

**Министерство высшего и среднего специального образования  
Республики Узбекистан**

**Ташкентский государственный авиационный институт**

---

**Ф.Б.Бадалов, Ш.Ф.Ганиханов**

**Вибрации наследственно-деформируемых элементов  
конструкции летательных аппаратов**

*Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования  
Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов авиационных ВУЗов*

**Ташкент-2002**

Бадалов Ф.Б., Ганиханов Ш.Ф. Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА. Ташкент, типография ТашЛАН, 2002.

В книге рассмотрены общие основы теории колебаний механики наследственно-деформируемых систем, возникающих во время работы различных машин и в частности летательных аппаратов.

При создании этой книги были использованы материалы лекций по методам расчета прочности и динамики конструкции ЛА, по математическому моделированию и методам решения задач авиационных конструкций на ЭВМ, читаемые в последние годы авторами книги. В некоторых главах приведены результаты собственных исследований и исследований учеников самих авторов. При написании книги ставилась задача предельно упростить и наиболее доходчиво преподнести разработанную авторами новую методику решения задач такого типа. Конечно, это придало изложению некоторую эскизность, но ее было очень трудно преодолеть в пределах скромного объема настоящей книги.

Учебник предназначен для самостоятельного изучения курса по теории колебаний (вибраций) механики наследственно-деформируемых систем студентами дневных и заочных отделений ВТУЗов, магистрами, аспирантами, а так же инженерно-техническими работниками. С этой целью в нем приведены задачи с подробными аналитическими и численными решениями, иллюстрирующими теоретическое изложение курса, а также вопросы для самоконтроля.

Ответственный редактор:

академик В. К. Кабулов

Рецензенты:

академик О. В. Лебедев  
академик Т.Ш. Ширинкулов  
доц. Н.И. Тайлаков

Печатается по решению Ученого совета ТашГИАИ, протокол № 6 от 28.03.2002г.  
в качестве учебника для магистров ВТУЗов

Подп. в печать 28.03.2002г., Формат 60X90 1/16. Тип бумага №2  
Объем 15,043 п.л. Тираж 500. Заказ №

Отпечатано в типографии ТашГИАИ  
700047, г. Ташкент, ул. Ахунбабаева, д.12

© Типография ТашГИАИ

## ОГЛАВЛЕНИЕ:

Предисловие ко второму изданию.....	6
Предисловие к первому изданию.....	6
<b>Глава I. Общие сведения.....</b>	<b>9</b>
§1 Наследственные явления.....	9
§2 Число степеней свободы наследственно-деформируемой Механической системы.....	14
§3 Потенциальная и кинетическая энергии наследственно- Деформируемой системы с конечным числом степеней свободы.....	19
§4 Способы составления уравнений движения.....	20
Вопросы для самоконтроля.....	24
<b>Глава II. Свободные колебания наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА с одной степенью свободы...</b>	<b>25</b>
§5 Свободные колебания линейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы.....	25
§6 Свободные колебания нелинейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы.....	34
Вопросы для самоконтроля.....	44
<b>Глава III. Вынужденные колебания наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА с одной степенью свободы...</b>	<b>45</b>
§7 ИДУ вынужденных колебаний линейных наследственно-дефор- мируемых систем с одной степенью свободы.....	45
§8 Вынужденные гармонические колебания.....	50
§9 Кинематически возбуждаемые нелинейные колебания наследст- венно – деформируемого консольного элемента летательного аппарата (ЛА) с одной степенью свободы.....	53
Вопросы для самоконтроля.....	66
<b>Глава IV. Свободные колебания наследственно-деформируе- мых элементов конструкции ЛА с двумя степенями свободы...</b>	<b>68</b>
§ 10 Интегро-дифференциальные уравнения свободных колебаний.....	68
§ 11 Приведение системы ИДУ к главным координатам.....	71
§ 12 Свободные вертикальные колебания фюзеляжа на наследственно- деформируемых подвесках.....	74
§ 13 Свободные колебания крыла, поперечное сечение которого Является удлиненной пластинкой в наследственно-деформируемых опорах.....	83

§ 14	Связанные изгибно-крутильные колебания нелинейных наследственно-деформируемых удлиненных пластин.....	85
§ 15	Связанные изгибно-крутильные колебания реального профиля крыла на нелинейных наследственно-деформируемых подвесках....	90
	<i>Вопросы для самоконтроля</i> .....	96
	<b>Глава V. Решение задач о колебаниях наследственно-деформируемых систем с конечным числом степеней свободы...</b>	97
§ 16	Интегро-дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы и их обобщение.....	97
§ 17	Интегро-дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы в главных координатах и их общее решение.....	98
§ 18	Обобщение метода Ньюмарка для решения интегро-дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы.....	101
§ 19	Решение тестовых примеров.....	103
	<i>Вопросы для самоконтроля</i> .....	105
	<b>Глава VI. Аэронеустойчивость наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов...</b>	106
§ 20	Явление аэронеустойчивости.....	106
§ 21	Устойчивость нелинейного наследственно-деформируемого аппарата на воздушной подушке.....	110
§ 22	Исследование одной нелинейной задачи классического флаттера наследственно деформируемых систем.....	116
§ 23	Исследование одной нелинейной задачи классического флаттера для реальных профилей крыла с нелинейной наследственно-деформируемой подвеской.....	125
	<i>Вопросы для самоконтроля</i> .....	137
	<b>Глава VII. Дивергенция наследственно-деформируемого крыла при изгибе...</b>	139
§ 24	Прямая постановка задачи.....	143
§ 25	Вариационная постановка задачи.....	145
§ 26	Корректность математической постановки задачи.....	146
§ 27	Решение интегрального уравнения задачи дивергенции при изгибе.....	148
§ 28	Методика решения спектральной задачи (26.1), (26.4).....	150
§ 29	Численные реализации алгоритма.....	153
	<i>Вопросы для самоконтроля</i> .....	156

<b>Глава VIII. Дивергенция наследственно-деформируемого крыла с переменными характеристиками из композитных материалов...</b>		157
§ 30	Вариационная и прямая постановка задачи.....	157
§ 31	Исследование оператора $L[W]$ для консольной анизотропной неортоотропной пластинки.....	159
§ 32	Корректность математической постановки задачи дивергенции наследственно-деформируемого крыла с переменными характеристиками из композитных материалов.....	162
§ 33	Методика решения спектральной задачи (32.3) (32.4) и ее численные реализации.....	164
	Вопросы для самоконтроля.....	172
<b>Глава IX. Амплитуда установившегося флаттера наследственно-деформируемого консольного крыла...</b>		173
§ 34	Постановка задачи.....	173
§ 35	Точные сведения ИДУ в частных производных к системе двумерных стационарных краевых задач.....	175
§ 36	Редукция системы двумерных стационарных краевых задач (35.3), (35.4) к последовательности системы взаимосвязанных одномерных краевых задач.....	177
§ 37	Численные реализации алгоритма.....	182
	Вопросы для самоконтроля.....	188
<b>Глава X. Нелинейный флаттер наследственно деформируемых систем с распределенными параметрами...</b>		189
§ 38	Нелинейные неконсервативные динамические задачи элементов конструкции из диссипативно неоднородных композитных материалов.....	190
§ 39	Неустановившийся флаттер наследственно-деформируемого крыла из геометрически нелинейного материала.....	198
§ 40	Неустановившийся флаттер крыла из физически нелинейно-наследственно деформируемого материала.....	210
§ 41	Нелинейный флаттер наследственно деформируемой обшивки крыла самолета.....	217
	Вопросы для самоконтроля.....	225
	<b>Литература.....</b>	<b>226</b>

## Предисловие ко второму изданию

Отличие настоящего издания книги от предыдущего (1-е изд. 2000г.) состоит в следующем: во-первых, в это издание включен ряд новых глав, посвященных явлению аэронеустойчивости (дивергенции и флаттера) наследственно-деформируемых систем с распределенными параметрами; во-вторых, несколько расширено изложение теории нелинейного флаттера наследственно-деформируемых систем; кроме того, в настоящем издании исправлены опечатки и мелкие погрешности изложения, вкравшиеся в предыдущее издание. Книга является внедрением учебного процесса фундаментальных научных результатов аспиранта Набиева А.А. §22-§23; Мансурова М. §39-§40, докторанта Акбарова И.И. §41, Суярова А.М. §34-§36, соискателей Абдурахманова С.К. §31 и Абдукаримова А. §38 авторов данного учебника.

## Предисловие к первому изданию

Во многих областях современной техники весьма часто приходится встречаться с колебательными движениями различных механических систем, в частности, с колебаниями элементов конструкции летательных аппаратов (ЛА).

Возникающие в различных условиях колебания (вибрации) корпуса ЛА, а также колебания многочисленных инженерных конструкций и их отдельных элементов, деталей, из которых состоит ЛА, могут при неблагоприятных обстоятельствах вызвать значительные деформации и напряжения, привести к быстрому износу конструкции ЛА и даже к ее разрушению. Особую опасность таят различные виды колебаний корпуса и составных частей различных средств транспорта – локомотивов, вагонов,

автомобилей, судов, самолетов, которые в виду все возрастающих скоростей их движения могут привести к аварии.

Создание рациональных конструкций ЛА из наследственно-деформируемых композитных материалов, а также специальных устройств - так называемых гасителей колебаний, подбор оптимальных параметров разных вибраторов, широко применяемых в современной технике для механизации ряда производственных процессов - все это было бы невозможно без глубокого изучения вибрационных процессов. Изучению этого вопроса и посвящен настоящий курс. Вибрации возникают в результате динамического воздействия разнообразных факторов: колебания могут быть вызваны ударами и подвижными нагрузками, неуравновешенными частями машин, переменным давлением пара, газа, воды и ветра.

Колебания системы могут происходить как около положения равновесия, так и по отношению к некоторому определенному движению, в частности, к стационарному движению. Они могут быть незатухающими или затухающими, если учитываются внутренние трения материала конструкции. Так, например, если внутренние трения материала конструкции учитываются согласно наследственной теории Больцмана - Вольтерра, то колебания всякой механической системы под действием постоянной нагрузки происходит около функции кривой ползучести (см. рис. 1.2) и затухают с течением времени по этой кривой [1].

В последние годы большое внимание уделяется развитию математических моделей, в которых учитывается реологическое и наследственно - деформируемое свойство материала при описании напряженно-деформированного состояния конструкции ЛА. Это вызвано

тем, что в процессе деформирования реальных материалов (особенно композитных) существенную роль играет фактор времени.

Свойствами ползучести и релаксации, связанными с фактором времени, в значительной мере обладают конструкции ЛА из композитных материалов. Поэтому за период, соизмеримый со сроком службы конструкции ЛА, никакое напряженное состояние не может рассматриваться как стационарное [2]. Если какое-либо состояние можно считать стационарным, рассматривая его как некоторое предельное состояние, предшествующее разрушению, то оно достигается не сразу, а по истечении определенного промежутка времени, который в зависимости от вида внешних воздействий и других факторов может длиться от нескольких суток до многих лет. Таким образом, изучение, как в стационарном, так в вибрационном состоянии конструкции ЛА невозможно без учета влияния фактора времени.

В данном курсе методика учета фактора времени при исследовании вибрационных процессов основана на применении принципа Вольтерра, позволяющего решать задачи с учетом наследственных свойств материала конструкции, если известно уравнение движения или решение соответствующей задачи в идеально-упругой постановке.

Согласно принципу Вольтерра, построение математических моделей или решение задачи с учетом наследственных свойств материала конструкции осуществляется заменой упругих констант в известном уравнении движения или решении, относящемся к идеально-упругому случаю, соответствующими интегральными операторами.

## Глава I. Общие сведения

### §1. Наследственные явления

Ряд законов, положенных в основе классической теории упругости, электродинамики и теплопроводности, записывается формулами вида:

$$Y(x) = kU(x) \quad (1.1)$$

где:  $U$  и  $Y$  - соответствующие физические величины;  $k$  - коэффициент пропорциональности.

Так, если  $U$  обозначает растягивающее усилие, а  $Y$  - удлинение тела, то соотношение (1.1) выражает закон Гука. Тогда коэффициент пропорциональности  $k$  - модуль упругости. Если  $U$  обозначает градиент температуры, а  $Y$  - тепловой поток, то формула (1.1) выражает закон Фурье; здесь  $k$  - коэффициент внутренней теплопроводности вещества. Наконец, если  $Y$  будет обозначать: векторы магнитной индукции, электрического смещения, тока проводимости, а  $U$  будет обозначать векторы электрического и магнитного полей, тогда  $k$  - соответственно: диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и проводимость, а соотношение (1.1) будет представлять последовательно три формулы, присоединяют к уравнению Максвелла, чтобы придать физический смысл.

Подобных примеров можно привести очень много. Упомянутые законы предполагают мгновенное установление стационарного состояния. В действительности законы вида (1.1) не отражают истинных явлений, поскольку в реальных средах стационарное состояние достигается не мгновенно, а по истечении некоторого промежутка времени, который может быть весьма большим, теоретически - бесконечным, например: реальное тело способно продолжать деформироваться по прекращении изменения действующей на него нагрузки. Точно также поляризация:

вызванная электрическим полем, после исчезновения последнего не исчезает сразу, а постепенно уменьшается. Подобное запаздывание в проявлении физических свойств среды называется *наследственным явлением* или *явлением последействия*: в первом случае имеем *упругое* последействие; во втором - *диэлектрическое* [2].

Приведенные примеры показывают, что подобные явления не могут быть описаны формулами вида (1.1), поскольку в последних не участвуют факторы времени.

Инженерная задача, касающаяся расчета элементов конструкции на ползучесть, относится также к проблеме учета влияния фактора времени. Формируется она обычно так: деталь изготовлена из данного материала и при данной температуре, известны действующие на нее силы или перемещения на ее поверхности. Требуется установить, как будет изменяться во времени напряжение  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$  данной детали.

По современным представлениям: деформация, существующая в реальном теле, состоит из суммы двух частей: первое слагаемое зависит от деформации в данный момент  $t$ , второе - от деформации, существовавшей в реальном теле в течении времени, предшествовавшем настоящему моменту  $t$ . Математически это можно представить так:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + \varepsilon_2(x, t) \quad (1.2)$$

где:

$$y(x, t) = \varepsilon(x, t), U(x, t) = \sigma(x, t), k = \frac{1}{E},$$

$\varepsilon_1(x, t) = k\sigma(x, t)$ , – значение деформации, соответствующее данному моменту  $t$ ,  $\varepsilon_2(x, t)$  – функция, учитывающая влияние предшествующих моменту  $t$  состояния системы.

Тогда элементарное изменение  $d\varepsilon_2$ , обусловленное воздействием  $d\sigma$  за бесконечно малый промежуток времени, будет:

$$d\varepsilon_2(x, t) = k\Gamma(t - \tau)\sigma(x, t)d\tau \quad (1.3)$$

Здесь  $\Gamma(t - \tau)$  - функция влияния напряжений  $\sigma(x, \tau)$  в момент  $\tau$  на деформацию в момент  $t$  ( $t$  - настоящий момент времени,  $\tau$  - предшествующий). Функция  $\Gamma(t - \tau)$  убывает вместе с ростом  $t - \tau$ , который определяется экспериментально.

Интегрируя (1.3) в пределах  $\tau = 0$  и  $\tau = t$ , получаем:

$$\varepsilon_2(x, t) = k \int_0^t \Gamma(t - \tau)\sigma(x, \tau)d\tau \quad (1.4)$$

Складывая  $\varepsilon_1(x, t)$  с  $\varepsilon_2(x, t)$ , из (1.4) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{1}{E} \left[ \sigma(x, t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau)\sigma(x, \tau)d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{E} (1 + \Gamma^*)\sigma(x, t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решая интегральное уравнение (1.5) относительно  $\sigma(x, t)$ , имеем:

$$\sigma(x, t) = E \frac{1}{1 + \Gamma^*} \varepsilon(x, t) = E(1 - R^*)\varepsilon(x, t) \quad (1.6)$$

где:

$$\frac{1}{1 + \Gamma^*} = 1 - R^* \quad (1.7, a)$$

$$R^*\varepsilon(x, t) = \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(x, \tau)d\tau$$

$E$  - модуль упругости,  $R(t-\tau)$  - функция влияния деформации, убывающая при возрастании  $t - \tau$ .

Применение интегрального соотношения (1.5) и (1.6) позволяет развить весьма гибкий математический аппарат для описания процессов с учетом влияния фактора времени, то есть процессов ползучести и релаксации.

Процесс изменения деформации тела во времени при постоянном напряжении называется *ползучестью*.

При  $\sigma(x, t) = \sigma_0 - const$ , из (1.5) имеем:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(\tau) a \tau \right] = \frac{\sigma_0}{E} \Pi(t) \quad (1.7, б)$$

В дальнейшем функция  $\Pi(t)$  будем называть функцией ползучести. Графики функций  $\Gamma(t)$  и  $\Pi(t)$  выглядят следующим образом:

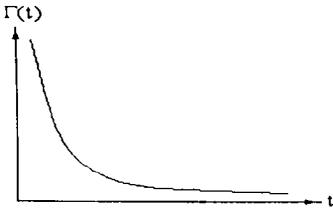


рис. 1.1

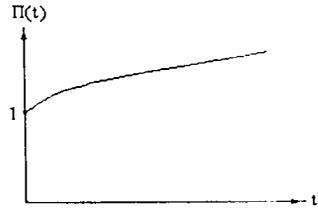


рис. 1.2

Дифференцируя обе части уравнения (1.7, б) по  $t$ , находим:

$$\Gamma(t) = \frac{E}{\sigma_0} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.8)$$

Экспериментально установлено, что при  $t=0$ ,  $\frac{d\varepsilon}{dt} \rightarrow \infty$ , поэтому функция  $\Gamma(t)$  или ядро ползучести должно обладать свойством сингулярности, т.е.:  $\Gamma(0) = \infty$  (см. рис. 1.1), причем, согласно уравнению (1.7), интеграл от  $\Gamma(t)$  должен быть конечной величиной. Такие функции называются слабо-сингулярными или функциями со слабой особенностью [13].

Процесс изменения напряжений в теле во времени при постоянной деформации называется *релаксацией*.

При  $\varepsilon = \varepsilon_0 - const$  из (1.6) имеем:

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon_0 \left[ 1 - \int_0^t R(\tau) d\tau \right] \quad (1.9)$$

Здесь  $R(t)$  - ядро релаксации:

$$R(t) = - \frac{1}{E\varepsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.10)$$

Из (1.7) следует, что между функциями  $\Gamma(t)$  и  $R(t)$  существует связь:

$$R(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) R(\tau) d\tau = \Gamma(t) \quad (1.11)$$

позволяющая по одной из известных функций, например  $\Gamma(t)$ , найти другую  $R(t)$ . Уравнение (1.11) называется интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода.

Поскольку функция  $\Gamma(t)$  имеет особенность при  $t=0$ , то на основании уравнения (1.11) заключаем, что функция  $R(t)$  при  $t=0$  должна быть сингулярной, т.е. при  $t=0$   $R(t) \rightarrow \infty$ .

Таким образом, математические модели задач динамики конструкции ЛА, основанные на интегральных соотношениях (1.5) и (1.6), представляют собой слабо-сингулярные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра. Преимущество интегральных соотношений (1.5), (1.6) по сравнению с существующими заключается в том, что они учитывают одновременно как внутреннее трение, так и ползучесть деформации и релаксацию напряжения материала, получивших название *наследственные свойства материала*.

## **§2. Число степеней свободы наследственно-деформируемой механической системы**

Сложность теоретического анализа колебаний в значительной мере зависит от числа степеней свободы рассматриваемой наследственно-деформируемой механической системы. *Числом степеней свободы* как идеально-упругой, так и наследственно-деформируемой механической системы, называется число независимых координат, однозначно определяющих положение всех материальных точек системы.

В динамических задачах, в частности в вибрационных задачах положение точек системы изменяется с течением времени, так что указанные координаты являются функциями времени. Основная задача динамического исследования состоит в нахождении этих функций, т.е. в определении закона движения системы. После этого без труда может быть найдена деформация, напряжение и внутреннее усилие в связях системы.

Как известно, любое деформируемое твердое тело имеет бесконечно большое число степеней свободы. Однако, в зависимости от принятой модели, представляющей деформируемую конструкцию в том или ином случае, число степеней свободы может быть конечным. В литературе часто

рассматривают системы с одной или двумя степенями свободы, вполне характеризующими ее состояние в любой момент времени.

Рассмотрим, например, безмассовую линейную наследственно-деформируемую пружину (рис. 2.1а), к концу которой приложена сила  $P(t)$ , заданная в виде функции времени. Обозначим через  $k$  - коэффициент пропорциональности пружины, то есть статическую силу, вызывающую единичное удлинение пружины. Тогда, в идеально упругом случае, перемещение  $U$  ее конца определяется обычной статической формулой:

$$kU = P(t) \quad (2.1)$$

Если учитывается фактор времени, то (2.1) имеет вид:

$$k(1 - R^*)U(t) = P(t) \quad (2.2)$$

где:

$$R^*U(t) = \int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

$R(t)$ -ядро релаксации, имеющей слабо-сингулярную особенность типа:

$$R(t) = \varepsilon e^{-\beta t} z^{\alpha-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.4)$$

Такая задача, в сущности, не является динамической, хотя найденное перемещение даже при  $P=\text{const}$  не постоянно, а представляет собой некоторую функцию времени.

Как известно, уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла, называются интегральным уравнением. Поэтому, учитывая (2.4) и что:  $z=0, R(z) \rightarrow \infty, 0 < \alpha < 1$ , уравнение (2.2) назовем слабо-сингулярным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Простейший пример динамической системы представлен на рис. 2.1б, где с концом пружины связан груз массы  $m$ . Здесь уже нельзя обойтись чисто квазистатическими соотношениями: в частности, нужно иметь в виду, что инерционная сила  $m\ddot{U}(t)$ , действующая на пружину, не равна внешней силе  $P(t)$ .

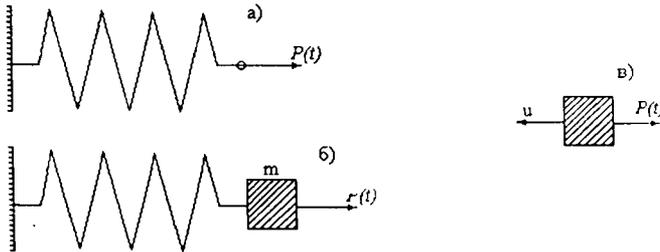


рис. 2.1

Согласно принципу Даламбера, уравнение движения груза в проекции на ось  $U$  (рис. 2.1в) имеет вид:

$$m\ddot{U}(t) + K(1-R^*)U(t) = P(t) \quad (2.5)$$

В отличие от выражения (2.2), соотношение (2.5) представляет собой слабо-сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) относительно функции  $U(t)$ , так как в этом уравнении неизвестные находятся как под знаком интеграла, так и под знаком дифференциала. Для определения этой функции необходимо проинтегрировать ИДУ (2.5). После решения ИДУ (2.5) по функции  $U(t)$  находят внутреннее усилие, напряжение и т. п.

Можно сказать, что в рассматриваемом примере одной функцией  $U(t)$  полностью определяется деформированное состояние в любой момент времени. Подобные системы обладают одной степенью свободы.

К этому же типу относятся системы, показанные на рис 2.2. Характерной координатой для системы I является ордината  $Y$  точечной массы  $m$ , а для системы II - угол поворота  $\varphi$  жесткого тела (в обоих случаях упругие связи считаются лишенными массы).

Системы III-VI имеют две степени свободы. В системе III имеются две сосредоточенные массы, и движение системы полностью определяется двумя функциями:  $y_1=y_1(t)$ ;  $y_2=y_2(t)$ . То же относится и к системе IV.

Для плоской системы V необходимо учесть возможность перемещения точечной массы в двух направлениях, а за координаты удобно принять:  $u=u(t)$ ;  $y=y(t)$ .

Особенностью системы VI является конечность размеров груза, связанного с балкой; в этом случае необходимо учитывать инерцию вращения этого груза, так как в процессе колебаний конец балки будет нагружен не только силой инерции груза, но и моментом сил инерции. Движение системы характеризуется перемещениями  $y=y(t)$  и углом поворота  $\varphi=\varphi(t)$ .

Система VII имеет три степени свободы и ее движения определяются функциями:  $u=u(t)$ ;  $y=y(t)$ ;  $\varphi=\varphi(t)$ .

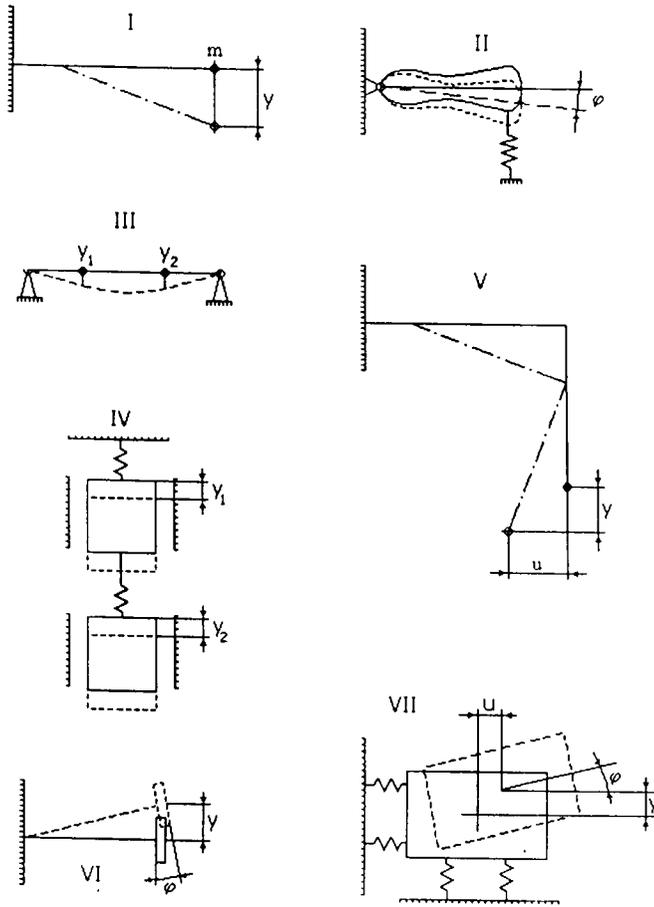


рис. 2.2

### §3. Потенциальная и кинетическая энергия наследственно-деформируемой системы с конечным числом степеней свободы

Пусть рассматривается наследственно-деформируемая система с  $n$  степенями свободы, причем  $U_i$  - обобщенные координаты,  $a_{ik}$  - инерционные коэффициенты и  $c_{ik}$  - коэффициенты жесткости. Согласно вариационному принципу наследственной теории вязкоупругости [8], для потенциальной энергии  $\Pi = \Pi_y - \Pi_v$  имеем:

$$\Pi_y = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N c_{ik} U_i U_k, \quad \Pi_v = \sum_{i,k=1}^N c_{ik} U_i R^* U_k \quad (3.1)$$

, где:  $\Pi_y$  - упругий, а  $\Pi_v$  - вязкоупругий потенциал.  $R^*$  - интегральный оператор Вольтерра типа (2.3).

Кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{U}_i \dot{U}_k \quad (3.2)$$

, где:  $\dot{U}_i$  и  $\dot{U}_k$  - производные от обобщенной координаты или обобщенной скорости.

Имея потенциальную и кинетическую энергию нетрудно составить уравнение движения.

#### §4. Способы составления уравнений движения

Наиболее общей формой уравнения движения является уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial(\Pi - T)}{\partial U_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{U}_i} \right) = \theta_i, \quad i = 1, n \quad (4.1)$$

, где:  $\theta_i$  - обобщенные силы, являющиеся заданными функциями времени (вынужденные силы).

Согласно (3.1) и (3.2), из (4.1) имеем:

$$\sum_{k=1}^n \left[ a_{ik} \ddot{U}_k + c_{ik} (1 - R^*) U_k \right] = \theta_i \quad (4.2)$$

К этим уравнениям следует добавить заданные начальные условия для обобщенных координат  $U_i$  и обобщенных скоростей  $\dot{U}_i$  при  $t=0$ .

Систему линейных обыкновенных ИДУ (4.2) запишем в матричном виде:

$$A\ddot{U} + C(1 - R^*)U = Q(t) \quad (4.3)$$

, где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n(t) \end{pmatrix}$$

Запишем так же выражения для кинетической и потенциальной энергий (3.2) (3.1) в матричном виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{U}^T A \dot{U}, \quad \Pi_y = \frac{1}{2} U^T C U, \quad \Pi_* = U^T C R^* U \quad (4.4)$$

Соответствующим выбором обобщенных координат можно добиться определенных упрощений системы (4.2).

Отметим три важных частных случая:

I. Обобщенные координаты выбраны таким образом, что  $a_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ , тогда:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \dot{U}_k^2 \quad (4.5)$$

и ИДУ (4.2) принимает вид:

$$a_i \ddot{U}_i + \sum_{k=1}^n c_{ik} (1 - R^*) U_k = Q_i(t) \quad (4.6)$$

II. Обобщенные координаты таковы, что выражение потенциальной энергии не содержит произведений координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (U_k^2 - 2U_k R^* U_k) \quad (4.7)$$

, т.е.:

$$c_{ik} = 0 \quad \text{если } i \neq k$$

ИДУ (4.2) записываются в форме:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{U}_k + c_i (1 - R^*) U_i = Q_i(t) \quad (4.8)$$

III. Будем считать матрицу рассматриваемой системы симметричной, т.е.:

$$c_{ij} = c_{ji}$$

Симметричная матрица  $C$  размерности  $n$  имеет  $n$  независимых собственных векторов. Пусть в результате предварительного расчета найдены частоты (собственных чисел) и формы собственных колебаний. Расположим собственные частоты в порядке возрастания  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots \leq \omega_n$ , соответствующие им по форме колебания обозначим:  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ .

Предположим, что для них выполняются соотношения:

$$W_i^T A W_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (4.9)$$

и, соответственно, соотношения:

$$W_i^T C W_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \omega_i^2 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (4.10)$$

Решение уравнения (4.3) будем искать в виде:

$$U(t) = Z_1(t)W_1 + Z_2(t)W_2 + \dots + Z_n(t)W_n$$

или:

$$U(t) = WZ(t) \quad (4.11)$$

, где:

$$W = (W_1, W_2, \dots, W_n), Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))^T$$

Тогда, согласно (4.9) и (4.10), имеем:

$$W^T A W = E, \quad W^T C W = \Omega^2 \quad (4.12)$$

, где:  $E$  - единичная матрица;

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \dots 0 \\ 0 & \omega_2^2 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

Подстановка (4.11) в (4.3) дает равенство:

$$AW\ddot{Z}(t) + C(1 - R^*)WZ(t) = Q(t)$$

, умножая которое на  $W^T$  слева получим:

$$W^T AW\ddot{Z}(t) + W^T C(1 - R^*)WZ(t) = W^T Q(t)$$

Учитывая (4.12), будем иметь:

$$E\ddot{Z}(t) + \Omega^2(1 - R^*)Z(t) = F(t) \quad (4.13)$$

, где:

$$F(t) = W^T Q(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t))^T$$

Система ИДУ (4.13) есть  $n$  распадающихся систем, каждая из которой содержит только одну неизвестную функцию  $Z_i(t)$ . Каждая функция  $Z_i(t)$  может быть найдена интегрированием уравнения:

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2(1 - R^*)Z_i(t) = F_i(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (4.14)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  известно  $U(0)$  и  $\dot{U}(0)$  и, чтобы выполнить интегрирование уравнений (4.14), необходимо выразить через эти матрицы  $Z_i(0)$  и  $\dot{Z}_i(0)$ . Это можно сделать нехотя из равенства (4.11). Умножим его на  $W^T A$  слева. Учитывая, что  $W^T A W$  есть единичная матрица, получим соотношение  $Z(t) = W^T A U(t)$ , из которого вытекает зависимость:

$$Z(0) = W^T A U(0); \quad \dot{Z}(0) = W^T M \dot{U}(0)$$

Отсюда находим требуемые выражения:

$$Z_i(0) = W_i^T A U(0), \quad \dot{Z}_i(0) = W_i^T A \dot{U}(0) \quad (4.15)$$

Это есть один из способов сведения задачи о колебании с  $n$  числом степеней свободы к ряду задач о колебаниях с одной степенью свободы.

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Какова причина возникновения вибрации в механических системах?
2. Что такое фактор времени? Как построить математическую модель решения задач механических систем по принципу Вольтерра?
3. Что такое явление наследственности?
4. Какой процесс называется ползучестью, а какой релаксацией?
5. Почему ядро релаксации и ползучести должны обладать слабо-сингулярными особенностями?
6. Нарисуйте кривую функции ползучести и ядра релаксации.
7. Что такое число степеней свободы механики наследственно-деформируемых систем?
8. Какие уравнения называются интегральными, а какие интегро-дифференциальными?
9. По какой формуле определяются потенциальная и кинетическая энергия наследственно-деформируемых систем?
10. Как вычисляются коэффициенты жесткости и инерции и от каких параметров они зависят?

## Глава II. Свободные колебания наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА с одной степенью свободы.

### §5. Свободные колебания линейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы.

Рассмотрим движение линейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы.

Допустим, что возмущающая сила  $Q(t)$  отсутствует, но состояние равновесия каким-либо образом было нарушено и затем система представлена самой себе. Происходящее в этих условиях движение и представляет собой свободные колебания. Вновь рассмотрим одномассовую систему, показанную на рис. 2.1б. Этот простейший случай типичен для широкого класса систем с одной степенью свободы. Составим ИДУ этих колебаний. Кинетическая энергия  $T$  и потенциальная  $\Pi$  энергия на основании формул (2.1) и (2.2) определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{U}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c (U - 2R^*U)U \quad (5.1)$$

Подставляя эти выражения в уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial(\Pi - T)}{\partial U} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{U}} = 0$$

и учитывая, что:

$$\frac{\partial(\Pi - T)}{\partial U} = c(1 - R^*)U, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{U}} = a\dot{U}$$

, получаем:

$$a\ddot{U} + c(1 - R^*)U = 0, \quad a > 0, \quad c > 0$$

Полагая  $\frac{c}{a} = \omega^2$ , где  $\omega$  - вещественное положительное число, имеем:

$$\ddot{U} + \omega^2(1 - R^*)U = 0 \quad (5.2)$$

Мы получили ИДУ свободных колебаний наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы.

К уравнению (5.2) должны быть добавлены заданные начальные условия при  $t = 0$ :

$$U(0) = q_0, \dot{U}(0) = \dot{q}_0 \quad (5.3)$$

, где  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  - начальное перемещение и начальная скорость.

Из (5.2) при  $R^* \equiv 0$  получим дифференциальное уравнение свободных колебаний идеально-упругой системы, т.е.:

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0 \quad (5.4)$$

К уравнению типа (5.2) и (5.4) приводятся многие задачи о колебаниях внешне совершенно иных наследственно-деформируемых и идеально-упругих систем; подробно рассмотрим их решение сначала в идеально-упругом, затем в вязкоупругом случае.

*1. Решение уравнения в идеально-упругом случае.* Решение уравнения (5.4) можно представить в виде:

$$U = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (5.5)$$

Откуда:

$$\dot{U} = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t$$

Определим постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  из начальных условий (5.3):

$$c_1 = q_0, \quad c_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega}$$

Подставляя значения  $c_1$  и  $c_2$  в (5.5), имеем:

$$U = q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (5.6)$$

или в эквивалентной форме:

$$U = A \sin(\omega t + \beta) \quad (5.7)$$

Тогда:

$$\dot{U} = \omega A \cos(\omega t + \beta)$$

при:

$$t = 0; \quad q_0 = A \sin \beta; \quad \dot{q}_0 = \omega A \cos \beta$$

Откуда:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega q_0}{\dot{q}_0} \quad (5.8)$$

, где:  $A$  - амплитуда колебаний;  $\beta$  - начальная фаза. Частота свободных колебаний  $\omega$ :

$$\omega^2 = \frac{c}{a}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (5.9)$$

Период свободных колебаний системы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (5.10)$$

Из (5.9) и (5.10) видно, что частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий, а зависят лишь от параметров самой системы. Коэффициент инерции  $a$  характеризует инертность механической системы, а коэффициент приведенной жесткости  $a$  - упругие свойства системы. Значения этих коэффициентов для каждой механической системы зависят от выбора обобщенных координат.

Из закона движения (5.7), показанного на рис. 5.1а видно, что движение представляет собой гармонические колебания.

Кроме частоты, все остальные характеристики процесса свободных колебаний существенно зависят от начальных условий. Так, если колебания возникают при условиях, когда груз оттянут от положения равновесия на расстояние  $A$ , а затем отпущен, то:  $A=q_0$ ,  $\dot{q}_0=0$  и, согласно уравнению (5.6), движение происходит по косинусоидальному закону (см. рис. 5.1б)

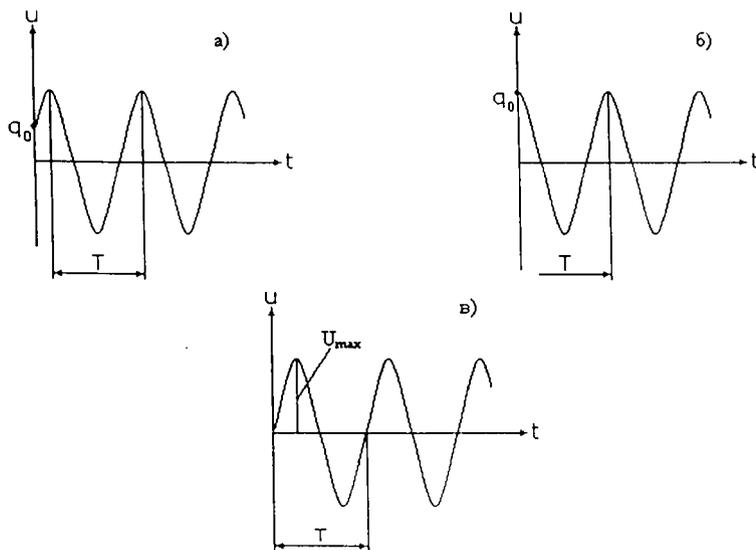


рис. 5.1

Если колебания вызваны мгновенным ударом по грузу, то начальное условие имеет вид:

$$q_0 = 0, \dot{q}_0 = \frac{S}{a}, \text{ где } S - \text{ударный импульс}$$

Второе из начальных условий сформулировано на основании теоремы об изменении количества движения. Согласно решению (5.6) получается, что движение груза происходит по синусоидальному закону (см. рис.5.1в).

$$U = \frac{S}{a\omega} \sin \omega t, \text{ причем } U_{\max} = S/a\omega$$

Полученное решение имеет очевидный недостаток: так как не были учтены неизбежные неупругие сопротивления (трение), получилось, что колебания происходят без затухания. Этот недостаток ниже будет учтен и исправлен, однако уже здесь можно отметить, что влияние этих сопротивлений на собственную частоту, как правило, весьма мало. Поэтому формула (5.9) хорошо согласуется с опытными данными.

*II. Решение слабо-сингулярных ИДУ (5.2)* Решение ИДУ (5.2), удовлетворяющее начальным условиям (5.3), находим методом фундаментальных систем решений [1, 3]. В этой работе доказано, что приведенные ниже функции являются независимыми частными решениями однородного ИДУ (5.2). Следовательно, по аналогии в идеально-упругом случае решения задачи Коши (5.2)-(5.3), его можно представить в виде:

$$U = q_0 c\phi(\omega t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega} s\phi(\omega t) \quad (5.11)$$

, где:

$$c\phi(\omega t) = \cos \omega t + c\bar{\phi}(\omega t); \quad s\phi(\omega t) = \sin \omega t + s\bar{\phi}(\omega t)$$

Функции  $c\bar{\varphi}(\omega t)$ ,  $s\bar{\varphi}(\omega t)$  - соответственно, называются функциями косинуса и синуса дробного порядка и описывают механизм внутреннего трения материала конструкции. Их расположение по фазе противоположно, собственно, функциям и асимптотически стремится к значению амплитуд колебаний идеально-упругой конструкции с незначительным сдвигом частоты колебаний относительно частот идеально-упругих колебаний конструкции (см. рис. 5.2). Для ядра (2.4) они имеют следующий вид:

$$c\bar{\varphi}(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \sum_{i=1}^k (-1)^i C_i^k \frac{\varepsilon_1^i t^{\alpha i}}{\Gamma[\alpha i]} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\beta t)^j \Gamma[2k+1] \Gamma[\alpha i + j]}{j! \Gamma[2k + \alpha i + j]} \quad (5.12)$$

$$s\bar{\varphi}(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^k (-1)^i C_i^k \frac{\varepsilon_1^i t^{\alpha i}}{\Gamma[\alpha i]} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\beta t)^j \Gamma[2k+2] \Gamma[\alpha i + j]}{j! \Gamma[2l + \alpha i + j + 2]}$$

, где:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \Gamma[\alpha], \quad C_i^k = \frac{k!}{i!(k-i)!}, \quad \Gamma[\ ] - \text{гамма функция Эйлера.}$$

Эти функции в [4] табулированы для достаточно большого интервала времени при различных вариациях реологических параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

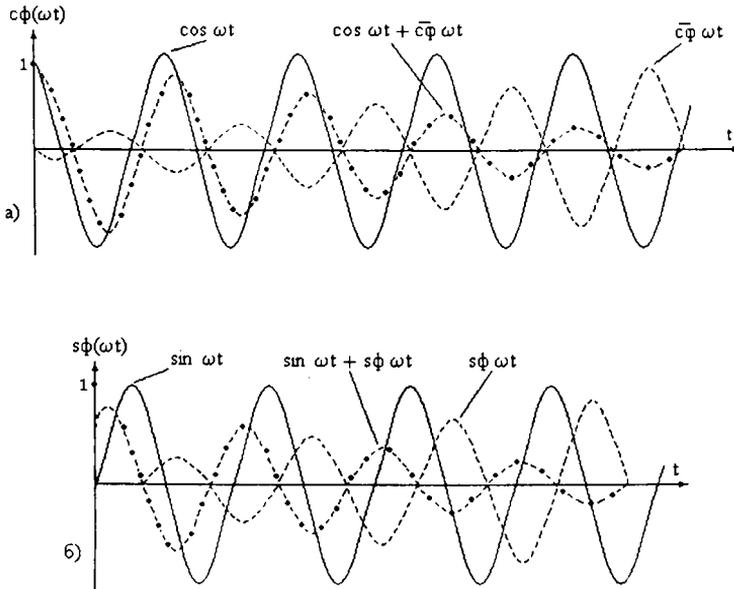


рис. 5.2

Таким образом, учет наследственно-деформируемых свойств материала приводит к затухающим собственным колебаниям, при этом скорость затухания существенно образом зависит от параметра сингулярности  $\alpha$ . Чем меньше параметр сингулярности материала, тем выше скорость затухания собственных колебаний.

Вычислительные эксперименты показали, что влияние параметра затухания  $\beta$  ядра наследственности на скорость затухания, по сравнению с параметром вязкости  $\varepsilon$  и сингулярности  $\alpha$ , оказалось незначительным, что

еще раз подтверждает общеизвестные выводы, что экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкции.

Как видно из рис. 5.2а и 5.2б, частота затухающих колебаний  $\omega$  мало отличается от частоты незатухающих колебаний той же системы, но лишенной наследственно-деформированных свойств материала.

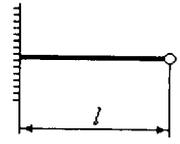
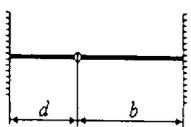
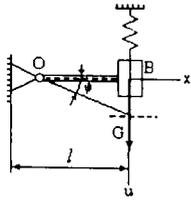
В заключение отметим, что закон движения свободных колебаний наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА с одной степенью свободы существенно зависит от коэффициента инерции  $a$  и коэффициента жесткости  $c$ , которые характеризуют, соответственно, инертность механической системы и жесткостные характеристики материала конструкции.

Значения этих коэффициентов для каждой механической системы зависят от выбора обобщенных координат и способа моделирования элементов конструкции ЛА с одной степенью свободы.

Приведем несколько формул расчета коэффициента жесткости  $c$  и коэффициента инерции  $a$  для некоторых простых систем в таблице 5.1.

**Коэффициенты жесткости  $c$  и инерции  $a$  для некоторых простых систем**

табл. 5.1

№	Схема	Коэффициент $c$	Коэффициент $a$	Обобщенные координаты
1		$\frac{3EI}{l^3}$	$a = m$	$U$
2		$\frac{3EI(a+b)^3}{a^3b^3}$	$a = m$	$U$
3		$\frac{EI\ell^2}{2}$	$a = \frac{G\ell^2}{g} + I_x$ где: $G$ – вес груза $B$	$\varphi$
4		$\frac{\alpha^3 EI c h \alpha l}{\alpha l c h \alpha l - s h \alpha l}$		$U$

*Примечание:*

В приведенных формулах  $EI$  - жесткость при изгибе.

## **§6. Свободные колебания нелинейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы.**

Инженеров-авиастроителей все больше привлекает проблема нелинейной механики. Это вызвано широким распространением в авиастроительстве весьма гибких конструкций (например, висячих и тонкостенных покрытий), а также конструкций из новых композитных материалов, обладающих при любых температурах ярко выраженными нелинейными наследственно-деформированными свойствами.

Помимо расчета на прочность, существенную роль играют расчеты конструкции на жесткость, устойчивость и колебания. В линейной постановке эти вопросы можно назвать более или менее разработанными. Этого нельзя сказать о нелинейной постановке задач. Причина такого положения вещей вполне естественна: нелинейная механика наследственно-деформируемых систем – наука молодая, бурно развивающаяся в настоящее время.

В идеально-упругом случае нелинейная механика начала развиваться с разработки теории колебаний нелинейных систем с одной степенью свободы. Вот почему эта область наиболее полно разработана. Иначе обстоит дело с разработкой теории колебаний наследственно-деформируемых систем. Это связано, прежде всего, со значительной математической трудностью решения слабосингулярных ИДУ.

Рассмотрим свободные колебания нелинейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы. Вновь рассмотрим одномассовую систему показанную на рис. 2.1б.

Кинетическая  $T$  и потенциальная  $\Pi$  энергия системы определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{U}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c \left[ \left( U - \frac{\gamma}{2} \cdot U^3 \right) - 2R^*(U - \gamma U^3) \right] U \quad (6.1)$$

Подставляя эти выражения в уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial U} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0,$$

, учитывая, что:  $L = \Pi - T$ :

$$\frac{\partial L}{\partial U} = c(1 - R^*)(U - \gamma U^3), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = -a\dot{U}$$

, имеем:

$$\ddot{U} + \omega^2(1 - R^*)(U - \gamma U^3) = 0 \quad (6.3)$$

, где:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

$\gamma$  - коэффициент физической нелинейности.

В частности, при  $R^* \equiv 0$ , из (6.3) получим дифференциальное уравнение свободных нелинейных колебаний идеально упругой системы, т.е.:

$$\ddot{U} + \omega^2(U - \gamma U^3) = 0 \quad (6.4)$$

К уравнениям (6.3) и (6.4) должны быть добавлены заданные начальные условия при  $t = 0$ :

$$U(0) = q_0, \quad \dot{U}(0) = q_1$$

В идеально-упругом случае из (6.4) имеем:

$$\ddot{U}(t) + \omega^2 [U(t) - \gamma_1 U^3(t)] = 0$$

или:

$$\ddot{U}(t) + T(t)U(t) = 0 \quad (6.5)$$

, где:

$$T(t) = \omega^2 [1 - \gamma_1 U^2(t)]$$

Уравнение (6.5) далеко не всегда разрешимо в элементарных функциях. Поэтому будем искать приближенно-аналитическое решение уравнения (6.5), используя метод переменного масштаба [5].

В соответствие с этим методом, решением уравнения (6.5) будем считать решение такого дифференциального уравнения, которое, с одной стороны допускает точные решения в элементарных функциях, а с другой стороны, является близким к исходному уравнению (6.5). Это уравнение будем именовать *замещающим уравнением* и искать его решение исходя из возможности преобразования в линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 Z}{dy^2} + Z(y) = 0 \quad (6.6)$$

Введем замены:

$$Z(y) = U(t)\Phi(t), \quad y(t) = \eta(t) \quad (6.7)$$

, где:  $\Phi(t)$  и  $\eta(t)$  - неизвестные пока функции, которые назовем, соответственно, *амплитудной* и *фазовой* функциями.

