно необязателен. Можно рассматривать и всю оболочку в целом, но с использованием в приближенном решении естественных граничных условий по контуру полуовал.

Эта идея может рассматриваться как дальнейшее уточнение методов расчета оболочек на местную устойчивость. Критическая нагрузка зависит не только от выбранной формы деформированной поверхности оболочки после потери устойчивости и физических граничных условий, но также от того, какие граничные условия действительно реализуются на контуре ямок и выпучин, т. е. ставятся определенные требования к выбору аппроксимирующих функций.

Замечание к определению критических напряжений для цилиндрической оболочки при чистом изгибе. Если цилиндрическая оболочка нагружена по концам парами сил, то распределение осевых напряжений по сечению будет изменяться по закону синуса или косинуса (в зависимости от начала отсчета угла, см. § 23). Вследствие этого следует ожидать, что критическое напряжение для сжатой зоны в отличие от действия равномерного сжатия должно быть несколько выше: в пределах одной ямки или выпучины напряжение сжатия не остается постоянным и как следствие этого форма деформированной поверхности будет отличаться от чистого сжатия. При изгибе граничные условия на сторонах $y=0$, $y=b$ ямок и выпучин, выраженные через функцию w и ее производные, по-видимому, будут ближе к упругой заделке, чем к шарнирному опиранию. Надежное теоретическое решение этой задачи, по-видимому, отсутствует. Экспериментальная проверка по изгибу цилиндрических оболочек указывает на то, что коэффициент k в этом случае по сравнению с чистым сжатием выше на 15—18%.

§ 50 УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Для решения этой задачи может быть применен метод разделения переменных. Используем для функции прогиба w и функции напряжений φ выражения вида

$$w = W(x) \cos n\theta, \quad \varphi = F(x) \cos n\theta,$$

которые удовлетворяют условию периодичности в окружном направлении. Концы оболочки считаем шарнирно опертыми.

Подставив эти выражения в исходные уравнения § 49, получим два совместных уравнения в функции координаты x :

$$F^{IV} - \frac{2n^2}{R^2} F'' + \frac{n^4}{R^4} F - \frac{E\lambda}{R} W'' = 0,$$

$$F'' + DR \left(W^{IV} - \frac{2n^2}{R^2} W'' + \frac{n^4}{R^4} W \right) - \frac{n^2}{R} N_y^0 W + RN_x^0 W'' = 0.$$

Выразим эти уравнения через конечные разности:

$$F_k \left[6 + 4 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 + \left(\frac{nh}{R} \right)^4 \right] - \left[4 + 2 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 \right] (F_I + F_{II}) + F_I + F_{II} + F_s - \frac{E\lambda h^2}{R} (W_I + W_{II} - 2W_k) = 0, \quad (11.16)$$

$$F_I + F_{II} - 2F_k + \frac{DR}{h^2} \left\{ W_k \left[6 + 4 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 + \left(\frac{nh}{R} \right)^4 \right] - \left[4 + 2 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 \right] (W_I + W_{II}) + W_I + W_{II} \right\} - (nh)^2 q W_k + RN_x^0 (W_I + W_{II} - 2W_k) = 0.$$

Здесь обозначено

$$N_y^0 = qR.$$

Как было оговорено выше, концы оболочки будем считать шарнирно опертыми. Используя граничные условия, для контурных и законтурных точек получим следующие значения¹ функций W и F :

$$W_k = 0, \quad W_I = -W_{II}, \quad F_k = 0, \quad F_I = F_{II}.$$

Далее будем считать, что на длине оболочки образуется только одна полуволна, в то же время в окружном направлении, как это следует из выражения w , образуется $2n$ полуволн.

Первое приближение (рис. 173): $h = l/2$, где h — шаг сетки.

¹ Дополнительные напряжения σ_x и σ_{xy} по концам оболочки отсутствуют.

Составим уравнения (11.16) для точки 1:

$$F_1 \left[6 + 4 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 + \left(\frac{nh}{R} \right)^4 \right] + \left[4 + 2 \left(\frac{nh}{R} \right) \right] (0 + 0) + \\ + F_1 + F_1 - \frac{Eh}{R} (0 + 0 - 2W_1) = 0, \\ 0 + 0 - 2F_1 + \frac{DR}{h^2} \left\{ W_1 \left[6 + 4 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 + \left(\frac{nh}{R} \right)^4 \right] - \right. \\ \left. - \left[4 + 2 \left(\frac{nh}{R} \right) \right] (0 + 0) - W_1 - W_1 \right\} - (nh)^2 q W_1 = 0.$$

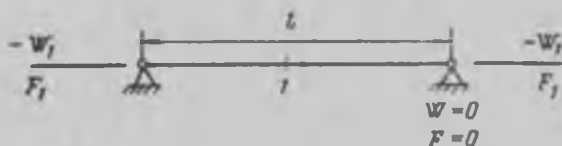


Рис. 173.

После некоторых преобразований эти уравнения можно переписать в форме

$$F_1 (a + 2) + \frac{2Eh h^2}{R} W_1 = 0, \\ F_1 = \frac{DR (a - 2) W_1}{2h^2} - \frac{1}{2} (nh)^2 q W_1.$$

Здесь обозначено

$$a = 6 + 4 \left(\frac{nh}{R} \right)^2 + \left(\frac{nh}{R} \right)^4.$$

Исключая из этих уравнений функцию F_1 и полагая, что $W_1 \neq 0$, получим выражение для $q_{кр}$:

$$\left(\frac{qR}{Eh} \right)_{кр} = \frac{(Rb)^2 \left(4 + 4n^2 \frac{h^2}{R^2} + n^4 \frac{h^4}{R^4} \right)}{12 (1 - \mu^2) n^2 h^4} + \frac{4}{n^2 \left(8 + 4n^2 \frac{h^2}{R^2} + n^4 \frac{h^4}{R^4} \right)}.$$

Для получения наименьшего критического давления необходимо исследовать полученное выражение на минимум по параметру n .

Аналитическое решение этой задачи приводит к очень громоздким выкладкам. Для приближенного определения $q_{кр}$ допустим, что по окружности оболочки после потери устойчивости

образуется много полуволн и параметр n будет большим числом. Тогда приближенно можно написать

$$\left(\frac{qR}{Eb}\right)_{\text{кр}} = \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)R^2} n^2 + \frac{4\left(\frac{R}{h}\right)^4}{n^6}.$$

Это выражение получает минимум при $n^2 = \frac{4R}{l} \sqrt{\frac{3R}{l} \sqrt{1-\mu^2}}$.

Тогда при $\mu=0,3$ получим

$$q_{\text{кр}}^I = 0,845E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

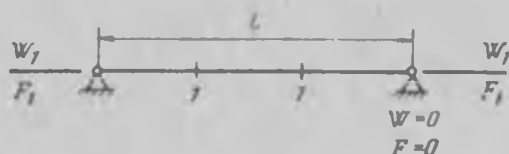


Рис. 174.

Это значение $q_{\text{кр}}^I$ можно несколько уточнить путем подстановки в исходное уравнение значений n^2 , немного больших и немного меньших, чем даст формула для n^2 . При этом следует помнить, что n — целые числа натурального ряда.

Если взять сетку с двумя точками (рис. 174), то для $q_{\text{кр}}^{II}$ получим выражение

$$\left(\frac{qR}{Eb}\right)_{\text{кр}}^{II} = \frac{(R\delta)^2 \left(1 + 2n^2 \frac{h^2}{R^2} + n^4 \frac{h^4}{R^4}\right)}{12(1-\mu^2)n^2 h^4} + \frac{1}{n^2 \left(3 + 2n^2 \frac{h^2}{R^2} + n^4 \frac{h^4}{R^4}\right)}.$$

Исследование этого выражения при тех же допущениях, что и в первом случае, приводит к следующему наименьшему значению $q_{\text{кр}}^{II}$:

$$q_{\text{кр}}^{II} = 0,884E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \text{ при } n^2 = \frac{3R}{l} \sqrt{\frac{6R}{l} \sqrt{1-\mu^2}}.$$

Применяя к полученным значениям $q_{\text{кр}}^I$ и $q_{\text{кр}}^{II}$ экстраполяцию (§ 2), получим

$$q_{\text{кр.экстр}} = 0,92E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \text{ при } n_{\text{экстр}}^2 = 7,7 \frac{R}{l} \sqrt{\frac{R}{l} \sqrt{1-\mu^2}}. \quad (11.17)$$

Полученная формула в точности совпадает с известной формулой П. Ф. Папковича.

В случае всестороннего сжатия цилиндрической оболочки внешним давлением при тех же граничных условиях, что и выше, получим следующие формулы.

Первое приближение: $h = l/2$:

$$\left(\frac{qR}{Eb}\right)_{кр}^I = \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)h^2} \frac{4+4\left(\frac{nh}{R}\right)^2 + \left(\frac{nh}{R}\right)^4}{1 + \left(\frac{nh}{R}\right)^2} +$$

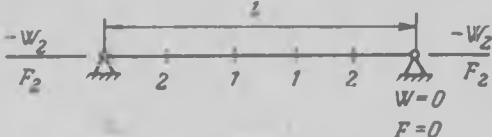
$$+ \frac{4h^2}{R^2 \left[1 + \left(\frac{nh}{R}\right)^2\right] \left[8+4\left(\frac{nh}{R}\right)^2 + \left(\frac{nh}{R}\right)^4\right]}$$


Рис. 175.

Второе приближение: $h = l/3$:

$$\left(\frac{qR}{Eb}\right)_{кр}^{II} = \frac{\delta^2}{6(1-\mu^2)h^2} \frac{1+2\left(\frac{nh}{R}\right)^2 + \left(\frac{nh}{R}\right)^4}{1+2\left(\frac{nh}{R}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2h^2}{R^2 \left[1+2\left(\frac{nh}{R}\right)^2\right] \left[3+2\left(\frac{nh}{R}\right)^2 + \left(\frac{nh}{R}\right)^4\right]}$$

Определив по этим формулам $q_{кр}^I$ и $q_{кр}^{II}$, более точное значение этих величин найдем посредством экстраполяции:

$$q_{кр.экт} = -0,8q_{кр}^I + 1,8q_{кр}^{II}.$$

Теперь рассмотрим решение с более мелким шагом: $h = \frac{l}{5}$ (рис. 175). В этом случае получим

$$\left(\frac{qR}{Eb}\right)_{кр}^{III} = \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{2} \left(\alpha a_8 - \frac{a_7}{a_2^2 - a_1 a_3} \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\alpha a_8 - \frac{a_7}{a_2^2 - a_1 a_3} \right)^2 + \alpha^2 (a_4^2 - a_1 a_5) + \frac{\alpha a_6}{a_2^2 - a_1 a_3} + \frac{1}{a_2^2 - a_1 a_3}} \right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \frac{625R^{2.82}}{12(1-\mu^2)l^4}, \\ a_1 &= 2 + 2\left(\frac{nl}{5R}\right)^2 + \left(\frac{nl}{5R}\right)^4, \\ a_2 &= 3 + 2\left(\frac{nl}{5R}\right)^2, \\ a_3 &= 7 + 4\left(\frac{nl}{5R}\right)^2 + \left(\frac{nl}{5R}\right)^4, \\ a_4 &= -1 + \left(\frac{nl}{5R}\right)^2, \\ a_5 &= 1 + 2\left(\frac{nl}{5R}\right)^2 + 2\left(\frac{nl}{5R}\right)^4, \\ a_6 &= 3a_4 + (a_3 - 1)a_5, \\ a_7 &= 6 + 6\left(\frac{nl}{5R}\right)^2 + 7\left(\frac{nl}{5R}\right)^4, \\ a_8 &= 7 + 6\left(\frac{nl}{5R}\right)^2 + 2\left(\frac{nl}{5R}\right)^4. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Более точным выражением для $q_{кр}^{III}$ следует пользоваться в тех случаях, когда требуется получить уточненное значение для критического давления. Если этого не требуется, то можно пользоваться формулой Папковича, которая для оболочек средней длины дает вполне надежные результаты.

Применим полученное выражение для $q_{кр}^{III}$ для определения критических давлений обшивки в клетках подкрепленной цилиндрической оболочки при действии на нее равномерного наружного давления.

Будем считать, что докритическое напряженное состояние для такой оболочки можно определить по безмоментной теории соответствующей гладкой оболочки. Пусть панель опирается на два соседних стрингера. При этом концы панели опираются на шпангоуты.

Чтобы перейти в выражении $q_{кр}^{III}$ от замкнутой оболочки к панели, необходимо заменить n на π/a_0 . Это следует из условия $\cos n\alpha = \cos \frac{\pi\alpha}{a_0}$, где a_0 — центральный угол панели (рис. 176). Тогда для коэффициентов (11.18) будем иметь аналогичные выражения, если в последних заменить

$$\frac{nl}{5R} \text{ на } \frac{\pi l}{5a}.$$

Рассмотрим два случая сочетания размеров клетки.

Клетка близка к квадратной: $a/l \sim 1$.

В этом случае для $q_{кр}$ будем иметь

$$\frac{qR}{E\delta} = \left(\frac{a}{\pi R}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{505R^{2\delta 2}}{(1-\mu^2)a^4} + 0,844 \right] \pm \sqrt{\frac{49\,000R^{4\delta 4}}{(1-\mu^2)^2 a^8} + \frac{136R^{2\delta 2}}{(1-\mu^2)a^4} + 0,0885} \right\}.$$

Заменяв здесь подкоренное выражение приближенной величиной

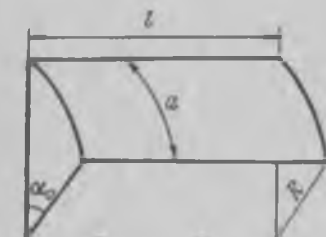


Рис. 176.

$$\left[\frac{222R^{2\delta 2}}{(1-\mu^2)a^4} + 0,306 \right]^2,$$

получим

$$\frac{qR}{E\delta} = \left(\frac{a}{\pi R}\right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{505R^{2\delta 2}}{(1-\mu^2)a^4} + 0,844 \right] \pm \left[\frac{222R^{2\delta 2}}{(1-\mu^2)a^4} + 0,306 \right] \right\}.$$

Сохраняя в этом выражении знак минус, имеем

$$\frac{qR}{E\delta} = \frac{3,1\delta^2}{(1-\mu^2)a^2} + 0,0117 \left(\frac{a}{R}\right)^2.$$

Рассматривая в этой формуле размер панели a в качестве параметра, найдем минимум критического давления ($\mu=0,3$):

$$q_{кр} = 0,4E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad a = 4,12 \sqrt{R\delta}.$$

Клетка сильно вытянута в осевом направлении:

$$a \ll l, \quad \left(\frac{l}{a}\right)^2 \gg 1.$$

В этом случае исходное уравнение можно приближенно записать в виде

$$\frac{qR}{E\delta} = \frac{\pi^2 \delta^2}{12(1-\mu^2)a^2} + \frac{175a^6}{2\pi^6 R^2 l^4}.$$

Рассматривая в этом выражении размер a как параметр, найдем минимум $q_{кр}$ ($\mu=0,3$):

$$q_{кр} = 0,89E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad a = 0,68 \sqrt{l \sqrt{R\delta}}.$$

Как и следовало ожидать, полученное в этом случае значение $q_{кр}$ совпадает с критическим давлением для замкнутой обо-

лочки, которая после потери устойчивости делится в окружном направлении на ряд пологих цилиндрических панелей.

Приведем без вывода формулы для наружного критического давления цилиндрических панелей, полученные при других граничных условиях на контуре.

1. Панель жестко заделана по всему контуру и дополнительные напряжения на нем отсутствуют ($\sigma_x=0$, $\sigma_y=0$, $\sigma_{xy}=0$).

В этом случае для функций φ и w были приняты выражения

$$w = W(x) \cos^2 \frac{\pi x}{2a_0}, \quad \varphi = F(x) \cos^2 \frac{\pi x}{2a_0},$$

где
$$a_0 = \frac{S}{2R};$$

S , R — ширина и радиус панели.

В результате первого ($h=l/2$) и второго ($h=l/3$) приближений было получено

$$\begin{aligned} \left(\frac{qR}{E\delta}\right)^I &= \frac{0,75\left(\frac{l}{R}\right)^2}{\left[8 + \frac{16}{3}\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^4\right]\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2 +} \\ &+ \frac{\left[8 + \frac{16}{3}\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^4\right]\left(\frac{l}{l}\right)^2}{4(1-\mu^2)\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2}, \\ \left(\frac{qR}{E\delta}\right)^{II} &= \frac{(l/R)^2}{12\left[3 + \frac{8}{3}\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^4\right]\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2 +} \\ &+ \frac{9\left[3 + \frac{8}{3}\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^4\right]\left(\frac{l}{l}\right)^2}{16(1-\mu^2)\left(\frac{\pi l}{3R}\right)^2}. \end{aligned}$$

В случае квадратной панели ($l \sim S$) было найдено

$$q_{кр}^I = 0,37E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad S^I = 5,7\sqrt{R\delta},$$

$$q_{кр}^{II} = 0,413E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad S^{II} = 5,83\sqrt{R\delta},$$

$$q_{кр.экстр} = 0,45E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad S_{экстр} = 5,94\sqrt{R\delta}.$$

Если панель сильно вытянута в осевом направлении ($l \gg S$), то

$$q_{кр}^I = 1,46E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad S^I = 1,8 \sqrt{l \sqrt{R\delta}},$$

$$q_{кр}^{II} = 1,53E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad S^{II} = 1,5 \sqrt{l \sqrt{R\delta}},$$

$$q_{кр.экстр} = 1,6E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad S_{экстр} = 1,254 \sqrt{l \sqrt{R\delta}}.$$

2. Панель жестко заделана по торцам и шарнирно оперта по продольным кромкам. Дополнительные напряжения отсутствуют ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_{xy} = 0$).

В этом случае для функций φ и w были использованы выражения

$$w = W(x) \cos \frac{\pi x}{a_0}, \quad \varphi = F(x) \cos \frac{\pi x}{a_0},$$

где

$$a_0 = \frac{S}{R}.$$

Для первого и второго приближения были получены следующие выражения:

$$\left(\frac{qR}{E\delta}\right)^I = \frac{(l/R)^2}{\left[8+4\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2S}\right)^4\right]\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2} + \frac{\left[8+4\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{2R}\right)^4\right]\left(\frac{\delta}{l}\right)^2}{3(1-\mu^2)\left(\frac{\pi l}{2S}\right)^2};$$

$$\left(\frac{qR}{E\delta}\right)^{II} = \frac{(l/R)^2}{9\left[3+2\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{3S}\right)^4\right]\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2} + \frac{3\left[3+2\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{3S}\right)^4\right]\left(\frac{\delta}{l}\right)^2}{4(1-\mu^2)\left(\frac{\pi l}{3S}\right)^2}.$$

Для панели, близкой к квадратной, было получено

$$q_{кр}^I = 0,495E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad S^I = l = 3,8 \sqrt{R\delta},$$

$$q_{кр}^{II} = 0,55E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad S^{II} = l = 4,15 \sqrt{R\delta},$$

$$q_{кр.экстр} = 0,6E \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad \text{при} \quad S_{экстр} = 4,5 \sqrt{R\delta}.$$

В случае сильно вытянутой панели

$$q_{кр}^I = 0,835E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad S^I = 1,2 \sqrt{l \sqrt{R\delta}},$$

$$q_{кр}^{II} = 0,88E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad S^{II} = 1,2 \sqrt{l \sqrt{R\delta}},$$

$$q_{кр.эктр} = 0,92E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad S_{эктр} = 1,2 \sqrt{l \sqrt{R\delta}}.$$

§ 51. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ВНЕШНЕГО РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ПАПКОВИЧА

В данном случае для решения задачи необходимо использовать уравнение равновесия, полученное в § 34, с сохранением в нем всех слагаемых, зависящих от переменной y . Все производные по x пропадут, так как для длинной оболочки волнообразование после потери устойчивости не будет зависеть от координаты x , если не считать небольших участков у концов оболочки.

Таким образом, разрешающие уравнения задачи имеют вид

$$\frac{d^4 w}{dy^4} = 0, \\ D \left(\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{w}{R^4} \right) + N_y^0 \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{w}{R^2} \right) = 0. \quad (11.19)$$

Для получения критического значения внешнего давления необходимо решить второе уравнение, для чего можно положить

$$w = A \cos n\bar{y} = A \cos \frac{n y}{R}.$$

Тогда при $A \neq 0$ получим

$$N_y^0 = -\frac{D(n^2 - 1)}{R^2}.$$

Так как $N_y^0 = qR$, то

$$q = \frac{D(n^2 - 1)}{R^3}.$$

Наименьшее значение этого давления будет при $n=2$:

$$q_{кр} = \frac{3D}{R^3}.$$

Подставим сюда $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$. Тогда

$$q_{кр} = \frac{E}{4(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{R} \right)^3. \quad (11.20)$$

Таким образом, для подсчета внешнего критического давления цилиндрической оболочки имеем формулы Папковича и (11.20), причем последняя, как это видно из ее вывода, справедлива только для очень длинной оболочки. Поэтому необходимо установить предел применимости этой формулы.

Из условия равенства критических давлений по рассматриваемым формулам при $\mu = 0,3$ получим

$$l \leq 3,35R \sqrt{\frac{R}{\delta}}. \quad (11.21)$$

Этим выражением устанавливается граница применимости формулы Папковича. Если

$$l \geq 3,35R \sqrt{\frac{R}{\delta}},$$

то следует пользоваться формулой (11.20).

Условие (11.21) устанавливает одну из границ применимости формулы Папковича. Вторую границу ее применимости определим из условия, что критическое напряжение в оболочке не превосходит предела пропорциональности материала, из которого она изготовлена, т. е. $\sigma_{кр} \leq \sigma_p$. Отсюда получаем второе условие

$$l \geq \frac{0,92E\delta}{\sigma_p \sqrt{\frac{R}{\delta}}}.$$

Таким образом, формула Папковича применима ко всем оболочкам, если их длина удовлетворяет условию

$$\frac{0,92E\delta}{\sigma_p \sqrt{\frac{R}{\delta}}} \leq l \leq 3,35R \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

При выводе формулы (11.17) предполагалось, что концы оболочки шарнирно оперты. Если на концы оболочки наложены дополнительные связи, что часто встречается в реальных конструкциях, то по формуле Папковича для коротких оболочек получается заниженное значение критического давления, так как при более «жесткой» заделке концов оболочки критическое давление должно увеличиться.

Замечание к расчету конических оболочек. При оценке устойчивости конических оболочек, нагруженных внешним равномерным давлением, как это было показано неко-



Рис. 177.

торыми авторами, можно пользоваться формулой Папковича, если в ней заменить R на $R/\cos \alpha$ (рис. 177), т. е.

$$q_{кр} = 0,92E \frac{t^2 \cos \alpha}{Rt} \sqrt{\frac{t \cos \alpha}{R}},$$

если $\alpha \leq 25^\circ$.

§ 52. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ, ЕСЛИ ПОЛУВОЛНЫ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НАПРАВЛЕННЫ ВНУТРЬ

Этот вид потери устойчивости можно ожидать в конструкциях, состоящих из вставленных без зазора одной в другую цилиндрических оболочек, причем на наружной оболочке имеется сетка небольших отверстий. При действии на такую конструкцию внешнего давления внутренняя оболочка может потерять устойчивость с образованием полуволн, направленных внутрь оболочки. Такая форма потери устойчивости может быть описана следующей системой функций:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin^2 n\theta,$$

$$\varphi = B \sin \frac{\pi x}{l} \sin^2 n\theta,$$

которые дают четные значения прогиба и кольцевых напряжений, что отвечает характеру волнообразования.

Дифференциальные уравнения для решения задачи в данном случае имеют вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{E\delta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

После подстановки в эти уравнения значений функций φ и w и интегрирования их по методу Бубнова—Галеркина получим

$$B\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = -\frac{3E\delta A}{8R\left[\frac{3}{8} + n^2\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 + 2n^4\left(\frac{l}{\pi R}\right)^4\right]},$$

$$-\frac{3}{8R}B\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + DA\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left[\frac{3}{8} + n^2\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 + 2n^4\left(\frac{l}{\pi R}\right)^4\right] = \frac{N_y^0 n^2}{2R^2}A.$$

Приравнявая определитель этой системы уравнений нулю, получим

$$\frac{N_y^0 n^2}{2R^2} = \frac{9E\delta}{64R^2\left[\frac{3}{8} + n^2\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 + 2n^4\left(\frac{l}{\pi R}\right)^4\right]} + D\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left[\frac{3}{8} + n^2\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 + 2n^4\left(\frac{l}{\pi R}\right)^4\right].$$

Для получения приближенного значения $N_{y\text{кр}}^0$ будем считать, что

$$n^2\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 \gg 1.$$

Тогда

$$\frac{N_y^0}{E\delta} = \frac{9}{64\left(\frac{l}{\pi R}\right)^4} \frac{1}{n^6} + \frac{R^2 \delta^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left(\frac{l}{\pi R}\right)^4}{3(1-\mu^2)} n^2.$$

После определения минимума усилия N_y^0 по параметру волнообразования n^2 получим формулу для критического внешнего давления

$$q_{\text{кр}} = 1,6E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad n^2 = \frac{3\pi^4 \sqrt{1-\mu^2}}{2\sqrt{2}} \frac{R}{l} \sqrt{\frac{R}{\delta}}. \quad (11.22)$$

По структуре данная формула совпадает с формулой П. Ф. Папковича, но числовой коэффициент, как это и следовало ожидать, увеличился.

§ 53. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ РАВНОМЕРНОМ ДАВЛЕНИИ, ЕСЛИ ПОЛУВОЛНЫ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НАПРАВЛЕНЫ ВНУТРЬ. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ (11.22)

В данном случае приближенное решение можно получить, если принять для прогиба следующее выражение, согласующееся с характером волнообразования:

$$w = A \sin^2 n\theta.$$

После подстановки этого выражения в (11.19) и интегрирования его по методу Бубнова—Галеркина получим

$$q = \frac{D(8n^4 - 4n^2 + 1,5)}{(2n^2 - 1,5)R^3}.$$

Как легко убедиться, наименьшее критическое давление из этого выражения получится при $n=2$:

$$q_{кр} = \frac{17,4D}{R^3}.$$

После подстановки в это выражение значения жесткости D при $\mu=0,3$

$$q_{кр} = 1,6E \left(\frac{b}{R} \right)^3. \quad (11.23)$$

Из условия равенства критических давлений по формулам (11.22) и (11.23)

$$l < R \sqrt{\frac{R}{b}}.$$

Если $l \geq R \sqrt{\frac{R}{b}}$, то следует пользоваться формулой для длинной оболочки.

Нижний предел применимости формулы (11.22) получим из условия $\sigma_{кр} = \sigma_p$, т. е.

$$l \geq \frac{Eb}{2p \sqrt{\frac{R}{b}}}.$$

Таким образом, формула (11.22) применима к таким оболочкам, длина которых удовлетворяет условию

$$\frac{Eb}{2p \sqrt{\frac{R}{b}}} \leq l < R \sqrt{\frac{R}{b}}.$$

При пользовании формулой (11.22), так же как и формулой Папковича, следует иметь в виду, что для сравнительно коротких оболочек эта формула будет давать заниженное значение критического давления, так как принятое в решении шарнирное опирание не всегда реализуется в действительности.

§ 54. УСТОЙЧИВОСТЬ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ОСЕВОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ КРОМКАМ И РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЗАКОНУ КОСИНУСА

Вопрос устойчивости цилиндрической панели под действием сжимающих нагрузок, отличных от равномерного распределения, часто возникает при расчете подкрепленных оболочек, так как распределение сжимающих напряжений не всегда равномерно.

Рассмотрим задачу об устойчивости цилиндрической панели, нагруженной в окружном направлении по закону косинуса (рис. 178). Для того чтобы решить данную задачу, необходимо сначала найти распределение напряжений в пластине до момента потери устойчивости.

Для этой цели используем уравнения равновесия усилий, действующих в срединной поверхности панели:

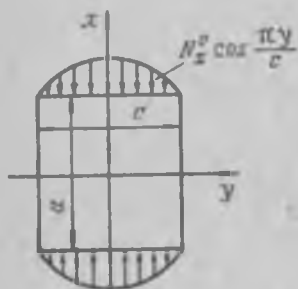


Рис. 178.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad N_y = 0.$$

Так как $N_y = 0$, то $\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$, $N_{xy} = f(y)$, где $f(y)$ — функция только переменного y . Но так как на концах $N_{xy} = 0$ всюду, то должно быть $f(y) = 0$. Следовательно, $\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0$, $N_x = \text{const}$ вдоль образующих, т. е. распределение усилий в плоскости пластины совпадает с распределением их по ее торцам. Этот вывод, по видимому, будет справедлив только для недлинных пластин.

Для решения поставленной задачи примем следующие выражения для функций φ и w :

$$w = W(x) \cos \frac{\pi y}{c}, \quad \varphi = F(x) \cos \frac{\pi y}{c}.$$

Тогда исходные уравнения устойчивости (11.5) при $R_1 = \infty$, $R_2 = R$ примут вид

$$F^{IV} - 2 \left(\frac{\pi}{c} \right)^2 F'' + \left(\frac{\pi}{c} \right)^4 F - \frac{E\delta}{R} W'' = 0,$$

$$\left\{ F'' + DR \left[W^{IV} - 2 \left(\frac{\pi}{c} \right)^2 W'' + \left(\frac{\pi}{c} \right)^4 W \right] \right\} \cos \frac{\pi y}{c} + + RN_x^0 W'' \cos^2 \frac{\pi y}{c} = 0. \quad (11.24)$$

После умножения второго уравнения на $\cos \frac{\pi y}{c} dy$ и интегрирования в пределах $-c/2, +c/2$, а также замены дифференциальных операций конечными разностями получим

$$\begin{aligned} F_k \left[6 + 4 \left(\frac{\pi h}{c} \right)^2 + \left(\frac{\pi h}{c} \right)^4 \right] - \left[4 + 2 \left(\frac{\pi h}{c} \right)^2 \right] (F_I + F_{II}) + \\ + F_I + F_{II} - \frac{E_k h^3}{R} (W_I + W_{II} - 2W_k) = 0, \\ F_I + F_{II} - 2F_k + \frac{DR}{h^2} \left\{ W_k \left[6 + 4 \left(\frac{\pi h}{c} \right)^2 + \left(\frac{\pi h}{c} \right)^4 \right] - \right. \\ \left. - \left[4 + 2 \left(\frac{\pi h}{c} \right)^2 \right] (W_I + W_{II}) + W_I + W_{II} \right\} + \\ + \frac{8RN^0}{3\pi} (W_I + W_{II} - 2W_k) = 0. \end{aligned}$$

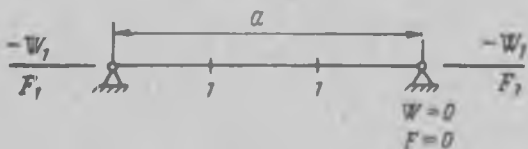


Рис. 179.

Будем считать, что панель является шарнирно опертой и дополнительные напряжения на контуре равны нулю: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_{xy} = 0$.

Первое приближение: $h = \frac{1}{3} a$ (рис. 179). В этом случае было получено

$$\frac{hR}{3\pi E\delta} = \frac{9 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{3n} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{3n} \right)^4 \right]}{12 (1 - \mu^2) k^2} + \frac{k^2}{9 \left[3 + 2 \left(\frac{\pi}{3n} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{3n} \right)^4 \right]},$$

где $n = \frac{c}{a}$, $a = k \sqrt{R\delta}$.

Минимум этого выражения по k^2 будет

$$\frac{\sigma R}{E\delta} = 0,715 \sqrt{\frac{1 + 2 \left(\frac{\pi}{3n} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{3n} \right)^4}{3 + 2 \left(\frac{\pi}{3n} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{3n} \right)^4}}.$$

В табл. 10 приведены значения $\frac{\sigma R}{E\delta}$ в зависимости от n .

n	1	2	3	8	15	∞
$\frac{\sigma R}{E \delta}$	0,592	0,478	0,444	0,418	0,414	0,413

Из этой таблицы видно, что наименьшее критическое напряжение получается для сильно вытянутой в окружном направлении панели.

Поэтому вопрос о размере панели в окружном направлении остается открытым, а параметр k будет

$$k = \frac{3}{V 2 \sqrt{3(1-\mu^2)}}.$$

При рассмотрении второго приближения ($h = \frac{1}{5} a$, рис. 180) было найдено, что

$$\frac{\sigma R}{E \delta} = 0,37 \quad \text{при} \quad k = 3.$$

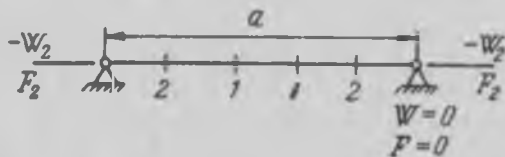


Рис. 180.

Путем экстраполяции по первым двум приближениям получили

$$\left(\frac{\sigma R}{E \delta} \right)_{\text{экстр}} = 0,346 E \frac{\delta}{R}. \quad (11.25)$$

При равномерном сжатии цилиндрической оболочки, как указано в § 49, при решении задачи методом конечных разностей коэффициент в (11.25) получился равным 0,3.

Сравним предельные значения критических сил для случая равномерного распределения напряжений по концам и напряжения по закону косинуса.

В первом случае

$$Q_{\text{кр}} = 0,3 E \frac{\delta^2}{R} \int_{-c/2}^{c/2} dy = 0,3 E \frac{\delta^2 c}{R}.$$

Во втором случае

$$Q_{кр}^* = 0,346E \frac{h^2}{R} \int_{-c/2}^{c/2} \cos \frac{\pi y}{c} dy = 0,22E \frac{h^2 c}{R}.$$

Из сравнения этих усилий видно, что нагружение панели по закону косинуса более опасно, чем нагружение равномерной нагрузкой.

Пользуясь приведенным выше результатом, можно получить формулы для случая нагружения панели согласно рис. 181 при тех же граничных условиях на контуре, если при решении этой задачи принять

$$w = W(x) \cos \frac{\pi y}{c}.$$

$$\varphi = F(x) \cos \frac{\pi y}{c}.$$

Тогда первое исходное уравнение (11.24) останется без изменений, а второе получит вид

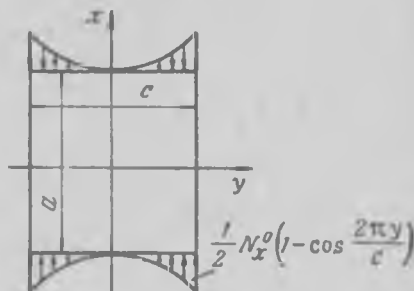


Рис. 181.

$$F'' + DR \left[W^{IV} - 2 \left(\frac{\pi}{c} \right)^2 W'' + \left(\frac{\pi}{c} \right)^4 W \right] + \frac{2RN_x^0}{3\pi} W'' = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при N_x^0 в этих уравнениях, можно видеть, что он стал меньше в 4 раза. Остальные коэффициенты в этих уравнениях совпадают. Поэтому можно воспользоваться формулой (11.25), увеличив в ней коэффициент в 4 раза. Таким образом,

$$\sigma_{кр} = 1,384E \frac{h}{R}.$$

Суммарная критическая сила в этом случае

$$Q_{кр}^{**} = 1,384E \frac{h^2}{2R} \int_{-c/2}^{c/2} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{c} \right) dy = 0,692E \frac{h^2 c}{R}.$$

Как видно из последнего выражения, предельная сила получилась более чем в 2 раза выше по сравнению с равномерным нагружением и более чем в 3 раза выше по сравнению с нагружением по закону косинуса.

§ 55. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Вопрос о расчете цилиндрической панели от действия на нее сосредоточенной силы возникает при проектировании тонкостенных конструкций, которые имеют люки с крышками. Крышки люков могут нагружаться сосредоточенными силами, передающимися стрингерами или какими-либо другими элементами жесткости конструкции.

Для определения критического значения силы P , действующей на панель (рис. 182), можно применить метод разделения переменных. Будем считать, что панель является шарнирно опертой и дополнительные напряжения на ее контуре равны нулю, т. е. $\sigma_x=0$, $\sigma_y=0$, $\sigma_{xy}=0$.

Для функций прогиба и напряжений примем

$$w = W(y) \cos \frac{\pi x}{a},$$

$$\varphi = F(y) \cos \frac{\pi x}{a}.$$

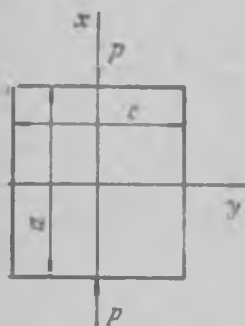


Рис. 182.

Подставив эти выражения в исходные уравнения (11.5) и заменив производные по y конечно-разностными выражениями, получим

$$\begin{aligned} &F_k \left[6 + 4 \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi b}{a} \right)^4 \right] - \left[4 + 2 \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right] (F_n + F_m) + \\ &+ F_v + F_u + \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \frac{E b^3}{R} W_k = 0, \\ &- F_k + \frac{D}{\left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 b^2} \left\{ W_k \left[6 + 4 \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi b}{a} \right)^4 \right] - \right. \\ &\left. - \left[4 + 2 \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right] (W_n + W_m) + W_v + W_u \right\} - R N_x^0 W_k = 0, \end{aligned}$$

где b — шаг сетки в направлении оси y .

Первое приближение: $b = \frac{1}{3} c$ (рис. 183).

Сосредоточенную силу P будем считать равномерно распределенной на длине шага $N_x^0 = P/b$. Тогда приведенные уравнения для любой точки l будут

$$\begin{aligned} &F_l \left[6 + 4 \left(\frac{\pi b}{3} \right)^2 + \left(\frac{\pi b}{3} \right)^4 \right] - \left[4 + 2 \left(\frac{\pi b}{3} \right)^2 \right] (0 + F_1) + \\ &+ 0 + F_1 - \frac{E b^3 N_x^0 b^2}{R} W_l = 0, \end{aligned}$$

$$-F_1 + \left(\frac{3}{\pi h}\right)^2 \frac{9D}{2n^2 k^2} \left\{ W_1 \left[6 + 4 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4 \right] - \right. \\ \left. - \left[4 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 \right] (0 + W_1) + 0 - W_1 \right\} - \frac{3P}{nk} \sqrt{\frac{R}{\delta}} W_1 = 0,$$

где

$$n = \frac{c}{a}, \quad a = k \sqrt{R\delta}.$$

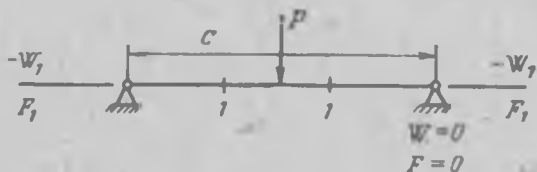


Рис. 183.

Исключая из этих уравнений W_1 и F_1 , получим

$$3P \sqrt{\frac{R}{\delta}} = \frac{\pi^2 E \delta n^5 k^3}{81 \left[3 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4 \right]} + \frac{81D \left[1 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4 \right]}{\pi^2 \delta n^3 k}.$$

Рассматривая здесь k как параметр, найдем минимум P по k :

$$P = 0,28 E \delta^2 \sqrt{\frac{\delta}{R}} \xi(n),$$

где

$$\xi(n) = \frac{1}{n} \sqrt[4]{\frac{\left[1 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4 \right]}{3 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4}}.$$

На рис. 184 представлен график функции $\xi(n)$ в зависимости от n . На основании этого графика можно написать

$$P_{кр} \approx 0,3 E \delta^2 \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Вопрос о размерах панели, при которых получается наименьшая критическая сила, в данном случае решается полностью.

Для параметра k имеем выражение

$$k = \frac{9}{\pi n} \sqrt{\frac{1}{6} \sqrt{\left[1 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4 \right] \left[3 + 2 \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{3}\right)^4 \right]}}.$$

После подстановки сюда $n=1$ получим $k=2,63$.
Тогда

$$a=c=2,63 \sqrt{R\delta}.$$

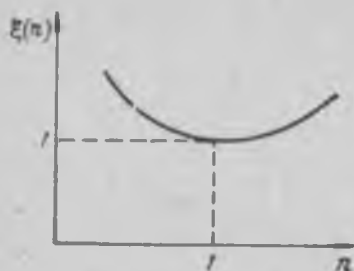


Рис. 184.

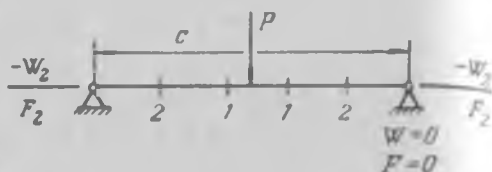


Рис. 185.

Второе приближение: $b = \frac{1}{5} c$ (фиг. 185). В этом случае

$$P_{кр} = 0,3E\delta^2 \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Это приближение в точности совпадает с первым.

Размеры панели в этом случае равны: $a=c=3,5 \sqrt{R\delta}$ и $(a=c)_{встр} = 4 \sqrt{R\delta}$.

§ 56. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ НА НЕЕ РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ В ОСЕВОМ И ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИЯХ

При решении данной задачи в прямоугольной системе координат для функции прогиба необходимо принять такое выражение, которое отражает винтообразную форму волнообразования после потери устойчивости. Наиболее подходящей функцией будет

$$w = W(x) \cos\left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta\right).$$

Аналогично для функции напряжений примем

$$\varphi = F(x) \cos\left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta\right).$$

Составим необходимые производные от этих функций и подставим их в исходные уравнения (11.5). После подстановки получим

$$\frac{1}{E\delta} \left\{ \left[F^{IV} - \frac{2F''}{R^2} (n^2 + 3\lambda^2) + \frac{F}{R^4} (n^2 + \lambda^2)^2 \right] \cos\left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{4\lambda}{R^3} (\lambda^2 + n^2) F' - \frac{4\lambda}{R} F'' \right] \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) \Bigg) - \\
& - \frac{1}{R} \left(W'' - \frac{\lambda^2}{R^2} W \right) \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) + \frac{2\lambda}{R} W' \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) = 0, \\
& \frac{1}{R} \left(F'' - \frac{1}{R^2} F \right) \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) - \frac{2}{R^2} F' \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) + \\
& + D \left[\left[W^{IV} - \frac{2}{R^2} (n^2 + 3\lambda^2) W'' + \frac{1}{R^4} (n^2 + \lambda^2)^2 W \right] \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{4\lambda}{R^3} (\lambda^2 + n^2) W' - \frac{4\lambda}{R} W''' \right] \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) \right] + \\
& + N_x^0 \left[\left(W'' - \frac{1}{R^2} W \right) \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) - \frac{2\lambda}{R} W' \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) \right] + \\
& + \frac{2N_{xy}^0 n}{R} \left[W' \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) + \frac{\lambda}{R} W \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) \right] + \\
& + \frac{N_y^0}{k^2} \left[-n^2 W \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

В этих уравнениях W и F — функции только переменного x . Пользуясь методом Канторовича—Власова, умножим каждое из этих уравнений на $\cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) d\theta$ и проинтегрируем в пределах $0-2\pi$. В результате этих операций имеем

$$\begin{aligned}
F^{IV} - \frac{2}{R^2} (n^2 + 3\lambda^2) F'' + \frac{1}{R^4} (n^2 + \lambda^2)^2 F - \frac{E\delta}{R} \left(W'' - \frac{\lambda^2}{R^2} W \right) &= 0, \\
F'' - \frac{\lambda^2}{R^2} F + DR \left[W^{IV} - \frac{2}{R^2} (n^2 + 3\lambda^2) W'' + \frac{1}{R^4} (n^2 + \lambda^2)^2 W \right] &+ \\
+ RN_x^0 \left(W'' - \frac{\lambda^2}{R^2} W \right) + \frac{2N_{xy}^0 \lambda n}{R} W - \frac{N_y^0 n^2}{R} W &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначены производные по x .

Запишем последние уравнения в конечных разностях:

$$\begin{aligned}
F_k a_1 - a_2 (F_I + F_I) + F_t + F_s - \frac{E\delta h^2}{R} (W_I + W_I - a_3 W_k) &= 0, \\
F_t + F_I - a_3 F_k + \frac{DR}{h^2} [W_k a_1 - a_2 (W_I + W_I) + W_t + W_s] &+ \\
+ RN_x^0 (W_I + W_I - a_3 W_k) + 2RN_{xy}^0 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda n W_k - RN_y^0 n^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 W_k &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$a_1 = 6 + 4 \left(\frac{h}{R} \right)^2 (n^2 + 3\lambda^2) + \left(\frac{h}{R} \right)^4 (n^2 + \lambda^2)^2,$$

$$a_2 = 4 + 2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 (n^2 + 3\lambda^2),$$

$$a_3 = 2 + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda^2.$$

Сформулируем граничные условия для функций F и W . При выбранных выражениях для функций φ и w наиболее просто записываются граничные условия для жесткой заделки. В этом случае на концах оболочки должно быть

$$w = W(x) \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = W'(x) \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) - \frac{\lambda}{R} W \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) = 0$$

или $W'_h = 0, \quad W' = \frac{W'_I - W'_I}{2h} = 0, \quad W'_I = W'_I.$

Для функции напряжений φ на концах оболочки примем условия, что дополнительные усилия N_x и N_{xy} после потери устойчивости равны нулю:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{n^2}{R^2} F \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) = 0,$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{n}{R} F' \sin \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) - \frac{n\lambda}{R^2} F \cos \left(\frac{\lambda x}{R} - n\theta \right) = 0.$$

Отсюда

$$F_x = 0, \quad F' = \frac{F'_I - F'_I}{2h} = 0, \quad F'_I = F'_I.$$

Первое приближение: $h = l/2$ (рис. 186):

$$F_1 a_1 - a_2 (0 + 0) + F_1 + F_1 - \frac{E \lambda h^2}{R} (0 + 0 - a_3 W_1) = 0,$$

$$0 + 0 - a_3 F_1 + \frac{DR}{h^2} [W_1 a_1 - a_2 (0 + 0) + W_1 + W_1] - \\ - N_x^0 R (0 + 0 - a_3 W_1) - \frac{M_{\kappa T}}{\pi R} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \lambda n W_1 + N_y^0 R n^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 W_1 = 0.$$

Здесь обозначено:

— N_x^0 — осевое растягивающее усилие;

— N_y^0 — кольцевое растягивающее усилие;

$M_{\kappa p} = 2\pi R N_{xy}^0$ — момент, скручивающий оболочку.

Исключая из этих уравнений функцию F_1 и считая, что $W_1 \neq 0$, получим выражение для $M_{кр}$ в первом приближении:

$$\begin{aligned} \frac{M_{кр}^I}{\pi E \delta R^2} = & \frac{\left[2 + \left(\frac{l}{2R} \right)^2 \lambda^2 \right]^2}{\left[8 + 4 \left(\frac{l}{2R} \right)^2 (n^2 + 3\lambda^2) + \left(\frac{l}{2R} \right)^4 (n^2 + \lambda^2)^2 \right] n \lambda} + \\ & + \frac{4 R^2 \lambda^2 \left[8 + 4 \left(\frac{l}{2R} \right)^2 (n^2 + 3\lambda^2) + \left(\frac{l}{2R} \right)^4 (n^2 + \lambda^2)^2 \right]}{3 (1 - \mu^2) n \lambda l^4} + \\ & + \frac{4 N_x^0 R^2 \left[2 + \left(\frac{l}{2R} \right)^2 \lambda^2 \right]}{E \delta n \lambda l^2} + \frac{N_y^0 n}{E \delta \lambda}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

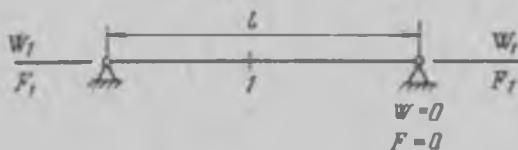


Рис. 186.

Проделав аналогичные выкладки для второго приближения (рис. 187), $h = \frac{1}{3} l$, получим выражение для $M_{кр}$ во втором приближении:

$$\begin{aligned} \frac{M_{кр}^{II}}{\pi E \delta R^2} = & \frac{\left[1 + \left(\frac{l}{3R} \right)^2 \lambda^2 \right]^2}{\left[3 + 2 \left(\frac{l}{3R} \right)^2 (n^2 + 3\lambda^2) + \left(\frac{l}{3R} \right)^4 (n^2 + \lambda^2)^2 \right] n \lambda} + \\ & + \frac{27 R^2 \lambda^2 \left[3 + 2 \left(\frac{l}{3R} \right)^2 (n^2 + 3\lambda^2) + \left(\frac{l}{3R} \right)^4 (n^2 + \lambda^2)^2 \right]}{4 (1 - \mu^2) n \lambda l^4} + \\ & + \frac{9 N_x^0 R^2 \left[1 + \left(\frac{l}{3R} \right)^2 \lambda^2 \right]}{E \delta n \lambda l^2} + \frac{N_y^0 n}{E \delta \lambda}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

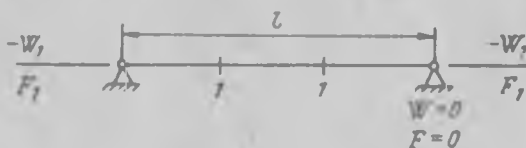


Рис. 187.

Для анализа выражений (11.26) и (11.27) разделим оболочки на два класса — длинные и средние.

В случае длинных оболочек можно считать, что $\left(\frac{l}{2R}\right)^2 \lambda^2 \gg 1$ и $n^2 \gg \lambda^2$. Тогда выражение (11.26) приближенно можно записать в виде

$$\frac{M_{кр}^1}{\pi E \delta R^2} = \frac{\lambda^2}{n^5} + A \frac{n^2}{\lambda} + B \frac{\lambda}{n} + C \frac{n}{\lambda}, \quad (11.28)$$

где

$$A = \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)R^2}, \quad B = \frac{N_x^0}{E\delta}, \quad C = \frac{N_y^0}{E\delta}.$$

Рассмотрим случай, когда $N_x^0 = N_y^0 = 0$. Тогда

$$\frac{M_{кр}^1}{\pi E \delta R^2} = \frac{\lambda^2}{n^5} + A \frac{n^2}{\lambda}.$$

Найдем минимум этого выражения по λ :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{M_{кр}^1}{\pi E \delta R^2} \right) = \frac{3\lambda^2}{n^5} - A \frac{n^2}{\lambda^2} = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{n^2 \sqrt{\frac{\delta}{R}}}{\sqrt[3]{6} \sqrt{1-\mu^2}}.$$

Тогда при $n=2$ будем иметь следующее наименьшее значение $M_{кр}^1$:

$$M_{кр}^1 = 1.7 E \delta^2 R \frac{\sqrt{\frac{\delta}{R}}}{\sqrt[3]{(1-\mu^2)^3}}. \quad (11.29)$$

Это выражение для критического значения крутящего момента на 14% больше того значения $M_{кр}$, которое приводится в опубликованных работах [8], [26].

Рассмотрим случай, когда $N_x^0 \neq 0$, $N_y^0 \neq 0$. Найдем минимум выражения (11.28) по параметрам λ и n , для чего продифференцируем это выражение по λ и n и производные приравняем нулю. При этом получим два следующих уравнения:

$$3\lambda^4 - An^8 + Bn^4\lambda^2 - Cn^6 = 0,$$

$$5\lambda^4 - 3An^8 + Bn^4\lambda^2 - Cn^6 = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\lambda = \frac{C\sqrt[4]{A}}{2A + B\sqrt{A}}, \quad n = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2A + B\sqrt{A}}}.$$

Подставляя найденные значения для λ и μ в выражение (11.28), получим

$$M_{np}^1 = \frac{4,75}{\sqrt{1-\mu^2}} E\lambda R \sqrt{R\lambda} \sqrt{\frac{N_y^0}{E\lambda}} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)} N_x^0 R}{E\lambda}}. \quad (11.30)$$

Легко проверить, что из выражения (11.27) второго приближения результаты анализа будут совпадать с результатами, полученными из первого приближения (11.26). Поэтому для длинных оболочек нецелесообразно приводить исследования второго приближения.

Из формулы (11.30) видно, что она применима не при любых значениях кольцевых усилий N_y^0 . Из нее нельзя получить формулу критических усилий при кручении оболочки, не нагруженной усилием N_x^0 . Это произошло потому, что было использовано приближенное выражение для изменения кривизны в окружном направлении. Поэтому необходимо найти то наименьшее значение N_y^0 , начиная с которого можно пользоваться этой формулой. Для этого приравняем правые части формул (11.29) и (11.30) и из этого равенства при $N_x^0=0$ найдем, что усилие N_y^0 должно удовлетворять условию

$$N_y^0 \geq \frac{0,128 E\lambda \left(\frac{b}{R}\right)^2}{1-\mu^2}.$$

Если $N_y^0 = qR$, где q — интенсивность давления на боковую поверхность оболочки, то

$$q > \frac{0,128 E}{1-\mu^2} \left(\frac{b}{R}\right)^3. \quad (11.31)$$

Этим условием определяется то давление, начиная с которого следует пользоваться формулой (11.30).

Из условия (11.31) видно, что наименьшее давление для тонких оболочек будет весьма малым. Это давление для стали и алюминия приведено в табл. 11.

Таблица 11

Материал	$E, \text{кг/см}^2$	$q_{\min}, \text{кг/см}^2$	
		$\frac{b}{R}=0,001$	$\frac{b}{R}=0,01$
Сталь	$2 \cdot 10^6$	0,00028	0,28
Алюминий	$7 \cdot 10^5$	0,0000985	0,0985

Если в оболочке усилие N_x^0 меньше определяемого формулой (11.31) или оно совсем отсутствует, но на оболочку действует осевое растягивающее усилие N_x^0 , то можно пользоваться выражением (11.29), умноженным на

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)} N_x^0 R}{E\delta^2}}.$$

т. е.

$$M_{кр}^I = \frac{1,7}{\sqrt[4]{(1-\mu^2)^3}} E\delta^2 R \sqrt{\frac{\delta}{R}} \times \\ \times \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)} N_x^0 R}{E\delta^2}}. \quad (11.32)$$

Рассмотрим оболочки средней длины. Будем считать, что $n^2 \gg \lambda^2$, $\left(\frac{l}{2R}\right)^4 n^4 \gg \left[8 + 4\left(\frac{l}{2R}\right)^2 \lambda^2\right]$. Тогда при $N_x^0 = N_y^0 = 0$ выражение для первого приближения можно записать в виде

$$\frac{M_{кр}^I}{\pi E\delta R^2} = \frac{4 + 4\left(\frac{l}{2R}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{l}{2R}\right)^4 \lambda^4}{\left(\frac{l}{2R}\right)^4 n^5 \lambda} + \frac{n^2 n^3}{12(1-\mu^2) R^2 \lambda}. \quad (11.33)$$

Для определения наименьшего значения $M_{кр}^I$ запишем производные от этого выражения по λ и n и приравняем их нулю, получив при этом два уравнения:

$$3\left(\frac{l}{2R}\right)^4 \lambda^4 + 4\left(\frac{l}{2R}\right)^2 \lambda^2 - 4 - \frac{a}{12} n^3 = 0, \\ \left(\frac{l}{2R}\right)^4 \lambda^4 + 4\left(\frac{l}{2R}\right)^2 \lambda^2 + 4 - \frac{a}{20} n^3 = 0,$$

где

$$a = \frac{\delta^2 \left(\frac{l}{2R}\right)^4}{(1-\mu^2) R^2}.$$

Из этих уравнений найдем

$$\lambda = \frac{4R}{l}, \quad n = \sqrt[8]{\frac{3600}{5a}}.$$

Подставляя значения λ и n в (11.33), получим формулу для наименьшего значения крутящего момента

$$M_{кр}^I = -\frac{3,58}{(1-\mu^2)^{5/8}} \sqrt{\frac{R}{l}} \sqrt[4]{\frac{\delta}{R}} E\delta^2 R.$$

Исследование выражения для второго приближения приводит к аналогичной формуле, поэтому здесь его не даем.

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда $N_x \neq 0$, $N_y \neq 0$, и ограничимся рассмотрением выражения для первого приближения, так как из предыдущего ясно, что это приближение дает вполне надежные результаты:

$$\frac{M_{\kappa l}^1}{\pi E \delta R^2} = \frac{4 + 4 \left(\frac{l}{2R} \right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{l}{2R} \right)^4 \lambda^4}{\left(\frac{l}{2R} \right)^4 n^3 \lambda} + \frac{\delta^2 n^3}{12 (1 - \mu^2) R^2 \lambda} +$$

$$+ \frac{4 N_x^0 R^2 \left[2 + \left(\frac{l}{2R} \right)^2 \lambda^2 \right]}{E \delta l^2 n \lambda} + \frac{N_y^0 n}{E \delta \lambda}. \quad (11.34)$$

Дифференцируем это выражение по λ и n и производные приравняем нулю, получая два следующих уравнения для определения λ и n , которые обращают выражение (11.34) в минимум:

$$3x^2 + 4x \left(1 + \frac{1}{16} \beta n^4 \right) - 4 - \frac{1}{2} \beta n^4 - \frac{1}{16} \gamma n^6 - \frac{\alpha}{192} n^8 = 0,$$

$$x^3 + 4x \left(1 + \frac{1}{80} \beta n^4 \right) + 4 + \frac{1}{10} \beta n^4 - \frac{1}{80} \gamma n^6 - \frac{\alpha}{320} n^8 = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta = \frac{N_x^0 l^2}{E \delta R^2}, \quad \alpha = \frac{\delta^2 l^4}{(1 - \mu^2) R^6}, \quad \gamma = \frac{N_y^0 l^4}{E \delta R^4}, \quad x = \left(\frac{l}{2R} \right)^2 \lambda^2.$$

Решая эту систему, получим следующие уравнения для определения параметров λ и n :

$$a_5 y^5 + a_4 y^4 + a_3 y^3 - a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0, \quad \lambda = \frac{2R}{l} \times$$

$$\times \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \frac{7}{40} \beta n^4 + \frac{3\gamma}{160} n^6 + \frac{\alpha}{480} \left(1 + \frac{27}{40} \frac{\alpha^2}{\alpha} \right) n^8 - \left(1 + \frac{3}{80} \beta n^4 \right)}},$$

где $y = n^2$, $a_0 = \gamma$, $a_1 = \frac{1}{4} (\alpha - 3\beta^2)$, $a_2 = \frac{3\gamma\beta}{40}$,

$$a_3 = \frac{1}{480} \left(\alpha^3 - 3,7\beta^3 - \frac{3}{8} \gamma^2 \right), \quad a_4 = \frac{\alpha\gamma}{3840}, \quad a_5 = \frac{\alpha}{15360} \left(\beta^2 - \frac{1}{3} \alpha \right).$$

Таким образом, задача о кручении оболочки средней длины при наличии в ней усилий N_x^0 и N_y^0 приводится к решению уравнения пятой степени относительно n^2 . Найдя по заданным значениям α , β , γ параметры λ и n , подставим их в уравнение

(11.34), которое и дает наименьшее значение крутящего момента. Определим пределы применимости полученных формул.

При отсутствии усилий N_x^0 и N_y^0 были получены формулы:

а) для длинных оболочек

$$M_{кр} = 1,7 E \beta^2 R \frac{\sqrt{\frac{l}{R}}}{\sqrt{(1-\mu^2)^3}}$$

б) для оболочек средней длины

$$M_{кр}' = \frac{3,5 \beta}{(1-\mu^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{R}{l}} \sqrt[4]{\frac{l}{R}} E \beta^2 R.$$

На границе средних и длинных оболочек должно быть

$$M_{кр} = M_{кр}'$$

Из этого условия получаем, что если длина оболочки удовлетворяет условию

$$l \leq 4,3 R \sqrt{\frac{R}{\beta}},$$

то оболочка принадлежит к классу средних. Если $l \geq 4,3 R \sqrt{\frac{R}{\beta}}$, то оболочка длинная.

Если на оболочку действуют усилия N_x^0 и N_y^0 , то пределы применимости полученных формул в замкнутом виде получить не удастся. В этом случае необходимо установить пределы применимости выражений для $M_{кр}$ при конкретных числовых исходных данных путем приравнивания правых частей выражений (11.30) или (11.32) и (11.34), и подобрать такую длину l , которая разделяет все оболочки на два класса. Найденная таким путем длина l будет представлять собой наиболее длинную оболочку из класса оболочек средней длины при заданных α , β , γ . Для этой оболочки критический момент, подсчитанный по формулам (11.31) или (11.32) и (11.34), будет одним и тем же.

Нижний предел применимости формулы для оболочек средней длины можно определить из условия

$$\tau_{кр} \leq \tau_s,$$

где τ_s — предел текучести материала оболочки на сдвиг ($\tau_s \approx 0,6 \sigma_s$).

В заключение отметим, что решение данной задачи с шарнирным опиранием концов приводит к результатам, полученным выше.

**§ 57. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОЙ ЗОНЫ КРУГОВОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦОМ
ПРИ ЕЕ НАГРУЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ АКСИАЛЬНОЙ СИЛОЙ**

В § 38 приведено приближенное решение для цилиндрической оболочки при нагружении ее аксиальной сосредоточенной силой. Там же получены формулы для мембранных напряжений в растянутой и сжатой зонах оболочки. В этом параграфе приводим приближенное решение для определения критической силы, при которой произойдет потеря устойчивости сжатой зоны оболочки. При этом предполагаем, что рассматриваемая оболочка находится под действием внутреннего давления. Тогда формулы для мембранных усилий сжатой зоны такой оболочки будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 N_x^0 &= \frac{PE_2\delta_2}{\pi RE_1\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + a \frac{nx}{R}\right) e^{-\frac{nx}{R} \cos n\theta}}{A} - \sigma_m \delta_2, \\
 N_y^0 &= \frac{PE_2\delta_2}{\pi RE_1\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(b - a \frac{nx}{R}\right) e^{-\frac{nx}{R} \cos n\theta}}{A} - \sigma_k \delta_2, \quad a) \\
 N_{xy}^0 &= \frac{PE_2\delta_2}{\pi RE_1\delta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{nx}{R} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{nx}{R}\right)\right] e^{-\frac{nx}{R} \sin n\theta}}{A},
 \end{aligned}$$

где σ_m , σ_k — мембранные осевые и кольцевые напряжения от внутреннего давления.

Экспериментально установлено, что ямка после потери устойчивости образуется непосредственно над силой и по форме близка к квадратной (рис. 188).

Поставленную задачу можно решить, пользуясь аппаратом конечных разностей. При квадратной сетке уравнения В. З. Власова в данном случае примут вид

$$\begin{aligned}
 20F_k - 8(F_I + F_I + F_m + F_n) + 2(F_p + F_q + F_r + F_0) + F_t + F_s + \\
 + F_v + F_u = \frac{E\delta h^2}{R} (W'_I + W'_I - 2W'_k), \\
 F_I + F_I - 2F_k + \frac{DR}{h^2} [20W_k - 8(W'_I + W'_I + W'_n + W'_m) + \\
 + 2(W'_p + W'_q + W'_r + W'_0) + W'_t + W'_s + W'_v + W'_u] + (11.35) \\
 + RN_x^0 (W'_I + W'_I - 2W'_k) + RN_y^0 (W'_n + W'_m - 2W'_k) + \\
 + \frac{1}{2} RN_{xy}^0 (W'_0 - W'_p + W'_r - W'_q) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь h — шаг сетки;

N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 — мембранные усилия, даваемые формулами (а).

Граничные условия по контуру ямки примем в следующем виде:

$$w_k = W_k = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k = \frac{W_l - W_j}{2h} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_k = \frac{W_m - W_n}{2h} = 0,$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

После интегрирования этих выражений найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = C_1; \quad \varphi = C_1 y + C_2;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B_1; \quad \varphi = B_1 x + B_2;$$

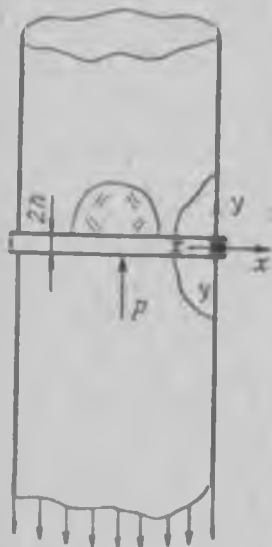


Рис. 188.

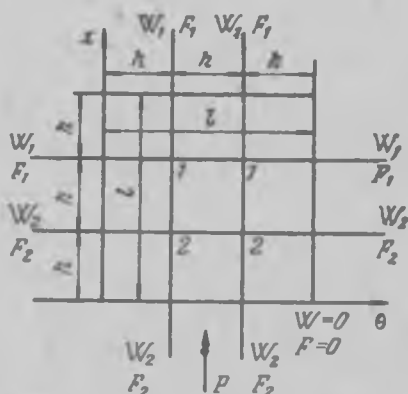


Рис. 189.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = D_1; \quad \varphi = D_1 x + D_2.$$

Полагая здесь все постоянные интегрирования равными нулю (поскольку они не влияют на напряженное состояние), получим для контура значения функции напряжения

$$\tau_k = F_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{F_l - F_j}{2h} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{F_m - F_n}{2h} = 0.$$

Таким образом, для контурных и законтурных точек имеем значения

$$W'_k = 0, \quad F_k = 0,$$

$$W'_l = W'_j, \quad F_l = F_j,$$

$$W'_m = W'_n, \quad F_m = F_n,$$

которые соответствуют отсутствию углов поворота и мембранных напряжений в точках контура ямки после потери устойчивости

Вследствие того что во втором уравнении (11.35) три последних слагаемых являются переменными, получить решение при достаточно мелкой сетке практически не удастся, так как расчетная формула для критической силы получается чрезвычайно сложной. Поэтому ограничимся рассмотрением только одного приближения (рис. 189). Шаг принятой сетки $h=l/3$, где l — размер стороны ямки.