Дифференцируя дважды первое условие по  $y$  и используя вторую замену (6.7), получаем:

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dy} &= \frac{dZ}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = [\dot{U}(t)\Phi(t) + U(t)\dot{\Phi}(t)]\frac{1}{\dot{\eta}}; \\ \frac{d^2Z}{dy^2} &= \frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{dy}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dZ}{dy}\right)\frac{dt}{dy} = \\ &= \frac{1}{\dot{\eta}^3} [(\ddot{U}\Phi + 2\dot{\Phi}\dot{U} + U\ddot{\Phi})\dot{\eta} - \dot{\eta}(\dot{U}\Phi + U\dot{\Phi})]\end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение, а также первое условие (6.7) в уравнение (6.6), после простых преобразований приходим к заменяющему уравнению:

$$\ddot{U} + \left(2\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\ddot{\eta}}{\eta}\right)\dot{U} + \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \dot{\eta}^2 - \frac{\dot{\eta}\dot{\Phi}}{\dot{\eta}\Phi}\right)U = 0 \quad (6.8)$$

Из сопоставления уравнений (6.5) и (6.8) ясно, что решения их будут одинаковы, если их коэффициенты равны, т.е.:

$$2\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\ddot{\eta}}{\eta} = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} + \dot{\eta}^2 - \frac{\dot{\eta}\dot{\Phi}}{\dot{\eta}\Phi} = T(t) \quad (6.10)$$

Условия (6.9) и (6.10) представляют собой систему двух уравнений, из которых (6.10) является нелинейным. Точное решение этой системы в элементарных функциях невозможно.

Приближенное решение можно получить, если учесть, что для практических задач зачастую имеет место неравенство [5]:

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\dot{\eta}\dot{\Phi}}{\dot{\eta}\Phi} \ll \dot{\eta}^2$$

В этом случае, пренебрегая величинами второго порядка малости, условие (6.10) можно привести к виду:

$$T(t) = \dot{\eta}^2(t) \quad (6.11)$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\eta(t) = \int \sqrt{T(t)} dt + C_1 \quad (6.12)$$

Дифференцируя равенство (6.11) по  $t$  и подставляя значение  $\dot{\eta}(t)$  и  $\dot{\eta}^2(t)$  по формуле (6.11) в условие (6.9), найдем:

$$2 \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - \frac{\dot{T}}{2T} = 0$$

Интегрируя это уравнение, после простых преобразований имеем:

$$\Phi(t) = \sqrt[3]{T(t)} \quad (6.13)$$

В формуле (6.12)  $C_1$  – представляет собой произвольную постоянную интегрирования.

Как известно, решение уравнения (6.6) имеет вид:

$$Z(y) = D \cos y + B \sin y \quad (6.14)$$

, где  $D$  и  $B$  – произвольные постоянные.

Возвращаясь к старым переменным и используя замены (6.7), получаем возможность представить решение (6.14), заменяющего уравнение (6.8) в виде:

$$U(t) = \frac{1}{\Phi(t)} [D \cos \eta(t) + B \sin \eta(t)] \quad (6.15)$$

Отсюда видно, что постоянная интегрирования  $C_1$  может быть любой.

Принимая:

$$C_1 = - \int \sqrt{T(t)} dt \Big|_{t=0}$$

Запишем выражение (6.12) так:

$$\eta(t) = \int_0^t \sqrt{T(\tau)} d\tau \quad (6.16)$$

Пусть для уравнения (6.5) имеем начальные условия:

$$U(0) = A, \dot{U}(0) = 0 \quad (6.17)$$

Тогда согласно (6.7), (6.13) и (6.17), имеем:

$$Z(0) = A^4 \sqrt{\omega^2 - \sigma^2}, \quad \sigma^2 = \gamma_1 \omega^2 A^2, \quad \left. \frac{dZ}{dy} \right|_{t=0} = 0 \quad (6.18)$$

Таким образом, в (6.14):

$$D = A^4 \sqrt{\omega^2 - \sigma^2}, \quad B = 0 \quad (6.19)$$

Следовательно, из (6.15) имеем:

$$U(t) = D \frac{\cos \eta(t)}{\Phi(t)} \quad (6.20)$$

При  $\gamma_1 = 0$  решение линейного уравнения (6.5), удовлетворяющее начальным условиям (6.17):

$$U(t) = A \cos \omega t \quad (6.21)$$

Используя (6.21), из (6.13) и (6.16) будем иметь:

$$\Phi(t) = \sqrt[4]{\omega^2 - \sigma^2} \cos^2 \omega t \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^t \sqrt{\omega^2 - \sigma \cos^2 \omega \tau} d\tau \approx \omega \int_0^t \left( 1 - \frac{\sigma^2}{2\omega^2} \cos^2 \omega \tau \right) d\tau = \\ &= \omega \left[ t - \frac{\sigma^2}{4\omega^2} \left( \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t + t \right) \right] \approx \omega \left( 1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2} \right) t; \quad (6.23) \end{aligned}$$

Подставляя (6.22) и (6.23) в (6.20), получим приближенно-аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения (6.5).

Дифференцируя (6.23), получим частоты нелинейных свободных колебаний идеально-упругих систем с одной степенью свободы.

$$\omega_1^* = \dot{\eta}(t) = \omega \left( 1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2} \right), \quad \sigma^2 = \gamma_1 \omega^2 A^2 \quad (6.24)$$

Как и следовало ожидать, частоты  $\omega_1^*$  нелинейной задачи, в отличие от линейной, зависят от начального условия.

Из (6.22) имеем:

$$\Phi(t) = \sqrt[4]{\omega^2 - \sigma \cos^2 \omega t} \approx \sqrt{\omega} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2} \cos^2 \omega t \right) \quad (6.25)$$

Подставляя (6.24) и (6.25) в (6.28), будем иметь:

$$U(t) = A \frac{1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2}}{1 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2} \cos^2 \omega t} \cos \omega_1^* t \quad (6.26)$$

Здесь следует отметить одно несоответствие, имеющееся в приближенном решении (6.26). Оно состоит в том, что частота дробного множителя и последнего члена ( $\cos \omega_1^* t$ ) имеют различную степень точности (нулевое и первое приближение). Поэтому естественно, что это несоответствие следует устранить, заменив частоту  $\omega$  на  $\omega_1^*$ , определяемую по формуле (6.24). Как показано в [5], такое уточнение соответствует также физике явления.

В окончательном виде приближенное решение нелинейной задачи можно записать так:

$$U(t) = A \frac{\left[ \left( 1 - \frac{\sigma}{2\omega_1^*} \right)^2 \right]}{1 - \left( \frac{\sigma}{2\omega_1^*} \right)^2 \cos^2 \omega_1^* t} \cdot \cos \omega_1^* t \quad (6.27)$$

Отсюда видно, что движение будет квазигармоническим с постоянной амплитудой. Последнее вытекает из того, что при:  $\omega_1^* t = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$  по формуле (6.27) получаем:  $U = A$ .

Если не интересоваться влиянием малой нелинейности на характер движения, т.е. положить в решение (6.27)  $\sigma = 0$ , то оно примет такой же вид (6.21), как для линейной задачи с заменой  $\omega$  на  $\omega_1^*$ .

Согласно [5] решение (6.27) будем называть упрощенным аналитическим решением нелинейного уравнения (6.5). Как показано в этой работе, оно дает удовлетворительную точность.

Точность (по амплитудам) упрощенного решения можно улучшить, если в качестве частот использовать значение между (6.24) и частотами линейных колебаний, т.е. определять их по следующей формуле:

$$\omega_1^* = \omega \left( 1 - \frac{\sigma^2}{8\omega^2} \right) = \omega \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{2\omega} \right)^2 \right]$$

Такое решение в [5] называется скорректированным.

Теперь рассмотрим слабосингулярные ИДУ (6.3), при заданных начальных условиях описывающих нелинейные свободные колебания наследственно-деформируемых систем с одной степенью свободы, точное решение которых представляет значительные математические трудности.

Поэтому разработка новых и усовершенствование существующих методов решений этих уравнений является актуальной проблемой механики наследственно-деформируемых систем. Ниже рассмотрим вопрос о приближенном решении задачи Коши для обыкновенного ИДУ (6.3).

Дважды интегрируя ИДУ (6.3) при заданных начальных условиях, имеем:

$$U(t) = q_0 + q_1 t - \omega^2 \int_0^t (t-S)(1-R^*) [U(S) - \gamma U^3(S)] dS \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) называется нелинейным слабо-сингулярным интегральным уравнением, так как неизвестные функции  $U(t)$  находятся под интегралом, кроме того,  $R(t)$  имеет слабо-сингулярные особенности типа Абеля (2.4).

Для решения уравнения (6.28) используем методику, предложенную в [1]. Рассмотрим сначала доказательство следующей теоремы [6, 7]:

**Теорема 1.** Если  $t = t_n = n\Delta t$ ,  $n=1, 2, \dots$  то, с точностью  $O(\Delta t^2)$ , имеет место равенство:

$$\int_0^{t_n} (t_n - S)(1 - R^*) \varphi(S) dS = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left\{ (t_n - t_j) \varphi_j - \frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^j b_k^{(\alpha)} e^{-\beta t} \varphi_{k-j} \right\} \quad (6.29)$$

или:

$$\int_0^{t_n} \Gamma(t_n - S) \varphi(S) dS = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \Gamma_{n-j} \varphi_j \quad (6.30)$$

, где:

$$a_0 = \frac{\Delta t}{2}, \quad a_j = j\Delta t, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad \varphi(t_j) = \varphi_j, \quad b_0^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^\alpha}{2},$$

$$b_k^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha], \quad b_j^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [j^\alpha - (j-1)^\alpha]$$

$$\Gamma(t_n - S) = t_n - S - \int_0^{t_n - S} (t_n - S - \tau) R(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, j-1},$$

$$\Gamma_{n,j} = t_n - t_j - \frac{A}{\alpha} \sum_{i=1}^m D_i^{(n,i)} \left( t_n - t_j - \tau_i^1 \right) e^{-\mu_i^1} \quad (6.31)$$

$D_i^{(n,j)}$  - веса,  $\tau_i$  - узлы Гаусса.

*Доказательство.* Представив:

$$\int_0^{t_n} (t_n - S)(1 - R^*) \varphi(S) dS = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - S)(1 - R^*) \varphi(S) dS$$

и с помощью замены  $(S - \tau) = Z^1$ , устранив слабо-сингулярные особенности внутреннего интеграла и с последующим использованием квадратурных формул трапеции, убедимся в справедливости формулы (6.29). Аналогичным преобразованием, устранив слабосингулярность внутреннего интеграла правой части (6.30) и с последующим использованием формул Гаусса, получим (6.31). Что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Приближенные решения нелинейного слабо-сингулярного интегрального уравнения (6.28) с точностью  $O(\Delta t^2)$  вычисляются по формуле:

$$U_n = \alpha_0 + \alpha_1 t_n - \omega^2 \sum_{j=0}^{n-1} a_j (t_n - t_j) \left[ (U_j - \gamma U_j^3) - \frac{A}{\alpha} \sum_{k=0}^j b_k^{(\alpha)} e^{-\beta_k} (U_{j-k} - \gamma U_{j-k}^3) \right]$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (6.32)$$

*Доказательство.* Полагая в (6.28)  $t_n = n\Delta t$ ,  $U(t_n) = U_n$ , используя формулу (6.29) при  $\varphi_j = U_j - \gamma U_j^3$ ,  $\varphi_{k,j} = U_{k-j} - \gamma U_{k-j}^3$ , получим формулу (6.32) с точностью  $O(\Delta t^2)$ . Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что алгоритм (6.32) для решения ИДУ (6.28) оказался весьма универсальным, так как с помощью данного алгоритма можно получить численное решение линейных и нелинейных дифференциальных и слабо-сингулярных ИДУ с высокой степенью точности. При необходимости можно повысить точность решения с уменьшением шага по времени  $\Delta t$ .

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Как определяются амплитуда и начальная фаза свободных колебаний системы с одной степенью свободы?
2. От каких параметров зависят частота и период свободных колебаний системы?
3. Каковы основные характеристики свободных колебаний системы с одной степенью свободы?
4. Чем отличается решение задачи свободных колебаний идеально-упругих систем от соответствующих решений задач наследственно-деформируемых систем?
5. От каких реологических параметров больше зависят скорость затухания свободных колебаний наследственно-деформируемых систем?
6. По какой формуле определяются потенциальная и кинетическая энергия в нелинейнонаследственно-деформируемых систем?
7. Чем отличаются частоты колебаний нелинейной задачи от частоты линейной?

### Глава III. Вынужденные колебания наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА с одной степенью свободы.

#### §7. ИДУ вынужденных колебаний линейных наследственно-деформируемых систем с одной степенью свободы

Рассмотрим общий случай движения линейной наследственно-деформируемой системы с одной степенью свободы, когда на точки системы действует возмущающая сила  $f$ .

При наличии возмущающих сил возникают вынужденные колебания системы.

Составим ИДУ вынужденных колебаний наследственно-деформируемой системы, предполагая, что возмущающие силы  $f$  являются некоторыми заданными функциями времени  $t$ , т.е.:  $f=f(t)$ .

Кинетическая энергия  $T$ , потенциальная энергия  $\Pi$  и работы внешних сил  $P$  рассматриваемой системы определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{U}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c (U - 2R^*U)U, \quad P = f(t)U \quad (7.1)$$

Уравнение Лагранжа для рассматриваемой системы имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial U} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0 \quad (7.2)$$

, где:  $L = \Pi - T - P$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = c(1 - R^*)U - f(t), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = -a\dot{U} \quad (7.3)$$

Подставляя (7.3) в (7.2), получим:

$$a\ddot{U} + c(1 - R^*)U = f(t)$$

или:

$$\ddot{U} + \omega^2(1 - R^*)U = q(t) \quad (7.4)$$

, где:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad q(t) = \frac{f(t)}{a}$$

В ИДУ (7.4) необходимо добавить и начальные условия, т.е.:

$$U(0) = \alpha_0, \quad \dot{U}(0) = \alpha_1 \quad (7.5)$$

Общее решение дифференциального уравнения (7.4) при  $R^* = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям (7.5), имеет вид:

$$U_{yn} = \alpha_0 \cos \omega t + \frac{\alpha_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (7.6)$$

Согласно методу фундаментальных систем решений, общим решением ИДУ (7.4) (т.е., при  $R^* \neq 0$ ), удовлетворяющим начальным условиям (7.5), будет [1]:

$$U_{by} = \alpha_0 Y_1(t) + \frac{\alpha_1}{\omega} Y_2(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t q(\tau) Y_2(t - \tau) d\tau \quad (7.7)$$

, где:

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= c\bar{\phi}(\omega t) = \cos \omega t + c\bar{\bar{\phi}}(\omega, t) \\ Y_2(t) &= s\bar{\phi}(\omega t) = \sin \omega t + s\bar{\bar{\phi}}(\omega, t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

, где:  $c\bar{\bar{\phi}}(\omega, t)$  и  $s\bar{\bar{\phi}}(\omega, t)$  - соответственно: функции косинуса и синуса дробного порядка.

При качественном исследовании свободных колебаний было показано, что функции  $Y_1(t) = c\phi(\omega t)$ ,  $Y_2(t) = s\phi(\omega t)$  описывают затухающие колебательные процессы (см. рис. 5.2а и рис. 5.2б). Теперь приведем качественные исследования вынужденных колебаний наследственно-деформируемых систем. Предположим, что  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  и система подвергается внешнему воздействию, произвольно зависящему от времени функции  $q = q(t)$ . Тогда из (7.7) имеем:

$$U_{by} = \frac{1}{\omega} \int_0^t q(\tau) Y_2(t - \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t Z(t - \tau) q(\tau) d\tau \quad (7.9)$$

, где:

$$Z(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t Y_2(\tau) d\tau, \quad Z(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = 0$$

Из (7.10) будем иметь:

$$Z(t) = \frac{1}{\omega^2} \frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t - \tau) [1 - Y_1(\tau)] d\tau \quad (7.11)$$

, где  $\Pi(t) = 1 + \int_0^t \Gamma(t - \tau) d\tau$  - есть функция ползучести.

Подставляя (7.11) в (7.9), получим:

$$U_{by} = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t - \tau) q(\tau) d\tau - q(0) \frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t - \tau) Y_1(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^t q(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \int_0^t \Pi(\tau - S) Y_1(S) dS \right\} \quad (7.12)$$

В выражении (7.12) первое слагаемое представляет собой перемещение, которое было бы вызвано силой  $q(t)$  при квазистатических нагрузках, второе - свободное колебание от начального толчка в результате внезапно приложенной силы, а третье слагаемое - есть та

динамическая поправка, которая вызывается изменением действующей силы во времени.

Точное решение (7.12) позволяет обнаружить ряд новых механических эффектов, которые не могут быть установлены никакими численными и приближенно-аналитическими методами. В самом деле, предположим, что система подвергается внешнему воздействию интенсивности  $q(t) = q_0 \text{const}$ , тогда решение (7.12) принимает вид:

$$\bar{U}_{by} = \Pi(t) - \frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t - \tau) [\cos \omega \tau + c \bar{\varphi} \omega \tau] d\tau \quad (7.13)$$

В идеально-упругом случае из (7.6) имеем:

$$\bar{U}_{yn} = 1 - \cos \omega t \quad (7.14)$$

, где:

$$\bar{U}_{by} = \frac{U_{by} \omega^2}{q_0}, \quad \bar{U}_{yn} = \frac{U_{yn} \omega^2}{q_0}$$

Не трудно доказать, что это функция:

$$Y(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) [\cos \omega \tau + c \bar{\varphi} \omega \tau] d\tau$$

имеет конечный предел при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.:  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = M_0$ , что является достаточным условием:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} Y(t) = 0$$

Все эти утверждения показывают, что функция (7.13) описывает затухающий процесс около кривой  $\Pi(t)$ , характеризующей изменение функции ползучести во времени (см. рис. 7.1).

Таким образом, из качественной картины, представленной на рис. 7.1, видно, что колебания наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА (фюзеляж, крыла, обшивка крыла и др.) под действием постоянной внешней нагрузки происходит около кривой функции ползучести и затухает с течением времени по этой кривой. Такой эффект невозможно обнаружить с помощью решения (7.14), полученного в идеально-упругом приближении задачи, так как оно описывает незатухающие гармонические колебания, с максимальной амплитудой равной 2.

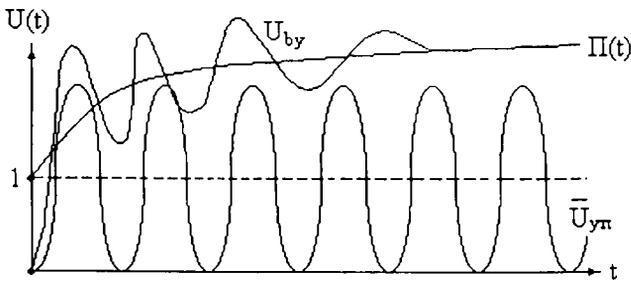


рис. 7.1

В заключение следует отметить, что данные примеры могут служить тестом для проверки любого численного метода решения слабо-сингулярных ИДУ.

### §8. Вынужденные гармонические колебания

Рассмотрим колебания системы при действии гармонической возмущающей силы  $q(t)=f_0 \sin \theta t$  Уравнение (7.4) в этом случае имеет вид:

$$\ddot{U} + \omega^2(1 - R^*)U = q_0 \sin \theta t \quad (8.1)$$

, где:  $q_0 = \frac{f_0}{a}$ ,

$$R^*U = \int_{-\infty}^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau \quad (8.2)$$

В (8.2) для упрощения задачи за нижний предел интеграла взята:  $-\infty$ .  
Общее решение ИДУ (8.1) складывается из решения неоднородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. С течением времени решения, однородного уравнения затухают и остаются установившиеся гармонические колебания с постоянной амплитудой  $B$  с частотой возмущающей силы  $Q(t)$ .

Частное решение ИДУ (8.1) ищем в виде:

$$U = B_1 \cos \theta t + B_2 \sin \theta t = B \sin (\theta t + \alpha) \quad (8.3)$$

, где:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad \alpha = -\arctg \frac{B_1}{B_2}$$

,  $B_1$  и  $B_2$  - неопределенные множители.

Подставляя (8.3) в (8.1) и используя интегральные тождества, получим:

$$\begin{aligned} R^*U &= B_1 \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \cos \theta \tau \, d\tau + B_2 \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \sin \theta \tau \, d\tau = \\ &= (R_C B_1 - R_S B_2) \cos \theta t + (R_S B_1 + R_C B_2) \sin \theta t \end{aligned} \quad (8.4)$$

, где:

$$\begin{aligned} R_C &= \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \theta \tau \, d\tau = A \frac{\Gamma(\alpha) \cos \alpha \varphi}{(\beta^2 + \theta^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad R(\tau) = A e^{-\beta \tau} \tau^{\alpha-1} \\ R_S &= \int_0^{\infty} R(\tau) \sin \theta \tau \, d\tau = A \frac{\Gamma(\alpha) \sin \alpha \varphi}{(\beta^2 + \theta^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\theta}{\beta}, \end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned} \{[\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]B_1 + \omega^2 R_S B_2\} \cos \theta t + \{-\omega^2 R_S B_1 + \\ + [\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]B_2\} \sin \theta t = q_0 \sin \theta t \end{aligned} \quad (8.5)$$

Отсюда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} [\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]B_1 + \omega^2 R_S B_2 &= 0 \\ -\omega^2 R_S B_1 + [\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]B_2 &= q_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Решая систему алгебраических уравнений (8.6), находим:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-\omega^2 R_S q_0}{[\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]^2 + [\omega^2 R_S]^2}; \\ B_2 &= \frac{[\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]q_0}{[\omega^2(1 - R_C) - \theta^2]^2 + [\omega^2 R_S]^2}; \end{aligned}$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{q_0}{\sqrt{[(1 - R_c) - \bar{\theta}^2]^2 + R_s^2}};$$

$$\alpha = \arctg \frac{R_s}{1 - R_c - \bar{\theta}^2}; \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\omega} \quad (8.7)$$

Амплитуда колебаний  $B$  становится максимальной при частоте возбуждения, равной:

$$\bar{\theta}_p = \sqrt{1 - R_c} \quad (8.8)$$

Как видно из формулы (8.8), при силовом возбуждении колебаний эта частота меньше собственной частоты.

Максимальная амплитуда и угол сдвига фазы при частоте  $\theta = \theta_p$ :

$$U_{\max} = B_X = \frac{q_0}{\omega^2 R_s}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (8.9)$$

На рис. 8.1а показана зависимость от частоты возбуждения коэффициента динамичности, представляющего собой отношение амплитуды колебаний к статистическому отклонению под действием силы  $q_0$  ( $\lambda = B/U_{CT}$ ,  $U_{CT} = q_0/\omega^2$ ) [9]. На рис. 8.1б показано изменение угла отставания по фазе.

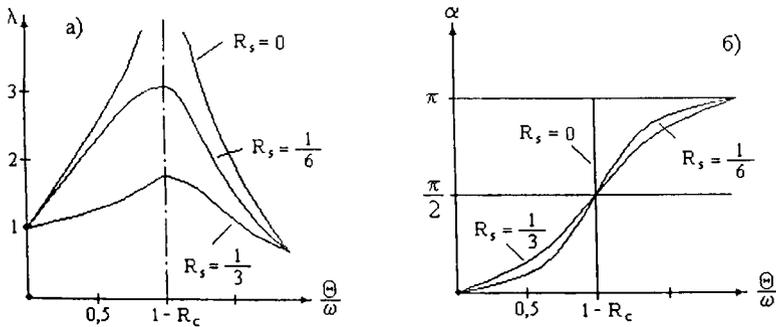


рис. 8.1

### § 9. Кинематически возбуждаемые нелинейные колебания наследственно-деформируемого консольного элемента летательного аппарата (ЛА) с одной степенью свободы

*Определение 1.* Если колебания системы вызываются не заданными силами, а возникают благодаря приведению в движение по заданному закону для одной или нескольких точек системы; то возмущения называются кинематическими.

Рассмотрим кинематически возбуждаемые колебания наследственно-деформируемого крыла под действием периодической нагрузки. Источником этой нагрузки служит работа двигательной установки ЛА.

При кинематическом возбуждении предположим, что точка подвеса  $O$  крыла совершает периодические движения т.е.:  $U^*(t) = a \cos \omega t$

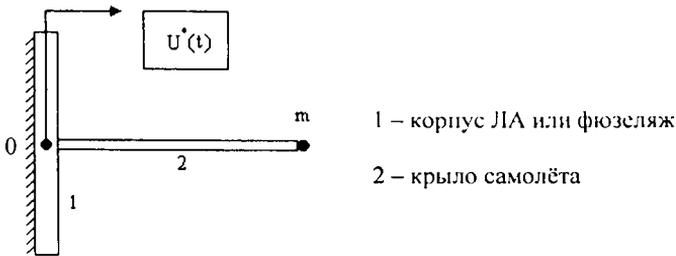


рис. 9.1

В качестве расчётной схемы, крыло берём как нелинейный наследственно-деформируемый консольный стержень (рис. 9.1), несущий сосредоточенную массу  $m$ , при этом вертикальными перемещениями и поворотами массы пренебрегаем. Тогда нелинейные колебания наследственно-деформируемого консольного крыла с одной степенью свободы описываются интегро-дифференциальным уравнением (ИДУ) осциллятора.

$$m \left[ \ddot{U}(t) + \dot{U}(t) \right] + k(1 - R^*) [U(t) + \gamma U^3(t)] = 0 \quad (9.1)$$

, где:  $k$  - приведённая жесткость крыла,  $R^*$  - интегральный оператор Вольтерра, т.е.:

$$R^* F(t) = \int_0^t R(t-\tau) F(\tau) d\tau \quad (9.2)$$

- для переходного процесса:

$$R^* F(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) F(\tau) d\tau \quad (9.3)$$

- для установившегося процесса:

$$R(t-\tau) = \varepsilon e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- ядра наследственности, имеющей слабо-сингулярную особенность типа Абеля.

Если крыло трактовать как консольную каркасную конструкцию, то приведённая жесткость  $k$  согласно рис. 9.2 определяется по формуле [19]

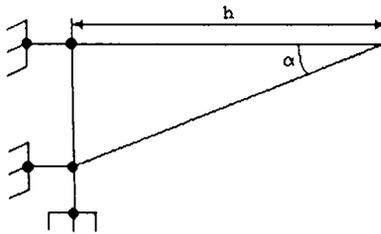


рис. 9.2

$$k = \frac{nEF \sin^2 \alpha \cos \alpha}{h(1 + \cos^2 \alpha)} \quad (9.4)$$

, где:  $n$  - число панелей со сложными раскосами в плоскости кинематического воздействия, при этом принимается, что консоль и сжатые раскосы имеют одинаковую площадь сечения, равную  $F$ ;  $E$  - модуль упругости материала конструкции.

Полагая, что:  $t = \sqrt{\frac{k}{m}} \bar{t}$ , напомним уравнение (9.1) в безразмерных координатах:

$$\ddot{U}(t) + (1 - R^*)[U(t) + \gamma U^3(t)] = -\dot{U}^*(t) = q \cos \omega t \quad (9.5)$$

В случае переходного процесса, к ИДУ (2) необходимо добавить начальные условия:

$$U(0) = \alpha_0, \quad \dot{U}(0) = \bar{\alpha}_1 \quad (9.6)$$

В случае установившегося процесса ИДУ решается без начального условия, т.е. предполагается, что движение системы происходит в течение весьма длительного времени, так что начальные условия уже не влияют на движение системы,  $\gamma$  - параметр нелинейности ( $\gamma < 0$  для мягкого, а  $\gamma > 0$  для жесткого материала).

**Определение 2.** Если задача решается без начальных условий, то колебания всяких механических систем, вызванные только внешним воздействием, называются чисто вынужденными колебаниями. Например: установившиеся колебания всяких механических систем, вызванные периодической внешней нагрузкой, относятся к чисто вынужденным колебаниям.

Сначала исследуем переходной процесс, возникающий при колебаниях консольного крыла.

Уравнение (9.5) при  $R^* = 0$  перепишем в виде:

$$\dot{U}(t) + T(t)U(t) = f(t) \quad (9.7)$$

, где:

$$T(t) = 1 + \gamma U^2(t), \quad f(t) = q_0 \cos \omega t$$

I. Рассмотрим решение уравнения (9.7) при начальных условиях (9.6) методом степенного ряда.

Предположим, что функция  $f(t)$  представлена в виде сходящегося степенного ряда, т.е.:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad (9.8)$$

, где:  $f_i$  - известные константы.

Тогда, согласно методе степенного ряда, решение уравнения (9.7) ищется в виде:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (9.9)$$

, где:  $a_k$  - неизвестные константы, подлежащие определению. Первые две константы  $a_1$  и  $a_2$  находятся сразу же из начальных условий (9.6), т.е.:

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_1 = \alpha_1$$

Согласно (9.9), функцию  $T(t)$  можно представить в виде:

$$T(t) = 1 + \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k t^k, \quad \vartheta_k = \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i} \quad (9.10)$$

Дифференцируя (5.52), будем иметь:

$$\dot{U}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}, \quad \ddot{U}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} \quad (9.11)$$

или:

$$\check{U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} t^k \quad (9.12)$$

Подставляя (9.8) - (9.12) в (9.7) и используя известные формулы умножения степенных рядов, т.е.:

$$T(t)U(t) = \sum \left[ a_k + \gamma \sum_{j=0}^k \vartheta_j a_{k-j} \right] t^k \quad (9.13)$$

будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ (k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k + \gamma \sum_{j=0}^k \vartheta_j a_{k-j} \right] t^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad (9.14)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t^k$ , из (9.14) будем иметь:

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k + \gamma \sum_{j=0}^k \vartheta_j a_{k-j} = f_k$$

или:

$$a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[ f_k - a_k - \gamma \sum_{j=0}^k \left( \sum_{i=0}^j a_i a_{j-i} \right) a_{k-j} \right] \quad (9.15)$$

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_1 = \alpha_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рекуррентные формулы (9.15) при известных:  $f_k$ ,  $a_0 = \alpha_0$ ,  $a_1 = \alpha_1$  позволяют последовательно определять все коэффициенты  $a_k$ ,  $k=2, 3, \dots$

Подставляя найденные значения  $a_k$  в (9.9), получим решения уравнения (9.7), удовлетворяющее начальным условиям (9.6).

II. Теперь рассмотрим метод, основанный на использовании квадратурных формул к решению уравнения (9.7) при начальных условиях (9.6).

Интегрируя уравнения (9.7) от 0 до  $t$ , получим:

$$\dot{U}(t) - U(0) + \int_0^t T(t)U(t)dt = \int_0^t f(t)d\tau$$

или согласно (9.6):

$$\dot{U}(t) + \int_0^t T(t)U(t)dt = \int_0^t f(t)d\tau + \alpha_1 \quad (9.16)$$

Применяя то же самое к (9.16), будем иметь:

$$U(t) - U(0) + \int_0^t \int_0^t T(t)U(t)dt\alpha t = \int_0^t \int_0^t f(t)dt\alpha t + \alpha_1 t$$

или:

$$U(t) + \int_0^t \int_0^t T(t)U(t)dt\alpha t = \int_0^t \int_0^t f(t)dt\alpha t + \alpha_1 t + \alpha_0 \quad (9.17)$$

Как известно из математического анализа:

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \phi(t)dt\dots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau)d(\tau)$$

и поэтому уравнение (9.17) принимает вид:

$$U(t) + \int_0^t (t-\tau)T(\tau)U(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0$$

или:

$$U(t) + \int_0^t (t-\tau)T(\tau)U(\tau)d\tau = F(t) \quad (9.18)$$

, где:

$$F(t) = \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0$$

При фиксированных значениях  $t = t_n = nh, n = 1, 2, \dots$ , введя обозначения:

$$U(t_n) = U_n, \quad F(t_n) = F_n$$

из (9.18) будем иметь:

$$U_n = F_n - \int_0^{t_n} (t_n - \tau) T(\tau) U(\tau) d\tau$$

или:

$$U_n = F_n - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - \tau) T(\tau) U(\tau) d\tau \quad (9.19)$$

Интеграл, входящий в (9.19), вычислим по формуле трапеций, т.е.:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_n - \tau) T(\tau) U(\tau) d\tau = \frac{h}{2} [(t_n - t_i) T_i U_i + (t_n - t_{i-1}) T_{i-1} U_{i-1}]$$

и получим:

$$U_n = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i (t_n - t_i) T_i U_i \quad (9.20)$$

$$A_i = \frac{t_1 - t_0}{2} = \frac{h}{2}, \quad A_i = h, \quad i = \overline{2, n-1}$$

Рекуррентные формулы (9.20) позволяют последовательно найти численные значения:

$$U(t_1) = U_1, \quad U(t_2) = U_2 \dots \quad U(t_n) = U_n$$

Методика, изложенная в п.1 и п.2, без особого труда может быть обобщена для решения нелинейного ИДУ второго порядка вида (9.5), т.е.:

$$\ddot{U}(t) + (1 - R^*)[U(t) + \gamma U^3(t)] = f(t) \quad (9.21)$$

с начальными условиями типа (9.6)

Метод степенных рядов применим для решения ИДУ вида (9.21), если функции  $R(t - \tau)$  и  $f(t)$  можно представить в виде сходящегося степенного ряда, т.е.:

$$R(t - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k (t - \tau)^k, f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad (9.22)$$

В самом деле, нетрудно доказать, что имеет место тождество:

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} R_k (t - \tau)^k \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=1}^k a_{s-1} R_{k-s} B(k - s + 1, s) \right) t^k \quad (9.23)$$

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} R_k (t - \tau)^k \sum_{k=0}^{\infty} C_k \tau^k d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=1}^k C_{s-1} R_{k-s} B(k - s + 1, s) \right) t^k$$

, где:

$$C_k = \sum_{j=0}^k \left( \sum_{i=0}^j a_i a_{j-i} \right) a_{k-j}, B(k - s + 1, s) = \frac{(k - s)!(s - 1)!}{k!}$$

Подставляя (9.9), (9.10) и (9.22) в (9.21) и используя тождество (9.23), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k + 2)(k + 1)a_{k+2} + [(a_k + \gamma C_k) - \sum_{s=1}^k (a_{s-1} + \gamma C_{s-1}) R_{k-s} B(k - s + 1, s)] \right\} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad (9.24)$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенных  $t$ , получим следующие рекуррентные формулы для определения неизвестных коэффициентов  $a_k$ :

$$a_{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[ f_k - \left[ a_k + \gamma C_k - \sum_{s=1}^k (a_{s-1} + \gamma C_{s-1}) B(k-s+1, s) \right] \right] \quad (9.25)$$

, где:

$$a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1$$

Вычисляя  $a_k$  по формулам (9.25) и подставляя в (9.9), получим точные решения ИДУ (9.21) при начальных условиях (9.6)

Теперь рассмотрим решение ИДУ (9.21) методом, основанным на устранении слабосингулярных особенностей интегральных ИДУ [1] при начальных условиях (9.6).

Дважды интегрируя ИДУ (9.25) при начальных условиях (9.6), имеем:

$$U(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \int_0^t (t-\tau) \left\{ q \cos \omega \tau - \left[ U(\tau) + \gamma U^3(\tau) \right] + \int_0^\tau R(\tau-s) \left[ U(s) + \gamma U^3(s) \right] ds \right\} d\tau \quad (9.26)$$

Уравнение (9.26) называется слабо-сингулярным интегральным уравнением, так как неизвестные функции  $U(t)$  находятся под интегралом, кроме того,  $R(t)$  имеет слабо-сингулярные особенности типа Абеля.

Для решения уравнения (9.26) используем методику, предложенную в §8. Задавая:

$$t = t_n = n\Delta t, \quad R(t) = \varepsilon e^{-\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и введя обозначения:  $\mathfrak{U}(t_n) = \mathfrak{U}_n$ , из (9.26) имеем:

$$U_n = \alpha_0 + \alpha_1 t_n + \int_0^{t_n} (t_n - \tau) \left\{ q \cos \omega \tau - [U(\tau) + \gamma U^3(\tau)] + \int_0^\tau R(\tau - s) [U(s) + \gamma U^3(s)] ds \right\} d\tau \quad (9.27)$$

Используя рациональные преобразования, предложенные в [1], устраняющие слабо-сингулярные особенности интеграла, из (9.27) имеем:

$$U_n = \alpha_0 + \alpha_1 t_n + \sum_{j=0}^{n-1} A_j (t_n - t_j) \left[ q \cos \omega t_j - [U_j + \gamma U_j^3] + \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} [U_{j-k} + \gamma U_{j-k}^3] \right]$$

, где:

$$A_0 = \frac{\Delta t}{2}, \quad A_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}, \quad U(t_n) = U_n,$$

$$B_k = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha] \quad k=1, \quad j=1, \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha}{2} (j^\alpha - (j-1)^\alpha), \quad k=j$$

Создано математическое обеспечение для численной реализации алгоритмов расчёта. Расчёт произведён как идеально-упругого ( $\varepsilon = 0$ ), так и вязкоупругого крыла при следующих исходных данных:

$$\alpha_0 = 0.5, \quad \alpha_1 = 0, \quad \varepsilon = 0.4, \quad \alpha = 0.1, \quad \beta = 0.05, \quad \omega = 0, \quad q = 0.07$$

На рис 9.3а и 9.3б приведён закон движения функции  $U(t)$  во времени как для идеально-упругого линейного и нелинейного ( $\gamma = -2$ ) (рис.9.3а), так и для наследственно-деформируемого крыла (рис. 9.3б). Из этих рисунков следует, что при свободных колебаниях учет нелинейности материала конструкции влияет только на частоту и период колебаний. На рис. 9.4 приведены аналогичные результаты для вынужденных колебаний крыла. Как и следовало ожидать, колебания наследственно-деформируемого крыла при постоянной нагрузке (рис.9.4а, 9.4б) будут происходить около кривой функции ползучести и с течением времени затухают по этой кривой. Учет нелинейности материала крыла при постоянной нагрузке приводит (рис 9.4в) к завышенному результату по амплитудам колебаний по сравнению с линейным случаем.

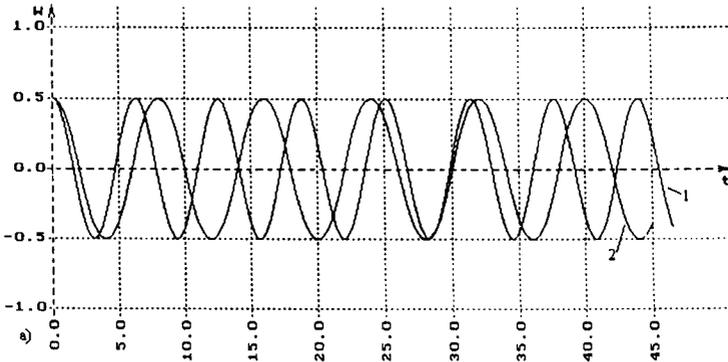


рис. 9.3 а)  $\gamma = 0.0$  ;  $\gamma = -2.0$ ; *собст.*

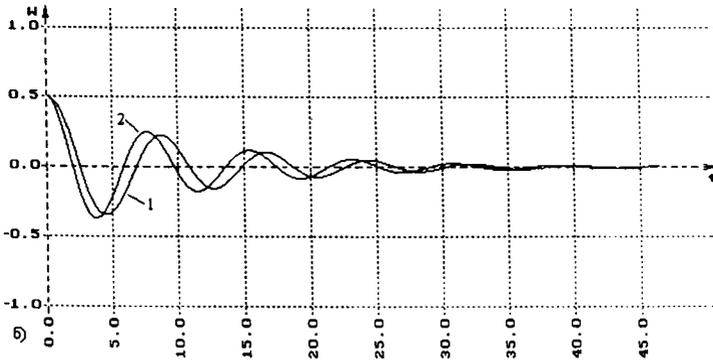


рис. 9.3 б)  $gam = 0.0$ ;  $gam = -2.0$ ; *собст., вяз.*

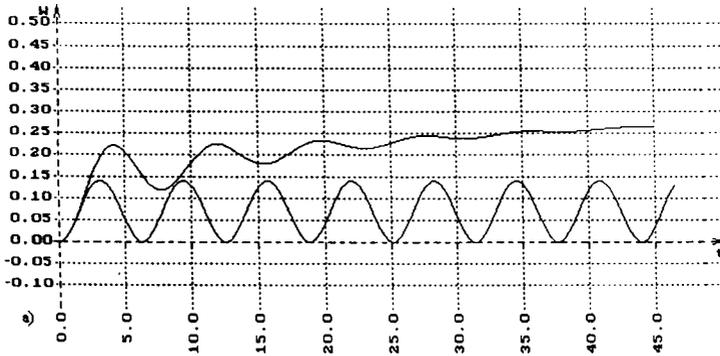


рис. 9.4 а)  $eps = 0.0$ ;  $eps = 0.1$ ; *вынуж., линейн.*

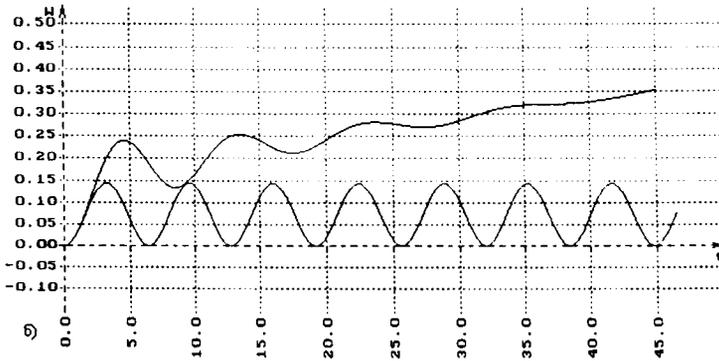


рис. 9.4 б)  $\text{eps} = 0.0$ ;  $\text{eps} = 0.1$ ;  $q = 0.07$ ; вынуж., нелинейн.

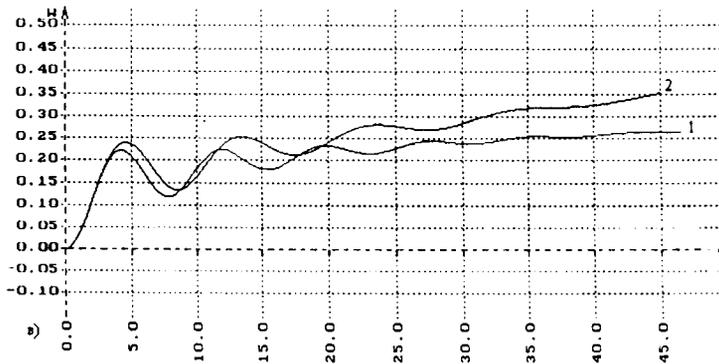


рис. 9.4 в)  $\text{gat} = 0$ ;  $\text{gat} = -2$ ;  $q = 0.07$ ; вынуж., вяз.

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Какой вид имеет интегро-дифференциальное уравнение вынужденных колебаний наследственно-деформируемых систем с одной степенью свободы?
2. Что представляет собой каждое из слагаемых общего решения интегро-дифференциального уравнения вынужденных колебаний?
3. Какие новые механические эффекты установлены с помощью решения интегро-дифференциальных уравнений вынужденных колебаний?
4. Какой вид имеет интегро-дифференциальное уравнение гармонических колебаний наследственно деформируемых систем с одной степенью свободы?
5. По какой формуле определяется максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний наследственно деформируемых систем при гармонических нагрузках?
6. Каковы графики амплитуды и фазы при гармонических воздействиях на наследственно-деформируемую систему с одной степенью свободы?
7. Какие возмущения называются кинематическими?

8. Какой вид имеют интегро-дифференциальные уравнения кинематически возбуждаемые нелинейные колебания наследственно-деформируемого консольного элемента летательного аппарата с одной степенью свободы?
9. Какие колебания механических систем называются чисто вынужденными?
10. Какой вид имеет алгоритм метода степенного ряда для решения нелинейного дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы?
11. Какой вид имеет алгоритм метода степенного ряда для решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы?
12. Какой вид имеет алгоритм метода устранения слабо-сингулярных особенностей интегральных и интегро-дифференциальных уравнений для решения нелинейного интегрально-дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы?

## Глава IV. Свободные колебания наследственно-деформируемых элементов конструкции ЛА с двумя степенями свободы.

### § 10. Интегро-дифференциальные уравнения свободных колебаний

Рассмотрим свободные колебания наследственно-деформируемой системы, имеющей две степени свободы, положения которой определяется двумя координатами  $U_1$  и  $U_2$ , отсчитываемыми от положения устойчивого равновесия системы.

Согласно вариационному принципу наследственной теории вязкоупругости [8], кинетическая энергия  $T$  и потенциальная энергия  $\Pi$  рассматриваемой системы определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{U}_1^2 + 2a_{12}\dot{U}_1\dot{U}_2 + a_{22}\dot{U}_2^2); \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}[c_{11}U_1(U_1 - 2R^*U_1) + c_{12}U_1(U_2 - 2R^*U_2) + \\ & + c_{21}U_2(U_1 - 2R^*U_1) + c_{22}U_2(U_2 - 2R^*U_2)] \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial U_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial U_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_2} = 0; \quad (10.2)$$

, где:  $L = \Pi - T$

Подставляя в уравнения Лагранжа значения  $T$  и  $\Pi$ , получим ИДУ свободных колебаний наследственно-деформируемой системы с двумя степенями свободы в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{U}_1 + a_{12}\ddot{U}_2 + c_{11}(1 - R^*)U_1 + c_{12}(1 - R^*)U_2 &= 0; \\ a_{21}\ddot{U}_1 + a_{22}\ddot{U}_2 + c_{21}(1 - R^*)U_1 + c_{22}(1 - R^*)U_2 &= 0; \end{aligned} \quad (10.3)$$

где:  $a_{12}=a_{21}$  и  $c_{12}=c_{21}$

Из свойств определенности и положительности квадратичных форм (10.1) следует, что коэффициенты инерции и жесткости должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} a_{11} > 0; \quad a_{22} > 0; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0; \\ c_{11} > 0; \quad c_{22} > 0; \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0; \end{aligned}$$

Соответствующим выбором обобщенных координат можно добиться определенных упрощений системы (10.3).

Отметим два важных частных случая:

I. Обобщенные координаты выбраны таким образом, что  $a_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ , тогда:

$$T = \frac{1}{2}(a_1\dot{U}_1^2 + a_2\dot{U}_2^2);$$

и ИДУ (10.3) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1\ddot{U}_1 + c_{11}(1 - R^*)U_1 + c_{12}(1 - R^*)U_2 &= 0; \\ a_2\ddot{U}_2 + c_{22}(1 - R^*)U_1 + c_{22}(1 - R^*)U_2 &= 0; \end{aligned} \quad (10.4)$$

II. Обобщенные координаты таковы, что выражение потенциальной энергии не содержит произведений координат:

$$П = \frac{1}{2} [c_1(U_1 - 2R^*U_1)U_1 + c_2(U_2 - 2R^*U_2)U_2]$$

т.е.:  $c_{ik} = 0$  если  $i \neq k$

ИДУ (10.3) записывается в форме:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{U}_1 + a_{12}\ddot{U}_2 + c_1(1 - R^*)U_1 &= 0; \\ a_{21}\ddot{U}_1 + a_{22}\ddot{U}_2 + c_2(1 - R^*)U_2 &= 0; \end{aligned} \tag{10.5}$$

Первая форма уравнений (10.4) называется прямой, а вторая форма (10.5) – обратной. Прямая форма характеризуется тем, что в каждое ИДУ входит только по одному члену, содержащему обобщенное ускорение  $\ddot{U}_i$ ; в противоположность этому – в каждое из уравнений, записанных в обратной форме, входит только по одному члену, содержащему обобщенную координату  $U_i$ .

Если поперечное сечение крыла представить как неупруго закрепленную, удлиненную пластину постоянной толщины, то свободные изгибно-крутильные колебания этой пластины будут выражены ИДУ вида (10.4).

Если же крыло трактовать как наследственно-деформируемый консольный стержень переменного сечения с учетом реального профиля крыла, то свободные изгибно-крутильные колебания этого стержня будут выражены ИДУ вида (10.5).

### §11. Приведение системы ИДУ к главным координатам

Приведем систему (10.3) к главным координатам, пользуясь свойством систем линейных однородных уравнений, заключающемся в том, что члены уравнений системы могут быть умножены на один и тот же множитель без нарушения системы.