Для получения решения задачи необходимо составить уравнения (11.35) для любой пары точек 1 и 2, причем в каждой из этих точек следует взять соответствующие значения усилий N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 . Не приводя промежуточных выкладок, связанных с составлением уравнений для точек 1 и 2, выпишем окончательный результат этого решения:

$$\frac{720 P}{\pi E_1 h_1 E_2} = k_0^4 \left(B_1 \frac{F_1 + F_4}{F_1 F_4 - F_2 F_3} + B_2 \frac{F_2 + F_3}{F_1 F_4 - F_2 F_3} \right) \pm \sqrt{k_0^4 \left(B_1 \frac{F_1 + F_4}{F_1 F_4 - F_2 F_3} + B_2 \frac{F_2 + F_3}{F_1 F_4 - F_2 F_3} \right)^2 - \frac{1440 B_3 + 1080 k_0^4}{F_1 F_4 - F_2 F_3}} \quad (11.36)$$

Здесь обозначено:

$$B_1 = \frac{99}{k_0^2} \left[\frac{1}{6} + \frac{60}{(1-\mu^2) k_0^4} \right] + \frac{360 R}{h_2 E_2 k_0^4} (3\sigma_m + 2\sigma_k),$$

$$B_2 = \frac{9}{k_0^2} \left[\frac{1}{6} - \frac{60}{(1-\mu^2) k_0^4} \right] - \frac{360 R \sigma_k}{h_2 E_2 k_0^4},$$

$$B_3 = \frac{96000}{(1-\mu^2) k_0^4} + \frac{549}{(1-\mu^2)} + \frac{198 k_0^2}{h_2 E_2} \left[\frac{1}{6} + \frac{60}{(1-\mu^2) k_0^4} \right] (3\sigma_m +$$

$$+ 2\sigma_k) + \frac{18 R k_0^2}{h_2} \left[\frac{1}{6} - \frac{60}{(1-\mu^2) k_0^4} \right] \frac{\sigma_k}{E_2} + \frac{360 R^2}{h_2^2} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{3\sigma_m + 2\sigma_k}{E_2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_k}{E_2} \right)^2 \right],$$

$$F_1 = 4f_1 + 2f_2 - f_3 - 0,5f_4,$$

$$F_2 = -2f_1 + 2f_2 + f_3 + f_4,$$

$$F_3 = 2f_1 + f_2 - 2f_3 - f_4,$$

$$F_4 = -f_1 + 4f_3 + 2f_5 + 0,5f_6,$$

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + a \frac{nl}{3R} \right) e^{-\frac{nl}{R}} \cos \frac{n\theta_0}{3}}{A},$$

$$f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{k} - a \frac{nl}{3R}\right) e^{-\frac{nl}{3R} \cos \frac{n\theta_0}{3}}}{A},$$

$$f_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + a \frac{2nl}{R}\right) e^{-\frac{2nl}{3R} \cos \frac{n\theta_0}{3}}}{A},$$

$$f_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{2nl}{3R} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{2nl}{3R}\right)\right] e^{-\frac{2nl}{R} \sin \frac{n\theta_0}{3}}}{A},$$

$$f_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{k} - a \frac{2nl}{3R}\right) e^{-\frac{2nl}{2R} \cos \frac{n\theta_0}{3}}}{A},$$

$$f_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{nl}{3R} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{nl}{3R}\right)\right] e^{-\frac{nl}{3R} \sin \frac{n\theta_0}{3}}}{A},$$

$$\frac{nl}{R} = nk_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{k}}, \quad \theta_0 = 0,5k_0 \sqrt{\frac{\delta_2}{k}}, \quad l = k_0 \sqrt{R\delta_2}, \quad a = 1 - \frac{1}{k},$$

$$k = \frac{1 - \mu + \frac{2RW}{nJ}}{2 + \frac{(1 - \mu)RW}{nJ}},$$

$$A = 1 + \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1} + \frac{2JE_0 n^3}{E_1 \delta_1 R^3} \left(1 - \frac{1 - \mu}{2k}\right) - \frac{hn}{Rk} \left(1 - \frac{E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1}\right),$$

$2h$, J , W — высота, момент инерции и момент сопротивления кольца (см. рис. 188);

E_1 , δ_1 — модуль Юнга и толщина растянутой зоны оболочки;

E_2 , δ_2 — модуль Юнга и толщина сжатой зоны оболочки;

E_0 — модуль Юнга материала шпангоута.

Если материал оболочки в сжатой и растянутой зонах, а также подкрепляющего кольца одинаковый, то в формуле (11.36) следует положить $E_1 = E_2 = E_0 = E$. То же самое относится и к толщинам стенок: если они одинаковы, то $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

Порядок определения наименьшего значения критической силы следующий. Зададимся размером стороны вмятины l (или k_0) и подсчитаем суммы $f_1 - f_6$, $F_1 - F_4$, а затем определим

$P_{кр}$. Такой подсчет необходимо повторить для нескольких значений l (или k_0), пока не будет найдено наименьшее значение $P_{кр}$.

На рис. 190 представлены результаты определения критической силы для конструкции цилиндрической оболочки при наличии внутреннего давления и без него. Были проведены также

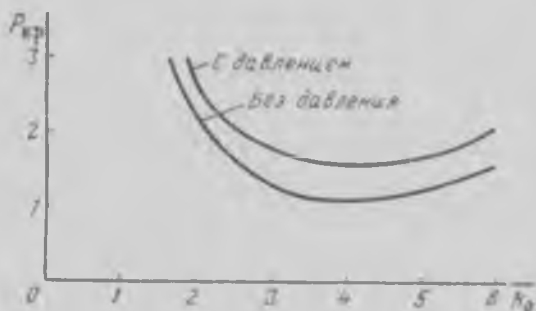


Рис. 190.

испытания этой оболочки в лабораторных условиях, в результате которых было установлено, что формула (11.36) дает значение критической силы, завышенное в 1,3 раза. Этого следовало ожидать, так как одного приближения для решения такой задачи при сложном напряженном состоянии недостаточно. Однако этой формулой, по-видимому, можно пользоваться в расчетах для весьма приближенной оценки несущей способности оболочки, имея в виду, что она дает завышенные значения.

Глава XII

УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

§ 58. УРАВНЕНИЯ МЕСТНОЙ ПОТЕРИ УСТОЯЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В РАЗНОСТНОЙ ФОРМЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ

Будем исходить из общих уравнений В. З. Власова, которые для случая сферы, находящейся под равномерным внешним давлением, принимают вид $(R_1 = R_2 = R, \quad N_x^0 = N_y^0 = \frac{1}{2} qR)$,

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{1}{R} \nabla^2 w,$$

$$\frac{1}{R} \nabla^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{2} q R \nabla^2 w = 0, \quad (12.1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Вначале рассмотрим осесимметричные формы потери устойчивости сферических сегментов. Представляя оператор Лапласа ∇^2 в виде

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr},$$

получим следующую запись системы (12.1):

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d \varphi}{dr} - \frac{E \delta}{R} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi}{dr} + DR \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) + \\ + \frac{1}{2} q R \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Для изгибающих моментов и мембранных усилий имеем выражения

$$M_x = -D(\chi_x + \mu \chi_y), \quad M_y = -D(\chi_y + \mu \chi_x),$$

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

В случае осесимметричной формы потери устойчивости сферической оболочки эти выражения принимают вид

$$\begin{aligned} M_s \sim M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_y \sim M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ N_x \sim N_r = \frac{1}{r} \frac{d \varphi}{dr}, \\ N_y \sim N_\theta = \frac{d^2 \varphi}{dr^2}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Запишем уравнения (12.2) — (12.3) в конечных разностях:

$$\left. \begin{aligned} F_k \left[6 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] - F_l \left[4 + 2 \left(\frac{h}{r} \right) + \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^3 \right] - \\ - F_l \left[4 - 2 \left(\frac{h}{r} \right) + \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^3 \right] + \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

$$\begin{aligned}
 & + F_l \left(1 + \frac{h}{r}\right) + F_s \left(1 - \frac{h}{r}\right) - \\
 & - \frac{E\hbar^2}{R} \left[W'_l \left(1 + \frac{h}{2r}\right) + W'_l \left(1 - \frac{h}{2r}\right) - 2W'_k \right] = 0, \\
 & F_l \left(1 + \frac{h}{2r}\right) + F_l \left(1 - \frac{h}{2r}\right) - 2F_k + \frac{DR}{\hbar^2} \left\{ W'_k \left[6 + 2 \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left(\frac{h}{r}\right)^2 \right] - W'_l \left[4 + 2 \left(\frac{h}{r}\right) + \left(\frac{h}{r}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^3 \right] - \right. \\
 & - W'_l \left[4 - 2 \left(\frac{h}{r}\right) + \left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r}\right)^3 \right] + \\
 & + W'_l \left(1 + \frac{h}{r}\right) + W'_s \left(1 - \frac{h}{r}\right) \left. \right\} + \frac{1}{2} qR^2 \times \\
 & \times \left[W'_l \left(1 + \frac{h}{2r}\right) + W'_l \left(1 - \frac{h}{2r}\right) - 2W'_k \right] = 0, \\
 & M_r = -\frac{D}{\hbar^2} \left[W'_l \left(1 + \frac{h}{2r}\right) + W'_l \left(1 - \frac{h}{2r}\right) - 2W'_k \right], \\
 & \sigma_r = \frac{1}{2\hbar r} (F_l - F_s).
 \end{aligned} \tag{12.4}$$

Здесь h — шаг сетки.

Для того чтобы написать исходные уравнения (12.2) в конечных разностях в точке $r=0$, необходимо сначала найти пределы некоторых дифференциальных выражений при $r=0$. Применяя правило Лопиталья, получим

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{d^2 \varphi}{dr^2}}{r} \right) &= \frac{d^4 \varphi}{dr^4}, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{dw}{dr}}{r} \right) &= \frac{d^3 w}{dr^3}, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{d^2 \varphi}{dr^2}}{r^2} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d^4 \varphi}{dr^4}, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{dw}{dr}}{r^3} \right) &= \frac{1}{6} \frac{d^4 w}{dr^4}.
 \end{aligned}$$

Тогда исходные уравнения (12.2) для точки $r=0$ примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 \varphi}{dr^4} - \frac{3E\hbar}{4R} \frac{d^3 w}{dr^3} &= 0, \\
 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{4DR}{3} \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{2} qR^2 \frac{d^2 w}{dr^2} &= 0,
 \end{aligned}$$

или в конечных разностях

$$\begin{aligned}
 6F_k - 4F_l - 4F_l + F_l + F_s - \frac{3E\delta h^2}{4R}(W_l + W_l - 2W_k) &= 0, \\
 F_l + F_l - 2F_k + \frac{4DR}{3h^2}(6W_k - 4W_l - 4W_l + W_l + W_s) + \\
 + \frac{1}{2}qR^2(W_l + W_l - 2W_k) &= 0.
 \end{aligned} \quad (12.5)$$

Используем уравнения (12.4) и (12.5) для определения критического внешнего давления сферических сегментов. Вначале

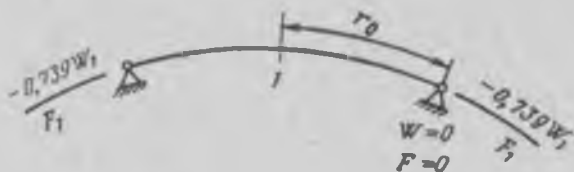


Рис. 191.

рассмотрим случай шарнирного опирания сегмента. Граничные условия для этого случая будут

$$M_r = 0, w = 0.$$

Дополнительные радиальные мембранные напряжения на контуре сегмента примем $\sigma_r = 0$. В развернутом виде эти граничные условия при шаге сетки $h = r_0$ (рис. 191) примут вид

$$M_r = -\frac{D}{h^2} [W_l(1 + 0,5\mu) + W_l(1 - 0,5\mu) - 0] = 0,$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2r_0 h} (F_l - F_l) = 0,$$

откуда

$$W_l = -0,739W_l, \quad F_l = F_l.$$

На контуре сегмента функция напряжений φ будет равна нулю. Это вытекает из связи функции напряжений с изгибающим моментом от нагрузки, действующей на контуре [4]. В нашем случае контурная нагрузка $\sigma_r = 0$. Следовательно, $\varphi_k = F_k = 0$.

Уравнения равновесия для точки I будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 6F_l + F_l + F_l + \frac{3E\delta h^2}{2R} W_l &= 0, \\
 -2F_l + \frac{4DR}{3h^2}(6W_l - 0,739W_l - 0,739W_l) - qR^2 W_l &= 0.
 \end{aligned}$$

Из этих уравнений найдем

$$q = \frac{6D}{Rh^2} + \frac{3E\delta h^2}{8R^2}.$$

Рассматривая в этом выражении шаг сетки h как параметр, найдем $q_{кр}^1$:

$$q_{кр}^1 = 0,9E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \quad \text{при} \quad r_0 = 1,1 \sqrt{R\delta}.$$

Теперь рассмотрим сетку с двумя точками (рис. 192)

$$h = \frac{1}{2} r_0, \quad \frac{h}{r_1} = 1, \quad \frac{h}{r_0} = \frac{1}{2}.$$

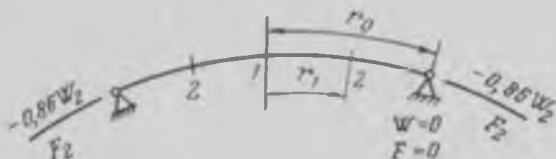


Рис. 192.

В этом случае для законтурной точки W_1 имеем уравнение

$$(M_r)_{r=r_0} = -\frac{D}{h^2} [W_1(1+0,25\mu) + W_1(1-0,25\mu)] = 0,$$

откуда

$$W_1 = -0,86W_1.$$

Точка 1:

$$6F_1 - 4F_2 - 4F_2 - \frac{3E\delta h^2}{2R} (W_2 - W_1) = 0,$$

$$F_2 + F_1 - 2F_2 + \frac{8DR}{3h^2} (3W_1 - 2W_2) + qR^2(W_2 - W_1) = 0.$$

Точка 2:

$$F_2(6+2) - F_1 \left(4 - 2 + 1 + \frac{1}{2} \right) + F_2(1+1) -$$

$$- \frac{E\delta h^2}{R} \left[W_1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 2W_2 \right] = 0,$$

$$F_1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 2F_2 + \frac{DR}{h^2} [W_2(6+2) - W_1 \left(4 - 2 + 1 + \frac{1}{2} \right) - 0,86W_2(1+1)] + \frac{1}{2} qR^2 \left[W_1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 2W_2 \right] = 0.$$

Исключая из этих уравнений F_1 и F_2 , получим

$$W_1 \left(\frac{284}{9} \alpha x^2 + 1 - \frac{34}{9} \beta x \right) + W_2 \left(-\frac{391,6}{9} \alpha x^2 - 1 + \frac{40}{9} \beta x \right) = 0,$$

$$W_1 \left(-\frac{155}{3} \alpha x^2 - 1 + \frac{14,5}{3} \beta x \right) + W_2 \left(\frac{248,7}{3} \alpha x^2 + 4 - \frac{34}{3} \beta x \right) = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad \beta = \frac{qR}{E\delta}, \quad x = \left(\frac{R}{h} \right)^2.$$

Из условия равенства нулю определителя этих уравнений получим

$$\left(\frac{qR^2}{E\delta^2} \right)^{II} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + 0,807 k^2 \right) \pm \sqrt{\frac{0,164}{k^4} - 0,084 + 0,23k^4},$$

где

$$k = \frac{h}{\sqrt{R\delta}}.$$

В табл. 12 даны значения $q_{кр}^{II}$ в зависимости от параметра k .

Таблица 12

k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\left(\frac{qR^2}{E\delta^2} \right)^{II}$	0,685	0,621	0,617	0,644	0,696

Из этой таблицы найдем

$$\left(\frac{qR^2}{E\delta^2} \right)_{кр}^{II} \approx 0,62 \quad \text{при} \quad k = 0,8 \quad \text{и} \quad r_0 = 1,6 \sqrt{R\delta}.$$

Более точное значение критического давления можно определить экстраполяцией (§ 2):

$$\left(\frac{qR^2}{E\delta^2} \right)_{экстр} = 0,527,$$

$$\sigma_{кр} = 0,264E \frac{\gamma}{R} \quad \text{при} \quad r_{0 \text{ экстр}} = 1,8 \sqrt{R\delta}.$$

При решении этой же задачи для случая жесткой заделки контура (рис. 193) $\frac{dw}{dr} = 0$ и при тех же граничных условиях для функции напряжений в результате первого ($h = r_0$) и второго

($h = \frac{1}{2} r_0$) приближений и экстраполяции получим следующее значение критического давления:

$$\left(\frac{q R^2}{E \delta^2} \right)_{\text{крит}} = 0,73,$$

$$\sigma_{\text{кр}} = 0,365 E \frac{h}{R} \quad \text{при} \quad r_{0\text{крит}} = 3 \sqrt{R \delta}.$$

Теперь рассмотрим устойчивость сферического сегмента с жестким недеформируемым контуром при внешнем давлении.

В этом случае, кроме требования равенства нулю угла поворота, необходимо поставить дополнительное требование об отсутствии удлинения окружности опорного контура, т. е.



Рис. 193.

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{\mu}{r_0} \frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=r_0} = 0.$$

В конечных разностях эти условия имеют вид

$$W'_1 = W'_2,$$

$$\frac{F_1 + F_2 - 2F_h}{h^2} - \frac{\mu}{r_0} \frac{F_1 - F_2}{2h} = 0.$$

В рассматриваемой задаче ввиду недеформируемости опорного контура после потери устойчивости возникнут дополнительные мембранные напряжения σ_r . Если осевую линию контура сегмента рассматривать как кольцо, нагруженное равномерной нагрузкой $N_r = \delta \sigma_r$, где δ — толщина сегмента, то изгибающий момент в этом кольце от такой нагрузки будет равен нулю. Учитывая указанную выше связь изгибающего момента с функцией напряжений, можно показать, что эта функция на контуре будет $\varphi_1 = F_1 = 0$. Тогда

$$F_1 = - \frac{1 + \frac{\mu h}{2r_0}}{1 - \frac{\mu h}{2r_0}} F_2.$$

Первое приближение: $h = r_0$ (рис. 194):

$$6F_1 - 0,739F_2 - 0,739F_1 + \frac{3E^* h^2}{2R} W_1 = 0,$$

$$-2F_1 + \frac{4DR}{3h^2} (6W_1 + W_2 + W_3) - qR^2 W_1 = 0.$$

Из этих уравнений получим

$$q^I = \frac{10,65 D}{R h^2} + \frac{0,654 E \epsilon h^2}{R^3}.$$

Минимум этого выражения по параметру h^2

$$q_{\text{кр}}^I = 1,6 E \left(\frac{\epsilon}{R} \right)^2 \quad \text{при} \quad r_0 = 1,1 \sqrt{R \delta}.$$

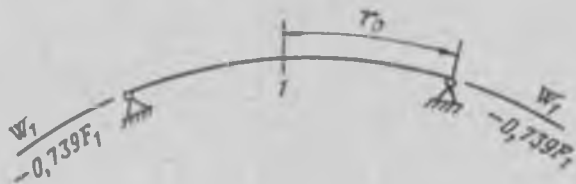


Рис. 194.

В результате второго приближения $h = \frac{r_0}{2}$ (рис. 195) было получено

$$\left(\frac{q R^2}{E \delta^2} \right)^{II} = \left(\frac{0,724}{k^2} + 1,25 K^2 \right) \pm \sqrt{\frac{0,044}{k^4} - 0,24 + 0,633 k^4},$$

где

$$k = \frac{r_0}{2 \sqrt{R \delta}}.$$



Рис. 195.

В табл. 13 приведена зависимость $q_{\text{кр}}^{II}$ от параметра k .

Таблица 13

k	0,5	1,0	1,2	1,5	2
$\left(\frac{q R^2}{E \delta^2} \right)^{II}$	2,5	1,32	1,26	1,95	2,1

Из этой таблицы найдем

$$\left(\frac{qR^2}{E\delta^2}\right)_{\text{кр}} = 1,26 \quad \text{при} \quad r_0 = 2,4 \sqrt{R\delta}.$$

Более точное значение критического давления можно определить экстраполяцией:

$$\left(\frac{qR^2}{E\delta^2}\right)_{\text{вкстр}} = 1,2 \quad \text{при} \quad r_{0\text{вкстр}} = 2,8 \sqrt{R\delta}.$$

$$\sigma_{\text{кр}} = 0,6 E \frac{\delta}{R}.$$

§ 59. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

При определении величины критического внешнего давления замкнутой сферической оболочки предполагаем, что ее поверхность после потери устойчивости покрылась одинаковыми ямками и выпучинами, имеющими форму, близкую к квадратной. Такая форма деформированной поверхности сферы при малых перемещениях, по-видимому, возможна, так как в момент потери устойчивости площади ямок и выпучин будут небольшими.

Конечно, можно предположить, что ямки и выпучины могут иметь и другие формы, отличные от квадратной.

По аналогии с задачей устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии будем считать, что на контуре ямок и выпучин реализуются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= 0, & N_x &= 0, \\ M_x &= 0, & N_y &= 0, \\ M_y &= 0, & N_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Как известно из решения задачи для цилиндрической оболочки, этим граничным условиям удовлетворяют следующие выражения для прогиба и функции напряжений:

$$\begin{aligned} w &= A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \varphi &= B_1 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} + B_2 \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a} + \\ &+ B_3 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{2\pi y}{a} + B_4 \sin^2 \frac{2\pi x}{a} \sin^2 \frac{2\pi y}{a}. \end{aligned}$$

После подстановки этих функций в уравнения (12.1) и интегрирования их по методу Бубнова—Галеркина в результате третьего и четвертого приближений по функции φ при одном и том

же выражении для w получим следующее значение критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = 0,315E \frac{\lambda}{R}.$$

Экспериментальные данные по испытаниям замкнутых сферических оболочек в литературе отсутствуют. Поэтому трудно что-либо сказать о том, насколько достоверна последняя формула. Если же судить по формальным признакам самого решения, полностью базирующегося на принятой формулировке граничных условий на контуре ямок и выпучин, то можно надеяться, что полученный результат приемлем для практического использования и не слишком завышен по сравнению с известными в литературе.

§ 60 УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Рассмотрим вопрос об устойчивости сферического пояса, находящегося под действием внешнего равномерного давления q . При этом предполагаем, что образующая пояса симметрична относительно оси y , а заделка краев пояса шарнирная (рис. 196).

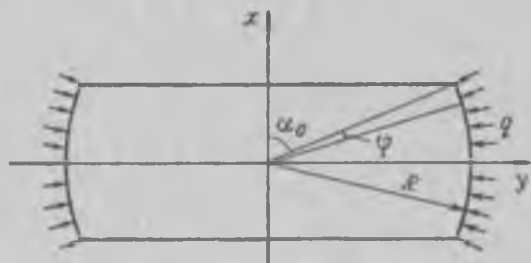


Рис. 196.

Мембранные усилия в докритическом состоянии оболочки могут быть представлены выражениями, полученными из решения безмоментной задачи:

$$N_{\varphi}^0 = \frac{qR}{2} \frac{\sin^2(\alpha_0 + \varphi) - \sin^2 \alpha_0}{\sin^2(\alpha_0 + \varphi)},$$

$$N_{\theta}^0 = \frac{qR}{2} \frac{\sin^2(\alpha_0 + \varphi) + \sin^2 \alpha_0}{\sin^2(\alpha_0 + \varphi)}.$$

Все дальнейшие выкладки проведем для сравнительно невысокого сферического слоя. При этом считаем, что меридиональное усилие N_{φ}^0 значительно меньше, чем кольцевое N_{θ}^0 , и им можно

пренебречь. Усилие N_{θ}^0 можно принять в запас надежности равным его максимальному значению при $\varphi = 90^\circ - \alpha_0$. Тогда

$$N_{\theta}^0 \approx qR, \quad N_{\varphi}^0 \approx 0.$$

Уравнения устойчивости при этом будут иметь вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{Eb}{R} \nabla^2 w,$$

$$\frac{1}{R} \nabla^2 \varphi + D \nabla^2 \nabla^2 w + N_{\theta}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Разделяя переменные по формулам

$$w = W(y) \cos \frac{m\pi x}{l},$$

$$\varphi = F(y) \cos \frac{m\pi x}{l}$$

и переходя к конечно-разностным уравнениям, получим

$$F_n + F_m - a_2 F_k + \frac{DR}{b^2 b} [W_k a_1 - 2a_2 (W_n + W_m) + W_v + W_u] + \frac{N_{\theta}^0 R}{b} (W_n + W_m - 2W_k) = 0,$$

$$F_k a_1 - 2a_2 (F_n + F_m) + F_u + F_v = \frac{Eb^2}{R} (W_n + W_m - a_2 W_k).$$

Здесь обозначено

$$a_1 = \left(\frac{m\pi b}{l} \right)^4 + 4 \left(\frac{m\pi b}{l} \right)^2 + 6;$$

$$a_2 = \left(\frac{m\pi b}{l} \right)^2 + 2;$$

b — размер полутолщины в окружном направлении;

m — число волн в направлении оси x .

В качестве размера l следует брать высоту слоя. Будем считать, что на контуре ямок и выпучин в окружном направлении реализуются следующие граничные условия:

$$M_y = 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0.$$

Из этих условий для точек на контуре и законтурных получим соотношения

$$W_k = 0, \quad W_l = W_0, \quad F_k = 0, \quad F_l = F_0.$$

Первое приближение: $b = \frac{C}{2}$ (рис. 197):

$$-a_2 F_1 + \frac{DR}{b^2 h} (W_1 - W'_1 - W''_1) - \frac{2N_0^0 R}{b} W'_1 = 0,$$

$$F_1 a_1 + F_1 + F_1 = -\frac{Eh^2 a_2}{R} W'_1.$$

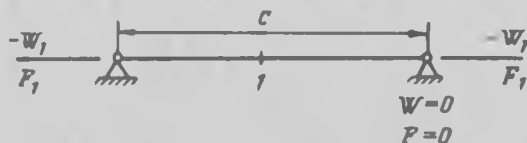


Рис. 197.

Исключая из этих уравнений функции F_1 и W_1 , получим для N_0^0 выражение

$$\begin{aligned} \frac{N_0^0}{Eh} = \frac{qR}{Eh} = & \frac{\left[2 + \left(\frac{\pi m b}{l} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{b}{R} \right)^2}{2 \left[8 + 4 \left(\frac{\pi m b}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi m b}{l} \right)^4 \right]} + \\ & + \frac{\left(\frac{b}{R} \right)^2 \left[2 + \left(\frac{\pi m b}{l} \right)^2 \right]^2}{24 (1 - \mu^2) \left(\frac{b}{R} \right)^2}. \end{aligned}$$

Из структуры этого выражения видно, что минимум критического давления будет при $m=1$, т. е. когда в продольном направлении пояса образуется только одна полуволна:

$$\begin{aligned} \frac{qR}{Eh} = & \frac{\left[2 + \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2}{2 \left[8 + 4 \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi b}{l} \right)^4 \right]} + \\ & + \frac{\left(\frac{b}{R} \right)^2 \left[2 + \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2 \right]^2}{24 (1 - \mu^2) \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2}. \end{aligned}$$

При анализе полученного выражения учитываем, что сферический пояс является коротким. Поэтому можно ожидать, что параметр $\left(\frac{\pi b}{l} \right)^2$ будет большим числом, дробь

$$\frac{\left[2 + \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2 \right]^2}{8 + 4 \left(\frac{\pi b}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi b}{l} \right)^4}$$

мало отличается от единицы, и приближенно можно написать

$$\frac{qR}{E\delta} = \frac{\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2}{2} x + \frac{\left(\frac{\pi}{R}\right)^2}{24(1-\mu^2)\left(\frac{l}{\pi R}\right)^2} \frac{(2+x)^2}{x}$$

Здесь обозначено

$$x = \left(\frac{\pi b}{l}\right)^2.$$

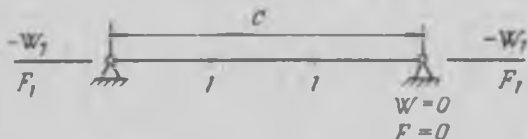


Рис. 198.

Для определения наименьшего значения q необходимо взять от последнего выражения производную по x и приравнять ее нулю. Решив полученное при этом уравнение относительно x и подставляя его в выражение для q , найдем

$$\left(\frac{qR}{E\delta}\right)_{\text{кр}} = \frac{\delta}{\sqrt{3}(1-\mu^2)R} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\pi^2 R\delta}{l^2}\right)^2}{12(1-\mu^2)} + \frac{\left(\frac{\pi\delta}{l}\right)^2}{6(1-\mu^2)}}$$

Аналогичные выкладки для более мелкой сетки с шагом $b = \frac{1}{3} C$ (рис. 198) приводят к формуле, найденной из первого приближения.

§ 61. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Как показано в § 17, при нагружении сферической оболочки гидростатическим давлением окружные усилия N_φ^0 могут принимать отрицательные значения. При некоторой величине гидростатического давления эти усилия могут достигать своего критического значения и оболочка может потерять устойчивость. Для определения критического давления жидкости считаем, что интенсивность внутренних усилий в сжатой зоне оболочки может быть определена формулами § 18:

$$N_x^0 = -\frac{\gamma R^2}{3}, \quad N_\varphi^0 = \frac{\gamma R^2}{3},$$

где знак минус указывает на растяжение.

Для решения задачи усилия N_x^0 и N_y^0 принимаем максимальными и равными их значению на экваторе. Такое допущение пойдет в запас надежности, и мы получим несколько заниженное значение критического напряжения.

Уравнения В. З. Власова будем решать, пользуясь методом Бубнова — Галеркина. Ограничиваясь первым приближением, примем для функций прогиба и напряжений следующие выражения:

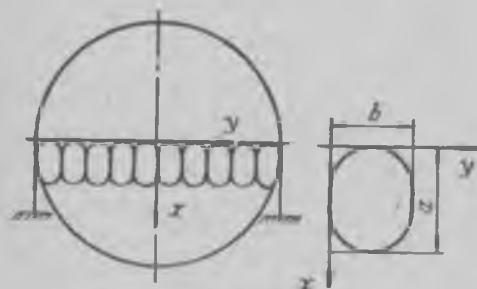


Рис. 199.

$$w = A \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\varphi = B \sin \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}.$$

Эти выражения относятся к одной какой-нибудь ямке или выпучине (рис. 199). В силу симметрии нагружения все ямки и выпучины будут совершенно одинаковы по площади. Размеры их a

и b будут определены из условия минимума нагрузки. Граничные условия на контуре ямок и выпучин:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \\ v &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ x &= a \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} w &= 0, \\ M_y = 0, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0, \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= 0 \\ y &= b \end{aligned}$$

Этим граничным условиям удовлетворяют принятые функции φ и w . Подставим необходимые производные от φ и w , а также усилия N_x^0 и N_y^0 в уравнения Власова и проинтегрируем их в пределах $0-a$, $0-b$. После соответствующих вычислений будем иметь

$$B = - \frac{16 E^2 A \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}{9 \pi^2 R \left[\frac{3}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] \left(\frac{\pi}{a} \right)^2},$$

$$- \frac{16 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}{9 \pi^2 R} B + D A \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{3}{16} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] -$$

$$- \frac{q R}{12} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right] A = 0.$$

Исключая из этих уравнений параметры A и B , получим выражение для $q = (\gamma R)_{\text{кр}}$:

$$\frac{\gamma R^2}{12E\delta} = \frac{256(1+x)^2}{81\pi^4 \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}x + x^2 \right) \left(\frac{3}{4}x - 1 \right) y} + \\ + \frac{\alpha \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}x^2 \right) y}{\frac{3}{4}x - 1}$$

Здесь обозначено

$$x = \left(\frac{a}{b} \right)^2, \quad y = \left(\frac{\pi R}{a} \right)^2, \quad \alpha = \frac{(\pi/F)^2}{12(1-\mu^2)}$$

Минимум приведенного выражения по параметру y будут

$$\frac{\gamma R}{E} \left(\frac{R}{a} \right)^2 = 1,32 \frac{1+x}{\frac{3}{4}x - 1} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{16}x^2}{\frac{3}{16} + \frac{1}{2}x + x^2}}$$

Придавая различные числовые значения параметру x , можно убедиться, что минимум для γR будет при больших значениях x . В пределе (при $x \rightarrow \infty$) получим

$$\left(\frac{\gamma R}{a} \right)_{\text{кр}} = 0,251 E \left(\frac{a}{R} \right)^2$$

Этим выражением дается критическое значение гидравлического давления при уровне жидкости, проходящем через экватор.

§ 62 УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ТОРОВЫХ ОБОЛОЧЕК ОТ ДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Эллипсоидальные торовые оболочки, использованные как самостоятельные конструкции емкостей или в качестве днищ баков, при определенном внутреннем давлении могут терять устойчивость с образованием складок в окружном направлении. Потеря устойчивости таких оболочек происходит в зоне сжимающих кольцевых напряжений. Как указано в § 14, эта зона определяется условием

$$r \geq \sqrt{-\frac{a^4}{2(b^2 - a^2)}} \quad \text{при } a > b.$$

В том же параграфе были получены выражения для напряжений σ_φ и σ_θ .

Поставленную задачу будем решать методом конечных разностей, считая, что в данном случае форма волнообразования после потери устойчивости, как следует из эксперимента, состоит из одинаковых ямок и выпучин в окружном направлении сжатой зоны оболочки. Поэтому будет приведено решение только для случая шарнирного опирания ямок и выпучин в окружном направлении и жесткой заделки их в направлении меридиана. Уравнения В. З. Власова, выраженные через конечные разности, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 & 6F_k \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2 \right) - 4(1 + \xi)(F_l + F_l + \xi F_n + \xi F_m) + F_l + F_s + \\
 & + \xi^2 (F_v + F_u) + 2\xi (F_p + F_0 + F_r + F_q) = \frac{E\epsilon h^2}{R_2} (W_l + W_l - 2W_k) + \\
 & + \frac{E\delta \xi h^2}{R_1} (W_n + W'_m - 2W_k), \\
 & F_l + F_l - 2F_k + \xi \frac{R_2}{R_1} (F_n + F_m - 2F_k) + \frac{DR_2}{h^2} \left[6W_k \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2 \right) - \right. \\
 & - 4(1 + \xi)(W_l + W_l + \xi W_n + \xi W_m) + W_l + W_s + \xi^2 (W_v + W_u) + \\
 & \left. + 2\xi (W_p + W_0 + W_r + W_q) \right] + R_2 N_x^0 (W_l + W_l - 2W_k) + \\
 & + \xi R_2 N_y^0 (W_n + W'_m - 2W_k) = 0.
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

Здесь обозначено $\xi = \left(\frac{h}{b} \right)^2$.