Умножая первые уравнения системы (10.3) на множитель  $k$  и складывая со вторым уравнением, будем иметь:

$$(a_{11}k + a_{21})\ddot{U}_1 + (c_{11}k + c_{21})(1 - R^*)U_1 + (a_{12}k + a_{22})\ddot{U}_2 + (c_{12}k + c_{22})(1 - R^*)U_2 = 0;$$

Представим это равенство как:

$$(a_{11}k + a_{21})(\ddot{U}_1 + \frac{a_{12}k + a_{22}}{a_{11}k + a_{21}}\ddot{U}_2) + (c_{11}k + c_{21})[(1 - R^*)U_1 + \frac{c_{12}k + c_{22}}{c_{11}k + c_{21}}(1 - R^*)U_2] = 0; \quad (11.1)$$

Пусть имеют место равенства:

$$\frac{a_{12}k + a_{22}}{a_{11}k + a_{21}} = \frac{c_{12}k + c_{22}}{c_{11}k + c_{21}} = \mu = const \quad (11.2)$$

Обозначим:

$$U_1 + \mu U_2 = z \quad (11.3)$$

Тогда:

$$\ddot{U}_1 + \mu \ddot{U}_2 = \ddot{z} \quad (11.4)$$

Следовательно, выражение (11.1) можно записать следующим образом:

$$\ddot{z} + \omega^2(1 - R^*)z = 0 \quad (11.5)$$

, где через  $\omega$  обозначена частота свободных колебаний, равная:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}k + c_{21}}{a_{11}k + a_{21}}} = \sqrt{\frac{c_{12}k + c_{22}}{a_{12}k + a_{22}}} \quad (11.6)$$

Здесь второе выражение получено из равенства (11.2).

Таким образом, координата  $z$ , определяемая по формуле (11.3), является главной.

Найдем коэффициент приведения  $K$ , с этой целью воспользуемся равенством (11.2), которое является уравнением для  $K$ .

После простых преобразований оно приобретает вид:

$$K^2 - 2\gamma_1 K - \gamma_2 = 0$$

Решая это уравнение, получаем:

$$K_{1,2} = \gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2} \quad (11.7)$$

, где:

$$2\gamma_1 = \frac{a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}}{a_{12}c_{11} - a_{11}c_{12}}; \quad \gamma_2 = \frac{a_{21}c_{22} - a_{22}c_{21}}{a_{12}c_{11} - a_{11}c_{12}} \quad (11.8)$$

Здесь предполагалось:  $a_{12} = a_{21}$ ;  $c_{12} = c_{21}$

Итак, имеется два значения (11.7) коэффициента приведения. Следовательно, по формулам (11.2), (11.3) и (11.6) можно определить два значения  $\mu$ ,  $z$ ,  $\omega$ . Получится два уравнения (11.5), решение которых известно:

$$z_i = D_i c\phi(\omega_i, t) + B_i s\phi(\omega_i, t); \quad (i = 1, 2) \quad (11.9)$$

Зная решение для главных координат, нетрудно получить решение для исходных координат. На самом деле, для двух коэффициентов приведения (11.7) выражения (11.3) можно записать так:

$$U_1 + \mu_1 U_2 = z_1; \quad U_1 + \mu_2 U_2 = z_2 \quad (A)$$

Разрешая эту систему относительно  $U_1$  и  $U_2$ , будем иметь:

$$U_1 = \frac{\mu_1 z_2 - \mu_2 z_1}{\mu_1 - \mu_2}; \quad U_2 = \frac{z_1 - z_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (11.10)$$

Отсюда видно, что величины  $\mu_i$  являются коэффициентами распределения амплитуд.

Дифференцируя выражения (11.9) и (11.10) по времени, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{\mu_1 \dot{z}_2 - \mu_2 \dot{z}_1}{\mu_1 - \mu_2}; \quad \dot{U}_2 = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \dot{z}_i &= \omega_i [B_i c\phi(\omega_i, t) - D_i s\phi(\omega_i, t)]; \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Произвольные постоянные  $B_i$  и  $D_i$  найдем из начальных условий:

$$t = 0; \quad U_i = A_i; \quad \dot{U}_i = V_i; \quad (i = 1, 2) \quad (11.12)$$

Подставляя (11.12) в (11.11) и (11.9), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= A_1 + \mu_1 A_2; & D_2 &= A_1 + \mu_2 A_2 \\ B_1 &= \frac{1}{\omega_1} (V_1 + \mu_1 V_2); & B_2 &= \frac{1}{\omega_2} (V_1 + \mu_2 V_2) \end{aligned} \right\} (11.13)$$

Как видно из (11.6) и (11.7), колебательные движения будут происходить при условиях:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2 > 0, \quad \frac{c_{11}K_i + c_{21}}{a_{11}K_i + a_{21}} > 0; \quad (i = 1, 2)$$

В заключении отметим, что обобщение изложенной методики на случай колебательной системы с  $n$ -степенями свободы не представляет собой особого труда. Однако аналитическое решение системы типа (А) при  $n > 3$  представляет собой значительные математические трудности. Следует отметить, что незатухающие (периодические) и затухающие колебательные движения системы происходят соответственно при  $R^* = 0$  и  $R^* \neq 0$ .

## §12. Свободные вертикальные колебания фюзеляжа наследственно-деформируемых подвесках

Рассмотрим свободные вертикальные колебания фюзеляжа наследственно-деформируемых подвесках, происходящих параллельно плоскости его симметрии. На рис. 12.1а изображен сам фюзеляж, а на рис 12.1б – его упрощенная динамическая схема (при более полном анализе учитывается также масса колес и связанных с ними частей).

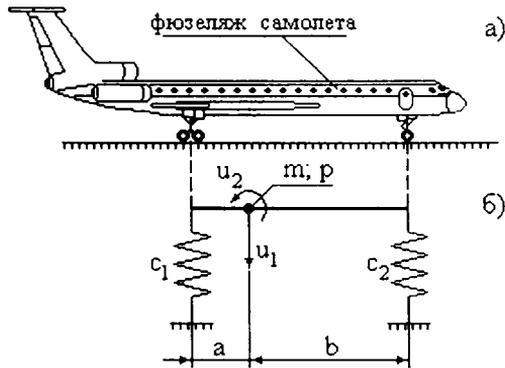


рис. 12.1 Фюзеляж и его упрощенная динамическая схема для анализа колебаний в вертикальной плоскости

Приведенные коэффициенты мгновенной жесткости задней и передней идеально-упругой подвески фюзеляжа (учитывающие жесткость рессор и пневматиков) обозначим через  $c_1$  и  $c_2$ . Центр тяжести расположен на расстояниях  $a$  и  $b$ , соответственно, от задней и передней опоры. Массу корпуса фюзеляжа обозначим через  $m$ , а момент инерции корпуса фюзеляжа относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести, через  $m\rho^2$  ( $\rho$  - радиус инерции).

К подобной же схеме приходят при рассмотрении колебаний автомобиля, железнодорожных вагонов, локомотивов и транспортных средств этого типа [11].

Предполагается, что деформации самого корпуса фюзеляжа пренебрежительно малы по сравнению с наследственно-деформируемыми осадками опор, поэтому в динамической схеме горизонтальный стержень будем считать совершенно жестким. Кроме того, положим, что горизонтальные колебания системы невозможны.

Такая схема обладает двумя степенями свободы. За обобщенные координаты  $U_1$  и  $U_2$  примем вертикальные перемещения центра тяжести (положительное направление – вниз) и угол поворота стержня вокруг центра тяжести (положительное направление – против хода часовой стрелки). При этом осадки наследственно-деформируемых опор равны соответственно:

$$c_1(1 - R^*)(U_1 + a U_2) \text{ - для задней опоры;}$$

$$c_2(1 - R^*)(U_1 - b U_2) \text{ - для передней опоры.}$$

С помощью этих выражений найдем кинематическую и потенциальную энергию системы:

$$T = \frac{m \dot{U}_1^2}{2} + \frac{m \rho^2 \dot{U}_2^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{c_1}{2} [(U_1 + a U_2) - 2 R^*(U_1 + a U_2)](U_1 + a U_2) + \\ & + \frac{c_2}{2} [(U_1 - b U_2) - 2 R^*(U_1 - b U_2)](U_1 - b U_2) \end{aligned} \quad (12.1)$$

Соответственно уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial U_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} = 0; \quad i=1,2 \quad (12.2)$$

, где:  $L = \Pi - T$

принимают вид:

$$m \ddot{U}_1 + (c_1 + c_2)(1 - R^*)U_1 + (c_1 a - c_2 b)(1 - R^*)U_2 = 0; \quad (12.3)$$

$$m \rho^2 \ddot{U}_2 + (c_1 a - c_2 b)(1 - R^*)U_1 + (c_1 a^2 + c_2 b^2)(1 - R^*)U_2 = 0;$$

Общие решения системы ИДУ (12.3) при заданных начальных условиях можно получить из (11.10), полагая:

$$\begin{aligned} a_{11} = a_1 = m; \quad a_{22} = a_2 = m \rho^2; \quad a_{12} = a_{21} = 0; \quad (12.4) \\ c_{11} = (c_1 + c_2); \quad c_{12} = c_1 a - c_2 b; \quad c_{21} = c_{12}; \quad c_{22} = c_1 a^2 + c_2 b^2; \end{aligned}$$

Система (12.3) при  $R^* = 0$ , т.е. в идеально-упругом случае, детально исследована в [11]. Приведем эти исследования применительно к вертикальным колебаниям фюзеляжа. В данном случае система (12.3) принимает вид:

$$\begin{aligned} m \ddot{U}_1 + (c_1 + c_2) U_1 + (c_1 a - c_2 b) U_2 = 0; \quad (12.5) \\ m \rho^2 \ddot{U}_2 + (c_1 a - c_2 b) U_1 + (c_1 a^2 + c_2 b^2) U_2 = 0; \end{aligned}$$

Решение уравнения (12.5) ищется в виде:

$$u_i = A_i \sin(\omega t + \varphi), \quad i = 1, 2 \quad (12.6)$$

, где:  $A_i$ , ( $i = 1, 2$ ) - амплитуды,  $\omega$  - частота колебаний.

После постановки частного решения (12.6), приходим к однородной системе уравнений:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_1 + (c_1 + c_2) A_1 + (c_1 a - c_2 b) A_2 = 0; \quad (12.7) \\ -m\rho^2 \omega^2 A_2 + (c_1 a - c_2 b) A_1 + (c_1 a^2 + c_2 b^2) A_2 = 0; \end{aligned}$$

и получаем определитель частот:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m\omega^2 & c_1 a - c_2 b \\ c_1 a - c_2 b & c_1 a^2 + c_2 b^2 - m\rho^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (12.8)$$

, из которого следует частотное уравнение:

$$\omega^4 - \left( \frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1 a + c_2 b^2}{m\rho^2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2 (a + b)^2}{m^2 \rho^2} = 0 \quad (12.9)$$

Как правило, это уравнение имеет различные корни. Каждому из них соответствует свое определенное соотношение между амплитудами, определяющие собственную форму колебаний. Это соотношение можно найти, например, из первого уравнения системы (12.7):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{m\omega^2 - c_1 - c_2}{c_1a - c_2b} \quad (12.10)$$

То же получится и из второго уравнения системы (12.7).

Остановимся на частном случае, когда выполняется равенство:

$$\rho^2 = ab \quad (12.11)$$

Т.е., когда радиус инерции представляет собой среднее геометрическое между величинами  $a$  и  $b$ ; заметим, что для этого расстояния  $a+b$  между осями колес должно быть значительно меньше общей длины фюзеляжа.

Если условие (12.11) выполняется, то частотное уравнение приобретает вид:

$$\omega^4 - \frac{c_1a + c_2b}{mab}(a+b)\omega^2 + \frac{c_1c_2(a+b)^2}{m^2ab} = 0 \quad (12.12)$$

И имеют следующие неравные корни:

$$\omega_1^2 = \frac{c_1(a+b)}{mb}; \quad \omega_2^2 = \frac{c_2(a+b)}{ma} \quad (12.13)$$

Для определения собственных форм подставляем эти корни поочередно в соотношение (12.10). Для первой формы получим, полагая:  $\omega^2 = \omega_1^2$ :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{1}{b} \quad (12.14)$$

Здесь вторые индексы обозначают номер рассматриваемой формы. После подстановки  $\omega^2 = \omega_2^2$  в соотношение (12.10), найдем вторую собственную форму:

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{1}{a} \quad (12.15)$$

Эти формы изображены на рис. 12.2а и 12.2б. Их особенностью является неподвижность одной подвески фюзеляжа при колебаниях другой подвески. Практически это означает, что подвески фюзеляжа колеблются независимо – колебания одной из них не передаются другой. Свойства такой системы наглядно представляет динамическая схема, изображенная на рис. 12.3. Независимость колебаний обеих подвесок фюзеляжа можно считать определенным эксплуатационным достоинством рассматриваемой схемы. Конечно, свободные колебания каждой из подвесок будут

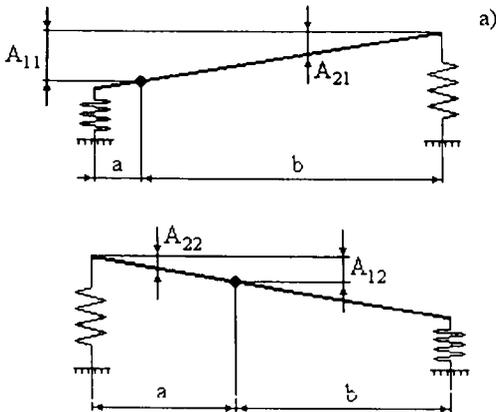


рис. 12.2.

б) Собственные формы колебаний фюзеляжа при  $\rho = a b$



рис. 12.3 Динамическая схема фюзеляжа с независимыми колебаниями обеих подвесок.

В другом частном случае, когда:

$$c_1 a = c_2 b \quad (12.16)$$

, уравнения (12.15) становятся несвязанными:

$$A_1(-m\omega^2 + c_1 + c_2) = 0 \quad (12.17)$$

$$A_2(-m\rho^2\omega^2 + c_1 a^2 + c_2 b^2) = 0 \quad (12.18)$$

Несвязанность уравнений означает возможность чисто вертикальных колебаний без поворота (подпрыгивания) (рис.12.4а) или чисто угловых колебаний при неподвижном центре тяжести (галопирования) (рис. 12.4б).

Для случая подпрыгивания фюзеляжа имеем:

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 = 0 \quad (12.19)$$

и из уравнения (12.17):

$$-m\omega^2 + c_1 + c_2 = 0 \quad (12.20)$$

Получаем квадрат первой частоты:

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad (12.21)$$

Для случая галопирования фюзеляжа, когда:

$$A_1 = 0, \quad A_2 \neq 0 \quad (12.22)$$

Из уравнения (12.18) находим квадрат второй частоты:

$$\omega_2^2 = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{m \rho^2} \quad (12.23)$$

Если параметры фюзеляжа удовлетворяют равенству:

$$\left[ c_1 + c_2 + \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\rho^2} \right]^2 - \frac{4c_1 c_2 (a+b)^2}{\rho^2} = 0$$

, то одновременно удовлетворяются оба рассмотренных выше условия (12.11) и (12.16), обе частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  оказываются одинаковыми.

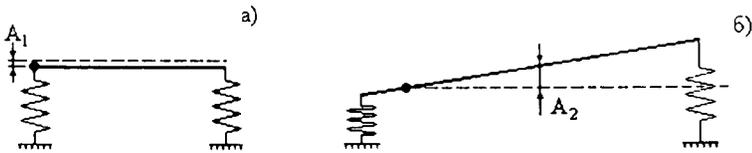


рис. 12.4 Собственные формы колебаний фюзеляжа при  $c_1 a = c_2 b$

Пример: Определить собственные частоты и собственные формы колебаний фюзеляжа, для которого известно:

$$m = 1,6 \text{ кгс см}^2; \quad p = 122,5 \text{ см}; \quad c_1 = 48,4 \text{ кгс см}^{-1}; \\ c_2 = 37 \text{ кгс см}^{-1}; \quad a = 131 \text{ см}; \quad b = 139 \text{ см}.$$

Уравнение (12.12) принимает вид:

$$\omega^4 - 117,8 \omega^2 + 3400 = 0$$

Откуда:

$$\omega^2 = 58,9 \pm 8,3 \text{ с}^{-2}$$

Значение частоты:

$$\omega_1 = 7,11 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = 8,2 \text{ с}^{-1}$$

Для определения собственных форм колебаний воспользуемся формулой (12.10):

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{1,6 \cdot 50 \cdot 6 - 48,4 - 37}{48,4 \cdot 131 - 37 \cdot 139} = -0,0037 \text{ см}^{-1}$$

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{1,6 \cdot 67,2 - 48,4 - 37}{48,4 \cdot 131 - 37 \cdot 139} = 0,0183 \text{ см}^{-1}$$

Эти формы показаны на рис. 12.5а и 12.5б; первая форма представляет собой в основном случай *подпрыгивания* корпуса фюзеляжа, а вторая – случай *галопирования*.

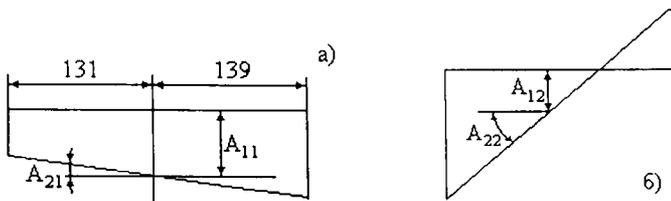


рис. 12.5

Убедимся в ортогональности этих форм. В нашем случае условие ортогональности имеет вид:

$$mA_{11}A_{12} + m\rho^2 A_{21}A_{22} = mA_{11}A_{12} \left(1 + \rho^2 \frac{A_{21}A_{22}}{A_{11}A_{12}}\right) = 0$$

Подставив значения исходных данных, получим:

$$mA_{11}A_{12}(1 - 15,00 \cdot 0,0037 \cdot 0,0183) \approx 0.$$

### § 13. Свободные колебания крыла, поперечное сечение которого является удлиненной пластинкой на наследственно-деформируемых опорах

Рассмотрим крыло (рис. 13.1а), поперечное сечение которого является удлиненной пластинкой на наследственно-деформируемых опорах (рис.13.1б).

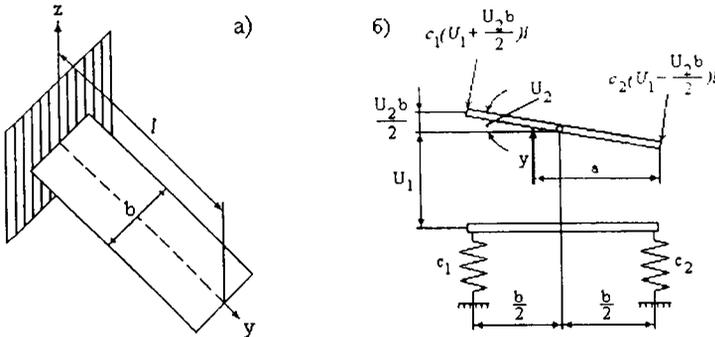


рис. 13.1

Предположим, что горизонтальное перемещение пластинки невозможно и она имеет две степени свободы, т.е. положение системы характеризуется двумя координатами углом поворота  $U_2(t)$  и вертикальным перемещением  $U_1(t)$ . Колебания системы происходят под действием начального возмущения. Размер абсолютно жесткой пластинки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, обозначим через  $l$  и предполагается, что она находится на наследственно-деформируемых опорах, коэффициенты мгновенной жесткости которых  $c_1$ ,  $c_2$  будем относить к единице длины пластинки в указанном направлении. Обозначим через  $m$  массу, соответствующую единице площади срединной плоскости пластинки.

Тогда кинетическая энергия  $T$ , потенциальная энергия  $\Pi$  рассматриваемой системы определяются следующим образом:

$$T = \alpha_1 \dot{U}_1^2 + \alpha_2 \dot{U}_2^2 \quad (13.1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_{11} U_1 (U_1 - 2R^* U_1) + c_{12} U_1 (U_2 - 2R^* U_2 + \\ + c_{21} U_2 (U_1 - 2R^* U_1) + c_{22} U_2 (U_2 - 2R^* U_2)]$$

, где:

$$\alpha_1 = mvl, \quad \alpha_2 = \frac{mv^3 l}{12}, \quad c_{11} = (c_1 + c_2)l \\ c_{12} = (c_1 - c_2) \frac{l\theta}{2}, \quad c_{21} = c_{12}, \quad \alpha_{22} = (c_1 + c_2) \frac{l\theta^2}{4}$$

Подставляя:  $L = \Pi - T$  в уравнения Лагранжа (12.2), будем иметь:

$$\alpha_1 \ddot{U}_1 + c_{11}(1 - R^*)U_1 + c_{12}(1 - R^*)U_2 = 0 \\ \alpha_2 \ddot{U}_2 + c_{21}(1 - R^*)U_1 + c_{22}(1 - R^*)U_2 = 0 \quad (13.2)$$

Система ИДУ (13.2) является частным случаем системы (10.3), которая называется прямой формой системы ИДУ характеризующейся тем, что в каждое ИДУ входит только по одному члену, содержащему обобщенное ускорение  $\ddot{U}_i$  ( $i = 1, 2$ ). В самом деле, полагая в (10.3):

$$\alpha_{11} = a_1, \quad \alpha_{12} = a_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = a_2 \quad (13.3)$$

Из системы (13.2) и из решений (10.10), при соответствующих начальных условиях, получим точное решение системы ИДУ (13.2).

Необходимо отметить, что система ИДУ (13.2) описывает связанные изгибно-крутильные свободные колебания удлиненных пластин на линейных наследственно-деформируемых опорах. Большой теоретический и практический интерес представляет исследование свободного колебания удлиненной пластинки на нелинейных наследственно-деформируемых опорах [17].

#### § 14. Связанные изгибно-крутильные колебания нелинейных наследственно-деформируемых удлиненных пластин

Рассмотрим задачу изгибно-крутильных колебаний удлиненной пластинки на нелинейных наследственно-деформируемых опорах.

При выводе разрешающих уравнений изгибно-крутильных колебаний используем приближенный подход, успешно примененный ранее в работах [11, 22]. В безразмерных координатах интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ), описывающие дискретную модель, рассматриваемой задачи запишем следующим образом:

$$\ddot{W} + (1 - R^*) \left[ \left( W + \frac{U}{2} \right) - \gamma \left( W + \frac{U}{2} \right) \right] + c(1 - R^*) \left[ \left( W - \frac{U}{2} \right) - \gamma_1 \left( W - \frac{U}{2} \right)^3 \right] = 0 \quad (14.1)$$

$$\ddot{U} + 6(1 - R^*) \left[ \left( W + \frac{U}{2} \right) - \gamma \left( W + \frac{U}{2} \right)^3 \right] - 6c(1 - R^*) \left[ \left( W - \frac{U}{2} \right) - \gamma_1 \left( W - \frac{U}{2} \right)^3 \right] = 0$$

, где:  $U$  - угол закручивания,  $W$  - вертикальное перемещение пластинки;  $c = c_2 / c_1$ ;  $c_1$  и  $c_2$  - коэффициенты мгновенной жесткости неупругих опор;  $\gamma$  и  $\gamma_1$  коэффициенты физической нелинейности материала конструкции;  $R^*$  - интегральный оператор Вольтерра со слабо-сингулярными ядрами наследственности, т.е.:

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad R(t-\tau) = \varepsilon \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$$

$$\varepsilon > 0, \quad \beta > 0 \quad 0 < \alpha < 1$$

Из системы ИДУ (14.1) следует, что связанность изгибно-крутильных колебаний обусловлена коэффициентом  $c$ .

Если  $\gamma = \gamma_1 = 0$  и  $c=1$ , то система (13.1) распадется на два независимых уравнения. Первое из них описывает изгибные, а второе - крутильные колебания пластинки. Если теперь решить систему ИДУ (14.1) при следующих начальных условиях:

$$W(0) = U(0) = W_0 \quad \dot{W}(0) = \dot{U}(0) = 0 \quad (14.2)$$

, то нетрудно заметить, что частота крутильных колебаний почти в два раза больше, чем частота изгибных колебаний, и в обоих случаях задача допускает точное аналитическое решение [1], т.е.:

$$\begin{aligned} W(t) &= W_0 \left[ \cos \sqrt{2}t + c\phi \sqrt{2}t \right] \\ U(t) &= W_0 \left[ \cos \sqrt{6}t + c\phi \sqrt{6}t \right] \end{aligned} \quad (14.3)$$

Функция  $c\phi \omega t$  - описывает механизм внутреннего трения материала конструкции. Ее расположение по фазе противоположно функциям  $\cos \omega t$  и асимптотически стремится по абсолютному значению амплитуд идеально-упругой конструкции с незначительном сдвигом частоты колебаний относительно частот чисто изгибного и чисто крутильного колебаний. Эта функция в [4] табулирована для достаточно большого интервала времени при различных вариациях реологических параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Если  $\gamma \neq \gamma_1 \neq 0$ , то из системы (14.1) ясно, что даже при  $c = 1$  изгибно-крутильные колебания будут связанными. Эти связанные колебания можно охарактеризовать как преимущественно изгибные со слабо выраженными крутильными деформациями (*квазиизгибные*) или преимущественно крутильные со слабо выраженными изгибными деформациями (*квазикрутильные*).

Таким образом, при  $c \neq 1$  как в линейном, так и в нелинейном случае, колебания системы будут связанными, т. е. происходят взаимодействия изгибных и крутильных колебаний. Линейный случай допускает точное решение системы (14.1), которое можно получить методом Даламбера в сочетании с методом фундаментальных систем решений:

$$W(t) = \frac{1}{k_1 - k_2} [k_1 \varphi_2(t) - k_2 \varphi_1(t)], \quad U(t) = \frac{1}{k_1 - k_2} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$$

где:

$$\varphi_i(t) = \varphi_{oi} [\cos \omega_i t + c \phi \omega_i t] \quad \varphi_{oi} = (1 + k_i) W_{i0}$$

$$W_i = a_1 + k_i a_2; \quad a_1 = 1 + \frac{c_2}{c_1}; \quad a_2 = 1 - \frac{c_2}{c_1}; \quad i = 1, 2;$$

$$k_1 \text{ и } k_2 - \text{корни квадратного уравнения: } 12a_2 k^2 - 4a_1 k + a_2 = 0$$

Максимальный эффект связанности можно ожидать при  $c < 1$  или  $c > 1$ , который можно проследить с помощью вычислительного эксперимента. В общем случае систему нелинейных слабосингулярных ИДУ(14.1) при начальных условиях (14.2) можно решить методом, основанном на устранении слабосингулярных особенностей интегральных и интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} W_n = & W_0 - \sum_{j=0}^{n-1} a_j (t_n - t_j) \left\{ \left( W_j + \frac{U_j}{2} \right) - \gamma \left( W_j + \frac{U_j}{2} \right)^3 + \right. \\ & + \frac{c_2}{c_1} \left[ \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right) - \gamma \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right)^3 \right] - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ \left( W_{j-k} + \frac{U_{j-k}}{2} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \gamma \left( W_{j-k} + \frac{U_{j-k}}{2} \right)^3 + \frac{c_2}{c_1} \left( \left( W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2} \right) - \gamma \left( W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2} \right)^3 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_n = U_0 - 6 \sum_{j=0}^{n-1} a_j (t_n - t_j) \{ & (W_j + \frac{U_j}{2}) - \gamma (W_j + \frac{U_j}{2})^3 + \frac{c_2}{c_1} [(U_j - \frac{U_j}{2}) - \\
 - \gamma (W_j - \frac{U_j}{2})^3] - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta_k} [ & (W_{j-k} + \frac{U_{j-k}}{2}) - \gamma (W_{j-k} + \frac{U_{j-k}}{2})^3 - \\
 - \frac{c_2}{c_1} ((W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2}) - \gamma (W_{j-k} - & \frac{U_{j-k}}{2})^3)] \}
 \end{aligned}$$

, где:

$$t_n = n\Delta t, \quad a_j = j\Delta t, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad a_0 = a_n = \frac{\Delta t}{2}, \quad W(t_n) = W_n,$$

$$U(t_n) = U_n, \quad B_k = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha] \quad k = \overline{1, j-1}, \quad B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}$$

$$B_j = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [j^\alpha - (j-1)^\alpha]$$

Вычислительный эксперимент проводили на современных персональных компьютерах по программе, составленной на языке Турбо Паскаль.

Из анализ результатов исследований следует, что учет внутреннего трения, связанного с наследственными свойствами материала конструкции приводит к затуханию собственных колебаний системы (см. рис. 14.1)

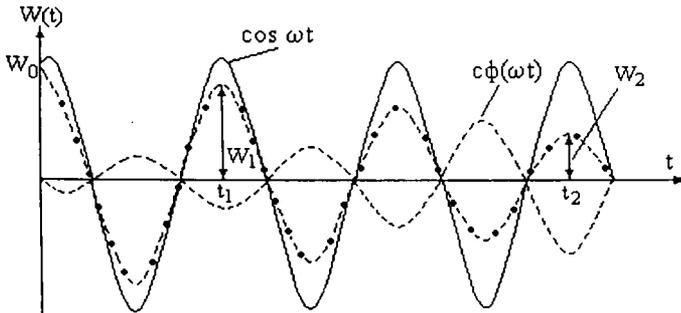


рис. 14.1

Скорость затухания существенным образом зависит от реологических параметров материала конструкции. Поэтому исследование зависимости диссипативных характеристик системы, т.е. коэффициент внутреннего поглощения энергии  $\Psi = 2\delta$  и коэффициент потерь, или коэффициент неупругого сопротивления:  $\gamma = \delta / \pi$  от  $\varepsilon, \alpha, \beta$ , является весьма актуальным.

Логарифмической декремент затухания  $\delta$  по записи собственных затухающих колебаний вычисляется по формулам:

$$\delta = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{W_2}{W_1}, \quad \Delta t = t_1 - t_2$$

В таблице приведена зависимость  $\delta, \Psi$  и  $\gamma$  от реологических параметров  $\varepsilon, \alpha, \beta$ . Из этой таблицы видно, что уменьшение параметра сингулярности приводит к увеличению коэффициента внутреннего поглощения энергии системы, и тем самым свободные колебания на практике будет исчезнувшим по истечении определенного промежутка времени.

$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\gamma$	$\psi$
0.1	0.5	0.05	0.0064	0.0020	0.0128
0.5			0.0225	0.0071	0.0450
0.08			0.0236	0.0075	0.0472
0.1			0.0346	0.0110	0.0692
0.15			0.0907	0.0288	0.0814
0.2			0.1277	0.0406	0.2554
0.1	0.4		0.0446	0.0141	0.0892
	0.3		0.0466	0.0148	0.0932
	0.2		0.0690	0.0219	0.1380

Таким образом, появляется новая возможность оптимизации демпфирующих свойств материала вибрирующих конструкций, которые имеют весьма важное значение при решении проблемы внедрения новых материалов, в том числе композитных материалов, в конструкцию авиационно-космических аппаратов [14].

### §15. Связанные изгибно-крутильные колебания реального профиля крыла на нелинейных наследственно-деформируемых подвесках

Рассмотрим связанные изгибно-крутильные колебания реального профиля крыла на нелинейных наследственно-деформируемых подвесках (рис 15.1). Этот профиль представляет собой поперечные сечения консольного крыла, жесткость которого в направлении потока максимальна, и обладающего степенями свободы изгиба и кручения [23].

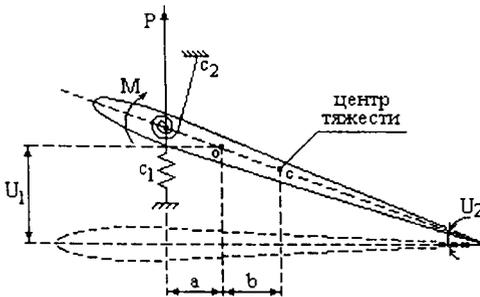


рис. 15.1 Профиль консольного крыла, удерживаемого от движений изгиба и кручения пружинами с мгновенными жесткостями  $c_1$  и  $c_2$  действующими на крыло в точке, находящейся на расстоянии  $a$  от центра массы. Здесь же показаны также: подъемная сила  $P$  и момент  $M$  около оси кручения.

Предположим, что горизонтальное перемещение профиля невозможно и он имеет две степени свободы, т.е. положение системы характеризуется двумя обобщенными координатами: углами поворота  $U_2$  и вертикальными

перемещениями  $U_j$ . Колебания системы происходят только под действием начального возмущения.

Если обозначить через  $b$  – расстояние от центра жесткости до центра массы крыла, через  $m$  – массу; через  $r$  – радиус инерции массы крыла относительно центральной оси, то кинетическая и потенциальная энергии рассматриваемой системы определяются следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{U}_1^2 + 2a_{12}\dot{U}_1\dot{U}_2 + a_{22}\dot{U}_2^2) \quad (15.1)$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ c_1 U_1 \left[ \left( U_1 - \frac{1}{2} \gamma U_1^3 \right) - 2R^* (U_1 - \gamma U_1^3) \right] + c_2 U_2 \left[ \left( U_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 U_2^3 \right) - 2R^* (U_2 - \gamma_1 U_2^3) \right] \right\}$$

, где:

$$a_{11} = m; \quad a_{12} = a_{21} = -m b; \quad a_{22} = m (r^2 + b^2)$$

$\gamma, \gamma_1$  - коэффициенты физической нелинейности.

Из уравнения Лагранжа (10.2) имеем:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{U}_1 + a_{12}\ddot{U}_2 + c_1(1 - R^*)(U_1 - \gamma U_1^3) &= 0 \\ a_{21}\ddot{U}_1 + a_{22}\ddot{U}_2 + c_2(1 - R^*)(U_2 - \gamma_1 U_2^3) &= 0 \end{aligned} \quad (15.2)$$

Из системы ИДУ (15.2) следует, что связанность изгибно-крутильных колебаний обусловлена коэффициентом  $b$ . Если ось центра тяжести и ось жесткости совпадает, то  $b=0$  и система (15.2) распадется на два независимых уравнения. Первое из них описывает вертикальные колебания, а второе – крутильные колебания профиля крыла. Однако указанное расположение осей чрезвычайно трудно конструктивно осуществить. Поэтому, колебания таких конструкций являются

связанными изгибно-крутильными и не могут быть сведены к чисто изгибным и чисто крутильным. Необходимо решить системы ИДУ (15.2) совместно при заданных начальных условиях.

В линейном случае, т.е.:  $\gamma = \gamma_1 = 0$  точное решение системы ИДУ (15.2) при начальных условиях (11.12) можно получить из (11.10), полагая:

$$c_{11} = c_1; \quad c_{12} = c_{21} = 0; \quad c_{22} = c_2$$

В нелинейном случае, т.е. при:  $\gamma \neq 0; \quad \gamma_1 \neq 0$ , нахождение точного решения системы (15.2) представляет собой значительные математические трудности. По этому в общем случае, систему (15.2) можно решить численно с использованием ЭВМ, с этой целью переходя к безразмерным переменным:

$$\theta_2 = \chi \left( \frac{b}{2} \right)^2, \quad bU_2 = U, \quad U_1 = W, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{c_1}{m}} t, \quad \theta_1 = 1 + \left( \frac{b}{2} \right)^2, \quad \chi = \frac{c_2}{c_1 b^2}$$

и, разрешая систему (15.2) относительно производных, имеем:

$$\ddot{W} + \theta_1 (1 - R^*) \left[ (W - \gamma W^3) + \frac{\theta_2}{\theta_1} (U - \gamma_2 U^3) \right] = 0 \quad (15.3)$$

$$\ddot{U} + \left( \frac{b}{r} \right)^2 (1 - R^*) \left[ (W - \gamma W^3) + \chi (U - \gamma_2 U^3) \right] = 0$$

, где:

$$\gamma_2 = \gamma_1 / b^3$$

Применяя методику численного решения, изложенную в §6 к системе ИДУ при начальных условиях:

$$W|_{t=0} = W_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = 0, \quad U|_{t=0} = U_0, \quad \dot{U}|_{t=0} = 0 \quad (15.4a)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned}
 W_n &= W_0 - \sum_{j=0}^{n-1} C_j (t_n - t_j) \left\{ \theta_1(W_j - \gamma W_j^3) + \theta_2(U_j - \gamma_2 U_j^3) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ \theta_1(W_{j-k} - \gamma W_{j-k}^3) + \theta_2(U_{j-k} - \gamma_2 U_{j-k}^3) \right] \right\} \\
 &\quad (15.46) \\
 U_n &= U_0 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \sum_{j=0}^{n-1} C_j (t_n - t_j) \left\{ \theta_1(W_j - \gamma W_j^3) + \chi(U_j - \gamma_2 U_j^3) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ (W_{j-k} - \gamma W_{j-k}^3) + \chi(U_{j-k} - \gamma_2 U_{j-k}^3) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

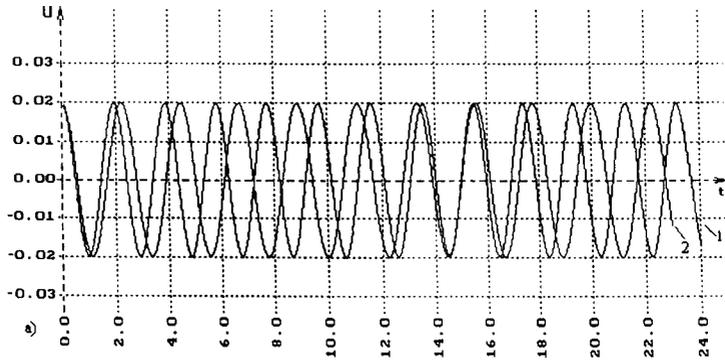
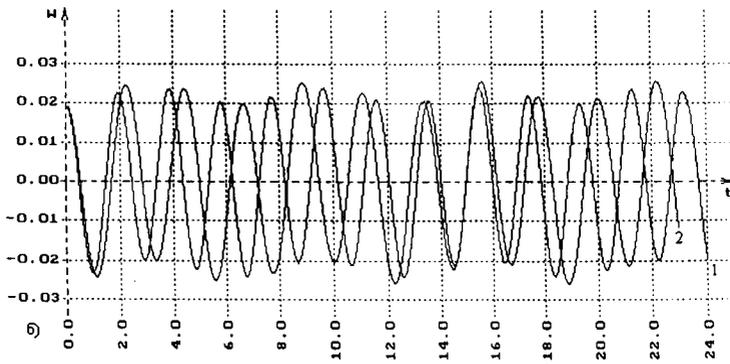
, где:

$$\begin{aligned}
 t_n &= n\Delta t, \quad W(t_n) = W_n, \quad U(t_n) = U_n, \quad C_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, n-1}, \\
 C_0 &= C_n = \frac{\Delta t}{2}, \quad B_k = \frac{\Delta t^\alpha}{2} \left[ (k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha \right], \quad k = \overline{1, j-1}, \quad B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}, \\
 B_j &= \frac{\Delta t^\alpha}{2} \left[ j^\alpha - (j-1)^\alpha \right]
 \end{aligned}$$

Создано математическое обеспечение для численной реализации алгоритмов расчета (15.4). Расчет произведен как для идеально-упругой линейной и нелинейной ( $\varepsilon = 0$ ) (рис. 15.2а, 15.2б), так и для вязкоупругой линейной и нелинейной постановки задачи (рис.15.3а, 15.3б) при следующих исходных данных:

$$\chi = 1/10; (r/b)^2 = 0,06; \varepsilon = 0,1; \alpha = -0,25; \beta = 0,05; \Delta t = 0,01$$

Из анализа результатов, приведенных на рис. 15.2 и рис. 15.3 следует, что частоты совместно-крутильных колебаний гораздо больше, чем частоты совместно-изгибных колебаний. Затухающий процесс (см. рис. 15.3а, 15.3б) колебаний угла закручивания гораздо больше, чем частота вертикальных перемещения профиля крыла.

рис. 15.2 а)  $gam = 0$ ;  $gam = 2$ рис. 15.2 б)  $gam = 0$ ;  $gam = 2$

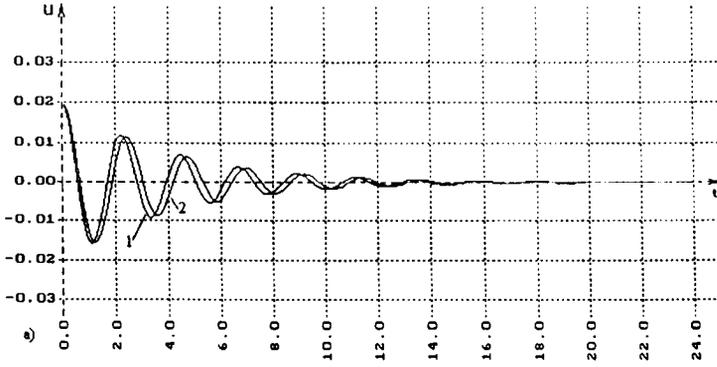


рис. 15.3 а)  $gam = 0$ ;  $gam = 2$ ; вяз.

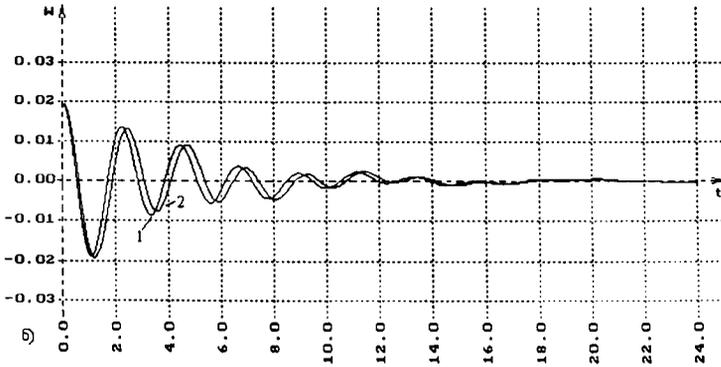


рис. 15.3 б)  $gam = 0$ ;  $gam = 2$ ; вяз.

**Вопросы для самоконтроля:**

1. По какой формуле определяются кинетическая и потенциальная энергия для механических систем с двумя степенями свободы?
2. Какой вид имеет интегро-дифференциальное уравнение свободных колебаний систем с двумя степенями свободы?
3. Какой вид имеет прямая и обратная форма интегро-дифференциального уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы?
4. Какой вид имеют интегро-дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы в главных координатах и их общее решение?
5. Какой вид имеет интегро-дифференциальное уравнение вертикальных колебаний фюзеляжа наследственно деформируемых опор?
6. Какой вид имеют интегро-дифференциальные уравнения связанные изгибно-крутильные колебания нелинейных наследственно-деформируемых удлиненных пластин?
7. Какой вид имеют интегро-дифференциальные уравнения связанных изгибно-крутильных колебаний реального профиля крыла на нелинейных наследственно-деформируемых подвесках?
8. Чем отличаются частоты совместно-крутильных колебаний от частот изгибно-крутильных?

## Глава V. Решение задач о колебаниях наследственно-деформируемых систем с конечным числом степеней свободы

### §16. Интегро-дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы и их общее решение

Как отмечено выше - в общем случае любое деформируемое твердое тело имеет бесконечное число степеней свободы. Однако, в зависимости от принятой модели, представляющей деформируемую конструкцию в том или ином случае, число степеней свободы может быть конечным. Если на точки системы, кроме восстанавливающих сил, действуют возмущающие силы  $\theta_i(t)$ , являющиеся некоторыми функциями времени, то система совершает сложное движение, представляющее собой результат наложения свободных и так называемых вынужденных колебаний. Как показано в §4, задачи в этом случае сводятся к решению матричного ИДУ вида:

$$A\ddot{U} + C \left[ U - \int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau \right] = Q(t) \quad (16.1)$$

, где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{pmatrix},$$

$R(t)$  – ядро релаксации, имеющее слабо-сингулярные особенности типа Абеля.

Отметим, что к системе вида (16.1) можно прийти после применения по пространственным переменным методам Бубнова-Галеркина, Рунца и конечных элементов к решению динамических задач линейной наследственной теории вязкоупругости [24].

Требуется найти решение системы ИДУ (16.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$U|_{t=0} = U_0; \quad \dot{U}|_{t=0} = \dot{U}_0 \quad (16.2)$$

Уравнения (16.1) носят название ИДУ вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы.

Общее решение системы ИДУ вынужденных колебаний является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы, т.е.:

$$U = U_{од} + U_{неод}$$

Первое решение  $U_{од}$  определяет свободные колебания системы, а второе  $U_{неод}$  – частное решение неоднородной системы ИДУ (16.1).

Так как свободные колебания системы являются колебаниями быстро затухающими, то практический интерес представляет лишь частное решение  $U_{неод}$ , определяющее вынужденные колебания системы. Поэтому сначала рассмотрим методику построения частных решений системы (16.1).

### **§17. Интегро-дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы в главных координатах и их общее решение**

Исследование вынужденных колебаний наследственно-деформируемых систем с конечным числом степеней свободы значительно упрощается, если ввести в рассмотрение главные координаты этой системы  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) следующим образом:

$$U = y_1(t)W_1 + y_2(t)W_2 + y_3(t)W_3 + \dots + y_n(t)W_n$$

, где:  $W_i$  - матрицы собственной формы, соответствующие спектральной задаче идеально-упругой системы, причем:

$$W_i^T A W_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad W_i^T C W_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \omega_i^2 & i = j \end{cases}$$

то, согласно результатам, приведенным в §4, ИДУ (16.1) вынужденных колебаний системы в главных координатах имеют следующий вид:

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 \left[ y_i(t) - \int_0^t R(t-\tau) y_i(\tau) d\tau \right] = q_i(t) \quad (17.1)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$y_i(0) = \alpha_{0i}, \quad \dot{y}_i(0) = \alpha_{1i} \quad (17.2)$$

Уравнения (17.1) образуют систему  $n$  независимых друг от друга интегро-дифференциальных уравнений.

Как показано выше, точное решение ИДУ (17.1) при тривиальных начальных условиях ( $\alpha_{0i} = \alpha_{1i} = 0$ ) имеет вид:

$$y_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t-\tau) q_i(\tau) d\tau - q_i(0) \frac{d}{dt} \int_0^t \Pi(t-\tau) V_i(\tau) d\tau - \int_0^t \dot{q}_i(t-\tau) \left[ \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \Pi(\tau-s) V_i(s) ds \right] d\tau \right\} \quad (17.3)$$

, где:

$$\Pi(t) = 1 + \int_0^t R(\tau) d\tau \quad - \text{функция ползучести}, \quad V_i(t) = \cos \omega t + c\phi \omega t,$$

$c\phi \omega t$  - функция косинуса дробного порядка

Точное решение (17.3) позволило обнаружить ряд новых механических эффектов, например: колебания наследственно-деформируемых систем под действием постоянной внешней нагрузки происходят около кривой функции ползучести и затухают с течением времени по этой кривой, что является тестом для проверки любого численного метода решения ИДУ динамических задач наследственной теории вязкоупругости.

Как известно из [26, 27], решение спектральной задачи (задачи нахождения частот и формы) для идеально-упругих систем довольно сложно и является самостоятельной научной проблемой, поэтому решение динамических задач вязкоупругости методом разложения по собственным формам (методом приведения в главных координатах) целесообразно выполнять в том случае, когда для получения приемлемой точности результатов достаточно ограничиться учетом лишь нескольких основных тонов колебаний. Однако во многих случаях (например, при расчете сложных пластинчатых и оболочечных конструкций) требуется учитывать большое число тонов собственных колебаний. В этих случаях более экономичным является прямое интегрирование ИДУ (16.1) с помощью той или иной численной процедуры.

### §18. Обобщение метода Ньюмарка для решения интегро-дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы

Покажем обобщение безусловного устойчивого численного метода Ньюмарка для решения ИДУ (16.1) при начальных условиях (16.2).