Выражения для изгибающих моментов и углов поворота:

$$M_x = -\frac{D}{h^3} [W_l + W_l + \mu \xi (W_n + W_m) - 2(1 + \mu \xi) W_k],$$

$$M_y = -\frac{D}{h^3} [\mu (W_l + W_l) + \xi (W_n + W_m) - 2(\xi + \mu) W_k],$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2h} (W_l - W_l), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2b} (W_n - W_m).$$

Эти выражения будут в дальнейшем использованы при формулировке граничных условий на контуре ямок и выпучин (см. рис. 201—204).

Граничные условия для функции напряжений получим из решения следующей системы уравнений относительно дополнительных напряжений, которые на контуре ямок и выпучин полагаем равными нулю:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Рассматривая эти условия как дифференциальные уравнения, получим (см. § 57)

$$F_k = 0, \quad F_l = 0, \quad F_m = F_n.$$

Рассмотрим сжатую зону эллиптического тора (рис. 200) и составим уравнения (12.6) для предполагаемой ямки или выпучины с размерами l_1 и l_2 .

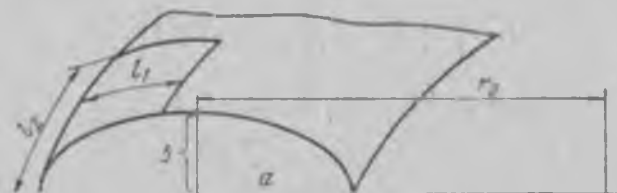


Рис. 200.

Размеры вмятин при испытаниях таких оболочек обычно невелики, и поэтому можно принять, что радиусы кривизны и напряжения в зоне этих вмятин — величины постоянные, равные их соответствующим значениям на внешнем контуре тора. Такое допущение идет в запас устойчивости при определении критического значения внутреннего давления.

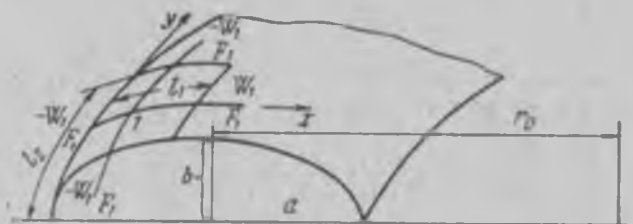


Рис. 201.

1) Первое приближение (рис. 201):

$$\begin{aligned} l_2 &= n l_1, \quad h = \frac{1}{2} l_1, \quad b = \frac{1}{2} l_2, \quad \xi = \left(\frac{h}{b} \right)^2 = \frac{1}{h^2}, \\ 6F_1 \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2 \right) + F_1 + F_1 + \xi^2 (F_1 + F_1) &= \\ &= -\frac{E n l_1^2}{2R_2} W_1 - \frac{E b \xi l_1^2}{2R_1} W_1, \\ -2F_1 - 2\xi \frac{R_2}{R_1} F_1 + \frac{4DR_2}{l_1^2} \left[6W_1 \left(1 + \frac{4}{3} \xi + \xi^2 \right) + W_1 + W_1 + \right. \\ &\quad \left. + \xi^2 (-W_1 - W_1) \right] + 2N_x^0 R_2 W_1 + 2\xi N_y^0 R_2 W_1 = 0. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений W_1 и F_1 , получим

$$\frac{qa^2}{2E\delta b} = -\frac{1}{Q_1 + \xi Q_2} \left[\frac{2\delta^2 (2 + 2\xi + \xi^2)}{3(1 - \xi^2) l_1^2} + \frac{k^2 l_1^2}{16(1 + \xi + \xi^2) R_2^3} \right].$$

Здесь обозначено:

$$Q_1 = \left(1 + \frac{r_0}{r_0 + a} \right) \frac{b}{a},$$

$$Q_2 = \left[2 \left(\frac{r_0}{a} + 1 \right) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + 1 \right] \frac{a}{b},$$

$$k = 1 + \xi \frac{R_2}{R_1}, \quad R_1 = r_0 + a, \quad R_2 = \frac{b^2}{a}.$$

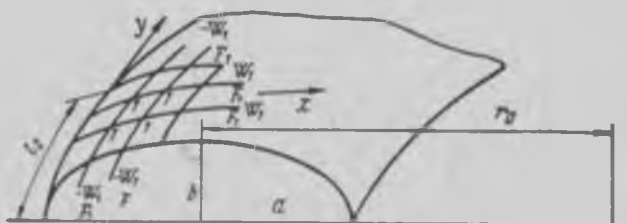


Рис. 202.

Рассматривая в полученном выражении размер вмятины l_1 как параметр, найдем относительный минимум давления q по l_1^2 :

$$\frac{q R_2 a^2}{E \delta^2 b} = -\frac{0,855 k \sqrt{2 + 2\xi + \xi^2}}{(Q_1 + \xi Q_2) \sqrt{1 + \xi + \xi^2}}.$$

Расчеты, проведенные по этому выражению, показывают, что наименьшее значение для q получается при достаточно больших значениях параметра ξ . Поэтому в правой части последнего выражения можно пренебречь единицей по сравнению с ξ и Q_1 по сравнению с ξQ_2 . Тогда

$$\frac{qa^2}{E\delta^2 b} = -\frac{0,855}{Q_2 R_1}$$

или

$$q_{кр}^I = -\frac{0,855 E \delta^2}{\left[2 \left(\frac{r_0}{a} + 1 \right) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + 1 \right] a^2}.$$

Второе приближение (рис. 202):

$$h = \frac{1}{3} l_1, \quad b = \frac{1}{3} l_2, \quad l_2 = n l_1, \quad \xi = \left(\frac{h}{b} \right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

При $r_0=0$ получим формулу для оболочки в форме эллипсоида вращения, находящегося под действием внутреннего давления:

$$q_{кр} = \frac{0,358E\delta^2}{b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \right)}. \quad (12.8)$$

В литературе довольно широко распространена формула Геккелера, имеющая вид (в наших обозначениях)

$$q_{кр} = \frac{1,21E\delta^2}{a^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \right)}. \quad (12.9)$$

В последние годы Х. М. Муштари и В. И. Королевым была предложена формула

$$q_{кр} = \frac{1,21E\delta^3}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \right) b^2}. \quad (12.10)$$

Сравнивая формулу (12.10) с (12.8), видим, что они по структуре совпадают и отличаются только коэффициентом. Что касается формулы (12.9) Геккелера, то она, как было отмечено Х. М. Муштаром и В. И. Королевым, ошибочна.

Так как при получении формулы (12.7) были использованы те же граничные условия на контуре ямок и выпучин, что и при исследовании устойчивости цилиндрической и сферической оболочек, для которых полученные формулы удовлетвори-

тельно согласуются с экспериментом, то и данная формула, по-видимому, будет давать удовлетворительный результат. Поэтому формула (12.8), полученная из (12.7), также будет давать удовлетворительный результат. Формула же (12.10) получена при более жестких граничных условиях на контуре ямок и поэтому результаты вычислений по ней будут завышенными.

В случае эллипсоидального тора (рис. 204), вытянутого в направлении вертикального диаметра ($b > a$), формула для критического внутреннего давления принимает вид

$$q_{кр} = \frac{0,358E\delta^2}{\left[2 \left(\frac{r_0}{a} - 1 \right) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) - 1 \right] a^2}$$

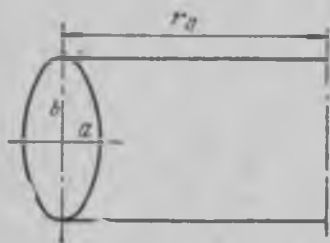


Рис. 204.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ИХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОГОННОЙ НАГРУЗКОЙ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

§ 63. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЕЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ РАДИАЛЬНОЙ ПОГОННОЙ НАГРУЗКОЙ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В гл. VI рассмотрены некоторые задачи по расчету оболочек вращения при нагружении их погонной осесимметричной нагрузкой. При некотором значении действующих на оболочки сил они могут потерять устойчивость в сжатой зоне. При определении критического значения этих сил считаем, что оболочки находятся под действием внутреннего давления.

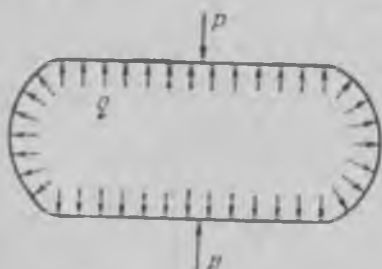


Рис. 205.

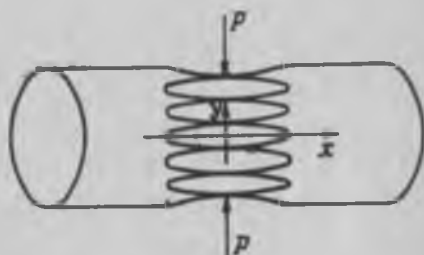


Рис. 206.

1. При нагружении цилиндрической оболочки согласно рис. 205 для внутренних усилий имеем выражения

$$N_x^0 = -\frac{qR}{2},$$

$$N_y^0 = \frac{PRb}{2} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx) - qR.$$

Знак минус указывает на то, что напряжение является растягивающим.

Для решения этой и всех последующих задач данной главы будем пользоваться методом Бубнова—Галеркина. Для получения приближенного решения считаем, что прогиб оболочки после потери устойчивости по переменной x совпадает с соответствующим выражением докритического состояния

$$w = Ae^{-kx} (\sin kx + \cos kx) \cos n\theta. \quad (13.1)$$

Функцию напряжений примем в форме

$$\varphi = e^{-kx} (B_1 \sin kx + B_2 \cos kx) \cos n\theta.$$

Из выражения для w видно, что прогиб оболочки после потери устойчивости убывает по мере удаления от места приложения нагрузки и он является периодической функцией угла θ в окружном направлении, т. е. оболочка после потери устойчивости в районе приложения нагрузки примет вид, соответствующий рис. 206.

Из этого рисунка видно, что поверхность лунок в силу осесимметричного характера нагрузки P будет обладать свойством симметрии относительно координаты $x=0$. Поэтому можно сказать, что при $x=0$ касательных напряжений в оболочке после потери устойчивости не будет. Пользуясь этим обстоятельством, определим один из параметров в выражении φ из условия

$$\sigma_{xy} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_{x=0} = 0.$$

Отсюда

$$B_1 = B_2 = B.$$

Тогда функция напряжений примет вид

$$\varphi = B e^{-kx} (\sin kx + \cos kx) \cos n\theta.$$

Подставив эти функции в уравнения В. З. Власова, после интегрирования их получим

$$\begin{aligned} B \left(-12k^4 + \frac{4n^2k^2}{R^2} + \frac{3n^4}{R^4} \right) &= -\frac{2k^2 E \delta A}{R}, \\ -\frac{2k^2 B}{R} + D A \left(-12k^4 + \frac{4n^2k^2}{R^2} + \frac{3n^4}{R^4} \right) &+ \frac{4qn^2 A}{R} + \\ + \frac{qRk^2 A}{2} - \frac{6Pkn^2 A}{5R} &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений параметры A и B , найдем

$$\begin{aligned} \frac{6P}{5E\delta} (Rk)^3 &= \frac{4}{x(-12+4x+3x^2)} + \frac{-12+4x+3x^2}{4x} + \\ + \frac{3qR^3k^2}{E\delta} + \frac{qR^3k^2}{2x}, \end{aligned}$$

где

$$x = \left(\frac{n}{Rk} \right)^2.$$

В некоторых случаях осевое усилие $N_x^0 = 0$. Тогда, отбрасывая последнее слагаемое в приведенной формуле, будем иметь

$$\frac{6P}{5E\delta} (Rk)^3 = \frac{4}{x(-12+4x+3x^2)} + \frac{-12+4x+3x^2}{4x} + \frac{3qR^3k^2}{E\delta}.$$

На рис. 207 представлен график функции

$$f(x) = \frac{4}{x(-12 + 4x + 3x^2)} + \frac{-12 + 4x + 3x^2}{4x} +$$

Из второй ветви этого графика видно, что наименьшее значение функции $f(x)$ равно 1,135. Тогда

$$P_{кр} = 0,444E\delta \sqrt{\left(\frac{\delta}{R}\right)^3} + 1,94qR \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad (13.2)$$

при

$$n = 1,73 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Чтобы учесть усилие N_x^0 в осевом направлении от внутреннего давления, следует пользоваться формулой

$$\begin{aligned} \frac{6P}{5E\delta} (Rk)^3 = & \frac{4}{x(-12 + 4x + 3x^2)} + \\ & + \frac{-12 + 4x + 3x^2}{4x} + \\ & + \frac{qR^2}{E\delta^2} \left(4,95 + \frac{1,65}{x} \right). \end{aligned}$$

При решении данной задачи во втором приближении для функции напряжения φ можно использовать выражение

$$\varphi = B_1 e^{-kx} (\sin kx + \cos kx) \cos n\theta + B_2 e^{-2kx} (\sin 2kx + \cos 2kx) \cos n\theta.$$

При этом для ω было использовано прежнее выражение (13.1). Для критического значения усилия P в этом случае

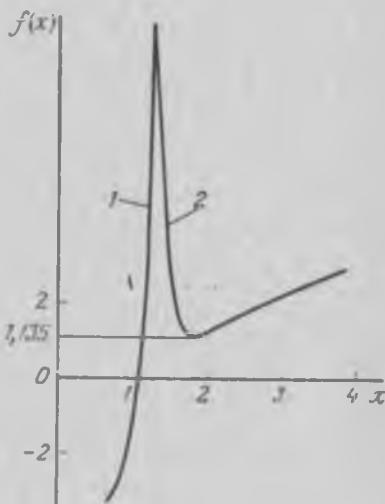


Рис. 207.

$$\begin{aligned} \frac{6P}{5E\delta} (Rk)^3 = & \frac{\frac{16}{15} f_1 - f_2 - \frac{256}{225} f_3 + \frac{16}{15} f_4}{x(f_1 f_4 - f_2 f_3)} + f_3 + \\ & + \frac{3qR^3 k^2}{E\delta} + \frac{2N_x^0 R^2 k^2}{E\delta x}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = -\frac{28}{15} + \frac{16x}{15} + \frac{7x^2}{5}, \quad f_2 = -24 + 2x + \frac{3}{8} x^2, \\ f_3 = -3 + x + \frac{3}{4} x^2, \quad f_4 = -\frac{448}{15} + \frac{16x}{15} + \frac{7x^2}{15}, \\ x = \left(\frac{n}{Rk} \right)^2; \end{aligned}$$

N_x^0 — осевое усилие в оболочке. Если это усилие создается внутренним давлением, то $N_x^0 = \frac{1}{2}qR$.

Полагая в приведенном выражении $N_x^0 = 0$ и определяя минимум полученного при этом выражения по параметру x , найдем значение $P_{кр}$ во втором приближении:

$$P_{кр} = 0,415E\delta \sqrt{\left(\frac{\delta}{R}\right)^3 + 1,94qR} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad n = 1,72 \sqrt{\frac{R}{\delta}}$$

Из сравнения двух приближений видно, что с достаточной степенью точности можно ограничиться только первым приближением. Поэтому решения задач, изложенных ниже, даются только в первом приближении.

2. Рассмотрим *случай потери устойчивости*, когда прогиб всех лунок обращен к центру кривизны оболочки. Такую форму потери устойчивости можно получить, если снаружи на оболочку надет без натяга бесконечно длинный цилиндр. Тогда волны, образующиеся после потери устойчивости, будут обращены внутрь оболочки.

Форму деформированной поверхности оболочки приближенно можно представить выражением

$$w = Ae^{-kx}(\sin kx + \cos kx) \cos^2 n\theta.$$

Хотя это выражение не полностью удовлетворяет поставленным требованиям однозначности прогиба вдоль оси оболочки, так как функция $e^{-kx}(\sin kx + \cos kx)$ носит колебательный характер, однако ветвь этой кривой, содержащая наибольшую амплитуду, будет обращена внутрь оболочки.

Для функции напряжений примем выражение

$$\varphi = Be^{-kx}(\sin kx + \cos kx) \cos^2 n\theta,$$

которое обращает в нуль касательные напряжения при $x=0$. Квадратом косинуса учитывается однозначность напряжений по углу θ . Опуская все промежуточные выкладки, аналогичные рассмотренному выше случаю, приведем окончательные результаты для критического значения усилия P (при этом осевое усилие N_x^0 равно нулю):

$$P_{кр} = 2,5E\delta \sqrt{\left(\frac{\delta}{R}\right)^3 + 1,94qR} \sqrt{\frac{\delta}{R}} \quad \text{при} \quad n = 1,29 \sqrt{\frac{R}{\delta}}. \quad (13.3)$$

Сравнивая формулы (13.2) и (13.3), видим, что наложение стеснения на форму деформированной поверхности привело к повышению коэффициента в первом члене (13.3) в 5,5 раза.

3. Рассмотрим вопрос *об устойчивости цилиндрической оболочки*, нагруженной согласно рис. 208, при наличии в ней внутреннего давления q и осевого растяжения N_x^0 .

В докритическом состоянии оболочки имеем следующие выражения для внутренних усилий:

$$N_x^0 = -N_x,$$

$$N_y^0 = mRk^2 e^{-kx} \sin kx - qR.$$

Для функций прогиба и напряжений примем выражения

$$w = Ae^{-kx} \sin kx \cos n\theta,$$

$$\varphi = e^{-kx} (B_1 \sin kx + B_2 \cos kx) \cos n\theta.$$

Учитывая характер нагружения и ожидаемую форму деформированной поверхности оболочки после потери устойчивости от момента m , видим, что при $x=0$ дополнительные нормальные напряжения σ_x должны пройти через нуль, т. е.

$$\sigma_x = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0.$$

Из этого условия находим, что $B_2=0$. Опуская все промежуточные выкладки, связанные с интегрированием уравнений Власова по методу Бубнова — Галеркина в пределах $0-\infty$, $0-2\pi$, выпишем окончательный результат:

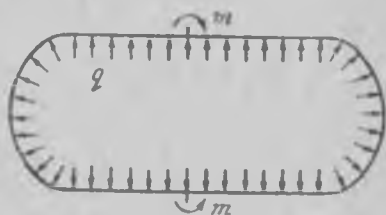


Рис. 208.

$$\frac{4m}{15EbR} (Rk)^4 = \frac{4}{x(-4 + 4x + x^2)} + \frac{-4 + 4x + x^2}{4x} +$$

$$+ \frac{qR^3k^2}{Eb} + \frac{2N_x^0 R^4 k^4}{Eb x},$$

где

$$x = \left(\frac{n}{Rk} \right)^2.$$

Минимум приведенного выражения при $N_x^0=0$, $\mu=0,3$

$$m_{кр} = 1,7EbR \left(\frac{n}{R} \right)^2 + 2,28qR^3 \quad \text{при} \quad n = 1,72 \sqrt{\frac{R}{h}}.$$

Если осевое усилие N_x^0 не равно нулю, то критическое значение момента m определяется из приведенного выше полного выражения путем минимизации его по параметру x .

4. Из выражения для $m_{кр}$ легко получить формулу для критического значения угла θ_0 (рис. 209) с учетом внутреннего давления q и осевого растягивающего усилия N_x^0 .

В этом случае выражения для усилия N_x^0 и прогиба w в докритическом состоянии совпадают с аналогичными выражениями при нагружении оболочки распределенным моментом m . Из сравнения этих выражений следует, что $m = 4Dk\theta_0$, откуда

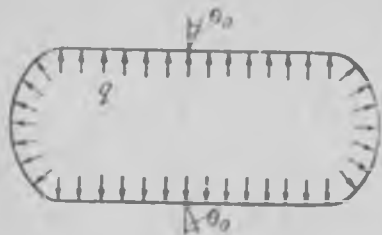


Рис. 209.

$$\theta_0 = \frac{m}{4Dk}.$$

Подставляя в это выражение $m_{кр}$, при $N_x^0 = 0$ получим

$$\theta_{0кр} = 3,62 \sqrt{\frac{b}{R}} + \frac{4,85qR}{Eb} \sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^3}.$$

Из этой формулы видно, что при $q = 0$ критическое значение угла θ_0 не зависит от упругих постоянных материала оболочки.

§ 64. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЕЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОГОННОЙ НАГРУЗКОЙ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

При нагружении сферической оболочки согласно рис. 210 в докритическом состоянии имеются следующие выражения для внутренних усилий:

$$N_x^0 = -N_x^0 + \frac{P}{2} e^{-\beta\psi} \cos \beta\psi \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_y^0 = -\frac{qR}{2} + \frac{P\beta}{2} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi),$$

где

$$N_x^0 = -\frac{1}{2} qR.$$

Здесь знак минус указывает на наличие растяжения. Для решения задачи примем, что

$$w = Ae^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \cos n\theta,$$

$$\varphi = Be^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \cos n\theta.$$

Выражение для w по структуре совпадает с выражениями для ϵ_0 в докритическом состоянии. Выражение для φ удовлетворяет условию

$$\sigma_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_{\psi=0} = 0.$$

Подставляя соответствующие производные от выражений q и w в уравнения Власова и интегрируя их по методу Бубнова—Галеркина в пределах по ψ от нуля до ∞ , по θ — от нуля до 2π , получим

$$B = - \frac{E^3 R A (\beta^2 + 1,5n^2)}{2 \left(-3\beta^4 + \beta^2 n^2 + \frac{3}{4} n^4 \right)} +$$

$$- \frac{B}{2R} (\beta^2 + 1,5n^2) + \frac{DA}{R^2} \times$$

$$\times \left(-3\beta^4 + \beta^2 n^2 + \frac{3}{4} n^4 \right) -$$

$$- \left(\frac{3P\beta}{10} - \frac{3qR}{8} \right) A n^2 +$$

$$+ \left(Pf + \frac{qR}{43} \right) A \beta^3 = 0.$$

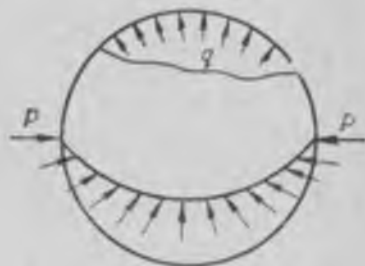


Рис. 210.

Исключая из этих уравнений параметры A и B , будем иметь

$$\frac{P\beta^3}{E^3} = \frac{1}{0,3x - f} \left[\frac{(1 + 1,5x)^2}{-12 + 4x + 3x^2} + \frac{-12 + 4x + 3x^2}{16} + \right.$$

$$\left. + \frac{qR\beta^2}{4E^3} (1 + 1,5x) \right],$$

где

$$x = \left(\frac{n}{\beta} \right)^2,$$

$$f = - \int_0^{\pi/2} e^{-3\beta\psi} \cos \beta\psi \cos 2\beta\psi \operatorname{tg} \psi d\psi.$$

По формуле Симпсона значение последнего интеграла будет

$$f = - \frac{\pi}{24} \left(1,66 e^{-\frac{3\pi\beta}{8}} \cos \frac{\pi\beta}{4} \cos \frac{\pi\beta}{8} + 2 e^{-\frac{3\pi\beta}{4}} \cos \frac{\pi\beta}{2} \cos \frac{\pi\beta}{4} + \right.$$

$$\left. + 9,66 e^{-\frac{9\pi\beta}{8}} \cos \frac{3\pi\beta}{4} \cos \frac{3\pi\beta}{8} + 1255,8 e^{-\frac{3\pi\beta}{2}} \cos \pi\beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \right).$$

Этим выражением учитывается меридиональное усилие N_φ , которое возникает в оболочке от действия нагрузки $P_{кр}$. Подсчеты величины f приведены в табл. 14.

Из таблицы видно, что слагаемым f в знаменателе дроби перед квадратной скобкой можно пренебречь по сравнению с $0,3x$,

β	10	30	50	90
f	$0,5 \cdot 10^{-8}$	$0,7 \cdot 10^{-59}$	$0,9 \cdot 10^{-98}$	$0,13 \cdot 10^{-181}$

так как последнее будет значительно больше, чем f (на несколько порядков). Тогда

$$\frac{P_{\beta 3}}{E\delta} = \frac{(1 + 1,5x)^2}{0,3x(-12 + 4x + 3x^2)} + \frac{-12 + 4x + 3x^2}{4,8x} + \frac{qR_{\beta 2}}{1,2E\delta} \left(1,5 + \frac{1}{x}\right).$$

Если в этом выражении учитывать только кольцевые напряжения от внутреннего давления, то, опуская в последнем члене слагаемое $1/x$, получим

$$\frac{P_{\beta 3}}{E\delta} = \frac{(1 + 1,5x)^2}{0,3x(-12 + 4x + 3x^2)} + \frac{-12 + 4x + 3x^2}{4,8x} + \frac{1,2qR_{\beta 2}}{E\delta}.$$

Минимум этого выражения по параметру x

$$P_{\kappa P} = 1,45E\delta \sqrt{\left(\frac{\delta}{R}\right)^3} + 0,97qR \sqrt{\frac{\delta}{R}}$$

при
$$n = 2,15 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Если требуется учесть и меридиональную составляющую напряжений от внутреннего давления, то следует пользоваться полным исходным выражением, определяя его минимум по параметру x .

При нагружении сферы распределенным моментом m согласно рис. 211 для внутренних усилий имеем следующие выражения:

$$N_{\varphi}^0 = \frac{m_{\beta}}{2R} e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi) \operatorname{tg} \psi - \frac{qR}{2},$$

$$N_{\theta}^0 = \frac{m_{\beta 2}}{R} e^{-\beta\psi} \sin \beta\psi - \frac{qR}{2}.$$

Для приближенного решения задачи примем, что

$$w = Ae^{-\beta\psi} \sin \beta\psi \cos n\theta,$$

$$\varphi = Be^{-\beta\psi} \sin \beta\psi \cos n\theta.$$

Эти выражения удовлетворяют всем необходимым кинематическим и статическим граничным условиям на контуре ямок и выпучин:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ \sigma_{\varphi} = \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \psi} &= 0, \end{aligned} \right\} \psi = 0$$

После подстановки принятых выражений для прогиба и функции напряжений в уравнении Власова и их интегрирования по методу Бубнова—Галеркина в пределах $0-\infty$ и $0-2\pi$ получим следующее значение для момента m :

$$\frac{m\beta^4}{2E\delta R} = \frac{1}{\frac{x}{15} + f} \left[\frac{(2+x)^2}{8(-4+4x+x^2)} + \frac{-4+4x+x^2}{32} + \frac{qR\beta^2}{16E\delta}(2+x) \right],$$

где

$$x = \left(\frac{n}{\beta} \right)^2,$$

$$f = \int_0^{\pi/2} e^{-3\beta\psi} (\sin^2 \beta\psi \cos \beta\psi + \cos^2 \beta\psi \sin \beta\psi) \operatorname{tg} \psi d\psi.$$

После подсчета этого интеграла по формуле Симпсона было получено

$$\begin{aligned} f = & \frac{\pi}{24\sqrt{2}} \left[1,66e^{-3\pi\beta} \times \right. \\ & \times \sin\left(\frac{\pi\beta}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi\beta}{4} + \\ & + 2e^{-\frac{3\pi\beta}{4}} \sin\left(\frac{\pi\beta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi\beta}{2} + \\ & + 9,66e^{-\frac{3\pi\beta}{8}} \sin\left(\frac{3\pi\beta}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{3\pi\beta}{4} + \\ & \left. + 1255,8e^{-\frac{3\pi\beta}{2}} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin \pi\beta \right]. \end{aligned}$$



Рис. 211.

Этим выражением, так же как и в случае действия распределенной силы P , учитывается меридиональное усилие N_ϵ , возникающее в оболочке от действия момента $m_{\text{кр}}$. Подсчеты величины f для различных β показывают, что, как и в предыдущем случае, они намного меньше, чем ожидаемое значение параметра x . Поэтому величиной f можно пренебречь по сравнению с $\frac{1}{15}x$. Тогда

$$\frac{m\beta^4}{2E\delta R} = \frac{15(2+x)^2}{8x(-4+4x+x^2)} + \frac{15(-4+4x+x^2)}{32x} + \frac{15qR\beta^2}{16E\delta} \left(1 + \frac{2}{x} \right). \quad (13.4)$$

Если в этом выражении отбросить меридиональную составляющую напряжения от внутреннего давления, то можно получить следующую формулу для критического момента

$$\frac{m\beta^4}{2E\delta R} = \frac{15(2+x)^2}{8x(-4+4x+x^2)} + \frac{15(-4+4x+x^2)}{32x} + \frac{15qR\beta^2}{16E\delta}.$$

Минимум этого выражения по параметру x будет равен

$$m_{кр} = 2,57 \frac{E\delta^3}{R} + 1,13qR\delta \quad (13.5)$$

при

$$n = 2,04 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Для определения $m_{кр}$ с учетом меридиональной составляющей напряжения от внутреннего давления необходимо использовать полное выражение (13.4), определив его минимум по параметру x .



Рис. 212.

Если нагружение сферической оболочки осуществляется согласно рис. 212, то формулы для критического значения угла θ_0 можно получить по результатам примера, приведенного на стр. 330, используя зависимость

$$\theta_0 = \frac{mR}{4D\beta}.$$

Тогда при использовании, например, формулы (13.5) получим выражение для $\theta_{0кр}$

$$\theta_{0кр} = 5,4 \sqrt{\frac{\delta}{R}} + \frac{2,4qR}{E\delta} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

§ 65. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОРООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАГРУЖЕНИИ ИХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОГОННОЙ НАГРУЗКОЙ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

При нагружении торовой оболочки согласно рис. 213 для усилий N_x^0 и N_y^0 докритического состояния имеем выражения

$$N_x^0 = -N_x^0 + \frac{P}{2} e^{-\beta\psi} \cos 3\psi \operatorname{tg} \psi,$$

$$N_y^0 = -N_y^0 + \frac{PR_2\delta}{2R_1} e^{-\beta\psi} (\sin 3\psi + \cos 3\psi).$$

Как видно из предыдущих параграфов этой главы, метод решения рассматриваемых задач весьма однообразен. Поэтому в данном случае ограничимся сводкой окончательных результатов.

Для рассматриваемого случая выражение для $P_{кр}$ имеет вид

$$\frac{3P_{кр}b^3R_2}{10E\delta R_1} = \frac{(1 + 1,5\gamma x)^2}{4x(-3 + \gamma^2 x + 0,75\gamma^4 x^2)} + \frac{-3 + \gamma^2 x + 0,75\gamma^4 x^2}{4x} + \frac{N_x^0 R_2^{2/3}}{2E\delta R_1^2 x} + \frac{3N_y^0 b^2}{4E\delta},$$

где

$$x = \left(\frac{n}{\beta}\right)^2.$$



Рис. 213.

В случае эллиптического тора

$$R_1 = \frac{b^2}{a}, \quad R_2 = r_0 + a, \quad \gamma = \frac{R_1}{R_2} = \frac{b^2}{a(r_0 + a)},$$

$$N_x^0 = \frac{qa(2r_0 + a)}{2(r_0 + a)}, \quad N_y^0 = \frac{[q[(b^2 - a^2)(2r_0 + a) + ab^2]]}{2b^2}.$$

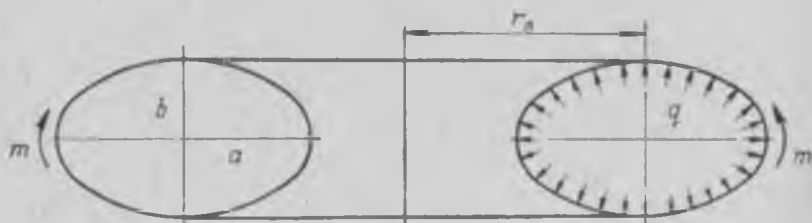


Рис. 214.

Если тор кругового поперечного сечения, то

$$R_1 = a, \quad R_2 = r_0 + a, \quad \gamma = \frac{a}{r_0 + a}, \quad N_x^0 = \frac{qa(2r_0 + a)}{2(r_0 + a)}, \quad N_y^0 = \frac{qa}{2}.$$

В случае сферы

$$r_0 = 0, \quad R_1 = R_2 = a = b = R, \quad \gamma = 1, \quad N_x^0 = N_y^0 = \frac{qR}{2}.$$

При нагружении тора согласно рис. 214

$$N_x^0 = -N_x^0 + \frac{m\beta}{2R_1} e^{-\beta\psi} (\sin 3\psi + \cos 3\psi),$$

$$N_\psi^0 = -N_\psi^0 + \frac{mR_2\beta^2}{R_1^2} e^{-\beta\psi} \sin 3\psi.$$

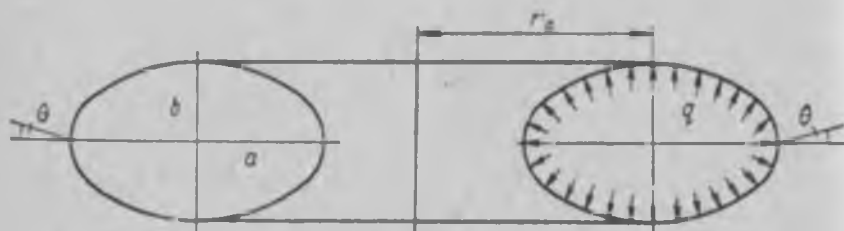


Рис. 215.

Тогда

$$\frac{4(1-\mu^2)m_{кр}R_1^2}{5Eb^3R_2} = \frac{(2+\gamma x)^2}{x(-4+4\gamma^2x+\gamma^4x^2)} +$$

$$+ \frac{-4+4\gamma^2x+\gamma^4x^2}{4x} + \frac{2N_x^0R_2^2\beta^2}{EbR_1^2x} + \frac{N_\psi^0\beta^2}{Eb}$$

При нагружении оболочки согласно рис. 215 выражение для критического значения угла θ_0 можно получить из соотношения

$$\theta_{0кр} = \frac{m_{кр}R_1}{4L\beta}$$

Глава XIV

УСТОЙЧИВОСТЬ ШПАНГОУТОВ, СВЯЗАННЫХ С ОБОЛОЧКОЙ, ПРИ НАГРУЖЕНИИ ИХ ПОГОННОЙ РАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКОЙ

При конструировании баков и других емкостей, состоящих из оболочек различной геометрической формы, в местах их пересечения обычно ставятся элементы жесткости — шпангоуты, воспринимающие распорные силы, которые возникают в сечении стыка оболочек при действии внутреннего давления. При некотором значении этого давления распорные силы могут достигать

такой величины, при которой возможна потеря устойчивости шпангоута.

В данной главе рассмотрены задачи по определению критического значения внутреннего давления в баках, при котором возможна потеря устойчивости подкрепляющего шпангоута.

Полученными формулами можно пользоваться и в том случае, если шпангоут будет нагружен распределенной нагрузкой какого-либо другого происхождения.

§ 66. УСТОЙЧИВОСТЬ ШПАНГОУТА ЧЕЧЕВИЦЕОБРАЗНОЙ ЕМКОСТИ

Рассмотрим чечевицеобразную емкость, нагруженную внутренним избыточным давлением q (рис. 216).

Из этого рисунка видно, что погонные усилия S_1 и S_2 , приложенные к шпангоуту со стороны днищ, сжимают его, и при некотором значении внутреннего давления q шпангоут может потерять устойчивость. В дальнейшем будет рассматриваться потеря устойчивости шпангоута только в его плоскости.

Для определенности считаем, что шпангоут имеет прямоугольную форму поперечного сечения и линия пересечения срединных поверхностей оболочек 1 и 2 совпадает с линией центров тяжести этого шпангоута.

Поставленную задачу целесообразно решать энергетическим методом. Полная потенциальная энергия рассматриваемой системы



Рис. 216.

$$\mathcal{E} = V_{\text{ср}}^{(1)} + V_{\text{изг}}^{(1)} + V_{\text{ср}}^{(2)} + V_{\text{изг}}^{(2)} + V_{\text{кол}} + T,$$

где V — энергия деформации оболочек $V_{\text{ср}}$, $V_{\text{изг}}$ и кольца $V_{\text{кол}}$, а T — работа внешних сил. При подсчете работы внешних сил учитываем только работу радиальных составляющих усилий S_1 и S_2 , а работой давления q на прогибах оболочек пренебрегаем.

Кроме того, при решении всех рассматриваемых ниже задач исходим из того, что потеря устойчивости оболочек, связанных со шпангоутом, носит местный характер. Ямки и выпучины образуются только в узкой зоне, прилегающей к шпангоуту. Исходя из этого считаем, что в данном случае применим аппарат теории полных оболочек.

Полученные при указанных выше допущениях результаты дают значения для критических сил в запас устойчивости, что особенно важно при анализе несущей способности рассматриваемых сложных систем.

В развернутом виде выражение для полной энергии записывается так:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2Eb_1} \int_0^{2\pi R_1} \int_0^0 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right)^2 - 2\mu \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \right. \\ & + 2(1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy + \frac{D_1}{2} \int_0^{2\pi R_1} \int_0^0 \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2\mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] dx dy + \\ & + \frac{1}{2Eb_2} \int_0^{2\pi R_1} \int_0^0 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right)^2 - 2\mu \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + 2(1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ & + \frac{D_2}{2} \int_0^{2\pi R_1} \int_0^0 \left[\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ & + \frac{EJ}{2} \int_0^{2\pi R_k} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + \frac{w_k}{R_k^2} \right)^2 dy + \frac{S}{2} \int_0^{2\pi R_k} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + \frac{w_k}{R_k^2} \right) w_k dy. \end{aligned}$$

В этом выражении два первых интеграла определяют энергию деформации оболочки 1, третий и четвертый — энергию деформации оболочки 2, пятый — энергию деформации шпангоута. Последний интеграл выражает работу сжимающего усилия S , равного проекции погонных сил S_1 и S_2 на плоскость шпангоута.

Для связи функций напряжений φ_1 и φ_2 с прогибами оболочек w_1 и w_2 используются уравнения совместности деформаций:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_1 = \frac{Eb_1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right),$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_2 = \frac{Eb_2}{R_2} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right).$$

Так как прогиб ямок и выпучин убывает по мере удаления от шпангоута, то в выражениях для прогибов и функций напряжения оболочек 1 и 2 необходимо учитывать это и, ограничиваясь только первым приближением, примем

$$w_1 = Ae^{-\beta_1 \varphi} (\sin \beta_1 \varphi + \cos \beta_1 \varphi) \cos n\theta,$$

$$w_2 = Be^{-\beta_2 \varphi} (\sin \beta_2 \varphi + \cos \beta_2 \varphi) \cos n\theta,$$

$$\varphi_1 = Ce^{-\beta_1 \varphi} (\sin \beta_1 \varphi + \cos \beta_1 \varphi) \cos n\theta,$$

$$\varphi_2 = De^{-\beta_2 \varphi} (\sin \beta_2 \varphi + \cos \beta_2 \varphi) \cos n\theta.$$

В этих выражениях координата φ отсчитывается так, как показано на рис. 216. При $\varphi=0$ проекции прогибов w_1 и w_2 на плоскость шпангоута должны быть равны друг другу:

$$A \sin \varphi_1 = B \sin \varphi_2. \quad (14.1)$$

Кроме того, здесь обозначено:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)R_1^2}{\delta_1^2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)R_2^2}{\delta_2^2}}.$$

Выражения, принятые для функций w и φ , совпадают с аналогичными выражениями, получаемыми при решении задачи краевого эффекта. Аналогичные выражения были использованы в § 64 при определении критического значения погонных нагрузок P и m для сферической оболочки. После подстановки соответствующих производных от функций w и φ в выражение полной энергии и вычисления интегралов получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\pi C^2}{2E\delta_1 R_1^2 \beta_1^2} (\beta_1^4 + n^2 \beta_1^2 + 0,75n^4) + \frac{\pi D_1 A^2}{2R_1^2 \beta_1^2} (\beta_1^4 + n^2 \beta_1^2 + 0,75n^4) + \\ & + \frac{\pi D^2}{2E\delta_2 R_2^2 \beta_2^2} (\beta_2^4 + n^2 \beta_2^2 + 0,75n^4) + \frac{\pi D_2 B^2}{2R_2^2 \beta_2^2} (\beta_2^4 + n^2 \beta_2^2 + 0,75n^4) + \\ & + \frac{\pi E J A^2 (n^2 - 1)^2 \sin^2 \varphi_1}{2R_1^3} - \frac{\pi S A^2 (n^2 - 1) \sin^2 \varphi_1}{2R_K}. \end{aligned}$$

Связь между параметрами C и A , D и B получим из уравнений совместности деформаций после интегрирования их по методу Бубнова—Галеркина:

$$\begin{aligned} C = & - \frac{E\delta_1 R_1 A (2\beta_1^2 + 3n^2)}{-12\beta_1^4 + 4\beta_1^2 n^2 + 3n^4}, \\ D = & - \frac{E\delta_2 R_2 B (2\beta_2^2 + 3n^2)}{-12\beta_2^4 + 4\beta_2^2 n^2 + 3n^4}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

После использования соотношений (14.1) и (14.2) выражение для полной энергии примет вид

$$\begin{aligned} \frac{2\mathcal{E}}{\pi E \delta_1} = & B^2 \left[\frac{N_1}{\beta_1} \left(\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right)^2 \left[Q_1^2 + \frac{\left(\frac{\delta_1}{R_1} \right)^2}{12(1-\mu^2)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{N_2 \beta_2}{\beta_2 \delta_1} \left[Q_2^2 + \frac{\left(\frac{\delta_2}{R_2} \right)^2}{12(1-\mu^2)} \right] + \frac{J(n^2-1)^2 \sin^2 \varphi_2}{R_1^3 \delta_1} - \frac{S(n^2-1) \sin^2 \varphi_1}{E_1 \delta_1 R_K} \right]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$N_1 = \beta_1^4 + n^2 \beta_1^2 + 0,75 n^4, \quad N_2 = \beta_2^4 + n^2 \beta_2^2 + 0,75 n^4,$$

$$Q_1 = \frac{2\beta_1^2 + 3n^2}{-12\beta_1^4 + 4n^2\beta_1^2 + 3n^4},$$

$$Q_2 = \frac{2\beta_2^2 + 3n^2}{-12\beta_2^4 + 4n^2\beta_2^2 + 3n^4}.$$

Применим к полученному выражению энергии начало возможных перемещений, согласно которому в условиях равновесия сумма работ всех сил, приложенных к данному телу на возможных перемещениях, должна быть равна нулю, т. е. $\delta\mathcal{E} = 0$.

Из этого условия находим

$$\begin{aligned} P_{кр} = & \frac{EJ(n^2 - 1)}{R_k^3} + \frac{E\beta_1}{4\beta_1(n^2 - 1)\sin^2\varphi_2} \left\{ \left(\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \right)^2 \left(1 + \frac{n^2}{\beta_1^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 0,75 \frac{n^4}{\beta_1^4} \right) \left[1 + \frac{\left(1 + 1,5 \frac{n^2}{\beta_1^2} \right)^2}{\left(-3 + \frac{n^2}{\beta_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_1^4} \right)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2\beta_1} \left(1 + \frac{n^2}{\beta_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_2^4} \right) \left[1 + \frac{\left(1 + 1,5 \frac{n^2}{\beta_2^2} \right)^2}{\left(-3 + \frac{n^2}{\beta_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_2^4} \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Здесь

$$P_{кр} = \frac{S_{кр}}{R_k};$$

R_k — радиус шпангоута (кольца).

Если погонная нагрузка P , действующая на шпангоут, складывается из проекций сил S_1 и S_2 , возникающих в днище за счет внутреннего давления, то

$$P = S_1 \cos\varphi_1 + S_2 \cos\varphi_2 = \frac{qR_1 \cos\varphi_1}{2} \left(1 + \frac{R_2 \cos\varphi_2}{R_1 \cos\varphi_1} \right),$$

Здесь q — интенсивность внутреннего давления.

Тогда для определения критического внутреннего давления получим формулу вида

$$\frac{q_{кр} R_1 \cos\varphi_1}{2} \left(1 + \frac{R_2 \cos\varphi_2}{R_1 \cos\varphi_1} \right) = \frac{EJ(n^2 - 1)}{R_k^3} + \frac{E\beta_1}{4\beta_1(n^2 - 1)\sin^2\varphi_2} \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right)^2 \left(1 + \frac{n^2}{\beta_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_1^4} \right) \left[1 + \frac{\left(1 + 1,5 \frac{n^2}{\beta_1^2} \right)^2}{\left(-3 + \frac{n^2}{\beta_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_1^4} \right)^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 \beta_1} \left(1 + \frac{n^2}{\beta_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_2^4} \right) \left[1 + \frac{\left(1 + 1,5 \frac{n^2}{\beta_2^2} \right)^2}{\left(-3 + \frac{n^2}{\beta_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_2^4} \right)^2} \right] \right\}. \quad (14.4)$$

Формулами (14.3) и (14.4) охватывается весь круг задач по расчету на устойчивость шпангоутов, подкрепляющих чечевицеобразные емкости. Эти шпангоуты могут нагружаться распорными силами от внутреннего давления или распределенной погонной нагрузкой какого-либо другого происхождения.

В том и другом случаях приведенные формулы позволяют определять критические значения указанных нагрузок, причем эти нагрузки будут несколько заниженными для тех емкостей, которые отличаются от полной сферы, что пойдет в запас устойчивости.

§ 67. УСТОЙЧИВОСТЬ ШПАНГОУТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЕМКостей, ИМЕЮЩИХ СФЕРИЧЕСКИЕ ДНИЩА

На рис. 217 представлена схема цилиндрической емкости со сферическим днищем. Так как емкость находится под действием внутреннего давления, то шпангоут будет нагружаться распределенным сжимающим усилием со стороны днища, равным $S_1 \cos \varphi_1$, и усилиями краевого эффекта, влиянием которых в дальнейшем пренебрегаем.

Для решения этой задачи воспользуемся энергетическим методом, использованным в предыдущем параграфе.

Для компонентов прогиба и функции напряжений в данном случае можно принять

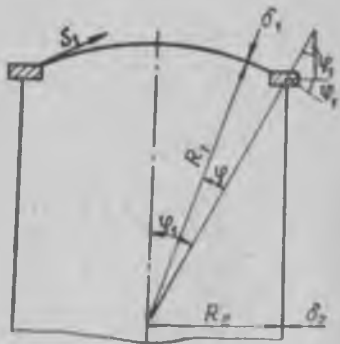


Рис. 217.

$$w_1 = A e^{-\beta_1 \varphi} (\sin \beta_1 \varphi + \cos \beta_1 \varphi) \cos n \theta,$$

$$w_2 = B e^{-k_2 x} (\sin k_2 x + \cos k_2 x) \cos n \theta,$$

$$\varphi_1 = C e^{-\beta_1 \varphi} (\sin \beta_1 \varphi + \cos \beta_1 \varphi) \cos n \theta,$$

$$\varphi_2 = D e^{-k_2 x} (\sin k_2 x + \cos k_2 x) \cos n \theta.$$

Здесь

$$k_2 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_2^2 \delta_2^3}}$$

Остальные обозначения те же, что и в предыдущем параграфе.

Опустим промежуточные выкладки и ограничимся приведением окончательного результата:

$$\begin{aligned} \frac{S_{кр}}{R_2} = & \frac{EJ(n^2-1)}{R_2^3} + \frac{Eb_1}{4\beta_1(n^2-1)} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \varphi_1} \left(1 + \frac{n^2}{\beta_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_1^4} \right) \times \right. \\ & + \left[1 + \frac{\left(1 + 1,5 \frac{n^2}{\beta_1^2} \right)^2}{\left(-3 + \frac{n^2}{\beta_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{\beta_1^4} \right)^2} \right] + \frac{\beta_2^2 \delta_2}{R_2 k_2 \delta_1} \times \\ & \times \left(1 + \frac{n^2}{R_2^2 k_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{R_2^4 k_2^4} \right) \left[1 + \frac{1}{\left(-3 + \frac{n^2}{R_2^2 k_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{R_2^4 k_2^4} \right)^2} \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Здесь S — сила в поперечном сечении шпангоута.

Если шпангоут находится под действием распорных сил, вызываемых внутренним давлением, то в левую часть этой формулы следует подставить

$$\frac{S_{кр}}{R_2} = \frac{q_{кр} R_1 \cos \varphi_1}{2}.$$

В этом случае получим формулу для определения критического давления в баке, при котором шпангоут теряет устойчивость.

§ 68. УСТОЙЧИВОСТЬ ШПАНГОУТА, ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ЧАСТЬ БАКА

В некоторых случаях цилиндрические баки снабжаются шпангоутами, поставленными вдали от днищ, которые в процессе эксплуатации могут нагружаться равномерно распределенной сжимающей радиальной нагрузкой. Определим критическое значение этой нагрузки.

На рис. 218 представлена схема такой емкости. Для решения задачи воспользуемся теми же приемами, что и в предыдущих параграфах. Для функций прогибов и функции напряжений примем выражения

$$w_1 = Ae^{-k_1 x} (\sin k_1 x + \cos k_1 x) \cos n\theta,$$

$$w_2 = B e^{-k_2 x} (\sin k_2 x + \cos k_2 x) \cos n\theta,$$

$$\varphi_1 = C e^{-k_1 x} (\sin k_1 x + \cos k_1 x) \cos n\theta,$$

$$\varphi_2 = D e^{-k_2 x} (\sin k_2 x + \cos k_2 x) \cos n\theta.$$

При $x=0$ должно быть $w_1 = w_2$. Отсюда следует, что $A=B$. Результат решения этой задачи можно выписать по аналогии с предыдущим параграфом, где рассматривалось сочленение

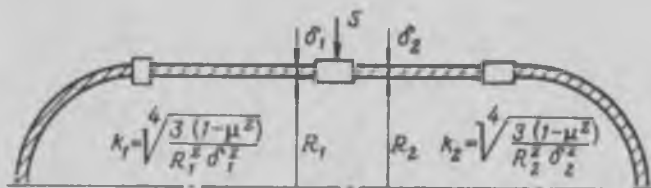


Рис. 218.

цилиндрической оболочки со сферической. Для этой цели в формулу (14.5) следует подставить $k_1 R_1$ вместо β_1 и положить $\varphi_1 = 90^\circ$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{S_{кр}}{R_2} = & \frac{EJ(n^2 - 1)}{R_2^3} + \frac{E\delta_1}{4R_1 k_1 (n^2 - 1)} \left\{ \left(1 + \frac{n^2}{R_1^2 k_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{R_1^4 k_1^4} \right) \times \right. \\ & \times \left[1 + \frac{1}{\left(-3 + \frac{n^2}{R_1^2 k_1^2} + 0,75 \frac{n^4}{R_1^4 k_1^4} \right)^2} \right] + \frac{R_1 k_1 \delta_2}{R_2 k_2 \delta_1} \left(1 + \frac{n^2}{R_2^2 k_2^2} + \right. \\ & \left. \left. + 0,75 \frac{n^4}{R_2^4 k_2^4} \right) \left[1 + \frac{1}{\left(-3 + \frac{n^2}{R_2^2 k_2^2} + 0,75 \frac{n^4}{R_2^4 k_2^4} \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Значение погонной нагрузки найдется из соотношения

$$q_{нар} = \frac{S_{кр}}{R_2}.$$

§ 69. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ШИРИНЫ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ПРОЧНОСТЬ ИЗОЛИРОВАННЫХ ШПАНГОУТОВ

Формулы (14.3)—(14.5) справедливы только в пределах пропорциональности. Если критические напряжения в шпангоуте будут выше предела пропорциональности, то такой шпангоут можно рассматривать как изолированное кольцо.

Для такого расчета необходимо знать, какая часть прилегающей оболочки будет работать совместно со шпангоутом. Эту часть обшивки следует учесть при расчете изолированного шпангоута. Вначале рассмотрим работу прилегающей к шпангоуту

цилиндрической оболочки. Допустим, что для шпангоута принята допустимая деформация ϵ_0 . Тогда для прогиба оболочки будем иметь выражение (рис. 219)

$$w = R\epsilon_0 e^{-kx} (\sin kx + \cos kx),$$

которое получается из общей формулы для прогиба бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной краевыми усилиями M_0 и Q_0 (§ 26):

$$w = \frac{2R^2k}{E\delta} [Q_0 \cos kx + M_0k (\cos kx - \sin kx)],$$

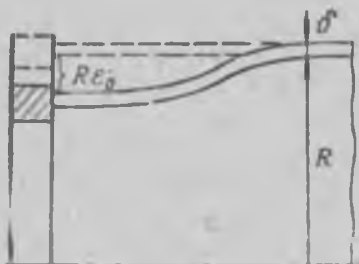


Рис. 219.

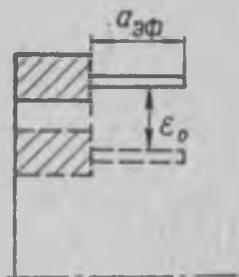


Рис. 220.

если Q_0 и M_0 определить из условий

$$(w)_{x=0} = R\epsilon_0, \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

Эффективную ширину будем искать из условия равенства энергии деформации оболочки, прилегающей к шпангоуту, и энергии деформации эффективной ширины оболочки, которая должна быть включена в работу шпангоута при его расчете как изолированной рамы (рис. 220).

Энергия деформации оболочки, прилегающей к шпангоуту (рис. 219), будет равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{ER\delta}{2(1-\mu^2)} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} z_y^2 dx d\theta + \\ & + \frac{E\delta^3 R}{24(1-\mu^2)} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\mu\chi_x\chi_y) dx d\theta, \end{aligned}$$

где

$$z_y = \frac{w}{R}, \quad \chi_x = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \chi_y = \frac{w}{R^2}.$$

Подставив сюда принятое выражение для w , после интегрирования получим

$$\mathcal{E}_1 = \frac{3\pi E R \varepsilon_0^2}{4(1-\mu^2)k} + \frac{\pi E \gamma \varepsilon_0^2}{12(1-\mu^2)Rk} \left(R^4 k^4 + \frac{3}{4} - \mu R^2 k^2 \right).$$

Энергия деформации оболочки на участке эффективной ширины $a_{\text{эф}}$ (см. рис. 220)

$$\mathcal{E}_2 = \frac{E \delta R}{2(1-\mu^2)} \int_0^{a_{\text{эф}}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_\theta^2 dx d\theta + \frac{E \gamma R}{24(1-\mu^2)} \int_0^{a_{\text{эф}}} \int_0^{2\pi} \gamma_\theta^2 dx d\theta,$$

где

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_0, \quad \gamma_\theta = \frac{\varepsilon_0}{R}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\pi E \delta R \varepsilon_0^2 a_{\text{эф}}}{1-\mu^2} + \frac{\pi E \gamma \varepsilon_0^2 a_{\text{эф}}}{12(1-\mu^2)R}.$$

Из условия $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ получим при $\mu = 0,3$

$$a_{\text{эф}} \approx 0,76 \sqrt{R \delta}.$$

Выражение для $a_{\text{эф}}$ можно также получить, если исходить из других предпосылок. Подберем, например, такую площадь части оболочки, присоединенной к шпангоуту, чтобы она могла передать то же окружное усилие, что и прилегающая к шпангоуту оболочка. Погонное окружное усилие, действующее в оболочке:

$$N_\theta = E \delta \frac{w}{R} = E \delta \varepsilon_0 e^{-kx} (\sin kx + \cos kx).$$

Полное окружное усилие

$$Q_1 = \int_0^{\infty} N_\theta dx = \frac{E \delta \varepsilon_0}{k}.$$

С другой стороны, для присоединенной части оболочки можно написать соотношение вида

$$Q_2 = E F \varepsilon_0 = E \delta a_{\text{эф}} \varepsilon_0.$$

Так как по условию

$$Q_1 = Q_2,$$

то

$$a_{\text{эф}} \approx 0,785 \sqrt{R \delta}.$$

Теперь рассмотрим определение эффективной ширины оболочки для случая сочленения шпангоута со сферической оболочкой. В этом случае выражение для окружного усилия имеет вид

$$N_{\theta} = E\delta\varepsilon_0 e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi).$$

Полная сила в сечении оболочки

$$Q_1 = \int_0^{\pi} N_{\theta} dx = \frac{ER_1\delta\varepsilon_0}{\beta}.$$

С другой стороны, полная сила, действующая в сечении присоединенной части оболочки, определяется в виде

$$Q_2 = EF\varepsilon_0 = E\delta a_{\phi}\varepsilon_0.$$

Из условия, что $Q_1 = Q_2$, получим

$$a_{\phi} = 0,785 \sqrt{R_1\delta}.$$

Глава XV

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Подкрепленные оболочки находят широкое применение в различных инженерных сооружениях.

В дальнейшем будем рассматривать только такие оболочки, в которых силовой набор расположен вдоль линий главных кривизн. Такие оболочки называются конструктивно-ортотропными. Методы расчета таких оболочек основываются на хорошо разработанных методах расчета изотропных оболочек. Для этой цели подкрепленную оболочку обычно заменяют некоторой эквивалентной ей гладкой оболочкой с разными жесткостями вдоль линий главных кривизн. После такого приведения для расчета конструктивно-ортотропных оболочек можно использовать расчетный аппарат теории гладких оболочек.

§ 70. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПРИВЕДЕННЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, подкрепленную в осевом и окружном направлениях стрингерами и шпангоутами. Заменим эту оболочку некоторой эквивалентной ей гладкой оболочкой. Под словом «эквивалентная» понимается равенство жесткостей подкрепленной и гладкой оболочек.

Жесткость на растяжение — сжатие в осевом направлении. При сжатии гладкой оболочки в осевом направлении силой P последняя совершит работу, равную

$$A_1 = P \Delta l,$$

где Δl — укорочение оболочки.

Но

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Pl}{FE_x} = \frac{Pl}{2\pi R \delta E_x}.$$

Тогда

$$A_1 = \frac{P^2 l}{2\pi R \delta E_x}.$$

При сжатии подкрепленной оболочки силой P часть этой силы будет воспринята стрингерами $P_{стр}$, а часть — обшивкой $P_{об}$. При этом сила P совершит работу, равную

$$A_2 = n P_{стр} \Delta l_{стр} + P_{об} \Delta l_{об}.$$

Но

$$\Delta l_{стр} = \varepsilon_{стр} l = \frac{P_{стр} l}{F_{стр} E_{стр}},$$

$$\Delta l_{об} = \varepsilon_{об} l = \frac{P_{об} l}{F_{об} E_{об}}.$$

Тогда

$$A_2 = \left(\frac{n P_{стр}^2}{F_{стр} E_{стр}} + \frac{P_{об}^2}{F_{об} E_{об}} \right) l.$$

Должно быть $A_1 = A_2$

или

$$\frac{P^2}{2\pi R \delta E_x} = \frac{n P_{стр}^2}{F_{стр} E_{стр}} + \frac{P_{об}^2}{F_{об} E_{об}}. \quad (15.1)$$

Имея в виду, что

$$n P_{стр} + P_{об} = P, \quad \Delta l_{стр} = \Delta l_{об},$$

из этих условий

$$P_{стр} = \frac{F_{стр} E_{стр}}{F_{об} E_{об}} \frac{P}{1 + \frac{n F_{стр} E_{стр}}{F_{об} E_{об}}},$$

$$P_{об} = \frac{P}{1 + \frac{n F_{стр} E_{стр}}{F_{об} E_{об}}}.$$

Подставив значения $P_{стр}$ и $P_{об}$ в (15.1), получим

$$E_x = F_{об} \left(1 + \frac{E_{стр}}{E_{об}} \frac{n F_{стр}}{2\pi R \delta} \right). \quad (15.2)$$

Теперь рассмотрим определение эффективной ширины оболочки для случая сочленения шпангоута со сферической оболочкой. В этом случае выражение для окружного усилия имеет вид

$$N_{\theta} = E\delta\varepsilon_0 e^{-\beta\psi} (\sin \beta\psi + \cos \beta\psi).$$

Полная сила в сечении оболочки

$$Q_1 = \int_0^{\pi} N_{\theta} dx = \frac{ER_1 \delta \varepsilon_0}{\beta}.$$

С другой стороны, полная сила, действующая в сечении присоединенной части оболочки, определяется в виде

$$Q_2 = EF\varepsilon_0 = E\delta a_{\phi}\varepsilon_0.$$

Из условия, что $Q_1 = Q_2$, получим

$$a_{\phi} = 0,785 \sqrt{R_1 \delta}.$$

Глава XV

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Подкрепленные оболочки находят широкое применение в различных инженерных сооружениях.

В дальнейшем будем рассматривать только такие оболочки, в которых силовой набор расположен вдоль линий главных кривизн. Такие оболочки называются конструктивно-ортотропными. Методы расчета таких оболочек основываются на хорошо разработанных методах расчета изотропных оболочек. Для этой цели подкрепленную оболочку обычно заменяют некоторой эквивалентной ей гладкой оболочкой с разными жесткостями вдоль линий главных кривизн. После такого приведения для расчета конструктивно-ортотропных оболочек можно использовать расчетный аппарат теории гладких оболочек.

§ 70. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПРИВЕДЕННЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, подкрепленную в осевом и окружном направлениях стрингерами и шпангоутами. Заменим эту оболочку некоторой эквивалентной ей гладкой оболочкой. Под словом «эквивалентная» понимается равенство жесткостей подкрепленной и гладкой оболочек.

Жесткость на растяжение — сжатие в осевом направлении. При сжатии гладкой оболочки в осевом направлении силой P последняя совершит работу, равную

$$A_1 = P \Delta l,$$

где Δl — укорочение оболочки.

Но

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{Pl}{FE_x} = \frac{Pl}{2\pi R \delta E_x}.$$

Тогда

$$A_1 = \frac{P^2 l}{2\pi R \delta E_x}.$$

При сжатии подкрепленной оболочки силой P часть этой силы будет воспринята стрингерами $P_{стр}$, а часть — обшивкой $P_{об}$. При этом сила P совершит работу, равную

$$A_2 = n P_{стр} \Delta l_{стр} + P_{об} \Delta l_{об}.$$

Но

$$\Delta l_{стр} = \epsilon_{стр} l = \frac{P_{стр} l}{F_{стр} E_{стр}},$$

$$\Delta l_{об} = \epsilon_{об} l = \frac{P_{об} l}{F_{об} E_{об}}.$$

Тогда

$$A_2 = \left(\frac{n P_{стр}^2}{F_{стр} E_{стр}} + \frac{P_{об}^2}{F_{об} E_{об}} \right) l.$$

Должно быть $A_1 = A_2$

или

$$\frac{P^2}{2\pi R \delta E_x} = \frac{n P_{стр}^2}{F_{стр} E_{стр}} + \frac{P_{об}^2}{F_{об} E_{об}}. \quad (15.1)$$

Имея в виду, что

$$n P_{стр} + P_{об} = P, \quad \Delta l_{стр} = \Delta l_{об},$$

из этих условий

$$P_{стр} = \frac{F_{стр} E_{стр}}{F_{об} E_{об}} \frac{P}{1 + \frac{n F_{стр} E_{стр}}{F_{об} E_{об}}},$$

$$P_{об} = \frac{P}{1 + \frac{n F_{стр} E_{стр}}{F_{об} E_{об}}}.$$

Подставив значения $P_{стр}$ и $P_{об}$ в (15.1), получим

$$E_x = F_{об} \left(1 + \frac{E_{стр}}{E_{об}} \frac{n F_{стр}}{2\pi R \delta} \right). \quad (15.2)$$

В большинстве случаев $E_{об} = E_{стр} = E$, и выражение (15.2) упрощается.

Определение жесткости на растяжение—сжатие в окружном направлении. При определении жесткости в окружном направлении можно исходить из предположения, что оболочка находится под действием равномерного внутреннего давления q , которое производит работу

$$A_1 = q \Delta V,$$

где ΔV — приращение объема оболочки, равное

$$\Delta V = [\pi (R + w)^2 - \pi R^2] l \approx 2\pi R l w.$$

Но

$$\varepsilon = \frac{w}{R} = \frac{\varepsilon_y}{E_y} = \frac{qR}{E_y \delta},$$

откуда

$$w = \frac{qR^2}{E_y \delta}.$$

Тогда

$$\Delta V = \frac{2\pi R^3 l q}{E_y \delta}.$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{2\pi R^3 l q^2}{E_y \delta}.$$

В случае подкрепленной оболочки давление q совершает работу

$$A_2 = q_{об} \Delta V_{об} + m S_{ш} \Delta l_{ш},$$

где $S_{ш} = q_{ш} a_{ш} R$ — сила, приходящаяся на один шпангоут;
 $a_{ш}$ — расстояние между шпангоутами;

$$\Delta V_{об} = [\pi (R + w)^2 - \pi R^2] l = \frac{2\pi R^2 l q}{E_y \delta},$$

$$\Delta l_{ш} = \frac{q_{ш} a_{ш} R}{F_{ш} E_{ш}} 2\pi R.$$

Тогда

$$A_2 = \frac{2\pi R^3 l q_{об}^2}{E_{об} \delta} + \frac{2\pi m R^3 a_{ш}^2 q_{ш}^2}{E_{ш} F_{ш}}.$$

Как и в первом случае, должно быть $A_1 = A_2$. Кроме того.

$$q_{ш} + q_{об} = q, \quad \varepsilon_{об} = \varepsilon_{ш}.$$

Опуская все промежуточные выкладки, представим окончательный результат:

$$E_y = E_{об} \left(1 + \frac{E_{ш} F_{ш}}{E_{об} a_{ш}^2} \right). \quad (15.3)$$

Если материал обшивки и шпангоутов одинаков, то $E_{об} = E_{ш} = E$.

Определение жесткости на сдвиг. При расчете конструктивно-ортотропных оболочек считается, что в работе на сдвиг участвует только обшивка. Поэтому примем, что

$$G = \frac{E_{об} \delta}{2(1 + \mu)} \quad (15.4)$$

Определение приведенных жесткостей изгиба и кручения. Жесткости на изгиб для подкрепленной оболочки можно определить в следующем виде:

$$D_x = \frac{E_{об} \delta^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} + \frac{E_{стр} J_{стр}}{a_{стр}},$$

$$D_y = \frac{E_{об} \delta^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} + \frac{E_{ш} J_{ш}}{a_{ш}},$$

где $J_{стр}$ и $J_{ш}$ — моменты инерции стрингера и шпангоута;

$a_{стр}$, $a_{ш}$ — расстояния между стрингерами и шпангоутами

В запас прочности моменты инерции стрингеров и шпангоутов нередко вычисляются относительно их собственных осей.