Как известно из [25], метод Ньюмарка основан на следующих разложениях:  $U(t_i + \Delta t) = U_{i+1}$  и  $\dot{U}(t_i + \Delta t) = \dot{U}_{i+1}$  в ряд по степеням  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= U_i + \Delta t \dot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_i + \theta \Delta t^2 (\ddot{U}_{i+1} - \ddot{U}_i) \\ \dot{U}_{i+1} &= \dot{U}_i + \Delta t \ddot{U}_i + \mu \Delta t (\ddot{U}_{i+1} - \ddot{U}_i), \quad t_i = i \Delta t \end{aligned} \quad (18.1)$$

Коэффициенты  $\theta$  и  $\mu$  выбираются таким образом, чтобы обеспечить безусловную устойчивость процесса интегрирования, т.е.:

$$\mu \geq \frac{1}{2}, \quad \theta \geq \frac{1}{4} \left( \mu + \frac{1}{2} \right)^2$$

Найдем из первого равенства (18.1)  $\ddot{U}_{i+1}$ :

$$\ddot{U}_{i+1} = \frac{1}{\theta \Delta t^2} (U_{i+1} - U_i) - \frac{1}{\theta \Delta t} \dot{U}_i + \left( 1 - \frac{1}{2\theta} \right) \ddot{U}_i, \quad (18.2)$$

Для отыскания  $U_{i+1}$  уравнение движения записывается для следующего момента времени:  $t = t_{i+1}$ :

$$A \ddot{U}_{i+1} + C \left[ U_{i+1} - \int_0^{t_{i+1}} R(t_{i+1} - \tau) U(\tau) d\tau \right] = Q_{i+1} \quad (18.3)$$

Если использовать рациональное преобразование, предложенное в [1], то несобственный интеграл для слабо-сингулярного ядра Ржаницына-Колтунова вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon \int_0^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\tau)} (t_{i+1}-\tau)^{\alpha-1} U(\tau) dt = \frac{\varepsilon}{\alpha} \left[ \frac{\Delta t^\alpha}{2} U_{i+1} + \sum_{k=1}^{i+1} B_k e^{-\beta t_k} U_{i+1-k} \right] \quad (18.4)$$

, где:

$$B_k = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha], \quad k = \overline{i, j}, \quad B_{j+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{2} [(j+1)^\alpha - j^\alpha]$$

Подставляя (18.2) и (18.4) в (18.3) приходим к уравнению вида:

$$DU_{i+1} = P_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (18.5)$$

в котором:

$$D = \left( 1 - \frac{\varepsilon \Delta t^\alpha}{\alpha \cdot 2} \right) C + \frac{1}{\theta \Delta t^2} A; \quad P_{i+1} = Q_{i+1} + A \left[ \frac{1}{\theta \Delta t^2} U_i + \frac{1}{\theta \Delta t} \dot{U}_i + \left( \frac{1}{2\theta} - 1 \right) U_i \right] + \frac{\varepsilon}{\alpha} C \sum_{k=1}^{i+1} B_k e^{-\beta t_k} U_{i+1-k}$$

Формулы (18.1), (18.2) и (18.5) составляют рекуррентные соотношения метода Ньюмарка для решения ИДУ (16.1) при начальных условиях (16.2).

Отметим, что метод Ньюмарка требует задания в начальный момент времени  $t_0 = 0$  не только матриц  $U_0$ ,  $\dot{U}_0$ , а также матрицы  $\ddot{U}_0$ . Для этого, записав уравнение движения (16.1) для момента  $t_0 = 0$ , имеем:

$$A\ddot{U}_0 = Q_0 - CU_0, \quad \ddot{U}_0 = A^{-1}[Q_0 - CU_0]$$

Зная  $U_0$ ,  $\dot{U}_0$  и  $\ddot{U}_0$  из (18.5) можем найти  $U_1$ , а из (18.1), (18.2)  $\dot{U}_1$ ,  $\ddot{U}_1$  и т.д. Находим все значения  $U_2$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\ddot{U}_2$ , ...

Метод Ньюмарка является, безусловно, устойчивым, поэтому его шаг можно назначить в долях от периода тех колебаний, которые необходимо учитывать при решении задач. При этом высшие формы не будут портить решение, т.е. шаг интегрирования по методу Ньюмарка можно назначить существенно большим, чем по методу центральных разностей.

### §19. Решение тестовых примеров

Проверка методики, основанная на решении тестовых примеров, является необходимым этапом, связанным с подтверждением достоверности результатов, получаемых при решении конкретных задач. В качестве тестовых могут использоваться задачи, для которых известно аналитическое или точное численное решение. Здесь остановимся лишь на задачах, имеющих аналитическое решение, хотя они, естественно, и не охватывают в полном объеме всех особенностей и возможностей разработанной методики.

Отметим, что тестовая проверка показала высокую эффективность разработанного алгоритма метода Ньюмарка для численного решения ИДУ типа (16.1). В самом деле, из (17.3) при:  $i = 1$ ,  $q_1 = q_0 = \omega^2$ ,  $\omega_1 = \omega = 2\pi$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $U_0 = \dot{U}_0 = 0$  имеем:

$$U(t) = H(t) - \frac{d}{dt} \int_0^t H(t-\tau) V_1(\tau) d\tau, \quad U(t) = \frac{\omega_1^2 Y_1}{q_0},$$

, где:

$$c\phi(\omega t) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{k(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \sum_{i=1}^k (-1)^i C_i^k \frac{\varepsilon_1 t^{\omega}}{\Gamma[\alpha i]} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\beta t)^j \Gamma[2k+1] \Gamma[\alpha i + j]}{j! \Gamma[2k + \alpha i + j + 1]}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \Gamma[\alpha], \quad \Gamma[ ] - \text{гамма функция Эйлера}, \quad C_i^k = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, при  $\varepsilon = 0$  из предыдущего уравнения получим точное решение идеально-упругой задачи, т.е.:

$$U(t) = 1 - \cos 2\pi t$$

Расчет, по приведенному выше точному решению, выполнен согласно теореме сложения ИДУ и результаты (см. рис.19.1) отмечены сплошными линиями, а по формулам (18.1), (18.2), (18.5) – пунктирными линиями, при этом  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 0.6$ .

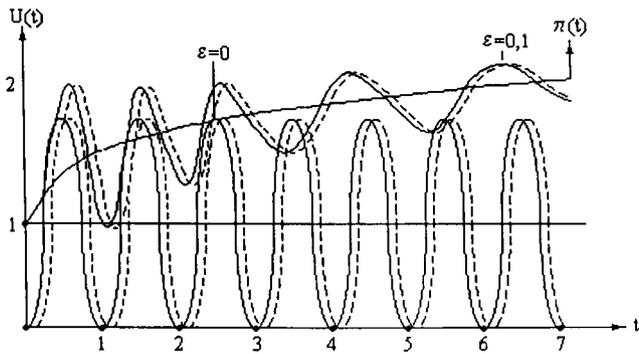


рис. 19.1

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Каковы интегро-дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы и их общее решение?
2. Какой вид имеют интегро-дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с  $n$  - степенями свободы в матричной форме?
3. Какое упрощение вносит в исследование вынужденных колебаний системы применение главных координат?
4. Какой вид имеет общий интеграл интегро-дифференциальных уравнений вынужденных колебаний с  $n$  - степенями свободы в главных координатах?
5. Какой вид имеет алгоритм вычисления несобственного интеграла для слабо-сингулярного ядра Ржаницына-Колтунова?
6. Какой вид имеет общий алгоритм численного решения метода Ньюмарка для решения матричного интегро-дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы?
7. При каких условиях желательно использовать метод Ньюмарка для численного решения интегро-дифференциальных уравнений?
8. Что представляют собой тестовые примеры?

## Глава VI. Аэронеустойчивость наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов

### §20. Явление аэронеустойчивости

В авиации до начала второй мировой войны вопросы аэронеустойчивости не имели такого важного значения, какое они имеют теперь. Скорости самолетов тогда были сравнительно малы, и те нагрузки, которые должны нести авиационные детали согласно нормам прочности, обеспечивали создание конструкции, достаточно жесткой для того, чтобы обеспечить безопасность полета.

Однако, по мере роста скоростей при почти неизменных расчетных нагрузках и отсутствии рационального критерия жесткости при проектировании авиационные конструкторы столкнулись с широким кругом задач, которые рассматриваются теперь как задачи аэронеустойчивости.

Явление аэронеустойчивости (флаттер и дивергенция) оказывают большое влияние на элементы конструкции современных высокоскоростных ЛА.

*Флаттер* - это динамическая неустойчивость, имеющая место при полете самолета на скорости, называемой скоростью флаттера, при которой существенную роль в возникновении неустойчивости играет деформируемое свойство материала конструкции.

*Дивергенция* - это статическая неустойчивость несущей поверхности самолета в полете на скорости, называемой скоростью дивергенции: при этой скорости деформируемое свойство несущей поверхности играет существенную роль в возникновении неустойчивости.

Современный ЛА подвержен многим формам флаттера. Классический тип флаттера связан с потенциальным потоком и изгибно-крутильным

деформациям крыла, и обычно включает взаимодействие двух или более степеней свободы. Неклассический тип флаттера, который до сих пор трудно анализировать на чисто теоретической основе, может иметь место при обшивке крыла, при сорванном потоке, или при периодических срывах потока с прилеганием его вновь, при режимах потери скорости, а также при различных эффектах запаздывания между аэродинамическими силами и режимом движения самолета.

Наиболее часто встречающимися явлениями аэроустойчивости являются задачи о дивергенции при кручениях прямого крыла. Когда скорость крыла превышает скорость дивергенции при кручении, то приращение аэродинамического крутящегося момента превышает деформации восстанавливающего момента кручения и происходит потеря устойчивости крыла и, соответственно, всего летательного аппарата.

Явление аэроустойчивости (дивергенция и флаттер) недопустимо для любого типа самолетов, так как оно может привести к катастрофе. Скорости, при которых наступают эти явления, называются критическими:  $N_{кр}$  (соответствующие значения времени -  $t_{кр}$ ), поэтому требуется, чтобы максимально допустимая скорость полета ( $N_{max,max}$ ), была меньше любой из критических скоростей как при явлениях аэровязкоупругости, так при аэроупругости:  $N_{max,max} < N_{кр}$ . [20,21]

Предупредительные меры и средства борьбы с явлением аэроустойчивости обычно заключаются либо в увеличении жесткости, либо в уменьшении взаимодействия между степенями свободы, или в комбинации того и другого. Однако увеличение жесткости, особенно крутильной жесткости, с помощью стрингеров, лонжеронов и нервюры по размаху значительно увеличивает вес конструкции. По этой причине в стадии проектирования с точки зрения предотвращения явления

аэроустойчивости, часто производят аналитическое исследование и исследование на основе математических моделей.

Исследование явления аэроустойчивости на основе математических моделей в идеально-упругих постановках началось уже давно в 1930 годах в работах С.А.Чаплигина, М.В.Келдыша, М.А.Лаврентова, Е.П.Гросмана, Жуковского и других. На крыло летающего самолета всегда действуют различные возмущающие силы. Среди них самыми опасными – вызывающими явления аэроустойчивости – являются аэродинамические силы. В настоящее время вычисление аэродинамических сил производится в зависимости от режима полета: дозвукового, транзвукового, сверхзвукового и гиперзвукового и используются следующие гипотезы: стационарности, плоских сечений (поршневой теории), замена крыла вихревой поверхностью, асимптотика малых отстояний.

Основные результаты по использованию гипотезы стационарности в идеально-упругой постановке задачи классического флаттера содержатся в работах: Е.П.Гросмана, Р.Л.Бисплингхоффа, В.Л.Бидермана, Я.Г.Пановка, Я.Ц.Фына.

Использование гипотезы плоских сечений или «Теории поршня» при исследовании явления аэроупругой неустойчивости изложены в монографии и обзорных работах: В.В.Болотина, А.С.Вольмира, С.М.Белоцерковского, Э.И.Григолюк, К.Ш.Бабамурадова, В.К.Кабулова, А.А.Мовчана и других. В этих работах в основном рассматривается явление аэроупругой неустойчивости обшивки крыла, т.е. линейные и нелинейные панельные флаттеры.

Главные трудности использования вихревой теории при решении задачи аэроупругости связаны с решением сингулярных интегральных уравнений I-го рода для определения функции вихря. Основные результаты по данным направлениям содержится в работах С.М.Белосерковского, Т.Буриева, С.Н.Лифанова, А.С.Вольмира и других.

■ Подробный анализ показывает, что асимптотика малых отстояний может служить новой и удачной аэродинамической гипотезой для изучения явления аэроустойчивости. Однако конкретное решение простейших задач аэроустойчивости даже в идеально-упругой постановке получена недавно И.И.Ефремовым и Е.П.Лукашиным.

■ Известно, что около 70% материалов конструкции ЛА при любых температурах обладают ярко выраженными реологическими и наследственно-деформируемыми свойствами. Учет этих свойств материала при проектировании конструкции имеет важное значение для безопасного полета ЛА, и приближает теории расчета к фактическому условию работы конструкции.

■ Не секрет, что учет исчезающих малых внутренних трений материалов конструкции ЛА приводит к уменьшению критической скорости полета (приблизительно в 2,5 раза), приводящей к разрушению конструкции [21].

■ На основе выше изложенного интересными представляются следующие задачи:

1. Построение математических моделей и разработка методов решения в вязкоупругих постановках всех тех задач аэроустойчивости, которые сейчас решены в идеально-упругом приближении. Наиболее важными из этих исследований надо считать следующие:

а) Изгибно-крутильный флаттер наследственно-деформируемого крыла самолета. Эти исследования весьма важны когда центр тяжести и оси жесткости в каждом сечении крыла не совпадают.

б) Разработка методов решения задачи о флаттере позволяющие произвести исследование по экспериментально определенным численным значениям изгибного, крутильного жесткости и массы по размаху крыла.

в) Построение и обоснование численных методов решения задач аэровязкоупругой устойчивости на основе вихревой теории, базирующейся на гипотезе «замена крыла вихревой поверхностью».

2. Исследование явления дивергенции и флаттера наследственно-деформируемых элементов анизотропных тонкостенных конструкций по поршневой теории Ильюшина А.А. на основе современного аппарата численного решения слабо-сингулярных интегралов и интегро-дифференциальных уравнений.

3. Построение и обоснование численного метода решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, а также признание, при возможных случаях, аналитического вида их решений, что весьма важно при решении динамической задачи аэровязкоупругой устойчивости методом, основанным на гипотезе «асимптотика малых отстояний».

4. Разработка четких рекомендаций проектировщикам в целях обеспечения требуемой прочности конструкции ЛА, а также обеспечения безопасности полета при воздействии различного рода статических, динамических и аэродинамических нагрузок при всех режимах полета в течение заданного периода эксплуатации ЛА.

### **§21. Устойчивость нелинейного наследственно-деформируемого аппарата на воздушной подушке**

Одним из эффективных средств уменьшения сопротивления движению транспортных средств является использование воздушной подушки, представляющей собой слой воздуха, повышенного по сравнению с атмосферой давления [11]. Аппараты (в частности, суда) на воздушной подушке приобретают все большее распространение в современной технике. В настоящей работе рассматривается простейшая, так называемая камерная схема такого парящего аппарата, обладающего наследственно-деформируемыми свойствами.

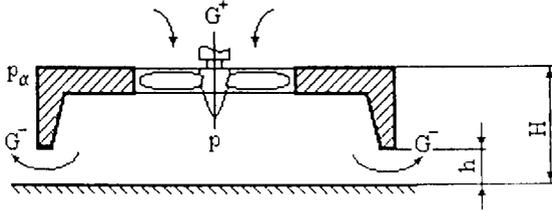


рис. 21.1

В этой схеме (рис. 21.1) воздух нагнетается специальными вентиляторами в пространство под нижней поверхностью аппарата (подкупольный объем) и затем выходит в атмосферу через щелевой зазор, расположенный внизу по периметру аппарата.

Избыточное давление в подушке создает силу поддержания (подъемную силу), уравновешивающую вес аппарата. В зависимости от производительности вентиляторов, возможно равновесное положение аппарата в достаточно широком диапазоне высот, но, как оказывается, не все эти положения устойчивы [11].

Математическую модель задачи построим исходя из постановки задачи, предложенную в [11]. Рассмотрим возмущенное движение аппарата около равновесного положения, имея в виду только вертикальные поступательные перемещения. Введем следующие обозначения:  $P$ ,  $P_u = P - P_a$  - полное и избыточное давление воздуха в подушке ( $P_a$  - атмосферное давление);  $V$  - объем подушки (подкупольный объем);  $\rho$  - плотность воздуха в подушке;  $G^+$  - массовое расхождение воздуха, подаваемого вентиляторами в подкупольный объем;  $G^-$  - массовый расход воздуха, вытекающего из подкупольного объема в атмосферу;  $h$  - высота щелевого зазора;  $H$  - средняя высота подкупольного объема. Значения этих величин для равновесного положения будем обозначать теми же буквами, но с

дополнительным индексом 0. При этом  $G_0^+ = G_0^-$  и верхний индекс можно вообще опустить.

Далее можно записать:

$$V = V_0 \left( 1 - \frac{y}{H} \right), \quad h = h_0 \left( 1 - \frac{y}{h_0} \right) \quad (21.1)$$

, где:  $y = h_0 - h$  - перемещение аппарата.

Связь между давлением в подкупольном объеме и плотностью воздуха примем в виде:  $\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n$ , где:  $n$  - показатель политропы, т.е.:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\Delta P}{n P_0} \right) \quad (21.2)$$

, где:  $\Delta P$  - отклонение давления от равновесного значения.

За основу дальнейших выкладок для установления связи между  $\Delta P$  и  $y$ , используем уравнение массо-обмена:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = G^+ - G \quad (21.3)$$

Согласно работе [11], имеет место следующее приближенное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho V)}{dt} &= \rho_0 V_0 \left( \frac{\Delta \dot{P}}{n P_0} - \frac{\dot{y}}{H} \right); \quad G^+ = G_0 \left( 1 - \frac{\Delta P}{P_{U_0}} \right) \\ G^- &= G_0 \left( 1 - \frac{y}{h_0} \right) \left( 1 - \frac{\Delta P}{P_{U_0}} \right) \approx G_0 \left( 1 + \frac{\Delta P}{2 P_{U_0}} - \frac{y}{h_0} \right) \end{aligned} \quad (21.4)$$

Подставляя (21.4) в (21.3) имеем:

$$a\dot{\sigma} + \sigma = b\dot{y} + cy \quad (21.5)$$

, где:

$$\sigma = F\Delta P; \quad \theta = \frac{\rho_0 V_0}{G_0}; \quad a = \frac{20P_{v_0}}{3nP_0}$$

$$b = \frac{20P_0 F}{3H} = \frac{2mg\theta}{3H}; \quad c = \frac{2P_{v_0} F}{3h_0} = \frac{2mg}{3h_0}$$

$F$  - площадь горизонтальной проекции подкупольного объема.

Нетрудно заметить, что модель (21.5) ничем не отличается от модели стандартного вязкоупругого тела [12]. Следовательно, воздушная подушка обладает свойствами сложной вязкоупругой подвески и определяющие соотношения, связывающие  $\sigma$  и  $y$ , можно записать как наследственного типа с экспоненциальными ядрами релаксации, т.е.:

$$\sigma = \frac{b}{a} [y(t) - \int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau] \quad (21.6)$$

, где:

$$R(t-\tau) = \left(\frac{1}{a} - \frac{c}{b}\right) e^{-\frac{1}{a}(t-\tau)} \quad (21.7)$$

Хотя соотношения (21.6) с экспоненциальными ядрами (21.7) учитывают как ползучесть деформаций, так и релаксации напряжений, они имеют один серьезный недостаток, т.к. скорость перемещения  $\dot{y}(t)$  в начальный момент времени имеет конечные значения, а эксперимент показывает ее равенство бесконечности. Этот недостаток легко устранить, введя слабо-сингулярные особенности ядра релаксации (21.7) следующим образом [13]:

$$R(t - \tau) = \left(\frac{1}{a} - \frac{c}{b}\right) e^{-\frac{1}{a}(t-\tau)} (t - \tau)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (21.8)$$

Если теперь учесть, что более 70% материалов воздушных судов изготовлены из композитных материалов [14], то нетрудно заметить, что связь между  $\sigma$  и  $y$  должна подчиниться нелинейному закону наследственной теории вязкоупругости [8], т.е.:

$$\sigma = \frac{b}{a} [(y(t) - \gamma y^3(t)) - \int_0^t R(t - \tau) [y(\tau) - \gamma y^3(\tau)] d\tau] \quad (21.9)$$

Определяющие соотношения (21.9) являются достаточно общими, так как из них, в частности, можно получить модели стандартного вязкоупругого тела с ядрами релаксации (21.7), а полагая коэффициенты нелинейности  $\gamma = 0$ , получим общеизвестные зависимости линейной наследственной теории вязкоупругости.

При возмущенном движении аппарата имеет место равенство [11]:

$$m\ddot{y}(t) + \sigma = 0 \quad (21.10)$$

Подставляя (21.9) в (21.10), получим слабо-сингулярные интегродифференциальные уравнения (ИДУ) задачи устойчивости нелинейного наследственно-деформируемого аппарата на воздушной подушке, которые в безразмерных координатах можно записать в виде:

$$\ddot{U}(t) + [U(t) - \gamma U^3(t)] - (\mu - N) \int_0^t \Gamma(t - \tau) [U(\tau) - \gamma U^3(\tau)] d\tau = 0 \quad (21.11)$$

, где:

$$\mu = \frac{3nP_0}{2P_{U_0}}; \quad N = \frac{H}{h_0}; \quad \Gamma(t - \tau) = A_0 e^{-\beta(t-\tau)} (t - \tau)^{\alpha-1}$$

ИДУ (21.11) вместе с начальными условиями:

$$U(0) = U_0, \quad \dot{U}(0) = \dot{U}_0 \quad (21.12)$$

представляет математическую модель поставленной задачи. Здесь неизвестными являются  $U(t)$  и  $N$ . Требуется найти те значения  $N$ , при которых происходит автоколебательный процесс. Под автоколебанием понимаются незатухающие колебания, возбуждаемые силами, вызывающие деформации вибрирующей системы. Деформации, возникающие при вибрации системы, весьма опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере устойчивости и развитию усталостных трещин.

Точное решение ИДУ (21.11) не представляется возможным, поэтому численное решение его при начальных условиях (21.12) находим методом, предложенным в работе [1], т.е.:

$$U_n = U_0 + t_n \dot{U}_0 - \sum_{j=1}^{n-1} a_j (t_n - t_j) [U_j - \gamma U_j^3 - \frac{(\mu - N) A_0}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta k n} \{U_{j-k} - \gamma U_{j-k}^3\}] \quad (21.13)$$

где:

$$t_n = n\Delta t, \quad a_j = \Delta t, \quad j = 1, n-1, \quad a_0 = a_n = \Delta t / 2$$

$$U(t_n) = U_n, \quad B_k = \Delta t^\alpha [(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha] / 2, \quad k = 1, j-1$$

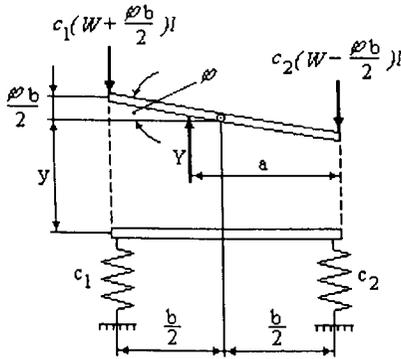
$$B_0 = \Delta t^\alpha / 2, \quad B_j = \Delta t^\alpha [j^\alpha - (j-1)^\alpha] / 2$$

Из анализа решения ИДУ (11) следует, что при  $\mu - N > 0$  как в линейном, так и в нелинейном случае происходит затухающий колебательный процесс. Скорость затухания, т.е. диссипативные характеристики системы существенным образом зависят от реологических параметров  $A_0$ ,  $\beta$  и  $\alpha$ . Установлено, что чем меньше параметр сингулярности  $\alpha$  материала конструкции, тем выше демпфирующие свойства этих материалов. Автоколебательный процесс происходит только при  $\mu - N < 0$ , отсюда следует, что аппарат устойчив лишь при достаточно больших равновесных высотах парения, причем критическая  $N_{кр} =$

$= (H/h_0)_{кр} = \frac{3nF_0}{2P_{U_0}}$ , что полностью совпадает с результатами, полученными в [11]. Влияние учета физической нелинейности и реологических параметров на  $N_{кр}$  нетрудно показать с помощью вычислительного эксперимента на основе разработанного алгоритма (21.13).

## §22. Исследование одной нелинейной задачи классического флаттера наследственно деформируемых систем

Из классов задач классического флаттера рассматриваются задачи динамической аэроустойчивости неупруго закрепленной удлиненной пластинки, изображенной на рис. 22.1; предполагается, что горизонтальные перемещения невозможны и она имеет две степени свободы, т.е.



положение системы характеризуется двумя координатами – углом поворота  $\varphi = \varphi(t)$  и вертикальным перемещением  $w = w(t)$  [11].

Размер пластинки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, обозначим через  $l$ , коэффициенты мгновенной жесткости опор  $C_1$  и  $C_2$

будем относить к единице длины пластинки в указанном направлении. Обозначим через  $m$  массу, соответствующую единице площади срединной пластинки.

Если колебания происходят в потенциальном потоке газа, то на пластинку всегда действуют различные возмущающие силы. Среди них самым опасным, вызывающим явление флаттера являются аэродинамические силы, которые состоят из двух составляющих: одни которые носят название *возбуждающих*, действуют в том же направлении, в каком идет деформация и стремятся дальше увеличить последнюю; другие, так называемые *демпфирующие*, которые действуют в сторону, противоположную возникающей деформации, и стремятся вернуть пластинку в положение равновесия. Подробный анализ показывает, что аэродинамические демпфирующие силы растут пропорционально скорости. Силы же возбуждения растут пропорционально квадрату скорости потока [15, 16]. При этом подъемные силы, приложенные на расстоянии  $a$  от правого края пластинки можно представить так:

$$Y = C_y^\alpha b l \rho (V^2 \varphi - VW) / 2 \quad (22.1)$$

Здесь,  $C_y^\alpha$  – аэродинамический коэффициент подъемной силы,  $\rho$  – плотность воздуха,  $V$  – скорость потока.

Если предположить, что реакции наследственно-деформируемых опор нелинейно зависят от угла поворота и перемещения краев пластинки, то согласно [11, 17], имеем:

$$\begin{aligned} R_1 &= -IC_1(1 - R^*) \left[ \left( W + \frac{b\varphi}{2} \right) - \gamma \left( W + \frac{b\varphi}{2} \right)^3 \right] \\ R_2 &= -IC_2(1 - R^*) \left[ \left( W - \frac{b\varphi}{2} \right) - \gamma \left( W - \frac{b\varphi}{2} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (22.2)$$

где:  $R^* f(t) = \int_0^t R(t - \tau) f(\tau) d\tau$ ,

$R(t)$  – ядро наследственности имеющей слабо-сингулярные особенности типа Абеля, т.е.:  $R(t) = \varepsilon e^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Приводя эти реакции к центру тяжести пластинки, получаем силу:

$$R_3 = R_1 + R_2 \quad (22.3)$$

и пару с моментом:

$$M = \bar{R}_3 b / 2, \quad \bar{R}_3 = R_1 - R_2$$

Составим интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) движения. Одно из них описывает вертикальное движение центра тяжести пластинки:

$$Y + R_3 = mbl \dot{W} \quad (22.5)$$

, а другое – поворот пластинки вокруг горизонтальной оси  $z$ , проходящей через тяжести:

$$Y \left( a - \frac{b}{2} \right) + M = \frac{mb^3 l}{12} \ddot{\varphi} \quad (22.6)$$

Здесь,  $mbl$  – масса всей пластинки.

Подставляя (22.1) – (22.4) в (22.5) (22.6), и переходя к безразмерным переменным:

$$b\varphi = u, \quad t = \sqrt{\frac{C_1}{mb}} \tau, \quad V = \sqrt{\frac{2C_1}{C_y^\alpha \rho}} N, \quad \chi = \frac{C_y \rho b}{2m}, \quad \frac{a}{b} = \theta \quad (22.7)$$

Получим следующую систему нелинейных ИДУ:

$$\begin{aligned} W + (1 - R^*) \left[ \left( W + \frac{u}{2} \right) - \gamma \left( W + \frac{u}{2} \right)^3 \right] + \frac{C_2}{C_1} (1 - R^*) \left[ \left( W - \frac{u}{2} \right) - \gamma \left( W - \frac{u}{2} \right)^3 \right] - \\ - N^2 u + \chi N W = 0 \end{aligned} \quad (22.8)$$

$$\begin{aligned} u + 6(1 - R^*) \left[ \left( W + \frac{u}{2} \right) - \gamma \left( W + \frac{u}{2} \right)^3 \right] + 6 \frac{C_2}{C_1} (1 - R^*) \left[ \left( W - \frac{u}{2} \right) - \gamma \left( W - \frac{u}{2} \right)^3 \right] + \\ + 6(1 - 2\theta) (N^2 u - \chi N W) = 0 \end{aligned}$$

Требуется найти критическую скорость флаттера  $N_{кр}$  из решения системы ИДУ (22.8), удовлетворяющее начальным условиям:

$$W|_{t=0} = W_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = \dot{W}_0, \quad U|_{t=0} = U_0, \quad \dot{U}|_{t=0} = \dot{U}_0 \quad (22.9)$$

Для этого решим систему ИДУ (22.8) при начальных условиях (22.9) методом, изложенным в работе [1]:

$$\begin{aligned} W_n = & \left( (1 + \chi N t_n) W_0 + \dot{W}_0 t_n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j (t_n - t_j) \left( W_j + (0.5 - N^2) U_j - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right)^3 + \frac{C_2}{C_1} \left[ \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right) - \gamma \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right)^3 \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ W_{j-k} + \frac{u_{j-k}}{2} - \gamma \left( W_{j-k} + \frac{u_{j-k}}{2} \right)^3 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{C_2}{C_1} \left[ \left( W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2} \right) - \gamma \left( W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2} \right)^3 \right] \right] \right\} - \chi N \sum_{j=0}^{n-1} a_j W_j \right) / \left( 1 + \frac{\Delta t}{2} \chi N \right). \end{aligned} \quad (22.10)$$

$$\begin{aligned} U_n = & U_0 + \dot{U}_0 t_n - 6(1 - 2\theta) \chi N t_n W_0 - \\ & - 6 \sum_{j=0}^{n-1} a_j (t_n - t_j) \left\{ W_j + (0.5 + (1 - 2\theta) N^2) U_j - \gamma \left( W_j + \frac{U_j}{2} \right)^3 + \right. \\ & \left. + \frac{C_2}{C_1} \left[ \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right) - \gamma \left( W_j - \frac{U_j}{2} \right)^3 \right] - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ W_{j-k} + \frac{U_{j-k}}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma \left( W_{j-k} + \frac{u_{j-k}}{2} \right)^3 + \frac{C_2}{C_1} \left[ \left( W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2} \right) - \gamma \left( W_{j-k} - \frac{U_{j-k}}{2} \right)^3 \right] \right] \right\} + \\ & + 6(1 - 2\theta) \chi N \sum_{j=0}^n a_j W_j \end{aligned}$$

, где:

$$t_n = n\Delta t, \quad a_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad a_0 = a_n = \Delta t/2, \quad w(t_n) = w_n, \quad U(t_n) = U_n, \\ B_k = \Delta t^\alpha [(k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha]/2, \quad k = \overline{1, j-1}, \quad B_0 = \Delta t^\alpha/2, \quad B_j = \Delta t^\alpha [j^\alpha - (j-1)^\alpha]$$

Создано математическое обеспечение для численной реализации алгоритмов расчета. Расчет произведен как в идеальном упругой линейной и нелинейной ( $\varepsilon=0$ ), так вязкоупругой линейной и нелинейной постановках с учетом и без учета аэродинамического демпфирования при следующих исходных данных [18]:

$$\chi = 1.4; \quad \Theta = 1/2, 3/4; \quad C_2/C_1 = 1, 1/2, 2/3, 3/4, 3/2$$

Как известно, тестирование является одним из возможных способов проверка точности методика расчета и достоверности полученных результатов исследований. С той цели используем результаты решения задачи классического флаттера для упруго закрепленного удлиненного пластинки в линейной постановки без учета демпфирующих слагаемых аэродинамических сил [1]. Если исправить технические ошибки допущенные в [11], то при  $\Theta = 1/2$  критической скорости вычисляется по формуле:  $N^2 = -C/B$ , а при  $\Theta \neq 1/2$  по формуле:

$$N^2 = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C}, \quad A = 9(1 - 2\Theta)^2, \quad (22.11)$$

$$B = 6 \left[ -2\Theta + (4\Theta - 3) \frac{C_2}{C_1} \right], \quad C = 3 \left[ 1 - \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^2 \right] + \left( 1 - 2 \frac{C_2}{C_1} \right)^2.$$

В таблице 22.1 приведены численные значение критической скорости флаттера при различных механических параметров, найденные по точной (22.11) и предлагаемой методике расчета. Сопоставительный анализ результатов расчета приведенной данной таблице показывает

достоверность и высокую точность предлагаемой методики расчета. В общем случае результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 22.2 - 22.4 при  $\Theta = 1/2$ .

Получена кривая, характеризующая переходный процесс для функции  $W$  во времени при различных  $N$  в идеально упругом линейном случае с учетом аэродинамического демпфирования (рис. 22.2а). Аналогичные кривые получены для вязкоупругого случая при:  $\varepsilon=0.1$ ;  $\alpha=0.25$ ;  $\beta=0.05$ ;  $\gamma=0$  (рис.22.2б).

Анализируя эти кривые, не трудно определить критические скорости флаттера. В самом деле из табл. 22.2 видно что, критическая скорость  $N_{кр}$ , с которой начинается быстрый рост функции  $W$  (аналогично функции  $U$ ) по времени в идеально-упругом случае с учетом аэродинамического демпфирования, равна:  $N_{кр}=0,503$ ,  $t_{кр}=17$ ; а в вязкоупругом случае:  $N_{кр}=0,35$ ,  $t_{кр}=27$ .

Также получен закон движения функции  $W$  (аналогично функции  $U$ ) по времени при различных  $N$  в нелинейно-упругом случае без учета (рис. 22.3а) и с учетом (рис. 22.3б) аэродинамического демпфирования и аналогичные результаты для вязкоупругого случая при:  $\varepsilon = 0.1$ ;  $\alpha = 0.25$ ;  $\beta=0.05$ ;  $\gamma=0.5$ ;  $\chi=1.4$ .

Анализ результатов, приведенных на рисунках и в таблицах представляет интерес по двум причинам. Во-первых, превышение критической скорости флаттера в идеально-упругом случае не означает немедленного разрушения конструкции, а разрушение наступает лишь спустя определенный период и носит усталостный характер. Для того, чтобы найти ожидаемый срок службы конструкции, необходимо определить амплитуду ее колебаний в области флаттера с учетом нелинейных и наследственно-деформируемых свойств материала

конструкции. Во-вторых, критическая скорость определяемая методами идеально-упругих приближений, как в линейной, так и в нелинейной упругих постановках, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций.

Таким образом, предложенная методика численного решения носит универсальный характер для исследования колебательной неустойчивости, т.е. автоколебаний как в линейной и нелинейной идеально-упругой, так и наследственной-деформируемой удлиненной пластинке в потенциальном потоке газа. Как видно из приведенных таблиц, учет наследственно-деформируемых свойств материала в некоторых случаях приводит к уменьшению критической скорости почти в 2,5 раза и к увеличению критической времени флаттера в 1,7 раз.

Вычислительные эксперименты показали (см. табл. 22.2), что влияние параметра затухания  $\beta$  в ядре наследственности на критическую скорость флаттера по сравнению с параметром вязкости  $\varepsilon$  и сингулярности  $\alpha$  оказалось незначительным, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы – экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкции. Из таблицы видно, что незначительное уменьшение параметра сингулярности  $\alpha$  или незначительное увеличение параметра  $\varepsilon$  приводит к существенному уменьшению критической скорости флаттера.

Учет аэродинамического демпфирования в вязкоупругом случае приводит к увеличению критической скорости флаттера. Это можно объяснить тем, что в вязкоупругом случае демпфирующие слагаемые аэродинамических сил оказываются дестабилизирующим фактором, вызывающим колебательную неустойчивость наследственно-деформируемых систем.

табл. 22.1.

$\theta$	$c_2 / c_1$	1	1/2	2/3	3/4	3/2
1/2		0.288 (0.29)	0.5 (0.5)	0.421 (0.421)	0.39 (0.39)	0.129 (0.129)
3/4		0.324 (0.34)	0.47 (0.52)	0.425 (0.456)	0.4 (0.43)	0.165 (0.166)

табл. 22.2.

$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\chi$	$\gamma$	$N_{W_{кр}}^{ММН}$	$N_{U_{кр}}^{ММН}$	$N_{W_{кр}}^{НЕММН}$	$N_{U_{кр}}^{НЕММН}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.502	0.5	----	----
			1.4		0.503	0.5	----	----
0.0	0.0	0.0	0.0	0	----	----	0.426	0.426
			1.4		----	----	0.427	0.427
0.04	0.25	0.05	0.0	0.0	0.46	0.46	----	----
0.08					0.39	0.4	----	----
0.1					0.35	0.36	----	----
0.1	0.25	0.05	1.4	0.0	0.35	0.37	----	----
0.04	0.25	0.05	0.0	0.5	----	----	0.28	0.28
0.08					----	----	0.21	0.21
0.1					----	----	0.17	0.17
0.1	0.25	0.05	1.4	0.5	----	----	0.19	0.19
0.1	0.15	0.05	0.0	0.0	0.16	0.17	----	----
	0.2				0.25	0.25	----	----
	0.3				0.33	0.33	----	----
0.1	0.2	0.05	0.0	0.5	----	----	0.02	0.02
	0.25				----	----	0.17	0.17
	0.3				----	----	0.25	0.25
0.1	0.25	0.01	0.0	0.5	----	----	0.176	0.176
		0.03			----	----	0.173	0.173
		0.08			----	----	0.163	0.163
0.1	0.25	0.05	0.0	0.6	----	----	0.08	0.08
				0.4	----	----	0.24	0.24
				0.2	----	----	0.35	0.35

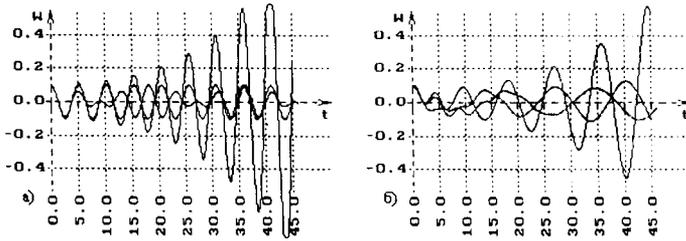


рис. 22.2. а)  $N = 0.48 ; 0.5 ; 0.503$  б)  $N = 0.2 ; 0.25 ; 0.35$

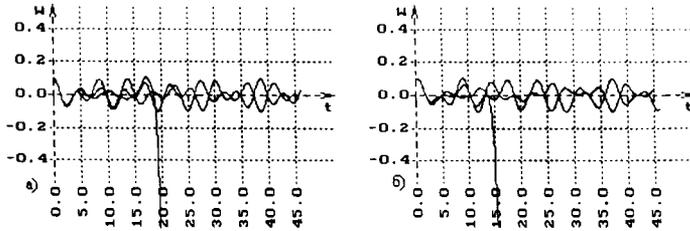


рис. 22.3. а)  $N = 0.4 ; 0.42 ; 0.426$  б)  $N = 0.4 ; 0.42 ; 0.427$

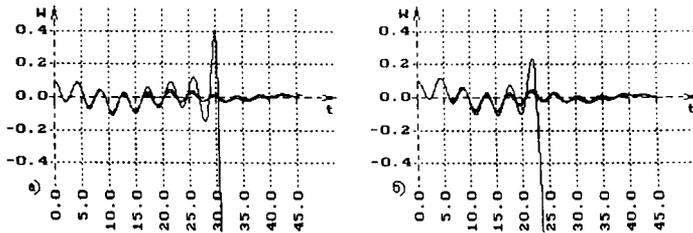


рис. 22.4. а)  $N = 0.15 ; 0.16 ; 0.17$  б)  $N = 0.17 ; 0.18 ; 0.19$

### §23. Исследование одной нелинейной задачи классического флаттера для реальных профилей крыла с нелинейной наследственно-деформируемой подвеской

Рассмотрим крыло с прямой осью центров изгиба, направленной перпендикулярно к потоку (рис. 23.1).

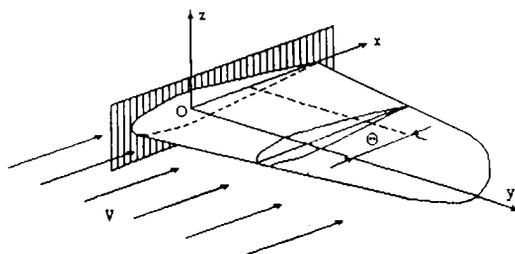


рис. 23,1

Крыло будем трактовать как наследственно-деформируемый стержень, жесткость которого в направлении потока максимальна и весьма велика по сравнению с другой изгибной жесткостью, а также с крутильной жесткостью. При этих условиях деформированное состояние крыла может быть охарактеризовано смещениями центров изгиба  $W$  и угловыми поворотами поперечных сечений  $\varphi$ . Таким образом, при полете летательного аппарата под действием потока происходит так называемое явление классического флаттера изгибно-крутильной колебательной неустойчивости крыла самолета.

Известно [11, 15, 17, 20, 22, 23] несколько видов классического флаттера несущих поверхностей самолета, причем для обнаружения колебательной неустойчивости (автоколебания) необходимо учитывать, по крайней мере, две степени свободы колебательной системы. Типичным видом классического флаттера является изгибно-крутильный флаттер крыла самолета [11, 20, 23]; при исследовании возможности его появления

учитывается изгиб и закручивание крыла. Физически этой модели соответствует реальный профиль самолетного крыла, имеющий поступательную (поперечную - относительно потока) степень свободы  $W$  и закручивающую  $\varphi(t)$  (рис. 23.2).

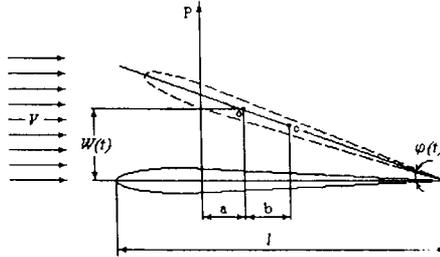


рис. 23.2

В данном параграфе рассматривается флаттер нелинейного наследственно-деформируемого крыла, имеющего две степени свободы, соответствующие вертикальному перемещению  $W(t)$  и углу поворота  $\varphi(t)$ .

Тогда, согласно нелинейной наследственной теории Больцмана-Вольтерра [8, 17], аэродинамическая сила  $P$  и момент  $M$ , приложенные в точке  $O$  будут равны соответственно:

$$\begin{aligned} P &= C_w (1 - R^*) (W - \gamma W^3) \\ M &= C_\alpha (1 - R^*) (\varphi - \gamma \varphi^3) \end{aligned} \quad (23.1)$$

, где:  $C_\alpha$  и  $C_w$  – коэффициенты мгновенной жесткости при изгибе и кручении,  $\gamma, \gamma_l$  – коэффициенты физической нелинейности,

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t - \tau) f(\tau) d\tau ,$$

$R(t)$  – ядро релаксации, имеющей слабо-сингулярные особенности типа Абеля, т. е.:

$$R(t) = \varepsilon e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, 0 < \alpha < 1.$$

Теперь, согласно принципу Даламбера, учитывая силу инерции и момент сил инерции относительно точки  $O$ , из (23.1) получим систему уравнений движения изгибно-крутильных колебаний наследственно-деформируемого крыла:

$$\begin{aligned} m(\ddot{W} - b\ddot{\varphi}) + C_w(1 - R^*)(W - \gamma W^3) &= P \\ -mb\ddot{W} + m(r^2 + b^2)\ddot{\varphi} + C_\alpha(1 - R^*)(\varphi - \gamma_1\varphi^3) &= Pa \end{aligned} \quad (23.2)$$

Здесь  $b$  – расстояние от центра жесткости до центра массы крыла;  $m$  – масса,  $r$  – радиус инерции массы крыла относительно центральной оси.

Наибольшие трудности представляет собой определение изменений аэродинамических сил  $P$ , возникающих в связи с движением крыла. Если колебания происходят в потенциальном потоке газа, то на крыло всегда действуют различные возмущающие силы. Среди них самым опасным, вызывающим явление флаттера, являются аэродинамические силы, которые состоят из двух составляющих: одна из которых носит название возбуждающей и действует в том же направлении, в каком идет деформация и стремится дальше увеличить последнюю; другая – так называемый демпфирующая, которая действует в сторону противоположную возникающей деформации, и стремится вернуть крыло в положение равновесия. Подробный анализ показывает, что аэродинамические демпфирующие силы растут пропорционально скорости, а силы возбуждения растут пропорционально квадрату скорости потока [16, 18]. В этом предположении из (1.2) получаем увеличение подъемной силы и момента:

$$P = \pi \rho F(V^2 \varphi - V\dot{W}), M = -Pa \quad (23.3)$$

, где:  $\rho$  – плотность воздуха,  $V$  – скорость потока,  $F$  – площадь крыла,  $a$  – расстояние от центра жесткости до центра давления (который расположен на одной четверти хорды крыла).

Подставляя (23.3) в (23.2) и переходя к безразмерным переменным:

$$b\varphi = u, \bar{t} = \sqrt{\frac{C_w}{m}} \times t, V = \omega \ell N, \omega = \sqrt{\frac{C_a}{m(b^2 + r^2)}}, \mu = \frac{4m}{\rho \pi F \ell}, \frac{C_a}{C_w b^2} = \chi,$$

, получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{W} + \theta_1(1 - R^*) \left[ (W - \gamma W^3) + \frac{\theta_2}{\theta_1} (U - \gamma_2 U^3) \right] - \theta_3 N^2 U + \theta_{13} N \dot{W} &= 0 \\ \ddot{U} + \left( \frac{b}{r} \right)^2 \left\{ [1 - R^*] [(W - \gamma W^3) + \chi (U - \gamma_2 U^3)] - \theta_4 N^2 U + \theta_{14} N \dot{W} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (23.4)$$

, где:

$$\theta_1 = 1 + \left( \frac{b}{r} \right)^2, \theta_2 = \chi \left( \frac{b}{r} \right)^2, \theta_3 = \frac{4}{\mu} \times \frac{\chi}{1 + \left( \frac{r}{b} \right)^2} \times \frac{\ell}{b} \times \left( 1 + \frac{ab}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

$$\theta_4 = \frac{4}{\mu} \times \frac{\chi}{1 + \left( \frac{r}{b} \right)^2} \times \frac{\ell}{b} \times \left( 1 + \frac{a}{b} \right), \theta_{13} = \frac{4}{\mu} \times \sqrt{\frac{\chi}{1 + \left( \frac{r}{b} \right)^2}} \times \left( 1 + \frac{ab}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

$$\theta_{14} = \frac{4}{\mu} \times \sqrt{\frac{\chi}{1 + \left( \frac{r}{b} \right)^2}} \times \left( 1 + \frac{a}{b} \right), \gamma_2 = \frac{\gamma_1}{b^3}$$

Решая систему, ИДУ (23.4) при начальных условиях:

$$W|_{t=0} = W_0, \dot{W}|_{t=0} = 0, U|_{t=0} = U_0, \dot{U}|_{t=0} = 0 \quad (23.5)$$

методом, изложенным в работе [1], имеем:

$$\begin{aligned} W_n = & \left( (1 + \theta_{13} t_n N) W_0 - \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t_n - t_j) \left\{ \theta_1 (W_j - \gamma W_j^3) + (\theta_2 - \theta_3 N^2) U_j - \right. \right. \\ & \left. \left. - \theta_2 \gamma_2 U_j^3 - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ \theta_1 (W_{j-k} - \gamma W_{j-k}^3) + \theta_2 (U_{j-k} - \gamma U_{j-k}^3) \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \theta_{13} N \sum_{j=0}^{n-1} c_j W_j \right) / (1 + \theta_{13} c_n N), \end{aligned} \quad (23.6)$$

$$\begin{aligned} U_n = & U_0 + \theta_{14} \left( \frac{b}{r} \right)^2 t_n N W_0 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t_n - t_j) \left\{ W_j - \gamma W_j^3 + (\chi - \theta_4 N^2) U_j - \right. \\ & \left. \chi \gamma_2 U_j^3 - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=0}^j B_k e^{-\beta t_k} \left[ W_{j-k} - \gamma W_{j-k}^3 + \chi (U_{j-k} - \gamma_2 U_{j-k}^3) \right] \right\} - \theta_{14} \left( \frac{b}{r} \right)^2 N \sum_{j=0}^n c_j W_j, \end{aligned}$$

, где:

$$\begin{aligned} t_n = n\Delta t, \quad c_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad c_0 = c_n = \frac{\Delta t}{2}, \quad B_k = \frac{\Delta t^\alpha \left[ (k+1)^\alpha - (k-1)^\alpha \right]}{2}, \\ k = \overline{1, j-1}, \quad B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}, \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha \left[ j^\alpha - (j-1)^\alpha \right]}{2}. \end{aligned}$$

Определение критических скоростей полета, при которых начинается флаттер или дивергенция летательного аппарата (ЛА), является одной из важнейших задач проблем аэроустойчивости. Решение его сводится к исследованию колебательной неустойчивости невозмущенного движения ЛА на основе разработанного вычислительного аппарата (23.6) и специального алгоритма поиска критической скорости, основанной на вычислительном эксперименте при заданных геометрических и механических параметрах. Согласно этой методике потери динамической устойчивости определяется из условий существования незатухающих

гармонических колебаний с постоянной возрастающей амплитудой (критическое время, критическая скорость). Для всех  $N < N_{кр}$  т.е. сверхзвукового обтекания со скоростью потока меньшей критической скорости флаттера закон изменения  $W$  и  $U$  во времени происходит по затухающему гармоническому колебанию, а для  $N > N_{кр}$  с некоторого момента времени происходит начало быстрого роста амплитуды колебаний во времени т.е. происходит потери устойчивости конструкции. Для нахождения  $N = N_{кр}$  рассматриваются числа  $N_1$  и  $N_2$ , расположенные на интервале  $(A, B)$  таким образом, что  $A < N_1 < N_2 < B$  при  $t_1 < t < t_2$ . Сравнивая закон изменения  $W$  и  $U$  при  $N = N_1$  и  $N = N_2$ , можно сделать следующие выводы:

1) если  $N < N_2$  при  $t < t_1$  закон изменения функции  $W$  и  $U$  близко к гармоническому, то  $N_{кр}$  не может быть на интервале  $(A, N_1)$ , т.е.,  $N_{кр}$  лежит на интервале  $(N_1, B)$ ,  $t_{кр}$  лежит в интервале  $(t_1 < t_{кр} < \infty)$ ;

2) при  $N > N_1$  наблюдается быстрый рост функции  $W$  и  $U$  во времени. то  $N_{кр}$  лежит на интервале  $(A, N_1)$ ,  $t_{кр}$  лежит на интервале  $(0, t_1)$ . Процессы 1) и 2), т.е. процесс исключения интервалов, не происходящих не желательных явлений повторяется для  $(A, N_1)$  или  $(N_1, B)$  и т.д. Поиск завершается тогда, когда оставшийся подинтервал уменьшается до достаточных малых размеров.