Приведенную жесткость на кручение у подкрепленных тонкостенных оболочек обычно принимают без учета влияния силового набора согласно выражению

$$D_k = \frac{G \delta^3}{12}.$$

Имея выражения (15.2) — (15.4) для модулей нормальной упругости и сдвига, можно записать согласно закону Гука соотношения для деформаций и напряжений

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_y \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_x \frac{\sigma_x}{E_x},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G},$$

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_y} (\varepsilon_x + \mu_y \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_y}{1 - \mu_x \mu_y} (\varepsilon_y + \mu_x \varepsilon_x), \quad \sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}.$$

Выражения для погонных усилий и моментов будут иметь вид

$$N_x = \frac{E_x \delta}{1 - \mu_x \mu_y} (\varepsilon_x + \mu_y \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{E_y \delta}{1 - \mu_x \mu_y} (\varepsilon_y + \mu_x \varepsilon_x),$$

$$N_{xy} = G \varepsilon_{xy} \delta, \quad M_x = -D_x (\chi_x + \mu_y \chi_y), \quad (15.5)$$

$$M_y = -D_y (\chi_y + \mu_x \chi_x), \quad M_{xy} = -2D_k \chi_{xy}.$$

Компоненты деформации и изменения кривизн определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{R_1^2}, \\ \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R_2^2}, & \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (15.5')$$

Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$E_x \mu_y = E_y \mu_x, \quad D_x \mu_y = D_y \mu_x. \quad (15.6)$$

Эти соотношения можно получить на основании следующих рассуждений.

Закон Гука при двухосном напряженном состоянии ортотропного тела имеет вид

$$\sigma_x = C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y, \quad \sigma_y = C_{22} \varepsilon_y + C_{12} \varepsilon_x.$$

Рассмотрим случай, когда $\sigma_y = 0$:

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \nu_x = -\frac{C_{12}}{C_{22}}$$

и для напряжения σ_x будем иметь выражение

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x,$$

где

$$E_x = C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}.$$

Если $\sigma_x = 0$, то

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \nu_y = -\frac{C_{12}}{C_{11}}$$

и напряжение σ_y определится в виде

$$\sigma_y = E_y \varepsilon_y,$$

где

$$E_y = C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}}.$$

Составим произведения

$$E_x \nu_y = -C_{12} + \frac{C_{12}^3}{C_{11} C_{22}},$$

$$E_y \nu_x = -C_{12} + \frac{C_{12}^3}{C_{11} C_{22}}.$$

Так как правые части этих выражений равны друг другу, то отсюда следует равенство (15.6).

§ 71. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Для вывода уравнений равновесия подкрепленных оболочек воспользуемся энергетическим методом.

Выражение полной потенциальной энергии оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2 M_{xy} \chi_{xy}) dx dy - \int_0^a \int_0^b q w dx dy. \end{aligned}$$

Здесь через a и b обозначены размеры оболочки.

Представляя выражение для $\mathcal{E}$ через компоненты перемещения u , v и w , получим

$$\mathcal{E} = \int_0^a \int_0^b F(u_x, u_y, v_x, v_y, w, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}) dx dy,$$

где

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \left[\frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right)^2 + \frac{E_y}{1 - \mu_x \mu_y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{E_x \mu_y + E_y \mu_x}{1 - \mu_x \mu_y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w^2}{R_1 R_2} \right) + \\ & + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left. + \frac{1}{2} \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right)^2 + \right. \right. \\ & + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right)^2 + (D_x \mu_y + D_y \mu_x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & + \frac{w}{R_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w^2}{R_1^2 R_2^2} \left. \right) + 4 D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right] - q w, \\ u_x = & \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Так как рассматриваются условия равновесия, то сумма работ всех сил, действующих на оболочку, на возможных согласных со связями перемещениях должна быть равна нулю, т. е. $\delta \mathcal{E} = 0$. Выполним условие, получим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v_y + \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \right. \\ & + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta w_{xx} + \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta w_{yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \delta w_{xy} \left. \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

После интегрирования каждого слагаемого этого выражения по частям, используя соотношения закона Гука (15.5), будем иметь

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & -[(2M_{xy})_0^a \delta w]_0^b - \int_0^a \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w \right]_0^b dy - \\ & - \int_0^b \left[\left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w \right]_0^a dx + \int_0^b [N_x \delta u]_0^a dy + \int_0^b [N_{xy} \delta v]_0^a dy + \\ & + \int_0^b \left[M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^a dy + \int_0^a [N_y \delta v]_0^b dx + \int_0^a [N_{xy} \delta u]_0^b dx + \\ & + \int_0^a \left[M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]_0^b dx - \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u \, dx \, dy - \\ & - \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v \, dx \, dy + \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{M_x}{R_1^2} + \frac{M_y}{R_2^2} + \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} - q \right) \delta w \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$

Из этого выражения, как известно, можно получить и дифференциальные уравнения и граничные условия задачи.

Поскольку вариации δu , δv , δw произвольны, то из условия равенства нулю вариации $\delta \mathcal{E} = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{M_x}{R_1^2} + \frac{M_y}{R_2^2} + \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} - q &= 0. \end{aligned}$$

Каждое из остальных девяти слагаемых вариации полной энергии должно быть обращено в нуль в точках контура оболочки. Они определяют граничные условия задачи.

Путем введения функции напряжений φ по формулам $N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ первые два уравнения будут удовлетворены тождественно, а третье примет вид

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + 2D_x \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\nu y}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_y \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\nu x}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \end{aligned}$$

$$+ \left[D_x \left(\frac{1}{R_1^4} + \frac{\mu_y}{R_1^2 R_2^2} \right) + D_y \left(\frac{1}{R_2^4} + \frac{\mu_x}{R_1^2 R_2^2} \right) \right] w + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - q = 0. \quad (15.7)$$

Для связи функции напряжений φ с функцией прогиба можно получить следующее уравнение.

Согласно закону Гука (15.5) и соотношениям (15.5') получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E_x b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\mu_y}{E_y b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{w}{R_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E_y b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu_x}{E_x b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{w}{R_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{G b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

После исключения из этих выражений u и v получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{\mu_x}{E_x} - \frac{\mu_y}{E_y} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \\ = \frac{b}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{b}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

На основании уравнений (15.7) и (15.8) с использованием выражения (стр. 261) для поперечной нагрузки можно получить решение широкого круга задач устойчивости подкрепленных оболочек.

§ 72 УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

Критическое напряжение осевого сжатия для подкрепленной цилиндрической оболочки можно определить, если для функции прогиба и функции напряжений принять выражения, которые использовались при решении аналогичной задачи для гладкой оболочки (стр. 266). Ограничиваясь первым приближением, выберем функции w и φ в виде

$$\begin{aligned} w &= A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \varphi &= B \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (15.9)$$

где a и b — размеры сторон ямок и выпучин.

Принятые функции удовлетворяют следующим условиям на контуре ямок и выпучин:

$$\begin{aligned} M_x &= 0, & \sigma_x &= 0, \\ M_y &= 0, & \sigma_y &= 0, \\ w &= 0, & \sigma_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Так как на оболочку действует осевая сжимающая сила N_x^0 и внутреннее давление q , то

$$q = -N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right), \quad (15.10)$$

где $N_y^0 = qR$;

q — интенсивность внутреннего давления.

Подставляя выражения (15.9) и (15.10) в уравнения (15.7) и (15.8) предыдущего параграфа и применяя процедуру Бубнова—Галеркина, при $E_{об} = E_{стр} = E_{ш} = E$; $\mu_x = \mu_y = \mu$ получим выражение для критического напряжения

$$\left(\frac{\sigma R}{E\delta} \right)_{кр} = \frac{a_7(m^4 + a_1 n^4 + a_2 m^2 n^2 - a_3 m^2 - 2a_1 n^2 + a_1)}{m^2} + \frac{a_4 m^2}{0,75m^4 + a_5 n^4 + a_6 m^2 n^2} + \frac{q R^2}{E l^2} \frac{n^2 - 1}{m^4} \frac{1}{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^2}, \quad (15.11)$$

где

$$m = \frac{l}{a},$$

$$a_1 = \frac{2\mu}{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^2},$$

$$n = \frac{\pi R}{b},$$

$$a_2 = \frac{0,13 \left(1 + \frac{F_{шн}}{a_{шн} \delta} \right) \frac{R}{\delta}}{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^2},$$

$$a_3 = \frac{D_y}{D_x \left(\frac{\pi R}{l} \right)^4},$$

$$a_4 = \frac{0,75 E_y}{E_x \left(\frac{\pi R}{l} \right)^4},$$

$$a_5 = \frac{2 \left(\nu + 2 \frac{D_x}{D_y} \right)}{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^2},$$

$$a_6 = \frac{0,25 \left(\frac{E_y}{G} - 2\mu \right)}{\left(\frac{\pi R}{l} \right)^2},$$

$$a_7 = \frac{\delta}{R} \left(\frac{\pi R}{l} \right)^2 \left[1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{стр}}{a_{стр} \delta^3} \right], \quad D_k = \frac{E \delta^3}{24(1+\mu)},$$

$$E_x = E \left(1 + \frac{F_{стр}}{a_{стр} \delta} \right), \quad D_y = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{шн}}{a_{шн} \delta^3} \right],$$

$$E_y = E \left(1 + \frac{F_{шн}}{a_{шн} \delta} \right),$$

$$D_x = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{стр}}{a_{стр} \delta^3} \right].$$

Зная величину критического напряжения, можно определить предельное значение сжимающей силы:

$$P_{кр} = (2\pi R\delta + nF_{стр})\sigma_{кр}.$$

Формула (15.11) может быть использована для определения критического напряжения в том случае, когда обшивка теряет устойчивость одновременно с силовым набором. Наивыгоднейшей конструкцией будет, очевидно, та, которая при минимальном весе выдержит наибольшую осевую нагрузку, т. е. оболочка будет оптимальной, если $\left(\frac{P_{кр}}{G}\right)_{\max}$, где G — вес всей оболочки.

§ 73 УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И РАВНОМЕРНОМ ПОПЕРЕЧНОМ ДАВЛЕНИИ

Рассмотрим цилиндрическую панель, подкрепленную продольным и поперечным набором и сжатую в осевом направлении при одновременном действии давления, равномерно распределенного по ее поверхности. Для определенности будем считать, что давление приложено с вогнутой стороны панели. Тогда формулой для критического напряжения сжатия можно будет поль-



Рис. 221.

зоваться и в том случае, если давление действует на выпуклую сторону панели. При этом предполагается, что давление меньше его критического значения для данной панели.

Из общего решения можно получить как частный случай формулу и для неподкрепленной панели.

Разрешающие уравнения задачи остаются в форме (15.7), (15.8).

Применим эти уравнения к исследованию подкрепленной панели (рис. 221). Крайние продольные профили будем считать достаточно жесткими на изгиб и на кручение.

Пусть на контуре панели реализуются следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} w=0 \\ M_x=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_x=0 \\ \sigma_{xy}=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=0 \\ y=b \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_y=0 \\ u=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=0 \\ y=b, \end{array}$$

где a — размер полуволны в осевом направлении.

Эти граничные условия можно выполнить, если принять функции w и φ в виде следующих аппроксимаций:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin^2 \frac{\pi y}{b} = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b},$$

$$\varphi = B \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подставив эти функции в исходные уравнения и проинтегрировав их по методу Бубнова—Галеркина, получим

$$\frac{3\sigma_{кр}}{16E_y} = \frac{256 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2}{81\pi^4 \left[m^4 + \frac{1}{4} a_2 \left(\frac{l}{b} \right)^2 m^2 + \frac{3}{16} a_1 \left(\frac{l}{b} \right)^4 \right]} +$$

$$+ \frac{a_3}{\left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2} \left\{ \frac{3}{16} m^4 + \frac{1}{2} \left[a_2 \left(\frac{l}{b} \right)^2 - \frac{3a_1}{4} \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 \right] m^2 + \right.$$

$$\left. + a_4 \left[\left(\frac{l}{b} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{b} \right)^2 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 + \frac{3}{16} \left(\frac{l}{\pi R} \right)^4 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{3qR \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\pi R}{b} \right)^2 - 1 \right]}{16E_y b m^2},$$

где обозначено

$$a_1 = \frac{E_y}{E_x}, \quad a_2 = \frac{E_y}{G} - \mu \left(1 + \frac{E_y}{E_x} \right), \quad a_3 = \frac{D_x}{E_y b R^2},$$

$$a_4 = \frac{D_y}{D_x}, \quad a_5 = \mu \frac{D_y}{D_x} + 2 \frac{D_y}{D_x},$$

$$E_x = E \left(1 + \frac{F_{сгп}}{a_{сгп} b} \right), \quad E_y = E \left(1 + \frac{F_m}{a_m b} \right),$$

$$D_x = \frac{E b^3}{12(1-\mu^2)} \left[1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{сгп}}{a_{сгп} b^3} \right],$$

$$D_y = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left[1 + \frac{12(1-\mu^2)J_m}{a_m\delta^3} \right],$$

$$D_h = \frac{E\delta^3}{24(1+\mu)}, \quad m = \frac{l}{a}.$$

Критическая сила для панели, которая теряет устойчивость совместно с набором, будет

$$P_{кр} = \left(b\delta + F_{кр} \frac{b}{a_{кр}} \right) \sigma_{кр}.$$

Полученным выражением для $\sigma_{кр}$ подкрепленной панели следует пользоваться в том случае, когда размер панели b меньше размера полуволны, образующейся в окружном направлении в замкнутой круговой оболочке при сжатии, подкрепленной так же, как и рассматриваемая панель. Поэтому сначала необходимо определить для замкнутой круговой оболочки размер полуволны в окружном направлении. Если этот размер будет больше размера b рассматриваемой панели, то полученная выше формула для $\sigma_{кр}$ будет применима.

Если же этот размер будет меньше, чем размер панели b , то критическое напряжение для панели можно принять равным критическому напряжению замкнутой оболочки.

В предположении отсутствия подкрепляющего набора получим

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = \frac{(\delta/R)^2}{12(1-\mu^2)} = \alpha,$$

$$a_4 = 1, \quad a_5 = 1, \quad E_x = E_y = E.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{3\sigma_{кр}}{16E} = & \frac{256 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2}{81\pi^4 \left[m^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{b} \right)^2 m^2 + \frac{3}{16} \left(\frac{l}{b} \right)^4 \right]} + \\ & + \frac{\alpha}{\left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 m^2} \left\{ \frac{3}{16} m^4 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{b} \right)^2 - \frac{3\mu}{4} \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 \right] m^2 + \left(\frac{l}{b} \right)^4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{b} \right)^2 \left(\frac{l}{\pi R} \right)^2 + \frac{3}{16} \left(\frac{l}{\pi R} \right)^4 \right\} + \frac{3qR \left(\frac{l}{\pi R} \right)^3 \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\pi R}{b} \right)^3 - 1 \right]}{16E\pi m^2}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Формулой (15.12) определяется критическое напряжение сжатия обшивки неподкрепленной цилиндрической панели (в клетках между силовым набором). Для оптимальной цилинд-

рической оболочки необходимо, чтобы критическое напряжение по формуле (15.11) было равно критическому напряжению, определяемому формулой (15.12), при отсутствии местной потери устойчивости полок силового набора.

§ 74. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РАВНООТСТОЯЩИМИ УПРУГИМИ ШПАНГОУТАМИ, ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В данном случае для решения задачи используем упрощенные уравнения устойчивости в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_y \mu + 2D_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{\mu}{E_x} - \frac{\mu}{E_y} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{\delta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (15.13)$$

где

$$\begin{aligned} E_x = E, \quad E_y = E \left(1 + \frac{F_{ш}}{a_{ш}} \right), \quad D_x = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}, \\ D_y = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E J_{ш}}{a_{ш}}, \quad D_k = \frac{G \delta^3}{12}. \end{aligned}$$

Уравнения (15.13) позволяют определить критические усилия $N_y^0 = qR$. Поскольку метод решения этой задачи аналогичен тому, который был применен к решению соответствующей задачи для гладкой оболочки, ограничимся приведением окончательных результатов. Дополнительно примем, что $E_y \approx E$. Тогда

$$q_{кр} = 0,92E \frac{\delta^2}{RL} \sqrt{D_0 \frac{\delta}{R} \sqrt{D_0}}, \quad (15.14)$$

где L — длина оболочки;

$$D_0 = 1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{ш}}{\delta^3 a_{ш}}; \quad (15.15)$$

$J_{ш}$ — момент инерции шпангоута;

$a_{ш}$ — расстояния между шпангоутами;

δ — толщина оболочки.

Если оболочка длинная, то уравнение для определения критического давления можно получить из (15.7):

$$D_y \left(\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{w}{R^4} \right) + N_y^0 \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{w}{R^2} \right) = 0,$$

где

$$D_y = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{12(1-\mu^2) J_{ш}}{\delta^3 a_{ш}}.$$

Аппроксимируя функцию w выражением

$$w = A \cos n\theta,$$

для определения внешнего критического давления получим формулу

$$q_{кр} = \frac{3DD_0}{R^3},$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

D_0 — дано по формуле (15.15).

Предел применимости формулы (15.14) определяется условием

$$\frac{3DD_0}{R^3} = 0,92E \frac{h^2}{RL} \sqrt{D_0 \frac{h}{R}} \sqrt{D_0}.$$

Отсюда находим, что в пределах упругости формула (15.14) будет применима к тем оболочкам, длина которых удовлетворяет условию

$$L \leq 3,35R \frac{\sqrt{\frac{R}{h}}}{\sqrt[4]{D_0}}.$$

§ 75. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ И ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ

При решении данной задачи используется упрощенное уравнение равновесия (15.7), в котором отброшены слагаемые, содержащие w , $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. При этом уравнение совместности деформаций остается без изменения.

Для решения системы разрешающих уравнений применим метод разделения переменных в сочетании с методом конечных разностей. Аппроксимируя функции w и φ

$$w = W(x) \cos n\theta, \quad \varphi = F(x) \cos n\theta$$

и подставляя их в систему разрешающих уравнений задачи, преобразуем эти уравнения к виду

$$\left. \begin{aligned} F_k a_1 - a_2(F_l + F_l) + F_l + F_s - \frac{Eh^2}{R}(W_l + W_l - 2W_k) &= 0, \\ F_l + F_l - 2F_k + \frac{DR}{h^2 b}[W_k a_3 - a_2(W_l + W_l) + W_l + W_s] - \\ - \frac{N_y^0 n^2 h^2}{Rb} W_k + \frac{N_x^0 R}{b}(W_l + W_l - 2W_k) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

Здесь обозначено:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 6 + 4n^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 + n^4 \left(\frac{h}{R} \right)^4, \\ a_2 &= 4 + 2n^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2, \\ a_3 &= 6 + 4n^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 + D_0 n^4 \left(\frac{h}{R} \right)^4, \\ D_0 &= 1 + \frac{12(1-\mu^2)J}{l^3}, \\ D &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (15.17)$$

J — момент инерции шпангоута;

l — расстояние между шпангоутами;

R, δ — радиус и толщина стенки оболочки;

$2n$ — число волн в окружном направлении.

Уравнения (15.16) используются в предположении, что после потери устойчивости от действия внешнего давления в осевом направлении оболочки может образоваться только одна полу-волна. Такое предположение реализуется, например, в случае действия растягивающей осевой силы N_x^0 . Если эта сила будет сжимающей, то принятое допущение правомерно тогда, когда абсолютная величина сжимающего усилия N_x^0 мала по сравнению с его критическим значением. Такая ситуация возникает при создании в замкнутом цилиндрическом баке глубокого вакуума.

В дальнейшем в приведенных уравнениях считается, что $N_x^0 = qR$, где q — интенсивность внешнего давления.

Граничные условия на концах оболочки

$$w=0, \quad M_x=0, \quad N_x=0, \quad N_{xy}=0.$$

Эти условия, выраженные через конечные разности, имеют вид (см. § 50):

$$W_k=0, \quad W'_k=-W'_l, \quad F_k=0, \quad F_l=F_l.$$

Первое приближение: $h = \frac{1}{2} L$ (рис. 222).

В этом случае приведенные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} F_1 a_1 + F_1 + F_1 + \frac{2Eh^2}{R} W_1 &= 0, \\ -2F_1 + \frac{DR}{h^2 \delta} (W_1 a_3 - W_1 - W_1) - \frac{qRn^2 h^2}{R \delta} W_1 - \frac{2N_x^0 R}{\delta} W_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$F_1(a_1+2) = -\frac{2Eh^2}{R} W_1,$$

$$2F_1 = \frac{DR}{h^2b} (a_3-2) W_1 - \frac{qRn^2h^2}{Rb} W_1 - \frac{2N_x^0 R}{b} W_1,$$

откуда после исключения W_1 и F_1 получим

$$\frac{q^1 Rn^2h^2}{Rb} + \frac{2N_x^0 R}{b} = \frac{4Eh^2}{R(a_1+2)} + \frac{DR(a_3-2)}{h^2b}. \quad (15.18)$$

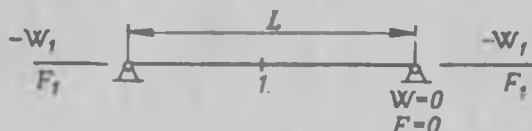


Рис. 222.

Второе приближение: $h = \frac{1}{3}L$ (рис. 223). В этом случае имеем

$$\frac{q^{11} Rn^2h^2}{Rb} + \frac{N_x^0 R}{b} = \frac{Eh^2}{R(a_1-a_2+1)} + \frac{DR(a_3-a_2-1)}{h^2b}. \quad (15.19)$$

В выражениях первого и второго приближений в каждом конкретном случае необходимо вместо усилия N_x^0 подставить его значение, вытекающее из конкретных условий задачи.

Устойчивость внутренней оболочки кольцевого бака (рис. 224). Составляя сумму проекций всех сил на направление оси бака (рис. 224, а), получим

$$2\pi R N_x^0 = \pi [(R+r)^2 - R^2] q,$$

откуда

$$N_x^0 = \left(1 + \frac{r}{2R}\right) qr.$$

Подставив полученное выражение для N_x^0 в формулы (15.18) — (15.19) со знаком минус (растяжение), после несложных преобразований будем иметь

$$\left(\frac{qr}{Eh}\right)^4 = \frac{\frac{4\left(\frac{L}{2R}\right)^2}{A_1} + \frac{A_2\left(\frac{b}{R}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{2R}{L}\right)^2}{\frac{R}{r} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 n^2 - \left(2 + \frac{r}{R}\right)},$$

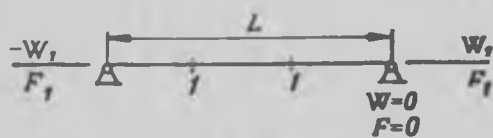


Рис. 223.

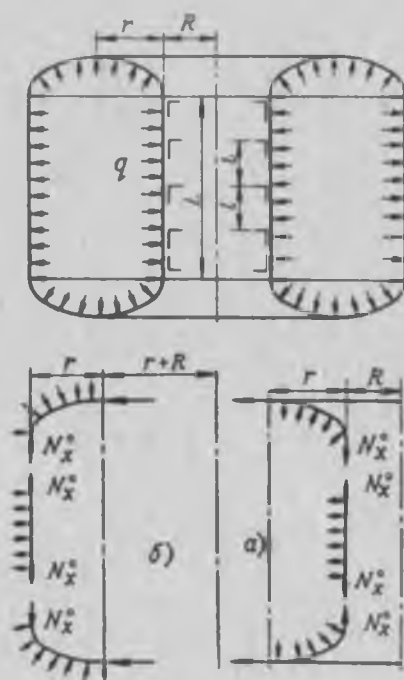


Рис. 224.

$$\left(\frac{qr}{Eh}\right)^{II} = \frac{\frac{1}{B_1} \left(\frac{L}{3R}\right)^2 + \frac{B_2 \left(\frac{L}{R}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{3R}{L}\right)^2}{\frac{R}{r} \left(\frac{L}{3R}\right)^2 n^2 - \left(1 + \frac{r}{2R}\right)},$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 8 + 4n^2 \left(\frac{L}{2R}\right)^2 + n^4 \left(\frac{L}{2R}\right)^4, \\ A_2 &= 4 + 4n^2 \left(\frac{L}{2R}\right)^2 + D_0 n^4 \left(\frac{L}{2R}\right)^4, \\ B_1 &= 3 + 2n^2 \left(\frac{L}{3R}\right)^2 + n^4 \left(\frac{L}{3R}\right)^4, \\ B_2 &= 1 + 2n^2 \left(\frac{L}{3R}\right)^2 + D_0 n^4 \left(\frac{L}{3R}\right)^4, \\ D_0 &= 1 + \frac{12(1-\mu^2)J}{l^3}. \end{aligned} \quad (15.20)$$

После определения $q_{кр}^I$ и $q_{кр}^{II}$ более точное значение критического давления можно определить путем экстраполяции:

$$q_{кр.эксп} = -0,8 q_{кр}^I + 1,8 q_{кр}^{II}.$$

Устойчивость наружной оболочки кольцевого бака под внешним давлением (рис. 224, б). Составим сумму проекций всех сил на направление оси бака. Из условия равновесия получим

$$2\pi(2r+R)N_x^0 = \pi[(2r+R)^2 - (r+R)^2]q,$$

откуда

$$N_x^0 = \left(\frac{1 + 1,5 \frac{r}{R}}{1 + 2 \frac{r}{R}} \right) qr.$$

После подстановки выражения N_x^0 в формулы (15.18), (15.19) со знаком плюс (сжатие) эти формулы примут вид

$$\left(\frac{qr}{Eh}\right)^I = \frac{\frac{A}{A_1} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 + \frac{A_2 \left(\frac{L}{R}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{2R}{L}\right)^2}{\frac{R}{r} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 n^2 + \frac{2+3 \frac{r}{R}}{1+2 \frac{r}{R}}},$$

$$\left(\frac{qr}{Eh}\right)^{II} = \frac{\frac{1}{B_1} \left(\frac{L}{3R}\right)^2 + \frac{B_2 \left(\frac{3}{R}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{3R}{L}\right)^2}{\frac{R}{r} \left(\frac{L}{3R}\right)^2 n^2 + \frac{1 + 1,5 \frac{r}{R}}{1 + 2 \frac{r}{R}}}$$

Значения величин A_i и B_i остаются теми же, что и в первом случае.

Устойчивость подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки при всестороннем внешнем давлении. Усилие N^0 в этом случае определяется выражением

$$N_x^0 = \frac{qR}{2}.$$

Подставляя это значение в уравнения (15.18), (15.19), получим

$$\left(\frac{qR}{Eh}\right)^I = \frac{\frac{4}{A_1} \left(\frac{L}{2R}\right)^2 + \frac{A_2 \left(\frac{3}{R}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{2R}{L}\right)^2}{1 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2 n^2},$$

$$\left(\frac{qR}{Eh}\right)^{II} = \frac{\frac{1}{B_1} \left(\frac{L}{3R}\right)^2 + \frac{B_2 \left(\frac{3}{R}\right)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{3R}{L}\right)^2}{0,5 + \left(\frac{L}{3R}\right)^2 n^2},$$

где значения A_i, B_i см. (15.20).

Если шпангоуты отсутствуют, то в выражении D_0 следует положить $J=0$, и тогда эти формулы можно принять для расчета гладких оболочек. Уточненное значение критического давления находим экстраполяцией:

$$q_{кр.экстр} = -0,8 q_{кр}^I + 1,8 q_{кр}^{II}.$$

§ 76. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В случае подкрепленной сферической оболочки размеры клеток между набором, вообще говоря, получаются переменными, поэтому интегрирование уравнений равновесия становится довольно сложным. Для того чтобы упростить решение и получить результат в запас устойчивости, будем считать размеры клеток

приближенно постоянными и равными их наибольшим значениям. Тогда дифференциальные уравнения устойчивости будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{0y}} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left[2(1+\mu) - \frac{\mu}{E_{0x}} - \frac{\mu}{E_{0y}} \right] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_{0x}} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \\ = \frac{E\delta}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + D \left[D_{0x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(1-\mu + \mu D_{0y}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ \left. + D_{0y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2(1+\mu) D_{0x}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2(1+\mu) D_{0y}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\mu}{R^4} (D_{0x} + D_{0y}) w \right] + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2w}{R^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} D &= \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_{0x} = 1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{\text{сгп}}}{a_{\text{сгп}} \delta^3}, \\ D_{0y} &= 1 + \frac{12(1-\mu^2) J_{\text{ш}}}{a_{\text{ш}} \delta^3}, \quad E_{0x} = 1 + \frac{F_{\text{сгп}}}{a_{\text{сгп}} \delta}, \\ E_{0y} &= 1 + \frac{F_{\text{ш}}}{a_{\text{ш}} \delta}, \quad N = \frac{qR}{2}. \end{aligned}$$

Будем считать, что после потери устойчивости оболочка покроется ямками и выпучинами (см. § 59), близкими к квадратным.

Наименьшее значение нагрузки получим, если для функций w и φ примем выражения

$$\begin{aligned} w &= A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \varphi &= B \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a}. \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся только первым приближением, так как в этом случае результат решения будет мало отличаться от более высоких приближений (см. § 49).

В результате интегрирования разрешающих уравнений по методу Бубнова—Галеркина имеем

$$\begin{aligned} \frac{qR}{2E\delta} = \frac{2048}{81\pi^4 \left[(0,75 - 0,25\mu) \left(\frac{1}{E_{0x}} + \frac{1}{E_{0y}} \right) + \frac{1+\mu}{2} \right] (m^2 - 1)} + \\ + \frac{am^4}{m^2 - 1} \left[D_{0x} + (1 + 2\mu) D_{0y} + 2(1 - \mu) - \right. \\ \left. - (1 + \mu) (D_{0x} + D_{0y}) \left(\frac{2}{m^2} - \frac{1}{m^4} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$m = \frac{\pi R}{a}, \quad a = \frac{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2}{24(1-\mu^2)}.$$

Следует ожидать, что поверхность оболочки после потери устойчивости покроется большим количеством ямок и выпучин. В этом случае $m^2 \gg 1$. Тогда приближенно можно принять

$$\frac{qR}{2E\delta} = \frac{2048}{81\pi^4 \left[(0,75 - 0,25\mu) \left(\frac{1}{E_{0x}} + \frac{1}{E_{0y}} \right) + \frac{1+\mu}{2} \right] m^2} + \\ + am^2 [D_{0x} + (1+2\mu)D_{0y} + 2(1+\mu)].$$

Минимум этого выражения по параметру m^2 будет

$$q_{кр} = 0,438 E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{0x} + (1+2\mu)D_{0y} + 2(1-\mu)}{(0,75 - 0,25\mu) \left(\frac{1}{E_{0x}} + \frac{1}{E_{0y}} \right) + \frac{1+\mu}{2}}}.$$

Для гладкой оболочки $D_{0x} = 1$, $D_{0y} = 1$, $E_{0x} = 1$, $E_{0y} = 1$ получим

$$q_{кр} = 0,62 E \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \quad \text{или} \quad \tau_{кр} = 0,31 E \frac{\delta}{R}.$$

§ 77. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЕЕ БЫСТРО ВОЗРАСТАЮЩИМ ВНЕШНИМ РАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Если скорость приложения внешней нагрузки вызывает ускоренное движение частиц тела, то в уравнениях равновесия необходимо добавить члены, содержащие силы инерции. При рассмотрении устойчивости сферической оболочки можно ограничиться добавлением инерционной нагрузки только в направлении радиуса оболочки. Тогда уравнение равновесия примет вид

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + D \left[D_{0x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(1-\mu + \mu D_{0y}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ \left. + D_{0y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2(1+\mu)D_{0x}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2(1+\mu)D_{0y}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{1+\mu}{R^4} (D_{0x} + D_{0y}) w \right] + \frac{\gamma \delta_{пр}}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2w}{R^2} \right) = 0,$$

где $\delta_{пр}$ — приведенная толщина оболочки.

Уравнение совместности без изменений используется в форме

$$\frac{1}{E_{0y}} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left[2(1+\mu) - \frac{\mu}{E_{0x}} - \frac{\mu}{E_{0y}} \right] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + \frac{1}{E_{0x}} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{E\delta}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Решение поставленной задачи будем искать в следующем виде:

$$w = W(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

$$\varphi = F(t) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a},$$

где

$$W(t) = W_n(t) - W_0;$$

W_0 — начальный прогиб;

$W_n(t)$ — полный прогиб.