Создано математическое обеспечение для численной реализации алгоритмов расчета. Расчет произведен как для идеально-упругой линейной и нелинейной ( $\varepsilon = 0$ ), так вязкоупругой линейной и нелинейной постановок с учетом и без учета аэродинамического демпфирования при следующих исходных данных [18]:

$$\chi = 1/10, \quad \mu = 10, \quad a = 0.11, \quad b = 0.051, \quad (r/b)^2 = 0.06$$

Реологические параметры: коэффициент вязкости  $\varepsilon$ , параметр сингулярности  $\alpha$ , параметр затухания  $\beta$  и коэффициенты нелинейности  $\gamma$ ,  $\gamma_2$  принимают различные значения. Численные результаты приведены на рис. 23.3–23.6 и в таблице.

Кривая, характеризующая переходный процесс для функции  $W$  во времени в различных идеально-упругих линейных и нелинейных случаях без учета а) и с учетом б) аэродинамическим демпфирования приведены на рис. 23.3–23.4. Аналогичные кривые для вязкоупругого случая при:  $\varepsilon=0.1$ ;  $\alpha=0.25$ ;  $\beta=0.05$ ;  $\gamma = \gamma_2 = 0$  и  $\gamma = \gamma_2 = 1$  приведены на рис. 23.5–23.6.

Анализируя кривые, приведенные на этих рисунках, не трудно определить критические скорости флаттера. В самом деле, из рис. 23.3–23.4 видно, что критическая скорость  $N_{кр}$ , с которой начинает быстрый рост функции  $W$  (аналогично функции  $U$ ) во времени в идеально-упругом случае без учета и с учетом аэродинамического демпфирования равны соответственно:  $N_{кр} = 0.765$ ;  $N_{кр} = 0.45$  (для линейного случая:  $N_{кр}=0.81$ ;  $N_{кр}=0.68$ ), а в вязкоупругом (рис. 23.4–23.5):  $N_{кр}=0.66$ ;  $N_{кр}=0.685$  (для линейного случая:  $N_{кр}=0.668$ ;  $N_{кр}=0.73$ ).

Анализ результатов приведенных на этих рисунках, а также в таблице 23.1 представляет интерес по следующим причинам:

Во-первых, превышение критической скорости флаттера в идеально-упругом случае не означает немедленного разрушения конструкции, а разрушение наступает лишь спустя определенный период и носит усталостный характер. Для того, чтобы получить ожидаемый срок службы конструкции, необходимо определить амплитуду ее колебаний в области флаттера с учетом нелинейных и наследственно-деформируемых свойств материала конструкции.

Во-вторых, критическая скорость определяемая методами идеально-упругих приближений, как в линейно, так и в нелинейно-упругих постановках, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкции.

Таким образом, предложенная методика численного решения носит универсальный характер для исследования колебательной неустойчивости, т.е. автоколебания как в линейной и нелинейной идеально-упругой, так и наследственной-деформируемой крыле в потенциальном потоке газа. Как видно из таблицы 23.1 учет наследственно-деформируемых свойств материала в некоторых случаях приводит почти два раза уменьшению критической скорости флаттера. Подобные эффекты были обнаружены в [28] с помощью других методов при учете исчезающей малой внутреннего трения материала конструкции. В достоверности полученных результатов

можно убедиться сопоставлением с известными результатами других авторов. В самом деле, предлагаемая методика для линейного идеально-упругого крыла без учета аэродинамического демпфирования дает:  $N_{кр}=0.81$ , а в [18] и [23]  $N_{кр}=0.826$  и  $N_{кр}=1$ .

Вычислительные эксперименты показали (см. табл.23.1), что влияние параметра затухания  $\beta$  в ядре наследственности на критическую скорость флаттера по сравнению с параметром вязкости  $\varepsilon$  и сингулярности  $\alpha$  оказалось незначительным, что еще раз подтвердило общезвестные истины – экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкции.

Из таблицы 23.1 видно, что незначительное уменьшение параметра сингулярности  $\alpha$  или незначительное увеличение параметра  $\varepsilon$  приводит к существенному уменьшению критической скорости флаттера. Следовательно, учет этого эффекта при проектировании конструкции ЛА имеет важное значение для обеспечения безопасности полета - чем меньше параметр сингулярности материала конструкции, тем выше интенсивность диссипативных процессов в этой конструкции.

Учет аэродинамического демпфирования в идеально-упругом случае приводит к уменьшению, а в вязкоупругом – к увеличению критической скорости флаттера. Это можно объяснить тем, что поддержание аэродинамического демпфирования незатухающих колебаний происходит только при учете реальных свойств материала конструкции.

таблица 23.1.

$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\theta_{13}$	$\theta_{14}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$U_{лин}$	$W_{лин}$	$U_{нел}$	$W_{нел}$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
0.0	0.0	0.0	0.0 1.423	0.0 3.794	0.0	0.0	0.81 0.68	0.81 0.68	---- ----	---- ----
0.0	0.0	0.0	0.0 1.423	0.0 3.794	1.0	1.0	---- ----	---- ----	0.765 0.45	0.765 0.45
0.05 0.08 0.1	0.25	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.72 0.7 0.668	0.72 0.7 0.668	---- ---- ----	---- ---- ----
0.1	0.25	0.05	1.423	3.794	0.0	0.0	0.73	0.73	----	----
0.04 0.08 0.1	0.25	0.05	0.0	0.0	1.0	1.0	---- ---- ----	---- ---- ----	0.712 0.683 0.66	0.712 0.683 0.66
0.1	0.25	0.05	1.423	3.794	1.0	1.0	----	----	0.685	0.685
0.1	0.14 0.18 0.3	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.45 0.615 0.705	0.45 0.615 0.705	---- ---- ----	---- ---- ----
0.1	0.14 0.18 0.3	0.05	0.0	0.0	1.0	1.0	---- ---- ----	---- ---- ----	0.35 0.59 0.69	0.35 0.59 0.69
0.1	0.25	0.01 0.03 0.08	0.0	0.0	1.0	1.0	---- ---- ----	---- ---- ----	0.661 0.661 0.658	0.661 0.661 0.658
0.1	0.25	0.05	0.0	0.0	10.0 7.0 4.0	10.0 7.0 4.0	---- ---- ----	---- ---- ----	0.605 0.642 0.649	0.605 0.642 0.649

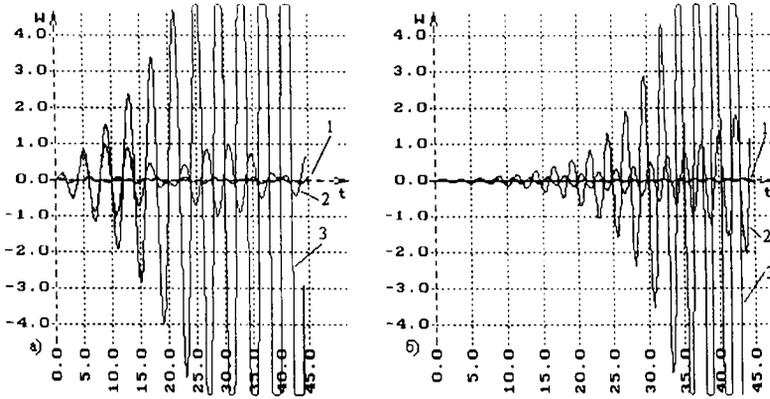


рис. 23.3

а)  $\epsilon = 0.0$ ;  $\gamma = 0.0$ ;  $\gamma_2 = 0.0$ ; без делт.  $N = (0.6, 0.8, 0.81)$

б)  $\epsilon = 0.0$ ;  $\gamma = 0.0$ ;  $\gamma_2 = 0.0$ ; с уч. делт.  $N = (0.5, 0.62, 0.68)$

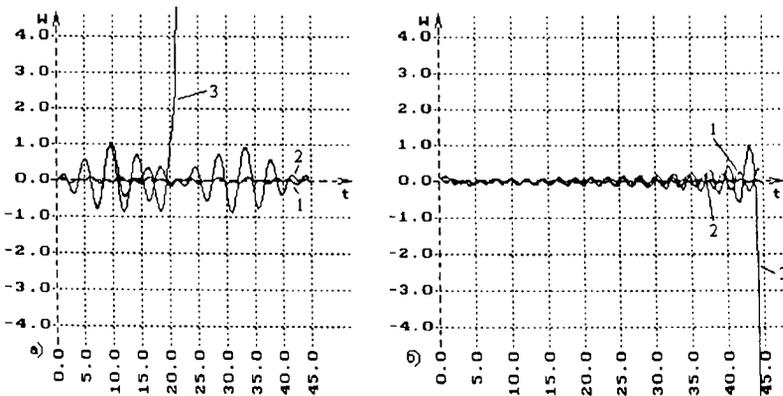


рис. 23.4

а)  $\epsilon = 0.0$ ;  $\gamma = 1.0$ ;  $\gamma_2 = 1.0$ ; без делт.  $N = (0.6, 0.764, 0.765)$

б)  $\epsilon = 0.0$ ;  $\gamma = 1.0$ ;  $\gamma_2 = 1.0$ ; с уч. делт.  $N = (0.2, 0.43, 0.44)$

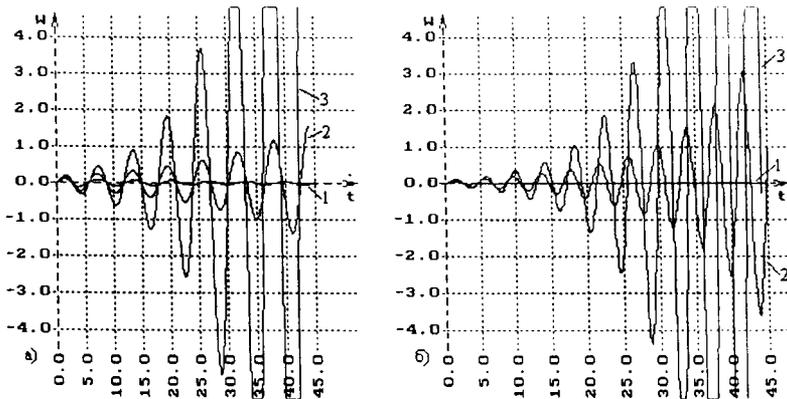


рис. 23.5

а)  $\epsilon = 0.1$ ;  $a_1 = 0.25$ ;  $bet = 0.05$ ; без уч. демп.;  $\gamma = 0.0$ ;  $\gamma_2 = 0.0$ ;  
 $N = (0.6, 0.66, 0.69)$

а)  $\epsilon = 0.1$ ;  $a_1 = 0.25$ ;  $bet = 0.05$ ; с уч. демп.;  $\gamma = 0.0$ ;  $\gamma_2 = 0.0$ ;  
 $N = (0.6, 0.73, 0.75)$

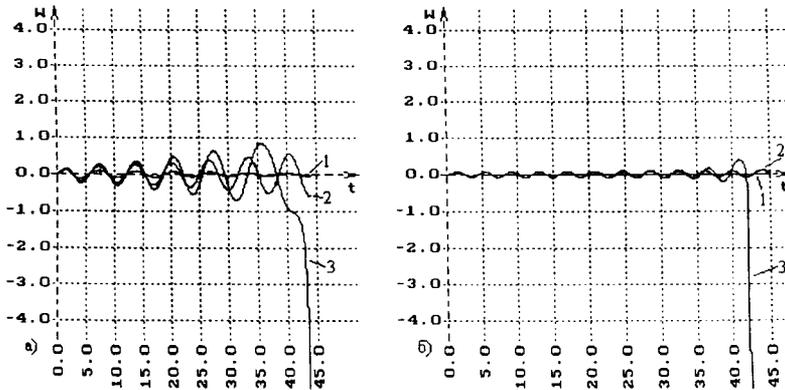


рис. 23.6

а)  $\epsilon = 0.1$ ;  $a_1 = 0.25$ ;  $bet = 0.05$ ; без уч. демп.;  $\gamma = 1.0$ ;  $\gamma_2 = 1.0$ ;  
 $N = (0.6, 0.65, 0.66)$

а)  $\epsilon = 0.1$ ;  $a_1 = 0.25$ ;  $bet = 0.05$ ; с уч. демп.;  $\gamma = 1.0$ ;  $\gamma_2 = 1.0$ ;  
 $N = (0.6, 0.684, 0.685)$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие явления называются явлениями аэроустойчивости?
2. Что такое флаттер и что играет существенную роль в возникновении флаттера?
3. Чем отличается классический флаттер от не классического?
4. Что представляет собой критическая скорость?
5. Что такое дивергенция и что играет существенную роль в возникновении дивергенции?
6. Какие существуют предупредительные меры и средства борьбы с явлением аэроустойчивости?
7. Какие гипотезы часто используют для определения аэродинамических сил?
8. Какие проблемы аэроустойчивости являются актуальными на сегодняшний день?
9. Какой вид имеет интегро-дифференциальное уравнение, описывающее математическую модель задачи устойчивости нелинейного наследственно-деформируемого аппарата на воздушной подушке?
10. Какой вид имеет алгоритм численного решения интегро-дифференциального уравнения задачи устойчивости нелинейно наследственно-деформируемого аппарата на воздушной подушке?
11. По какой формуле вычисляются подъемные силы, приложенные на расстоянии  $a$  от правого края пластинки?

12. Какой вид имеют: системы интегро-дифференциальных уравнений (в безразмерных координатах); задачи аэроустойчивости удаленных пластин?
13. Какой вид имеет алгоритм численного решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений задачи аэроустойчивости удаленных пластин?
14. Опишите, пожалуйста, основные составляющие аэродинамических нагрузок?
15. Что означают критические скорости флаттера, найденные методом идеально-упругих приближений?
16. Какие реологические параметры существенно влияют на критическую скорость флаттера?
17. Какой вид имеют системы интегро-дифференциальных уравнений задач о классическом флаттере для реальных профилей крыла самолета?
18. Какой вид имеет алгоритм численного решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения задачи о классическом флаттере для реальных профилей крыла самолета?
19. В чем заключается алгоритм поиска критической скорости, основанной на вычислительном эксперименте?
20. Что понимается под автоколебаниями механических систем?

## Глава VII

### Дивергенция наследственно-деформируемого крыла при изгибе

Явление аэроустойчивости (дивергенция) оказывают большое влияние на элементы конструкции современных высокоскоростных ЛА.

Среди различных аэроупругих явлений важное место занимают потери устойчивости авиационных конструкций при изгибе. Некоторые из задач этого класса допускают чисто статическую (квазистатическую) постановку в духе концепции Эйлера: здесь мы остановимся именно на таких задачах, относящихся к проблеме дивергенции наследственно-деформируемого крыла при изгибе. В работе [29] эта проблема была рассмотрена при кручении наследственно – деформируемого крыла.

На основе гипотезы асимптотики малых отстояний [30] формулируется безинерционная нестационарная задача устойчивости (дивергенции) наследственно-деформируемого крыла при изгибе. Задача осложняется тем, что основные разрешающие уравнения становятся слабо сингулярными интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) и даже безинерционные системы содержат дополнительные независимые переменные времени за счет учета фактора времени, т.е. ползучести деформации и релаксации напряжения материала крыла. Ясно, что процессы ползучести и релаксации являются одним из видов механического движения, отличающиеся от обычных тем, что главную роль в этом движении играют не только силы инерции, но и силы внутреннего трения, выражающиеся интегральным оператором Вольтерра, определяющим положения системы. Как и во всяком движении, описываемым теми или иными уравнениями, процесс ползучести может быть устойчивым и неустойчивым. Отсюда возникает задача, состоящая в

определении тех значений  $t$  и соответствующего значения параметра аэродинамической нагрузки, при которой становится возможным интенсивное развитие прогибов во времени, т.е. нежелательное развитие событий, приводящих к катастрофе.

Таким образом: определение критического времени  $t_{кр}$  как минимального времени достижения основным движением критического состояния представляет собой одну из главных проблем безинерционной нестационарной задачи дивергенции наследственно – деформируемого крыла самолета.

Главными результатами является:

- построение математических моделей как прямой, так и вариационной постановки безинерционной нестационарной задачи аэроустойчивости (дивергенции) наследственно–деформируемого крыла с переменными характеристиками.
- исследование корректности постановки краевых задач дивергенции наследственно–деформируемого крыла с переменными характеристиками.
- получение основных разрешающих уравнений и разработка методики решения спектральной задачи аэроустойчивости наследственно–деформируемого крыла с переменными характеристиками.
- получение основного разрешающего интегрального уравнения безинерционных нестационарных задач аэроустойчивости крыла.
- разработка эффективной методики решения слабо-сингулярных интегральных уравнений задач аэроустойчивости наследственно–деформируемого крыла самолета.
- путем обобщения известных критериев квазистатических потерь устойчивости элементов конструкции, формулирование аналитических критериев аэроустойчивости наследственно–деформируемого крыла самолета.

на основе разработанного критерия получение простых формул для критического времени и критических нагрузок крыла при изменении аэродинамических нагрузок во времени согласно трем наиболее типичным законам.

При решении выше перечисленных проблем, сначала крыло трактуется как консольный наследственно–деформируемый стержень переменной ширины и толщины, а затем как консольная анизотропная прямоугольная пластинка переменной толщины. Приводится вариационная формулировка задачи, т.е. на основе вариационного принципа наследственной теории вязкоупругости строится функционал полной энергии, необходимое условие, минимум которого, эквивалентно прямой постановки задачи, исследуется корректность математической постановки краевых задач, с учетом начальных искривлений крыла.

При решении задачи аэроустойчивости крыла большое значение имеет удачно выбранная аэродинамическая гипотеза для определения аэродинамической силы, так как аэродинамические силы являются потенциальной причиной потери устойчивости. Вычисление аэродинамических сил, действующих на деформируемые крылья, базируется на гипотезе «асимптотика малых отстояний» [30].

Для стационарного обтекания, в отличие от «теории поршня», согласно которой:

$$q(x) = kVW_x$$

распределение давления в несжимаемой жидкости пропорционально смещению точек профиля относительно входной крышки, принимается в виде:

$$q(x) = \rho V^2 \gamma(x, t)$$

где

$$\gamma(x, t) = \frac{1}{H} [W'(x, t) - W'(e, t)]$$

$k, \rho$  – константы,  $H$  – отстояние крыла от экрана,  $W(x, t)$  – прогиб наследственно-деформируемого крыла,  $V$  – скорость набегающего потока.

Математическая модель задачи, как правило, строится на основе определяющих соотношений, устанавливающих связь между тензорами напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$ , которые в общем случае анизотропного наследственно-деформируемого крыла можно записать в виде [7]

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(1 - R^*)\varepsilon_{kl} \quad R^*\varepsilon_{kl}(t) = \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau$$

где:

$E_{ijkl}$  – тензор мгновенных модулей упругости,  $R(t - \tau)$  – ядро релаксации, имеющее слабо-сингулярную особенность типа Абеля.

Использование этого соотношения существенным образом упрощает построение математической модели как прямой, так и вариационной постановки безинерционных нестационарных задач аэроустойчивости наследственно-деформируемого крыла с переменными параметрами.

Исследуется корректность математической постановки задачи. Для исследования корректности поставленной задачи используется метод разложения решения по собственным функциям. Тогда задача после элементарных преобразований распадается на две: решение интегрального уравнения и решение спектральной задачи. Точные решения интегрального уравнения получены методом степенного ряда, а спектральная задача решается методом Коха в сочетании с методом дифференциальной прогонки.

### §24. Прямая постановка задачи.

Рассмотрим задачу дивергенции прямого крыла с переменными жесткостными характеристиками. Крыло будем трактовать как консольной стержень переменного сечения, имеющий начальный прогиб  $W_0(x)$ . Предположим, что физико-механические свойства материала крыла описываются наследственной теорией. Больсмана-Вольтерра т.е.

$$\sigma = E(1 - R^*)\varepsilon(x, t) \quad (24.1)$$

где:

$$R^* \varepsilon(x, t) = \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau.$$

$R(t)$  - ядра наследственности, имеющие слабо-сингулярные особенности типа Абеля.

Аэродинамическую нагрузку будем вычислять согласно гипотезе «асимптотика малых отстояний» [30]. Тогда воспользовавшись законом (24.1) и исходя из технической теории изгиба стержня будем иметь:

$$(1 - R^*)LW - \frac{\partial}{\partial x} \left( N(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right) - q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N(x) \frac{\partial W_0'}{\partial x} \right) + q_0(x) \quad (24.2)$$

где:

$$LW = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right], \quad q(x, t) = \rho \frac{V^2}{H} [W(x, t) - W(a, t)]$$

$$q_0(x) = \rho \frac{V^2}{H} [W_0'(x) - W_0'(a)],$$

$N(x)$  - продольные силы,  $V$ -скорость набегающего потока,  $H$  - отстояния крыла от экрана,  $\rho$ -плотность воздуха,  $E$ - модуль упругости,  $J(x)$  - момент инерции сечения.

Краевыми условиями для консольного стержня будут:

$$M = EJ(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (24.3)$$

$$W = 0, \quad W_x = 0 \quad \text{при} \quad x = a$$

Уравнения (24.2) с учетом граничных условий (24.3) напишем в безразмерных координатах:

$$x = a\bar{x}, \quad W = h\bar{W}, \quad N = \sigma_1 F(x), \quad J = J_0 \bar{d}(x),$$

$$P^2 = \rho \frac{V^2}{H} \cdot \frac{a^4}{EJ_0}, \quad \sigma_1 = \frac{N_0 a^2}{EJ_0}$$

(чёрточки над переменным опустим)

Тогда из (24.2) имеем:

$$(1 - R^*) LW - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( F(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right) - P^2 W(x, t) = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( F(x) \frac{\partial W_0}{\partial x} \right) - P^2 W_0(x) \quad (24.4)$$

где:

$$LW = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ J(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]$$

$J(x)$ ,  $F(x)$  - для стержня круглого сечения рис.24.1.

$$J(x) = \frac{\pi}{64} d^4(x), \quad F(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x), \quad d^2(x) = 4[y^2(x) - \alpha r^2]$$

$$d^4(x) = 16[y^4(x) - \alpha r^4], \quad y = R - (R - l)x, \quad \alpha = 0, \quad \alpha = 1.$$

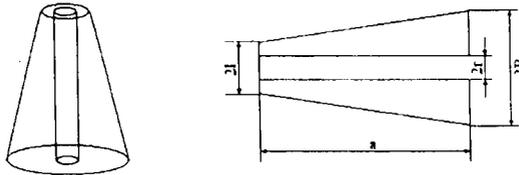


рис.24.1

Для стержня переменной ширины  $b(x)$  и толщины  $h(x)$  см. рис.24.2.

$$J(x) = b(x)h^3(x), \quad J_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12}, \quad F(x) = b(x)h(x)$$

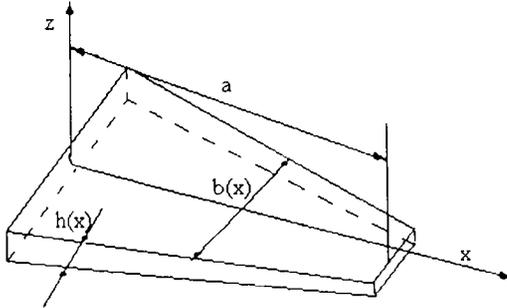


рис.24.2.

Уравнения (24.4) необходимо решить при следующих граничных условиях.

$$\begin{aligned} M = M_x = 0 & \quad \text{при} \quad x = 0 \\ W = W_x = 0 & \quad \text{при} \quad x = l \end{aligned} \quad (24.5)$$

### §25. Вариационная постановка задачи.

Если исходить из вариационного принципа наследственной теории вязкоупругости, предложенного академиком Ю.П.Работновым, то функционал полной энергии для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$J = \int_0^a (\Pi_v - \Pi_b + A) dx = \int_0^a F(W, W_x, W_{xx}) dx \quad (25.1)$$

где:

$$\Pi_v = \frac{1}{2} EJ(x)W_{xx}^2, \quad \Pi_b = MR * W_{xx}$$

$$A = -\frac{1}{2} \left[ N(x)(W_x - W_{0x})^2 + \rho \frac{V^2}{H} (W - W_0)^2 \right]$$

Нахождение минимума функционала (25.1) при граничных условиях (24.3) приводит к вариационной постановке задачи о дивергенции наследственно-деформируемого крыла самолёта.

Нетрудно проверить, что прямая постановка задачи может быть получена из необходимого условия минимума функционала (25.1), т.е. из уравнения Эйлера – Лагранжа.

$$\frac{\partial F}{\partial W} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial W_x} + \frac{d^2}{dx^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial W_{xx}} = 0 \quad (25.2)$$

В самом деле, из (25.2) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial W} = -\rho \frac{V^2}{H} (W - W_0), \quad \frac{\partial F}{\partial W_x} = -N(x)(W_x - W_{0x}), \quad \frac{\partial F}{\partial W_{xx}} = EJ(x)(1 - R^*)W_{xx} \quad (25.3)$$

Подставляя (25.3) в (25.2), имеем:

$$(1 - R^*)LW - \frac{d}{dx} [N(x)W_x] - \rho \frac{V^2}{H} W = \frac{d}{dx} [N(x)W_{0x}] + \rho \frac{V^2}{H} W_0 \quad (25.4)$$

Интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) (25.4) вместе с граничными условиями (24.3) представляют математическую модель в прямой постановке задачи о дивергенции наследственно-деформируемого крыла самолёта.

## §26. Корректность математической постановки задачи.

Нетрудно доказать следующие утверждения: если  $U(x)$  допустимая функция, то при граничных условиях (24.3) имеет место:

$$(L, W, U) = (L, U, W) \quad \text{и} \quad (L, W, W) > 0$$

где  $(, )$  одномерные скалярные произведения:

$$L_1 W = LW - \sigma_1 \frac{d}{dx} [F(x)W']$$

Таким образом, если рассмотреть задачу собственных значений, т.е.:

$$L_1 U - \lambda U = 0 \quad (\lambda = P^2) \quad (26.1)$$

с соответствующими однородными граничными условиями, то все собственные числа будут вещественными, наименьшее из них дает искомое значение критической нагрузки

$$\lambda_1 = \lambda_{кр} = P_{кр}^2$$

Для исследования корректности поставленной задачи используется метод разложения решения по собственным функциям. Решение ИДУ (24.9) ищется в виде.

$$W_N(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) U_k(x), \quad T_k(t) = (W_N, U_k) \quad (26.2)$$

где  $U_k(x)$  - собственные функции спектральной задачи (26.1)

Тогда задача после элементарных преобразований распадается на две: решение интегрального уравнения задачи дивергенции:

$$T_k(t) - \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} R * T_k(t) = \frac{T_k^{(0)}}{\lambda_k - \lambda} [\lambda_k + q_k] = F_k \quad (26.3)$$

и решение спектральной задачи (26.1) дивергенции при следующих однородных граничных условиях:

$$M = M_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad W = W_x = 0 \quad \text{при } x = l \quad (26.4)$$

Общеизвестно, что интегральное уравнение Вольтерра второго рода (26.3) имеет не более одного решения [1], и это решение устойчиво по внешним возмущениям  $F_k$ . Известно, что ряд Фурье по собственным функциям сходится абсолютно и равномерно в заданной области ( $0 \leq x \leq l, t > 0$ ), где ищется решение задачи, т.е.:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N T_k(t) U_k(x) = W(x, t)$$

В силу линейности задачи единственность решения доказывается элементарно. Этим завершается доказательство корректности постановки задачи.

### §27. Решение интегрального уравнения задачи дивергенции при изгибе.

Интегральные уравнения задачи дивергенции при изгибе по виду ничем не отличаются от аналогичных уравнений задачи дивергенции при кручения [29]. По этому точное решение уравнения (26.3) при ядрах Абеля.

$$R(t - \tau) = \frac{\lambda(t - \tau)^\alpha}{\Gamma[r]}, \quad -1 < \alpha < 1, r = 1 + \alpha < 1$$

и Ю.Н.Работнова

$$R(t - \tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\chi \beta^s (t - \tau)^{s+\alpha}}{\Gamma[rs + 1]}, \quad x > 0, \beta > 0$$

можно построить методом степенного ряда [10] соответственно, т.е.:

$$T(t) = \frac{N^2 F}{\lambda_1 - N^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x, t^r)^k}{\Gamma[rk + 1]} x_1 = \frac{x \lambda_1}{\lambda_1 - N^2} \quad (27.1)$$

$$T(t) = \frac{N^2 F}{\lambda_1 - N^2} \cdot \frac{x_1}{x_1 + \beta} \left\{ \frac{\beta}{\lambda_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(\beta + x_1) t^r]^k}{\Gamma[rk + 1]} \right\} \quad (27.2)$$

где выведены обозначения:

$T_k(t) = T(t)$ ,  $F_k = F$ ,  $\lambda = \lambda_1$  - наименьшие собственные значения спектральной задачи (26.1) (26.4).

Таким образом, в обоих случаях ядер релаксации решение уравнения (26.3) выражается через, так называемые функции Миттага-Леффлера т.е.:

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma[rk + 1]} \quad (27.3)$$

где в случае ядра Абеля  $Z = x, t^r$ , а в случае ядра Ю.Н.Работнова:

$$Z = (\beta + x_1) \gamma^r$$

Как известно, при исследовании задачи устойчивости дивергенции представляет интерес первая форма и соответствующая Эйлера сила  $\lambda = \lambda_1$ . Поэтому, как в задаче дивергенции при кручениях [29], в дальнейшем обозначим  $\psi = \frac{P^2}{\lambda_1}$ . Из свойств функции Миттага-Леффлера ясно, что при  $Z < 1$  происходит медленное изменение прогиба, а при  $Z > 1$  наблюдается интенсивное развитие прогиба крыла во времени. Поэтому за начало возможности интенсивного развития прогиба принимаем условия  $Z = 1$ , из которого находим критическое время для квазистатической потери устойчивости при изгибе наследственно-деформируемого крыла для ядра Абеля:

$$t_{кр} = \tau \sqrt{\frac{1}{x_1} (1 - \psi)} \quad (27.4)$$

для ядра Ю.Н.Работнова:

$$t_{кр} = \tau \sqrt{\frac{1 - \psi}{x_1 + \beta(1 + \psi)}} \quad (27.5)$$

Таким образом, предлагаемый подход решения поставленной задачи позволяет сформулировать аналитический критерий потери аэроустойчивости при изгибе наследственно-деформируемого крыла самолёта. Этот критерий в случае ядра Абеля дает для  $\psi$ , приближенную формулу.

$$\psi = \frac{\lambda_1}{\lambda} (1 - \lambda_1 t_{кр}^r) = c(1 - \lambda_1 t^r) \quad (27.6)$$

а в случае ядра Ю.Н.Работнова:

$$\psi = C \left( 1 - \frac{\lambda}{1 - \beta t_{кр}^r} \right), C = \frac{\lambda_1}{\lambda}. \quad (27.7)$$

На рис.27.1 и 27.2 приведены зависимости  $\psi_0$  от параметра сингулярности  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3; \alpha = 4$  при  $\lambda = 0,032, J = 0,333, \beta = 0,08$  соответственно для ядра Абеля и Ю.Н.Работнова.

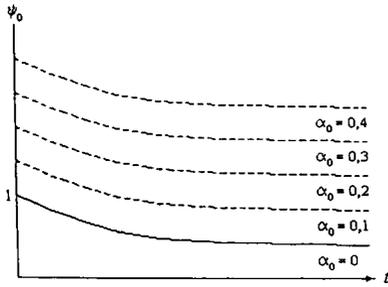


рис. 27.1

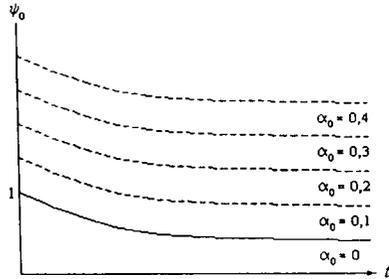


рис. 27.2

Из рис.27.1 и рис.27.2 видно, что в обоих случаях ядер наследственности имеют место весьма близкие результаты.

## §28. Методика решения спектральной задачи

(26.1) (26.4)

Для решения спектральной задачи (26.1) (26.4) предлагается новый подход состоящий из двух этапов.

На первом этапе однородная краевая задачи (26.1) (26.4) сводится к последовательному решению неоднородных краевых задач.

$$L_1 U_{ek}^* = U_{ek-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (28.1)$$

$$M^* = M_x^* = 0 \quad \text{при } x=0 \quad U_{ek}^* = U_{ekx}^* = 0 \quad \text{при } x=l \quad (28.2)$$

$$U_{\ell k} = U_{\ell, k}^* \sum_{n=1}^{k-1} C_n^{(\ell k)} U_{\ell n}, \quad \ell = 1, 2, \dots, C_n^{(\ell k)} = (U_{\ell k}^*, U_{\ell n}) \quad (28.2')$$

методом Коха [7] и находятся собственные числа  $\lambda_\ell$  и ортонормированные собственные функции  $U_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$  следующим образом. Вычисляются коэффициенты Шварца.

$$\mu_k^{(\ell)} = \frac{a_k^{(\ell)}}{a_{k+1}^{(\ell)}} = \frac{(U_{\ell q}, U_{\ell k - q})}{(U_{\ell q}, U_{\ell k - q + 1})} \quad 0 \leq q \leq k$$

проверяется условие

$$\left| \frac{\mu_k^{(\ell)} - \mu_{k-1}^{(\ell)}}{\mu_{k-1}^{(\ell)}} \right| < \varepsilon \quad (28.3)$$

Если оно выполняется при  $k = m$ , то за собственные значения и функции принимается соответственно

$$\mu_m^{(\ell)} = \lambda_\ell, \quad u_\ell = \frac{U_{\ell m}}{\sqrt{(U_{\ell m}, U_{\ell m})}} \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (28.4)$$

На втором этапе краевая задача (28.1), (28.2) решается заданной степени точности методом дифференциальной прогонки. Сначала краевую задачу (28.1) (28.2) напишем в нормальной форме для использования матричного варианта метода дифференциальной прогонки следующим образом:

Перепишем уравнения (28.1) в безразмерных координатах следующим образом:

$$\frac{d^2}{dx^2} [J(x) \frac{d^2 U_{\ell k}^*}{dx^2}] + a_1(x) \frac{d^2 U_{\ell k}^*}{dx^2} + a_2(x) \frac{d U_{\ell k}^*}{dx} = U_{\ell k-1} \quad (28.5)$$

или:

$$\left. \begin{aligned} U_{ik}^{*''}(x) - \frac{M_{ik}^*}{J(x)} &= 0 \\ M_{ik}^{*''} + \frac{a_1(x)}{J(x)} M_{ik}^* + a_2(x) U_{ik}^{*'} &= U_{ik-1} \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

где:  $a_1(x) = \sigma_1 F(x)$ ,  $a_2(x) = \sigma_1 F'(x)$

Систему (28.6) напомним в матричном виде:

$$Y_{ik}''(x) + A(x)Y_{ik}'(x) + B(x)Y_{ik}(x) = F_{ik-1} \quad (28.7)$$

где

$$Y_{ik} = (U_{ik}^*, M_{ik}^*)^T, \quad F_{ik} = (0, U_{ik-1})^T$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{J(x)} \\ 0 & \frac{a_1(x)}{J(x)} \end{pmatrix}.$$

Краевые условия для системы (28.7) необходимо получить из заданных граничных условий (28.2) следующим образом

$$S^{(x)}Y_{ik}' + R^{(x)}Y_{ik} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = 1 \quad (28.8)$$

где

$$S^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Согласно матричному варианту метода дифференциальной прогонки, [25] решение системы (28.7) ищется в виде:

$$\alpha(x)Y_{ik}'(x) + \beta(x)Y_{ik}(x) = \gamma(x) \quad (28.9)$$

где  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$  - двумерные матрицы и векторы прогоночных коэффициентов, элементы которых находятся из решений следующей задачи Коши (прямой ход решений)

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_j(x) &= \sum_{k=1}^2 \alpha_{jk}(x) \alpha_k - \beta_j(x) \\ \beta'_j(x) &= \sum_{k=1}^2 \alpha_{jk}(x) b_k, \quad i, j = \overline{1,2} \\ \gamma'_j(x) &= \alpha_{12} U_{k-1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (28.10)$$

$$\alpha_j(0) = S_j^{(0)}, \quad \beta_j(0) = r_j^{(0)}, \quad \gamma_j(0) = 0 \quad (28.11)$$

где  $\alpha_{ij}, b_{ij}, S_j^{(0)}, r_j^{(0)}$  - элементы матрицы  $A, B, S^{(0)}, R^{(0)}$

Решая задачу Коши (28.10) (28.11), нетрудно найти

$$\begin{aligned} Y_k(1) &= [S^{(1)}\beta(1) - R^{(1)}\alpha(1)]^{-1} S^{(1)}\gamma(1) \\ Y'_k(1) &= -[S^{(1)}\beta(1) - R^{(1)}\alpha(1)]^{-1} S^{(1)}\gamma'(1) \end{aligned} \quad (28.12)$$

Решая уравнение (28.7) при начальных условиях (28.12) находим искомые решения  $Y_k(x)$ ,  $x \in ]0,1[$  (обратный ход решения)

Решение соответствующей задачи Коши можно осуществить методом Рунге-Кутты четвертого порядка, математическое обеспечение которого имеется на любом современном компьютере. Имея  $U^*_k$  по формулам (28.2') находится  $U_k$ , а по формулам (28.4) находятся спектры и формы спектральной задачи (26.1) (26.4).

## §29. Численные реализации алгоритма.

Рассмотрим численную реализацию алгоритма предложенного метода для решения спектральной задачи о дивергенции консольного крыла как постоянной, так и переменной толщины.

Тестирование программы реализующей алгоритм предложенного метода расчета, осуществлялось при  $\sigma_1 = 0$  консольного стержня постоянного сечения, для которого известно точное решение [31]

$$U(x) = (\sin \omega + sh \omega)(ch \alpha x - \cos \alpha x) - (ch \omega + \cos \omega)(sh \alpha x - \sin \alpha x)$$

$$\lambda = P^2 \quad \omega = \sqrt{\lambda}$$

Результаты расчета первых трех значений безразмерных собственных чисел, соответствующие ортонормированным собственным функциям по точным решениям и решениям, полученным предложенным методом приведены в таблице 29.1

Таблица 29.1

	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$	
Точное	12,3623		485,5124		3806,4508	
приближение	12,3624		485,5125		3806,4508	
	$U_1(x)$		$U_2(x)$		$U_3(x)$	
	$x = 0.24$	$x = 0.5$	$x = 0.24$	$x = 0.5$	$x = 0.24$	$x = 0.5$
Точное	0,1802	0,6790	0,7885	1,4237	1,4137	0,0392
Приближенное	0,1802	0,6790	0,7885	1,4237	1,4137	0,0392

Совпадение  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) и соответствующие им собственные формы  $U_i(x)$  в четырехзначных цифрах свидетельствуют о точности предлагаемого метода расчета.

Расчеты показали, что критерии сходимости (28.3) оказались достаточными не только для вычисления собственных чисел, но и соответствующих им собственным формам.

Теперь возможности описанного подхода продемонстрируем на задаче о дивергенции крыла кругового переменного сечения (рис. 24.1):

$$J(x) = \frac{\pi}{64} d^4(x), \quad F(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x), \quad d^2(x) = 4[y^2(x) - \alpha r^2],$$

$$d^4(x) = 16[y^4(x) - \alpha r^2], \quad y = R - (R-l)x, \quad \alpha = 0, \quad \alpha = 1$$

Для численного расчета примем (рис. 24.1)

$$a = 4000 \text{ см}, \quad R = 400 \text{ см}, \quad l = 200 \text{ см}, \quad r = 100 \text{ см}$$

Численные значения первых пяти собственных значений спектральной задачи (26.1) (26.4) с наличием  $\alpha=1$  и без наличия  $\alpha=0$  отверстия крыла приведены в таблице 29.2. Из наименьших значений собственных чисел приведенных в таблице 29.1 и 29.2 находится критическая скорость дивергенции.

Таблица 29.2

Крыло кругового переменного сечения					
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\alpha=0$	0,334253	5,970412	36,873242	276,152235	942,176521
$\alpha=1$	0,403898	6,919224	42,144085	292,352172	976,436123

Необходимо отметить, что при  $\alpha=0$  наименьшие значения собственных чисел спектральной задачи (26.1) (26.4) найденные в [32] методом Ритца с избытком и недостатком, равны соответственно, 0,3377 и 0,24498. Как видно из таблицы 29.2, предлагаемый подход дает примерно среднее арифметическое значение наименьших собственных чисел с относительной погрешностью меньше 1%. Расчеты показали для решения спектральной задачи с точностью до четырехзначных цифр потребовалось 345 итераций методом Коха при произвольном выборе начальных приближений  $U_{10}$ .

В качестве третьего примера рассмотрим задачу о дивергенции консольного крыла переменной ширины и толщины (рис.24.2) с учетом  $\sigma_l=1$  и без учета  $\sigma_l=0$  продольных сил.

Численные значения первых трех собственных значений спектральной задачи (26.1) (26.4) при  $h(x)=1-0,2x$ ,  $b(x)=5-4x$  приведены в таблице 29.3.

Таблица 29.3

$\sigma_1$	Крыло переменной ширины и толщины		
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
$\sigma_1=0$	97,0848	4076,3017	32760,4558
$\sigma_1=1$	113,6849	4096,7950	32749,3289

Из наименьших значений собственных чисел, приведенных в таблице 29.3 находится критическая скорость задачи о дивергенции крыла переменной ширины и толщины.

Из анализов результатов расчета, приведенных в таблице 29.3 видно, что учет продольных сил приводит к увеличению значения критической скорости дивергенции.

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Чем отличается прямая постановка от вариационной постановки задачи дивергенции крыла?
2. Как понимается корректность математической постановки задачи?
3. Какие уравнения называются интегральными уравнениями задачи дивергенции?
4. Какие задачи называются спектральными задачами дивергенции?

## Глава VIII

### Дивергенция наследственно-деформируемого крыла с переменными характеристиками из композитных материалов

#### §30. Вариационная и прямая постановка задачи.

Рассмотрим безинерционную нестационарную задачу аэроустойчивости (дивергенции) наследственно-деформируемого крыла с переменными характеристиками из композитных материалов. Крыло трактуется как консольная наследственно-деформируемая анизотропная прямоугольная пластинка переменной толщины. Предположим, что пластинка имеет начальный прогиб  $W_0(x, y)$ , и физико-механические свойства материала крыла описываются наследственной теорией анизотропного тела с одним общим ядром релаксации с различными кривыми мгновенной деформации [ 7 ] т.е.:

$$\sigma_{ij} = E_{ijm}(1 - R^*)\varepsilon_{mj}, \quad R^* \varepsilon_{mj}(t) = \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon_{mj}(\tau)d\tau \quad (30.1)$$

Аэродинамическую нагрузку, действующую на деформируемое крыло будем вычислять согласно гипотезе «асимптотика малых отстояний» [30] т.е.

$$q(x, t) = \rho \frac{V^2}{H} [W(x, y, t) - W_0(x, y)] \quad (30.2)$$

где  $V$  - скорость набегающего потока в передней части крыла,  $\rho$  - плотность воздуха,  $H$  - отстояние крыла от экрана,  $E_{ijm}$  - тензор мгновенных модулей упругости,  $R(t - \tau)$  - ядро релаксации, имеющее слабо-сингулярную особенность типа Абеля.

Использование соотношения (30.1) существенным образом упрощает построение математической модели как прямой, так и вариационной постановки безинерционной нестационарной задачи аэроустойчивости наследственно-деформируемых систем с переменными параметрами. Теперь, если исходить из технической теории изгиба анизотропной (неортогортропной) пластинки и вариационного принципа наследственной теории вязкоупругости, предложенного академиком Работновым, то функционал полной энергии примет вид [ 7 ]

$$J = \int_0^a \int_0^b (\Pi_v - \Pi_a + A) dx dy = \int_0^a \int_0^b F(W, W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}) dx dy \quad (30.3)$$

где

$$\Pi_v = \frac{1}{2} [D_{11} W_{xx}^2 + 2D_{12} W_{xx} W_{yy} + D_{22} W_{yy}^2 + 4D_{66} W_{xy}^2 + 4(D_{16} W_{xx} + D_{26} W_{yy}) W_{xy}] J,$$

$$\Pi_a = M_{xx} R^* W_{xx} + M_{yy} R^* W_{yy} + 2M_{xy} R^* W_{xy}$$

$$A = -\frac{P V^2}{2 H} [W(x, y, t) - W_0(x, y)]^2,$$

$$M_{xx} = D_{11} W_{xx} + D_{12} W_{yy} + 2D_{16} W_{xy},$$

$$M_{yy} = D_{22} W_{yy} + D_{12} W_{xx} + 2D_{26} W_{xy},$$

$$M_{xy} = 2D_{66} W_{xy} + D_{16} W_{xx} + D_{26} W_{yy}.$$

$W$  - прогиб,  $W_0(x, y)$  - начальный прогиб пластинки,  $D_{ij} = \frac{B_y h^3(x, y)}{12}$  -

жесткость,  $h(x, y)$  - толщина анизотропной пластинки.

Граничные условия для консольной пластинки принимают вид:

$$M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = a \quad (30.4)$$

$$M_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b$$

Нахождение минимума функционала (30.3) при граничных условиях (30.4) приводит к вариационной постановке рассматриваемой задачи. Нетрудно проверить, что прямая постановка задачи может быть получена

из необходимого условия минимума функционала (30.3), т.е. из уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial W} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial W_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial W_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial W_{xy}} = 0 \quad (30.5)$$

В самом деле, из (29.5) имеем:

$$(1 - R^*)L[W] - \omega^2 W = \omega^2 W_0(x, y) \quad (30.6)$$

где

$$L[W] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, \quad \omega^2 = \frac{\rho V^2}{H}$$

Интегро-дифференциальное уравнения (ИДУ) в частных производных (30.6) вместе с граничными условиями (30.4) представляют математическую модель в прямой постановке безинерционной нестационарной задачи аэроустойчивости (дивергенции) анизотропных наследственно-деформируемых консольных прямоугольных пластин с переменными параметрами.

### §31. Исследование оператора $L[W]$ для консольной анизотропной неортотропной пластинки.

При решении задачи аэроустойчивости важное значение имеет исследование самосопряженности и положительной определенности оператора  $L[W]$ . Собственные значения и собственные функции самосопряженных краевых задач обладают рядом свойств, значительно облегчающих методику решения и их исследования. Собственные значения таких задач являются вещественными, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Поскольку эти функции определяются с точностью до произвольного

постоянного множителя, то соответствующую нормировку систем собственных функций можно сделать ортонормированной.

Для несамосопряженных краевых задач указанные свойства отсутствуют. Собственные функции не всегда образуют полную ортогональную систему. Собственные значения могут быть вещественными и комплексными величинами или вообще не существовать. Исследование подобных задач находится в начальной стадии [ 33 ] и каждый случай требует отдельного анализа.

Приведем доказательство следующей важной теоремы: [ 34 ]

**Теорема.** Оператор,  $L[W]$  определяемый выражением

$$L[W] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}$$

При граничных условиях (30.4) и

$$D_{11} > 0, D_{22} > 0, D_{66} > 0, D_{kk} D_{ii} - D_{ki}^2 > 0$$

Будет самосопряженным, т.е.

$$(L[W], U) = (L[U], W)$$

и положительно определенным, т.е.

$$(L[W], W) > 0$$

где  $(, )$  – двумерные скалярные произведения

**Доказательство.** Рассмотрим выражение

$$(L[W], U) = \int_0^a \int_0^b L[W] U dx dy$$

Произведя дважды интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned} (L[W], U) = & \int_0^b (Q_x U)|_0^a dy + \int_0^a (Q_y U)|_0^b dx - \int_0^b (M_x U_x)|_0^a dy - \int_0^a (M_y U_y)|_0^b dx - \\ & - 2(M_{xy} U)|_0^a|_0^b + \int_0^a \int_0^b (M_x U_{xx} + 2M_{xy} U_{xy} + M_y U_{yy}) dx dy \end{aligned} \quad (31.1)$$

где

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Учитывая граничные условия (30.4) и равенство (31.1) имеем ( $U$  – допустимые функции)

$$(L[W], U) = \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} W_{xx} U_{xx} + D_{12} (W_{xy} U_{xx} + W_{xx} U_{xy}) + D_{22} W_{yy} U_{yy} + 4D_{66} W_{xy} U_{xy} \right. \\ \left. + 2D_{16} (W_{xy} U_{xx} + W_{xx} U_{xy}) + 2D_{26} (W_{xy} U_{yy} + W_{yy} U_{xy}) \right\} dx dy$$

Из равенств (30.6) следует, что

$$(L[W], U) = (L[U], W)$$

Следовательно, оператор  $L[W]$  – самосопряженный.

Докажем, что  $L[W]$  – положительно определенный.

Из (30.6) при  $W = U$  имеем

$$(L[W], W) = \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} W^2_{xx} + 2D_{12} W_{xy} W_{xx} + D_{22} W^2_{yy} + 4D_{66} W^2_{xy} + \right. \\ \left. + 4D_{16} W_{xy} W_{xx} + 4D_{26} W_{xy} W_{yy} \right\} dx dy \quad (31.2)$$

Равенство (31.2) – есть квадратичная форма относительно  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$ ,  $W_{xy}$ . Поэтому из критерия Сильвестра следует

$$D_{11} > 0, D_{22} > 0, D_{66} > 0, D_{kk} D_{ii} - D_{ki}^2 > 0, h(x, y) > 0$$

С другой стороны выражение (31.2) можно записать в виде

$$(L[W], W) = \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} W^2_{xx} - D_{12} (W_{xx} - W_{yy})^2 + D_{12} (W^2_{xx} + W^2_{yy}) + D_{22} W^2_{yy} + \right. \\ \left. + 4D_{66} W^2_{xy} - 2D_{16} (W_{xy} - W_{xx})^2 + 2D_{16} (W^2_{xy} + W^2_{xx}) - \right. \\ \left. - 2D_{26} (W_{xy} - W_{yy})^2 + 2D_{26} (W_{xy}^2 + W^2_{yy}) \right\} dx dy \geq \\ \geq G \int_0^a \int_0^b h^3(x, y) [W^2_{xx} + W^2_{yy} + W_{xy}^2] dx dy$$

где

$$G = \frac{1}{12} \min \{ B_{11} + B_{12} + 2B_{16}, B_{22} + B_{12} + 2B_{26}, 2(2B_{66} + B_{16} + B_{26}) \}$$

Следовательно,  $(L[W], W) > 0$ . Что и требовалось доказать.

Таким образом, если рассмотреть задачи собственных значений, т.е.

$$L[U] - \lambda U = 0, \quad \lambda = \omega^2$$

С соответствующими однородными граничными условиями, то все собственные числа будут вещественными, соответствующие собственные функции - ортонормированными, т.е.

$$\int_0^a \int_0^b U^2 dx dy = 1$$

Совокупность собственных значений  $\lambda_i, i=1,2,\dots$  образует спектр краевых задач, а наименьшее значение собственных чисел дает искомое значение критической нагрузки  $\lambda_1 = \lambda_{cr}$ , через которые вычисляется критическая скорость дивергенции крыла самолета.

### §32. Корректность математической постановки задачи дивергенции наследственно-деформируемого крыла с переменными характеристиками из композитных материалов

Напишем ИДУ задачи дивергенции (30.6) в безразмерных координатах:

$$\begin{aligned} x &= a\bar{x}, \quad y = b\bar{y}, \quad h(x, y) = h_0 \bar{h}(x, y), \quad W = h_0 \bar{W}, \quad W_0 = h_0 \bar{W}_0, \quad \gamma = \frac{a}{b}, \\ v_1 &= \frac{\gamma^2 D_{12}}{D_{11}}, \quad v_{12} = 2\gamma \frac{D_{16}}{D_{11}}, \quad v_2 = \frac{D_{12}}{D_{22}}, \quad v_{22} = 2\gamma \frac{D_{26}}{D_{22}}, \quad v_3 = \frac{\gamma^2 D_{16}}{2D_{66}}, \\ v_{32} &= \frac{D_{16}}{2D_{66}}, \quad \theta_1 = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad \theta_2 = 2 \frac{D_{66}}{D_{11}}, \quad \lambda = \frac{\omega^2 a^4}{D_{11}} \end{aligned}$$

В дальнейшем черточки над переменными для простоты опустим. Тогда из (30.6) имеем:

$$(1 - R^*)L[W] - \lambda W = \lambda W_0 \quad (32.0)$$

где

$$L[W] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \gamma^2 \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2},$$

$$M_x = h^3(x, y)(W_{xx} + \nu_1 W_{yy} + \nu_2 W_{xy}),$$

$$M_y = \theta_1 h^3(x, y)(\gamma^2 W_{yy} + \nu_2 W_{xx} + \nu_{22} W_{xy}),$$

$$M_{xy} = \theta_2 h^3(x, y)(\gamma W_{xy} + \nu_3 W_{xx} + \nu_{32} W_{yy})$$

Граничные условия в безразмерных координатах можно записать в следующем виде:

$$M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad W = W_x = 0 \quad \text{при } x = 1$$

$$M_y = \gamma \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1$$
(32.1)

Методика исследования корректности математической постановки краевых задач (32.0), (32.1) отличается от краевых задач консольного стержня рассмотренные в §27 лишь решением соответствующих спектральных задач. В самом деле, если решение ИДУ (32.0) пишется в виде:

$$W_N(x, y, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) U_k(x, y), \quad T_k(t) = (W_N, U_k) \quad (32.2)$$

где  $U_k(x, y)$  - собственные функции следующей двумерной спектральной задачи:

$$L[U] - \lambda U = 0 \quad (32.3)$$

где

$$L[U] = \frac{\partial^2 M_x^{(U)}}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 M_{xy}^{(U)}}{\partial x \partial y} + \gamma^2 \frac{\partial^2 M_y^{(U)}}{\partial y^2}$$

$$M_x^{(U)} = \frac{\partial M_x^{(U)}}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial M_{xy}^{(U)}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad U = U_x = 0 \quad \text{при } x = 1$$

$$M_y^{(U)} = \gamma \frac{\partial M_y^{(U)}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{(U)}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1$$
(32.4)

то задача после элементарных преобразований распадается на две: решение интегрального уравнения задачи дивергенции (27.3) и решение спектральной задачи (32.3, 32.4).

Как в одномерном случае нетрудно заметить, что интегральные уравнения Вольтерра второго рода имеют не более одного решения, и это решение всегда будет устойчивым. Известно, что ряд Фурье по собственным функциям сходится абсолютно и равномерно в заданной области ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $t > 0$ ) где ищется решение задачи, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(x, y, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N T_k(t) U_k(x, y) = W(x, y, t)$$

В силу линейности задачи единственность решения доказывается элементарно. Этим завершается доказательство корректности краевых задач (32.0) (32.1).

### §33. Методика решения спектральной задачи (32.3) (32.4) и ее численные реализации.

Предлагаемый подход решения спектральной задачи (32.3) (32.4) в отличие от (27.1) (27.4) состоит из трех этапов:

1. На первом этапе однородная краевая задача (32.3) (32.4) методом Коха сводится к последовательному решению неоднородных краевых задач:

$$L[U^*_{ik}] = U_{k,l}(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 1, 2, \dots \quad (33.1)$$

$$M_x^{(U^*_{ik})} = \frac{\partial M_x^{(U^*_{ik})}}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial M_{xy}^{(U^*_{ik})}}{\partial y}, \quad \text{при } x = 0, \quad U^*_{ik} = \frac{\partial U^*_{ik}}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 1 \quad (33.2)$$

$$M_y^{(U^*_{ik})} = \gamma \frac{\partial M_y^{(U^*_{ik})}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{(U^*_{ik})}}{\partial x}, \quad \text{при } y = 0, \quad y = 1$$

формулы (28.2)-(28.4) для задачи (33.1) (33.2) остаются без изменения, лишь выражением ( , ) понимается двумерные скалярные произведения.

Таким образом, применение метода Коха непосредственно к исходной однородной краевой задаче (32.3), (32.4) сводится к последовательному решению неоднородных краевых задач (33.1), (33.2) той же размерности, что и исходная. Это в свою очередь порождает определенные трудности, связанные с проблемой точности решения неоднородной двумерной краевой задачи (33.1), (33.2). Это, по видимому, является главной причиной не широкого использования этого метода в практических расчетах, хотя теоретическое обоснование сходимости итерационного процесса имеется при любом выборе начального приближения. Как показано ниже преодоление этих трудностей в предлагаемом подходе осуществляется на базе метода вариационной итерации [ 7 ] в сочетании с модифицированным вариационным методом дифференциальной прогонки изложенные в §28.

Следует отметить, что в общем случае метод Коха применим для решения спектральной задачи, когда краевые условия приводят к самосопряженным и положительно определенным краевым задачам [ 26 ]. Как показано в §31 рассмотренные краевые условия приводят оператор  $L[W]$  - анизотропной неортогортропной пластинки с переменными параметрами к самосопряженным положительно определенным операторам. Следовательно, все собственные числа, являются вещественными, а собственные функции – ортонормированными.

2. На втором этапе для сведения решений исходной двумерной краевой задачи (33.1), (33.2) к системе взаимосвязанных одномерных краевых задач используется метод вариационной итерации (МВИ). Согласно которому, решение задач ищется в виде

$$U^*_{\alpha k} = X_{\alpha k}^{(x)} Y_{\alpha k}^{(y)} \quad (33.3)$$

где  $X_{\alpha k}^{(x)}, Y_{\alpha k}^{(y)}$  - некоторые аргументы функции, подлежащие дальнейшему определению.

Подставляя (33.3) в (33.1) и выполняя известные процедуры МВИ, получим особую взаимосвязанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая с учетом итерационного процесса запишется в нормальной форме для использования метода дифференциальной прогонки:

$$\begin{aligned} X_k''(x) + A_{k-1}(x, Y_{k-1})X_k'(x) + B_{k-1}(x, Y_{k-1})X_k &= F_{k-1}(x, Y_{k-1}) \\ S_{k-1}^{(x)}X_k'(x) + R_{k-1}^{(x)}X_k(x) &= 0 \quad \text{при } x=0, x=1 \end{aligned} \quad (33.4)$$

$$\begin{aligned} Y_k''(y) + A_k(y, X_k)Y_k'(y) + B_k(y, X_k)Y_k(y) &= F_k(y, X_k) \\ S_k^{(y)}Y_k'(y) + R_k^{(y)}Y_k(y) &= 0 \quad \text{при } y=0, y=1 \end{aligned}$$

где

$$X_k = [X_{ek}, M_{ek}^{(x)}]^T; \quad Y_k = [Y_{ek}, M_{ek}^{(y)}]^T; \quad F_{k-1} = [0, F_{k-1}(x, Y_{k-1})]^T$$

$$F_k = [0, F_k(y, X_k)]^T$$

$$A_{k-1}(x, Y_{k-1}) = \begin{bmatrix} C_1^{(k-1)}(x) & 0 \\ C_2^{(k-1)} & C_3^{(k-1)} \end{bmatrix}; \quad B_{k-1}(x, Y_{k-1}) = \begin{bmatrix} C_4^{(k-1)}(x) & C_5^{(k-1)}(x) \\ C_6^{(k-1)}(x) & C_7^{(k-1)}(x) \end{bmatrix};$$

$$A_k(y, X_k) = \begin{bmatrix} C_1^{(k)}(y) & 0 \\ C_2^{(k)}(y) & C_3^{(k)}(y) \end{bmatrix}; \quad B_k(y, X_k) = \begin{bmatrix} C_4^{(k)}(y) & C_5^{(k)}(y) \\ C_6^{(k)}(y) & C_7^{(k)}(y) \end{bmatrix};$$

$$M_x^{(U^* \cdot \cdot)} = A_{11}^{(k-1)}(x)X_{ek}'' + A_{12}^{(k-1)}X_{ek}' + A_{13}^{(k-1)}X_{ek};$$

$$M_y^{(U^* \cdot \cdot)} = B_{11}^{(k)}(y)Y_{ek}'' + B_{12}^{(k)}(y)Y_{ek}' + B_{13}^{(k)}(y)Y_{ek};$$

$$C_1^{(k-1)}(x) = [A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x);$$

$$\begin{aligned} C_2^{(k-1)}(x) &= [A_{22}^{(k-1)}(x)]^{-1} - [A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}]^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x)] + A_{23}^{(k-1)}(x) + A_{32}^{(k-1)}(x) - \\ &- A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x) - A_{31}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) - \\ &- A_{32}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) + \{A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1}\}^2 A_{12}^{(k-1)}(x); \end{aligned}$$

$$C_3^{(k-1)}(x) = [A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{21}^{(k-1)}(x); \quad C_3^{(k-1)}(x) = [A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x);$$

$$C_5^{(k-1)}(x) = [A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x);$$

$$C_{23}^{(k-1)}(x) = [A_{23}^{(k-1)}(x)] - [A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x)] - \\ - [A_{22}^{(k-1)}(x) + A_{31}^{(k-1)}(x) - A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{21}^{(k-1)}(x)] \cdot \\ \cdot [A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x) + A_{33}^{(k-1)}(x) + A_{11}^{(k-1)}(x);$$

$$C_{31}^{(k-1)}(x) = [A_{22}^{(k-1)}(x) + A_{31}^{(k-1)}(x) - A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} A_{21}^{(k-1)}(x)] \cdot \\ \cdot [A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1} + [A_{21}^{(k-1)}(x)[A_{11}^{(k-1)}(x)]^{-1}];$$

$$A_{11}^{(k-1)}(x) = \int_0^1 h^3 Y_{ek-1}^2 dy; \quad A_{12}^{(k-1)}(x) = \nu_{12} \int_0^1 h^3 Y'_{ek-1} Y_{ek-1} dx;$$

$$A_{13}^{(k-1)}(x) = \nu_{13} \int_0^1 h^3 Y''_{ek-1} Y_{ek-1} dx; \quad A_{21}^{(k-1)}(x) = 2\nu_{32} \theta_2 \int_0^1 (h^3 Y_{ek-1}) Y_{ek-1} dy$$

$$A_{22}^{(k-1)}(x) = 2\gamma^2 \theta_2 \int_0^1 (h^3 Y'_{ek-1}) Y_{ek-1} dx; \quad A_{21}^{(k-1)}(x) = 2\nu_{32} \theta_2 \int_0^1 (h^3 Y''_{ek-1}) Y_{ek-1} dy;$$

$$A_{31}^{(k-1)}(x) = \nu_{22} \theta_2 \int_0^1 (h^3 Y_{ek-1})'' Y_{ek-1} dy; \quad A_{32}^{(k-1)}(x) = \nu_{22} \theta_1 \int_0^1 (h^3 Y'_{ek-1})'' Y_{ek-1} dy;$$

$$A_{33}^{(k-1)} = \gamma^2 \theta_1 \int_0^1 (h^3 Y'_{ek-1})'' Y_{ek-1} dy; \quad F_{i-1}(x) = \int_0^1 h W_{ek-1} Y_{ek-1} dy;$$

$$F_i(y) = \int_0^1 h W_{ek-1} X_{ek-1} dx; \quad B_{11}^{(k)}(y) = \theta_1 \gamma^2 \int_0^1 h^3 X_{ek}^2 dx;$$

$$B_{12}^{(k)}(y) = \theta_1 \nu_{22} \int_0^1 h^3 X'_{ek} X_{ek} dx; \quad B_{13}^{(k)}(y) = \theta_1 \nu_2 \int_0^1 h^3 X''_{ek} X_{ek} dx;$$

$$B_{13}^{(k)}(y) = \theta_1 \nu_2 \int_0^1 h^3 X''_{ek} X_{ek} dx; \quad B_{21}^{(k)}(y) = 2\theta_2 \nu_{32} \int_0^1 (h^3 X_{ek})' X_{ek} dx;$$

$$B_{22}^{(k)}(y) = 2\theta_2 \gamma \int_0^1 (h^3 X'_{ek})' X_{ek} dx; \quad B_{23}^{(k)}(y) = 2\theta_2 \nu_3 \int_0^1 (h^3 X''_{ek})' X_{ek} dx;$$

$$B_{31}^{(k)}(y) = \nu_1 \int_0^1 (h^3 X_{ek})'' X_{ek} dx; \quad B_{32}^{(k)}(y) = \nu_{12} \int_0^1 (h^3 X'_{ek})'' X_{ek} dx;$$

$$B_{33}^{(k)}(y) = \int_0^1 (h^3 X''_{ek})'' X_{ek} dx;$$

Значение  $C_i^{(k)}(y), (i = \overline{1,7})$  получим из  $C_i^{(k-1)}(x)$  заменой

$A_y^{(k-1)}(x), (i, j = \overline{1,3})$  соответственно на  $B_y^{(k)}(y), (i, j = \overline{1,3})$ .

Теперь покажем как формируется матрица граничных условий в системе (33.4). Из граничных условий (33.2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(U_x)} &= A_{11}^{(k-1)} X_k'' + A_{12}^{(k-1)} X_k' + A_{13}^{(k-1)} X_k \\ (A_{21}^{(k-1)} - A_{23}^{(k-1)} A_{11}^{(k-1)^{-1}} A_{12}^{(k-1)}) X_k' + \frac{1}{\gamma} M_x^{(U_x')} + (A_{12}^{(k-1)} - A_{23}^{(k-1)} A_{11}^{(k-1)^{-1}} A_{13}^{(k-1)}) X_k + \\ &+ A_{23}^{(k-1)} A_{11}^{(k-1)^{-1}} M_x^{(U_x)} = 0 \\ X_k(x) = 0 \quad X_k'(x) = 0 \quad \text{при } x = 1 \\ M_y^{(U_y)} &= B_{11}^{(k)} Y_k'' + B_{12}^{(k)} Y_k' + B_{13}^{(k)} Y_k = 0 \\ (B_{21}^{(k)} - B_{23}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} B_{12}^{(k)}) Y_k' + \gamma M_y^{(U_y')} + (B_{12}^{(k)} - B_{23}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} B_{13}^{(k)}) Y_k + \\ &+ B_{23}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} M_y^{(U_y)} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \text{при } x = 1 \\ \text{при } y = 0, y = 1 \end{array}$$

Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} S_{k-1}^{(x)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{31}^{(k-1)} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad R_{k-1}^{(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{31}^{(k-1)} & a_{33}^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad \text{при } x = 0 \\ S_{k-1}^{(x)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{k-1}^{(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{при } x = 1 \\ S_k^{(y)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{31}^{(k)} & \gamma \end{bmatrix}, \quad R_{k-1}^{(y)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b_{31}^{(k)} & b_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{при } y = 0, y = 1 \end{aligned} \right\} \quad (33.5)$$

где

$$\begin{aligned} c_{31}^{(k-1)} &= A_{21}^{(k-1)} - A_{23}^{(k-1)} A_{11}^{(k-1)^{-1}} A_{12}^{(k-1)}; \quad a_{31}^{(k-1)} = A_{12}^{(k-1)} - A_{23}^{(k-1)} A_{11}^{(k-1)^{-1}}; \\ a_{33}^{(k-1)} &= A_{23}^{(k-1)} A_{11}^{(k-1)^{-1}}; \quad d_{31}^{(k)} = B_{21}^{(k)} - B_{23}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} B_{12}^{(k)}; \\ b_{31}^{(k)} &= B_{12}^{(k)} - B_{23}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} B_{13}^{(k)}; \quad b_{33}^{(k)} = B_{23}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} \end{aligned}$$

Запись системы в виде (33.4) является нормальной формой записи краевых задач для численного его решения модифицированным вариантом метода дифференциальной прогонки [25]. Итерационный процесс ( $k=1,2,..$ ) решения системы (33.4) повторяется до тех пор пока вычисление по (33.3) решение не будет удовлетворять условию. В качестве начального приближения  $Y_{10}$  можно использовать любые непрерывные функции или константы.

3. Численное решение системы взаимосвязанных одномерных краевых задач (33.4), к последовательности которых свелась исходная двумерная краевая задача, составляет основу третьего этапа предлагаемой методики. С этой целью в алгоритме реализуется следующие этапы вычислительного процесса: по заданными мгновенно-упругими характеристиками и законом изменения толщины пластинки и из заданных граничных условий формулируются элементы матрицы,  $S_{k-1}^{(x)}, S_{k-1}^{(y)}, S_k^{(x)}, R_k^{(y)}$  и матрицы правые части системы (33.4).

Согласно [7] мгновенно-упругие характеристики для различных марок анизотропного материала приведены в следующей таблице.

Таблица 33.1.

а) КАСТ-В	б) ортотропный СВМ	в) СВМ	г) изотропный
$\bar{\nu}_1=0,6526492$	$\bar{\nu}_1=0,1201954$	$\bar{\nu}_1=0,3411017$	$\bar{\nu}_1=1,0000$
$\bar{\nu}_{12}=-0,3952901$	$\bar{\nu}_{12}=0$	$\bar{\nu}_{12}=-0,4296382$	$\bar{\nu}_{12}=0$
$\bar{\nu}_2=0,6526492$	$\bar{\nu}_2=0,1949985$	$\bar{\nu}_2=0,4554859$	$\bar{\nu}_2=1,0000$
$\bar{\nu}_{22}=-0,3952901$	$\bar{\nu}_{22}=0$	$\bar{\nu}_{22}=-0,0071153$	$\bar{\nu}_{22}=0$
$\bar{\nu}_3=-0,3167115$	$\bar{\nu}_3=0$	$\bar{\nu}_3=-0,552015$	$\bar{\nu}_3=0$
$\bar{\nu}_{32}=-0,3167115$	$\bar{\nu}_{32}=0$	$\bar{\nu}_{32}=-0,0068462$	$\bar{\nu}_{32}=0$
$\theta_1=1,0000$	$\theta_1=0,6163915$	$\theta_1=0,7488743$	$\theta_1=\theta_2=1,000$
$\theta_2=1,2481076$	$\theta_2=0,3137927$	$\theta_2=0,7783088$	$\theta_1=\theta_2=1,000$
$\gamma=1,0000$	$\gamma=1,0000$	$\gamma=1,0000$	$\gamma=1,0000$

Закон изменения толщины пластинки в принципе можно задать произвольно, но в нашей работе для простоты он принят как:

а)  $h = \text{const}$ , б)  $h = 1 + \alpha(x - 1)$ , интегралы таблично заданных функций  $X_k^{(x)}, Y_k^{(y)}$  и их производные вычисляются по формуле трапеции.



5-6 итераций по предлагаемому методу обеспечивают определение как собственных чисел, так и собственных функций до пяти - шестизначных цифрах. (см. табл. 33.3 и 33.4). В таблице 33.3 приведены наименьшие значения собственных чисел и соответствующие значения собственных функций для квадратной изотропной консольной пластинки, а в таблице 33.4 аналогичные данные для анизотропной пластинки марки СВМ переменной толщины  $h = 1 - 0,3(1 - x)$ .

Таблица 33.3

Число итерации по методу вариационной итерации = 5;  $\lambda = 12,1934$ ; значение собственной функции  $U(x,y)$ . В скобках – для числа итерации по методу вариационной итерации = 6;  $\lambda = 12,1929$ ; значение собственной функции  $U(x,y)$ .

$x/y$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0	0,0000 (0,000)	0,0335 (0,0335)	0,1278 (0,1277)	0,2730 (0,2729)	0,4598 (0,4597)	0,6791 (0,6789)	0,9223 (0,9222)	1,1818 (1,1817)	1,4510 (1,4598)	1,7248 (1,7247)	2,000 (2,000)
0,1	0,0000 (0,000)	0,0335 (0,0335)	0,1278 (0,1277)	0,2730 (0,2729)	0,4598 (0,4597)	0,6791 (0,6789)	0,9223 (0,9222)	1,1818 (1,1817)	1,4510 (1,4598)	1,7248 (1,7247)	2,000 (2,000)
0,2	0,0000 (0,000)	0,0335 (0,0335)	0,1278 (0,1277)	0,2730 (0,2729)	0,4598 (0,4597)	0,6791 (0,6789)	0,9223 (0,9222)	1,1818 (1,1817)	1,4510 (1,4598)	1,7248 (1,7247)	2,000 (2,000)
0,3	0,0000 (0,000)	0,0335 (0,0335)	0,1278 (0,1277)	0,2730 (0,2729)	0,4598 (0,4597)	0,6791 (0,6789)	0,9223 (0,9222)	1,1818 (1,1817)	1,4510 (1,4598)	1,7248 (1,7247)	2,000 (2,000)
0,4	0,0000 (0,000)	0,0335 (0,0335)	0,1278 (0,1277)	0,2730 (0,2729)	0,4598 (0,4597)	0,6791 (0,6789)	0,9223 (0,9222)	1,1818 (1,1817)	1,4510 (1,4598)	1,7248 (1,7247)	2,000 (2,000)
0,5	0,0000 (0,000)	0,0335 (0,0335)	0,1278 (0,1277)	0,2730 (0,2729)	0,4598 (0,4597)	0,6791 (0,6789)	0,9223 (0,9222)	1,1818 (1,1817)	1,4510 (1,4598)	1,7248 (1,7247)	2,000 (2,000)

Таблица 33.4

Число итерации по методу вариационной итерации = 5;  $\lambda = 11,8813$ ; значение собственной функции  $U(x, y)$ . В скобках – для числа итерации по методу вариационной итерации = 6;  $\lambda = 11,8799$ ; значение собственной функции  $U(x, y)$ .

$x/y$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0	0,0000 (0,000)	0,02935 (0,02929)	0,1198 (0,1197)	0,2348 (0,2347)	0,3982 (0,3979)	0,6253 (0,6251)	0,9112 (0,9109)	1,0923 (1,0919)	1,3917 (1,3916)	1,6983 (1,6982)	1,9800 (1,9800)
0,1	0,0000 (0,000)	0,02935 (0,02929)	0,1198 (0,1197)	0,2348 (0,2347)	0,3982 (0,3979)	0,6253 (0,6251)	0,9112 (0,9109)	1,0923 (1,0919)	1,3917 (1,3916)	1,6983 (1,6982)	1,9800 (1,9800)
0,2	0,0000 (0,000)	0,02935 (0,02929)	0,1198 (0,1197)	0,2348 (0,2347)	0,3982 (0,3979)	0,6253 (0,6251)	0,9112 (0,9109)	1,0923 (1,0919)	1,3917 (1,3916)	1,6983 (1,6982)	1,9800 (1,9800)
0,3	0,0000 (0,000)	0,02935 (0,02929)	0,1198 (0,1197)	0,2348 (0,2347)	0,3982 (0,3979)	0,6253 (0,6251)	0,9112 (0,9109)	1,0923 (1,0919)	1,3917 (1,3916)	1,6983 (1,6982)	1,9800 (1,9800)
0,4	0,0000 (0,000)	0,02935 (0,02929)	0,1198 (0,1197)	0,2348 (0,2347)	0,3982 (0,3979)	0,6253 (0,6251)	0,9112 (0,9109)	1,0923 (1,0919)	1,3917 (1,3916)	1,6983 (1,6982)	1,9800 (1,9800)
0,5	0,0000 (0,000)	0,02935 (0,02929)	0,1198 (0,1197)	0,2348 (0,2347)	0,3982 (0,3979)	0,6253 (0,6251)	0,9112 (0,9109)	1,0923 (1,0919)	1,3917 (1,3916)	1,6983 (1,6982)	1,9800 (1,9800)

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Какие операторы называется самосопряженным, а какие несамосопряженными?
2. Как понимаете существование и единственность решения краевой задачи дивергенции?
3. Перечислите, пожалуйста, основные этапы решения спектральной задачи.
4. Расскажите, пожалуйста, суть метод Коха и метода дифференциальной прогонки?

## Глава IX

## Амплитуда установившегося флаттера наследственно-деформируемого консольного крыла

## §34. Постановка задачи.

Будем исследовать амплитуду установившегося флаттера наследственно-деформируемого крыла, жестко зацементированного в фюзеляже. Ясно, что фюзеляж при полете даже при постоянной скорости полета находится под действием периодических вибрационных нагрузках с малыми амплитудами. Физическим источником этих вибрационных воздействий может быть установившийся режим работы двигательных установок летательного аппарата (ЛА). Таким образом, корневая часть крыла при полете находится в кинематически возбужденном состоянии под действием периодической во времени внешней нагрузки  $\bar{W}(0, \bar{x}, \bar{t}) = Ae^{-h\bar{t}} \sin(\alpha\bar{x} + \varphi) = W_0(t)$ .

Теперь, если трактовать крыло как консольную наследственно-деформируемую анизотропную (исортотропную) пластинку переменной толщины, находящуюся под действием аэродинамической  $q = -k\bar{V}W_x(x, y, t)$  и периодической инерционной  $m(x, y)\ddot{W}_0(t)$  нагрузок, то задача сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) в частных производных с переменными коэффициентами, которые в безразмерных координатах можно записать в виде [7]

$$(1 - R^*)LW + PW_x + h(x, y)W_{xx} = -h(x, y)\ddot{W}_0(t) \quad (34.1)$$

где:

$$LW = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \gamma^2 \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, \quad M_x = h^3(x, y)(W_{xx} + \nu_1 W_{yy} + \nu_2 W_{yy}),$$

$$M_y = \theta_1 h^3(x, y)(\gamma^2 W_{yy} + \nu_2 W_{xx} + \nu_{22} W_{xx}), \quad M_{xy} = \theta_2 h^3(x, y)(\gamma W_{xy} + \nu_1 W_{xx} + \nu_{12} W_{yy})$$

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{h}(x, y) = h_0 h(x, y), \quad \bar{W} = h_0 W(x, y, t), \quad \gamma = a/b, \quad \bar{t} = t_1 t$$

$$v_1 = \gamma^2 D_{12} / D_{11}, \quad v_{12} = 2\gamma D_{16} / D_{11}, \quad v_2 = D_{12} / D_{22}, \quad v_{22} = 2\gamma D_{26} / D_{22}.$$

$$v_3 = D_{16} / 2D_{66}, \quad \theta_1 = D_{22} / D_{11}, \quad \theta_2 = 2D_{66} / D_{11}, \quad D_{ij} = B_{ij} h_0^3 / 12, \quad t_1 = \sqrt{\rho h_0 a^4 / D_{11}}$$

$$P = \frac{ka^3}{D_{11}} V, \quad \bar{W} = W(x, y, t) + W_0(t), \quad R^* LW = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) LW(\tau) d\tau,$$

$$R(t-\tau) = \varepsilon e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

Для полного определения задачи к ИДУ (34.1) необходимо добавить граничные и начальные условия. При длительном полете, мы будем интересоваться только теми характеристиками колебательного движения, которые не зависят от начального импульса, и поэтому начальные условия нам будут не нужны, т.е. будем исследовать установившиеся колебания пластинки. Напишем граничные условия:

$$\begin{aligned} W = 0, W_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \\ M_y = 0, \gamma \frac{\partial M_x}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad y = 1 \\ M_x = 0, \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = 1 \end{aligned} \quad (34.2)$$

Требуется исследовать амплитуду колебаний  $A_{ij}(x, y, P, \omega)$  в зависимости от скорости  $P$  и частоты возбуждаемой силы  $\omega$  в произвольной точке крыла самолета и найти  $P_{кр}$  приводящей к резонансному пику.

Для решения поставленной задачи будем использовать методику состоящую из трех этапов:

1. Точные сведения исходной ИДУ в частных производных к системе двумерных стационарных краевых задач.

2. Редукция системы двумерных стационарных краевых задач к последовательности системы взаимосвязанных одномерных краевых задач.

3. Численное решение соответствующих взаимосвязанных одномерных задач обеспечивающих получение окончательных результатов с высокой степенью точности.

### §35. Точное сведение ИДУ в частных производных к системе двумерных стационарных краевых задач.

При реализации первого этапа методики, предполагается, что изучаемая конструкция совершает вынужденные установившиеся колебания под действием гармонической нагрузки. Поэтому, в (34.1) положим:

$$\begin{aligned} -h(x, y)\ddot{W}_0(t) &= e^{-bt} [q_1(x, y)\sin \omega t + q_2(x, y)\cos \omega t] \\ W &= A_n t^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_n), \quad A_n = \sqrt{U^2 + V^2}, \quad \varphi_n = \arctg \frac{U(x, y, p, \omega)}{V(x, y, p, \omega)} \end{aligned} \quad (35.1)$$

где  $q_i(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ) - известные функции,  $b$  - коэффициент затухания,  $\omega$  - частота внешних возбуждений,  $U(x, y, p, \omega)$  и  $V(x, y, p, \omega)$  - неизвестные функции подлежащие определению.

Для определения этих неизвестных функций используем следующие тождества:

$$\begin{aligned} R^*LV &= e^{-bt} \{ [R_c LU - R_c LV] \cos \omega t + [R_c LU + R_c LV] \sin \omega t \} \\ W_n &= e^{-bt} \{ [(b^2 - \omega^2)U - 2b\omega V] \cos \omega t + [(b^2 - \omega^2)V + 2b\omega U] \sin \omega t \} \end{aligned} \quad (35.2)$$

Из (34.1) получим следующие системы двумерных стационарных краевых задач:

$$\begin{aligned} LU + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}U_x + a_{14}V_x &= \bar{q}_1(x, y) \\ LV + a_{21}U + a_{22}V + a_{23}U_x + a_{24}V_x &= q_2(x, y) \end{aligned} \quad (35.3)$$

где:

$$a_{11}(x, y) = \frac{h(x, y)}{R_{cs}} [(1 - R_c)(b^2 - \omega^2) - 2R_s b \omega] \quad a_{11} = a_{22}$$

$$a_{12}(x, y) = -\frac{h(x, y)}{R_{cs}} [2(1 - R_c)b\omega + R_s(b^2 - \omega^2)] \quad a_{12} = -a_{21},$$

$$a_{13}(x, y) = \frac{(1 - R_c)P}{R_{cs}}, \quad a_{13} = a_{24}, \quad a_{14} = -\frac{R_s P}{R_{cs}}$$

$$\bar{q}_1(x, y) = \frac{1}{R_{cs}} [(1 - R_c)q_1 - R_c q_2] \quad q_2(x, y) = \frac{1}{R_{cs}} [R_c q_1 + (1 - R_c)q_2]$$

$$R_{cs} = (1 - R_c)^2 + R_s^2, \quad R_c = \int_0^\pi R(\tau) e^{-\beta\tau} \cos \omega\tau d\tau = \varepsilon \frac{I[\alpha] \cos \alpha\theta}{[(b - \beta)^2 + \omega^2]^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$R_s = \int_0^\pi R(\tau) e^{\beta\tau} \sin \omega\tau d\tau = \varepsilon \frac{I[\alpha] \sin \alpha\theta}{[(b - \beta)^2 + \omega^2]^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b - \beta}$$

$$LU = \frac{\partial^2 M_x^{(u)}}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 M_{xy}^{(u)}}{\partial x \partial y} + \gamma^2 \frac{\partial^2 M_y^{(u)}}{\partial y^2}, \quad LV = \frac{\partial^2 M_x^{(v)}}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 M_{xy}^{(v)}}{\partial x \partial y} + \gamma^2 \frac{\partial^2 M_y^{(v)}}{\partial y^2}$$

Граничные условия для системы (35.3) получаются из исходного граничного условия (34.2), т.е.:

$$\begin{aligned} U = U_x = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \quad \quad V = V_x = 0 \quad \text{при } y = 0 \\ M_y^{(u)} = 0, \gamma \frac{\partial M_y^{(u)}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{(u)}}{\partial x} = 0, \quad M_y^{(v)} = 0, \gamma \frac{\partial M_y^{(v)}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{(v)}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 1 \end{aligned} \quad (35.4)$$

$$M_x^{(u)} = 0, \frac{\partial M_x^{(u)}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{(u)}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = 1$$

$$M_x^{(v)} = 0, \frac{\partial M_x^{(v)}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{(v)}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = 1$$

**§36. Редукция системы двумерных стационарных краевых задач (35.3), (35.4) к последовательности системы взаимосвязанных одномерных краевых задач.**

Для редукции исходной системы двумерных краевых задач (35.3), (35.4) к системе одномерных краевых задач используется метод вариационной итерации (ВИ) [7]. Согласно методу ВИ, решение системы (35.3) ищется в виде:

$$U^k(x, y) = X_{1k}(x) \cdot Y_{1k}(y), V^k(x, y) = X_{2k}(x) \cdot Y_{2k}(y) \quad (36.1)$$

Подставляя (36.1) в (35.3) и выполняя известные процедуры метода ВИ, получим особую взаимосвязанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая с учетом итерационного процесса запишется в нормальной форме для использования метода дифференциальной прогонки:

$$\begin{cases} X_k'' + A_{k-1}(x)X_k' + B_{k-1}(x)X_k = F_{k-1}(x) \\ S_{k-1}^{(x)}X_k' + R_{k-1}^{(x)}X_k = 0, x = 0, x = 1 \\ Y_k'' + A_k(y)Y_k' + B_k(y)Y_k = F_k(y) \\ S_k^{(y)}Y_k' + R_k^{(y)}Y_k = 0, y = 0, y = 1 \end{cases} \quad (36.2)$$

где:

$$\bar{X}_k = (X_{1k}, X_{2k}, M_{1k}^{(x)}, M_{2k}^{(x)})^T, \quad \bar{Y}_k = (Y_{1k}, Y_{2k}, M_{1k}^{(y)}, M_{2k}^{(y)})^T$$

$$F_{k-1}(x) = (0, 0, F_1^{(k-1)}(x), F_2^{(k-1)}(x))^T, \quad F_k(x) = (0, 0, F_1^{(k)}(y), F_2^{(k)}(y))^T$$

$$\begin{aligned}
A_{k-1}(x) &= \begin{pmatrix} C_1^{(k-1)}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1^{(k-1)}(x) & 0 & 0 \\ C_2^{(k-1)}(x) & a_{14}^{(k-1)}(x) & C_3^{(k-1)}(x) & 0 \\ a_{21}^{(k-1)}(x) & \bar{C}_2^{(k-1)}(x) & 0 & C_3^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}, \\
B_{k-1}(x) &= \begin{pmatrix} C_1^{(k-1)}(x) & 0 & C_5^{(k-1)}(x) & 0 \\ 0 & \bar{C}_4^{(k-1)}(x) & 0 & \bar{C}_3^{(k-1)}(x) \\ C_6^{(k-1)}(x) & a_{12}^{(k-1)}(x) & C_7^{(k-1)}(x) & 0 \\ a_{21}^{(k-1)}(x) & \bar{C}_6^{(k-1)}(x) & 0 & \bar{C}_7^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}, \\
A_k(y) &= \begin{pmatrix} C_1^{(k)}(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_1^{(k)}(y) & 0 & 0 \\ C_2^{(k)}(y) & 0 & C_3^{(k)}(y) & 0 \\ 0 & \bar{C}_2^{(k)}(y) & 0 & \bar{C}_3^{(k)}(y) \end{pmatrix}, \\
B_k(y) &= \begin{pmatrix} C_4^{(k)}(y) & 0 & C_5^{(k)}(y) & 0 \\ 0 & \bar{C}_4^{(k)}(y) & 0 & \bar{C}_5^{(k)}(y) \\ C_6^{(k)}(y) & a_{12}^{(k)}(y) & C_7^{(k)}(y) & 0 \\ a_{21}^{(k)}(y) & \bar{C}_6^{(k)}(y) & 0 & \bar{C}_7^{(k)}(y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
M_{1k}^{(k)} = A_{11}^{(k-1)}(x)X''_{1k} + A_{12}^{(k-1)}(x)X'_{1k} + A_{13}^{(k-1)}(x)X_{1k}, \\
M_{2k}^{(k)} = A_{11}^{(k-1)}(x)X''_{2k} + \bar{A}_{12}^{(k-1)}(x)X'_{2k} + \bar{A}_{23}^{(k-1)}(x)X_{2k}, \\
M_{1k}^{(s)} = B_{11}^{(k-1)}(y)Y''_{1k} + B_{12}^{(k-1)}(y)Y'_{1k} + B_{13}^{(k-1)}(y)Y_{1k}, \\
M_{2k}^{(s)} = \bar{B}_{11}^{(k-1)}(y)Y''_{2k} + \bar{B}_{12}^{(k-1)}(y)Y'_{2k} + \bar{B}_{13}^{(k-1)}(y)Y_{2k},
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
C_1^{(k-1)}(x) &= (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) \\
C_2^{(k-1)}(x) &= (A_{22}^{(k-1)}(x))^{-1} \left[ A_{21}^{(k-1)}(x) (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) \right] + A_{23}^{(k-1)}(x) - \\
&\quad - A_{21}^{(k-1)}(x) (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{11}^{(k-1)}(x) - A_{11}^{(k-1)}(x) (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) - A_{22}^{(k-1)}(x) (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} \\
A_{12}^{(k-1)}(x) &+ A_{32}^{(k-1)}(x) + a_{13}^{(k-1)}(x) + \left[ A_{21}^{(k-1)}(x) (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) \right] (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x) \\
C_3^{(k-1)}(x) &= A_{21}^{(k-1)}(x) (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1}, \\
C_4^{(k-1)}(x) &= (A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x), \\
C_5^{(k-1)}(x) &= -(A_{11}^{(k-1)}(x))^{-1};
\end{aligned}$$

Сравнительный анализ наименьших значений  $\lambda_1$  для изотропной квадратной пластинки приведенной в таблице 33.2 с имеющимися приближенными решениями [35] показал, что максимальная погрешность предложенного метода составляет доли процента.

Как известно, сходимость любого итерационного процесса существует в зависимости от выбора начального приближения. Общий рецепт о выборе начального приближения, обеспечивающий сходимость любого итерационного процесса отсутствует. Отличительной особенностью предлагаемого подхода является быстрая сходимость итерационного процесса решения уравнения (33.1) и системы (33.4) как консолидной пластинки постоянной, так и переменной толщины, при выборе начального приближения  $Y_{n0} = 1$ . Согласно этим данным максимум

$h$	$h = const$			
$\frac{a}{b}$	изотропная	ортотропная	СВМ	КАСТЬ-В
1	12,1934	7,5564	8,9714	11,4456
0,75	3,7123	2,3816	2,9635	3,3517
0,5	0,68	0,4213	0,4992	0,5233
$\frac{a}{b}$	$h = 1 + \alpha(1 - x)$			
1	12,7349	7,6635	11,8813	17,4214
0,75	3,8372	2,4056	3,1824	18,2936
0,5	0,67	0,4672	0,5276	3,2476

Таблица 33.2

В таблице 33.2 приведены численные значения наименьших параметров  $\lambda_1 = \lambda_{кр}$ , через которые вычисляются критические скорости дивергенции для различных марок анизотропной пластинки как постоянной, так и переменной толщины.

$$B_{11}^{(k)}(y) = \theta_1 \gamma^2 \int_0^1 h^3 X_{1k}^2 dx, \quad B_{12}^{(k)}(y) = \theta_1 \nu_{22} \int_0^1 h^3 X_{1k} X_{1k} dx, \quad B_{13}^{(k)}(y) = \theta_1 \nu_2 \int_0^1 h^3 X_{1k} X_{1k} dx,$$

$$B_{21}^{(k)}(y) = 2\theta_2 \nu_{32} \int_0^1 (h^3 X_{1k})' X_{1k} dx, \quad B_{22}^{(k)}(y) = 2\theta_2 \gamma \int_0^1 (h^3 X_{1k}')' X_{1k} dx,$$

$$B_{23}^{(k)}(y) = 2\theta_2 \nu_3 \int_0^1 (h^3 X_{1k}'')' X_{1k} dx, \quad B_{31}^{(k)}(y) = \nu_1 \int_0^1 (h^3 X_{1k}')'' X_{1k} dx,$$

$$B_{32}^{(k)}(y) = \nu_{12} \int_0^1 (h^3 X_{1k}')'' X_{1k} dx, \quad B_{33}^{(k)}(y) = \int_0^1 (h^3 X_{1k}'')'' X_{1k} dx,$$

$$a_{11}^{(k)}(y) = \int_0^1 (a_{11} X_{1k} + a_{13} X_{1k}') X_{1k} dx, \quad a_{12}^{(k)}(y) = \int_0^1 (a_{12} X_{2k} + a_{14} X_{2k}') X_{1k} dx,$$

$$a_{21}^{(k)}(y) = \int_0^1 (a_{21} X_{1k} + a_{23} X_{1k}') X_{2k} dx, \quad a_{22}^{(k)}(y) = \int_0^1 (a_{12} X_{2k} + a_{24} X_{2k}') X_{2k} dx,$$

$$F_1^{(k)}(y) = \int_0^1 q_1 X_{1k} dx, \quad F_2^{(k)}(y) = \int_0^1 q_2 X_{2k} dx,$$

Значения  $\bar{C}_i^{(k-1)}(x)$  получим из  $C_i^{(k-1)}(x)$ , заменой

$$1) A_y^{(k-1)}(x) \text{ на } \bar{A}_y^{(k-1)}(x), \quad 2) a_{11}^{(k-1)}(x) \text{ на } a_{22}^{(k-1)}(x), \quad 3) a_{13}^{(k-1)}(x) \text{ на } a_{24}^{(k-1)}(x)$$

Значения  $C_i^{(k)}(y)$  получим из  $C_i^{(k-1)}(x)$ , заменой

$$1) A_y^{(k-1)}(x) \text{ на } B_y^{(k)}(y), \quad 2) a_{11}^{(k-1)}(x) \text{ на } a_{11}^{(k)}(y), \quad 3) a_{13}^{(k-1)}(x) = 0$$

Значения  $\bar{C}_i^{(k)}(y)$  получим из  $C_i^{(k-1)}(x)$ , заменой

$$1) A_y^{(k-1)}(x) \text{ на } \bar{B}_y^{(k)}(y), \quad 2) a_{11}^{(k-1)}(x) \text{ на } a_{22}^{(k)}(x), \quad 3) a_{13}^{(k-1)}(x) = 0$$

Значения  $\bar{A}_y^{(k-1)}(x), \bar{B}_y^{(k)}(y)$  ( $i, j = 1, 3$ ) получим из значений  $A_y^{(k-1)}(x), B_y^{(k)}(y)$ , заменой  $Y_{1k-1}, X_{1k}, a_{13}$  соответственно на  $Y_{2k-1}, X_{2k}, a_{23}$

Матрица граничное условие в (36.2) в зависимости от исходных граничных условий (35.4) формируется следующим образом:

$$S_k^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; R_k^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_k^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11}^{(k)}(y) & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_{11}^{(k)}(y) & 0 & \gamma \end{pmatrix}; R_k^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_{12}^{(k)}(y) & 0 & d_{13}^{(k)}(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{d}_{12}^{(k)}(y) & 0 & \bar{d}_{13}^{(k)}(y) \end{pmatrix}$$

$$S_{k-1}^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11}^{(k-1)}(y) & 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_{11}^{(k-1)}(y) & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}; R_{k-1}^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_{12}^{(k-1)}(y) & 0 & d_{13}^{(k-1)}(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{d}_{12}^{(k-1)}(y) & 0 & \bar{d}_{13}^{(k-1)}(y) \end{pmatrix}$$

при  $x = 0, x = 1$

$$d_{11}^{(k-1)}(x) = A_{22}^{(k-1)}(x) - A_{21}^{(k-1)}(x) \left( A_{11}^{(k-1)}(x) \right)^{-1} A_{12}^{(k-1)}(x)$$

$$d_{12}^{(k-1)}(x) = A_{23}^{(k-1)}(x) - A_{21}^{(k-1)}(x) \left( A_{11}^{(k-1)}(x) \right)^{-1} A_{13}^{(k-1)}(x)$$

$$d_{13}^{(k-1)}(x) = A_{21}^{(k-1)}(x) \left( A_{22}^{(k-1)}(x) \right)^{-1}$$

Значение  $\bar{d}_y^{(k-1)}(x)$  получим из  $d_y^{(k-1)}(x)$ , заменой  $A_y^{(k-1)}(x)$  на  $\bar{A}_y^{(k-1)}(x)$ .