Подставив эти функции в исходные уравнения задачи и проинтегрировав их по методу Бубнова—Галеркина, получим

$$D \left\{ D_{0x} + (1 + 2\mu) D_{0y} + 2(1 - \mu) - (1 + \mu)(D_{0x} + D_{0y}) \times \right. \\ \times \left[\frac{2}{\left(\frac{\pi R}{a}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi R}{a}\right)^4} \right] \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 W - \frac{128}{9\pi^2 R} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 F - \\ \left. - \frac{2N}{R^2} (W + W_0) \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\gamma \delta_{np}}{q} \frac{d^2 W_n}{dt^2} \right\} = 0, \\ F \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = - \frac{32E\delta W}{9\pi^2 R \left[(0,75 - 0,25\mu) \left(\frac{1}{E_{из}} + \frac{1}{E_{ос}} \right) + \frac{1 - \mu}{2} \right]}.$$

Здесь обозначено

$$\delta_{np} = \delta + \frac{F_{стр}}{a_{стр}} + \frac{F_{из}}{a_{из}};$$

δ — толщина оболочки, а

$$N = \frac{1}{2} qR.$$

После исключения из этих выражений функции F найдем

$$q^* = q_n^* \frac{Y_n - Y_0}{Y_n} + \frac{a_0}{Y_n} \frac{d^2 Y_n}{dt^2}, \quad (15.21)$$

где обозначено

$$Y_0 = \frac{W_0}{\delta}, \quad Y_n = \frac{W_n}{\delta}, \quad q^* = \frac{q}{E},$$

$$a_0 = \frac{\gamma R \delta_{np}}{(m^2 - 1) E q}, \quad m = \frac{\pi R}{a}.$$

$$q_n^* = \frac{4096 \frac{\delta}{R}}{81\pi^4 (m^2 - 1) \left[(0,75 - 0,25\mu) \left(\frac{1}{E_{0x}} + \frac{1}{E_{0y}} \right) + \frac{1+\mu}{2} \right]} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{\delta}{R} \right)^3 m^4}{12 (1 - \mu^2) (m^2 - 1)} \left\{ D_{0x} + (1 + 2\mu) D_{0y} + 2(1 - \mu) - \right.$$

$$\left. - (1 + \mu) (D_{0x} + D_{0y}) \left[\frac{2}{m^2} + \frac{1}{m^4} \right] \right\}.$$

Перепишем уравнение (15.21) в следующем виде:

$$b^2 \frac{d^2 Y_n}{dt^2} + \left(1 - \frac{q^*}{q_n^*} \right) Y_n = Y_0, \quad (15.22)$$

где

$$b^2 = a_0^2 / q_n^*.$$

Пусть, например, внешнее давление q возрастает линейно по закону $q = ct$. Тогда

$$\frac{q^*}{q_n^*} = \frac{q}{Eq_n^*} = \frac{ct}{Eq_n^*} = \tau.$$

Отсюда

$$t = \frac{Eq_n^*}{c} \tau. \quad (15.23)$$

Примем τ за новую независимую переменную, связанную с t соотношением (15.23).

Тогда уравнение (15.22) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2 Y_n}{d\tau^2} + S(1 - \tau) Y_n = Y_0 S, \quad (15.24)$$

где

$$S = \frac{q E^3 (q_n^*)^3 (m^2 - 1)}{C^2 \gamma R \delta_{np}}.$$

Полученное уравнение (15.24) является разрешающим неоднородным линейным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Если в этом уравнении положить $Y_0 = 0$, то решение данного уравнения может быть только тривиальным. Наличие в правой части этого уравнения члена, содержащего амплитуду начального прогиба, дает возможность получить решение уравнения, отличное от нуля.

Для определения величины критического давления данной оболочке, как показано дальше, величина начального прогиба не существенна. Этой величиной можно задаваться произвольно.

Для решения уравнения (15.24) применим метод Бубнова—Галеркина.

Функцию Y_{π} будем искать в форме степенного ряда

$$Y_{\pi} = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \dots$$

с начальными условиями

$$Y_{\pi} = Y_0, \quad \frac{dY_{\pi}}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

Это дает $Y_0 = a_0$, $a_1 = 0$. Ограничиваясь первыми тремя членами, используем в дальнейшем усеченный ряд

$$Y_{\pi} = Y_0 + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3.$$

Подставим этот ряд в уравнение (15.24) и проинтегрируем его по методу Бубнова—Галеркина. В результате получим

$$a_2 = \frac{Y_0 S \tau_0 (0,25 B_2 - 0,2 A_2)}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$a_3 = - \frac{Y_0 S \tau_0 (0,25 B_1 - 0,2 A_1)}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Тогда

$$Y_{\pi} = Y_0 \left\{ 1 + \frac{S \tau_0}{A_1 B_2 - A_2 B_1} [(0,25 B_2 - 0,2 A_2) \tau^2 - (0,25 B_1 - 0,2 A_1) \tau^3] \right\}. \quad (15.25)$$

Здесь обозначено:

$$A_1 = \frac{2}{3} + \frac{S \tau_0^2}{5} - \frac{S \tau_0^3}{6},$$

$$A_2 = \frac{3}{2} \tau_0 + \frac{S \tau_0^3}{6} - \frac{S \tau_0^4}{7},$$

$$B_1 = \frac{1}{2} + \frac{S \tau_0^2}{6} - \frac{S \tau_0^3}{7},$$

$$B_2 = \frac{6}{5} \tau_0 + \frac{S \tau_0^3}{7} - \frac{S \tau_0^4}{8},$$

$$\tau_0 = \frac{C(t_0 + \Delta t_0)}{E q_{\pi}^*}, \quad \tau = \frac{C t}{E q_{\pi}^*}.$$

При интегрировании уравнения (15.24) в качестве верхнего предела принята величина τ_0 , соответствующая времени $t_0 + \Delta t_0$, где t_0 — время нарастания давления q от нуля до наибольшего значения, а Δt_0 — малая величина, выбираемая произвольно, но удовлетворяющая условию $\Delta t_0 \ll t_0$.

Имея выражение для Y_n , можно определить предельное значение давления q . Для этой цели необходимо для каждого значения числа полуволн m построить график $Y_n = f(\tau)$. Число полуволн m , при котором начнется интенсивный рост прогиба Y_n , определяет приближенно предельное значение нагрузки q . Характер кривых $Y_n = f(\tau)$ представлен на рис. 225, откуда видно, что время τ_1 можно принять в качестве предельного. Тогда предельное значение нагрузки будет

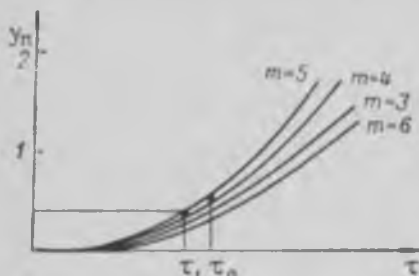


Рис. 225.

$$q_{кр} = E q_n^* \tau_1.$$

§ 78. УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТНОЙ В ПЛАНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ЕЕ БЫСТРО ВОЗРАСТАЮЩИМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Наиболее рациональной конструкцией подкрепленной сферической оболочки будет та, у которой происходит одновременно как потеря устойчивости всей конструкции в целом (обшивка с силовым набором), так и обшивки в клетках между элементами силового набора.

Если силовой набор достаточно жесткий, то для определения времени, начиная с которого прогибы обшивки, заключенной между элементами набора, интенсивно возрастают, можно принять выражения

$$w = W(t) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a},$$

$$\varphi = F(t) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a},$$

где

$$W(t) = W_n(t) - W'_0.$$

Принятые аппроксимации функций w и φ удовлетворяют следующим граничным условиям на контуре панели:

$$w = 0, \quad \sigma_x = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \sigma_y = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0.$$

Исходные уравнения задачи в данном случае принимают вид

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2(1+\mu)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2(1+\mu)w}{R^4} \right] + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\gamma h}{q} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2w}{R^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{Eh}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Не повторяя всех промежуточных выкладок, аналогичных вкладам предыдущего параграфа, напомним разрешающее уравнение

$$\frac{d^2 Y_n}{d\tau^2} + S(1-\tau)Y_n = Y_0 S, \quad (15.26)$$

где $\tau = \frac{q}{Eq_n^*} = \frac{Ct}{Eq_n^*}$, $Y_0 = \frac{W_0}{\delta}$, $Y_n = \frac{W_n}{\delta}$,

$$S = \frac{4(Eq_n^*)^4 \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - \frac{3}{4} \right]}{3C^2 \gamma R \delta}, \\ q_n^* = \frac{3 \frac{h}{R}}{8 \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - \frac{3}{4} \right]} + \\ + \frac{4 \left(\frac{h}{R} \right)^3 \left(\frac{\pi R}{a} \right)^4 \left[2 - \frac{3(1+\mu)}{4} \left(\frac{a}{\pi R} \right)^2 + \frac{9(1+\mu)}{32} \left(\frac{a}{\pi R} \right)^4 \right]}{9(1-\mu^2) \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - \frac{3}{4} \right]}.$$

Решением уравнения (15.26) будет выражение (15.25), в котором необходимо только заменить величины S и q_n^* . Дальнейший ход решения остается прежним: для каждого значения размера клетки $\frac{\pi R}{a}$ строится график $Y_n = f(\tau)$. Та кривая этого графика, которая раньше, чем другие, будет круто удаляться вверх от оси τ , и определит предельное значение внешней нагрузки.

Если силовой набор будет сравнительно слабым, то в запас устойчивости можно принять, что панели клеток имеют шарнирное опирание. Тогда

$$w = W'(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \\ \varphi = F(t) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{a},$$

где

$$W'(t) = W'_n(t) - W'_0.$$

Для построения графика $Y_n = f(\tau)$ следует пользоваться выражением (15.25) предыдущего параграфа, предварительно подставив в него выражения S и q , имеющие для данного случая вид

$$S = \frac{q (Eq_n^*)^3 \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - 1 \right]}{C^2 \gamma R^3},$$

$$q_n^* = \frac{2048 \frac{\gamma}{R}}{81 \pi^4 \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - 1 \right]} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{\pi R}{a} \right)^4 \left(\frac{\gamma}{R} \right)^3}{6(1-\mu^2) \left[\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2 - 1 \right]} \left\{ 2 - (1+\mu) \left[\frac{2}{\left(\frac{\pi R}{a} \right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pi R}{a} \right)^4} \right] \right\}.$$

Остальные обозначения даны выше.

Глава XVI

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ВИДЕ СОТ

Трехслойные конструкции оболочек с заполнителем в виде сот имеют ряд преимуществ по сравнению с однослойными, главным из которых является их легкость. При существенно меньшем весе сотовые конструкции способны воспринимать большие нагрузки.

За последнее время эти конструкции стали находить применение в авиационной технике [3].

В данной главе рассмотрен вопрос о расчете оболочек с сотовым заполнителем на устойчивость. При этом ограничимся рассмотрением только таких оболочек, у которых внешние слои имеют одинаковую толщину и изготовлены из одного и того же изотропного материала. Предполагаем, что соты выполнены также из изотропного материала, но отличного от материала внешних слоев.

В силу принятой симметрии конструкции стенки можно считать, что к ней будет применима гипотеза прямых нормалей. При этом изгибом внешних слоев будем пренебрегать, так как их толщина предполагается малой по сравнению с высотой сот. Наконец, примем, что жесткость сот на растяжение в касательной плоскости пренебрежимо мала по сравнению с жесткостью внешних слоев. Соты способны воспринимать только сдвигающие нагрузки.

Сделав эти оговорки, приступим к выводу уравнений равновесия.

§ 79 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СОТОВЫХ ОБОЛОЧЕК

Уравнения равновесия трехслойных сотовых оболочек можно получить вариационным методом. Вначале запишем выражение для энергии деформации изгиба оболочки.

Для элемента оболочки площадью $dx dy$ потенциальная энергия деформации изгиба будет

$$d\mathcal{E}_n = \left(\frac{1}{2} M_x \gamma_x + \frac{1}{2} M_y \gamma_y + M_{xy} \gamma_{xy} \right) dx dy,$$

где M_x , M_y , M_{xy} — внутренние моменты, действующие в оболочке (рис. 226);

γ_x , γ_y , γ_{xy} — изменения кривизн, соответствующие этим моментам.

Эта энергия в основном накапливается во внешних слоях оболочки, так как сотовый наполнитель, имея малую жесткость, не воспринимает изгибающих и крутящих моментов. В то же время наполнитель может воспринимать сдвигающие нагрузки. Для учета энергии, создаваемой этими нагрузками, используем рис. 227.

Работа поперечной силы Q_x будет равна

$$- \frac{1}{2} Q_x \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dy,$$

где w_1 — прогиб оболочки от перерезывающих сил.

Рассматривая силу Q_x как внешнюю по отношению к элементу $dx dy$, можно показать, что работа этой силы численно равна энергии деформации элемента. Для определения угла наклона касательной $\frac{\partial w_1}{\partial x}$ предположим, что высота наполнителя после деформации не изменяется и равна его высоте до деформации. Из этого предположения следует, что угол наклона касательной $\frac{\partial w_1}{\partial x}$, численно равный углу сдвига наполнителя, постоянен по всей высоте наполнителя.

В силу постоянства угла сдвига будет постоянным и напряжение сдвига по высоте заполнителя. Поэтому согласно закону Гука

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{Q_x dy}{FG} = \frac{Q_x dy}{2HG dy} = \frac{Q_x}{2HG},$$

где $2H$ — высота заполнителя;

G — модуль сдвига заполнителя.

Тогда потенциальная энергия в заполнителе от перерезывающей силы Q_x будет

$$\frac{1}{2} Q_x \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dy = \frac{1}{2} \frac{Q_x^2}{2HG} dx dy.$$

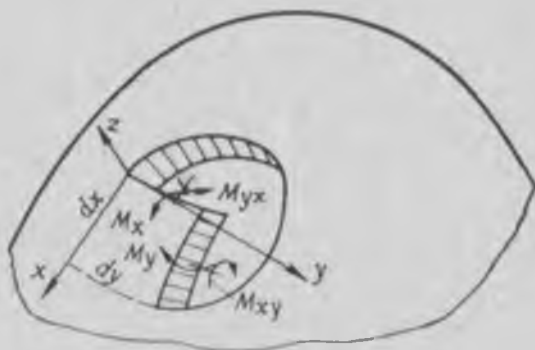


Рис. 226.

Аналогично от силы Q_y

$$\frac{1}{2} Q_y \frac{\partial w_1}{\partial y} dx dy = \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{2HG} dx dy.$$

Полная энергия изгиба и сдвига будет

$$d\mathcal{E}_n = \left(\frac{1}{2} M_x \gamma_{x,x} + \frac{1}{2} M_y \gamma_{y,y} + M_{xy} \gamma_{x,y} + \frac{1}{2} \frac{Q_x^2}{2HG} + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{2HG} \right) dx dy.$$

Для связи перерезывающих сил Q_x и Q_y с изгибающими и крутящими моментами используем уравнения

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x},$$

которые выражают условия равновесия элемента $dx dy$ относительно осей x, y .

Изгибающие и крутящие моменты (рис. 228) можно выразить через соответствующие нормальные и касательные напряжения следующим образом:

$$M_x dy = 2\sigma_x \delta_0 dy \left(H + \frac{z_0}{2} \right),$$

$$M_y dx = 2\sigma_y \delta_0 dx \left(H + \frac{z_0}{2} \right),$$

$$M_{xy} dx = 2\sigma_{xy} \delta_0 dy \left(H + \frac{z_0}{2} \right),$$

$$M_{yx} dy = 2\sigma_{yx} \delta_0 dx \left(H + \frac{z_0}{2} \right).$$

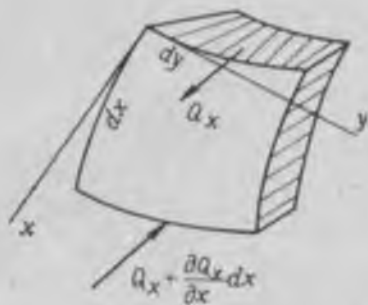


Рис. 227.

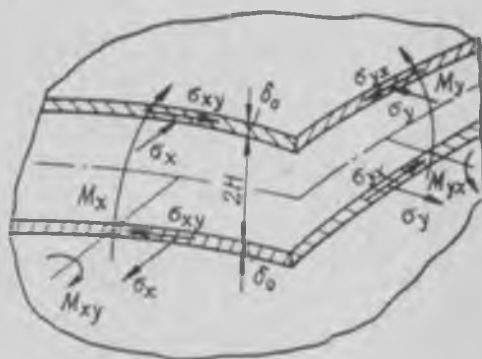


Рис. 228.

При составлении этих выражений было принято, что внешние слои на изгиб не работают, а изгибающие и крутящие моменты в сечениях оболочки реализуются через нормальные и касательные напряжения, равномерно распределенные по толщине внешних слоев.

Кроме того, согласно закону Гука

$$\sigma_x = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2} \left(\frac{z}{\rho_x} + \mu \frac{z}{\rho_y} \right) = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2} \left(H + \frac{z_0}{2} \right) (\chi_x + \mu \chi_y).$$

Аналогично можно получить

$$\sigma_y = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2} \left(H + \frac{z_0}{2} \right) (\chi_y + \mu \chi_x),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E_0}{1 + \mu_0} \left(H + \frac{z_0}{2} \right) \chi_{xy}, \quad \sigma_{yx} = \sigma_{xy}.$$

Тогда можно записать

$$M_x = D_0 (\chi_x + \mu \chi_y),$$

$$M_y = D_0 (\chi_y + \mu \chi_x),$$

$$M_{xy} = (1 - \mu_0) D_0 \chi_{xy},$$

где

$$D_0 = \frac{2E_0\delta_0 \left(H + \frac{\delta_0}{2} \right)^2}{1 - \mu_0^2},$$

E_0, μ_0 — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала внешних слоев.

Для изменения кривизн в данном случае имеем следующие формулы:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{R_1^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2},$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R_2^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2},$$

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

где $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}$ — дополнительные слагаемые, учитывающие влияние перерезывающих сил Q_x и Q_y .

Энергия растяжения—сжатия внешних слоев определяется известным выражением

$$\mathcal{E}_0 = 2 \frac{E_0 \delta_0}{2(1 - \mu_0^2)} \iint_F \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu_0 \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1 - \mu_0}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right) dx dy,$$

где коэффициент 2 учитывает число внешних слоев.

Компоненты деформации срединной поверхности даются следующими формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Полная потенциальная энергия оболочки

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_u + T,$$

где T — работа внешних сил.

В развернутом виде это выражение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \iint_F \left\{ \frac{E_0 \delta_0}{1 - \mu_0^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right)^2 + 2\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1 - \mu_0}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{D_0}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) + \\ + 2(1 - \nu_0) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{2HG}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] - q w \} dx dy,$$

где q — интенсивность внешнего распределенного давления.

При составлении выражения для полной энергии было принято, что на малой поверхности оболочки радиусы кривизны можно принять постоянными. Используем далее условие

$$\delta \mathfrak{E} = 0,$$

которое дает возможность получить как дифференциальные уравнения задачи, так и граничные условия. Если выражение полной энергии отнесено к отдельно взятой ямке или выпукчине, образовавшейся на поверхности оболочки после потери устойчивости, то полученные при этом граничные условия будут для неестественными.

Не повторяя всех промежуточных выкладок, аналогичных выкладкам § 34, приведем лишь окончательные результаты.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v_y} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w_{1xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w_{1yy}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{1x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{1y}} &= 0. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \int_0^b \left[\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^a dy &= 0, \\ \int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]_0^b dx &= 0, \\ \int_0^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w \right]_0^a dy &= 0, \\ \int_0^a \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) \delta w \right]_0^b dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \delta w \right)_0^a \right] = 0,$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right)_0^a dy = 0, \quad \int_0^a \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right)_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial v_x} \delta v \right)_0^a dy = 0, \quad \int_0^a \left(\frac{\partial F}{\partial v_y} \delta v \right)_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^b \left[\frac{\partial F}{\partial w_{1xx}} \delta \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right]_0^a dy = 0,$$

$$\int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial w_{1yy}} \delta \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right]_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_{1xx}} + \frac{\partial F}{\partial w_{1x}} \right) \delta w_1 \right]_0^a dy = 0,$$

$$\int_0^a \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_{1yy}} + \frac{\partial F}{\partial w_{1y}} \right) \delta w_1 \right]_0^b dx = 0.$$

Здесь F — подынтегральная функция в выражении для $\mathcal{E}$; $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, w_{1y} = \frac{\partial w_1}{\partial y}$ — обозначения производных от компонентов перемещений u, v, w, w_1 .

Частные производные от функции F имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} = & \frac{2E_0 b_0}{1 - \mu_0^2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu_0}{R_2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu_0}{R_1} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right] + \\ & + D_0 \left[\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\mu_0}{R_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\mu_0}{R_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right] - q, \end{aligned} \quad (16, 2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} = D_0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right];$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = D_0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \right];$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} = 2(1 - \mu_0) D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u_x} &= \frac{2E_0\lambda_0}{1-\mu_0^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \right) \right], \\
\frac{\partial F}{\partial u_y} &= \frac{E_0\lambda_0}{1+\mu_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial F}{\partial v_y} &= \frac{2E_0\lambda_0}{1-\mu_0^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \right) \right], \\
\frac{\partial F}{\partial v_x} &= \frac{E_0\lambda_0}{1+\mu_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial F}{\partial w_{1xx}} &= D_0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right], \\
\frac{\partial F}{\partial w_{1yy}} &= D_0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \right], \\
\frac{\partial F}{\partial w_{1x}} &= \frac{4HG}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial w_{1y}} = \frac{4HG}{2} \frac{\partial w_1}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Если учесть значения частных производных от функции F , то первые два уравнения равновесия (16.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (16.3)$$

При этом были использованы соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u_x} &= 2N_x, & \frac{\partial F}{\partial u_y} &= 2N_{xy}, \\
\frac{\partial F}{\partial v_y} &= 2N_y, & \frac{\partial F}{\partial v_x} &= 2N_{xy}.
\end{aligned}$$

После введения функции напряжений φ по формулам

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

уравнения (16.3) будут тождественно удовлетворены, а третье уравнение (16.1) примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \right. \\
& + 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\mu_0}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\mu_0}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{R_1^4} + \frac{2\mu_0}{R_1^2 R_2^2} + \frac{1}{R_2^4} \right) w + \\
& + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2\mu_0 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\mu_0}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \\
& \left. + \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\mu_0}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right] = q. \quad (16.4)
\end{aligned}$$

При этом четвертое уравнение равновесия (16.1) в развернутом виде будет

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\mu_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\mu_0}{R_2^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{\mu_0}{R_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2\mu_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right] - \\ - 2HG \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (16.5)$$

Уравнение, связывающее функцию напряжений φ с прогибом w , можно получить из выражений для компонентов деформации с использованием закона Гука

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = E_0 \delta_0 \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (16.6)$$

Уравнениями (16.4) — (16.6) полностью описывается напряженное и деформированное состояние оболочек с сотовым наполнителем. Из этих уравнений как частные случаи могут быть получены уравнения изгиба балок и пластин из сот.

В задачах динамики и устойчивости распределенная нагрузка q в этих уравнениях заменяется выражением вида

$$q = \frac{2(H + \eta_0) \gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N_x^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) + \\ + N_y^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_2^2} \right) + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где первое слагаемое определяет величину инерционной нагрузки, а остальные три — величину проекций внутренних сжимающих и сдвигающих усилий на нормаль к оболочке.

При решении задач устойчивости или колебаний оболочек необходимо выбирать такую комбинацию приведенных выше граничных условий для функций φ , w , w_1 на контуре ямок и выпучин, которая согласуется с характером ожидаемого волнообразования и приводит к минимальному значению частоты или критической нагрузки.

В качестве иллюстрации решим задачу об устойчивости шарнирно опертого стержня, нагруженного вдоль оси. В этом случае исходные уравнения примут вид

$$EJ \left(\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d^4 w_1}{dx^4} \right) = -P \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ EJ \left(\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d^4 w_1}{dx^4} \right) - FG \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0.$$

Граничным условиям задачи будут удовлетворять следующие выражения для w и w_1 :

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_1 = B \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Подставляя необходимые производные в эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} A \left[EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 - P \right] + BEJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 &= 0, \\ AEJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + B \left[EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + FG \right] &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель этих уравнений нулю, получим

$$P_0 = \frac{EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}{1 + \frac{EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}{FG}}.$$

Эта формула в курсе сопротивления материалов выводится другим путем.

Применим полученные выше уравнения к решению некоторых задач устойчивости оболочек.

§ 80. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В этом случае $R_1 = \infty$, $R_2 = R$. Кроме того, примем $\mu_0 = 0$. Тогда исходные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^4} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = -N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (16.7)$$

$$D_0 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) - 2HG \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{E_0 \delta_0}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Для функций w , w_1 , φ примем следующие выражения:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$w_1 = B \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\varphi = C \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}.$$

Эти функции удовлетворяют условию шарнирного опирания контура ямок и выпучин и обращают в нуль на их контуре дополнительные (самоуравновешенные) нормальные и касательные напряжения.

После подстановки принятых выражений в исходные уравнения и интегрирования их получим

$$-\frac{64C}{9\pi^2 R} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + D_0 A \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^4 + D_0 B \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4\right] - N_x^0 A \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0,$$

$$C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = -\frac{16 E_0 \delta_0 A}{9\pi^2 R \left[0,75 + 0,5 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,75 \left(\frac{a}{b}\right)^4\right]},$$

$$B = -\frac{D_0 A \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4\right]}{D_0 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4\right] + 2HG \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}$$

Исключив из первого уравнения параметры B и C , получим при $A \neq 0$ следующее выражение для критического напряжения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{N_x^0}{E_0 \delta_0}\right)_{кр} = & \frac{1024}{81\pi^4 \left[0,75 + 0,5 \left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 \left(\frac{n}{m}\right)^2 + 0,75 \left(\frac{l}{\pi R}\right)^4 \left(\frac{n}{m}\right)^4\right]} + \\ & + \frac{D_0}{E_0 \delta_0 R^2} \left(\frac{\pi R}{l}\right)^2 m^2 - \\ & - \frac{D_0^2 \left(\frac{\pi R}{l}\right)^4 m^4 \left[1 + \left(\frac{l}{\pi R}\right)^4 \left(\frac{n}{m}\right)^4\right]^2}{2HGE_0 \delta_0 R^4 \left\{1 + \left(\frac{l}{\pi R}\right)^2 \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{D_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{2HG} m^2 \left[1 + \left(\frac{l}{\pi R}\right)^4 \left(\frac{n}{m}\right)^4\right]\right\}}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Здесь обозначено

$$m = \frac{l}{a}, \quad n = \frac{\pi R}{b},$$

где l — длина оболочки;

a, b — размеры ямок и выпучин в осевом и окружном направлениях.

Остальные обозначения даны выше.

Придавая параметрам волнообразования m, n различные целочисленные значения, по приведенному выражению можно определить наименьшее значение $N_{x,кр}^0$.

Критическая сила осевого сжатия оболочки

$$P_{кр} = 2\pi R N_{xкр}^0.$$

Для получения более простой приближенной формулы можно отбросить в выражении (16.8) последнее слагаемое, учитывая работу сот от поперечных сил. Таким приближением определится несколько завышенное значение критического напряжения. Кроме того, в оставшемся выражении можно отбросить слагаемые, содержащие параметр волнообразования n по сравнению с m . Это дополнительное допущение, как показывают сравнительные расчеты, несколько снижает величину критической силы.

С учетом указанных допущений можно получить сравнительно простое выражение, по которому определим аналитический минимум критического напряжения:

$$N_{xкр}^0 \approx 1,67 E_0 \delta_0 \frac{H + \frac{\delta_0}{R}}{R} \quad \text{при} \quad m = 0,66 \sqrt{\frac{R}{H + \frac{r_n}{2}}}.$$

§ 81. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Для решения этой задачи необходимо в уравнениях (16.7) произвести замену приведенной нагрузки

$$N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{на} \quad N_y^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right).$$

В качестве решения этих уравнений можно принять

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$w_1 = B \sin \frac{\pi x}{l} \sin n\theta,$$

$$w_2 = C \sin \frac{\pi x}{l} \sin n\theta.$$

После подстановки выражений для w , w_1 и w_2 в разрешающие уравнения (16.7) получим

$$\begin{aligned} -\frac{2C}{R} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + D_0 A \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] + D_0 B \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] = \\ = A N_y^0 \left[\left(\frac{n}{R} \right)^2 - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (16.9)$$

$$D_0 A \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + \left(\frac{n}{R} \right)^4 \right] + D_0 B \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + \left(\frac{n}{R} \right)^4 \right] + \\ + 2HGR \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] = 0, \\ C \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 = - \frac{E_0^2 \delta_0 A \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}{R}.$$

Для оболочки средней длины можно ожидать, что в результате потери ею устойчивости в окружном направлении образуется много полуволн. Тогда можно принять, что

$$\left(\frac{n}{R} \right)^2 \gg \left(\frac{\pi}{l} \right)^2, \quad n^2 \gg 1.$$

На этом основании уравнения (16.9) можно заменить более простыми

$$- \frac{2G}{R} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + D_0 A \left(\frac{n}{R} \right)^4 + D_0 B \left(\frac{n}{R} \right)^4 = A N_0^0 \left(\frac{n}{R} \right)^2,$$

$$C = - \frac{E_0^2 \delta_0 A \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}{R} \left(\frac{R}{n} \right)^4,$$

$$B = - \frac{D_0 A \left(\frac{n}{R} \right)^2}{D_0 \left(\frac{n}{R} \right)^2 + 2HG}$$

После исключения из этих уравнений параметров A , B , C получим следующее выражение для критического внешнего давления:

$$q_{кр} = \frac{2E_0^2 \delta_0 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 R^3}{n^6} + \frac{D_0}{R^3} n^2 - \frac{\frac{D_0^2}{2HG} n^4}{R^5 \left[1 + \frac{D_0}{2HG} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]}. \quad (16.10)$$

Для определения наименьшего значения давления необходимо последовательно положить $n=2, 3, \dots$

Для получения приближенной формулы для критической нагрузки в выражении (16.10) можно отбросить слагаемое с D_0^2 , связанное с работой сот на сдвиг. Тогда после определения минимума по параметру n получим

$$q_{кр} = 11 E_0^2 \delta_0 \frac{H + \frac{\delta_0}{2}}{Rl} \sqrt{\frac{H + \frac{\delta_0}{2}}{R}} \quad \text{при} \quad n^2 = \frac{1,7\pi R}{l} \sqrt{\frac{E_0^2 \delta_0 R^2}{D_0}}.$$

В случае очень длинной оболочки волнообразование не будет зависеть от продольной координаты x . Тогда уравнения (16.7) примут вид

$$D_0 \left(\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{w}{R^4} + \frac{d^4 w_1}{dy^4} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 w_1}{dy^2} \right) = -N_y^0 \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{w}{R^2} \right). \quad (16.11)$$

$$D_0 \left(\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^4 w_1}{dy^4} \right) - 2HG \frac{d^2 w_1}{dy^2} = 0. \quad (16.12)$$

В данном случае для решения задачи можно принять

$$w = A \cos n\theta, \quad w_1 = B \cos n\theta.$$

После подстановки этих выражений в уравнения (16.11) — (16.12) для критического давления получим

$$q_{кр} = \frac{D_0 (n^2 - 1)}{R^3} \left(1 - \frac{D_0}{2HG R^2} \frac{1}{1 + \frac{D_0 n^2}{2HGR^2}} \right).$$

Можно убедиться, что наименьшее значение критического давления будет при $n=2$. Тогда

$$q_{кр} = \frac{3D_0}{R^3} \left(1 - \frac{\frac{D_0}{2HGR^2}}{1 + \frac{2D_0}{HGR^2}} \right).$$

§ 82. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ СОТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ

При практических расчетах сотовых конструкций необходимо определять жесткость сот на сдвиг при заданном значении модуля сдвига материала сот.

При заданном значении модуля сдвига G_1 материала сот приведенный модуль сдвига G_2 , который будет иметь сотовая конструкция в целом, изготовленная из этого материала, определяется из условия равенства углов сдвига при нагружении образцов, вырезанных из материала с известным модулем G_1 и из сотовой конструкции с неизвестным модулем G_2 (рис. 229).

Таким образом, $\gamma_1 = \gamma_2$,

где

$$\gamma_1 = \frac{P}{F_1 G_1};$$

$$\gamma_2 = \frac{P}{F_2 G_2}; \quad F_1 = 2Hl_1; \quad F_2 = 2Hl_2.$$

Тогда

$$F_1 G_1 = F_2 G_2.$$

Поэтому

$$G_2 = G_1 \frac{l_1}{l_2}.$$

Длину образца из сотовой конструкции l_2 можно выразить числом перерезаемых сот следующим образом. Число стенок, которое можно изготовить из длины l_1 , будет

$$n = \frac{l_1}{\delta_c},$$

где δ_c — толщина стенок соты.

При этом количество полных сот

$$m = n - 1 = \frac{l_1}{\delta_c} - 1.$$

Тогда для длины l_2

$$l_2 \approx m d_{\text{вп}} = \left(\frac{l_1}{\delta_c} - 1 \right) d_{\text{вп}},$$

где $d_{\text{вп}}$ — диаметр вписанной в соту окружности.

Поэтому можно написать

$$G_2 = G_1 \frac{l_1}{\left(\frac{l_1}{\delta_c} - 1 \right) d_{\text{вп}}}.$$

Перепишем это выражение в следующем виде:

$$G_2 = G_1 \frac{\delta_c}{d_{\text{вп}}} \frac{\frac{l_1}{\delta_c}}{\frac{l_1}{\delta_c} - 1}.$$

Поскольку размер образца l_1 взят произвольно, то из последнего выражения необходимо получить такое значение G_2 , при котором критическая сила будет наименьшей. Из этого требования получим

$$G_2 = G_1 \frac{\delta_c}{d_{\text{вп}}} \text{ при } \left(\frac{\frac{l_1}{\delta_c}}{\frac{l_1}{\delta_c} - 1} \right)_{\frac{l_1}{\delta_c} \rightarrow \infty} = 1.$$

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ НЕСКОЛЬКИХ НАГРУЗОК

Если на оболочку действует несколько различных нагрузок, то определение их критического значения из решения уравнений устойчивости представляется задачей весьма сложной, а иногда и почти неразрешимой. Поэтому желательно иметь оценки несущей способности таких оболочек, не решая непосредственно дифференциальные уравнения задач и используя результаты, которые можно получить при нагружении оболочки отдельно каждой из действующих сил. Такой путь тем более целесообразен, что многие задачи устойчивости оболочек уже решены.