Значение  $d_y^{(k)}(y)$  получим из  $d_y^{(k-1)}(x)$ , заменой  $A_y^{(k-1)}(x)$  на  $B_y^{(k)}(y)$ .

Значение  $\bar{d}_y^{(k)}(y)$  получим из  $d_y^{(k-1)}(x)$ , заменой  $A_y^{(k-1)}(x)$  на  $\bar{B}_y^{(k)}(y)$ .

Запись системы (36.2) является нормальной формой записи краевых задач для численного его решения модифицированным вариантом метода дифференциальной прогонки [25]. Итерационный процесс ( $k=1,2,\dots$ ) решения системы (36.2) повторяется до тех пор, пока вычисления по (36.1) решения не будут удовлетворять следующему условию:

$$\left\| \|U^{(k)} - U^{(k-1)}\| + \|V^{(k)} - V^{(k-1)}\| \right\| < \varepsilon \quad (36.3)$$

В качестве начального приближения  $Y_{10}, Y_{20}$  можно использовать любые непрерывные функции или константы.

Итак, с помощью разработанной математической модели и их численного алгоритма можно проводить вычислительные эксперименты на ПЭВМ для исследования установившегося флаттера наследственно - деформируемого консольного крыла из композитного материала.

### §37. Численные реализации алгоритма.

Численное решение системы взаимосвязанных одномерных краевых задач (36.2), к последовательности которых свелась исходная система двумерных стационарных краевых задач (35.3), (35.4), составляет основу третьего этапа предлагаемой методики. Запись системы в виде (36.2) является нормальной формой записи краевых задач для численного его решения модифицированным вариационным методом дифференциальной прогонки, изложенным в §28. Соответствующие задачи Коши в заданной степени точности решаются методом Кутты-Мерсона.

Численные реализации алгоритма рассматриваемого метода достаточно проста и удобна для практически полной автоматизации вычислительного процесса. Программа составлена на языке Турбо Паскаль и реализована на ПЭВМ типа IBM PC. Амплитуда прогиба и момента вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned}
 A_u &= \sqrt{[u^{(k)}(x, y, P, \omega)]^2 + [v^{(k)}(x, y, P, \omega)]^2}; & A_M &= \sqrt{(M_{u_x}^{(k)})^2 + (M_{v_x}^{(k)})^2}; \\
 A_{M_y} &= \sqrt{(M_{u_y}^{(k)})^2 + (M_{v_y}^{(k)})^2}; & M_{u_x}^{(k)} &= h^3 (u_{xx}^{(k)} + v_1 u_{yy}^{(k)} + v_{12} u_{xy}^{(k)}); \\
 M_{v_x}^{(k)} &= h^3 (v_{xx}^{(k)} + v_1 v_{yy}^{(k)} + v_{12} v_{xy}^{(k)}); & M_{u_y}^{(k)} &= \theta_1 h^3 (\gamma^2 u_{yy}^{(k)} + v_2 u_{xx}^{(k)} + v_{22} u_{xy}^{(k)}); \\
 & & M_{v_y}^{(k)} &= \theta_1 h^3 (\gamma^2 v_{yy}^{(k)} + v_2 v_{xx}^{(k)} + v_{22} v_{xy}^{(k)})
 \end{aligned}$$

При этом мгновенно-упругие характеристики для различных марок анизотропного материала можно взять из таблицы 33.1, приведенной в §33.

В качестве примера рассмотрим задачу установившегося флаттера консольной прямоугольной пластинки из диссипативно однородного композитного материала при кинематическом возмущении нижнего основания  $y=0$ . Корневая часть пластинки находится под действием периодических вибрационных нагрузок по закону  $W_0(t)$ , а толщина переменная, изменяется по различным законам.

Тогда задача сводится к решению однородного ИДУ типа (34.1) при следующих неоднородных граничных условиях:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) &= W_0(t), \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{y} = 0 \\ \tilde{M}_y &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial \bar{y}} + 2 \frac{\partial \tilde{M}_{\bar{x}\bar{y}}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{y} = b \\ \tilde{M}_{\bar{x}} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{M}_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + 2 \frac{\partial \tilde{M}_{\bar{x}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = a\end{aligned}$$

Пластинки с такого рода граничными условиями представляют особый интерес, так как они входят составными частями в конструкции прямоугольных в плане высотных сооружений переменной толщины и крыла самолета.

С помощью представления:

$$\tilde{W}(x, y, t) = W(x, y, t) + W_0(t),$$

решение задачи можно свести к решению неоднородного ИДУ (34.1) при однородных граничных условиях (34.2), а внешняя нагрузка принимает вид:

$$q(x, y, t) = -h(x, y) \ddot{W}_0(t)$$

Сначала произведем анализ численных результатов, относящихся к амплитудно-частотным характеристикам анизотропных идеально-упругих и вязкоупругих пластин марки СВММ с постоянной (рис.37.1) и переменной (рис.37.2) толщиной без учета аэродинамических возмущений ( $P=0$ ). Если известен характер амплитудно-частотных характеристик без учета аэродинамического воздействия, то легко судить о присущих ей внутренних свойствах, проявляющихся при действии внешних аэродинамических возмущений ( $P \neq 0$ ). На рис.37.1 и 37.2 показано влияние реологических параметров  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  на амплитудно-частотные кривые в центре квадратной пластинки при постоянной и переменной

$h=1-0,7y$  толщине, где  $0 < \omega < 10$ ,  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 0$ . Из рис. 37.1 и 37.2 видно, что учет вязкоупругих свойств материала как постоянной, так и переменной толщины пластинки, приводит к конечной амплитуде колебаний.

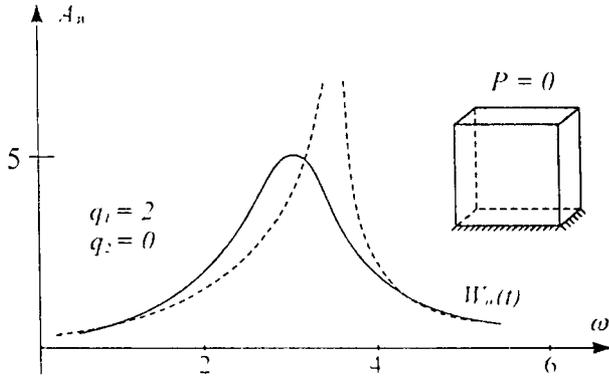


рис.37.1. Амплитудно-частотные характеристики пластинки  $h=const$ ,  $\varepsilon=0,1$ ;  $\alpha=0,25$

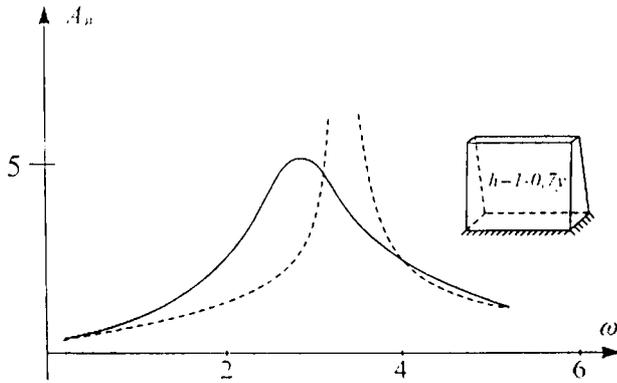


рис.37.2. Амплитудно-частотные характеристики пластинки с переменной толщиной.

Для нахождения критической скорости флаттера ( $P_{кр}$ ) с помощью вычислительного эксперимента используем тот же принцип определения критической нагрузки сжатого консольного стержня. При заданных  $P$  произведем вычисления  $A_{\omega}$ , изменяя частоты возбуждающей силы  $\omega$ . Когда эта частота становится равной частоте собственных колебаний (см. рис.37.3 и 37.4) наступает резонанс и амплитуда колебаний резко возрастает. Максимальная амплитуда при резонансе наступает при вполне определенной частоте. Эта частота, как и величина максимальной амплитуды, зависит от скорости полета, т.е. от  $P$ .

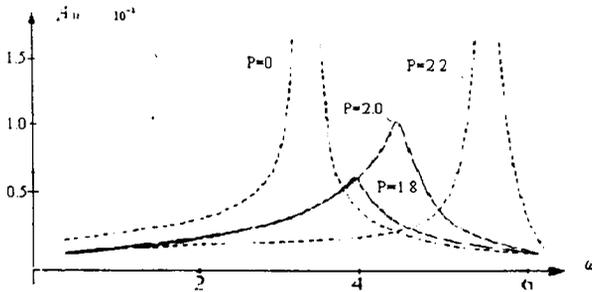


рис.37.3. Амплитудно-частотные характеристики установившегося флаттера пластинки в идеально-упругом случае  $\varepsilon=0$ .

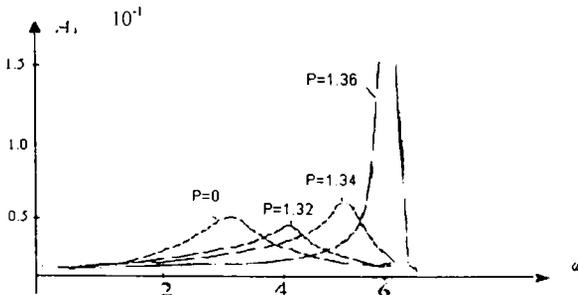


рис.37.4. Амплитудно-частотные характеристики установившегося флаттера пластинки в вязкоупругом случае  $\varepsilon=0,1$ ;  $\alpha=0,25$ ;  $\beta=0,05$ .

При изменении скорости полета  $P$  место резонанса меняет свое положение (см. рис.37.3 и 37.4), а максимальные амплитуды – свою величину. Если последовательно, ступенями изменять скорость и на каждой ступени пробегать всю область частот ( $0 < \omega < 10$ ), то получаются семейства кривых (рис.37.3 и 37.4). При увеличении скорости полета частоты основного резонанса, соответствующие при  $P=0$ , все время увеличиваются, а амплитуда – вначале уменьшается, а затем увеличивается, и при  $P=P_{кр}$  обращается в бесконечность. Из этого условия найдена критическая скорость флаттера в идеально-упругом случае  $P_{кр}^{(y)} = 2,2$ , а в вязкоупругом случае:  $P_{кр}^{(e)} = 1,36$ . Как и следовало ожидать, учет вязкоупругих свойств материала крыла приводит к существенному уменьшению критической скорости флаттера.

Таким образом, вычисление критической скорости флаттера на основе предлагаемой методики производят следующим образом: скорость полета увеличивают ступенями, причем на каждой ступени вызывают путем резонанса колебания крыла и замеряют их максимальную амплитуду. Строят график на машину максимальной амплитуды по скорости. Если на графике начинается быстрое нарастание амплитуды к бесконечности, то вычислительный эксперимент прекращают, так как уже можно определить критическую скорость флаттера. Такой вычислительный эксперимент можно произвести не только по  $A_{\omega}$  и с помощью  $A_M$  и дает хорошие результаты.

На рис.37.5 показана примерная кривая максимальных амплитуд произвольных точек крыла самолета.

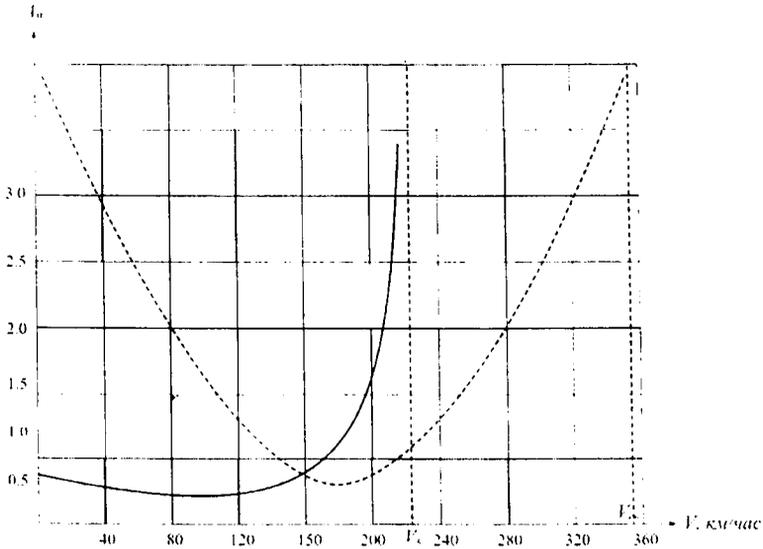


рис.37.5. Кривая максимальных амплитуд прогиба произвольной точки крыла самолета: ----- упругий, ——— вязкоупругий.

$$V = P \frac{D_{11}}{k a^3}; \quad E_{11} = 2.110^6 \text{ кг/см}^2; \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,3; \quad \chi = 1,4;$$

$$P_x = 1.03 \text{ кг/см}^2; \quad \left( \frac{h}{a} \right) = 10^{-2}; \quad C_x = 340 \text{ м/сек}$$

Предлагаемый метод все же не является безопасным, чем проведение испытаний самолета в натуре. Однако вызывать резонансные колебания вблизи критической скорости, да еще доводить их до максимальной амплитуды конечно требует большой вычислительной работы. Но, к сожалению, абсолютно безопасного метода испытаний самолета на флаттер в натуре не существует [16].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Почему корневая часть крыла при полете находится под действием периодической по времени внешней нагрузки?
2. Какие колебания крыла называются установившимися?
3. Почему уравнение (34.1) при установившихся колебаниях решается без начального условия?
4. Чем являются основные задачи флаттера при установившихся колебаниях пластинки?
5. Опишите основные этапы решения уравнения (34.1) при граничных условиях (34.2).
6. Какие тождества используются при точном сведении ИДУ в частных производных к системе двумерных стационарных краевых задач?
7. Каким уравнением описываются системы двумерных стационарных краевых задач?
8. Каким методом редуцируются системы двумерных стационарных краевых задач (35.3), (35.4) к последовательности системы взаимосвязанных одномерных краевых задач?
9. Какая форма записи является нормальной формой записи краевых задач для численного его решения модифицированным вариантом метода дифференциальной прогонки?
10. По какой формуле вычисляется амплитуда прогиба и момента для исследования установившегося флаттера крыла самолета?
11. Объясните основные методики определения критической скорости при установившемся флаттере крыла самолета.
12. Какие скорости полета являются критическими скоростями флаттера?
13. К чему приводит учет вязкоупругих свойств материала при исследовании явления флаттера крыла самолета?

## Глава X

### Нелинейный флаттер наследственно-деформируемых систем с распределенными параметрами

Как известно, большинство задач о наследственно-деформируемых системах, математически моделируемых обычно при помощи линейных слабо-сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), при строгом подходе, вообще говоря, не линейно, т.е. по сути дела эти задачи должны описываться нелинейными ИДУ с частными производными с переменными коэффициентами. Линеаризация таких задач (как геометрически, так и физически, а также аэродинамически) производится исключительно для того, чтобы избежать математических трудностей, связанных с решением нелинейных интегральных и ИДУ. В ряде работ, с целью преодоления указанных трудностей вводятся весьма ограничительные условия на нелинейные части уравнений и интегральные члены. При таких ограничениях не охватываются некоторые важные случаи, когда нелинейные части уравнений и интегральные члены, учитывающие наследственные свойства материала, существенно влияют на решения задачи.

Серьезные затруднения встречаются также при построении исходных соотношений вариационных методов, при применении к исследованию задачи о нелинейном флаттере наследственно-деформируемого крыла самолета с переменными параметрами.

Поэтому разработка новых уточнений и усовершенствованных существующих методов решения ИДУ нелинейных динамических задач элементов конструкции ЛА из наследственно-деформируемых композитных материалов представляет как теоретический, так и практический интерес.

В данной главе обсуждаются общие методы решения на ЭВМ нелинейных задач динамики и динамической аэроустойчивости наследственно-деформируемых систем, позволяющие при определенных условиях преодолеть отмеченные выше трудности.

С помощью вычислительного эксперимента установлено, что момент наступления флаттера крыла предсказываемое линейной теорией не является катастрофической, а разрушение конструкции наступает лишь спустя определенный период и носит усталостный характер. Для того чтобы проследить амплитуду незатухающих колебаний, возникающих при переходе через истинную критическую скорость, необходимо произвести расчет с учетом нелинейных и наследственных свойств материала конструкции.

### **§38. Нелинейные неконсервативные динамические задачи элементов конструкции из диссипативно неоднородных композитных материалов**

Среди неконсервативных задач теории вязкоупругости особо важное место занимают неконсервативные динамические задачи наследственно-деформируемых тел, находящихся в потоке газа или жидкости. Их неконсервативный характер обусловлен тем, что силы, действующие на тело со стороны потока, зависят от деформации тела, например, аэродинамические силы, действующие на крыло самолета или обшивку корпуса ракеты, являются неконсервативными силами. Определение аэродинамических сил, действующих на деформируемое тело довольно сложная и самостоятельная проблема [5,37]. В случаях достаточно больших сверхзвуковых скоростях давление на поверхности тела  $q_1$  согласно поршневой теории [36] можно вычислить так:

$$q_1 = P_\infty \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2C_x} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]^{2\gamma} \quad (38.1)$$

Поэтому решение конкретных задач требует совместного рассмотрения уравнения теории вязкоупругости и аэрогидромеханики, т.е.:

$$LW + mW_n + q_x = q(x, y, t) \quad (38.2)$$

где  $LW$  - интегро-дифференциальный оператор в частных производных,  $q(x, y, t)$  - известные поперечные нагрузки,  $\chi$  - показатель полнотроны газа,  $P_x, C_x$  - соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке.

Таким образом, на стыке двух областей образовался новый раздел механики - теория аэровязкоупругости - имеющий исключительный интерес для авиации и ракетной техники, а также, в меньшей мере и для других областей (энергетика, строительство и т.д.)

Естественно, что первые задачи такого рода в идеально упругой постановке были поставлены и решены именно в связи с потребностями авиационной техники [23, 38, 39].

Развитие авиации и широкое использование в последнее время современных композитных материалов при проектировании летательных аппаратов дало резкий толчок к развитию теории аэровязкоупругости. Дело в том, что все композитные материалы обладают ярко выраженными анизотропными и наследственно-деформируемыми свойствами. Учет этих свойств материала конструкции при математическом моделировании имеет большое теоретическое значение и приближают теорию расчета к фактическому условию работы конструкции. Анизотропные материалы считаются диссипативно неоднородными, если реологические свойства являются различными по различным направлениям. В общем случае, для таких материалов определяющие уравнения принимаются в виде [1]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varphi[\varepsilon_{kl}] - \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) \varphi[\varepsilon_{kl}] d\tau = E^*_{ijkl} \varphi[\varepsilon_{kl}] \quad (38.3)$$

$$\varphi[\varepsilon_{kl}] = \varepsilon_{kl} - \varphi \varepsilon_{kl}^3, \quad \varepsilon_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \varphi[U_{k,i}]$$

где  $\varepsilon_{ij}$  - тензор деформации,  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжения,  $E_{ijkl}$  - тензор мгновенных модулей упругости,  $R_{ijkl}$  - тензор ядра релаксации, имеющий слабо-сингулярную особенность типа Абеля. Общеизвестно, что анизотропная модель Больцмана-Вольтерра (38.3) в общем случае полностью характеризуется заданием 21 ядра наследственности (эти ядра вообще говоря неизвестны).

На практике весьма часто встречаются анизотропные материалы, обладающие теми или иными видами симметрии и можно принять предположение о том, что коэффициенты Пуассона  $\nu_{ij} = const$ . Отсюда заключаем, что для моделирования материалов с указанными свойствами может оказаться достаточным определение в случае неортогортного материала 6, ортогортного 3, а изотропного только одного ядра наследственности.

В самом деле, если учесть условия симметрии компоненты оператора тензора модулей упругости:

$$E^*_{ijkl} = E^*_{jikl} = E^*_{ijlk} = E^*_{lkij} \quad \text{и} \quad \nu_{ij} = const$$

то для диссипативно неоднородного анизотропного материала закон (38.3) в линейном случае запишется в виде:

$$\sigma = \{C^*\}\varepsilon \quad (38.4)$$

где  $C^*$  для диссипативно неоднородного неортогортного и ортогортного материала соответственно принимает вид:

$$C^* = \begin{bmatrix} E^*_{1111} & E^*_{1122} & E^*_{2111} \\ E^*_{1122} & E^*_{2222} & E^*_{1222} \\ E^*_{2111} & E^*_{1222} & E^*_{1212} \end{bmatrix};$$

$$E^*_{1111} = E_{1111}(1 - R^*_1), \quad E^*_{2222} = E_{2222}(1 - R^*_2), \quad E^*_{1122} = E_{1122}(1 - R^*_3), \\ E^*_{2111} = E_{2111}(1 - R^*_4), \quad E^*_{1222} = E_{1222}(1 - R^*_5), \quad E^*_{1212} = E_{1212}(1 - R^*_6)$$

$$C^* = \begin{bmatrix} E^*_{1111} & E^*_{1122} & 0 \\ E^*_{2211} & E^*_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & E^*_{1212} \end{bmatrix};$$

$$E^*_{1111} = E_{1111}(1 - R^*_1), \quad E^*_{1122} = E_{1122}(1 - R^*_1), \quad E^*_{2211} = E_{2211}(1 - R^*_2), \\ E^*_{2222} = E_{2222}(1 - R^*_2), \quad E^*_{1212} = E_{1212}(1 - R^*_3), \quad \sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\}^T$$

где  $R^*_i (i = \overline{1,3})$  - интегральные операторы Вольтерра со слабо-сингулярными ядрами наследственности типа:

$$R^*_i f(t) = \int_0^t R_i(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad R_i(t-\tau) = \varepsilon_i e^{-\beta_i(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad (38.5)$$

В случае ортотропного материала основные компоненты тензора мгновенных модулей упругости связаны с «техническими постоянными» следующими зависимостями:

$$E_{1111} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{2222} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{1122} = \frac{E_{11}\nu_{22}}{1 - \nu_{11}\nu_{22}}, \\ E_{2211} = \frac{E_{22}\nu_{11}}{1 - \nu_{11}\nu_{22}}, \quad E_{1212} = G_{12}, \quad B_{1122} = B_{2211}$$

Анизотропные материалы с одним общим ядром релаксации с различными кривыми мгновенного деформирования [7] и изотропные материалы являются диссипативно однородными материалами. В первом случае  $R^*_i = R^*$ , а во втором  $E_{11} = E_{22} = E$ ,  $G_{12} = G$ ,  $\nu_{ij} = \nu$ .

Воспользовавшись законом (38.3) и (38.4) и исходя из технической теории изгиба анизотропных неортотропных элементов конструкции, получим следующие формулы для изгибающих моментов  $M_x, M_y$  и крутящего момента  $M_{xy}$ :

$$M_x = M_x^{(I)} + M_x^{(H)}, \quad M_y = M_y^{(I)} + M_y^{(H)}, \quad M_{xy} = M_{xy}^{(I)} + M_{xy}^{(H)},$$

где:

$$\begin{aligned}
M_x^{(0)} &= -[D_{11}(1-R^*_1)W_{xx} + D_{12}(1-R^*_3)W_{yy} + 2D_{16}(1-R^*_4)W_{xy}], \\
M_y^{(0)} &= -[D_{22}(1-R^*_2)W_{yy} + D_{21}(1-R^*_3)W_{xx} + 2D_{26}(1-R^*_5)W_{xy}], \\
M_{xy}^{(0)} &= -[2D_{66}(1-R^*_6)W_{xy} + D_{16}(1-R^*_4)W_{xx} + D_{26}(1-R^*_5)W_{yy}],
\end{aligned}$$

$$M_x^{(H)} = \bar{M}_x^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}), M_y^{(H)} = \bar{M}_y^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}), M_{xy}^{(H)} = \bar{M}_{xy}^{(H)}(W_{xx}, W_{yy}, W_{xy})$$

$$D_{11} = \frac{E_{1111} h^3(x, y)}{12}, D_{12} = \frac{E_{1122} h^3(x, y)}{12}, D_{16} = \frac{E_{2111} h^3(x, y)}{12},$$

$$D_{22} = \frac{E_{2222} h^3(x, y)}{12}, D_{21} = D_{12}, D_{26} = \frac{E_{1222} h^3(x, y)}{12}, D_{66} = \frac{E_{1212} h^3(x, y)}{12},$$

а в случае ортотропного материала  $D_{16} = D_{26} = 0$ ,

$$M_x^{(0)} = -[D_{11}(1-R^*_1)W_{xx} + D_{12}(1-R^*_1)W_{yy}], M_y^{(0)} = -[D_{22}(1-R^*_2)W_{yy} + D_{21}(1-R^*_2)W_{xx}],$$

$$M_{xy}^{(0)} = -2D_{66}(1-R^*_6)W_{xy}, D_{11} = \frac{E_{11} h^3(x, y)}{12(1-\nu_{11}\nu_{22})}, D_{22} = \frac{E_{22} h^3(x, y)}{12(1-\nu_{11}\nu_{22})}, D_{66} = \frac{G_{12} h^3(x, y)}{12}$$

$$D_{12} = \nu_{22} D_{11}, D_{21} = \nu_{11} D_{22}$$

$h(x, y)$  - толщина,  $D_y(x, y)$  - жесткость анизотропной пластинки.

Воспользуясь уравнением движения пластинки, имеем:

$$L[W] + q(x, y, t) = m(x, y)W_{tt} \quad (38.6)$$

где:

$$L[W] = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, q_n(x, y, t) = q_n(x, y, t) - q_{a1}(x, y, t), m(x, y) = \rho h(x, y)$$

$\rho$  - плотность,  $q_n(x, y, t)$  - поперечная, а  $q_{a1}(x, y, t)$  - аэродинамическая нагрузка вычисляется по формуле (38.1).

Требуется найти решения уравнения (38.6) удовлетворяющие при следующих обобщенных граничных

$$\ell_j[W] = 0 \text{ при } x=0, x=a; \ell_j[W] = 0 \text{ при } y=0, y=b; (i, j = \overline{1,2}) \quad (38.7)$$

и начальных:

$$W|_{t=0} = \alpha(x, y), W_t|_{t=0} = \beta(x, y) \quad (38.8)$$

условиях.

Решение начально-краевых задач (38.6)-(38.8) элементов конструкции ЛА из диссипативно неоднородных композитных материалов с учетом физической, геометрической и аэродинамической нелинейности представляет значительные математические трудности. Во-первых, трудно сформулировать вариационную формулировку задачи, т.е. построить функционал полной энергии, необходимые условия, минимум которых, эквивалентен к прямым постановкам задачи. Во-вторых, основные разрешающие уравнения задачи становятся нелинейными слабосингулярными ИДУ с частными производными с неразделяющимися переменными. Поэтому существующие методы решения типа Рунге, конечных элементов и методы разложения решения по собственным функциям идеально-упругих систем становятся неприменимыми. Здесь необходимы более общие методы и более сложные средства исследования.

При необходимости ИДУ (38.6) можно упростить, разлагая аэродинамическую силу (38.1) в ряд,

$$q_A = x P_x \bar{M} W'_x + x \frac{x+1}{4} P_x \bar{M}^2 W'^2_x + x \frac{x+1}{12} P_x \bar{M}^3 W'^3_x + \dots \quad (38.9)$$

и ограничениями линейными, квадратичными или кубическими членами. В разложении (38.9) демпфирующее слагаемое аэродинамической силы неучтено, так как влияние его в большинстве случаев невелико. Учета аэродинамических нелинейностей представляет интерес по двум причинам. Во-первых, во многих случаях превышения критической скорости флягтера не означает немедленного разрушения конструкции, а разрушения наступает лишь спустя определенный период и носит усталостный характер. Во-вторых, с ростом числа Маха -  $\bar{M}$  возрастает роль аэродинамических нелинейностей. Характер влияния этих нелинейностей в некоторых случаях таков, что их учет позволяет

обнаружить возможность возбуждения незатухающих колебаний или поддержания дивергентных форм равновесия при скоростях, меньше критической скорости флаттера.

Для решения начально-краевых задач (38.6)-(38.8) сначала произведем дискретизацию по пространственным переменным методом Бубнова-Галеркина, т.е. решение уравнения (38.6) ищем в виде:

$$W(x, y, t) = \sum_{k,j=1}^n U_{kj}(t) \varphi_{kj}(x, y) \quad (38.10)$$

где  $\varphi_{kj}(x, y)$  - известные системы координатных функций, удовлетворяющие граничным условиям.

Подставляя (38.10) в (38.6), выполняя известные процедуры метода Бубнова - Галеркина для нахождения обобщенных координат  $U_{kj}(t)$  получим следующие системы обыкновенных слабосингулярных ИДУ

$$M\ddot{U}(t) + \sum_{m=1}^p A^{(m)}(1 - R^*_m)U(t) = q(t, U, \bar{M}) \quad (38.11)$$

с начальными условиями.

$$U(0) = \alpha_0, \dot{U}(0) = \alpha_1 \quad (38.12)$$

где:  $U = [U_{11}, \dots, U_{1N}, \dots, U_{N1}, \dots, U_{NN}]^T, q = [q_{11}, \dots, q_{1N}, \dots, q_{N1}, \dots, q_{NN}]^T$

$M = \{M_{kij}\}, A^{(m)} = \{a^{(m)}_{kij}\}, P = 6, m = \overline{1, p}, k, i, n, j = \overline{1, N}$

$$M_{kij} = \int_0^a \int_0^b m(x, y) \varphi_{ki}(x, y) \varphi_{nj}(x, y) dx dy, \quad a^{(1)}_{kij} = \int_0^a \int_0^b (D_{11} \varphi_{kixx})_{xx} \varphi_{nj} dx dy$$

$$a^{(2)}_{kij} = \int_0^a \int_0^b (D_{22} \varphi_{kixy})_{xy} \varphi_{nj} dx dy, \quad a^{(3)}_{kij} = \int_0^a \int_0^b [(D_{12} \varphi_{kixy})_{xy} + (D_{21} \varphi_{kixx})_{xx}] \varphi_{nj} dx dy$$

$$a^{(4)}_{kij} = \int_0^a \int_0^b [2(D_{16} \varphi_{kixx})_{xx} + (D_{16} \varphi_{kixx})_{xy}] \varphi_{nj} dx dy, \quad a^{(5)}_{kij} = \int_0^a \int_0^b [2(D_{26} \varphi_{kixy})_{xy} + (D_{26} \varphi_{kixx})_{xx}] \varphi_{nj} dx dy$$

$$q^{(1)}_{ij} = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \varphi_{ij} dx dy, \quad a^{(6)}_{kij} = \int_0^a \int_0^b [2D_{66} \varphi_{kixx}]_{xx} dx dy$$

В случае ортотропной пластинки  $p=3$

$$\begin{aligned}
 a^{(1)}_{kmy} &= \int_0^a \int_0^b (D_{11} \varphi_{kmy} + D_{12} \varphi_{kny})_{,xy} \varphi_m dx dy, \\
 a^{(2)}_{kmy} &= \int_0^a \int_0^b (D_{22} \varphi_{kny} + D_{21} \varphi_{kxy})_{,xy} \varphi_m dx dy, \\
 a^{(3)}_{kmy} &= 4 \int_0^a \int_0^b (D_{66} \varphi_{kxy})_{,xy} \varphi_m dx dy,
 \end{aligned}$$

$q(t, U, \bar{M})$  - нелинейные вектор функции, зависящие от обобщенных координат, в случае задачи флаттера и от числа Маха.  $\alpha_0, \alpha_1$  - известные векторы константы.

Точное решение нелинейных ИДУ (38.11) при начальных условиях (38.12) не найдены. Поэтому для решения ИДУ (38.11) будем использовать численный метод, основанный на исключении слабосингулярных особенностей интегральных и ИДУ изложенные в предыдущих главах.

Тогда будем иметь следующие системы рекуррентных линейных алгебраических уравнений [40]:

$$MU_m = \alpha_0 + \alpha_1 t_m + \sum_{s=0}^{m-1} B_s (t_m - t_s) \{ q(t_s, U_s, \bar{M}) - \sum_{j=1}^p A_j [U_s - \frac{c_j}{\alpha_j} \sum_{n=0}^s P_n^{(j)} e^{-\beta_j t_s} U_{s-n}] \}, m=1,2, \quad (38.13)$$

где:

$$\begin{aligned}
 U(t_m) &= U_m; \quad t_m = m\Delta t; \quad B_0 = \frac{\Delta t}{2}, \quad B_s = \Delta t; \quad S = \overline{1, m-1} \\
 P_0^{(j)} &= \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2}; \quad P_n^{(j)} = \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2} [(n+1)^{\alpha_j} - (n-1)^{\alpha_j}]; \quad P_S^{(j)} = [S^{\alpha_j} - (S-1)^{\alpha_j}] \frac{\Delta t^{\alpha_j}}{2}
 \end{aligned}$$

Как было отмечено выше определенная критическая скорость полета, при которой начинается флаттер или дивергенция ЛА, является одной из важнейших задач проблем аэроустойчивости. Решение его сводится к исследованию колебательной неустойчивости (флаттера) невозмущенного движения ЛА на основе разработанного вычислительного алгоритма (38.13) и специального алгоритма поиска критической скорости, основанного на вычислительном эксперименте при заданных геометрических и механических параметрах. Согласно этой методике

потери динамической устойчивости определяются из условий существования незатухающих амплитудой, а также критическое время, критическая скорость флаттера.

Таким образом, использование предложенной математической модели и алгоритма численного решения (38.13), с помощью современных персональных компьютеров позволяют исследовать собственные и вынужденные колебания, а также колебательные аэроустойчивости (флаттера) элементов конструкции ЛА из диссипативно неоднородных композитных материалов при различных граничных условиях.

### **§39. Неустановившийся флаттер наследственно-деформируемого крыла из геометрически нелинейного материала**

Важнейшим нелинейным фактором, лимитирующим амплитуды при флаттере и прогибы при выпучивании, являются нелинейности геометрического происхождения. Эти нелинейности связаны с возникновением усилий в срединной поверхности, которые существенным образом зависят от деформации и перемещений крыла самолета. Если использовать линейную наследственную теорию вязкоупругости, то эта зависимость обычно записывается в виде [10]:

$$N = E F \left[ N_0 + \frac{1}{2a}(1 - R^*) \int_0^a W_x^2 dx \right], \quad \sigma = E(1 - R^*) \varepsilon \quad (39.1)$$

где:

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t - \tau) f(\psi) d\tau, \quad \varepsilon = u_x + \frac{1}{2} u_x^2, \quad u = -z W'_x$$

$R(t)$  - ядро наследственности, имеющей слабо-сингулярные особенности типа Абеля,  $E$  - модуль упругости,  $a$  - длина крыла,  $F(x)$  - площадь поперечного сечения.

Следует учитывать также аэродинамические нелинейности при больших числах Маха. С этой целью, после разложения уравнения (38.1) по формуле бинома во втором приближении получим:

$$q_A = \frac{x P_\infty}{C_x} \left[ V W'_x + x_1 V^2 W_x'^2 + W'_t \right] \quad (39.2)$$

Вместо уравнения (39.2) можно использовать выражения:

$$q_{\perp} = K \left[ V W'_x + x_1 V^2 W_x'^2 + z W'_t \right] \quad (39.3)$$

где для квазиустановившегося течения:

$$z = (M^2 - 2) / (M^2 - 1) \rightarrow 1$$

а для квазистатического случая  $z=0$ , в линейном приближении  $x_1=0$ .

Рассмотрим задачи флаттера наследственно-деформируемого крыла с учетом геометрической и аэродинамической нелинейности. Крыло будем трактовать как консольный стержень, корневая часть которого жестко закреплена в фюзеляже (рис.39.1). Такая одномерная стержневая модель с учетом переменности ширины  $b(x)$  и толщины  $h(x)$  позволяет более правильно учесть реальные формы крыла самолета, чем двумерная модель. Более того, такая модель позволяет использовать известные по размаху численные значения изгибной жесткости и массы, найденные экспериментально в аэродинамических трубах. С этой целью построим математическую модель для исследования наследственно-деформируемого крыла в потоке газа с учетом выше отмеченных нелинейностей.

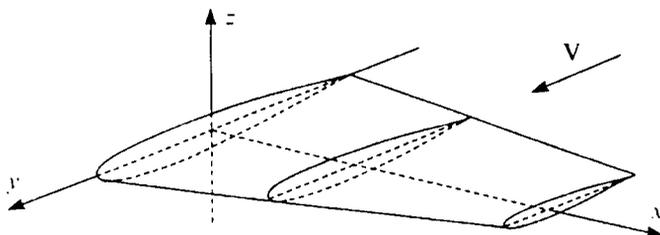


рис.39.1

Если использовать соотношения (39.1), изгибающий момент вычисляется следующим образом:

$$M_x = \int_{-\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} b(x) \sigma z dz = -J(x)(1-R^*) W_{xx}, \quad J(x) = \frac{b(x)h^3(x)E}{12} \quad (39.4)$$

Подставляя (39.1), (39.3) и (39.4) в уравнение равновесия, т.е.:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial W}{\partial x} \right) = m(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + q_A(x, t) \quad (39.5)$$

переходя к безразмерным координатам:

$$\begin{aligned} x &= a \bar{x}, \quad b(x) = b_0 \bar{b}(x), \quad h(x) = h_0 \bar{h}(x), \quad t = t_1 \bar{t}, \\ J(x) &= J_0 \bar{b}(x) \bar{h}^3(x) = J_0 \bar{d}(x), \quad F(x) = F_0 \bar{b}(x) \bar{h}(x), \\ m(x) &= m_0 \bar{b}(x) \bar{h}(x) = m_0 \bar{F}(x), \quad \sigma_1 = \frac{12 N_0 a^2}{h_0^2}, \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_1}, \\ t_1 &= \sqrt{\frac{m_0}{J_0}} a^2, \quad W = h_0 \bar{W}, \quad P = \frac{V a^3 \bar{K}}{J_0 E}, \quad \theta_2 = \frac{E b_0 (\alpha + 1)}{48 K} \left( \frac{h_0}{a} \right)^4, \\ K &= \alpha P_\infty, \quad \gamma = \frac{K z a^4}{E J_0 t_1}, \quad \bar{K} = \frac{K}{C_\infty} \end{aligned}$$

и опуская штрихи над переменными, получим:

$$\begin{aligned} (1-R^*) L W - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[ F(x) W_x \left( 1 - \theta_1 (1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx \right) \right] + \\ + P W_x + \theta_2 P^2 W_x^2 + \gamma W_t + F(x) W_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (39.6)$$

где:

$$L W = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( d(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad d(x) = b(x) h^3(x), \quad F(x) = b(x) h(x)$$

Граничные условия для решения ИДУ (39.6) можно написать в виде:

$$W = 0, \quad W_x = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (39.7)$$

$$W_{xx} = 0, \quad W_{xxx} = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Для полной математической постановки задачи вместе с граничными (39.7), необходимы и начальные условия, т.е.:

$$W \Big|_{t=0} = d_x(x), \quad W_t \Big|_{t=0} = d_1(x), \quad (39.8)$$

ИДУ в частных производных (39.6) вместе с граничными (39.7) и начальными (39.8) условиями представляет математическую модель задачи о флаттере наследственно-деформируемого крыла с учетом геометрической и аэродинамической нелинейности. Требуется найти критические скорости  $P_K$ , приводящие к нарастанию амплитуды колебаний.

Решение поставленных задач в континуальной постановке представляет значительные математические трудности, поэтому весьма важным является построение дискретных моделей, т.е. необходим переход из систем распределенных параметров к системам с конечным числом степеней свободы. В связи с этим произведем дискретизацию по пространственным переменным. Представим решение ИДУ (39.6) в виде:

$$W = \sum_{k=1}^N u_k(t) \varphi_k(x) \quad (39.9)$$

где  $\varphi_k(x)$  - известные базисные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям,  $u_k(t)$  - неизвестные функции от времени, подлежащие определению.

Подставляя (39.8) в (39.6) и умножая на  $\varphi_k(x)$ , проинтегрировав по  $x$ , имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N \{ a_{k_i} \ddot{u}_k(t) + \gamma b_{k_i} \dot{u}_k(t) + \omega_{k_i} (1 - R^*) u_k(t) + \\
& + (P d_{k_i} - \sigma \alpha_{k_i}) u_k(t) + \theta_2 P^2 \sum_{j=1}^N m_{k_{ji}} u_k(t) u_j(t) - \\
& - \sigma \theta_1 \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N n_{k_{jq_i}} u_k(t) (1 - R^*) u_j(t) u_q(t) \} = 0, \quad i = \overline{1, N}
\end{aligned} \quad (39.10)$$

где:

$$\begin{aligned}
a_{k_i} &= \int_0^1 F(x) \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx, \quad b_{k_i} = \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx, \\
\omega_{k_i} &= \int_0^1 [d(x) \varphi_k''(x)]'' \varphi_i(x) dx = \int_0^1 d(x) \varphi_k''(x) \varphi_i''(x) dx. \\
\alpha_{k_i} &= \int_0^1 [F(x) \varphi_k'(x)]' \varphi_i(x) dx = \int_0^1 [F'(x) \varphi_k'(x) + F(x) \varphi_k''(x)] \varphi_i(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{k_i} &= \int_0^1 \varphi_k'(x) \varphi_i(x) dx, \quad m_{k_{ji}} = \int_0^1 \varphi_k' \varphi_j'(x) \varphi_i(x) dx, \\
n_{k_{jq_i}} &= \alpha_{k_i} \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_q'(x) dx
\end{aligned}$$

Интегрирование нелинейных систем (39.10) при ядре Ржаницына-Колтунова  $R(t) = \varepsilon \exp(-\beta t) t^{\alpha-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  в широких пределах изменения физико-механических параметров крыла выполнялось численным методом, изложенным в §38. Согласно этому методу, численные значения искомых функций  $u_k(t) = u_{k,l}$  находятся из решения следующей рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K=1}^N \left[ a_{K_i} + \gamma \frac{\Delta t}{2} B_{K_i} \right] u_{K,i} = \sum_{K=1}^N \left[ (a_{K_i} + \gamma t_i b_{K_i}) u_{OK} + a_{K_i} t_i \dot{u}_{\partial K} \right] - \\
& - \sum_{i_1=1}^{i-1} \left\{ \sum_{K=1}^N \left[ \gamma A_{i_1} b_{K_i} u_{K,i_1} + A_{i_1} (t_i - t_{i_1}) (\omega_{K_i} (u_{K,i_1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{i_2=1}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{K,i_1-i_2+1}) + (P d_{K_i} - \sigma \alpha_{K_i}) u_{K,i_1} \right] \right\} + \\
& + A_{i_1} (t_i - t_{i_1}) \left[ \sum_{K=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \theta_2 P^2 u_{K,i_1} u_{j,i_1} - \sigma \theta_1 \sum_{q=1}^N n_{K_i q_i} (u_{K,i_1} u_{j,i_1} u_{q,i_1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i_2=1}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{K,i_1} u_{j,i_1-i_2+1} u_{q,i_1-i_2+1}) \right) \right] \Bigg\} \quad i = \overline{1, N}
\end{aligned} \tag{39.11}$$

где:

$$\begin{aligned}
t_i &= i \Delta t, \quad B_{i_1} = \Delta t^\alpha / 2, \quad B_{i_2} = \Delta t^\alpha \left[ (i_2 + 1)^\alpha - (i_2 - 1)^\alpha \right] / 2, \\
i_2 &= \overline{2, i_1 - 1}, \\
B_{i_1} &= \Delta t^\alpha \left[ i_1^\alpha - (i_1 - 1)^\alpha \right] / 2, \quad A_1 = \Delta t / 2, \quad A_i = \Delta t, \quad i = \overline{2, i-1}, \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Методика проведения вычислительного эксперимента с помощью алгоритма (39.11), т.е. определение критической скорости флаттера ничем не отличается от методики, применяемой в случае линейной постановки задачи, описание которой более подробно приведено в предыдущем параграфе.

Создано математическое обеспечение для численной реализации алгоритмов расчета. В качестве примера рассматривается задача флаттера наследственно-деформируемого консольного крыла переменного сечения с учетом геометрической и аэродинамической нелинейности.

Граничные условия имеют вид:

$$W = W'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad M = M' = 0 \quad \text{при} \quad x = 1$$

В качестве базисных функций  $\varphi_K(x)$  принимаются балочные функции:

$$\begin{aligned} \varphi_K(x) &= (sh \lambda_K + sin \lambda_K)(ch \lambda_K x - cos \lambda_K x) - (ch \lambda_K + cos \lambda_K) \times \\ &\quad \times (sh \lambda_K x - sin \lambda_K x); \quad \lambda_1 = 1,875, \quad \lambda_2 = 4,694, \\ \lambda_3 &= 7,855, \quad \lambda_4 = 10,996, \quad \dots, \quad \lambda_K = \frac{\pi}{2} (2K - 1) \end{aligned}$$

Интегрирование системы ИДУ (39.10) осуществляется выше изложенным методом при начальных условиях:

$$\begin{aligned} u_K(0) &= \left[ \int_0^1 \alpha_0(x) \varphi_K(x) dx \right] / (\varphi_K, \varphi_K), \quad \dot{u}_K(0) = 0, \\ \alpha_0(x) &= \{ [x(1-x)]^4 + \varphi_1(x) \} / 10 \end{aligned}$$

(39.12)

В качестве примера рассматривается консольный стержень переменной ширины и толщины (рис.39.2) с учетом геометрической и аэродинамической нелинейности при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} d(x) &= b(x) h^3(x), \quad b(x) = d - \alpha_1 x, \quad h(x) = 1 - \alpha_2 x, \\ E &= 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \nu = 1,4, \quad K = \nu P_\infty, \quad P_\infty = 1,014 \text{ кг/см}^2 \end{aligned}$$

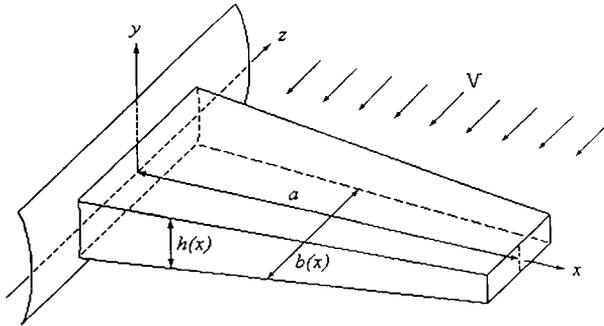


рис.39.2

Вычисления проводились с учетом ( $h/a \neq 0$ ) и без учета ( $h/a = 0$ ) аэродинамической нелинейности при различных безразмерных скоростях флаттера на основе предложенного в [15.40] критерии с учетом ( $\gamma \neq 0$ ) и без учета ( $\gamma = 0$ ) аэродинамического демпфирования. Реологические параметры: коэффициент вязкости  $\varepsilon$ , параметр сингулярности  $\alpha$  и параметр затухания  $\beta$  принимают различные значения. Расчет произведен как в идеально-упругой ( $\varepsilon = 0$ ), так и вязкоупругой постановках. Численные результаты приведены на рис.39.3-39.5 и в таблицах 39.1, 39.2.

Кривая, характеризующая переходной процесс для функции прогиба во времени в точке  $x = 0,5$  при  $\alpha = 0,1$ ;  $\alpha = 0,2$ , соответствующей геометрически нелинейной, аэродинамической линейной и нелинейной модели идеально-упругого крыла приведены на рис.39.3 и 39.4. Аналогичные результаты для вязкоупругого крыла приведены на рис.39.5 и 39.6.