Для решения поставленной задачи рассмотрим уравнения В. З. Власова:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = E h \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (17.1)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D \nabla^2 \Delta^2 w = N_x^0 \chi_x + N_y^0 \chi_y + 2N_{xy}^0 \chi_{xy}, \quad (17.2)$$

Правая часть уравнения (17.2) определяется мембранными усилиями, которые возникают в оболочке от действия внешних сил. В зависимости от характера этих нагрузок и геометрии оболочки усилия N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 могут действовать или одновременно, или в каких-либо сочетаниях. Например, при нагружении эллипсоидальной торовой оболочки внутренним давлением в ней одновременно возникают усилия N_x^0 и N_y^0 , а при нагружении сферического сегмента изгибающим моментом одновременно возникают все три компонента внутренних усилий. В противоположность этому при нагружении цилиндрической оболочки осевой сжимающей силой в ней возникает только усилие N_x^0 , при нагружении наружным равномерным давлением — усилие N_y^0 , крутящим моментом — усилие N_{xy}^0 . Поэтому в общем случае выражения для внутренних усилий можно представить в виде

$$\begin{aligned} N_x^0 &= \alpha' P + \alpha'' Q + \alpha''' R + \dots, \\ N_y^0 &= \beta' P + \beta'' Q + \beta''' R + \dots, \\ N_{xy}^0 &= \gamma' P + \gamma'' Q + \gamma''' R + \dots, \end{aligned} \quad (17.3)$$

где $P, Q, R, \dots$ — внешние нагрузки, действующие на оболочку;

$\alpha^I, \beta^I, \gamma^I$ — числовые коэффициенты, зависящие от параметров и текущих координат точки на поверхности оболочки.

Структура этих коэффициентов определяется видом решения задачи оболочки в докритическом состоянии.

После подстановки выражений (17.3) в (17.2) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + D \nabla^2 \Delta^2 w = \\ & = P(\alpha'' \gamma_x + \beta' \gamma_y + 2\gamma'' \gamma_{xy}) + Q(\alpha'' \gamma_x + \beta'' \gamma_y + 2\gamma'' \gamma_{xy}) + \\ & + R(\alpha''' \gamma_x + \beta''' \gamma_y + 2\gamma''' \gamma_{xy}) + \dots \end{aligned} \quad (17.4)$$

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы решить совместную систему уравнений (17.1) и (17.4).

Допустим, что эта система решена и результат этого решения можно записать в виде

$$\begin{aligned} & F_1(E, \delta, R_1, R_2, m, n) + F_2(D, R_1, R_2, m, n) = \\ & = P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, R_1, R_2, m, n) + Q(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, R_1, R_2, m, n) + \\ & + R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, R_1, R_2, m, n) + \dots \end{aligned} \quad (17.5)$$

Здесь обозначено:

m, n — параметры, характеризующие волнообразование оболочки;

F, F_2 — слагаемые, характеризующие работу оболочки на растяжение—сжатие и изгиб.

Правая часть уравнения (17.5) зависит от приложенных к оболочке сил P, Q, R , наименьшее критическое значение которых требуется определить.

Для дальнейшего удобно принять эти нагрузки в качестве координатных осей n -мерного пространства и переписать уравнение (17.5) в виде

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_n X_n - a_0 = 0, \quad (17.6)$$

где X_i — принятое обозначение для сил $P, Q, R, \dots$;

a_i — коэффициенты, зависящие как от параметров оболочки, так и от параметров волнообразования;

$$a_0 = F_1 + F_2.$$

Уравнение (17.6) определяет в n -мерном пространстве некоторую плоскость, называемую гиперплоскостью. Придавая различные значения параметрам волнообразования m, n , можно получать различные гиперплоскости. Каждая такая гиперплоскость разбивает все пространство на два полупространства, одно из которых включает в себя и точку начала координат. Можно доказать, что любая гиперплоскость является выпуклой. Для доказательства введем в рассмотрение некоторую функцию Φ , представляющую собой левую часть уравнения (17.6):

$$\Phi = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_n X_n - a_0.$$

Для дальнейшего введем понятие о направляющих косинусах в n -мерном пространстве.

Известно, что положение прямой в трехмерном пространстве вполне определяется величинами направляющих косинусов. Положение прямой в n -мерном пространстве также вполне определяется ее направляющими косинусами относительно осей $X_1, X_2, \dots, X_n$. Исходя из этого положим

$$X_1 = X_1^0 + i_1 r,$$

$$X_2 = X_2^0 + i_2 r,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_n = X_n^0 + i_n r,$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — направляющие косинусы радиуса-вектора r , выходящего из точки полупространства, включающего точку O начала координат и берущего свое начало в точке, имеющей координаты $X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$. Тогда для функции Φ получим выражение

$$\Phi = a_1 (X_1^0 + i_1 r) + a_2 (X_2^0 + i_2 r) + \dots + a_n (X_n^0 + i_n r) - a_0.$$

Если теперь изменять длину радиуса-вектора r , то будет изменяться численное значение функции Φ .

Поскольку эта функция есть левая часть уравнения (17.6), то при некотором значении r она обратится в нуль, а затем с увеличением r она более ни разу не примет нулевого значения и не изменит знака.

Таким образом, можно доказать, что все гиперплоскости, соответствующие различным значениям параметров волнообразования m, n , являются выпуклыми.

Из этого утверждения вытекает, что поверхность, образованная пересечением различных гиперплоскостей, является также выпуклой. Впервые эту теорему доказал П. Ф. Папкович другим методом.

Изложенное обстоятельство может быть использовано для расчета оболочек на устойчивость при нагружении их одновременно несколькими видами нагрузок.

Из самого понятия критической силы следует, что все гиперплоскости отсекают на координатных осях $X_1, X_2, \dots, X_n$ отрезки, равные соответствующим критическим силам. Для численного определения наименьшего значения этих критических сил достаточно положить, что все действующие нагрузки, кроме нагрузки одного вида, равны нулю, и решить задачу устойчивости оболочки только от нагрузки одного вида. В таком случае гиперплоскость определяется только одной точкой на соответствующей оси X_i . После этого следует решить задачу устойчивости от дей-

ствия нагрузки другого вида при нулевых значениях остальных нагрузок и т. д.

Таким образом, будут определены координаты критической гиперплоскости для данной оболочки, причем гиперплоскость, соответствующая минимальным значениям критических сил, будет единственной. Поскольку построение выпуклой гиперплоскости для заданной комбинации критических сил весьма затруднительно, то приближенно можно заменить гиперплоскость просто плоскостью, отсекающей на координатных осях X_i отрезки, равные соответствующим критическим силам.

В качестве иллюстрации приведем два примера.

Нагружение цилиндрической оболочки осевой сжимающей силой и поперечным равномерным давлением

В данном случае гиперплоскость вырождается в прямую на плоскости (рис. 230). На этом рисунке внешнее давление берется со знаком минус и оно отложено на отрицательном участке оси абсцисс.

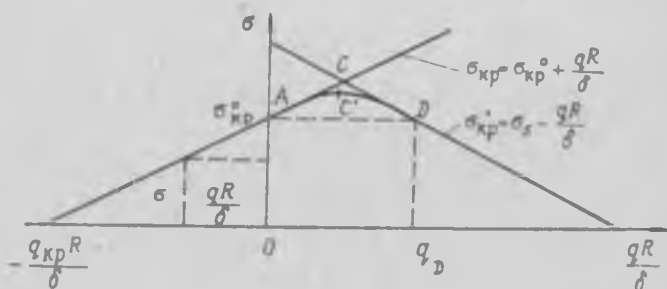


Рис. 230.

Уравнение полученной прямой будет иметь вид

$$\frac{q}{q_{кр}} + \frac{\sigma}{\sigma_{кр}^0} = 1, \quad (17.7)$$

где $q_{кр} = 0,92E \frac{\delta^2}{Rl} \sqrt{\frac{\delta}{R}}$ — критическое значение внешнего давления;

$\sigma_{кр}^0 = 0,26E \frac{\delta}{R}$ — критическое напряжение чистого сжатия.

Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых включает точку O начала координат. Если обозначить эту полуплоскость V^+ , а вторую полуплоскость V^- , то можно сказать, что точки первой полуплоскости, исключая точки, лежащие на прямой (17.7), отвечают состоянию устойчивого равновесия оболочки. Точки, расположенные на второй

полуплоскости, исключая точки на прямой (17.7), отвечают состоянию неустойчивого равновесия оболочки.

Все точки на прямой (17.7), включая и ее концы, определяют критическое состояние оболочки.

Так как уравнение (17.5) — линейное относительно внешних сил, то, продолжая прямую, определяемую уравнением (17.7), в сторону положительных значений давления q , можно получить зависимость критического напряжения сжатия от внутреннего давления.

Уравнение прямой в данном случае будет иметь вид¹

$$\sigma_{кр} = \sigma_{кр}^0 + \frac{qR}{\delta}. \quad (17.8)$$

Эта формула, по-видимому, будет справедливой только до определенных значений внутреннего давления q , так как начиная с некоторого значения внутреннего давления явление потери устойчивости, связанное с образованием ямок и выпучин, будет сопровождаться текучестью материала оболочки у ее торцов. Поэтому формула (17.8) будет справедливой только до некоторых «малых» значений внутреннего давления q , зависящего от механических свойств материала и геометрических параметров оболочки. Для оценки несущей способности оболочки при больших давлениях необходимо воспользоваться одной из теорий прочности. Для пластичных материалов можно применить теорию наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_s.$$

Заменяя

$$\sigma_{max} = \frac{qR}{\delta}, \quad \sigma_{min} = -\sigma_{кр},$$

имеем

$$\sigma_{кр}^* = \sigma_s - \frac{qR}{\delta}. \quad (17.9)$$

Графически эта формула описывает уравнение прямой в отрезках на осях координат (см. рис. 230).

Опыты показывают, что формулы (17.8) и (17.9) дают завышенные значения для критических напряжений, лежащих в промежутке между «малыми» и «большими» давлениями. В этом диапазоне давлений, как правило, получается смешанная форма потери устойчивости, связанная с образованием ямок и выпучин и гофрообразных складок. С увеличением внутреннего давления наблюдается постепенный переход от волнообразования в виде ямок и выпучин к образованию складок в виде гофра, расположенных по окружности оболочки.

¹ Эта формула справедлива в предположении квадратных ямок и выпучин, образовавшихся на поверхности оболочки после потери ею устойчивости.

Поскольку формулы (17.8) и (17.9) получены независимо друг от друга и при различных предположениях, то можно ожидать, что действительная кривая, характеризующая критическое состояние оболочки при осевом сжатии и внутреннем давлении, должна быть вписанной в угол ACD так, чтобы прямые AC и CD касались ее в точках A и D . Опыты показывают, что с достаточной для практических целей точностью эту кривую можно выбрать в форме квадратной параболы. Чтобы вписать эту параболу в угол ACD , выберем новую систему координат с началом в точке A . Тогда уравнение параболы будет иметь вид

$$\sigma_{\text{кр}}^* = \frac{qR}{h} \left(1 - \frac{\frac{qR}{h}}{\frac{q_D R}{h}} \right),$$

где q_D — внутреннее давление, соответствующее точке D . Это давление можно определить из условия

$$\sigma_{\text{кр}}^* = \sigma_k - \frac{q_D R}{h} = \sigma_{\text{кр}}^0,$$

откуда

$$\frac{q_D R}{h} = \sigma_k - \sigma_{\text{кр}}^0. \quad (17.10)$$

Тогда

$$\sigma_{\text{кр}}^* = \frac{qR}{h} \left(1 - \frac{qR}{\sigma_k - \sigma_{\text{кр}}^0} \right).$$

Полное значение критического напряжения при этом

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}}^0 + \sigma_{\text{кр}}^* = \sigma_{\text{кр}}^0 + \frac{qR}{h} \left(1 - \frac{qR}{\sigma_k - \sigma_{\text{кр}}^0} \right), \quad (17.11)$$

где

$$\sigma_{\text{кр}}^0 = 0,26E \frac{h}{R}.$$

Эта формула справедлива при условии, что $q \leq q_D$. При $q \geq q_D$ следует пользоваться формулой (17.9).

Определим наибольшее значение $\sigma_{\text{кр}}$ в зависимости от внутреннего давления:

$$\frac{d\sigma_{\text{кр}}}{d\left(\frac{qR}{h}\right)} = 1 - \frac{2 \frac{qR}{h}}{\sigma_k - \sigma_{\text{кр}}^0} = 0,$$

откуда

$$\frac{qR}{\delta} = \frac{1}{2} (\sigma_s - \sigma_{кр}^0).$$

или

$$q_{C'} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{R} (\sigma_s - \sigma_{кр}^0) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{R} \left(\sigma_s - 0,26E \frac{\delta}{R} \right). \quad (17.12)$$

Это давление соответствует точке C' параболы $AC'D$.

После подстановки $\left(\frac{qR}{\delta} \right)_{C'}$ в формулу (17.11) получим

$$\sigma_{кр. \max} = 0,75\sigma_{кр}^0 + 0,25\sigma_s.$$

Из выражения (17.12) видно, что давление $q_{C'}$ является функцией отношения δ/R .

Считая это отношение переменным, найдем, что при

$$\frac{\delta}{R} = \frac{\sigma_s}{0,52E} \quad (17.13)$$

имеет место наибольшее значение для $q_{C'}$:

$$q_{C' \max} = 0,48 \frac{\sigma_s^2}{E}. \quad (17.14)$$

Этим выражением определяется наибольшее внутреннее давление, которое можно создать в оболочке при совместной ее работе на осевое сжатие и внутреннее давление.

Подставив значения δ/R и $q_{C' \max}$ по (17.13) и (17.14) в выражение (17.11), получим предельное значение критического напряжения сжатия

$$\sigma_{кр. \max}^* = 0,625\sigma_s. \quad (17.15)$$

Окружные напряжения в оболочке в этом случае

$$\sigma_k = 0,25\sigma_s.$$

Таким образом, для конструкции оболочки, имеющей наибольшую величину критического напряжения сжатия в осевом направлении, необходимо выбрать такое отношение δ/R , которое удовлетворяет условию (17.13), и создать в оболочке внутреннее давление, определяемое формулой (17.14). Такая оболочка будет оптимальной с точки зрения ее несущей способности.

Рассмотрим расчет цилиндрической оболочки при осевом сжатии и внутреннем давлении с учетом разгрузки от внутреннего давления в осевом направлении. Имеем

$$\sigma_{кр}^* = 0,26E \frac{\delta}{R} + \frac{qR}{\delta}, \quad \sigma_{кр}^* = \sigma_s - \frac{qR}{\delta}.$$

Прибавив к правым частям этих выражений величину осевых напряжений от внутреннего давления, получим формулы для критических напряжений с учетом разгрузки

$$\sigma'_{кр} = 0,26E \frac{\delta}{R} + \frac{3}{2} \frac{qR}{\delta}, \quad \sigma''_{кр} = \sigma_s - \frac{1}{2} \frac{qR}{\delta},$$

графически представленные на рис. 231.

В данном случае в угол ACD также вписывается парабола, построение которой ясно из рис. 231. Значения давлений q , соответствующие точкам C и D , получим из условий

$$\sigma'_{кр} = \sigma_{кр}, \quad \sigma''_{кр} = \sigma^0_{кр}.$$

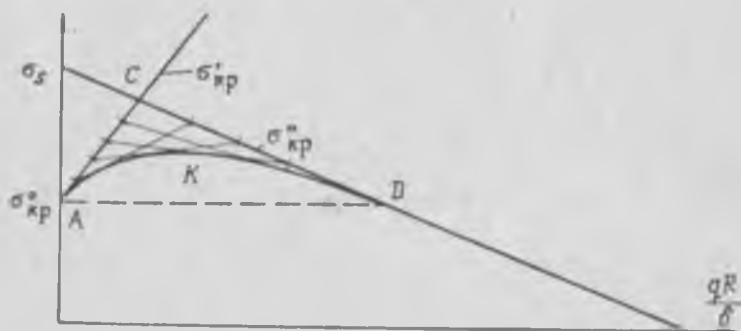


Рис. 231.

Отсюда находим

$$q_C = \frac{1}{2} \frac{\delta}{R} \left(\sigma_s - 0,26E \frac{\delta}{R} \right), \quad q_D = 2 \frac{\delta}{R} \left(\sigma_s - 0,26E \frac{\delta}{R} \right).$$

Из сравнения этих выражений с выражениями (17.10), (17.12) можно видеть, что точка пересечения C прямых в обоих случаях определяется одним и тем же выражением для q_C . Что же касается точки D , то в последнем случае ее абсцисса увеличилась в 2 раза.

В соответствии с этим, как видно из рис. 231, максимум критических напряжений также сместится вправо. Давление, соответствующее этому напряжению, будет

$$q_k = \frac{3}{4} \frac{\delta}{R} \left(\sigma_s - 0,26E \frac{\delta}{R} \right).$$

Рассматривая это давление как функцию отношения δ/R , получим при $\frac{\delta^*}{R} = \frac{\sigma_s}{0,52E}$ наибольшее значение для q_k :

$$q_{k \max} = 0,725 \frac{\sigma_s^2}{E}.$$

Подставив в исходные формулы для $\sigma'_{кр}$ и $\sigma''_{кр}$ значения $\frac{\delta}{R} = \frac{\sigma_s}{0,52E}$, получим

$$\sigma'_{кр} = 0,5\sigma_s + 0,78 \frac{E}{\sigma_s} q, \quad \sigma''_{кр} = \sigma_s - 0,26 \frac{E}{\sigma_s} q.$$

Графически эти уравнения представлены на рис. 232, где приведено также построение «сглаживающей» параболы.

Зная положение точки K на параболе, соответствующей положению наибольшего критического напряжения, можно при-

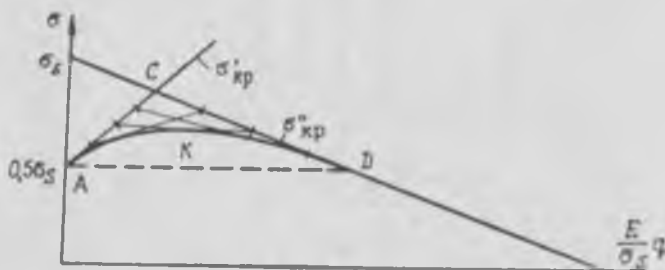


Рис. 232.

ближенно оценить предельную несущую способность оболочки. Непосредственно из рис. 232 получаем

$$\sigma'_{кр. \max} \approx 0,75\sigma_s. \quad (17.16)$$

В данном случае при учете разгрузки в 1,12 раза по сравнению с полученным в (17.15) увеличилось предельное напряжение. Окружные напряжения при этом

$$\sigma_k = 0,375\sigma_s.$$

Из формул (17.15), (17.16) для предельных значений критических напряжений с учетом и без учета разгрузки видно, что их величина отличается друг от друга всего на 12%. Поэтому в практических расчетах можно пользоваться формулой (17.11), дополнив ее напряжением от разгрузки:

$$\sigma_{кр} = 0,26E \frac{\delta}{R} + \frac{qR}{\delta} \left(1 - \frac{\frac{qR}{\delta}}{\sigma_s - 0,26E \frac{\delta}{R}} \right) + \frac{q_n R}{2\delta},$$

считая, что $q = q_n + \gamma h$,

где

q_n — давление наддува;

γh — давление столба жидкости над рассматриваемым сечением оболочки.

Тогда критическая сила будет

$$P_{кр} = 2\pi R \delta \tau_{кр}.$$

Нагружение цилиндрической оболочки осевой сжимающей силой, поперечным равномерным давлением и крутящим моментом

В данном случае будем иметь следующее уравнение плоскости:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{кр}} + \frac{q}{q_{кр}} + \frac{\tau}{\tau_{кр}} = 1,$$

представленное графически на рис. 233.

Внешнее давление, действующее на оболочку, принято отрицательным (оно отложено в левой части оси абсцисс), а внут-

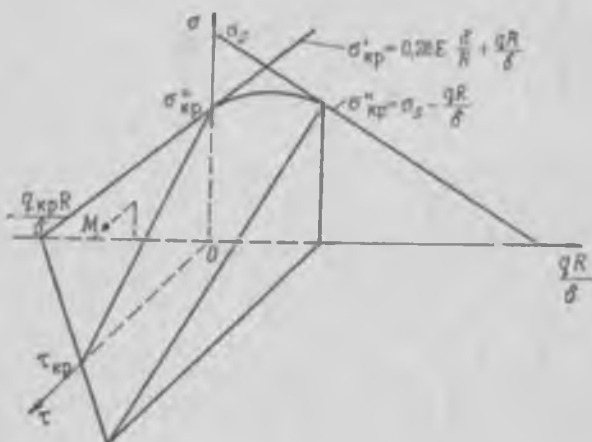


Рис. 233.

реннее — положительным. В связи с этим гиперплоскость оказалась в левом квадранте.

В данном случае гиперплоскость разделяет все пространство на два полупространства: полупространство V^+ , включающее в себя точку O начала координат, и полупространство V^- . Первое полупространство отвечает устойчивым состояниям равновесия оболочки, второе — неустойчивым. Плоскость, разделяющая оба эти полупространства, определяет критические состояния оболочки.

В первом квадранте рис. 233 гиперплоскость построена так же, как на рис. 230.

Изложенный метод определения критической комбинации нагрузок применим и к другим упругим системам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов Г. Д. Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями. Судпромгиз, 1951.
2. Астахов М. Ф., Караваев А. В., Макаров С. Я. и Суздальцев Я. Я. Справочная книга по расчету самолета на прочность. Оборонгиз, 1954.
3. Александров А. Я., Бородин М. Я., Павлов В. В. Конструкции с заполнителями из пенопластов. Оборонгиз, 1962.
4. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. I, Изд. Укр. АН, Киев, 1949.
5. Вайнгартен, Морган, Сойд. Упругая устойчивость тонкостенных цилиндрических и конических оболочек при совместном воздействии внутреннего давления и осевого сжатия, AIAA Journal, 1965, № 6.
6. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехтеоретиздат, 1949.
7. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехтеоретиздат, 1956.
8. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
9. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд-во «Наука», 1967.
10. «Вопросы ракетной техники». Сб. переводов и обзоров, 1963. № 3.
11. Вопросы прочности цилиндрических оболочек. Сб. переводов под ред. В. М. Даревского. Оборонгиз, 1960.
12. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Стройиздат, 1949.
13. Горт В. Дифференциальные уравнения. Гостехтеоретиздат, 1933.
14. Карпелевич Ф. И. и Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Физматгиз, 1963.
15. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. Изд-во «Машиностроение», 1966.
16. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. Гос. научно-техн. изд. машиностроит. литер., 1952.
17. Кун П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении. Оборонгиз, 1961.
18. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
19. Олмрос. Влияние граничных условий на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии. AIAA Journal, 1966, № 1.
20. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Под ред. С. Д. Пономарева, Машгиз, 1952.
21. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля, т. 4, Судпромгиз, 1963.

22. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. Изд-во «Наука», 1966.
 23. Сальвадори Дж. М. Численные методы в технике. ИЛ, 1955.
 24. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
 25. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
 26. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946.
 27. Упругие оболочки. Пер. под ред. Э. И. Григолюка, ИЛ, 1962.
 28. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Гостехтеоретиздат, 1947.
 29. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ, 1955.
 30. Хофф, Медсен, Майерс. Послекритическое равновесие круговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии, AIAA Journal, 1961, № 1.
 31. Бажанов В. А. и др. Сопротивление стеклопластиков. Изд-во «Машиностроение», 1968.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Раздел I.	
ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН	
Глава I. Прочность прямоугольных пластин и мембран	5
§ 1. Основные сведения из теории прямоугольных пластин малого прогиба	5
§ 2. Методы решения уравнений изгиба пластин	7
§ 3. Применение начала возможных перемещений к исследованию изгиба пластин. Метод Ритца	22
§ 4. Основные сведения из теории прямоугольных пластин большого прогиба	25
§ 5. Применение начала возможных перемещений к исследованию прямоугольных мембран	29
Глава II. Прочность круглых пластин и мембран	32
§ 6. Основные сведения из теории круглых пластин малого прогиба	32
§ 7. Применение начала возможных перемещений к симметрично нагруженным круглым пластинам и мембранам	37
Глава III. Устойчивость пластин	42
§ 8. Статический метод исследования устойчивости прямоугольных пластин	42
§ 9. Применение начала возможных перемещений к исследованию устойчивости пластин	48
Глава IV. Устойчивость стержней	52
§ 10. Эйлерова форма потерн устойчивости стержней	52
§ 11. Местная устойчивость сжатых стержней	55
§ 12. Эффективная ширина обшивки, работающей совместно со стержневым набором	57
Раздел II	
ПРОЧНОСТЬ ОБОЛОЧЕК	
Глава V. Безмоментные оболочки вращения	59
§ 13. Некоторые сведения из геометрии оболочек	59
§ 14. Уравнения равновесия оболочки при осесимметричной нагрузке. Уравнение Лапласа	60
§ 15. Напряжения в оболочках от гидростатического давления	67
§ 16. Расчет верхних днищ баков от действия внутреннего гидростатического давления	75

§ 17. Напряжения в сферической оболочке, опертой по некоторому поперечному сечению и нагруженной гидростатическим давлением	79
§ 18. Напряжения в полусферической оболочке, находящейся под воздействием осесимметричной аэродинамической нагрузки	81
§ 19. Перемещения в симметрично нагруженной цилиндрической оболочке	82
§ 20. Перемещения в симметрично нагруженной конической оболочке	85
§ 21. Перемещения в оболочках произвольной формы при осесимметричной нагрузке	89
§ 22. Определение понижения уровня жидкости в сферических баках от внутреннего давления	93
§ 23. Расчет оболочек на произвольную нагрузку. Дифференциальные уравнения равновесия	95
§ 24. Применение теоремы Кастильяно к задачам определения перемещений в оболочках	110

Глава VI Оболочки, нагруженные местной осесимметричной погонной нагрузкой 119

§ 25. Дифференциальные уравнения краевого эффекта при осесимметричной деформации оболочки	119
§ 26. Полубесконечная цилиндрическая оболочка, нагруженная распределенной поперечной силой и моментом на конце	124
§ 27. Определение силы взаимодействия между шпангоутом и стеной бака при внутреннем давлении	129
§ 28. Расчет сферических оболочек с отверстием в полюсе	132
§ 29. Краевая задача для цилиндрического бака. Расчет сферических оболочек без отверстия в полюсе	143
§ 30. Полусферическая оболочка, нагруженная по краю распределенной поперечной нагрузкой и моментом	149
§ 31. Расчет эллипсоидальных торовых оболочек на осесимметричную погонную нагрузку	151

Глава VII Общий случай расчета оболочек 155

§ 32. Краткие сведения из вариационного исчисления	155
§ 33. Выражение полной потенциальной энергии для оболочек	159
§ 34. Вариационные уравнения равновесия оболочек и граничные условия	164
§ 35. Расчет цилиндрической оболочки от действия сосредоточенных сил и моментов	171
§ 36. Нагружение цилиндрической оболочки локальными окружным и осевым изгибающими моментами	182
§ 37. Расчет цилиндрической оболочки на осесимметричную нагрузку	188
§ 38. Применение начала возможных перемещений к задачам расчета оболочек	191

Глава VIII. Расчет подкрепленных цилиндрических оболочек на осевые и поперечные нагрузки 209

§ 39. Эффективная ширина обшивки подкрепленной цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевого сжатия и внутреннего давления	209
§ 40. Определение напряжений в подкрепленной цилиндрической оболочке при нагружении ее изгибающим моментом, осевой и поперечной силами	211

Глава IX. Расчет некоторых узлов и деталей оболочек вращения 221

§ 41. Расчет элементов, подкрепляющих отверстия в сферических оболочках	221
---	-----

§ 42. Расчет шпангоутов днищ на сосредоточенные радиальные силы	226
§ 43. Кручение кольца, ослабленного отверстиями	230
§ 44. Расчеты круговых колец	231
Глава X. Расчет баллонов из стекловолокна	236
§ 45. Определение оптимальных углов намотки стеклонитей и потребной толщины стенок баллонов	237
§ 46. Расчет комбинированного цилиндрического баллона, усиленного стеклонитями только в окружном направлении	244
§ 47. Определение усилия натяжения стеклонитей	247

Раздел III

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

Глава XI. Устойчивость цилиндрических и конических оболочек	257
§ 48. Постановка задач устойчивости оболочек	257
§ 49. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии	263
§ 50. Устойчивость цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении	273
§ 51. Устойчивость длинной цилиндрической оболочки от действия внешнего равномерного давления. Пределы применимости формулы Папковича	281
§ 52. Устойчивость цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении, если полуволны после потери устойчивости направлены внутрь	283
§ 53. Устойчивость длинной цилиндрической оболочки при внешнем равномерном давлении, если полуволны после потери устойчивости направлены внутрь. Пределы применимости формулы (11.22)	284
§ 54. Устойчивость шарнирно опертой цилиндрической панели от действия осевой нагрузки, приложенной по криволинейным кромкам и распределенной по закону косинуса	286
§ 55. Устойчивость цилиндрической панели при действии сосредоточенной силы	290
§ 56. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении с учетом действия на нее растягивающих усилий в осевом и окружном направлениях	292
§ 57. Устойчивость сжатой зоны круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцом при ее нагружении сосредоточенной аксиальной силой	301
Глава XII. Устойчивость сферических и эллипсоидальных оболочек	305
§ 58. Уравнения местной потери устойчивости сферических оболочек в разностной форме. Устойчивость сферических сегментов	305
§ 59. Устойчивость замкнутой сферической оболочки при внешнем давлении	313
§ 60. Устойчивость сферического слоя при внешнем давлении	314
§ 61. Устойчивость сферической оболочки от действия внутреннего гидростатического давления	317
§ 62. Устойчивость эллипсоидальных торовых оболочек от действия внутреннего давления	319
Глава XIII. Устойчивость оболочек вращения при нагружении их осесимметричной погонной нагрузкой и внутренним давлением	325
§ 63. Устойчивость цилиндрической оболочки при нагружении ее осесимметричной радиальной погонной нагрузкой и внутренним давлением	325

§ 64. Устойчивость сферической оболочки при нагружении ее осесимметричной погонной нагрузкой и внутренним давлением	330
§ 65. Устойчивость торообразных оболочек при нагружении их осесимметричной погонной нагрузкой и внутренним давлением	334
Глава XIV. Устойчивость шпангоутов, связанных с оболочкой, при нагружении их погонной равномерной нагрузкой	336
§ 66. Устойчивость шпангоута чечевицеобразной емкости	337
§ 67. Устойчивость шпангоутов цилиндрических емкостей, имеющих сферические днища	341
§ 68. Устойчивость шпангоута, подкрепляющего цилиндрическую часть бака	342
§ 69. Определение эффективной ширины оболочки при расчете на прочность изолированных шпангоутов	343
Глава XV. Устойчивость подкрепленных оболочек	346
§ 70. Вывод выражений для приведенных жесткостей. Закон Гука для подкрепленных оболочек	346
§ 71. Дифференциальные уравнения и граничные условия для расчета подкрепленных оболочек	351
§ 72. Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки при осевом сжатии и внутреннем давлении	353
§ 73. Устойчивость подкрепленной цилиндрической панели при осевом сжатии и равномерном поперечном давлении	355
§ 74. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной равноотстоящими упругими шпангоутами, при внешнем давлении	358
§ 75. Устойчивость подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки при внешнем давлении и осевом растяжении	359
§ 76. Устойчивость сферической подкрепленной оболочки при внешнем давлении	364
§ 77. Устойчивость подкрепленной сферической оболочки при нагружении ее быстро возрастающим внешним равномерным давлением	366
§ 78. Устойчивость квадратной в плане сферической панели при нагружении ее быстро возрастающим внешним давлением	370
Глава XVI. Устойчивость трехслойных оболочек с заполнителем в виде сот	372
§ 79. Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия для трехслойных сотовых оболочек	373
§ 80. Устойчивость цилиндрической оболочки с сотовым заполнителем при осевом сжатии	381
§ 81. Устойчивость цилиндрической оболочки с сотовым заполнителем под действием внешнего давления	383
§ 82. Определение жесткости на сдвиг сотовой конструкции	385
Глава XVII. Расчет оболочек на устойчивость при одновременном действии нескольких нагрузок	387
Литература	397

Алексей Степанович Авдонин

**ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК
И ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Редактор *М. Ф. Богомолова*

Техн. редактор *Н. Н. Скотникова*

Художник *Л. А. Витте*

Корректор *Е. П. Карнаух*

Г-50805 Сдано в набор 27/VII 1968 г.

Подписано в печать 11/XII 1968 г. Формат 60×90^{1/8}

Уч. изд. л. 23,30. Печ. л. 25,25. Бум. л. 12,63

Бумага № 2. Тираж 5000 экз. Зак. № 1951

Цена 1 р. 37 к.

Тем. план 1968 г. № 138

Издательство «Машиностроение», Москва К-51,
Петровка 24.

Московская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Хохловский пер., 7. Зак. № 1802