Анализируя кривые, помещенные на этих рисунках, нетрудно определить критическую скорость флаттера. В самом деле – из рис.39.3 и 39.4 видно, что критическая скорость  $P_{KP}$ , с которой начинается быстрый рост прогиба во времени в идеально-упругом случае, равна  $P_{KP}=5,06$  (в случае линейной постановки  $P_{KP}^{(A)} = 6,48$ , а в вязкоупругой (рис.39.5, 39.6)  $P_{KP}=3,2$  ( $P_{KP}^{(A)} = 6,48$ ). Анализ результатов геометрических нелинейных задач, приведенных на этих рисунках, а также в табл.39.1 и 39.2 представляет интерес по двум причинам. Во-первых, превышение критической скорости флаттера не означает немедленного разрушения конструкции, а разрушение наступает лишь спустя определенный период и носит усталостный характер. Для того, чтобы найти ожидаемый срок службы конструкции, необходимо определить амплитуду ее колебаний в

области флаттера с учетом нелинейных и наследственно-деформируемых свойств материала конструкции. Во-вторых, влияние учета аэродинамических нелинейностей на критическую скорость невелико, по-видимому, с ростом числа Маха может возрастать роль этих нелинейностей. Критическая скорость, определяемая методами линейной теории как в идеально-упругой, так и в вязкоупругой постановке, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций. Влияние аэродинамического демпфирования, как и следовало ожидать, на критическую скорость как в линейном, так и в нелинейном случае незначительно.

Вычислительные эксперименты показали, что влияние параметра затухания  $\beta$  ядра наследственности на критическую скорость флаттера по сравнению с параметром вязкости  $\varepsilon$  и сингулярности  $\alpha$  оказалось незначительным, что еще раз подтверждает общезвестные выводы – экспоненциальные ядра релаксации неспособны полностью описать наследственные свойства материала конструкции. Из табл.39.1 и 39.2 видно, что незначительное уменьшение параметра сингулярности  $\alpha$  или незначительное увеличение параметра вязкости  $\varepsilon$  приводят к существенному (иногда почти в два раза) уменьшению критической скорости флаттера. Следовательно, учет этого эффекта при проектировании крыла самолета имеет важное значение, так как чем меньше параметр сингулярности материала конструкции, тем выше интенсивность диссипативных процессов в этих конструкциях.

табл.39.1

*P<sub>к</sub> геом.нелин. – геометрически нелинейный;**P<sub>к</sub> геом.аэро.нелин. – геометрически и аэродинамически нелинейный;*

$$b(x) = c - a_1 x; \quad h(x) = 1 - a_2 x; \quad c = 5$$

<i>N</i>	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\sigma_1$	$\theta_1$	$h/a$	<i>P<sub>к</sub> геом. нелин.</i>	<i>P<sub>к</sub> геом. аэро. нелин.</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11
2	0.0	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	0.0	5.052	---
3										4.811	
4										5.015	
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	0.0	3.291	---
3										3.148	
4										3.236	
2	0.0	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	1/40	---	5.065
									1/50		5.058
									1/60		5.055
									1/80		5.053
									1/100		5.052
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	1/40	---	3.294
									1/50		3.292
									1/60		3.291
									1/80		3.289
									1/100		3.288
2	0.01	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	1/50	4.674	4.676
	0.03									3.969	3.968
	0.06									3.005	3.005
	0.08									2.147	2.146
	0.1									1.362	1.361

табл.39.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11
2	0.05	0.15 0.2 0.35 0.5	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	1/50	2.386 3.033 3.538 3.656	2.386 3.033 3.538 3.656
2	0.05	0.25	0.01 0.03 0.07 0.1	0	4.0	0.2	0.3	10	1/50	3.193 3.249 3.334 2.387	3.193 3.249 3.334 2.387
2	0.05	0.25	0.05	10 20 30	4.0	0.2	0.3	10	1/50	3.238 3.421 3.592	3.238 3.421 3.592
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.5 1.0	10	1/50		
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	1 10 <sup>2</sup> 10 <sup>3</sup> 10 <sup>4</sup>	1/50	3.291 3.295 3.301 3.193	3.291 3.295 3.301 3.193
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	10	1/50	3.291 2.657 1.862	3.291 2.657 1.862

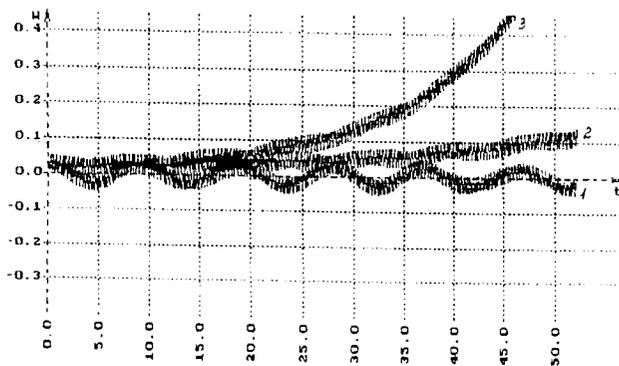


рис.39.3.  $\epsilon=0.0$ ,  $a_1=0.25$ ,  $h=0.1$ ,  $\beta=0.05$ ,  $a_{l1}=4.0$ ,  $a_{l2}=0.2$ ,  
 $N=2$ , скорость: (1)  $p=4.0$ , (2)  $p=5.052$ , (3)  $p=5.06$   
 Геометрически нелинейный:  $te_{l1}=10$ ,  $h/a=0.0$

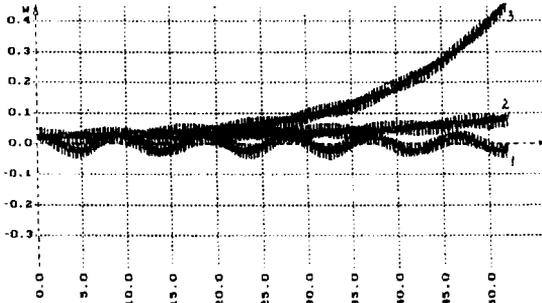


рис.39.4.  $\epsilon=0.0$ ,  $a_1=0.25$ ,  $h=0.1$ ,  $\beta=0.05$ ,  $a_{l1}=4.0$ ,  $a_{l2}=0.2$ ,  
 $N=2$ , скорость: (1)  $p=4.0$ , (2)  $p=5.058$ , (3)  $p=5.06$   
 Геометрически и аэродинамически нелинейный:  $te_{l1}=10$ ,  $h/a=1/50$

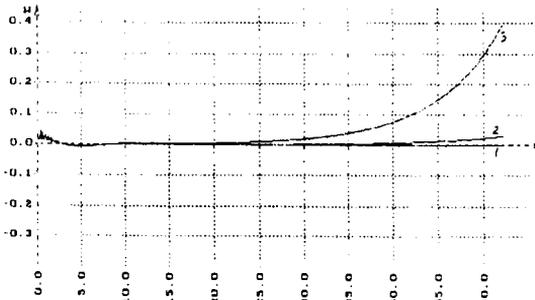


рис.39.5.  $\epsilon=0.05$ ,  $a_1=0.25$ ,  $h=0.1$ ,  $\beta=0.05$ ,  $a_{l1}=4.0$ ,  $a_{l2}=0.2$ ,  
 $N=2$ , скорость: (1)  $p=3.24$ , (2)  $p=3.291$ , (3)  $p=3.3$   
 Геометрически нелинейный:  $te_{l1}=10$ ,  $h/a=0.0$

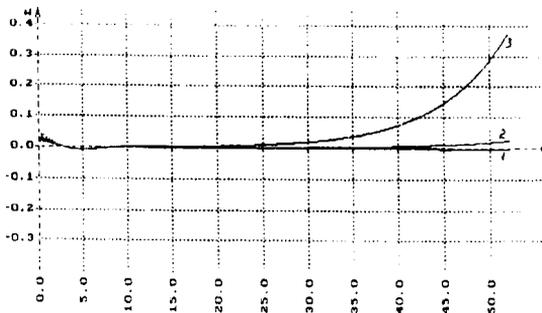


рис.39.6.  $\epsilon ps=0.05$ ,  $a1=0.25$ ,  $h=0.1$ ,  $bet=0.05$ ,  $a1l=4.0$ ,  $a12=0.2$ ,  
 $N=2$ , скорость: (1)  $p=3.24$ , (2)  $p=3.292$ , (3)  $p=3.3$   
 Геометрически и аэродинамически нелинейный:  $te1=10$ ,  $h/a=1/50$

#### §40. Неустойчивый флаттер крыла из физически нелинейного наследственно-деформируемого материала.

Теперь рассмотрим задачи флаттера наследственно-деформируемого крыла с учетом физической:

$$\sigma = (1 - R^*) (m_1 \epsilon + m_2 \epsilon^3), \quad \epsilon = u_x, \quad u = -z W_x$$

и аэродинамической (39.3) нелинейности, где  $m_1$  и  $m_2$  - упругие постоянные, определяющие в процессе испытаний материала на растяжение и кручение, причем  $m_2 < 0$  для мягкого материала, а  $m_2 > 0$  - для материала с жесткими характеристиками.

В данном случае, принимая гипотезу плоских сечений для изгибающего момента, получаем:

$$M = (1 - R^*) \left[ m_1 J_2(x) W_{xx} + m_2 J_4(x) W_{xx}^3 \right] \quad (40.1)$$

где:

$$J_i = \int_F s^i dF, \quad i = 2; 4$$

и равные для балок шириной  $b(x)$  и высотой  $h(x)$ ,

$$J_2(x) = \frac{b(x) h^3(x)}{12}; \quad J_4(x) = \frac{b(x) h^5(x)}{80}$$

Подставляя (40.1) в уравнение равновесия движение и перейдя к безразмерным координатам, имеем:

$$(1 - R^*) \left[ d(x) W_{xx} + \theta_1 d_2(x) W_{xx}^3 \right]_{xx} + F(x) W_{xx} + \sigma_1 W_{xx} + P W_x + \theta_2 P^2 W_x^2 + \gamma W_1 = 0 \quad (40.2)$$

где:

$$d(x) = b(x) h^3(x), \quad d_2(x) = b(x) h^5(x), \quad \theta_1 = \frac{m_2 J_4^{(0)}}{m_1 J_2^{(0)} h_0^2},$$

$$\theta_2 = \frac{E b_0 (ж+1) \left(\frac{h_0}{a}\right)}{48K}, \quad P = \frac{a^3 \nu K}{m_1 J_2^{(0)}}, \quad t_1 = \sqrt{(m_0 a^4) / (m_1 J_2^{(0)})}, \quad \gamma = \frac{K z a^4}{m_1 J_2^{(0)} t_1}$$

Нелинейные ИДУ в частных производных (40.2) вместе с граничными (39.7) и начальными (39.8) условиями представляют математическую модель задачи о флаттере наследственно-деформируемого крыла с учетом физической и аэродинамической нелинейности. Требуется найти критические скорости  $P_{KP}$ , приводящие к нарастанию амплитуды колебаний.

Из-за нелинейности точное решение поставленной задачи представляет значительные математические трудности. Поэтому приближенное решение построим методом Бубнова-Галеркина. Представим решение ИДУ (40.2) в виде (39.9) и для нахождения неизвестных функций  $u_k(t)$  получим следующие нелинейные системы слабо-сингулярных нелинейных обыкновенных ИДУ:

$$\sum_{k=1}^N \{ a_{ki} \ddot{u}_k(t) + \gamma b_{ki} \dot{u}_k(t) + \omega_{ki} (1 - R^*) u_k(t) +$$

$$+ (P \alpha_{ki} - \alpha_{ki}) u_k(t) + \theta_2 P^2 \sum_{j=1}^N m_{kj} u_k(t) u_j(t) +$$

$$+ \theta_1 \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N K_{kjq} (1 - R^*) u_k(t) u_j(t) u_q(t) \} = 0 \quad (40.3)$$

$$i = \overline{1, N}$$

где:

$$\begin{aligned}
a_{Ki} &= \int_0^1 F(x) \varphi_K(x) \varphi_i(x) dx, & b_{Ki} &= \int_0^1 \varphi_K(x) \varphi_i(x) dx, \\
\omega_{Ki} &= \int_0^1 \int_0^1 d(x) \varphi_K''(x) \varphi_i''(x) dx, & d_{Ki} &= \int_0^1 \varphi_K'(x) \varphi_i(x) dx, \\
\alpha_{Ki} &= \int_0^1 \varphi_K''(x) \varphi_i(x) dx, & m_{Kji} &= \int_0^1 \varphi_K'(x) \varphi_j'(x) \varphi_i(x) dx, \\
n_{Kjq_i} &= \int_0^1 d_2(x) \varphi_K''(x) \varphi_j''(x) \varphi_q''(x) \varphi_i''(x) dx
\end{aligned}$$

Интегрирование нелинейной системы ИДУ (40.3) при начальных условиях (39.12) и ядрах Ржаницына-Колтунова выполнялось численным методом как и в случае геометрической нелинейной постановки. Тогда численные значения искоемых функций  $u_K(t_i) = u_{K,i}$  находятся из решения следующей рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{K=1}^N \left[ a_{Ki} + \gamma \frac{\Delta t}{2} b_{Ki} \right] u_{K,i} &= \sum_{K=1}^N \left[ (a_{Ki} + \gamma t_i b_{Ki}) u_{OK} + t_i a_{Ki} \dot{u}_{OK} \right] - \\
&- \sum_{i_1=1}^{i-1} \left\{ \sum_{K=1}^N \left[ \gamma A_{i_1} b_{Ki} u_{K,i_1} + A_{i_1} (t_i - t_{i_1}) (\omega_{Ki} (u_{K,i_1} - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{i_2=1}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{K,i_1-i_2+1}) + (P \alpha_{Ki} - \sigma \alpha_{Ki}) u_{K,i} \right] \right\} + \\
&+ A_{i_1} (t_i - t_{i_1}) \left[ \sum_{K=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \theta_2 P^2 u_{K,i_1} u_{j,i} - \theta_1 \sum_{q=1}^N (n_{Kjq_i} u_{K,i_1} u_{j,i_1} u_{q,i_1} - \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{i_2=1}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{K,i_1-i_2+1} u_{j,i_1-i_2+1} u_{q,i_1-i_2+1}) \right) \right] \Bigg\}, \quad i = \overline{1, N}
\end{aligned} \tag{40.4}$$

Методика проведения вычислительного эксперимента с помощью алгоритма (40.4) аналогична как в случае геометрической нелинейной

клады. Критическая скорость флаттера находится методом исключения интервалов, не производящих нежелательных явлений.

В качестве примера рассматривается тот же консольный стержень переменной ширины и толщины (рис.39.2), с учетом физической и аэродинамической нелинейности при тех же исходных данных.

Вычисления производились как с учетом, так и без учета аэродинамической нелинейности при различных реологических параметрах и форм крыла в плане. Расчет произведен как для идеально-упругого, так и для наследственно-деформируемого крыла самолета. Численные результаты приведены на рис.40.1, 40.2, причем считалось, что материал конструкции обладает мягкими нелинейными характеристиками, т.е.  $\theta_l = -0,03$ .

Анализируя кривые, помещенные на этих рисунках, нетрудно определить критическую скорость. В самом деле, из рис.40.1, 40.2 видно, что критическая скорость  $P$ , с которой начинается быстрый рост прогиба во времени в нелинейном идеально-упругом случае, равна  $P_{KP} = 5,19$  (в случае линейной постановки  $P_{KP} = 6,48$ ), а в вязкоупругом  $P_{KP} = 4,4$ .

Анализ результатов физически нелинейных задач, приведенных на этих рисунках, а также табл.40.1, 40.2 показывает, что критическая скорость определяется по линейной теории как в идеально-упругих, так и в вязкоупругих постановках, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций. В физически нелинейном случае учет аэродинамической нелинейности по сравнению с геометрической нелинейностью, поддерживает незатухающее движение при скоростях меньше, чем критические скорости, определяемые из линейной аэродинамической теории.

Форма крыла в плане во многом уже перепределяет величину остальных конструктивных параметров крыла.

Поэтому, чтобы исследовать влияние ее на критическую скорость, необходимо задаться определенной зависимостью между формой крыла в плане и его жесткостью, массой, т.е. необходимо произвести расчет при различных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (см. табл.40.1). С этой целью рассмотрены серии крыльев, имеющих в плане форму трапеции переменной толщины. Тогда форму крыльев можно охарактеризовать отношением концевой хорды крыла к корневой, которое зависит от параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (этот параметр характеризует сужение крыла). Значение критической скорости для различных крыльев рассматриваемой серии приведены в табл.40.2. Из результатов расчета видно, что с точки зрения вибрации из серии крыльев одинаковой толщины наилучшим является крыло, наиболее сужающееся к концу. Сужение крыла постоянной толщины ведет к уменьшению аэродинамических сил на концевой части, т.е. именно там, где жесткость крыла наименьшая. Это, естественно, влечет за собой увеличение критической скорости.

табл.40.1

$P_k$  лин. – линейный вариант;  $P_k$  физ.нелин. – физически нелинейный;  
 $P_k$  аэро.нелин. – аэродинамически нелинейный;  
 $P_k$  физ.аэро.нелин. – физически и аэродинамически нелинейный;  
 $b(x) = c - a_1x$ ;  $h(x) = l - a_2x$ ;  $c = 5$

$N$	$\varepsilon$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\sigma$	$h/a$	$\theta_1$	$P_k$ лин.	$P_k$ физ. нелин.	$P_k$ аэро. нелин.	$P_k$ физ. аэро. нелин.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0.0	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	0.0	1	6.486	5.199	---	---
3										6.316	4.372		
4										6.351	4.769		
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	0.0	1	4.353	4.107	---	---
3										4.349	3.893		
4										4.411	3.623		
2	0.0	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	1/40	1	---	---	6.2909	5.037

								1/50				6.4038	5.242
								1/60				6.446	5.254
								1/80				6.473	5.252
								1/100				6.481	5.288
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	1/40	1	---	---	4.287	4.113
								1/50				4.327	4.132
								1/60				4.346	4.141
								1/80				4.355	4.145
								1/100				4.357	4.146
2	0.01	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	1/50	1	6.048	5.161	6.011	5.110
										5.152	4.778	5.167	4.735
										4.007	3.743	3.939	3.708
										3.011	2.962	2.971	2.953
										2.342	2.181	2.324	2.176

табл.40.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0.05	0.15	0.05	0	4.0	0.2	0	1/50	1	3.541	3.441	3.587	3.437
		0.2								4.092	3.901	4.076	3.889
		0.35								4.581	4.368	4.328	4.265
		0.5								4.592	4.409	4.499	4.392
2	0.05	0.25	0.01	0	4.0	0.2	0	1/50	1	4.151	3.819	3.959	3.811
			0.03							4.172	3.823	4.121	3.815
			0.07							4.393	4.241	4.426	4.222
			0.1							4.547	4.342	4.529	4.314
2	0.05	0.25	0.05	10	4.0	0.2	0	1/50	1	4.145	3.910	4.119	3.897
				20						4.141	3.808	4.075	3.785
				30						4.134	3.745	4.173	3.724
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0.3	1/50	1	4.235	4.109	4.295	4.093
							0.5			4.214	4.079	4.271	4.065
							1.0			4.155	4.012	4.123	3.991
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	1/50	1	4.353	4.087	4.338	4.154
					3.95					3.641	3.391	3.701	3.487
					3.9					2.889	2.783	2.917	2.779
2	0.05	0.25	0.05	0	4.0	0.2	0	1/50	2	---	3.407	---	3.385
									3		2.092		2.083

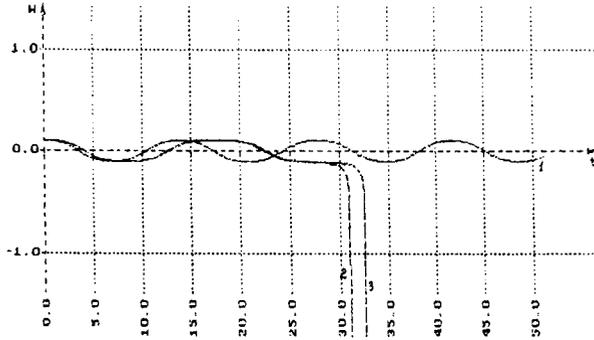


рис.40.1.  $\epsilon=0.0$ ,  $a_1=0.25$ ,  $h=0.1$ ,  $bet=0.05$ ,  $a_{11}=4.0$ ,  $a_{12}=0.2$ ,  
 $N=2$ , скорость: (1)  $p=5.0$ , (2)  $p=5.119$ , (3)  $p=5.2$   
 Физически нелинейный;  $te_{11}=1$ ,  $h/a=0.0$

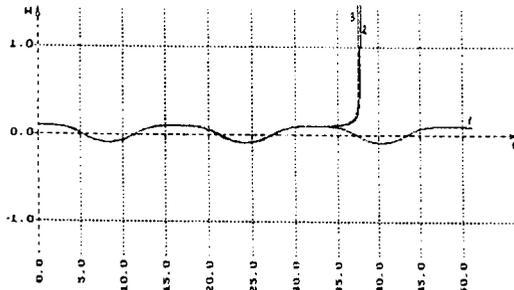


рис.40.2.  $\epsilon=0.0$ ,  $a_1=0.25$ ,  $h=0.1$ ,  $bet=0.05$ ,  $a_{11}=4.0$ ,  $a_{12}=0.2$ ,  
 $N=2$ , скорость: (1)  $p=5.241$ , (2)  $p=5.2418$ , (3)  $p=5.242$   
 Физически и аэродинамически нелинейный;  $te_{11}=1$ ,  $h/a=1/50$

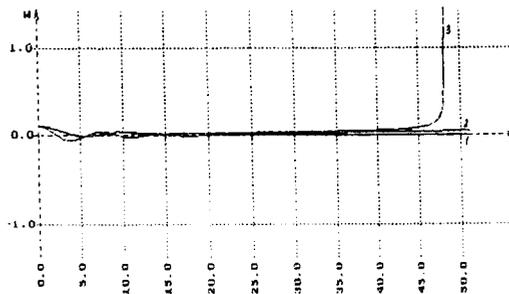


рис.40.3.  $\epsilon ps = 0.05$ ,  $al = 0.25$ ,  $h = 0.1$ ,  $bet = 0.05$ ,  $all = 4.0$ ,  $al2 = 0.2$ ,  
 $N = 2$ , скорость: (1)  $p = 3.5$ , (2)  $p = 4.107$ , (3)  $p = 4.2$   
 Физически нелинейный:  $tel1 = 1.0$ ,  $h/a = 0.0$

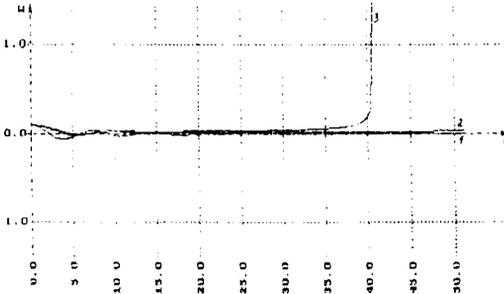


рис.40.4.  $\epsilon ps = 0.05$ ,  $al = 0.25$ ,  $h = 0.1$ ,  $bet = 0.05$ ,  $all = 4.0$ ,  $al2 = 0.2$ ,  
 $N = 2$ , скорость: (1)  $p = 3.5$ , (2)  $p = 4.132$ , (3)  $p = 4.2$   
 Физически и аэродинамически нелинейный:  $tel1 = 1.0$ ,  $h/a = 1/50$

#### §41. Нелинейный флаттер наследственно-деформируемой обшивки крыла самолета.

Рассмотрим гибкую вязкоупругую удлиненную пластинку и цилиндрическую панель, обтекаемую с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью  $V$ . Тогда аэродинамическое давление согласно поршневой теории Ильюшина §38, приближенно вычисляется по формулам:

$$-q(\bar{x}, t) = k[V\bar{W}_{\bar{x}} + x_1 V^2 \bar{W}_{\bar{x}}^2 + z\bar{W}_{\bar{t}}]; \quad k = \frac{xP_x}{V_x}$$

где для квазистационарного течения

$$z = \frac{(M^2 - 2)}{(M^2 - 1)} \rightarrow 1$$

а для квазистатического случая  $z=0$ , в линейном приближении

$$x_1 = \frac{x+1}{4V_\infty} = 0, \quad x - \text{показатель политропы газа, } P_\infty, V_\infty - \text{соответственно}$$

давление и скорость звука в невозмущенном потоке.

Для исследования обшивки крыла можно выделить наследственно-деформируемую полосу шириной равной единице и длиной равной  $a$ . Тогда получим задачу с одной пространственной координатой  $\bar{x}$ . Вводим безразмерные величины:

$$W = \frac{\bar{W}}{h}, x = \frac{\bar{x}}{a}, \lambda = \frac{a^2}{Rh}; t = \frac{\bar{t}}{t_1}; t_1 = \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\rho a^4 \alpha_1}{Eh^3}}; P = \frac{Va^3 k}{D}; \theta_2 = \frac{D}{a^3 k} \left(\frac{h}{a}\right);$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{(N\pi)^4}; \gamma = \frac{ka^4}{Dt_1}; D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$h$  - толщина,  $E$  - модуль упругости материала оболочки, и записываем уравнение движения [10]:

$$W_{tt} + \alpha_1 \{ (1-R^*)W_{xxxx} + 12\lambda^2(1-R^*) \int_0^1 W dx - 6W_{xx}(1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx + 12\lambda W_{xx}(1-R^*) \int_0^1 W dx -$$

$$- 6\lambda(1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx + PW_t + \theta_2 P^2 W_t^2 + \gamma W_t \} = 0$$

(41.1)

Требуется найти решение уравнения (41.1) удовлетворяющее при следующих обобщенных граничных:

$$\ell_j [W] = 0 \text{ при } x=0, x=1, j=\overline{1,2} \quad (41.2)$$

и начальных

$$W \Big|_{t=0} = W_0(x), W_t \Big|_{t=0} = \dot{W}_0(x) \quad (41.3)$$

условиях.

Для решения начально-краевых задач (41.1)-(41.3) сначала произведем дискретизацию по пространственным переменным методом Бубнова-Галеркина, т.е. решение уравнения (41.1) ищем в виде:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^N U_k(t) \varphi_k(x) \quad (41.4)$$

где  $\varphi_k(x)$  - известные системы координатных функций, удовлетворяющие граничным условиям (41.2).

Подставляя (41.4) в (41.1) выполняя известные процедуры методом Бубнова-Галеркина для нахождения обобщенных координат  $U_i(t)$  получим следующую систему нелинейных обыкновенных слабо-сингулярных ИДУ.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \{a_{kl} [\ddot{U}_k(t) + \gamma \dot{U}_k(t)] + \omega_{kl} (1 - R^* Y^l_k(t)) + \sum_{k=1}^N [B_{k,n}^{(l)} U_k(t) (1 - R^* Y^l_n(t)) + C_{k,n}^{(l)} (1 - R^* Y^l_k(t)) U_n(t)] + \\ & + \sum_{n,S=1}^N [D_{k,n,S}^{(l)} U_k(t) (1 - R^* Y^l_n(t)) U_S(t)] + p \sum_{k=1}^N [d_{kl} U_k(t) + \theta_2 p^2 \sum_{n=1}^N m^{(l)}_{k,n} U_k(t) U_n(t)] = 0 \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (41.5)$$

где:

$$\begin{aligned} a_{li} &= \int_0^1 \varphi_l(x) \varphi_i(x) dx; \quad \omega_{li} = \alpha_i \int_0^1 \varphi_{l,i}(x) \varphi_l(x) dx + 12 \beta^2 \int_0^1 \varphi_l(x) dx \int_0^1 \varphi_i(x) dx; \quad B_{l,n}^{(l)} = 12 \lambda \alpha_l \int_0^1 \varphi_{l,i}(x) \varphi_l(x) dx \times \\ & \times \int_0^1 \varphi_n(x) dx; \quad C_{l,n}^{(l)} = -6 \lambda \alpha_l \int_0^1 \varphi_l(x) dx \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_{nl}(x) dx; \quad m_{k,n}^{(l)} = \alpha_l \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_{nl}(x) \varphi_l(x) dx; \\ D_{k,n,S}^{(l)} &= -6 \alpha_l \int_0^1 \varphi_{l,i}(x) \varphi_l(x) dx \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_{ns}(x) dx; \quad d_{li} = \alpha_l \int_0^1 \varphi_{li}(x) \varphi_l(x) dx \end{aligned}$$

Из (41.3) для системы (41.5) получим следующие начальные условия

$$\dot{U}_k(0) = \dot{U}_{k0}; \quad U_k(0) = U_{k0} \quad (41.6)$$

Интегрирование нелинейных систем (41.5), (41.6) при ядрах Ржаницина-Колтунова  $R(t) = \varepsilon e^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  в широких пределах изменения физико-механических параметров обшивки крыла можно осуществить численным методом изложенным в §38.

Согласно этого метода численные значения искоемых функций  $U_k(t_i) = U_{k,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  находятся из решения следующей рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N [a_{ki} + \gamma \frac{\Delta t}{2}] U_{k,j} = \sum_{k=1}^N [a_{ki} + \gamma U_k(0) + a_{ki} t_i \dot{U}_k(0)] - \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{k=1}^N [\gamma \Delta t U_{k,j} + \Delta t (t_l - t_j) \\
& [\omega_{kn}(U_{k,j} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{q=1}^j A_q e^{-\beta \cdot U_{k,j-q+1}}) + \sum_{n=1}^N (B_{k,n}^{(i)}(U_{k,j} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{q=1}^j A_q e^{-\beta \cdot U_{k,j-q+1}}) + C^{(i)kn}(U_{k,j} U_{n,j} - \\
& - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{q=1}^j A_q e^{-\beta \cdot U_{k,j-q+1}} U_{n,j-q+1})) + \sum_{n,s=1}^N D_{k,n,s}^{(i)}(U_{k,j} U_{n,j} U_{s,j} - \frac{\varepsilon}{\alpha} U_{kj} \sum_{q=1}^j A_q e^{-\beta \cdot U_{n,j-q+1}} U_{s,j-q+1}) + \\
& + P d_{ki} U_{k,j} + \theta_2 P^2 \sum_{n=1}^N m_{kn}^{(i)} U_{k,j} U_{n,j}]], \quad i = \overline{1, N}
\end{aligned} \tag{41.7}$$

Методика проведения вычислительного эксперимента с помощью алгоритма (41.7), т.е. определение критической скорости  $P_p$  флаттера ничем не отличается в случае нелинейной подстановки задачи консольного крыла, описания которого было приведено в §39 и §40.

Создано математическое обеспечение для численной реализации алгоритмов расчета (41.7). В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую удлиненную пластину и цилиндрическую панель. Соответствующие граничные и начальные условия имеют вид:

$$\ell_1 [W] = W_1 = 0; \quad \ell_2 [W] = W_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = 1 \tag{41.8}$$

$$W = W_0(x) = \sum_{k=1}^N d_k \sin k\pi x, \quad W_t = 0 \quad \text{при} \quad t=0 \tag{41.9}$$

$$\text{где:} \quad \sum_{k=1}^N d_k = \alpha_0$$

Если выберем систему координатных функций  $\varphi_k(x)$ , удовлетворяющие граничным условиям (41.8) в виде:

$$\varphi_k(x) = \sin k\pi x; \quad k = 1, 3, \dots \tag{41.10}$$

то системы нелинейных ИДУ (41.5) и начальные условия (41.6) принимают более конкретный вид [10].

$$\begin{aligned}
& \dot{U}_k(t) + \gamma \dot{U}_k(t) + \left(\frac{k}{N}\right)^4 (1 - R^*) U_k(t) - \frac{96\lambda}{kN^4 \pi^6} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (1 - R^*) U_n(t) - \frac{24k^2 \lambda}{N^4 \pi^3} U_k(t) \sum_{n=1}^N (1 - R^*) U_n(t) - \\
& - \frac{12\lambda}{kN^4 \pi^3} \sum_{n=1}^N n^2 (1 - R^*) U_n^2(t) + \frac{3k^2}{N^4} U_k(t) \sum_{n=1}^N n^2 (1 - R^*) U_n^2(t) + \frac{2P}{(N\pi)^4} \sum_{n=1}^N [1 - (-1)^{k+n}] / \frac{k\pi}{k^2 - \pi^2} U_n(t) + \\
& + \frac{2\theta_2 P^2}{(N\pi)^4} \sum_{k, n=1}^N m^{(k,n)} U_k(t) U_n(t) = 0
\end{aligned} \tag{41.11}$$

$$U_k(0) = d_k; \dot{U}_k(0) = 0 \tag{41.12}$$

Сначала произведем анализ численных результатов, относящихся к собственным колебаниям, т.е. при  $U_k(0) = d_k; \dot{U}_k(0) = 0$ . Так как, во-первых, если известен характер собственных колебаний конструкции, то можно судить о присущих ей внутренних свойствах, проявляющихся при действии внешних аэродинамических возмущений, во-вторых, это задачи в [10] решена методом степенного ряда и эти решения служат тестом для проверки точности предлагаемой методики численного решения системы (41.11) при начальных условиях (41.12).

На рис 41.1а (сверху) показано изменение формы прогибов во времени в серединной поверхности линейной (слева) и нелинейной (справа) упругих пластинок, а на рис 41.1б – соответственно вязкоупругой пластинки при амплитуде стрелы прогиба в центре  $\alpha_0 = 0.05$  в соответствии с линейной (слева), нелинейной (справа) задачами. как видно, в этих случаях между линейной и нелинейной задачами получаются весьма близкие результаты. На рис 41.1 в отражено движение центральной точки нелинейной упругой (1) и вязкоупругой (2) пластинок:

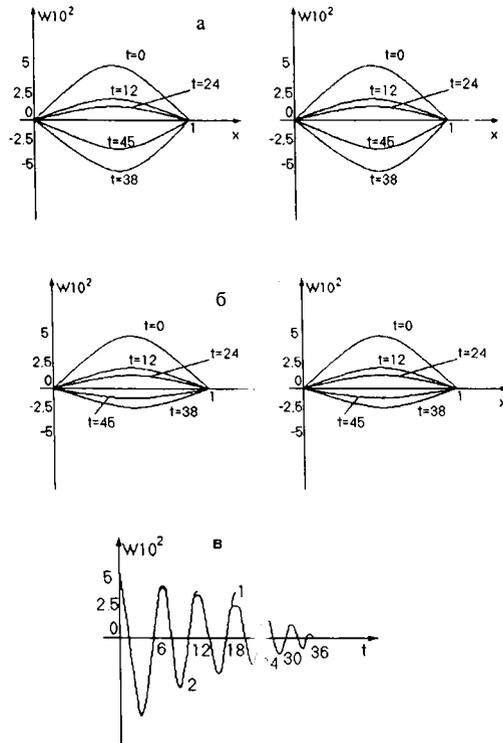


рис 41.1

Аналогические данные для цилиндрической панели с параметрами кривизны  $\lambda=10$  при исходной амплитуде прогиба в центре  $\alpha_0=2$  приведены на рис 41.2 (жирная линия на рис 41.2 в – движение центральной точки во времени по данным линейного, а сплошная нелинейного приближения). Как видно, расчет по линейной и нелинейной теориям дает существенно разные результаты. Частоты нелинейных колебаний приблизительно в два раза превышают частоту по данным линейного приближения. Это подтверждается наглядно на рис 41.2в. Судя по рис 41.1в и 41.2в учет вязкоупругих свойств материала конструкции приводит к затуханию амплитуд и незначительному сдвигу частоты.

Исследования характера сходимости методом Бубнова-Галеркина показывают, что для получения решения этих задач при  $t < 1.5$  с двумя верными знаками, а при  $t \geq 1.5$  с тремя верными знаками достаточно брать  $N = 5$ . Дальнейшее увеличение  $N$  в (41.4) не приводит к существенному уточнению решения.

Анализ результатов вычислений показывает, что расчет по геометрической нелинейной теории, в сравнении с линейной, дает заниженные результаты по амплитудам колебания. Разница около 27%.

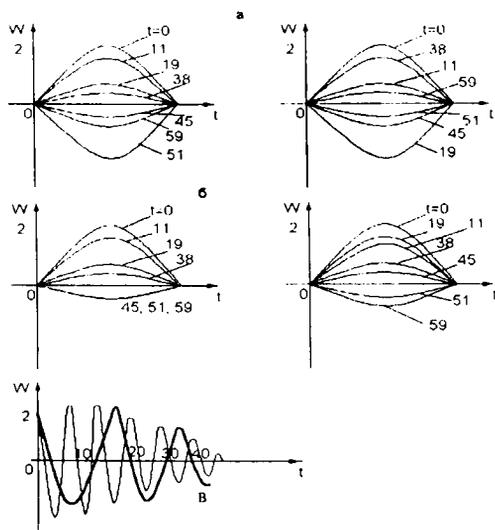
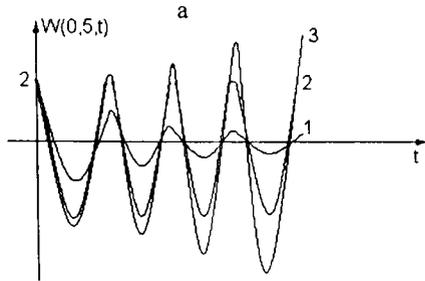


рис 41.2

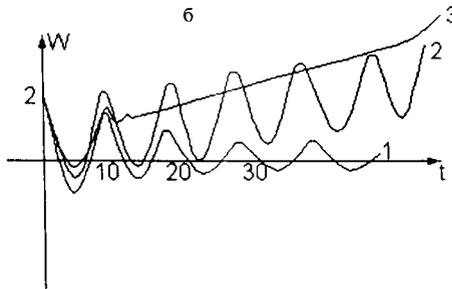
Сравнительный анализ результатов расчета с результатами полученные методом степенного ряда показали высокую точность предлагаемого метода, т.е. совпадение решения двух верных знаков после запятой.

Кривая характеризующая переходный процесс для функции прогиба  $W(t, 0, 5)$  удлинённых пластин во времени при  $\lambda = 0, \gamma = 0.5, \varepsilon = 0.1, \alpha = 0.25, \beta = 0.5$  и различных значений  $p$  без учета ( $\theta_0 = 0$ )

и с учетом ( $\theta_2 = 0.03$ ) аэродинамической нелинейности приведены на рис 41.3а и 41.3б.



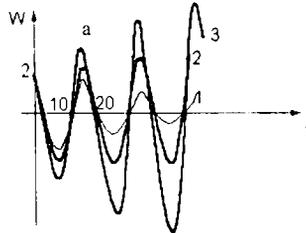
$\theta_2 = 0; p = 0; \gamma = 0$  (1);  $p = 0.51; \gamma = 0.5$  (2);  $p = 0.62; \gamma = 0.5$  (3)



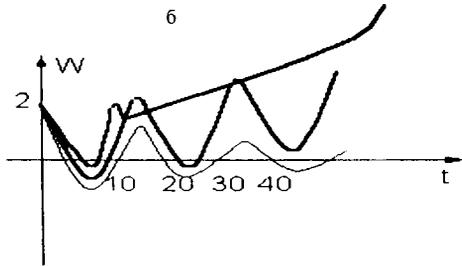
$\theta_2 = 0.03$

рис 41.3

Анализируя кривые, приведенные на этих рисунках, не трудно определить критическую скорость флаттера, с которой начинается быстрый рост прогиба во времени. Учет аэродинамической нелинейности см. рис 41.3б и 41.4б, в отличие от результатов представленных на рис 41.3а и 41.4а, приводит систему от колебательной неустойчивости к движению, представляющее собой монотонное возрастание отклонения от состояния равновесия, т.е. к дивергентной форме потери устойчивости.



$$\theta_2 = 0; p = 0; \gamma = 0 \quad (1), \quad p = 0.55; \gamma = 0.5 \quad (2), \quad p = 0.67; \gamma = 0.5 \quad (3)$$



$$\theta_2 = 0.03$$

рис 41.4

На основании результатов представленных на этих рисунках можно сказать, что система, устойчива при малых скорости напора, может потерять устойчивость при достаточно больших его значениях; тогда после сколь угодно малого возмущения начинается движение, все дальше увозящее систему от ставшего устойчивым состояния равновесия и из этого условия находятся  $P_{кр} = 0.62$  для пластин и  $P_{кр} = 0.67$  для оболочки.

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Какие динамические задачи теории вязкоупругости называются неконсервативными и чем они обусловлены?
2. Анизотропная модель Больцмана-Вольтерра полностью характеризуется заданием скольких ядер наследственности? А если учесть условия симметрии?
3. При каких случаях анизотропные материалы считаются диссипативно неоднородными? А при каких однородными? Приведите примеры.

4. Какие трудности возникают при решении начально-краевых задач (38.6) – (38.8) элементов конструкции ЛА?
5. Напишите общий вид системы ИДУ для нахождения обобщенных координат  $U_k(t)$  – ?
6. Напишите общий алгоритм для численного решения системы ИДУ (38.11) при начальных условиях (38.12)?
7. Какие вопросы являются важнейшими при решении задачи аэроустойчивости?
8. Напишите уравнение, описывающее неустановившийся флаттер наследственно-деформируемого крыла с учетом геометрической и аэродинамической нелинейности?
9. Как можно перейти от системы распределенных параметров к системам с конечным числом степеней свободы в задачах нелинейного флаттера?
10. Влияние каких реологических параметров существенно для критических скоростей флаттера?
11. Напишите уравнение, описывающее неустановившийся флаттер крыла с учетом физической и аэродинамической нелинейности.
12. Напишите общий вид нелинейной системы слабо-сингулярных обыкновенных ИДУ для нахождения обобщенных координат  $U_k(t)$  – ?
13. Каким методом находится критическая скорость флаттера?
14. Каково влияние учета физической нелинейности на значение критической скорости флаттера?
15. Напишите общий вид ИДУ, описывающего нелинейный флаттер гибких вязкоупругих удлиненных пластин и цилиндрических панелей?
16. Каково влияние учета аэродинамических нелинейностей на характер потери устойчивости крыла?

#### Литература:

1. Бадалов Ф.Б. «Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости». Ташкент, «Мехнат», 1987, 296 с.
2. Глушко В.Т., Долинина Н.Н., Розовский Н.И. «Устойчивость горных выработок». Киев "Наукова думка", 1973, 206 с.
3. Бадалов Ф.Б., Хужаяров А.Ю. «Об одном методе точного решения интегро-дифференциальных уравнений динамических задач

- линейной теории вязкоупругости». ДАН СССР. 1988 г., том 299, №1, с. 72-75
4. *Бадалов Ф.Б., Хужаяров А.Ю., Абдукаримов А.* «Численная реализация метода фундаментальных систем решения для интегродифференциальных уравнений динамических задач вязкоупругости на ЭВМ». ТГТУ, депопирован, УзНИИТИ, 1993, 39 с.
  5. *Бондарь Н.Г.* «Нелинейные автономные системы строительной механики». Москва, издательство «Литература по строительству» 1972, 127 с.
  6. *Бадалов Ф.Б., Тайлаков Н.И.* «Об одном подходе к численному решению нелинейных слабо-сингулярных интегродифференциальных уравнений с частными производными». Узбекский математический журнал, №4 от 1999 г., с. 15-20
  7. *Бадалов Ф.Б., Суюров А.М.* «Изгиб, устойчивость и динамика наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов из композитных материалов». Ташкент, типография Гаши АИ, 2000, 120 с.
  8. *Работнов Ю.И.* «Элементы наследственной механики твердых тел». Москва, «Наука», 1977, с. 120
  9. *Образцов И.Ф.* «Строительная механика летательных аппаратов». Москва, «Машиностроение», 1986, 536 с.
  10. *Бадалов Ф.Б.* «Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости». Ташкент, "Фан", 1980, 221 с.
  11. *Пановко Я.Г.* «Основы прикладной теории колебаний и удара». Москва, «Машиностроение», 1976, 320 с.
  12. *Ржаницын А.Р.* «Теория ползучести». М., Стройиздат, 1986. 418 с.
  13. *Кодатунов М.А.* «Ползучесть и релаксация». М., «Высшая школа», 1976, 276 с.
  14. *Протасов В.Д., Старухов В.Л., Кульков А.А.* «Проблема внедрения композитных материалов в конструкции авиационно-космической техники». «Механика композитных материалов», №6 от 1990 г., с. 1057-1063
  15. *Болотин В.В.* «Неконсервативные задачи упругой устойчивости». М., Физматгиз, 1961, 339 с.
  16. *Гроссман Е.П.* «Курс вибрации частей самолета». М., Оборонгиз, 1940, 311 с.

17. *Бадалов Ф.Б., Набиев А.А.* «Исследование одной нелинейной задачи классического флаттера наследственно-деформируемых систем». "Проблема механики" №3 2000 г.
18. *Бидерман В.Л.* «Прикладная теория механических колебаний». М. «Высшая школа», 1972, 412 с.
19. *Рашидов Т.Р., Раскозовский В.Т., Емельяненко В.* «Сейсмостойкость высотных сооружений». "Проблема механики", №5 1992 г.
20. *Бадалов Ф.Б., Ганиханов Ш.Ф., Шодманов Г.Ш., Набиев А.А., Мансуров М.* «Явление аэронеустойчивости в элементах конструкции летательных аппаратов». Тезисы докладов "Международная научно-техническая конференция "Мониторинг летательных аппаратов". Ташкент 29-31 мая 2000 г., с. 9-12
21. *F.B. Badalov, Sh.F.Ganihanov, M.M.Mansurov* «Research of non-linear oscillations of mechanics of hereditary-deformable system». Published the American institute of Aeronautics and Astronautics. A collection of Technical Papers of AIAA/ASCE/AHS/ASC Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibition. Atlanta, MO USA 3-6 april 2000. Volume 3, pp. 1717-1726
22. *Набиев А.* «Интегральный метод математического моделирования одной нелинейной задачи флаттера наследственно-деформируемых систем». Тезисы докладов международной научно-технической конференции "Мониторинг летательных аппаратов". Ташкент, 29-31 мая 2000 г., с. 53-54
23. *Бисплингофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л.* «Аэроупругость». М., издательство «Иностранная литература», 1958, 416 с.
24. *Бадалов Ф.Б., Холматов Т., Шодманов Г.* «Об одном обобщении метода Ньюмарка для решения интегро-дифференциальных уравнений динамических задач линейной теории вязкоупругости». ДАН Р., «Узбекистан», 1999, № 8.
25. *Бадалов Ф.Б., Шодманов Г.* «Математик моделлар ва мухандислик масалаларини сонли ечиш усуллари». «Фан», 2000, 274 с.
26. *Коллутц Л.* Задачи на собственное значение. Москва, «Наука», 1968, 503 с.
27. *Григоренко Я.П., Беспалова Е.И., Китойгородский А.Б. и др.* «Свободные колебания элементов оболочечных конструкций». Киев. «Наукова думка», 1986, 171 с.

28. *Денисов Г.Г., Повиков В.В.* «О влиянии внутреннего трения на устойчивость одномерных упругих систем». Сб. «Динамика систем», издательство Горьковского ун-та. 1975
29. Отчет о научно-исследовательской работе «*Теоретические основы исследования проблемы безопасности полета наследственно-деформируемых летательных аппаратов*» Ташкент 2000 гос.рег. №01.200010094. с. 24.
30. *Ефимов И.И.* «Об одной аэродинамической гипотезе для решения задачи аэроупругости крыла ПМ». 1992. т.28 №4, с 63-70
31. *Филиппов А.П.* «Колебания деформируемых систем» М. Машиностроение 1970. с 733.
32. *Михлин С.Г.* «Вариационные методы в математической физике» М., «Наука». 1970
33. *Григоренко Я.М. Бесполова Е.И. Китойгородский А.Б.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций» Киев «Наукова думка» с.171
34. *Абдурахмонов С.К.* «Дивергенция наследственно-деформируемого крыла с переменными характеристиками из композитных материалов». Труды конференция метода математического моделирования инженерных задач. Ташкент ТашИАИ 2001 С. 62-65
35. *Филиппов А.П.* «Комбинация механических систем», Киев., Наукова думка, 1965-71с.
36. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ. 20, №6 1956.
37. *Бадалов Ф.Б. Ганиханов Ш.Ф.* «Вибрация наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов» Ташкент, ТашИАИ 2000, 141с.
38. *Гроссман Е.П.* «Флаттер». Труды ЦАГИ №284. 1937
39. *Келдыш М.В., Лаврентов М.А.* «К теории колебания крыла» Тех. Заметка ЦАГИ, №45. 1935
40. *Бадалов Ф.Б., Ганиханов Ш.Ф., Суяров А.М., Абдикаримов А. Шодмонов Г.* «К решению интегро-дифференциальных уравнение

неконсервативных динамических задач элементов конструкции ЛА из диссипативно неоднородных композитных материалов». Труды VI – республиканской научно-практической конференции «Передовые технологии и методы в создании и эксплуатации авиакосмической техники» Ташкент 2002. с. 7-8.